Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA DIMENSIÓN INDUCTIVA PEQUEÑA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
MABEL PRISCILA MARTÍNEZ SANDOVAL

DIRECTORES DE TESIS
DR. DAVID HERRERA CARRASCO
DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO

PUEBLA, PUE. 21 DE NOVIEMBRE DE 2018

Esta tesis quiero dedicarla
con todo mi corazón
a las personas más importantes de mi vida,
que con su arduo esmero, dedicación y sacrificio
han hecho de mí una gran persona
que ha sabido superarse día a día.

A mis queridos padres:
Matilde Sandoval Pérez y Carlos Martínez Chapuz.

Y a mi querida hermana:
Carla Alejandra Martínez Sandoval.

Agradecimientos

Sin duda, este es un momento muy importante en mi vida. Es aquí donde me tomo un pequeño espacio, muy preciado para mí, para plasmar palabras que salen de mi corazón. Y es que debo agradecer tanto a la vida que hoy tengo y a las grandes personas que me rodean.

Antes que nada, quiero agradecerles a las personas que me han dado la vida, que me han protegido y cuidado, aquellas que me han dado su apoyo y comprensión, que han hecho todo lo que han podido para darme todo lo mejor pero sobre todo, aquellas personas que me han brindado todo su amor.

A ti mamá, que has estado cada día de tu vida a mi lado guiándome y apoyándome en mis decisiones, dándome tu mano cada vez que caigo y ayudarme a levantarme, a escucharme siempre y darme esas palabras que alientan mi alma. Eres mi sostén para seguir adelante, te agradezco por todo lo que has hecho por mí y sigues haciendo. ¡Te amo, mami!. A ti papá, por haberme enseñado que hay que hacer sacrificios para obtener grandes resultados, tu tiempo en el trabajo es una entrega que sin duda valoro y aprecio mucho desde lo muy profundo de mi corazón, por hacerme fuerte y decirme que yo puedo. ¡Te quiero, cuate!.

A ti Carla, por ser mi amiga y compartirme tus vivencias, por estar siempre a mi lado y acompañarme en cada paso de mi vida, porque tu presencia junto a mí es indispensable para seguir creciendo. Recuerda que siempre estaré para ti. ¡Te quiero, ratón!

Agradezco a mis directores de tesis, el Dr. Fernando Macías Romero y el Dr. David Herrera Carrasco, por brindarme su confianza y permitirme trabajar con ustedes esta tesis, por brindarme su apoyo y paciencia, así como también, por brindarme un pequeño y acogedor espacio en su lugar de trabajo.

A mis sinodales, el M.C. Antonio De Jesús Libreros López, el Dr. Agustín Contreras Carreto y el Dr. Alexander Bykov, por su gran disposición a revisar este trabajo, por sus observaciones y sus valiosas sugerencias.

A ti Gerardo, por permitirme ser tu amiga, por estar conmigo y apoyarme incondicionalmente, por despejar mis dudas académicas y sobre todo, por compartir tu valioso tiempo a mi lado, que valoro y aprecio demasiado. ¡Gracias!. Eres una persona increíble, me alegra mucho haberte conocido. Alguien como tú, merece un espacio en mi corazón. Espero contar contigo siempre.

A ti Andrés, por brindarme tu amistad desde el día en que nos conocimos, eres de los pocos amigos que tengo y aún conservo. Te has convertido en una persona muy especial para mí. Gracias por darme todo tu apoyo y por compartir lindos momentos a mi lado que sin duda atesoraré.

A cada uno de mis profesores, por transmitirme el gusto por las matemáticas, por enseñarme su trabajo y orientarme a trabajar constantemente con dedicación y entusiasmo.

A Gerardo Hernández por haberme corregido la ortografía de mi tesis y a todos mis compañeros con los que conviví en este trayecto tan importante, porque tuve la oportunidad de compartir alegres momentos. Los recordaré a cada uno de ustedes.

A mi tía Juve por brindarme todo su apoyo, a mi mamá Paz y a todas aquellas personas que creyeron en mí y me brindaron todo su apoyo.

Finalmente, agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por abrirme las puertas y darme un lugar en su casa que ahora también considero como mía. Esta es un gran oportunidad que me has dado para crecer y salir adelante. ¡Muchas gracias!.

Introducción

La dimensión inductiva pequeña es el tema principal que abordaremos en este trabajo. Hablando en términos históricos a esta dimensión también suele llamársele dimensión Menger-Urysohn pues fue introducida en 1922 por el matemático soviético Pável Samuílovich Urysohn y en 1923 por el matemático austriaco Karl Menger. Tanto Urysohn como Menger fueron inspirados por el concepto de curva, véase [9, pág. 20]. Por esta razón, vemos involucradas a las llamadas curvas que, en términos topológicos actuales, son aquellos continuos que tienen dimensión uno. Asimismo, vemos algunos de los ejemplos más significativos de espacios topológicos cuya dimensión es uno.

La presente tesis consta de tres capítulos. En el primero se definen algunos conceptos básicos de topología general como el de espacio topológico, base, numerabilidad, entre otros. Además, se presentan algunos resultados que son de gran importancia como la relación entre espacios métricos y espacios separables, regulares y normales, que son útiles para la demostración de los teoremas posteriores a este capítulo.

En el segundo capítulo presentamos la definición de dimensión inductiva pequeña, además de resultados importantes como el que esta dimensión es un invariante topológico y el teorema de monotonía. También, incluimos una sección dedicada a los espacios de dimensión cero; en esta se muestra, por ejemplo, que estos espacios son aquellos que tienen una base de subconjuntos abiertos y cerrados. Otra sección que vemos y que es indispensable, es la relacionada con la separación de subconjuntos, puesto que en esta mostramos el primer y segundo teorema de separación para dimensión cero, véase 2.24 y 2.26 y el teorema de extensión para dimensión cero, véase 2.35. Finalmente, la dimensión de uniones y la dimensión de productos son estudiadas en las últimas dos secciones de este capítulo; en estas secciones vemos, entre otros resultados, teoremas sobresalientes como el teorema de la suma para dimensión n, véase 2.42 y el teorema del producto para dimensión n, véase 2.50, así como estos mismos teoremas para dimensión cero.

El tercer y último capítulo está dedicado a ejemplificar el concepto de dimensión, dando mayor importancia a los espacios de dimensión uno. En la primera sección se muestran ejemplos de algunos espacios y continuos que tienen dimensión uno como lo son: el intervalo, la recta real, las gráficas finitas, las dendritas, entre otros. La segunda sección consta de ejemplos de espacios cuya dimensión es mayor a uno, tales como la 2-celda, $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}^2$ y las generalizaciones de estos tres espacios para dimensión n mayor a dos.

Es importante mencionar que el segundo capítulo de esta tesis está basado principalmente en el capítulo 18 del libro “Aspects of topology” de Charles C. Christenson y William L.Voxman, segunda edición, en el que se desarrolla la teoría de la dimensión. Además, es importante mencionar que los teoremas más sobresalientes relacionados con la dimensión inductiva pequeña que se presentan están restringidos a espacios métricos separables.

Mabel Priscila Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
21 de noviembre de 2018

Índice general

Introducción I

1. Preliminares 1

2. Dimensión inductiva pequeña 17

2.1. Dimensión cero 20

2.2. Teoremas de separación y extensión para dimensión cero . . . 23

2.3. Dimensión de uniones 32

2.4. Dimensión del espacio producto 39

3. Ejemplos del concepto de dimensión 43

3.1. Espacios de dimensión uno 43

3.2. Espacios de dimensión mayor a uno 52

Conclusión 56

Bibliografía 59

Índice alfabético 61

Introducción a la teoría de la dimensión inductiva pequeña

Mabel Priscila Martínez Sandoval

21 de noviembre de 2018

Capítulo 1

Preliminares

Al comenzar con este trabajo es importante mencionar algunos conceptos que son necesarios para explicar las demostraciones que requieren de ellos.

Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. La unión de $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a algún conjunto que forma parte de la familia $\mathcal{A}$ denotada por $\bigcup \mathcal{A}$. Es decir,

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x\colon \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}.$$

Denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, por $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales, por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales, por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros y por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales.

Cuando hayamos definido el concepto de topología, cabe mencionar que cuando tomemos un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se tomará con la topología inducida.

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío.*

(a) Una **topología** *para X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$,

(iii) si $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

(b) Si $\mathcal{T}$ es una topología para X, a la pareja $(X, \mathcal{T})$ le llamamos **espacio topológico**, *y cada elemento que pertenece a $\mathcal{T}$ recibe el nombre*

de subconjunto **abierto** *de X. Cuando no sea necesario especificar la topología decimos simplemente que X es un espacio topológico.*

Como los elementos de la topología los llamamos conjuntos abiertos, podemos interpretar las condiciones de ser topología a que $\emptyset$ y X son abiertos, la intersección finita de abiertos es un abierto y que la unión arbitraria de abiertos es un abierto.

Definición 1.2. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subset X$. La* **topología relativa** *$\mathcal{T}_Y$ sobre Y es $\{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$. Decimos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un* **subespacio** *de $(X, \mathcal{T})$.*

Definición 1.3. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un subconjunto* **cerrado** *de X si $X - A$ es un subconjunto abierto de X.*

Por cómo hemos definido los conjuntos cerrados y por las propiedades de los conjuntos abiertos podemos ver que $\emptyset$ y X son cerrados, la unión finita de cerrados es un cerrado y la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.*

(*a*) *El* ***interior*** *de A en X, denotado por $\mathrm{int}_X(A)$, es $\mathrm{int}_X(A) = \bigcup\{U \subset X : U \subset A \text{ y } U \text{ es subconjunto abierto de } X\}$.*

(*b*) *La* ***cerradura*** *de A en X, denotado por $\mathrm{cl}_X(A)$ o $\overline{A}$, es $\mathrm{cl}_X(A) = \bigcap\{F \subset X : A \subset F \text{ y } F \text{ es subconjunto cerrado de } X\}$.*

(*c*) *La* ***frontera*** *de A en X, denotado por $\mathrm{fr}_X(A)$, es $\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A)$.*

Notemos que el interior de un conjunto es un conjunto abierto, la cerradura de un conjunto es cerrado y que la frontera es un cerrado. Más aún, el interior es el abierto más grande contenido en el conjunto y la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto.

Lema 1.5. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces, $\mathrm{cl}_X(A) = X - \mathrm{int}_X(X - A)$.*

Demostración. Probemos primero que $\mathrm{cl}_X(A) \subset X - \mathrm{int}_X(X - A)$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(A)$ y supongamos que $x \notin X - \mathrm{int}_X(X - A)$. Entonces, $x \in \mathrm{int}_X(X - A)$. Luego, existe U subconjunto abierto de X tal que $x \in U \subset X - A$. Como $X - U$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subset X - U$, entonces $x \in X - U$, porque $x \in \text{cl}_X(A)$. Lo cual es una contradicción dado que $x \in U$. Por tanto, $\text{cl}_X(A) \subset X - \text{int}_X(X - A)$.

Ahora, probemos la otra contención. Sea $x \in X - \text{int}_X(X - A)$. Entonces, $x \notin \text{int}_X(X - A)$. Para ver que $x \in \text{cl}_X(A)$, sea C un subconjunto cerrado de X tal que $A \subset C$ y veamos que $x \in C$. Supongamos que $x \notin C$. Entonces, $x \in X - C$. Como $X - C$ es un subconjunto abierto de X tal que $X - C \subset X - A$, tenemos que $X - C \subset \text{int}_X(X - A)$. Así, $x \in \text{int}_X(X - A)$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $x \in A$. Por ende, $x \in \text{cl}_X(A)$. Por lo tanto, $X - \text{int}_X(X - A) \subset \text{cl}_X(A)$. Concluimos que $\text{cl}_X(A) = X - \text{int}_X(X - A)$. $\square$

Del lema 1.5, se puede observar que la cerradura de un conjunto y el interior de su complemento son ajenos y que la unión de estos es todo el espacio.

Teorema 1.6. *Sean X un espacio topológico, Y un subespacio abierto de X y A subconjunto de X, entonces se cumplen las siguientes igualdades.*

(a) $\text{cl}_X(A) \cap Y = \text{cl}_Y(A \cap Y)$,

(b) $\text{fr}_X(A) \cap Y = \text{fr}_Y(A \cap Y)$.

Demostración. Probemos *(a)*. Veamos primero que $\text{cl}_X(A) \cap Y \subset \text{cl}_Y(A \cap Y)$. Sea $y \in \text{cl}_X(A) \cap Y$. Si $y \in A$, entonces $y \in A \cap Y$. Así, $y \in \text{cl}_Y(A \cap Y)$. Supongamos que $y \in X - A$. Supongamos por el contrario, $y \notin \text{cl}_Y(A \cap Y)$. Entonces, $y \in \text{int}_Y(Y - (A \cap Y))$. Lo cual implica que existe U subconjunto abierto de Y tal que $y \in U \subset Y - (A \cap Y) = (X - A) \cap Y$. Como Y es subconjunto abierto de X, tenemos que U es subconjunto abierto de X. Además, $y \in U \subset X - A$. Por tanto, $y \in \text{int}_X(X - A)$, lo cual contradice que $y \in \text{cl}_X(A)$. Concluimos que $\text{cl}_X(A) \cap Y \subset \text{cl}_Y(A \cap Y)$.

Ahora, veamos que $\text{cl}_Y(A \cap Y) \subset \text{cl}_X(A) \cap Y$. Notemos que $\text{cl}_X(A) \cap Y$ es un subconjunto cerrado de Y. Como $A \subset \text{cl}_X(A)$, entonces $A \cap Y \subset \text{cl}_X(A) \cap Y$. Así, $\text{cl}_Y(A \cap Y) \subset \text{cl}_X(A) \cap Y$. Por lo tanto, $\text{cl}_X(A) \cap Y = \text{cl}_Y(A \cap Y)$.

Mostremos *(b)*.

$$\begin{aligned}
\text{fr}_X(A) \cap Y &= (\text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A)) \cap Y \\
&= (\text{cl}_X(A) \cap Y) \cap (\text{cl}_X(X - A) \cap Y) \\
&= \text{cl}_Y(A \cap Y) \cap \text{cl}_Y((X - A) \cap Y).
\end{aligned}$$

Afirmación $(X - A) \cap Y = Y - (A \cap Y)$. Probemos primero que $(X - A) \cap Y \subset Y - (A \cap Y)$. Sea $x \in (X - A) \cap Y$. Entonces, $x \in X - A$ y $x \in Y$. Luego,

$x \in X$ y $x \notin A$. Como $x \in X \cap Y$, $x \in Y$. Así, $x \in Y$ y $x \notin A$. En consecuencia, $x \in Y$ y $x \notin A \cap Y$. Por tanto, $x \in (Y - A \cap Y)$. Concluimos que $(X - A) \cap Y \subset Y - (A \cap Y)$. Ahora, probemos que $Y - (A \cap Y) \subset (X - A) \cap Y$. Sea $x \in Y - (A \cap Y)$. Entonces, $x \in Y$ y $x \notin (A \cap Y)$. Como $A \cap Y \subset A$, $x \notin A$. Así, $x \in X$ y $x \notin A$ y $x \in Y$. Por tanto, $x \in (X - A)$ y $x \in Y$. En con secuencia, $x \in (X - A) \cap Y$. Se concluye que $Y - (A \cap Y) \subset (X - A) \cap Y$. Por lo tanto, $(X - A) \cap Y = Y - (A \cap Y)$. De la afirmación, tenemos que $\mathrm{fr}_X(A) \cap Y = \mathrm{cl}_Y(A \cap Y) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - (A \cap Y))$. Por tanto, $\mathrm{fr}_X(A) \cap Y = \mathrm{fr}_Y(A \cap Y)$. □

Lema 1.7. *Sea X un espacio topológico. Si Y un subespacio de X y A subconjunto de X, entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

(a) $\mathrm{fr}_Y(A \cap Y) \subset \mathrm{fr}_X(A)$,

(b) Si $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{int}_X(Y)$, *entonces* $\mathrm{fr}_Y(A) = \mathrm{fr}_X(A)$.

Demostración. Probemos *(a)*. Sabemos que $\mathrm{fr}_Y(A \cap Y) = \mathrm{cl}_Y(A \cap Y) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A)$. Notemos que $\mathrm{cl}_Y(A \cap Y) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A) \subset \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A)$. Además, como $Y \subset X$, se tiene que $\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) \subset \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A) = \mathrm{fr}_X(A)$.

Ahora, probemos *(b)*. Supongamos que $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{int}_X(Y)$. Notemos que $\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A)$ y $(X - A) = (X - Y) \cup (Y - A)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fr}_X(A) &= \mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{cl}_X((X - Y) \cup (Y - A))) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{cl}_X(X - Y) \cup \mathrm{cl}_X(Y - A)) \\
&= (\mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{cl}_X(X - Y)) \cup (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A)) \\
&= (\mathrm{cl}_X(A) \cap (X - \mathrm{int}_X(Y))) \cup (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A))
\end{aligned}
$$

Como $\mathrm{cl}_X(A) \cap (X - \mathrm{int}_X(Y)) = \emptyset$, se tiene que $\mathrm{fr}_X(A) = (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A)) = Y \cap \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A)$. Así, $\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{cl}_Y(A) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A) = \mathrm{fr}_Y(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{fr}_Y(A) = \mathrm{fr}_X(A)$. Esto concluye la prueba del lema. □

Definición 1.8. *Sean X y Y espacios topológicos.*

(a) Una función $f\colon X \to Y$ es **continua** *si para cada U subconjunto abierto de Y, se cumple que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X.*

(b) Un **homeomorfismo** *es una función $h\colon X \to Y$ continua y biyectiva tal que $h^{-1}\colon Y \to X$ es también continua. Decimos que X es* **homeomorfo** *a Y si existe un homeomorfismo de X sobre Y.*

Observación 1.9. *Sean X y Y espacios topológicos. Entonces, $f\colon X \to Y$ es una función continua si y solo si para cada F subconjunto cerrado de Y, se cumple que $f^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de X.*

La prueba de la observación 1.9 es fácil hacerla con propiedades de preimagen de una función y usando la definición de subconjunto cerrado.

Definición 1.10. *Sea X un espacio topológico. Decimos que un* **invariante topológico** *es una propiedad $\mathcal{P}$ de X si todo espacio topológico homeomorfo a X también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Definición 1.11. *Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función $f\colon X \to Y$ es* **abierta** *(cerrada) si f manda subconjuntos abiertos (cerrados) de X a subconjuntos abiertos (cerrados) de Y, es decir, si para cada A subconjunto abierto (cerrado) de X, $f(A)$ es subconjuntos abierto (cerrado) de Y.*

Teorema 1.12. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces*

(a) $f\colon X \to Y$ es una función abierta,

(b) $f\colon X \to Y$ es una función cerrada.

Demostración. Probemos *(a)*. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo. Entonces, $f^{-1}\colon Y \to X$ es una función continua. Lo cual implica que para cada U subconjunto abierto de X, tenemos que $(f^{-1})^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de Y. Por otra parte, sabemos que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. Por tanto $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y. Por lo tanto, $f\colon X \to Y$ es una función abierta.

Ahora, probemos *(b)*. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo. Sea F un subconjunto cerrado de X. Entonces, $X - F$ es un subconjunto abierto de X. Por el inciso *(a)*, $f(X - F)$ es un subconjunto abierto de Y. Luego, $Y - f(X - F)$ es un subconjunto cerrado de Y. Como $f(F) = Y - f(X - F)$, concluimos que $f(F)$ es un subconjunto cerrado de Y. Por lo tanto, $f\colon X \to Y$ es una función cerrada. □

Teorema 1.13. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo y $A \subset X$, entonces*

(a) $f(\mathrm{cl}_X(A)) = \mathrm{cl}_Y(f(A))$,

(b) $f(\mathrm{fr}_X(A)) = \mathrm{fr}_Y(f(A))$.

Demostración. Probemos *(a)*. Probemos primero que $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$. Supongamos que $A \subset X$. Sean $x \in \mathrm{cl}_X(A)$ y F un subconjunto cerrado de Y tal que $f(A) \subset F$. Notemos que $f^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subset f^{-1}(F)$. Como $\mathrm{cl}_X(A) \subset f^{-1}(F)$, $x \in f^{-1}(F)$. Así, $f(x) \in f(f^{-1}(F)) = F$. Por tanto, $f(x) \in \mathrm{cl}_Y(f(A))$. Por lo tanto, $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$.

Ahora, probemos que $\mathrm{cl}_Y(f(A)) \subset f(\mathrm{cl}_X(A))$. Notemos que $A \subset \mathrm{cl}_X(A)$, lo cual implica que $f(A) \subset f(\mathrm{cl}_X(A))$. Como f es una función cerrada, tenemos que $f(\mathrm{cl}_X(A))$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a $f(A)$. Por consiguiente $\mathrm{cl}_Y(f(A)) \subset f(\mathrm{cl}_X(A))$. Por lo tanto, $f(\mathrm{cl}_X(A)) = \mathrm{cl}_Y(f(A))$.

Probemos *(b)*. Usando *(a)* de este teorema y que f es biyectiva se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f(\mathrm{fr}_X(A)) &= f(\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A)) \\ &= f(\mathrm{cl}_X(A)) \cap f(\mathrm{cl}_X(X - A) \\ &= \mathrm{cl}_Y(f(A)) \cap \mathrm{cl}_Y(f(X - A)) \\ &= \mathrm{cl}_Y(f(A)) \cap cl_Y(Y - f(A)) \\ &= \mathrm{fr}_Y(f(A)). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

Definición 1.14. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ es una* **base** *para $\mathcal{T}$ si para cada $x \in X$ y U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$. En otras palabras, cada $U \in \mathcal{T}$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Nota 1.15. *Si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces se puede obtener la topología más pequeña para X que contiene a $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.16. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces, $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología para X si y solo si*

(a) $X = \bigcup \mathcal{B}$,

(b) *Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ para X. Probemos primero *(a)*. Para ello, probemos que $X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Sea $x \in X$ y como $X \in \mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset X$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{B}$. Por tanto, $X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Es evidente que $\bigcup \mathcal{B} \subset X$. Por lo tanto, $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Enseguida, probemos *(b)*. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, se tiene que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Luego, como $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

Ahora, supongamos $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X tal que cumple *(a)* y *(b)*. Sea

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \colon \text{existe } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \text{ tal que } A = \bigcup \mathcal{A}\}.$$

Probemos que $\mathcal{T}$ es una topología para X.

(i) Veamos que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Notemos que $\emptyset \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$. Además, tenemos por *(a)* que $X = \bigcup \mathcal{B}$ y sabemos que $\emptyset = \bigcup \emptyset$, lo cual implica que, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Entonces, existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$ tales que $A_1 = \bigcup \mathcal{A}_1$ y $A_2 = \bigcup \mathcal{A}_2$. Sea $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \colon$ existen $B_1 \in \mathcal{A}_1$ y $B_2 \in \mathcal{A}_2$ tales que $B \subset B_1 \cap B_2\}$. Probemos que $A_1 \cap A_2 = \bigcup \mathcal{A}$. Veamos primero que $A_1 \cap A_2 \subset \bigcup \mathcal{A}$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$. Entonces, existen $B_1 \in \mathcal{A}_1$ y $B_2 \in \mathcal{A}_2$ tales que $x \in B_1 \cap B_2$. Además, por *(b)* existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. Así, $B \in \mathcal{A}$ y por tanto, $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Ahora, veamos que $\bigcup \mathcal{A} \subset A_1 \cap A_2$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Entonces, existen $B \in \mathcal{B}$ y $B_1 \in \mathcal{A}_1, B_2 \in \mathcal{A}_2$ tales que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. Como $B_1 \subset A_1$ y $B_2 \subset A_2$, entonces, $x \in A_1 \cap A_2$. Por lo tanto, $A_1 \cap A_2 = \bigcup \mathcal{A}$. De esta manera concluimos que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Por último, consideremos una colección $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ de elementos de $\mathcal{T}$. Tenemos que para cada $i \in I$, $A_i \in \mathcal{T}$, y por consiguiente, existe $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}$ tal que $A_i = \bigcup \mathcal{A}_i$. Sea $\mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{A}_i \colon i \in I\}$. Probemos que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$, para esto bastará probar que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{A}$. Veamos primero que $\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup \mathcal{A}$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{F}$. Entonces, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{A}_i \colon i \in I\}$, existe $i \in I$ tal que $A \in \mathcal{A}_i$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{A}_i$. Es decir, $x \in A_i$. Por tanto, $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Ahora, probemos que $\bigcup \mathcal{A} \subset \bigcup \mathcal{F}$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Entonces, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como $A_i = \bigcup \mathcal{A}_i$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{A}_i$. Por consiguiente, existe $A \in \mathcal{A}_i$ tal que $x \in A$. Observemos que $A \in \bigcup \{\mathcal{A}_i \colon i \in I\}$. Es decir, $A \in \mathcal{F}$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{F}$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Concluimos que $\mathcal{T}$ es una topología para X. Finalmente, por como definimos la topología $\mathcal{T}$ concluimos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$. $\square$

Definición 1.17. *Un conjunto X es* **finito** *si es vacío o existe una función biyectiva $f \colon X \to \{1, \ldots, n\}$ para algún número natural n. En el primer caso,* *decimos que la* **cardinalidad** *de X es cero y en el otro caso, decimos que la cardinalidad de X es n. La cardinalidad del conjunto X la denotaremos por $card(X)$.*

Definición 1.18. *Un conjunto X es* **infinito** *si no es finito. Decimos que X es* **numerable** *si existe $f\colon X \to \mathbb{N}$ función biyectiva.*

Definición 1.19. *Un conjunto X es* **a lo más numerable** *si es finito o numerable. Un conjunto X que no es a lo más numerable se dice que es* **no numerable**.

A continuación, daremos un teorema que nos dice que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable donde en la prueba se hace uso de un ejemplo particular.

Teorema 1.20. *Si X y Y son conjuntos numerables, entonces $X \times Y$ es numerable.*

Demostración. Empecemos probando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Sea

$$f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \longmapsto 2^m \cdot 3^n$$

Probemos que f es inyectiva. Como 2 y 3 son números primos, entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$, lo cual implica que $m = p$ y $n = q$. Así, f es inyectiva. Por tanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Ahora, si X y Y son conjuntos numerables, entonces existen $g\colon X \to \mathbb{N}$ y $h\colon Y \to \mathbb{N}$ funciones biyectivas.

Definamos a

$$\varphi\colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(x, y) \longmapsto (g(x), h(y))$$

Entonces, $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Notemos que φ es una función biyectiva porque g y h son biyectivas. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, concluimos que $X \times Y$ es numerable. $\square$

Por el teorema 1.20 y con ayuda de la inducción matemática, tendríamos que el producto finito de conjuntos numerables es numerable.

Ejemplo 1.21. *(a) $\mathbb{Z}$ es numerable porque la función $f\colon \mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{Z}$ definida por*

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,}\\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

es biyectiva.

(b) Por el teorema 1.20, $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ es numerable y como la función $g\colon \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\to\mathbb{Q}$ definida por $g(p,q)=\frac{p}{q}$ es sobreyectiva, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Lema 1.22. *[8, Lema 2.8; pág. 13] Sea X un espacio topológico. Si X tiene una base numerable, entonces para toda base $\mathcal{B}$ de X, existe $\mathcal{B}_0$ subfamilia numerable de $\mathcal{B}$ que también es base de X.*

Definición 1.23. *(a) Sean X un conjunto no vacío y $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ una función. Decimos que d es una* **métrica** *de X, si para cada $x,y,z\in\mathbb{R}$, d cumple con las siguientes propiedades:*

1. $d(x,y)\geq 0$,
2. $d(x,y)=0$ *si y solo si* $x=y$,
3. $d(x,y)=d(y,x)$,
4. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

(b) Si d es una métrica de X, a la pareja (X,d) le llamamos **espacio métrico***. Cuando no sea necesario especificar la métrica, decimos simplemente que X es un espacio métrico.*

En la definición 1.23 no es necesario escribir la primera propiedad ya que de las siguientes se puede deducir. Solo se anexa para recordar que las métricas (distancias) no son negativas.

Definición 1.24. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una* **bola abierta** *con centro x y radio $r\geq 0$ es el conjunto $B(x,r)=\{y\in X\colon d(x,y)<r\}$.*

Teorema 1.25. *Si X es un espacio métrico, entonces la colección de todas las bolas abiertas es una base para alguna topología para X.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las bolas abiertas de X. Entonces, es inmediato que se cumple *(a)* del teorema 1.16. Ahora, probemos *(b)* del teorema 1.16. Sean $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2) \in \mathcal{B}$ y $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Consideremos $\delta_1 = r_1 - d(x, x_1) > 0$ y $\delta_2 = r_2 - d(x, x_2) > 0$. Entonces, $B(x, \delta_1) \subset B(x_1, r_1)$ y $B(x, \delta_2) \subset B(x_2, r_2)$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. De este modo, $B(x, \delta) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Esto prueba que se cumple *(b)* del teorema 1.16. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología para X. $\square$

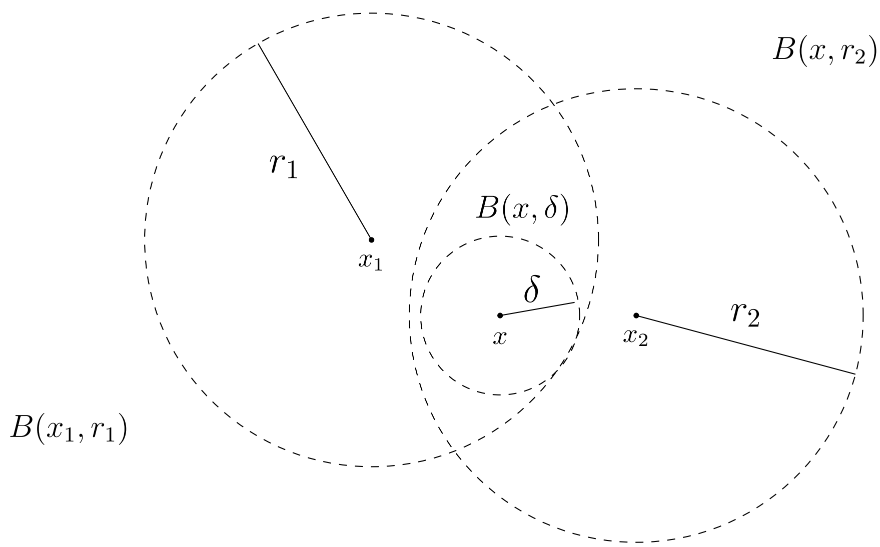


Figura 1.1: Representación intuitiva de la prueba del Teorema 1.25

Nota 1.26. *Si d es una métrica de X, entonces el teorema 1.25 establece que el conjunto $\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup \mathcal{E} \colon \mathcal{E}$ es una colección de bolas abiertas$\}$ es una topología para X. A esta topología la llamaremos* **topología inducida** *por la métrica d.*

De la nota anterior, podemos observar lo siguiente:

Observación 1.27. *Toda bola abierta de X es un conjunto abierto de $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Teorema 1.28. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $\mathcal{T}_d$ la topología inducida por la métrica d. Entonces, A es un subconjunto abierto en $\mathcal{T}_d$ si y solo si para cada $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto abierto en $\mathcal{T}_d$. Sean $x \in X$ y $A \subset X$ con $x \in A$. Como A es abierto de X, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$.

Ahora, supongamos que para cada $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Luego, de la observación 1.27, tenemos que $B(x,r)$ es un subconjunto abierto de $(X, \mathcal{T}_d)$, además $A \subset X$, entonces A es subconjunto abierto en $\mathcal{T}_d$. $\square$

Teorema 1.29. *Sean X un espacio métrico $F \subset X$. Entonces, $x \in \mathrm{cl}_X(F)$ si y solo si para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(F)$. Supongamos que existe $r_0 > 0$ tal que $B(x,r_0) \cap F = \emptyset$. Así, $B(x,r_0) \subset X - F$. Luego, $x \in \mathrm{int}_X(X - F)$, lo cual contradice el lema 1.5. Por tanto, para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$. Supongamos que $x \notin \mathrm{cl}_X(F)$. Entonces, $x \in X - \mathrm{cl}_X(F)$. Como $X - \mathrm{cl}_X(F)$ es un conjunto abierto de X, por el teorema 1.28, $B(x,r_0) \subset X - \mathrm{cl}_X(F)$, para algún $r_0 > 0$. Dado que $X - \mathrm{cl}_X(F) \subset X - F$, se tiene que $B(x,r_0) \subset X - F$, o bien, $B(x,r_0) \cap F = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}_X(F)$. $\square$

Definición 1.30. *Sea X un espacio topológico. Decimos que D es un subconjunto* **denso** *en X si para todo U subconjunto abierto de X no vacío, $U \cap D \neq \emptyset$. Decimos que X es* **separable** *si existe D subconjunto denso en X numerable.*

Observación 1.31. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto D es denso en X si y solo si $\mathrm{cl}_X(D) = X$.*

Ejemplo 1.32 ($\mathbb{Q}$ **es denso en** $\mathbb{R}$)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces, $b - a > 0$. Aplicando la propiedad arquimediana tenemos que, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(b-a)$. Por consiguiente, $na + 1 < nb$.

Por otra parte, si tomamos a m como la parte entera de na, entonces $m \leq na < m + 1$, lo cual implica que $na < m + 1 \leq na + 1 < nb$. Así, dividiendo entre n la ecuación anterior tenemos que $a < \frac{m+1}{n} < b$ con $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, se concluye el teorema. $\square$

Nota 1.33. *También se puede probar que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ de manera similar al ejemplo 1.32, procediendo como en la prueba para cada coordenada.*

Definición 1.34. *Un espacio topológico X es* **segundo numerable** *si X tiene una base numerable.*

Recordemos que la **métrica euclidiana** de $\mathbb{R}^n$ es la métrica d tal que para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots . y_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{1=n}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ejemplo 1.35. *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B(\mathbf{q}, r) \colon \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$ una base. Notemos que los elementos de $\mathcal{B}$ son bolas abiertas. Consideremos a

$$f \colon \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$(\mathbf{q}, r) \longmapsto B(\mathbf{q}, r).$$

Notemos que f es una función biyectiva. Como $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ es numerable, $\mathcal{B}$ también es numerable. Probemos que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x} \in U$. Probemos que existen $\mathbf{q_x} \in \mathbb{Q}^n$ y $r_\mathbf{x} \in \mathbb{Q}$ con $r_\mathbf{x} > 0$ tal que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{q_x}, r_\mathbf{x}) \subset U$. Por el teorema 1.28, existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$. Por la propiedad arquimediana existe $n_\mathbf{x} \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_\mathbf{x}} < \frac{\delta}{2}$. Como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{q_x} \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{\mathbf{n_x}})$. Luego, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{q_x}, \frac{1}{\mathbf{n_x}})$. Además, dado $\mathbf{y} \in B(\mathbf{q_x}, \frac{1}{\mathbf{n_x}})$, tenemos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{q_x}) + d(\mathbf{q_x}, \mathbf{y}) < \frac{1}{\mathbf{n_x}} + \frac{1}{\mathbf{n_x}} < \delta$. Así, $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$. Por tanto, $B(\mathbf{x}, \frac{1}{\mathbf{n_x}}) \subset U$. Esto prueba que $U = \bigcup B(\mathbf{q_x}, \frac{1}{\mathbf{n_x}})$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. Concluimos que $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable. $\square$

De la prueba del ejemplo anterior, se puede observar que es importante la densidad de $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\mathbb{R}^n$ es separable. El siguiente teorema generaliza este hecho, más aún, nos da la equivalencia de segundo numerable con separabilidad.

Teorema 1.36. *Sea X un espacio métrico. Entonces, X es segundo numerable si y solo si X es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es numerable, existe una biyección $f \colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}$. Sea $B_n = f(n)$. Así, $\mathcal{B} = \{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, como los $B_n \neq \emptyset$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_n$. Sea $D = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Probemos que D es un subconjunto denso en X. Sea U un subconjunto abierto de X no vacío. Por demostrar que $U \cap D \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es una base y U es un subconjunto abierto de X no vacío, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset U$, de lo cual se sigue que $x_m \in U$. Por tanto, $x_m \in U \cap D$, es otras palabras, $U \cap D \neq \emptyset$. Hemos probado que D es un subconjunto denso de X y por lo tanto, X es separable.

Ahora, supongamos que X es separable. Entonces, existe un subconjunto $D = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ denso en X. Definamos $\mathcal{B} = \{B(x_n, \frac{1}{m}) \colon m, n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos. Consideremos a

$$f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$(n, m) \longmapsto B(x_n, \tfrac{1}{m}).$$

Notemos que f es una función sobreyectiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable (Teorema 1.20), $\mathcal{B}$ también es numerable. Probemos que $\mathcal{B}$ es una base de X. Para esto, sea $x \in X$ y U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Por la propiedad arquimediana existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como D es denso y $B(x, \frac{1}{j})$ es un conjunto abierto y no vacío, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(x, \frac{1}{j})$. Afirmamos que $x \in B(x, \frac{1}{j}) \subset U$. En efecto, sea $z \in B(x_i, \frac{1}{j})$. Entonces, $d(z, x) \leq d(z, x_i) + d(x_i, x) < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Así, $z \in B(x, \varepsilon) \subset U$. Por tanto, $B(x_i, \frac{1}{j}) \subset U$. Por lo tanto, X tiene una base numerable. Se concluye que X es segundo numerable. □

Definición 1.37. *Un espacio X se dice que es de* **Lindelöf** *si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*

Teorema 1.38. *Si X es segundo numerable, entonces X es de Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Como X es segundo numerable, existe $\mathcal{B}$ base numerable en X. Sea

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \colon \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } B \subset A\}.$$

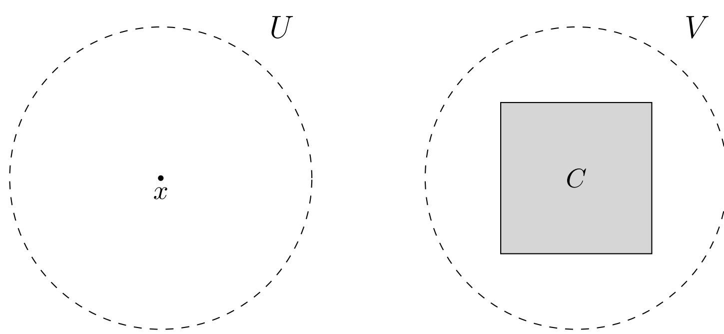
Veamos que $\bigcup \mathcal{B}' = X$. Probemos que $X \subset \bigcup \mathcal{B}'$. Sea $x \in X$. Entonces, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $B \in B$ tal que $x \in B \subset A$. Así, $\mathcal{B} \in \mathcal{B}'$ y $x \in \mathcal{B}$. Por tanto, $x \in \bigcup \mathcal{B}'$. Concluimos que $X \subset \bigcup \mathcal{B}'$. La otra contención es evidente. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{B}' = X$.

Como para cada $B \in \mathcal{B}'$, existe $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A_B$. Definimos a $\mathcal{A}' = \{A_B \colon B \in \mathcal{B}'\}$. Como $\bigcup \mathcal{B}' \subset \bigcup \mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}'$ es una subcubierta de $\mathcal{A}$. Más aún, como $\mathcal{B}'$ es numerable, tenemos que $\mathcal{A}'$ es numerable. Por lo tanto, X es de Lindelöf. $\square$

Por los teoremas 1.36 y 2.24 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.39. *Si X es un espacio métrico separable, entonces X es de Lindelöf.*

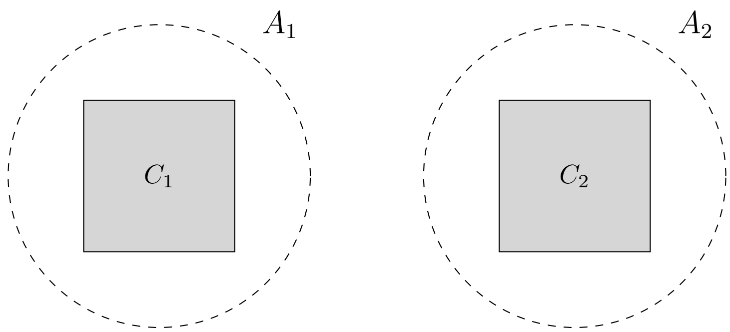
Definición 1.40. *Un espacio topológico X es* **regular** *si para cualesquiera $x \in X$ y C un subconjunto cerrado de X que no contiene a x, existen U y V subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $x \in U$ y $C \subset V$.*



Teorema 1.41. *Si X un espacio métrico, entonces X es regular.*

Demostración. Sean X un espacio métrico, C un subconjunto cerrado de X y $x \in X - C$. Como $X - C$ es un subconjunto abierto de X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subset X - C$. Notemos que, $\overline{B(x, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(x, \varepsilon)$. Así, $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $X - \overline{B(x, \frac{\varepsilon}{2})}$ son subconjuntos abiertos de X tales que $C \subset X - \overline{B(x, \frac{\varepsilon}{2})}$ y $x \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Por lo tanto, X es regular. $\square$

Definición 1.42. *Un espacio topológico X es* **normal** *si para cualesquiera C_1 y C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos, existen A_1 y A_2 conjuntos abiertos de X ajenos tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.*



Teorema 1.43. *Si X es un espacio métrico, entonces X es normal.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio métrico. Sean C_1 y C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos. Como $C_1 \subset X - C_2$, entonces para cada $x \in C_1$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon_x) \subset X - C_2$. De igual manera, para toda $y \in C_2$, existe $\delta_y > 0$ tal que $y \in B(y, \delta_y) \subset X - C_1$.
Definamos
$$A_1 = \bigcup_{x \in C_1} B(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) \text{ y } A_2 = \bigcup_{y \in C_2} B(y, \frac{\delta_y}{2})$$

Como las bolas abiertas son conjuntos abiertos, se tiene que A_1 y A_2 son conjunto abiertos de X. Notemos que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Para probar que X es normal, bastará probar que A_1 y A_2 son ajenos. Supongamos lo contrario, es decir, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Sea $z \in A_1 \cap A_2$. Entonces, $z \in A_1$ y $z \in A_2$, de lo cual se sigue que $z \in B(x, \frac{\varepsilon_x}{2})$ y $z \in B(y, \frac{\delta_y}{2})$. Por consiguiente, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\delta_y}{2} < 2 \cdot \text{máx}\{\frac{\varepsilon_x}{2}, \frac{\delta_y}{2}\}$. Así, $x \in B(y, \delta_y)$ o $y \in B(x, \varepsilon_x)$ lo cual no es posible. Por tanto, A_1 y A_2 son ajenos. Por lo tanto, X es normal. □

La siguiente resultado nos da una equivalencia de normalidad en la cual nos garantiza una propiedad más fuerte al separar subconjuntos cerrados.

Teorema 1.44. *Sea X un espacio métrico. Entonces, X es normal si y solo si para cada C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos, existen A_1, A_2 subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$, $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.*

Demostración. Supongamos que X es normal. Sean C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos, entonces existen A_1, U subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset U$. Como, A_1 y U son ajenos, tenemos que

$A_1 \subset X - U$. Luego, $\overline{A_1} \subset X - U$. Por consiguiente, $\overline{A_1}$ y C_2 son subconjuntos cerrados de X ajenos, entonces existen V, A_2 subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $\overline{A_1} \subset V$ y $C_2 \subset A_2$. Como $\overline{A_2} \subset X - V$, tenemos $\overline{A_2} \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, existen A_1, A_2 subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$ y $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. El regreso es evidente. $\square$

Capítulo 2

Dimensión inductiva pequeña

La dimensión inductiva pequeña fue introducida en 1922 por Urysohn y en 1923 por Menger. De esta manera, a esta dimensión también suele llamársele dimensión Menger-Urysohn, véase [9, pág. 20].

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los espacios topológicos. Definimos la función dim* : $\mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{-1, 0, \infty\}$ *llamada* **dimensión inductiva pequeña** *como:*

(a) $dim(X) = -1$ *si y solo si* $X = \emptyset$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $dim(X) \leq n$ *si para cada* $x \in X$ *y para todo* U *subconjunto abierto de* X *con* $x \in U$, *existe* V *subconjunto abierto de* X *tal que* $x \in V \subset U$ *y* $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n - 1$.

(c) Para todo $n \geq 0$, $dim(X) = n$ *si* $dim(X) \leq n$ *y es falso que* $dim(X) \leq n - 1$.

(d) $dim(X) = \infty$ *si para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es falso que* $dim(X) \leq n$.

Veamos que la dimensión inductiva pequeña es un invariante topológico dado que las fronteras se conservan bajo homeomorfismos.

Teorema 2.2. *Sean X y Y dos espacios topológicos tales que X es homeomorfo a Y. Si $dim(X) = n$, entonces $dim(Y) = n$, es decir, la dimensión es un invariante topológico.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre $dim(X)$. Supongamos que $dim(X) = -1$. Entonces, $X = \emptyset$ y dado que X es homeomorfo a Y, entonces $Y = \emptyset$. Por tanto, $dim(Y) = -1$.

Ahora, supongamos que este teorema se cumple para espacios que tienen dimesión menor o igual a $n-1$. Probemos que si la $dim(X) = n$ y X es homeomorfo a Y, entonces $dim(Y) = n$.

Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto de Y tal que $y \in U$, por hipótesis, existen un homeomorfismo $f\colon X \to Y$ y un punto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como f es continua y $y \in U$ se tiene que, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X tal que $x \in f^{-1}(U)$. Dado que $dim(X) = n$, existe V conjunto abierto de X tal que $x \in V \subset f^{-1}(U)$ y $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$.

Como f es una función biyectiva, tenemos que $f(V) \subset f(f^{-1}(U)) = U$. Así, $y \in f(V) \subset U$. Notemos que $f(V)$ es un subconjunto abierto de Y, porque f es función abierta y V es un subconjunto abierto de X. Usando el inciso *(b)* del teorema 1.13, tenemos que $f(\mathrm{fr}(V)) = \mathrm{fr}(f(V))$, es decir, $\mathrm{fr}(V)$ es homeomorfo a $\mathrm{fr}(f(V))$. Como $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$ la hipótesis de inducción nos garantiza que $dim(\mathrm{fr}(f(V))) \leq n-1$. Así, $dim(Y) \leq n$.

Resta probar que $dim(Y) > n-1$. Supongamos que $dim(Y) \leq n-1$. Luego, por la hipótesis de inducción tenemos que $dim(X) \leq n-1$ contradiciendo el hecho de que $dim(X) = n$. Así, $dim(Y) > n-1$. Por lo tanto, $dim(Y) = n$. □

Teorema 2.3. *Sea X un espacio topológico, no vacío. Entonces, $dim(X) \leq n$ si y solo si X tiene una base $\mathcal{B}$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) \leq n$. Sea

$$\mathcal{B} = \{V \subset X \colon V \text{es subconjunto abierto de X y } dim((\mathrm{fr}(V)) \leq n-1\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para X. Sea $x \in X$. Como $dim(X) \leq n$ y X es abierto, existe V subconjunto abierto de X tal que $x \in V \subset X$ y $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{B}$. Por lo tanto $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ y $z \in V_1 \cap V_2$. Como $dim(X) \leq n$ y $V_1 \cap V_2$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que existe V subconjunto abierto de X tal que $z \in V \subset V_1 \cap V_2$ y $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Notemos que $V \in \mathcal{B}$. En consecuencia $\mathcal{B}$ es una base para X.

Ahora, supongamos que X tiene una base $\mathcal{B}$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de

X tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base de X, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$ y $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Por tanto, $dim(X) \leq n$. □

Los resultados más importantes e interesantes de la teoría de dimensión inductiva pequeña se tienen para espacios métricos, más aún, para espacios que son separables. Más adelante en las secciones 2.2 y 2.3 veremos resultados donde la propiedad de separabilidad es necesaria. Hasta entonces, veamos el siguiente corolario que nos muestra que un espacio separable es fundamental.

Corolario 2.4. *Sea X un espacio métrico separable y no vacío. Entonces, $dim(X) \leq n$ si y solo si existe $\mathcal{B}$ base numerable de X tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) \leq n$. Entonces, aplicando el teorema 2.3, X tiene una base $\mathcal{B}$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}$ se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Como X es un espacio métrico separable, entonces por el teorema 1.36, X es segundo numerable, de lo cual se sigue que X tiene una base numerable. Así, por el lema 1.22, existe $\mathcal{B}_0$ subfamilia numerable de $\mathcal{B}$ que también es base de X. Como $V \in \mathcal{B}_0$, entonces $V \in \mathcal{B}$. Así, $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$.

Ahora, supongamos que X tiene una base numerable $\mathcal{B}$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Por tanto, aplicando el teorema 2.3, $dim(X) \leq n$. □

Teorema 2.5 (Teorema de la Monotonía). *Si X es un espacio topológico y Y un subespacio de X, entonces $dim(Y) \leq dim(X)$.*

Demostración. Si $dim(X) = \infty$, entonces por la definición de dimensión inductiva pequeña se obtiene lo deseado. Ahora, supongamos que la $dim(X)$ es finita. Hagamos la prueba por inducción sobre $dim(X)$. Si $dim(X) = -1$, la desigualdad se cumple.

Consideremos $n \geq 0$ y supongamos que el resultado se cumple siempre que $dim(X) \leq n-1$. Supongamos que $dim(X) = n$. Sean Y un subespacio de X y $x \in Y$. Sea U un subconjunto abierto de Y con $x \in U$. Entonces, existe V subconjunto abierto de X tal que $U = Y \cap V$. Como $dim(X) = n$, existe W subconjunto abierto de X tal que $x \in W \subset V$ y $dim(\mathrm{fr}_X(W)) \leq n-1$.

Sea $Z = Y \cap W$. Luego, Z es un subconjunto abierto de Y tal que $x \in Z \subset U$. Por el teorema 1.7 *(a)*, $\mathrm{fr}_Y(Z) = \mathrm{fr}_Y(Y \cap W) \subset \mathrm{fr}_X(W)$. Aplicando la hipótesis de inducción a la $\mathrm{fr}_Y(Z)$ y a $\mathrm{fr}_X(W)$, tenemos que $dim(\mathrm{fr}_Y(Z)) \leq dim(\mathrm{fr}_X(W))$. Así, $dim(\mathrm{fr}_Y(Z)) \leq n-1$. En consecuencia, la $dim(Y) \leq n$. Por lo tanto, $dim(Y) \leq dim(X)$. □

2.1. Dimensión cero

A continuación, veamos qué espacios tienen dimensión inductiva pequeña cero, es decir, espacios que tienen una base de abiertos y cerrados.

Definición 2.6. *Sean U y V subconjuntos abiertos de X no vacíos. Decimos que (U, V) es una* **separación** *de X si $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 2.7. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* **conexo** *si no existe una separación de X. Un espacio X es* **disconexo** *si existe una separación de X.*

Teorema 2.8. *Un espacio X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados de X son $\emptyset$ y X.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Sea A subconjunto abierto y cerrado de X. Sean $U = A$ y $V = X - A$. Entonces, U y V son subconjuntos abiertos de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es conexo, esto implica que $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Por consiguiente, $A = \emptyset$ o $A = X$. Por tanto, $\emptyset$ y X son los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados de X.

Ahora, supongamos que los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados de X son $\emptyset$ y X. Sean U y V subconjuntos abiertos de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $U = X - V$, entonces U es un subconjunto cerrado de X. Así, U es un subconjunto abierto y cerrado de X. Por consiguiente, $U = \emptyset$ o $U = X$, es decir, $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Esto implica que no existe separación de X pues para que haya dicha separación, U y V tendrían que ser no vacíos y por lo anterior tenemos que al menos uno de ellos es vacío. Por tanto, X es conexo. $\square$

La definición que a continuación veremos se desprende de la definición de dimensión inductiva pequeña cuando $n = 0$.

Definición 2.9. *Un espacio topológico X no vacío tiene* **dimensión cero***, si para cada $x \in X$ y U subconjunto abierto de X con $x \in U$, existe V subconjunto abierto de X tal que $x \in V \subset U$ y $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$.*

A diferencia de la definición de dimensión inductiva pequeña, en la definición anterior se le ha agregado la condición de que X sea no vacío para que la dimensión de X no sea -1 y así solo sea necesario probar la condición dada.

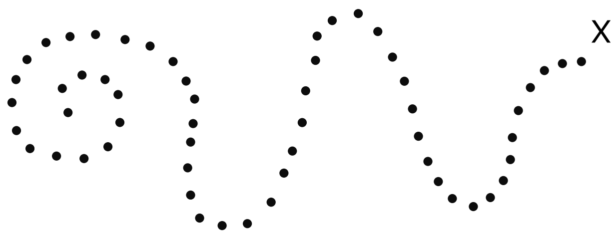


Figura 2.1: Espacio finito.

El siguiente resultado nos muestra que un espacio finito, es decir, con una cantidad finita de elementos tiene dimensión cero. Véase la figura 2.1.

Teorema 2.10. *Sea X un espacio regular. Si X es finito y no vacío, entonces $dim(X) = 0$.*

Demostración. Supongamos que X es finito y no vacío.

Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X con $p \in U$. Como X es regular, todo subconjunto singular $\{x\}$ es cerrado de X. Notemos que $\{p\} = X - \bigcup\{\{x\} \colon x \in X \text{ y } x \neq p\}$. Como X es finito, se sigue que $\{p\}$ es un subconjunto abierto de X tal que $p \in \{p\} \subset U$. Notemos que $\mathrm{fr}_X(\{p\}) = \overline{\{p\}} \cap \overline{(X - \{p\})} = \{p\} \cap (X - \{p\}) = \emptyset$. Por lo tanto, $dim(X) = 0$. □

Teorema 2.11. *Si X un espacio métrico no vacío a lo más numerable, entonces $dim(X) = 0$.*

Demostración. Supongamos que$X$ es un espacio métrico no vacío a lo más numerable. Sean $p \in X$ y U es subconjunto abierto de X con $p \in U$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset U$. Sea $A = \{d(x, p) \colon x \in X\}$. Notemos que A es a lo más numerable. Como $(0, \delta)$ es un conjunto no numerable, $(0, \delta) - A \neq \emptyset$. Así, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < \delta$ y $r \notin A$. Por tanto, $B(p, r) \subset B(p, \delta) \subset U$. Para terminar la prueba, bastará probar que $\mathrm{fr}(B(p, r)) = \emptyset$. Para esto, probemos que $B(p, r) = \overline{B(p, r)}$. Sea $z \in \overline{B(p, r)}$. Supongamos que $z \notin B(p, r)$. Entonces, $d(z, p) \geq r$. Como $r \notin A$, tenemos que $d(z, p) > 0$. Sea $\delta_0 = d(z, p) - r > 0$. Como $z \in \overline{B(p, r)}$, tenemos que $B(z, \delta_0) \cap B(p, r) \neq \emptyset$. Sea $w \in B(z, \delta_0) \cap B(p, r)$. Entonces,

$$d(z, p) \leq d(z, w) + d(w, p) < \delta_0 + r = d(z, p).$$

Lo cual es una contradicción. Así, $z \in B(p, \delta)$. Por tanto, $\overline{B(p, r)} \subset B(p, r)$. De aquí se sigue la igualdad. Por lo tanto, $\mathrm{fr}(B(p, r)) = \emptyset$. De esto se concluye que $dim(X) = 0$. □

El siguiente resultado exhibe un espacio no numerable que tiene dimensión cero.

Ejemplo 2.12. $dim(\mathbb{I}) = 0$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{I}$ y U un subconjunto abierto de $\mathbb{I}$ con $p \in U$. Entonces, por la topología relativa, existe W subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $U = \mathbb{I} \cap W$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existen $q, r \in \mathbb{Q}$ tales que $p \in (q, r) \subset W$. Sea $V = (q, r) \cap \mathbb{I} \subset U$ Luego, V es un subconjunto abierto de $\mathbb{I}$ tal que $p \in V \subset U$. Por el teorema 1.7 *(a)*, tenemos que $\mathrm{fr}_{\mathbb{I}}((q, r) \cap \mathbb{I}) \subset \mathrm{fr}_{\mathbb{R}}((q, r)) = \{q, r\}$. Por tanto, $\mathrm{fr}_{\mathbb{I}}((q, r) \cap \mathbb{I}) = \emptyset$. Se concluye que, $dim(\mathbb{I}) = 0$. □

El siguiente ejemplo muestra que tomar la unión de subespacios puede aumentar la dimensión.

Ejemplo 2.13. *Observemos que* $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. *Por el ejemplo 2.12,* $dim(\mathbb{I}) = 0$ *y por el teorema 2.11,* $dim(\mathbb{Q}) = 0$ *pero* $dim(\mathbb{R}) = 1$.

A continuación, veamos que el siguiente resultado nos asegura que la dimensión de un espacio conexo nunca es cero.

Teorema 2.14. *Sea* X *un espacio topológico regular. Si* X *es conexo y* $Card(X) > 1$, *entonces* $dim(X) > 0$.

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que la dimensión de X es cero. Sea $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $U \neq X$. Entonces, existe V subconjunto abierto de X tal que $x \in V \subset U$ y $\mathrm{fr}_X(V) = \emptyset$. Luego, V es un subconjunto abierto y cerrado de X, porque $\mathrm{fr}_X(V) = \emptyset$. Dado que X es conexo, por el teorema 2.8 tenemos que $V = \emptyset$ o $V = X$. Como $x \in V$, tenemos que $V = X$. Lo cual es una contradicción, puesto que V es un subconjunto propio de X. Por lo tanto, $dim(X) > 0$. □

Teorema 2.15. *Sea* X *un espacio métrico separable. Entonces,* $dim(X) = 0$ *si y solo si* X *es no vacío y tiene una base numerable de conjuntos abiertos y cerrados.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = 0$. Entonces, X no es vacío. Como X es un espacio métrico separable, entonces por el corolario 2.4, existe $\mathcal{B}$ base numerable de X tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$.

Luego, para cada $V \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$, es decir, V es un subconjunto abierto y cerrado de X.

Ahora, supongamos que X es no vacío y tiene una base $\mathcal{B}$ numerable de conjuntos abiertos y cerrados. Sea V subconjunto abierto de X tal que $V \in \mathcal{B}$. Entonces, $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$, de lo cual se sigue que $dim(\mathrm{fr}(V)) = -1$. Por tanto, aplicando el corolario 2.4, tenemos que $dim(X) = 0$. $\square$

Observación 2.16. *Si X es un espacio topológico con dimensión cero, entonces todo subespacio de X no vacío tiene dimensión cero.*

Este hecho no es dificil de probar gracias a la monotonía, teorema 2.5.

2.2. Teoremas de separación y extensión para dimensión cero

Definición 2.17. *Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos abiertos de X. Decimos que A y B están* **mutuamente separados** *en X si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $B \cap \overline{A} = \emptyset$.*

Lema 2.18. *[8, Observación 3.10; pág.21] Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Entonces, A y B están mutuamente separados si y solo si son abiertos (cerrados) en el subespacio $Y = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. En particular, dos subconjuntos abiertos (cerrados de X), ajenos están mutuamente separados.*

Teorema 2.19. *[4, Teorema (4.A.1); pág. 98] Sean X un espacio métrico y A, B subconjuntos de X tales que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Entonces, existen U, V subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Definición 2.20. *Sean X un espacio topológico y C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X. Decimos que C_1 y C_2 están separados en X por un subconjunto $P \subset X$ (o bien, que $P \subset X$ es un subconjunto de X que separa a C_1 y C_2) si existen A_1, A_2 subconjuntos abiertos de X tales que (A_1, A_2) es una separación de $X - P$, $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Véase la figura 2.2*

Nota 2.21. *Sean X un espacio topológico, C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X y $A, B, P \subset X$.*

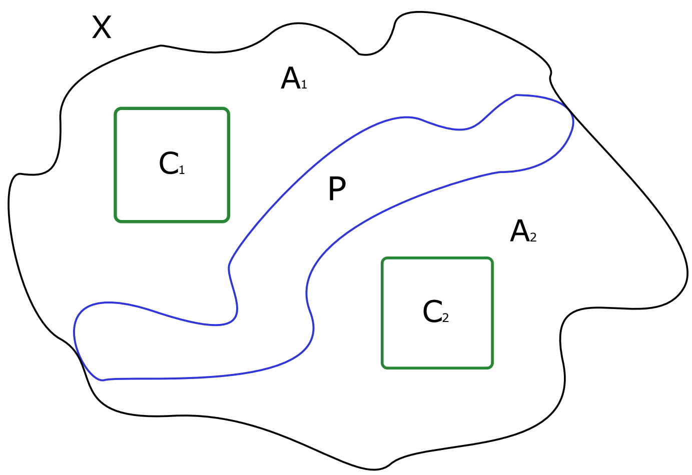


Figura 2.2: El conjunto $P \subset X$ separa a C_1 y C_2.

(a) Si C_1 y C_2 están separados por el conjunto vacío decimos simplemente que C_1 y C_2 están separados en X.

(b) Si $A = \{x\}$, decimos que x y B están separados por el conjunto P.

(c) De la definición 2.20, el conjunto P es el complemento de un subconjunto abierto, por lo que P es un subconjunto cerrado de X.

Teorema 2.22. *Sean C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X. Entonces, C_1 y C_2 están separados en X si y solo si existe A subconjunto abierto y cerrado de X tal que $C_1 \subset A$ y $A \cap C_2 = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que C_1 y C_2 están separados en X. Entonces, existen A_1 y A_2 conjuntos abiertos de X tales que (A_1, A_2) es una separación de X y $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Como (A_1, A_2) es una separación de X, entonces $A_1 \cup A_2 = X$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. De esto que, $A_1 = X - A_2$ y $A_1 \cap C_2 = \emptyset$. Por tanto, A_1 es subconjunto abierto y cerrado de X tal que $C_1 \subset A_1$ y $A_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Ahora, supongamos que existe A subconjunto abierto y cerrado de X tal que $C_1 \subset A$ y $A \cap C_2 = \emptyset$. Sean $A_1 = A$ y $A_2 = X - A$. Notemos que (A_1, A_2) es una separación de X. Más aún, $C_2 \subset A_2$. Por lo tanto, C_1 y C_2 están separados en X. $\square$

Teorema 2.23. *Un espacio X tiene dimensión cero si y solo si para cada $x \in X$ y C subconjunto cerrado de X con $x \notin C$, existe V subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in V$ y $V \cap C = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X tiene dimensión cero. Sean $x \in X$ y C subconjunto cerrado de X tal que $x \notin C$. Entonces, como $X - C$ es un subconjunto abierto de X tal que $x \in X - C$. Como $dim(X) = 0$, existe V subconjunto abierto de X tal que $x \in V \subset X - C$ y $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$. Como $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$, tenemos que V es cerrado de X. Así, V es un subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in V$ y $V \cap C = \emptyset$.

Ahora, probemos la otra implicación. Sean $x \in X$ y U subconjunto abierto de X con $x \in U$. Así, $x \notin X - U$ y $X - U$ es un subconjunto cerrado de X. Luego, existe V subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in V$ y $V \cap (X - U) = \emptyset$. Lo cual implica que $\mathrm{fr}(V) = \emptyset$ y $x \in V \subset U$. Por lo tanto, $dim(X) = 0$. □

Teorema 2.24 (Primer teorema de separación para dimensión cero). *Sea X un espacio métrico separable. Entonces, $dim(X) = 0$ si y solo si para cualesquiera C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos, existe (A_1, A_2) separación de X tal que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = 0$. Sean C_1 y C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos. Para cada $x \in X$, se cumple que $x \notin C_1$ o $x \notin C_2$. Luego, por el teorema 2.23, existe V_x subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in V_x$ y $V_x \cap C_1 = \emptyset$ o $V_x \cap C_2 = \emptyset$. Así, $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, por el corolario 1.39, existe $\{V_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ subcubierta abierta numerable. Sea $W_1 = V_{x_1}$ y para $i \geq 2$,

$$W_i = V_{x_i} - \bigcup_{k=0}^{i-1} V_{x_k} \subset V_{x_i}.$$

Como cada V_{x_k} es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\bigcup_{k=0}^{i-1} V_{x_k}$ es un subconjunto cerrado de X. Luego, W_i es un subconjunto abierto de X.

Sean $i < j$. Supongamos que existe $x \in W_i \cap W_j$. Entonces, $x \in V_{x_i}$ y $x \notin \bigcup_{k=0}^{j-1} V_{x_k}$. De lo cual se sigue que $x \in V_{x_i}$ y $x \notin V_{x_i}$. Lo cual es una contradicción. De esto $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ son abiertos de X y ajenos dos a dos.

Sean

$$A_1 = \bigcup \{W_i : C_1 \cap W_i \neq \emptyset\} \text{ y } A_2 = \bigcup \{W_i : C_1 \cap W_i = \emptyset\}.$$

Para terminar la prueba, demostremos que (A_1, A_2) es una separación de X tal que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$.

Probemos que A_1 y A_2 son conjuntos abiertos de X. Como W_i es un subconjunto abierto de X y la unión de subconjuntos abiertos es un subconjunto abierto, entonces A_1 y A_2 son subconjuntos abiertos de X.

Veamos que $A_1 \cup A_2 = X$. Para ello bastará probar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{x_n}$. Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{x_m}$. Sea $n_0 = \text{mín}\{m \in \mathbb{N}\colon x \in V_{x_m}\}$. Luego, $x \in V_{x_{n_0}}$. Si $n_0 = 1$, entonces $x \in V_{x_1} = W_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{x_n}$. Ahora, si $n_0 \geq 2$, entonces $x \in V_{x_{n_0}}$ y $x \notin V_{x_m}$ para $m < n_0$. Así, $x \in V_{X_{n_0}} - \bigcup_{k=1}^{n_0-1} V_{x_k} = W_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Por tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{x_n}$. En consecuencia, $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{x_n} = X$. Por lo tanto, $A_1 \cup A_2 = X$.

Probemos que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Sea $p \in C_1 \subset X$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in W_m$. Así, $W_m \cap C_1 = \emptyset$. Por tanto, $p \in W_m \subset A_1$. Por lo tanto, $C_1 \subset A_1$. Ahora, sea $q \in C_2 \subset X$. Entonces, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $q \in W_l \subset V_{x_l}$. Así, $V_{x_l} \cap C_2 = \emptyset$. Luego, por construcción, $V_{x_l} \cap C_1 = \emptyset$. Así, $W_l \cap C_1 = \emptyset$. Por tanto, $q \in W_l \subset A_2$. Por lo tanto, $C_2 \subset A_2$. Concluimos así la primera implicación.

Ahora, probemos la otra implicación. Sean $x \in X$ y A un subconjunto abierto de X con $x \in A$. Sean $C_1 = \{x\}$ y $C_2 = X - A$. Entonces, C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de X ajenos. Luego, por hipótesis, existe (A_1, A_2) separación de X tal que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Como $X - A \subset A_2$, entonces $(X - A) \cap A_1 = \emptyset$. Así, $A_1 \subset A$. Notemos que $A_1 = X - A_2$. De esto que A_1 es subconjunto abierto y cerrado de X tal que $x \in A_1 \subset A$. Como A_1 es abierto y cerrado de X, entonces $\text{fr}(A_1) = \emptyset$. Concluimos que $dim(X) = 0$. $\square$

Lema 2.25. *Sean X un espacio métrico, $Y \subset X$ y C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X, ajenos. Supongamos que A_1, A_2 son subconjuntos abiertos de X con $C_1 \subset A_1$, $C_2 \subset A_2$ y $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Si P_1 es un subconjunto de Y que separa a $Y \cap \overline{A_1}$ y $Y \cap \overline{A_2}$, entonces existe P_2 subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P_2 \cap Y \subset P_1$.*

Demostración. Sea P_1 subconjunto de Y que separa a $Y \cap \overline{A_1}$ y $Y \cap \overline{A_2}$. Entonces, existen U_1, U_2 subconjuntos abiertos de Y tales que (U_1, U_2) es una separación de $Y - P_1$ y, $Y \cap \overline{A_1} \subset U_1$ y $Y \cap \overline{A_2} \subset U_2$.

Notemos que $C_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $C_2 \cap U_1 = \emptyset$. Como

$$A_1 \cap U_2 = Y \cap (A_1 \cap U_2) = (Y \cap A_1) \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset,$$

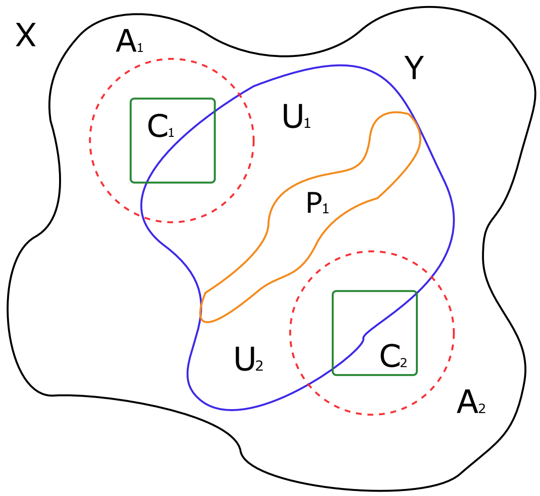


Figura 2.3: Representación gráfica del lema 2.25.

tenemos que $A_1 \cap U_2 = \emptyset$. De manera análoga tenemos que $A_2 \cap U_1 = \emptyset$.

Afirmamos que $A_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$ y $A_2 \cap \overline{U_1} = \emptyset$. En efecto, supongamos que $A_1 \cap \overline{U_2} \neq \emptyset$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $x \in A_1 \cap \overline{U_2}$. Como A_1 es un subconjunto abierto de X con $x \in A_1$ y $x \in \overline{U_2}$, entonces $A_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $A_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por tanto, $A_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Similarmente, $A_2 \cap \overline{U_1} = \emptyset$.

Como $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$, tenemos que $C_1 \cap \overline{U_2} \subset A_1 \cap \overline{U_2}$ y $C_2 \cap \overline{U_1} \subset A_2 \cap \overline{U_1}$. Por lo que se afirmó anteriormente, tenemos que $C_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$ y $C_2 \cap \overline{U_1} = \emptyset$.

Notemos que U_1 y U_2 son abiertos de $U_1 \cup U_2$ y ajenos. Luego, por el lema 2.18, U_1 y U_2 están mutuamente separados, es decir, $U_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$ y $U_2 \cap \overline{U_1} = \emptyset$. De lo cual, afirmamos los siguiente: $(C_1 \cup U_1) \cap (\overline{C_2 \cup U_2}) = \emptyset$ y $(C_2 \cup U_2) \cap (\overline{C_1 \cup U_1}) = \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(C_1 \cup U_1) \cap (\overline{C_2 \cup U_2}) &= (C_1 \cup U_1) \cap (\overline{C}_2 \cup \overline{U}_2) \\
&= [C_1 \cap (\overline{C}_2 \cup \overline{U}_2)] \cup [U_1 \cap (\overline{C}_2 \cup \overline{U}_2)] \\
&= (C_1 \cap \overline{C_2}) \cup (C_1 \cap \overline{U_2}) \cup (U_1 \cap \overline{C_2}) \cup (U_1 \cap \overline{U_2}) \\
&= (C_1 \cap C_2) \cup \emptyset \cup (U_1 \cap C_2) \cup \emptyset \\
&= (C_1 \cap C_2) \cup (U_1 \cap C_2) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

De manera análoga, se prueba que $(C_2 \cup U_2) \cap (\overline{C_1 \cup U_1}) = \emptyset$.

Por el teorema 2.19, existen V_1 y V_2 subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $C_1 \cup U_1 \subset V_1$ y $C_2 \cup U_2 \subset V_2$. Definimos a $P_2 = X - (V_1 \cup V_2)$, es decir, $X - P_2 = V_1 \cup V_2$. Así, (V_1, V_2) es una separación de $X - P_2$. Notemos que $C_1 \subset V_1$ y $C_2 \subset V_2$. Por tanto, P_2 es un subconjunto de X que separa a C_1 y C_2. Por último, probemos que $Y \cap P_2 \subset P_1$. Veamos que $P_2 \cap Y \subset P_1$. Sea $x \in P_2 \cap Y$. Supongamos que $x \notin P_1$, es decir, $x \in Y - P_1$. Entonces, $x \in U_1 \cup U_2$. Como $U_1 \subset V_1$ y $U_2 \subset V_2$, entonces $x \in V_1 \cup V_2$. Así, $x \in X - P_2$. Por tanto, $x \notin P_2$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $P_2 \cap Y \subset P_1$. Esto concluye la prueba del lema. $\square$

Teorema 2.26 (**Segundo teorema de separación para dimensión cero**). *Sean X un espacio métrico separable, $Y \subset X$ y $dim(Y) = 0$. Si C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de X ajenos, entonces existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P \subset X - Y$.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos. Como X es normal, por el teorema 1.44, existen A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de X tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$ y $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Sean $Y \cap \overline{A_1}$ y $Y \cap \overline{A_2}$ subconjuntos cerrados de Y ajenos.

Como $dim(Y) = 0$, por el teorema 2.24, el conjunto vacío separa a $Y \cap \overline{A_1}$ y $Y \cap \overline{A_2}$. Luego, por el lema 2.25, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P \cap Y \subset \emptyset$. Por lo tanto, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P \subset X - Y$. $\square$

Teorema 2.27. *Sean X un espacio métrico separable y Y un subconjunto de X no vacío. Entonces, $dim(Y) = 0$ si y solo si para cada $x \in X$ y para cada A subconjunto abierto de X con $x \in A$, existe B subconjunto abierto de X tal que $x \in B \subset A$ y $Y \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $dim(Y) = 0$. Sean $x \in X$ y A un subconjunto abierto de X con $x \in A$. Notemos que $\{x\}$ y $X - A$ son subconjuntos cerrados de X ajenos. Entonces, aplicando el teorema 2.26, existe P subconjunto de X que separa a $\{x\}$ y $X - A$ tal que $P \subset X - Y$. Así, existen B_1 y B_2 subconjuntos abiertos de X tales que (B_1, B_2) es una separación de $X - P$ y cumplen que $\{x\} \subset B_1$ y $X - A \subset B_2$.

Como $P \subset X - Y$, tenemos que $Y \subset X - P$, es decir, $Y \subset B_1 \cup B_2$. Por consiguiente, $Y \cap \overline{B_1} \subset (B_1 \cup B_2) \cap \overline{B_1} = (B_1 \cap \overline{B_1}) \cup (B_2 \cap \overline{B_1}) = B_1 \cup \emptyset$. Es decir, $Y \cap \overline{B_1} \subset B_1$. En consecuencia,

$$Y \cap \mathrm{fr}(B_1) = Y \cap (\overline{B_1} \cap \overline{(X - B_1)}) = (Y \cap \overline{B_1}) \cap (X - B_1) \subset B_1 \cap (X - B_1).$$

Así, $Y \cap \mathrm{fr}(B_1) = \emptyset$. Al ser B_1 y B_2 subconjuntos ajenos, tenemos que $B_1 \subset X - B_2 \subset A$. Por lo tanto, existe B_1 subconjunto abierto de X tal que $x \in B_1 \subset A$ y $Y \cap \mathrm{fr}(B_1) = \emptyset$.

Ahora, probemos la otra implicación. Sean $x \in Y$, U un subconjunto abierto de Y con $x \in U$ y A un subconjunto abierto de X tal que $U = Y \cap A$. Entonces, por hipótesis, existe B subconjunto abierto de X tal que $x \in B \subset A$ y $Y \cap \mathrm{fr}_X(B) = \emptyset$. Sea $V = Y \cap B$. Entonces, V es un subconjunto abierto de Y tal que $x \in V \subset U$. Probemos que $\mathrm{fr}_Y(V) = \emptyset$. Por el teorema 1.7 *(a)*, $\mathrm{fr}_Y(V) \subset Y \cap \mathrm{fr}_X(B)$. Como $Y \cap \mathrm{fr}_X(B) = \emptyset$. Así, $\mathrm{fr}_Y(V) = \emptyset$. Por lo tanto, $dim(Y) = 0$. □

Corolario 2.28. *Sean X un espacio métrico separable y Y un subconjunto de X no vacío. Entonces, $dim(Y) = 0$ si y solo si X tiene una base $\mathcal{B}$ numerable tal que para cada $B \in \mathcal{B}$, se tiene que $Y \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $dim(Y) = 0$. Sea

$$\mathcal{B} = \{B \subset X \colon B \text{ es subconjunto abierto de } X \text{ y } Y \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset\}.$$

Probemos que $X = \bigcup \mathcal{B}$. Para ello, probemos que $X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Sea $x \in X$. Como X es abierto, por el teorema 2.27, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset X$ y $Y \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{B}$. Por tanto, $X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Es evidente que $\bigcup \mathcal{B} \subset X$. Por lo tanto, $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Ahora, tomemos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $z \in B_1 \cap B_2$. Como $B_1 \cap B_2$ es un subconjunto abierto de X, por el teorema 2.27, existe B_3 subconjunto abierto de X tal que $z \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ y $Y \cap \mathrm{fr}(B_3) = \emptyset$. Así, $B_3 \in \mathcal{B}$ y $z \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Por tanto, $\mathcal{B}_0$ es una base para X. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para X numerable. Como X es separable, por el teorema 1.36, X es segundo numerable, es decir, X tiene una base $\mathcal{B}$ numerable. Luego, por el lema 1.22, existe $\mathcal{B}_0$ subfamilia numerable de $\mathcal{B}$ que también es base para X. Por lo tanto, hemos encontrado $\mathcal{B}_0$ base numerable para X tal que para cada $B \in \mathcal{B}_0$ se tiene que $Y \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$.

La otra implicación resulta de aplicar directamente del teorema 2.27. □

Hemos visto que la dimensión de los racionales $\mathbb{Q}$ es cero, no obstante, la cerradura de $\mathbb{Q}$, que es $\mathbb{R}$ tiene dimensión uno. De aquí que los subespacios de dimensión cero no siempre se pueden extender a subespacios cerrados de dimensión cero. Sin embargo, se puede extender a subespacios más grandes que mantengan la dimensión. Para esto, veamos la siguiente definición.

Definición 2.29. *Sean X un espacio topológico y $A, F \subset X$.*

(a) Decimos que A es un **conjunto** $\mathcal{G}_\delta$ *de X si $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$, donde cada U_n es subconjunto abierto de X. .*

(b) Decimos que F es un **conjunto** $\mathcal{F}_\sigma$ *de X si $F = \bigcup_{n=1}^\infty W_n$, donde cada W_n es subconjunto cerrado de X.*

Observación 2.30. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto A es $\mathcal{G}_\delta$ de X si y solo si $X - A$ es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X.*

Teorema 2.31. *Sea X un espacio topológico. Si A es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de F y F es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X, entonces A es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X.*

Demostración. Sean A un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de F y F un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. Entonces, $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$, donde cada U_n es subconjunto abierto de F y $F = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$, donde V_n es subconjunto abierto de F. Notemos que $U_n = W_n \cap F$, donde, W_n es subconjunto abierto de X. Luego,

$$A = \left[\bigcap_{n=1}^\infty W_n\right] \cap F = \left[\bigcap_{n=1}^\infty W_n\right] \cap \left[\bigcap_{n=1}^\infty V_n\right] = \bigcap_{n=1}^\infty [W_n \cap V_n].$$

Así, $A = \bigcap_{n=1}^\infty [W_n \cap V_n]$, donde cada $W_n \cap V_n$ es subconjunto abierto de X. Por tanto, A es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. □

Teorema 2.32. *Sea X un espacio métrico. Si F es un subconjunto cerrado de X, entonces F es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X.*

Demostración. Sea

$$N(F, \tfrac{1}{n}) = \bigcup_{x \in F} B(x, \tfrac{1}{n}),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmación $F = \bigcap_{n=1}^\infty N(F, \frac{1}{n})$. Notemos que $F \subset N(F, \frac{1}{n})$. Por consiguiente, $F \subset \bigcap_{n=1}^\infty N(F, \frac{1}{n})$. Ahora, veamos que $\bigcap_{n=1}^\infty N(F, \frac{1}{n}) \subset F$. Sean $x \in \bigcap_{n=1}^\infty N(F, \frac{1}{n})$ y $r > 0$. Entonces, por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$. Dado que $x \in N(F, \frac{1}{n_0})$, existe $x_0 \in F$ tal que $x \in B(x_0, \frac{1}{n_0})$. Luego, $x_0 \in B(x, \frac{1}{n_0})$. Así, $B(x, \frac{1}{n_0}) \cap F \neq \emptyset$. Como $\frac{1}{n_0} < r$, tenemos que $B(x, \frac{1}{n_0}) \subset B(x, r)$. Se sigue que, $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in \mathrm{cl}_X(F) = F$. Por tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} N(F, \frac{1}{n}) \subset F$. Se concluye que F es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. □

Corolario 2.33. *Sea X un espacio métrico. Si A es un subconjunto abierto de X, entonces $X - A$ es conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X.*

Demostración. Como A es un subconjunto abierto de X, entonces $X - A$ es subconjunto cerrado de X. Por el teorema 2.32, tenemos que $X - A$ es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. Así, por la observación 2.30, concluimos que A es conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X. □

Ya visto lo anterior, veamos el siguiente teorema que nos muestra que un subespacio de dimensión cero siempre se puede extender a conjuntos $\mathcal{G}_\delta$ de dimensión cero, y a conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ de dimensión cero.

Lema 2.34. *Sean X un espacio métrico y Y un subespacio denso en X separable. Si $dim(Y) = 0$, entonces existe Z conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X tal que $Y \subset Z$ y $dim(Z) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $dim(Y) = 0$ y Y es denso en X. Como Y es separable, existe D subconjunto denso en Y numerable. Notemos que $Y = \mathrm{cl}_Y(D) = Y \cap \mathrm{cl}_X(D)$. Entonces, $Y \subset \mathrm{cl}_X(D)$. Por consiguiente, $X = \mathrm{cl}_X(Y) \subset \mathrm{cl}_X(D)$. Así, $X = \mathrm{cl}_X(D)$. Por tanto, X es separable. Por el corolario 2.28, X tiene una base $\mathcal{B}$ numerable tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, $Y \cap \mathrm{fr}(V) = \emptyset$. Sea $F = \bigcup\{fr(V) \colon V \in \mathcal{B}\}$. Como $\mathrm{fr}(V)$ es un subconjunto cerrado de X para cada $V \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es una base numerable, entonces F es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X. Sea $Z = X - F$. Por la observación 2.30, Z es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. Notemos que, $Y \cap F = \emptyset$, es decir, $Y \subset X - F$. Así, $Y \subset Z$. Probemos que $dim(Z) = 0$. Como $\mathcal{B}$ es una base de X numerable y para cada $V \in \mathcal{B}$, $\mathrm{fr}(V) \subset F$, entonces $(X - F) \cap \mathrm{fr}(V) = \emptyset$, es decir, $Z \cap \mathrm{fr}(V) = \emptyset$. Por el corolario 2.28, concluimos que $dim(Z) = 0$.Por lo tanto, se prueba el teorema. □

Teorema 2.35 (**Teorema de extensión para dimensión cero**)**.** *Sean X un espacio métrico y Y un subespacio de X separable. Si $dim(Y) = 0$, entonces existe Z conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X tal que $Y \subset Z$ y $dim(Z) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $dim(Y) = 0$. Como Y es denso en $\mathrm{cl}_X(Y)$. Por el lema 2.34, existe Z conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathrm{cl}_X(Y)$ tal que $Y \subset Z$ y $dim(Z) = 0$. Sabemos, por el teorema 2.32 que, $\mathrm{cl}_X(Y)$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. Así, aplicando el teorema 2.31, Z es conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de X. Por lo tanto, se cumple lo deseado. $\square$

2.3. Dimensión de uniones

Hemos visto que dado un subespacio Y de X con dimensión cero, este puede ser extendido a uno más grande preservando la dimensión. A continuación, nos dedicaremos a ver qué condiciones son suficientes para que X tenga diensión cero cuando X es unión de subespacios de dimensión cero.

Lema 2.36. *Sean X un espacio métrico separable, F un subconjunto cerrado de X y U, V subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \emptyset$ y $dim(F) = 0$. Entonces, existen U_1, V_1 subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$, $U_0 \subset U_1$, $V_0 \subset V_1$ y $F \subset U_1 \cup V_1$.*

Demostración. Sean U_0 y V_0 subconjuntos abiertos de X tales $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \emptyset$. Notemos que $\overline{U_0} \cap F$ y $\overline{V_0} \cap F$ son subconjuntos abiertos de F ajenos. Como $dim(F) = 0$, por el teorema 2.24, existe (A_1, B_1) separación de F tal que $\overline{U_0} \cap F \subset A_1$ y $\overline{V_0} \cap F \subset B_1$. Como A_1 y B_1 son subconjuntos cerrados de F y F es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $A_1 \cup \overline{U_0}$ y $B_1 \cup \overline{V_0}$ son subconjuntos cerrados de X. Notemos que

$$
\begin{aligned}
(A_1 \cup \overline{U_0}) \cap (B_1 \cup \overline{V_0}) &= (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap \overline{V_0}) \cup (\overline{U_0} \cap B_1) \cup (\overline{U_0} \cap \overline{V_0}) \\
&= \emptyset \cup (A_1 \cap \overline{V_0}) \cup (\overline{U_0} \cap B_1) \cup \emptyset \\
&= (A_1 \cap \overline{V_0}) \cup (\overline{U_0} \cap B_1).
\end{aligned}
$$

Si $x \in (A_1 \cap \overline{V_0})$, entonces, $x \in F \cap \overline{V_0}$. Luego, $x \in B_1$. Lo cual es una contradicción, puesto que $x \in A_1$. Así, $(A_1 \cap \overline{V_0}) = \emptyset$. De la misma manera, $\overline{U_0} \cap B_1 = \emptyset$. Por tanto, $A_1 \cap \overline{U_0}$ y $B_1 \cup \overline{V_0}$ son ajenos. Como X es normal, por el teorema 1.44, existen U_1 y V_1 subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$, $A_1 \cap \overline{V_0} \subset U_1$ y $\overline{U_0} \cap B_1 \subset V_1$. En consecuencia, $U_0 \subset U_1$, $V_0 \subset V_1$ y $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$. Además, $F = A_1 \cup B_1 \subset U_1 \cup V_1$. Por tanto, se concluye la prueba de este lema. $\square$

Lema 2.37. *Sean X un espacio métrico separable y $\{F_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos cerrados de X de dimensión cero. Si U_0 y V_0 son subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \emptyset$, entonces existen $\{U_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ y $\{V_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ colecciones de subconjuntos abiertos de X tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple*

(a) $U_{i-1} \subset U_i$, $V_{i-1} \subset V_i$ *y* $\overline{U_i} \cap \overline{V_i}$,

(b) $F_i \subset U_i \cup V_i$.

La prueba de este lema se hace usando de manera recursiva el lema 2.36.

Teorema 2.38 (Teorema de la suma para dimensión cero). *Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ es un espacio métrico separable, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es cerrado de X y $dim(F_i) = 0$, entonces $dim(X) = 0$.*

Demostración. Sean C y D subconjuntos cerrados de X ajenos. Por el teorema 2.24, bastará encontrar (U, V) separación de X tal que $C \subset U$ y $D \subset V$. Como X es normal, por el teorema 1.44, existen U_0 y V_0 subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $C \subset U_0$, $D \subset V_0$ y $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \emptyset$.
Usando el lema 2.37, tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existen U_i y V_i subconjuntos abiertos de X tales que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$U_{i-1} \subset U_i,\ V_{i-1} \subset V_i \text{ y } \overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset, \tag{2.1}$$

$$F_i \subset U_i \cup V_i. \tag{2.2}$$

Sean

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \text{ y } V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i.$$

Probemos que (U, V) es una separación de X. Notemos que, U y V son subconjuntos abiertos de X no vacíos.

Además, usando la hipótesis y (2.2), tenemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \cup V_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \subset U \cup V.$$

Así, $X \subset U \cup V$. Por tanto, $X = U \cup V$. Ahora, veamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in U \cap V$. Entonces, $x \in (\bigcup_{i=0}^{\infty} U_i) \cap (\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i)$. Por tanto, existen $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $x \in U_k$ y $x \in V_l$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $k < l$. Así, por (2.1), tenemos que $x \in U_k \subset U_l$, y por consiguiente $x \in U_l \cap V_l$, lo cual es una contradicción puesto que $\overline{U_l} \cap \overline{V_l} = \emptyset$. Por tanto, (U, V) una separación de X. Finalmente, como $C \subset U_0 \subset U$ y $D \subset V_0 \subset V$, por el teorema 2.24, tenemos que $dim(X) = 0$. . $\square$

Notemos que en el teorema 2.38, la condición de que los F_i sean cerrados es importante para concluir el resultado, pero podemos debilitar esta condición a que los F_i sean conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ y obtener el mismo resultado, lo cual se resume en el siguiente corolario.

Corolario 2.39. *Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ es un espacio métrico separable, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X y $dim(F_i) = 0$, entonces $dim(X) = 0$.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}$. Como F_i es un conjunto F_σ de X, tenemos que $F_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{(i,j)}$, donde $W_{(i,j)}$ es un subconjunto cerrado de X. Dado que $W_{(i,j)} \subset F_i$ y $dim(F_i) = 0$, por el teorema 2.5 tenemos que $dim(W_{(i,j)}) = 0$. Luego,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} W_{(i,j)} \right) = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} W_{(i,j)}.$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, tenemos que X es unión numerable de subconjuntos cerrados de dimensión cero. Por el teorema 2.38, concluimos que $dim(X) = 0$. $\square$

Corolario 2.40. *Si $X = Y \cup Z$ un espacio métrico separable, donde Y es un subconjunto cerrado de X y Z un subconjunto de X tales que $dim(Y) = 0$ y $dim(Z) = 0$, entonces $dim(X) = 0$.*

Demostración. Si $Y = X$, se tiene el resultado. Supongamos que $Y \neq X$. Entonces, $X - Y$ es no vacío. Como $X = Y \cup Z$, tenemos que $X - Y \subset Z$. Así, por el teorema 2.5, $dim(X - Y) = 0$. Como todo subconjunto abierto de un espacio métrico X es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ y dado que $X = Y \cup (X - Y)$, entonces aplicando el teorema 2.39 tenemos que $dim(X) = 0$. $\square$

Hasta el momento solo hemos visto resultados de dimensión de uniones para el caso de dimensión cero, pero estos pueden ser generalizados para dimensión n. Sin embargo, el caso de dimensión cero, es importante para facilitar la demostración de los resultados para dimensión n.

Lema 2.41. *Si $X = Y \cup Z$ es un espacio métrico separable tal que $dim(Y) \leq n-1$ y $dim(Z) \leq 0$, entonces $dim(X) \leq n$.*

Demostración. Si $dim(Z) < 0$, entonces la $Z = \emptyset$. Luego, $X = Y$. En consecuencia, $dim(X) \leq n-1$. Cumpliéndose así el resultado. Ahora, supongamos que $dim(Y) \leq n-1$ y $dim(Z) = 0$. Sean $x \in X$ y U subconjunto abierto de X con $x \in U$. Notemos que $\{x\}$ y $X - U$ son subconjuntos cerrados de X ajenos. Entonces, por el teorema 2.26, existe $P \subset X - Z$ que separa a $\{x\}$ y $X - U$, es decir, existen A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de X tales que (A_1, A_2) es una separación de $X - P$ y cumple que $\{x\} \subset A_1$, $X - U \subset A_2$. Notemos que $P = X - (A_1 \cup A_2)$ y $X - A_2 \subset U$.

Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $A_1 \subset X - A_2 \subset U$. Así, $A_1 \subset U$. Para concluir la prueba, bastará probar que $dim(\text{fr}(A_1)) \leq n-1$. Dado que $X - A_2$ es un subconjunto cerrado de X, entonces $\overline{A_1} \subset X - A_2$. Así,

$$\begin{aligned}
\text{fr}(A_1) &= \overline{A_1} \cap \overline{X - A_1} \\
&= \overline{A_1} \cap X - A_1 \\
&\subset (X - A_2) \cap (X - A_1) \\
&= (X - A_2) - A_1 \\
&= X - (A_1 \cup A_2) \\
&= P.
\end{aligned}$$

Es decir, $\text{fr}(A_1) \subset P$ y como $P \subset X - Z \subset Y$, entonces $\text{fr}(A_1) \subset Y$. Por el teorema 2.5, $dim(\text{fr}(A_1)) \leq dim(Y)$. Como $dim(Y) \leq n-1$, tenemos que $dim(\text{fr}(A_1)) \leq n-1$. Por lo tanto, $dim(X) \leq n$. □

Teorema 2.42 (Teorema de la suma para dimensión n). *Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ es un espacio métrico separable tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es un subconjunto cerrado de X y $dim(F_i) \leq n$, entonces $dim(X) \leq n$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre $dim(F_i)$. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $dim(F_i) = -1$, entonces $F_i = \emptyset$ de lo cual se sigue que $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ y como $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, entonces $X = \emptyset$. Así, $dim(X) = -1$. Por el teorema 2.38, se tiene el caso para $n = 0$.
Ahora, supongamos que el resultado se cumple para todo natural menor a n. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ un espacio métrico separable, donde cada F_i es subconjunto cerrado de X con $dim(F_i) \leq n$. Entonces, por el corolario 2.4, para cada

$i \in \mathbb{N}$, existe $\mathcal{B}_i$ base numerable de F_i tal que para cada $V \in \mathcal{B}_i$, se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Sea

$$Y = \bigcup \{\mathrm{fr}(V) \colon V \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i\}$$

un subespacio de X. Como Y es unión numerable de subconjuntos cerrados de Y con dimensión menor igual a $n-1$, por la hipótesis de inducción, $dim(Y) \leq n-1$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $Z_i = F_i - Y$ y $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Notemos que, $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i - Y$, es decir, $Z = X - Y$. Dado que $Z_i = F_i - Y$, para cada $V \in \mathcal{B}_i$, se tiene que $Z_i \cap \mathrm{fr}(V) = \emptyset$. Luego, por el teorema 2.28, $dim(Z_i) \leq 0$. Más aún, $Z_i = F_i - Y = F_i \cap (X - Y) = F_i \cap Z$. Como F_i es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $F_i \cap Z$ es un subconjunto cerrado de Z. En consecuencia, $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, donde cada Z_i es subconjunto cerrado de Z y $dim(Z_i) \leq 0$. Por la hipótesis de inducción, se tiene que $dim(Z) \leq 0$.

Por tanto, hemos descompuesto a X como la unión de los subespacios Y y Z, donde $dim(Y) \leq n-1$ y $dim(Z) \leq 0$. Por el lema 2.41, concluimos que $dim(X) \leq n$. □

Corolario 2.43. *Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ es un espacio métrico separable, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X y $dim(F_i) \leq n$, entonces $dim(X) \leq n$.*

Demostración. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X. Como F_i es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X, tenemos que $F_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{(i,j)}$, donde cada $W_{(i,j)}$ es un conjunto cerrado de X. Notemos que para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $W_{(i,j)} \subset F_i$. Por el teorema 2.5, $dim(W_{(i,j)}) \leq n$. Luego,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} W_{(i,j)} \right) = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} W_{(i,j)}.$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, tenemos que X es unión numerable de subconjuntos cerrados de dimensión n. Así, por el teorema 2.42, concluimos que $dim(X) \leq n$. □

Corolario 2.44. *Sean X un espacio métrico separable y Y, Z subespacios de X tales que $X = Y \cup Z$. Si $dim(Y) \leq n$ y $dim(Z) \leq n$ con Y un subconjunto cerrado de X, entonces $dim(X) \leq n$.*

Demostración. Si $Y = X$, se tiene el resultado. Supongamos que $Y \neq X$. Entonces, $X - Y$ es no vacío. Como $X = Y \cup Z$, tenemos que $X - Y \subset Z$.

Así, por el teorema 2.5, $dim(X - Y) \leq n$. Como todo subconjunto abierto de un espacio métrico X es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ y dado que $X = Y \cup (X - Y)$, entonces aplicando el corolario 2.43 concluimos que $dim(X) \leq n$. □

A continuación, mostraremos que si los subespacios no son cerrados, entonces la dimensión de la suma puede incrementarse pero a lo más por uno.

Teorema 2.45. *Sean X un espacio métrico separable y X_1, X_2 subespacios de X. Entonces, $dim(X_1 \cup X_2) \leq dim(X_1) + dim(X_2) + 1$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre $dim(X_1)$ y $dim(X_2)$. El teorema se cumple cuando $dim(X_1) = -1$ o $dim(X_2) = -1$ y también si $dim(X_1) = \infty$ o $dim(X_2) = \infty$ el teorema se cumple. Sean $dim(X_1) = m$ y $dim(X_2) = n$. Supongamos que el resultado se cumple para cualesquiera espacios Z_1 y Z_2 que satisfagan alguna de las condiciones siguientes:

$$dim(Z_1) \leq m,\ dim(Z_2) \leq n - 1 \tag{2.3}$$

$$dim(Z_1) \leq m - 1,\ dim(Z_2) \leq n. \tag{2.4}$$

Sea $x \in X_1 \cup X_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in X_1$. Sea U un subconjunto abierto de $X_1 \cup X_2$ con $x \in U$. Luego, $U \cap X_1$ es un subconjunto abierto de X_1 con $x \in U \cap X_1$. Como $dim(X_1) = m$, existe W subconjunto abierto de X_1 tal que $x \in W \subset U \cap X_1$ y $dim(\mathrm{fr}_{X_1}(W)) \leq m-1$. Además, existe W' subconjunto abierto de X tal que $W' \cap X_1 = W$. Sea $V = W' \cap U$. Por el teorema 2.5, tenemos que $dim(\mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2)) \leq dim(X_2)$. Así, $dim(\mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2)) \leq n$. Entonces, $\mathrm{fr}_{X_1}(W)$ y $\mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2)$ cumplen 2.4. Usando la hipótesis de inducción, $dim(\mathrm{fr}_{X_1}(W) \cup \mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2)) \leq m + n$. Aplicando el teorema 1.6 y $W = V \cap X_1$, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathrm{fr}_{X_1 \cup X_2}(V) &= \mathrm{fr}_{X_1 \cup X_2}(V) \cap (X_1 \cup X_2) \\
&= (\mathrm{fr}_{X_1 \cup X_2}(V) \cap X_1) \cup (\mathrm{fr}_{X_1 \cup X_2}(V) \cap X_2) \\
&= \mathrm{fr}_{X_1}(V \cap X_1) \cup \mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2) \\
&= \mathrm{fr}_{X_1}(W) \cup \mathrm{fr}_{X_2}(V \cap X_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $dim(\mathrm{fr}_{X_1 \cup X_2}(V)) \leq m + n$. Así, $dim(X_1 \cup X_2) \leq m + n + 1$. Concluyendo así, la inducción y el teorema. □

Los siguientes resultados se utilizan para descomponer un espacio de dimensión n en $n + 1$ subespacios de dimensión cero.

Corolario 2.46 (Primer teorema de descomposición). *Si X es un espacio métrico separable y $dim(X) \leq n$, entonces existen Y, Z tales que $X = Y \cup Z$, donde $dim(Y) \leq n-1$ y $dim(Z) \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) \leq n$. Entonces, por el corolario 2.4, existe $\mathcal{B}$ base numerable de X tal que para cada $V \in \mathcal{B}$, se cumple que $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n-1$. Sea $Y = \bigcup\{\mathrm{fr}(V) \colon V \in \mathcal{B}\}$. Notemos que Y es unión numerable de subconjuntos cerrados de X. Aplicando el teorema 2.42, $dim(Y) \leq n-1$. Definimos a $Z = X - Y$. Como para cada $V \in \mathcal{B}$, $\mathrm{fr}(V) \subset Y$, se tiene que $Z \cap \mathrm{fr}(V) = \emptyset$. Así, aplicando el teorema 2.28, tenemos que $dim(Z) \leq 0$. □

Teorema 2.47 (Segundo teorema de descomposición). *Sea X un espacio métrico separable. Entonces, $dim(X) \leq n$, donde n es finito si y solo si existen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ subespacios de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $dim(Z_i) \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) \leq n$, donde n es finito. Afirmamos que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, Y_{k+1}$ subespacios de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i \cup Y_{k+1}$, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $dim(Z_i) \leq 0$ y $dim(Y_{k+1}) \leq n-k$. La prueba se hará por inducción finita.

Si $k = 1$, por el teorema 2.46 existen Z_1 y Y_2 tales que $dim(Z_1) \leq 0$, $dim(Y_2) \leq n-1$ y $X = Z_1 \cup Y_2$. Así, para $k = 1$ se cumple la propiedad anterior.

Supongamos que para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, existen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, Y_{k+1}$ subespacios de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i \cup Y_{k+1}$, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $dim(Z_i) \leq 0$ y $dim(Y_{k+1}) \leq n-k$. Aplicando el teorema, 6 a Y_{k+1}, existen Z_{k+1}, Y_{k+2} tales que $Y_{k+1} = Z_{k+1} \cup Y_{k+2}$, $dim(Z_{k+1}) \leq 0$ y $dim(Y_{k+2}) \leq n-k-1 = n-(k+1)$. Notemos que $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} Z_i \cup Y_{k+2}$. De esto se concluye la inducción. En particular, para $k = n$, tenemos que existen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ subespacios de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $dim(Z_i) \leq 0$.

Ahora, probemos la otra implicación. Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ subespacios de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$ y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $dim(Z_i) \leq 0$. Afirmamos que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $dim(\bigcup_{i=1}^{k} Z_i) \leq k-1$. La prueba se hará por inducción finita.

Si $k = 1$, entonces $dim(\bigcup_{i=1}^{1} Z_i) = dim(Z_1) \leq 0$. Así, para $k = 1$ se cumple la desigualdad anterior.

Supongamos que para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $dim\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right) \leq k - 1$. Como $dim(Z_{k+1}) \leq 0$, por el teorema 6

$$dim\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} Z_i\right) = dim\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i \cup Z_{k+1}\right) \leq k - 1 + 0 + 1 = k.$$

Esto concluye la inducción finita.

En particular, tenemos que $dim(X) = dim(\bigcup_{i=1}^{k+1} Z_i) \leq n$. □

Ahora, en este punto de la teoría llevada, daremos una versión más precisa del teorema 2.26. Veamos el siguiente resultado.

Teorema 2.48. *Sean X un espacio métrico separable, C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos, Y es un subespacio de X y $dim(Y) \leq n$. Entonces, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $dim(P \cap Y) \leq n - 1$.*

Demostración. Sean X un espacio métrico separable y C_1, C_2 subconjuntos cerrados de X ajenos. Si $n = 0$, entonces $dim(Y) \leq 0$. Supongamos que $dim(Y) = -1$. Como X es normal, existen A_1 y A_2 subconjuntos abiertos de X ajenos tales que $C_1 \subset A_1$ y $C_2 \subset A_2$. Sea $P = X - (A_1 \cup A_2)$. Así, (A_1, A_2) es una separación de $X - P$. Además, como $P \cap Y \subset Y$. Por el teorema 2.5, $dim(P \cap Y) \leq dim(Y)$. Así, $dim(P \cap Y) = -1$. Por tanto, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $dim(P \cap Y) \leq dim(Y)$. En caso de que $dim(Y) = 0$, por el teorema 2.26, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P \subset X - Y$, es decir, $dim(P \cap Y) = -1$.

Ahora, supongamos que $n > 0$. Por el corolario 2.46, existen W, Z tales que $Y = W \cup Z$, donde $dim(W) \leq n - 1$ y $dim(Z) \leq 0$. Luego, por el teorema 2.26, existe P subconjunto de X que separa a C_1 y C_2 tal que $P \subset X - Z$. Notemos que $P \cap Y \subset W$. Por el teorema 2.5, se tiente que $dim(P \cap Y) \leq dim(W)$. Por lo tanto, $dim(P \cap Y) \leq n - 1$. □

2.4. Dimensión del espacio producto

Uno de los espacios que frecuentemente utilizamos es el espacio producto, por eso es importante saber que pasa con la dimensión de estos. A continuación, veremos algunos resultados que son de gran importancia.

Teorema 2.49 (Teorema del producto cartesiano para dimensión cero). *Sea* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *el producto cartesiano, donde* $\{X_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ *es una familia numerable de espacios métricos separables. Entonces,* $dim(X) = 0$ *si y solo si para cada* $i \in \mathbb{N}$*,* $dim(X_i) = 0$*.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = 0$. Notemos que si algún X_i fuera vacío, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i = \emptyset$. Luego, $dim(X) = -1$. Así, cada X_i es no vacío.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N} - \{k\}$, existe $x_j \in X_j$. Sea $Z_j = \{x_j\}$ para cada $j \in \mathbb{N} - \{k\}$ y $Z_k = X_k$. Entonces, $\prod_{i=1}^{\infty} Z_i \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Dado que X_k es homeomorfo a $\prod_{i=1}^{\infty} Z_i$ y usando el teorema 2.5, $dim(X_k) \leq 0$. Como X_k es no vacío, $dim(X_k) = 0$.

Ahora, supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $dim(X_i) = 0$. Entonces, por el teorema 2.15, existe una base numerable de conjuntos abiertos y cerrados de X_i. Sea

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \colon U_n \in \mathcal{B}_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base numerable en X. Probemos que $\bigcup \mathcal{B} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Es evidente que $\bigcup \mathcal{B} \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces veamos que $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \subset \bigcup \mathcal{B}$. Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Como $\mathcal{B}_1$ es base en X_1, existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $x_1 \in V$. Así, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in V \times \prod_{i=2}^{\infty} X_i$. De lo cual se sigue que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \bigcup \mathcal{B}$. Por tanto, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \subset \bigcup \mathcal{B}$. Concluimos que $\bigcup \mathcal{B} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$B_1 = V_1 \times \ldots \times V_m \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i \ \text{ y } \ B_2 = W_1 \times \ldots \times W_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i.$$

Supongamos que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n \geq m$. Notemos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $V_i \cap W_i \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}_i$ es base, existe $U_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $U_i \subset V_i \cap W_i$. Si $n > m$ definimos a $U_j = W_j$ para $j \in \{m+1, \ldots, n\}$. Sea $B = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$. Entonces, $B \in \mathcal{B}$ y $B \subset B_1 \cap B_2$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base en X.

Ahora, veamos que $\mathcal{B}$ es numerable. Para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea

$$\mathcal{B}_n^* = \{B \in \mathcal{B} \colon B = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\}.$$

Notemos que $\mathcal{B}_n^*$ es numerable puesto que existe $f\colon \mathcal{B}_n^* \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ función biyectiva. Luego, como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable y $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^*$, concluimos que $\mathcal{B}$ es numerable. Por el teorema 2.15, tenemos que $dim(X) = 0$. $\square$

Teorema 2.50 (**Teorema del producto para dimensión n**). *Sean X_1 y X_2 espacios métricos separables, donde $X_1 \neq \emptyset$ o $X_2 \neq \emptyset$. Si $X = X_1 \times X_2$, entonces $dim(X) \leq dim(X_1) + dim(X_2)$.*

Demostración. Notemos que si uno de los espacios tiene dimensión infinita el teorema se cumple. Ahora, supongamos que ambos espacios tienen dimensión finita. Hagamos la prueba por inducción sobre $dim(X_1)$ y $dim(X_2)$.

Si $dim(X_1) = -1$, entonces $X_1 = \emptyset$ y por tanto, $X_2 \neq \emptyset$. Además, $X_1 \times X_2 = \emptyset$. Así, $dim(X) = -1$, $dim(X_1) = -1$ y $dim(X_2) \geq 0$. De esto que $dim(X) \leq dim(X_1) + dim(X_2)$.

Sean $dim(X_1) = m$ y $dim(X_2) = n$. Supongamos que el resultado se cumple para cualesquiera espacios Z_1 y Z_2 que satisfagan alguna de las condiciones siguientes:

$$dim(Z_1) \leq m, \quad dim(Z_2) \leq n - 1 \tag{2.5}$$

$$dim(Z_1) \leq m - 1, \quad dim(Z_2) \leq n \tag{2.6}$$

Sean $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ y W un subconjunto abierto de $X_1 \times X_2$ tal que $(x_1, x_2) \in W$. Como W es un subconjunto abierto de $X_1 \times X_2$, existen U subconjunto abierto de X_1 y V subconjunto abierto de X_2 con $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \times V \subset W$.
Dado que $dim(X_1) = m$ y $dim(X_2) = n$, existen U_1 subconjunto abierto de X_1 y V_1 subconjunto abierto de X_2 tales que $x_1 \in U_1 \subset U$, $dim(\mathrm{fr}(U_1)) \leq m - 1$ y $x_2 \in V_1 \subset V$, $dim(\mathrm{fr}(V_1)) \leq n - 1$. Luego, $(x_1, x_2) \in U_1 \times V_1 \subset U \times V \subset W$. Así, X_1 y $\mathrm{fr}_{X_2}(V_1)$ satisfacen 2.5, por la hipótesis de inducción $dim(X_1 \times \mathrm{fr}_{X_2}(V_1)) \leq m + (n-1)$. Análogamente, como X_2 y $\mathrm{fr}_{X_1}(U_1)$ satisfacen 2.6, por la hipótesis de inducción $dim(\mathrm{fr}_{X_1}(U_1) \times X_2) \leq (m-1) + n$.

Notemos que $\mathrm{fr}_{X_1 \times X_2}(U_1 \times V_1) \subset (\mathrm{fr}_{X_1}(U_1) \times X_2) \cup (X_1 \times \mathrm{fr}_{X_2}(V_1))$. Dado que $\mathrm{fr}_{X_1}(U_1) \times X_2$ y $X_1 \times \mathrm{fr}_{X_2}(V_1)$ son subconjuntos cerrados de $X_1 \times X_2$, por los teoremas 2.42 y 2.5 concluimos que $dim(\mathrm{fr}_{X_1 \times X_2}(U_1 \times V_1)) \leq m + n - 1$. Así, $dim(X_1 \times X_2) \leq m + n$. Esto concluye la inducción y la prueba del teorema. $\square$

Corolario 2.51. *Sean X y Y espacios métricos separables con X no degenerado. Entonces, para cada $p \in X$, $dim(X \times Y) = dim((X - \{p\}) \times Y)$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Notemos que $X \times Y = (X - \{p\} \times Y) \cup (\{p\} \times Y)$. Sea $k = dim(X - \{p\} \times Y)$. Como X es no degenerado, $\{p\} \times Y$ lo podemos ver topológicamente contenido en $X - \{p\} \times Y$. Así, $dim(\{p\} \times Y) \leq k$. Observemos que $\{p\} \times Y$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Luego, por el corolario 2.44, tenemos que $dim(X \times Y) \leq k$. Además, por el teorema 2.5, $k \leq dim(X \times Y)$. Por lo tanto, $dim(X \times Y) = dim(X - \{p\} \times Y)$. $\square$

Hasta este punto de la teoría ya vista hace falta mostrar cómo es que la podemos aplicar, por eso es que en el siguiente capítulo nos dedicaremos a dar ejemplos de espacios cuya dimensión es uno y otros más cuya dimensión es mayor a uno.

Capítulo 3

Ejemplos del concepto de dimensión

La motivación de este capítulo es limitarnos simplemente a algunos continuos de dimensión uno, las llamadas “curvas”, pues la teoría del continuo pudo haber nacido de los intentos de comprenderlas. Exploraremos ciertos temas de la teoría de continuos que nos permitan probar cuándo un continuo tiene dimensión uno.

A continuación, daremos ejemplos que son de gran importancia, de algunos espacios cuya dimensión es uno y que además son muy conocidos en la topología.

3.1. Espacios de dimensión uno

El lema que a continuación presentamos, nos muestra que todo intervalo en la recta real tiene dimensión uno.

Lema 3.1. *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ con $card(I) > 1$. Entonces, $dim(I) = 1$.*

Demostración. Notemos que I es un espacio métrico conexo que tiene más de un punto. Por el teorema 2.14, $dim(I) > 0$, es decir, $dim(I) \geq 1$. De este modo, basta probar que $dim(I) \leq 1$. Para esto, sean $p \in I$ y U un subconjunto abierto de I con $p \in U$. Entonces, por la topología de subespacio, existe W subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $U = I \cap W$. Notemos que el conjunto de intervalos $\{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para $\mathbb{R}$. Entonces, existe un intervalo abierto (a_0, b_0) tal que $p \in (a_0, b_0) \subset W$.

Sea $V = I \cap (a_0, b_0)$. Luego, V es un subconjunto abierto de I tal que $p \in V \subset U$. Aplicando el teorema 1.7 *(a)*, $\mathrm{fr}_I(V) = \mathrm{fr}_I(I \cap (a_0, b_0)) \subset \mathrm{fr}_{\mathbb{R}}((a_0, b_0))$. Como $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}((a_0, b_0)) = \{a_0, b_0\}$, entonces $\mathrm{fr}_I(V)$ es finito o vacío y por el teorema 2.10, tenemos que $dim(\mathrm{fr}_I(V)) \leq 0$. Así, $dim(I) \leq 1$. Por lo tanto, $dim(I) = 1$. □

Una aplicación del lema anterior (y del teorema 2.42), es la siguiente prueba alternativa de que la $dim(\mathbb{R}) = 1$ usando únicamente que los intervalos cerrados tienen dimensión uno.

Corolario 3.2. *$dim(\mathbb{R}) = 1$.*

Demostración. Recordemos que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico separable. Además,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$$

Por el lema 3.1, $dim([-n, n]) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando el teorema 2.42, tenemos que $dim(\mathbb{R}) \leq 1$. Por otra parte, como $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$, usando el teorema 2.5, se tiene que $1 \leq dim(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $dim(\mathbb{R}) = 1$. □

La definición de espacio compacto es más complicada que la que usaremos aquí pero nos servirá para ver más fácil esta propiedad.

Teorema 3.3 (Heine Borel)**.** *[2, 11.3; pág. 74] Sean $\mathbb{R}^n$ un espacio métrico y $K \subset \mathbb{R}^n$. K es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.*

Otro resultado que es muy útil y no se restringe a solo $\mathbb{R}^n$ se enuncia a continuación.

Teorema 3.4. *[11, Teorema 26.3; pág. 165] Sea X un espacio métrico y $K \subset X$. Si K es compacto, entonces K es un subcojunto cerrado de X.*

Definición 3.5. *Un* **continuo** *es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un* **subcontinuo** *es un subconjunto de un continuo que también es un continuo.*

El intervalo cerrado $[0, 1]$ es un ejemplo sencillo de continuo ya que es un subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}$ y a su vez, cerrado y acotado concluyendo así que es compacto. Además, todo intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo y por lo tanto, $[0, 1]$ es un continuo.

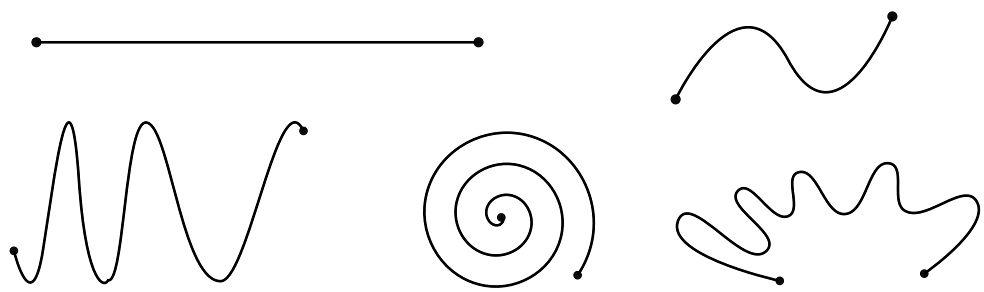


Figura 3.1: Ejemplos de arcos.

Definición 3.6. *Un* **arco** *es un espacio topológico que es homeomorfo al continuo* $[0,1]$. *Véase la figura 3.1.*

Como la compacidad y la conexidad son propiedades topológicas, se tiene que todo espacio homeomorfo a un continuo es un continuo, en particular, el arco es un continuo.

Corolario 3.7. *Si A es un arco, entonces $dim(A) = 1$.*

Demostración. Sea A un arco. Como A es homeomorfo a $[0,1]$, por el teorema 2.2 , tenemos que $dim(A) = dim([0,1])$. Por el lema 3.1, sabemos que $dim([0,1]) = 1$. Por lo tanto, $dim(A) = 1$. $\square$

Definición 3.8. *La circunferencia unitaria, denotada por $\mathcal{S}^1$, es el conjunto* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. *Una* **curva cerrada simple** *es cualquier espacio homeomorfo a $\mathcal{S}^1$. Véase la figura 3.2.*

Lema 3.9. $dim(\mathcal{S}^1) = 1$.

Demostración. Por el teorema 2.10, $dim(\mathcal{S}^1) > 0$. Sean

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1 \text{ y } y \geq 0\} \text{ y}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1 \text{ y } y \leq 0\}.$$

Notemos que A_1 y A_2 son arcos y $\mathcal{S}^1 = A_1 \cup A_2$. Por el corolario 3.7, se tiene que $dim(A_1) = 1$ y $dim(A_2) = 1$. Como A_1 y A_2 son continuos, en particular, son compactos. Luego, por el teorema 3.3, A_1 y A_2 son subconjuntos cerrados de $\mathcal{S}^1$. Por el teorema 2.42, $dim(\mathcal{S}^1) \leq 1$. Por lo tanto, $dim(\mathcal{S}^1) = 1$. $\square$

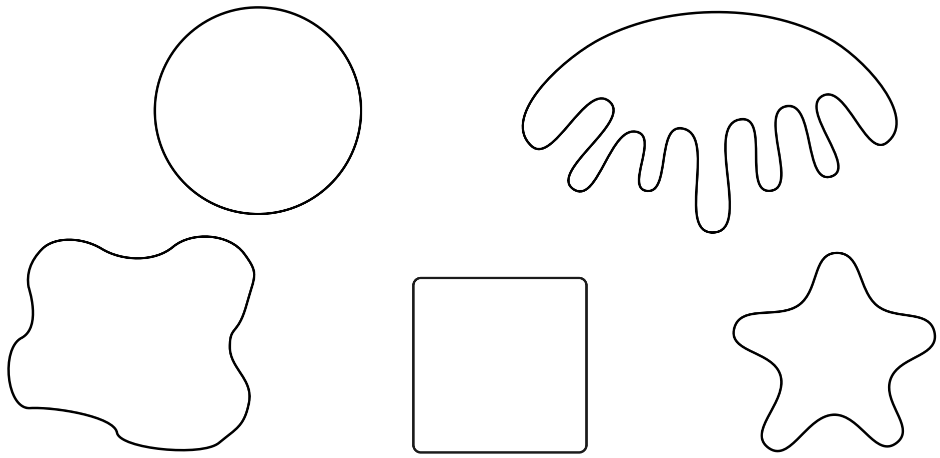


Figura 3.2: Ejemplos de curvas cerradas simples.

Como la dimensión se preserva bajo homeomorfismos, el siguiente resultado es fácil de probar.

Corolario 3.10. *Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, entonces $dim(\mathcal{C}) = 1$.*

A continuación, veamos una clase de continuos que es una generalización del arco y la curva cerrada simple, pero que depende de estos espacios.

Definición 3.11. *Una* **gráfica finita** *es un continuo que se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que cualesquiera dos de ellos o son ajenos o se intersectan en uno o en ambos de sus puntos extremos.*

Antes de ver qué dimensión tienen las gráficas finitas, veamos algunos ejemplos de estas que son muy conocidos en la teoría de continuos para hacernos una idea de su dimensión.

Ejemplo 3.12. *Una* **paleta** *es la unión de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ y un arco A tal que $\mathcal{C} \cap A = \{x\}$, donde x es un punto extremo de A. Véase la figura 3.3.*

En la prueba del teorema 3.9, la circunferencia unitaria se separó en dos arcos. De este hecho y de que una curva cerrada simple es homeomorfo a $\mathcal{S}^1$, tenemos que toda curva cerrada simple es unión de dos arcos. En consecuencia, la paleta es una gráfica finita.

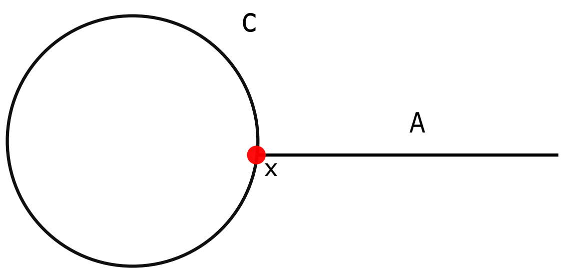


Figura 3.3: Paleta.

Teorema 3.13. *Si $\mathcal{P}$ una paleta, entonces $dim(\mathcal{P}) = 1$.*

Demostración. Al ser $\mathcal{P}$ una paleta, tenemos que $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup A$, donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple y A es un arco. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$, por el teorema 2.5 y el corolario 3.10, $dim(\mathcal{P}) \geq 1$. Por otro lado, como $\mathcal{C}$ y A son continuos, en particular son compactos. Luego, por el teorema 3.4, $\mathcal{C}$ y A son cerrados de $\mathcal{P}$. Aplicando el teorema 2.42, tenemos que $dim(\mathcal{P}) \leq 1$. Por lo tanto, $dim(\mathcal{P}) = 1$. □

Ejemplo 3.14. *El* **símbolo infinito** *es la unión de dos curvas cerradas simples cuya intersección es solo un punto. Véase la figura 3.4.*

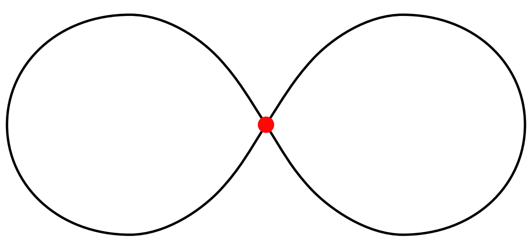


Figura 3.4: Símbolo infinito.

Del hecho de que una curva cerrada simple es la unión de dos arcos, tenemos que el símbolo infinito es una gráfica finita.

Definición 3.15. *Un* **triodo simple** *es una gráfica finita T que es unión*

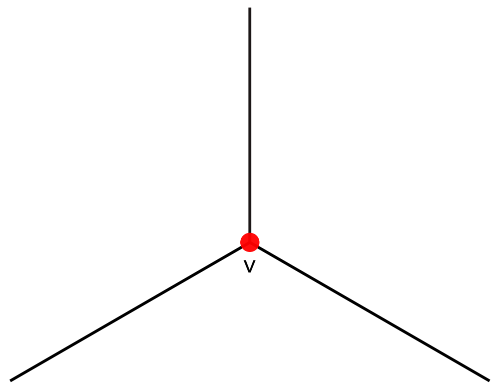


Figura 3.5: Triodo.

de tres arcos que se intersectan en un punto extremo en común v, el cual es llamado vértice de T. Véase la figura 3.5

Usando una técnica similar a la que se usó para probar que la dimensión de una paleta es uno, se puede probar que la dimensión del símbolo infinito y el triodo simple es uno.

Esto nos ha dado la idea para poder demostrar el resultado general siguiente.

Teorema 3.16. *Si G es una gráfica finita, entonces $dim(G) = 1$.*

Demostración. Al ser G una gráfica finita, tenemos que $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde cada A_i es un arco. Por el teorema 2.10, $dim(G) > 0$. Por otro lado, como los A_i son continuos, en particular son compactos. Luego, por el teorema 3.4, los A_i son cerrados de G. Aplicando el teorema 2.42, tenemos que $dim(G) \leq 1$. Por lo tanto, $dim(G) = 1$. $\square$

Definición 3.17. *Un espacio topológico X es* **localmente conexo** *si para cada punto $x \in X$ y para cada U subconjunto abierto de X con $x \in U$, existe V subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in V \subset U$.*

Definición 3.18. *Una* **dendrita** *es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 3.19. *Sea $F_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, donde $A_i = \{(\frac{r}{i+1}, \frac{r}{(i+1)^2}) \in \mathbb{R}^2 \colon r \in I\}$. Véase la figura 3.6.*

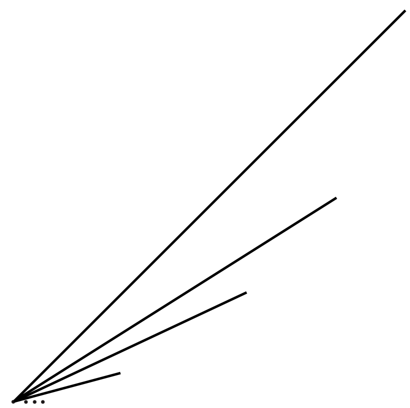


Figura 3.6: Dendrita F_ω.

Notemos que cada A_i *es un arco y si* i, j *son naturales distintos, entonces* $A_i \cap A_j = \{(0,0)\}$. *De esto que* F_ω *no tiene curvas cerradas simples. Además,* F_ω *es cerrado y acotado, y por el teorema de 3.3, es compacto. Más aún, es conexo puesto que cada arco es conexo y se intersectan en un punto en común.* F_ω *es localmente conexo gracias a que el diámetro de los arcos se hacen más pequeños cada vez. De esto que,* F_ω *es una dendrita.*

Teorema 3.20. $dim(F_\omega) = 1$.

Dado que la dimensión de cada A_i es uno, por ser un arco, y usando el teorema 2.42, tenemos que la $dim(F_\omega) = 1$.

Para el siguiente ejemplo, usaremos cierto conjunto C, el llamado conjunto de Cantor. Para ver una contrucción de C, véase [12, comentario después de 3.B.20; pág. 85].

Ejemplo 3.21. *La* **dendrita de Gehman** *se construye por inducción. Primero se toma un punto y se toman dos segmentos hacia abajo. En el paso* n, *hay* 2^{n-1} *puntos que son extremos de los segmentos que se construyeron en el paso anterior, en la parte inferior del continuo construido, a cada uno de estos segmentos se le trazan dos segmentos hacia abajo. Todo esto cuidando que no se intersecten y que además los segmentos construidos en cada paso sean cada vez más pequeños. Después se toma la cerradura de la unión de todos los continuos construidos. Se puede probar que los puntos que se añaden*

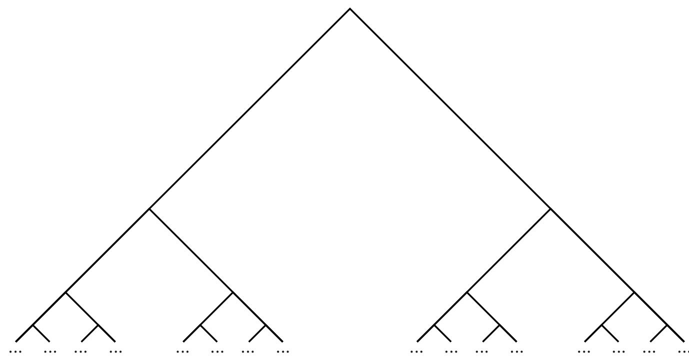


Figura 3.7: Dendrita de Gehman.

al final, al cerrar la unión, forman un conjunto de Cantor. Véase la figura 3.7.

Denotemos por G_ω a la dendrita de Gehman. Por como se ha construido G_ω, podemos notar que es unión numerable de arcos junto con un conjunto de Cantor. Es decir, $G_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup C$, donde cada A_i es un arco y C un conjunto de Cantor.

Teorema 3.22. $dim(G_w) = 1$

Demostración. Sea $p \in G_\omega$ y U un subconjunto abierto de G_ω con $p \in U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset U$. Si $p \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $\mathrm{fr}(B(p), \varepsilon))$ es finita. Por el teorema 2.10, $dim(\mathrm{fr}(B(p), \varepsilon)) = 0$. Ahora, si $p \in C$ tenemos que $\mathrm{fr}(B(p, \varepsilon))$ es a lo más numerable. Por el teorema 2.11, $dim(\mathrm{fr}(B(p, \varepsilon)) = 0$. Por lo tanto, $dim(G_\omega) \leq 1$ $\square$

Hemos mostrado dos ejemplos de dendritas que tienen dimensión uno. Sin embargo, para poder probar que toda dendrita tiene dimensión uno, la teoría aquí expuesta no es suficiente. Una manera de probarlo es construyendo la dendritra universal, véase [12, 10.37; pág. 181], la cual es el límite inverso de continuos que son unión numerable de arcos. Estos continuos que forman el sistema inverso, por el teorema 2.42, son de dimensión uno y como el límite inverso preserva la dimensión, véase [10, Teorema 2.0.26; pág. 59], resulta que la dimensión de la dendrita universal es uno. Como toda dendrita tiene una copia homeomorfa en esta dendrita universal, usando el teorema de la

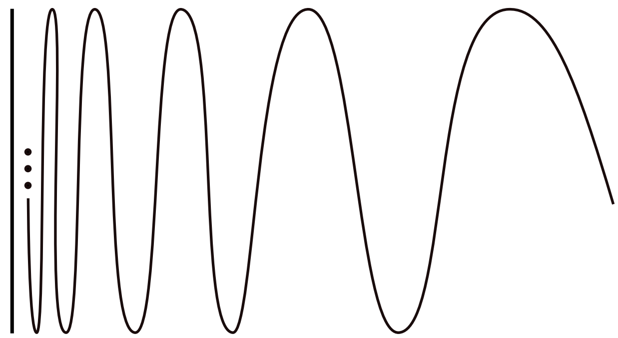


Figura 3.8: Curva senoidal.

monotonía probado en el capítulo dos, se concluye que toda dendrita tiene dimensión uno.

Definición 3.23. *Sean X, Y espacios métricos y A un subconjunto no vacío.*

(a) Decimos que el **diámetro** *de A denotado por $di\acute{a}m(A)$ es el conjunto $sup\{d(a, b) \colon a, b \in A\}$.*

(b) Una función f continua y sobreyectiva de un espacio X en un espacio Y es una **ε-función** *si para cada $y \in Y$ se cumple que $di\acute{a}m(f^{-1}(y)) < \varepsilon$.*

Definición 3.24. *Un continuo X es* **tipo-arco** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función de X en el intervalo $[0, 1]$. Un continuo X es* **tipo-círculo** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función de X en la circunferencia $\mathcal{S}^1$.*

Ejemplo 3.25. *[12, 1.5; pág. 5] La* **curva senoidal** *X es un continuo tipo-arco representado como $X = J \cup S$, donde $J = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1\}$ y $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$. Véase la figura 3.8.*

Ejemplo 3.26. *[12, 1.6; pág. 5] El* **círculo de Varsovia** *es un continuo tipo-círculo que es homeomorfo a $Y \cup Z$, donde Y es la curva senoidal y Z es la unión de tres arcos de $\mathbb{R}^2$ uno de $(0, -1)$ a $(0, -2)$, uno de $(0, -2)$ a $(1, -2)$ y uno de $(1, -2)$ a $(1, sen(1))$. Véase la figura 3.9.*

Teorema 3.27. *[10, Teorema 2.0.23; pág. 57] Sean X, Y espacios métricos compactos. Si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε- función de X en Y, entonces $dim(X) \leq dim(Y)$.*

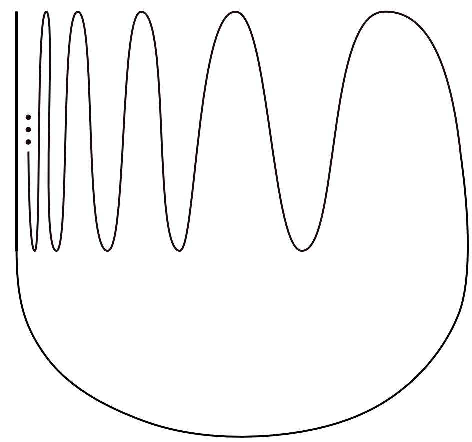


Figura 3.9: Círculo de Varsovia.

Corolario 3.28. *Si X es un continuo tipo-arco o tipo-círculo, entonces* $dim(X) = 1$.

Demostración. Sea $Y \in \{[0,1], \mathcal{S}^1\}$. Como X es tipo arco o tipo círculo, para cada $\varepsilon > 0$, existe ε-función de X en Y. Luego, por el teorema 3.27, $dim(X) \leq dim(Y)$. Dado que la $dim(Y) = 1$ y $dim(X) > 0$, se concluye que $dim(X) = 1$. $\square$

3.2. Espacios de dimensión mayor a uno

Teorema 3.29. *Si $[0,1]^2$ es un intervalo en $\mathbb{R}^2$, entonces $dim([0,1]^2) = 2$.*

Demostración. Por el teorema 2.50 y el lema 3.1, tenemos que

$$dim([0,1]^2) \leq dim([0,1]) + dim([0,1]) = 2,$$

es decir, $dim([0,1]^2) \leq 2$. Además, como $[0,1]^2$ es conexo y $card([0,1]^2) > 1$, por el teorema 2.14 tenemos que $dim([0,1]^2) > 0$. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que $dim([0,1]^2) \neq 2$. Es decir, $dim([0,1]^2) = 1$. Sean $C_1 = \{1\} \times [0,1]$, $C_1' = \{0\} \times [0,1]$, $C_2 = [0,1] \times \{1\}$ y $C_2' = [0,1] \times \{0\}$. Notemos que C_1, C_1^1, C_2 y C_2' son subconjuntos cerrados de $[0,1]^2$. Además, $C_1 \cap C_1' = \emptyset$ y $C_2 \cap C_2' = \emptyset$.

Afirmamos que existen P_1 y P_2 subconjuntos cerrados de $[0,1]^2$ tales que P_1 separa a C_1 y C_1' y P_2 separa a C_2 y C_2' y $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Por el corolario 2.46, existen Y, Z tales que $[0,1]^2 = Y \cup Z$, donde $dim(Y) \leq 0$ y $dim(Z) \leq 0$, es decir, $dim(Y) = 0$ y $dim(Z) = 0$. Luego, por el teorema 2.26, existe P_1 subconjunto de $[0,1]^2$ tal que P_1 separa a C_1 y $C_1^{'}$ y $P_1 \subset X - Y = Z$. Aplicando el teorema 2.5 $dim(P_1) \leq dim(Z) \leq 0$. Si $P_1 = \emptyset$, entonces $[0,1]^2$ es disconexo lo cual no es posible. Así, $dim(P_1) = 0$. Por el teorema 2.26, existe P_2 subconjunto de $[0,1]^2$ que separa a C_2 y $C_2^{'}$ tal que $P_2 \subset X - P_1$, es decir, $P_2 \cap P_1 = \emptyset$. Como para cada $i \in \{1,2\}$, $P_i \subset [0,1]^2$ separa a C_i y $C_i^{'}$, existen $A_i, A_i^{'}$ subconjuntos abiertos de $[0,1]^2$ tales que $(A_i, A_i^{'})$ es una separación de $[0,1]^2 - P_i$, $C_i \subset A_i$ y $C_i^{'} \subset A_i^{'}$.

Sea $g\colon [0,1]^2 \to [-1,1]^2$ la función definida por

$$g(x) = (S_1(x)d(x,P_1), S_2(x)d(x,P_2)),$$

donde, para cada $i \in \{1,2\}$,

$$S_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i^{'} \cup P_i \\ -1 & \text{si } x \in A_i. \end{cases}$$

Notemos que g es una función continua. Consideremos $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$. Probemos que $x_1 + S_1(x)d(x,P_1) \in [0,1]$. Si $x \in P_1$, entonces $d(x,P_1) = 0$ y así, $x_1 + S_1(x)d(x,P_1) = x_1 \in [0,1]$. Supongamos que $x \in A_1'$. Sean T el segmento que va de x a $(1, x_2) \in C_1$. Como T es conexo y dado que (A_1, A_2) es una separación de $[0,1]^2$, $T \cap P_1 \neq \emptyset$. Sea $y \in T \cap P_1$ y $y = (t, x_2)$. Luego, $d(x,P_1) \leq d(x,y)$. Como $y \in T$, entonces y está a la derecha de x; de esto se sigue que $x_1 < t$. Así,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(t-x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} \\ &= t - x_1. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(x_1, P_1) \leq t - x_1$. En consecuencia, $0 \leq x_1 + d(x,P_1) \leq t \leq 1$. Ahora supongamos que $x \in A_1$. Sea $T^{'}$ el segmento que va de x a $(0, x_2) \in C_1^{'}$. Como T' es conexo y dado que (A_1, A_2) es una separación de $[0,1]^2$, $T^{'} \cap P_1 \neq \emptyset$. Sean $z \in T^{'} \cap P_1$ y $z = (s, x_2)$. Luego, $d(x,P_1) \leq d(x,z)$. Como $z \in T'$, entonces z está a la izquierda de x, es decir, $s < x_1$. Así,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{(s-x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} \\ &= x_1 - s. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(x_1, P_1) \leq x_1 - s$. En consecuencia, $0 \leq s \leq x_1 - d(x,P_1) \leq 1$. De esta forma, en cualquier caso,$x_1 + S_1(x)d(x,P_1) \in [0,1]$. De igual forma, se prueba que $x_2 + S_2(x)d(x,P_2) \in [0,1]$.

Lo anterior muestra que podemos considerar la función $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por $f(x) = x + g(x)$. Notemos que f es continua. Por [15, Teorema 2.64; pág. 47], existe $p \in [0,1]^2$ tal que $f(p) = p$. Así, $g(p) = 0$, es decir, $d(p, P_1) = 0 = d(p, P_2)$. Como P_1 y P_2 son subconjuntos cerrados de $[0,1]^2$, esto implica que $p \in P_1 \cap P_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $dim([0,1]^2) = 2$. $\square$

Definición 3.30. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una* **n-celda** *es un espacio homeomorfo a $[0,1]^n$.*

Corolario 3.31. $dim(2 - celda) = 2$

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una 2-celda. Como $\mathcal{D}$ es homeomorfo a $[0,1]^2$, por el teorema 2.5, tenemos que $dim(\mathcal{D}) = dim([0,1]^2)$. Por el teorema 3.29, sabemos que $dim([0,1]^2) = 2$. Por lo tanto, $dim(\mathcal{D}) = 2$. $\square$

Teorema 3.32. $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Demostración. Recordemos que $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico separable. Además,

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^2$$

Como $[-n, n]^2$ es una 2-delda, por el teorema 3.29, $dim([-n, n]^2) = 2$. Usando el teorema 2.42, tenemos que $dim(\mathbb{R}^2) \leq 2$. Como$[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que $dim(\mathbb{R}^2) \geq 2$. Por lo tanto, $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

$\square$

Notemos que la prueba anterior se pudo haber realizado con el teorema 2.50 usando que la dimensión de $\mathbb{R}$ es uno.

Definición 3.33. *La $n-1$* **esfera unitaria***, denotada por $\mathcal{S}^{n-1}$, es el conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.*

Antes de ver qué dimensión tiene $\mathcal{S}^2$, veamos la **proyección estereográfica**. La idea es convertir la esfera, a la cual se le quita un punto $\mathbf{1_z}$, en un plano. Esto se hace poniendo el plano de tal manera que parte a la esfera por la mitad. Luego, a cada punto $\mathbf{s}$ de la esfera se le asocia un punto $\mathbf{p}$ del plano de tal manera que $\mathbf{1_z}, \mathbf{p}, \mathbf{s}$ son colineales. Véase la figura 3.10 Esto lo podemos expresar con la siguiente función

$$P_E \colon \mathcal{S}^2 - 1_Z \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

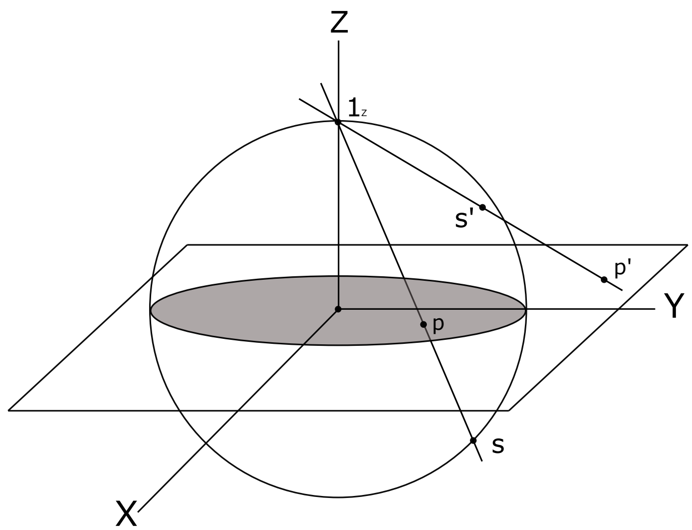


Figura 3.10: Proyección estereográfica.

$$(x, y, z) \longmapsto (\tfrac{x}{1-z}, \tfrac{y}{1-z}),$$

donde $1_Z = \{(0, 0, 1)\}$. Notemos que P_E es una función biyectiva y continua. Además su función inversa es

$$P_E^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S}^2 - 1_Z$$

$$(u, v) \longmapsto (\tfrac{u}{u^2+v^2+1}, \tfrac{v}{u^2+v^2+1}, \tfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}),$$

la cual es también continua. Teniendo así que, P_E es un homeomorfismo.

Teorema 3.34. *$dim(\mathcal{S}^2) = 2$.*

Demostración. Como $P_E \colon \mathcal{S}^2 - 1_Z \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un homemorfismo y sabemos que la dimensión se preserva bajo homeomorfismos, se tiene que $dim(\mathcal{S}^2 - 1_Z) = dim(\mathbb{R}^2)$. Así, por el teorema 3.32, $dim(\mathcal{S}^2 - 1_Z) = 2$. Como $\mathcal{S}^2 - 1_Z \subset \mathcal{S}^2$, aplicando el teorema 2.5, tenemos que $2 = dim(\mathcal{S}^2 - 1_Z) \leq dim(\mathcal{S}^2)$. Dado que $\mathcal{S}^2 = (\mathcal{S}^2 - 1_Z) \cup 1_Z$, $dim(1_Z) = 0$ y 1_Z es un subconjunto cerrado de $\mathcal{S}^2$, por el corolario 2.44, tenemos que $dim(\mathcal{S}^2) \leq 2$. Concluimos que $dim(\mathcal{S}^2) = 2$. □

Los teoremas 3.29, 3.32 y 3.34 se pueden extender a todo natural, esto es, que la dimensión de $[0, 1]^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{S}^n$ es n. Una forma de probar lo anterior es usando inducción y la proyección estereográfica generalizada ($P_E^n \colon \mathcal{S}^n - 1_{Z_n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$).

Conclusión

Antes de finalizar, hagamos un resumen que recopile lo más sobresaliente de este trabajo. Para ello, veamos algunas definiciones y teoremas que son primordiales para teoría de la dimensión inductiva pequeña.

Antes que nada, vimos que la siguiente definición es la protagonista esencial para el desarrollo de esta teoría.

Definición 1. *Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los espacios topológicos. Definimos la función dim* $: \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{-1, 0, \infty\}$ *llamada* **dimensión inductiva pequeña** *como:*

(a) $dim(X) = -1$ *si y solo si* $X = \emptyset$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $dim(X) \leq n$ *si para cada* $x \in X$ *y para todo* U *subconjunto abierto de* X *con* $x \in U$, *existe* V *subconjunto abierto de* X *tal que* $x \in V \subset U$ *y* $dim(\mathrm{fr}(V)) \leq n - 1$.

(c) Para todo $n \geq 0$, $dim(X) = n$ *si* $dim(X) \leq n$ *y es falso que* $dim(X) \leq n - 1$.

(d) $dim(X) = \infty$ *si para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es falso que* $dim(X) \leq n$.

Un hecho importante qué recalcar, es que la dimensión inductiva pequeña es un invariante topológico dado que las fronteras se conservan bajo homeomorfismos. Veamos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sean* X *y* Y *dos espacios métricos tales que* X *es homeomorfo a* Y. *Si* $dim(X) = n$, *entonces* $dim(Y) = n$, *es decir, la dimensión es un invariante topológico.*

El teorema que a continuación mostramos, es de gran importancia, ya que en la gran mayoría de los resultados fue utilizado para la demostración de estos.

Teorema 3 (Teorema de Monotonía). *Si* X *es un espacio métrico y* Y *un subespacio de* X, *entonces* $dim(Y) \leq dim(X)$.

Los siguientes teoremas son de gran importancia ya que nos fueron útiles para usarlos en el tercer capítulo de esta tesis pues con su ayuda, pudimos probar que algunos continuos tienen dimensión uno y así poder mostrar una gran variedad de ejemplos.

Teorema 4. *Sea X un espacio topológico regular. Si X es conexo y $Card(X) > 1$, entonces $dim(X) > 0$.*

Teorema 5 (Teorema de la suma para dimensión n). *Si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ es un espacio métrico separable tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i es un subconjunto cerrado de X y $dim(F_i) \leq n$, entonces $dim(X) \leq n$.*

Este es otro de los teoremas que son muy importantes en esta teoría.

Teorema 6. *Sean X un espacio métrico separable y X_1, X_2 subespacios de X. Entonces, $dim(X_1 \cup X_2) \leq dim(X_1) + dim(X_2) + 1$.*

Por último, mostramos el siguiente teorema que es realmente fundamental para encontrar la dimensión de ciertos espacios cuya dimensión es mayor a uno. De esto que, se puedan mostrar algunos ejemplos que se puedan visualizar que puedan ser útiles para otras teorías.

Teorema 7 (Teorema del producto para dimensión n). *Sean X_1 y X_2 espacios métricos separables, donde $X_1 \neq \emptyset$ o $X_2 \neq \emptyset$. Si $X = X_1 \times X_2$, entonces $dim(X) \leq dim(X_1) + dim(X_2)$.*

Si bien, la teoría mencionada en esta tesis es importante, habría que preguntarnos dónde o en qué casos podemos utilizarla...

Finalmente, la dimensión inductiva pequeña es el tema que hemos abordado en este trabajo con el objetivo de conocer más de ella dando definiciones, resultados importantes y ejemplos que nos ayudan a entender cómo se comporta. Sin embargo, pese a la teoría ya mencionada habría que preguntarnos cómo es que de manera intuitiva podemos representar a esta dimensión. Pues bien, la dimensión no es más que ver qué tan lleno o grueso es un espacio, por decirlo así y ver cómo es que se comporta. Por ejemplo, un punto dibujado en un papel sin grosor se intuye que tiene dimensión cero, ahora si colocamos una infinidad de puntos continuamente podemos formar una línea de la cual se intuye nuevamente que esta tiene dimensión uno, si esta línea la cerramos, su grosor no aumentó, sigue teniendo dimensión uno, pero, si a esta línea cerrada la llenamos con una infinidad de líneas de tal manera que cubra ese espacio, entonces nos daremos cuenta que la dimensión de esta aumentó y así tendrá dimensión dos. Luego, si a esta nueva figura ya creada la deformamos de tal manera que la podamos cerrar, simplemente su dimensión no cambiará, seguirá teniendo dimensión dos. Ahora, si una vez más tomamos esta nueva figura y la llenamos con una infinidad de esta misma figura de manera que nuevamente cubra ese espacio, entonces habremos notado que la dimensión aumentó, es decir, formamos una nueva figura que es sólida y que ahora tendrá dimensión tres. Así, este proceso se puede seguir n veces intuitivamente. Con esto podemos concluir como es que se comporta la dimensión de una manera más coloquial y así poderla comprender de un modo mejor.

Bibliografía

[1] J. G. Ahuatzi Reyes, *Los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único*, Tesis de Licenciatura, Herrera Carrasco y Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 30 de mayo de 2014.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, University of Illinois, USA, 1976.

[3] F. Casarrubias Segura, Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, 2da. Ed., Sociedad Matemática Mexicana, México, 2015.

[4] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd. ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[5] R. Engelking, *Dimension Theory*, 1st. ed., Warsaw University, North-Holland, Publishing Company Amsterdam, Oxford, New York, PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa, 1978.

[6] R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez (Editores), *Invitación a la Teoría de Continuos y sus Hiperespacios*, 1st. ed., Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[7] L. A. Guerrero Méndez, *Dendritas y productos simétricos*, Tesis de Maestría, Herrera Carrasco y Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 18 de mayo de 2012.

[8] E. Herrera Ortiz, *Introducción a la teoría de la dimensión*, Tesis de Licenciatura, Herrera Carrasco y Fernando Macías, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 30 de septiembre de 2005.

[9] Editado por I. M. James, *History of Topology*, Elsevier, Oxford University, UK, 1999.

[10] E. Herrera Ortiz, *Dimensión de hiperespacios de continuos*, Tesis de Maestría, Herrera Carrasco y Fernando Macías, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 25 de febrero de 2011.

[11] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd. ed., PHI Learning Private Limited, New Delhi, India, 2000.

[12] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory*, 1st. ed., An In troduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker Inc. New York, 1992.

[13] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, 1st. ed., Princeton University Press, Chapel Hill, North Carolina, Madison, Wisconsin, USA, 1941.

[14] Y. Pacheco Juárez, *Propiedades del producto de espacios topológicos*, Tesis de Licenciatura, Acosta García y Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 27 de febrero de 2009.

[15] C. Sánchez López, *Propiedad del punto fijo: Lema de Sperner*, Tesis de Licenciatura, Herrera Carrasco y Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 30 de junio de 2014.

Índice alfabético

ε-función, 51

A lo más numerable, 8
Arco, 45

Base, 6
Bola abierta, 9

Círculo de Varsovia, 51
Cardinalidad, 8
Cerradura, 2
Conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, 30
Conjunto $\mathcal{G}_\delta$, 30
Conjunto abierto, 2
Conjunto cerrado, 2
Conjunto infinito, 7, 8
Continuo, 44
Curva cerrada simple, 45
Curva senoidal, 51

Dendrita, 48
Dendrita de Gehman, 49
Denso, 11
Diámetro, 51
Dimensión cero, 20
Dimensión inductiva pequeña, 17, 56

Esfera unitaria, 54
Espacio conexo, 20
Espacio disconexo, 20
Espacio métrico, 9
Espacio topológico, 1
Espacios homeomorfos, 4

Frontera, 2
Función abierta, 5
Función continua, 4

Gráfica finita, 46

Homeomorfismo, 4

Interior, 2
Invariante topológico, 5

Lindelöf, 13
Localmente conexo, 48

Métrica, 9
Métrica euclidiana, 12
Mutuamente separados, 23

n-celda, 54
No numerable, 8
Normal, 14
Numerable, 8

Paleta, 46

Regular, 14

Símbolo infinito, 47
Segundo numerable, 12
Separable, 11
Separación, 20

Subcontinuo, 44
Subespacio, 2

Tipo-arco, 51
Tipo-círculo, 51
Topología, 1
Topología relativa, 2
Topología inducida, 10
Triodo simple, 47