Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Contractibilidad y propiedad del punto fijo en los hiperespacios 2^X y $C(X)$

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
LUIS ANTONIO GUEVARA MARTÍNEZ

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 25 de abril de 2023.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mis padres y hermanos, quienes me han brindado su apoyo a lo largo de toda mi vida. Gracias por mantener su fe y sus esperanzas en mí, ya que son mi fuerza de voluntad para no rendirme y seguir adelante.

A través del tiempo he tenido el placer de conocer gente maravillosa. Agradezco a todos mis amigos. Todos y cada uno de ellos han sido de apoyo para finalizar esta etapa de mi vida. Gracias por los momentos que hemos compartido, los cuales son parte de mis más felices memorias.

Agradezco al profesor Manuel Ibarra, quien por sus consejos sobre la importancia del trabajo en equipo y su increíble pasión por las matemáticas, lográ que los estudiantes descubran la belleza de las matemáticas.

También agradezco a mis directores de tesis David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero por la oportunidad de trabajar con ellos y mostrarme el emocionante mundo de la teoría de continuos. Un agradecimiento especial a Felipe de Jesús Aguilar Romero por sus consejos y comentarios para mejorar este trabajo.

Por último y no menos importantes, a mis sinodales, la Dra. Patricia Domínguez Soto, el Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado y al M.C. Felipe de Jesús Aguilar Romero, quienes dedicaron su tiempo para leer y mejorar este trabajo con sus sugerencias y correcciones.

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados relacionados con la teoría de continuos e hiperespacios. Particularmente nos centraremos en la contractibilidad y la propiedad del punto fijo de los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X, basándonos en los resultados expuestos por Sam B. Nadler Jr. y Alejandro Illanes en los capítulos 20, 21 y 22 de su obra titulada *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances* ([6]).

En el Capítulo 1, se presentan las definiciones y resultados que serán útiles para el desarrollo de los capítulos siguientes. Se exploran los conceptos básicos de continuos como conexidad local, arco conexidad, contractibilidad. Dotamos de una métrica al hiperespacios 2^X y presentamos algunos resultados para este y otros hiperespacios.

El Capítulo 2 se centra en estudiar la contractibilidad de los hiperespacios 2^X y $C(X)$, comenzamos enunciando una equivalencia la cual nos ayuda a saber cuando 2^X y $C(X)$ son contraíbles. También vemos resultados que determinan cuando 2^X y $C(X)$ son contraíbles si X cuenta con ciertas características; como lo son la propiedad de Kelley, arco conexidad local, clase de continuos homogéneos, entre otras.

Finalmente, en Capítulo 3 se centra en la propiedad del punto fijo, se muestra que esta propiedad es una invariante topológica. Se presentan algunos resultados que relacionan la propiedad del punto fijo con los espacios tipo-arco, tipo-n-celda, dendroides y sus hiperespacios 2^X y $C(X)$. En contraste con la contractibilidad, la propiedad del punto fijo no siempre se puede extender a espacios más grandes, es decir, si algún subespacio de 2^X tiene esta propiedad 2^X no necesariamente la tiene.

Índice general

Capítulo 1

Continuos

1.1. Continuos

Definición 1.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo X y $Y \subset X$, diremos que Y es un* ***subcontinuo*** *de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.*

La propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica, es decir, si X es un continuo y Y es un espacio métrico homeomorfo a X, entonces Y también es un continuo. Veamos algunos ejemplos de continuos:

(a) Cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, con $a < b$.

(b) La circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Más aún, para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos y denotamos la esfera n-dimensional por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se puede verificar que S^n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Cualquier continuo homeomorfo a S^1 se llama una curva cerrada simple.

(c) Cualquier bola cerrada en $\mathbb{R}^n$, con centro en x y radio r, $\mathcal{D}(x, r)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

(d) El conjunto $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, conocido como seno del topólogo.

(e) El conjunto

$$I^n = \prod_{k=1}^{n} [0,1]$$

es un continuo dotado con la topología producto. Cualquier continuo homeomorfo a I^n se llama una n-celda.

(f) El conjunto

$$I^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1]$$

es un continuo dotado con la topología producto. Cualquier continuo homeomorfo a I^∞ es llamado cubo de Hilbert.

Definición 1.2. *Un* ***arco*** *es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado* $[0,1]$*, con la métrica usual de* $\mathbb{R}$*.*

Dado que $[0,1]$ es un continuo, se sigue que todo arco también es un continuo. Sean C un arco, $h : [0,1] \to C$ un homeomorfismo, $p = h(0)$ y $q = h(1)$. Se puede verificar que si $g : [0,1] \to C$ es también un homeomorfismo, entonces $\{g(0), g(1)\} = \{p, q\}$. A los puntos p y q les llamaremos los puntos extremos de C.

El cubo de Hilbert es un espacio topológico el cual está relacionado con los espacios continuos. Una propiedad particular y muy conocida en topología es que todo continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert. Veamos un poco sobre el cubo de Hilbert.

Definición 1.3. *Un* ***cubo de Hilbert*** *es un espacio que es homeomorfo a* $I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]$*. Note que la métrica estandar* d_∞*, para* I^∞ *está definida como sigue*

$$d_\infty((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \text{ para toda } (x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in I^\infty.$$

Definición 1.4. *Sea* X *un espacio métrico. Se dice que* X *es* ***separable*** *si existe un conjunto* $D \subset X$ *tal que* D *es a lo más numerable y denso en* X*.*

Lema 1.5. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto.
Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \subset X$ finito tal que $X \subset \displaystyle\bigcup_{x \in A_n} \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$, donde $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$ denota la bola con centro en x y radio r, para toda $x \in A_n$ y $r > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como X es compacto y $X \subset \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$, entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \frac{1}{n})$. Si definimos $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se tiene que $X \subset \bigcup_{x \in A_n} \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$.
Ahora, sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, note que A es numerable. Veamos que A es denso en X, es decir, $\text{cl}(A) = X$.
Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Como $p \in X \subset \bigcup_{x \in A_m} \mathcal{B}(x, \frac{1}{m})$. Así, existe $a \in A_m$ tal que $p \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{m})$, como existe $d(p, a) < \frac{1}{m} < \varepsilon$, entonces $a \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$. Además, $a \in A_m \subset A$, de ahí que $\mathcal{B}(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, como ε era arbitrario, se tiene que $p \in \text{cl}(A)$, de ahí que A es denso en X, por lo tanto por definición, se tiene que X es separable. ■

Teorema 1.6. *Todo continuo se puede encajar en un cubo de Hilbert, es decir, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un continuo y d una métrica para X. Como X es continuo, entonces por definición X es un espacio métrico compacto, así por el lema 1.5, X es separable, luego existe $A = \{p_1, p_2, \ldots\}$ subconjunto denso y a lo más numerable en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $h_n : X \to [0, 1]$ por $h_n = \frac{1}{1+d(x,p_n)}$. Note que por definición de métrica, h_n está bien definida y es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, definimos $h : X \to I^\infty$ por

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots).$$

Como h_n es continua para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que h es continua. Más aún, sean x, $y \in X$ con $x \neq y$, y sean $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$ y $j \in \mathbb{N}$. Como A es denso en X, entonces $x \in \text{cl}(A)$, de donde $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Sea $p_j \in \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A$, por como elegimos a ε se tiene que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap \mathcal{B}(y, \varepsilon) = \emptyset$, de ahí que $d(x, p_j) < \varepsilon \leq d(y, p_j)$, lo que implica que $h_j(y) = \frac{1}{1+d(y,p_j)} < \frac{1}{1+d(x,p_j)} = h_j(x)$. Así, $h_j(x) \neq h_j(y)$, por lo tanto h es inyectiva.
Así, se tiene que h es inyectiva y continua, cuyo dominio es un compacto. Luego, X es homeomorfo a $h(X)$, es decir, h es un encaje de X en I^∞. ■

Ahora demostremos un resultado que nos garantiza que todo espacio métrico arco conexo es conexo, el cual nos ayudará más adelante cuando veamos algunas propiedades de los hiperespacios 2^X y $C(X)$. Primero recordemos la definición de espacio métrico arco conexo.

Definición 1.7. *Un espacio métrico X es **arco conexo** si dados cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un arco en X cuyos puntos extremos son x y y.*

Teorema 1.8. *Todo espacio métrico arco conexo es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico arco conexo y sean $x, y \in X$ arbitrarios con $x \neq y$. Luego, existe un arco C cuyos puntos extremos son x y y. Por ser C un arco, es conexo. Así, x y y pertenecen a un subconjunto conexo de X. Esto implica que X es conexo. ■

1.2. Hiperespacios

Esta sección está dedicada al estudio de algunas propiedades básicas, pero de gran útilidad en este trbajo, de los hiperespacios 2^X y $C(X)$. Además, demostraremos que siempre que X sea un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos.

Definición 1.9. *Si X es un continuo, entenderemos por un **hiperespacio** de X a una colección de subconjuntos de X con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en X}\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ conexo}\right\}$,
- $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- $C_n(X) = \{A \in C(X) : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$,

- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$. *Al hiperespacio $F_1(X)$ se le llama espacio de singulares de X.*

Observación 1.10. *Para un continuo X se tiene lo siguiente:*

- $C(X) = C_1(X)$,
- $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ *y* $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$, *con* $n \in \mathbb{N}$,
- $F_n(X) \subset C_n(X)$.

Note que como X es un compacto, entonces 2^X es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, en particular $X \in 2^X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X.
A continuación se presentan algunas propiedades de los hiperespecios. Además, si X es un continuo, entonces a los hiperespacios se les puede dotar de una métrica heredada por d, donde d denota una métrica para X.

Definición 1.11. *Sea X un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in 2^X$, definimos y denotamos la distancia del punto x al conjunto A como*

$$d(x, A) = \text{ínf}\,\{d(x, a) : a \in A\}\,.$$

*Para cualquier $r > 0$ y $A \in 2^X$, denotamos la **nube** al rededor de A y radio r como*

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}\,.$$

Teorema 1.12. *Sea X un espacio métrico compacto y no vacío. Sean $r > 0$ y $A,\ B \in 2^X$. Entonces:*

(I) Si $0 < \delta \leq r$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(r, B)$,

(II) $N(r, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta \in (0, r)\}$.

Demostración. Sean $r > 0$ y $A,\ B \in 2^X$. Sea d una métrica de X.

Verifiquemos la propiedad (I).

Sean $0 < \delta \leq r$ y $A \subset B$ y $x \in N(\delta, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Como $A \subset B$, se sigue que $a \in B$. Más aún, $\delta \leq r$, luego

$d(x, a) < r$. Por lo tanto $x \in N(r, B)$.

Verifiquemos la propiedad (II).

Dado $\delta > 0$ tal que $\delta < r$, por (I) se tiene que $N(\delta, A) \subset N(r, A)$. Entonces $\bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\} \subset N(r, A)$. Por otro lado, tomemos $x \in N(r, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r$. Tomemos un $\delta' > 0$ tal que $d(x, a) < \delta' < r$. Luego, $x \in N(\delta', A)$, además, $N(\delta', A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$. Por lo tanto, $N(r, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$. ■

Definición 1.13. *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d, la **métrica de Hausdorff** para 2^X inducida por d, denotada por H_d, para cada A, $B \in 2^X$ es*

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\,\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}\,.$$

Veamos un resultado que nos ayudará a demostrar que H_d es una métrica.

Teorema 1.14. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Si A, $B \in 2^X$ y $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$.*

Demostración. Sean A, $B \in 2^X$ y $a \in A$. Si $a \in B$, entonces $d(a, a) = 0 \leq H_d(A, B)$.
Supongamos que $a \notin B$. Como B es un compacto, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq d(a, c)$ para cada $c \in B$. En efecto consideremos la función $f : B \to \mathbb{R} \cup \{0\}$, dada por $f(c) = d(a, c)$. Note que f está bien definida y es continua, así, f alcanza su mínimo, esto es, existe un $b \in B$ tal que $d(b, a) \leq d(a, c)$ para cada $c \in B$. Veamos que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$.

Supongamos que $H_d(A, B) < d(a, b)$. Note que $d(a, b)$ es fijo, entonces por la propiedad del ínfimo, existe ε_0 tal que $\varepsilon_0 < d(a, b)$. Se sigue que $A \subset N_d(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N_d(\varepsilon_0, A)$. En particular, $A \subset N_d(\varepsilon_0, B)$, así para $a \in A$, existe $c_0 \in B$ tal que $d(a, c_0) < \varepsilon_0 < d(a, b)$, pero esto contradice el hecho de que $d(a, b) \leq d(a, c)$ para toda $c \in B$. Por lo tanto $d(a, b) \leq H_d(A, B)$. ■

Teorema 1.15. *Sean X es un continuo y d una métrica para X, entonces H_d es una métrica.*

Demostración. Note que por definición H_d es una función de valores reales positivos.
Sean A, B, $C \in 2^X$.

(1) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

Por definición tenemos que H_d es una función simétrica, es decir, $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

(2) $H_d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.

Supongamos que $H_d(A, B) = 0$. Entonces por definición se tiene que $A \subset N_d(r, B)$ y $B \subset N_d(r, A)$. Sin perdida de generalidad, tenemos que $A \subset N_d(r, B)$ para toda $r > 0$. Sea $p \in A$, entonces existe un $b_n \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, b_n) < \frac{1}{n}$. Como B es un compacto, entonces existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a p y como B es cerrado en X, entonces $p \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. De manera análoga $B \subset A$, así $A = B$.
Reciprocamente, supongamos que $A = B$. Entonces para toda $r > 0$ se tiene que $A \subset N_d(r, A)$, así $H_d(A, A) = 0$.

(3) $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

Sean $\delta \geq 0$ y $a \in A$. Entonces por el lema 1.14, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$. Usando nuevamente el lema 1.14 para $b \in B$, existe $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq H_d(B, C)$. Así, $d(a, c) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta$. Entonces para toda $a \in A$, se tiene que $A \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta, C)$. De manera análoga, se tiene que $C \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta, A)$. Se sigue que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta$. Finalmente, como δ es arbitrario, se concluye que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.
Por lo tanto, H_d es una métrica para 2^X.
Más aún, los otros hiperespacios heredan la métrica de 2^X, por lo tanto son espacios métricos. ■

Proposición 1.16. *Sean (X, d) un espacio métrico y A, $B \in 2^X$. Entonces si $A \subset N_d(r, B)$ y $B \subset N_d(r, A)$ si y solo si $H_d(A, B) < r$.*

Demostración. Supongamos que $A \subset N_d(r, B)$ y $B \subset N_d(r, A)$. Por el teorema 1.12 inciso (II), se tiene que $A \subset N_d(r, B) = \bigcup\{N_d(\delta, B) : 0 < \delta < r\}$ y $B \subset N_d(r, A) = \bigcup\{N_d(\delta, A) : 0 < \delta < r\}$.

Como A es compacto, existen $\delta_1, \ldots, \delta_n \in (0, r]$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_d(\delta_i, B)$.

Denotemos por $\delta' = \max\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\}$. Note que $0 < \delta' < r$. Entonces $A \subset N_d(\delta', B)$. De manera análoga, $B \subset N_d(\delta'', A)$. Si $\varepsilon = \max\{\delta', \delta''\}$, se sigue que $0 < \varepsilon < r$ y además $A \subset N_d(\varepsilon, B)$ y $B \subset N_d(\varepsilon, A)$. Por definición de la métrica de Hausdorff, se tiene que $H_d(A, B) \leq \varepsilon < r$. Por lo tanto $H_d(A, B) < r$.

Recíprocamente. Si $H_d(A, B) < r$, entonces r no es cota inferior del conjunto $\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}$, por lo que existe $\delta > 0$ talque $A \subset N_d(\delta, B)$, $B \subset N_d(\delta, A)$ y $\delta < r$. Haciendo uso del teorema 1.12 inciso *(I)*, se tiene que $A \subset N_d(r, B)$ y $B \subset N_d(r, A)$. ■

Lema 1.17. *Sea X un continuo. Si $A \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $A \subset U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Sea $A \subset U$. Tenemos que $A \cap X \setminus U = \emptyset$. Note que por hipótesis A y $X \setminus U$ son cerrados en X, de ahí que son compactos, de manera que $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A, X\setminus U)}{2}$. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, de ahí que $x \in \mathcal{B}(\varepsilon, a)$. Supongamos que $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(a, x)$, así $d(A, X \setminus U) < \varepsilon$, es decir, $d(A, X \setminus U) < \frac{d(A, X\setminus U)}{2}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in U$. ■

Lema 1.18. *[12, Lema 1.33] Si X es un arco, entonces $C(X)$ es una 2-celda.*

Lema 1.19. *[12, Lema 1.34] Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda.*

Teorema 1.20. *[12, Teorema 2.2] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son arco conexos.*

Lema 1.21. *[6, Ejemplo 5.1.1] Si X es cualquier arco con puntos extremos p y q, entonces $C(X)$ es una 2-celda y*

$$\partial C(X) = F_1(X) \cup C(p, X) \cup C(q, X).$$

Donde ∂ denota la frontera del conjunto.

Teorema 1.22. *[6, Corolario 3.7] Sea X es espacio métrico y compacto, entonces 2^X y $C(X)$ son compactos.*

Corolario 1.23. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos.*

Demostración. Sea X un continuo. Por el teorema 1.22, sabemos que 2^X y $C(X)$ son compactos. También, por el teorema 1.20, tenemos que 2^X y $C(X)$ son arco conexos, de ahí que son conexos. Como $F_1(X)$ está contenido en 2^X y en $C(X)$, se sigue que 2^X y $C(X)$ son no vacíos y con más de un punto. Así 2^X y $C(X)$ son continuos. ■

Proposición 1.24. *[13, Proposición 66] Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $F_1(X)$ es homeomorfo a X.*

Definición 1.25. *Una colección $\mathcal{N}$ de conjuntos es una **red** o nido si para cualesquiera N_1, $N_2 \in \mathcal{N}$ se cumple que $N_1 \subset N_2$ o bien $N_2 \subset N_1$. Una red desde A_0 hasta A_1 es una red $\mathcal{N}$ tal que A_0, $A_1 \in \mathcal{N}$ y $A_0 \subset N \subset A_1$ para cualquier $N \in \mathcal{N}$.*

Definición 1.26. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Un **arco ordenado** en $\mathcal{H}$ es un arco en $\mathcal{H}$ que es también una red.*

Corolario 1.27. *[12, Corolario 3.3] Sea X un espacio métrico compacto, y sea α un arco ordenado en 2^X. Si α comienza en $C(X)$, entonces α está contenida en $C(X)$.*

Lema 1.28. *[12, Lema 2.8] Sea X un compacto, y sea $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X con más de un punto. Si $\mathcal{A}$ es una red, entonces $\mathcal{A}$ es un arco ordenado.*

Teorema 1.29. *Sean X un espacio métrico y K un subconjunto cerrado de X. Si*

$$CL_K(X) = \{A \in 2^X : A \supset K\},$$

entonces $CL_K(X)$ es cerrado en 2^X.

Demostración. Veamos que $2^X \setminus CL_K(X)$ es abierto. Sea $Y \in 2^X \setminus CL_K(X)$, es decir, $K \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, de ahí que existe un $k_0 \in K$ tal que $k_0 \notin Y$. Como Y es cerrado, entonces $d(k_0, Y) > 0$, así $d(k_0, y) > 0$ para toda $y \in Y$. Consideremos $\mathcal{B}_H(Y, \varepsilon)$, con $\varepsilon = d(k_0, Y)$. Note que $\mathcal{B}_H(Y, \varepsilon) \subset 2^X \setminus CL_K(X)$. En efecto, sea $Z \in \mathcal{B}_H(Y, \varepsilon)$, veamos que $k_0 \notin Z$. Supongamos que $k_0 \in Z$, note que $H(Z, Y) < \varepsilon$, entonces $Z \subset N(Y, \varepsilon) = \bigcup_{y \in Y} \mathcal{B}(y, \varepsilon)$, así existe $y_0 \in Y$ tal que $k_0 \in \mathcal{B}(y_0, \varepsilon)$, de ahí que $d(k_0, y_0) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción, ya que $\varepsilon = d(k_0, Y)$ es la mínima de las distancias entre k_0 y cualquier punto de Y. Entonces se tiene que $\mathcal{B}_H(Y, \varepsilon) \subset 2^X \setminus CL_K(X)$, como Y se tomo de manera arbitraria, se tiene que $2^X \setminus CL_K(X)$ es abierto, por lo tanto $CL_K(X)$

es cerrado en 2^X. ■

A continuación presentamos la definición de funciones de Whitney, nombradas así en honor al matemático Hassler Whitney. Las funciones de Whitney están relacionadas con los arcos en los hiperespacios, una de sus caracteristicas importantes es que siempre es posible construir una de estas funciones en cualquier hiperespacio de un compacto, lo cual nos aydará en las demostraciones cuando hablemos de espacios contraíbles.

Definición 1.30. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Una* ***función de Whitney*** *para $\mathcal{H}$ es una función continua $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cualesquiera A, $B \in \mathcal{H}$ con $A \subset B$ y $A \neq B$, se tiene que $\omega(A) < \omega(B)$.*
2. *$\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.*

Lema 1.31. *Sea X un espacio metrizable compacto y no vacío, sea $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de 2^X, y sea ω una función de Whitney para $\mathcal{H}$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ con la siguiente propiedad: Si A, $B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subset B$ y $|\omega(B) - \omega(A)| < \eta(\varepsilon)$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que el lema es falso para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, existen A_i, $B_i \in \mathcal{H}$ tales que $A_i \subset B_i$, $|\omega(B_i) - \omega(A_i)| < \frac{1}{i}$, y $H(A_i, B_i) \geq \varepsilon$. Note que por el teorema 1.22 tenemos que $\mathcal{H}$ es compacto, podemos asumir que las sucesiones $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergen en $\mathcal{H}$ a A y B respectivamente. Note que $A \subset B$ y $\omega(A) = \omega(B)$; por la definición 1.30 inciso (1), tenemos que $A = B$. De ahí $H(A_i, B_i) \geq \varepsilon$ para cada i, note también que $H(A, B) \geq \varepsilon$. Por lo tanto, tenemos una contradicción. ■

Teorema 1.32. *[12, Teorema 1.41]Si X es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de X tiene una función de Whitney.*

Teorema 1.33. *[12, Teorema 2.7]Sea X un espacio métrico compacto, y sean A_0, $A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subset A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ que va de A_0 a A_1.*

Definición 1.34. *Un espacio métrizable, compacto y no vacío K es llamado un* ***extensor absoluto*** *(se denota AE por sus siglas en inglés), si para* *cualquier B subconjunto cerrado de un espacio métrico M, y si $f : B \to K$ es continua, entonces f puede ser extendida a una función continua $F : M \to K$. (Nota: F es una extensión de f significa que $F|_B = f$.)*

1.3. Espacios contraíbles

Ahora dedicaremos nuestra atención a los espacios contraíbles, daremos algunos resultados de importancia los cuales serán de utilidad para el estudio de la contractibilidad de los hiperespacios 2^X y $C(X)$.

Definición 1.35. *Sean Y y Z espacios métricos compactos y no vacíos. Una función continua que va de $Y \times [0,1]$ a Z es llamada **homotopía**.*

Definición 1.36. *Para cada homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ y cualquier $t \in [0,1]$, denotemos por h_t la función de Y a Z dada por $h_t(y) = h(y,t)$ para toda $y \in Y$. Decimos que dos funciones $f, g : Y \to Z$ son **homotópicas** si existe una homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ tal que $h_0 = f$ y $h_1 = g$.*

Definición 1.37. *Si una función $f : Y \to Z$ es homotópica a una función constante de Y a Z, entonces llamaremos a f **función no-esencial**; en caso contrario, f es llamada una **función esencial**.*

Definición 1.38. *Un espacio métrico, no vacío y compacto Y, se dice que es **contraíble** si la función identidad de Y es no-esencial.*

Definición 1.39. *Sean Y y Z espacios métricos no vacíos y compactos. Decimos que Y es **contraíble con respecto a** Z (se denota Y es cr$Z$), si para cada función continua de Y a Z es no-esencial, dicho de otra manera, es una función homotópica a una función constante.*

Ejemplo 1.40. *Sean $X = [0,1]$ y $h : X \times [0,1] \to X$, definida como $h(x,t) = (1-t)x$, note que h es continua y $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = 0$ para cualquier $x \in X$, de ahí que h es una homotopía, por lo tanto X es contraíble.*

Teorema 1.41. *La contractibilidad es una invariante topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos homeomorfos, tal que X es contraíble. Como X es contraíble, existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to X$ tal que para toda $x \in X$ $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Como

X y Y son homeomorfos existe $f : X \to Y$ homeomorfismo.
Sea $g : Y \times [0,1] \to Y$ dada por $g(y,t) = f \circ h(f^{-1}(y),t)$. Note que por como se construyó g, es continua y está bien definida. Además, $g(y,1) = h(f^{-1}(y),1) = f(h(f^{-1}(y),1)) = f(x_0) = y_0$ y $g(y,0) = f \circ h(f^{-1}(y),0) = f(h(g^{-1}(y),0)) = f(f^{-1}(y)) = y$, es decir, $g(y,0) = y$ y $g(y,1) = y_0$ para toda $y \in Y$ y algún $y_0 \in Y$. Por lo tanto Y es contraíble. ■

Lema 1.42. *Si Z es un espacio contraíble y $Y \subset Z$, entonces Y es contraíble en Z.*

Demostración. Sea $h : Z \times [0,1] \to Z$ una función homotópica tal que h_0 es la función identidad de Z y h_1 una función constante, entonces $h\mid_{Y\times[0,1]}$ muestra que Y es contraíble en Z. ■

Lema 1.43. *Sean Y y Z espacios métricos compactos y no vacíos, tales que Y es contraíble en Z y $V \subset Y \subset Z \subset W$, entonces Y es contraíble en W y V es contraíble en Z.*

Demostración. Como Y es contraíble en Z, entonces existe una homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ tal que para cualquier $y \in Y$, $h_0(y) = h(y,0) = y$ y $h_1(y) = h(y,1) = z_0$ para algún $z_0 \in Z$. Ahora, como $V \subset Y$, podemos restringir el dominio de h a $V \times [0,1]$, dado que h es continua, se tiene que $h_0\mid_{V\times[0,1]}(v) = h\mid_{V\times[0,1]}(v,0) = v$ y $h_1\mid_{V\times[0,1]}(v) = h\mid_{V\times[0,1]}(v,1) = z_0$, así $h\mid_{V\times[0,1]}$ es una homotopía, por lo tanto V es contraíble en Z.
Ahora, como $Z \subset W$, entonces $h : Y \times [0,1] \to Z$ se puede reescribir como $h : Y \times [0,1] \to W\mid_Z$, más aún, $z_0 \in W$, si renombramos a $z_0 = w_0 \in W$, se tiene que $h_0(y) = y$ y $h_1(y) = w_0$, de ahí que Y es contraíble en W. ■

Teorema 1.44. *Sea X un espacio métrico compacto y no vacío. Si X es contraíble, entonces X es arco conexo.*

Demostración. Como X es contraíble, entonces existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to X$ tal que para toda $x \in X$, $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = x_0$, para algún $x_0 \in X$.
Sean p, $q \in X$ y definimos la función $f : [0,1] \to X$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} h(p,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(q,2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que $h(p, 2(\frac{1}{2})) = x_0 = h(q, 2 - 2(\frac{1}{2}))$, de ahí que no hay discontinuidad cuando $t = \frac{1}{2}$, más aún, como h es continua, se tiene que f está bien definida y es continua.
Tenemos que $f(0) = h(p, 2(0)) = h(p, 0) = p$ y $f(1) = h(q, 2 - 2(1)) = h(q, 0) = q$, es decir, existe una trayectoria de p a q, de ahí que X es conexo por trayectorias, demás, como X es un espacio de Housdorff, entonces X es arco conexo. ■

Lema 1.45. *Sean X un continuo y $z_0 \in X$. Si X es contraíble, entonces existe una homotopía $H'' : X \times [0, 1] \to X$ tal que $H''(x, 0) = x$ y $H''(x, 1) = z_0$.*

Demostración. Como X es contraíble, entonces existe una homotopía $h : X \times [0, 1] \to X$, más aún, X es arco conexo, de la demostración del teorema 1.44 existe una función $f : [0, 1] \to X$ continua. Definimos $H' : X \times [0, 1] \to X$ dada por $H'(x, t) = f(t)$, note que H' es continua. Además, $H'(x, 0) = f(0) = x_0$ y $H'(x, 1) = f(1) = z_0$, es decir, $H'(x, 0) = x_0$ y $H'(x, 1) = z_0$ para x_0, $z_0 \in X$.
Ahora, definimos $H'' : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H''(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H'(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que $H''(x, \frac{1}{2}) = h(x, 1) = x_0 = H'(x, 0) = H''(x, \frac{1}{2})$. Como h y H' son continuas, entonces H'' está bien definida y es continua. Luego, $H''(x, 0) = x$ y $H''(x, 1) = z_0$, para toda $x \in X$ y algún $z_0 \in X$, se sigue por definición que H'' es homotopía. ■

Gracias al teorema 1.44 y el lema 1.45, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.46. *Todo espacio contraíble es arco conexo y las contracciones de los espacios contraíbles se pueden escoger de manera que terminen en cualquier punto de nuestra elección.*

Lema 1.47. *Un espacio métrico no vacío y compacto Y es contraíble si y solo si Y es cr$Z$ para cada espacio Z.*

Demostración. Supongamos que Y es contraíble. Entonces existe una función homotópica $h : Y \times [0, 1] \to Y$ que une a la función identidad de Y a una función constante de Y. Así, si f es una función continua de Y a un espacio Z, vemos que $f \circ h : Y \times [0,1] \to Z$ es una función homotópica que une a f con una función constante de Y en Z. Por lo tanto, Y es cr$Z$ para cada espacio Z.

El recíproco se sigue de la definición 1.39. ■

Definición 1.48. *Si Y es un espacio métrico compacto y no vacío. Una **retracción** es una función continua r de Y en Y, tal que r es la identidad en su rango, es decir, $r(r(y)) = r(y)$ para cada $y \in Y$. Un subconjunto Z de Y, se dice que es un **retracto** de Y, si existe una retracción sobreyectiva de Y en Z. Un espacio metrizable, compacto y no vacío K es un **retracto absoluto** (**AR** por sus siglas en inglés), cuando K pueda ser encajado en un espacio métrico Y, la copia de K es un retracto de Y.*

Definición 1.49. *Un espacio metrizable compacto y no vacío Y, se dice que es **retracto absoluto de vecindades** (**ANR** por sus siglas en inglés), si Y puede ser encajado en un espacio métrico X, el encajamiento Y' de Y es un retracto para alguna vecindad de Y' en X.*

Teorema 1.50. *[6, Teorema 19.6] Para cualquier continuo X, 2^X y $C(X)$ son crANR.*

Definición 1.51. *Sea Y un espacio métrico compacto y no vacío, y sea $f : Y \to S^1$ una función continua. Un **levantamiento** para f es una función continua $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ \varphi$, donde $\exp$ denota la función exponencial que va de $\mathbb{R}$ a S^1 dada por $\exp(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.52. *[6, Teorema 19.20] Sea Y un espacio metrizable, compacto y no vacío, y sea $f : Y \to S^1$ una función continua. Entonces f es no-esencial si y solo si f tiene un levantamiento.*

Definición 1.53. *Sea X un continuo. Decimos que X es **unicoherente** si, cualesquiera A y B subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$, tenemos que $A \cap B$ es conexo.*

Recordemos que dado un espacio métrico X, dos subconjuntos E y F de X están **separados** si $\mathrm{cl}(E) \cap F = \emptyset$ y $E \cap \mathrm{cl}(F) = \emptyset$. Dado $Y \subset X$, diremos que E y F forman una **separación** de Y si $Y = E \cup F$, E y F están separados y son no vacíos. En tal caso, lo denotaremos por $Y = E \mid F$, además $Y = E \mid F$ implica que Y es disconexo.

Lema 1.54. *Si un continuo es crS^1, entonces el continuo es unicoherente.*

Demostración. Recordemos que S^1 denota la circunferencia unitaria en el plano $\mathbb{R}^2$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sean $S^1_+ = \{(x,y) \in S^1 : y \geq 0\}$ y $S^1_- = \{(x,y) \in S^1 : y \leq 0\}$. Note que S^1_+ y S^1_- son arcos.

Supongamos que Y es un continuo que es unicoherente. Entonces existen subcontinuos A y B en Y tales que $A \cup B = Y$ y $A \cap B$ no es conexo, digamos que $A \cap B = E \mid F$. Sea $f : A \cap B \to S^1_+ \cap S^1_-$ una función continua definida por $f(E) = (0,1)$ y $f(F) = (-1,0)$. Como S^1_+ y S^1_- son AR, entonces podemos extender a f a una funciones continuas $g_1 : A \to S^1_+$ y $g_2 : B \to S^1_-$. Sea $g : Y \to S^1$ una función continua definida por $g\mid_A = g_1$ y $g\mid_B = g_2$. Notemos lo siguiente:

(1) $g(A \cap B) = \{(1,0),(-1,0)\} = g(A) \cap g(B)$.

Mostremos que g es una función esencial.

Supongamos que g es una función no-esencial. Entonces por el teorema 1.52, g tiene un levantamiento $\varphi : Y \to \mathbb{R}$. Sea

$$M = \exp\left[\varphi(A) \cap \varphi(B)\right].$$

Como $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son intervalos en $\mathbb{R}$, $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son conexos; así, M es conexo. Sin embargo, mostraremos que $M = \{(1,0),(-1,0)\}$. Note que

(2) $\exp[\varphi(A \cap B)] \subset M \subset \exp[\varphi(A)] \cap \exp[\varphi(B)]$.

Como φ es un levantamiento para g, se sigue de (1) que

(3) $\exp[\varphi(A \cap B)] = g(A \cap B) = \{(1,0),(-1,0)\}$

y que

(4) $\exp[\varphi(A)] \cap \exp[\varphi(B)] = g(A) \cap g(B) = \{(1,0),(-1,0)\}$.

De (2)-(4), se tiene que $M = \{(1,0),(-1,0)\}$. Como ya habíamos probado previamente que M es conexo, se tiene una contradicción. Por lo tanto, g es una función esencial.

Hemos demostrado que si Y es un continuo que no es unicoherente, entonces Y no es crS^1. ∎

Definición 1.55. *Un continuo se dice que es* ***descomponible*** *si es la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible se dice que es* ***indescomponible****. Un continuo se dice que es* ***hereditariamente descomponible*** *si todos sus subcontinuos con más de un elemento son descomponibles. Un continuo se dice que es* ***hereditariamente indescomponible*** *si todos sus subcontinuos son indescomponibles.*

Proposición 1.56. *Un continuo, X es hereditariamente indescomponible si y solo si cualesquiera A y B subcontinuos de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente indescomponible. Sean A y B subcontinuos de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces, $A \cup B$ es un subcontinuo de X. Así, $A \cup B$ es un continuo indescomponible. Por lo tanto $A \subset B$ o $B \subset A$.

Recíprocamente, supongamos que X no es herditariamente indescomponible. Entonces exite un subcontinuo descomponible K de X. De ahí que existen subcontinuos propios A y B de K tales que $K = A \cup B$, con $A \cap B \neq \emptyset$, así $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. ■

Teorema 1.57. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por el lema 1.32). Si A, $B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $\omega(A) = \omega(B)$, entonces $A = B$.*

Demostración. Por la proposición 1.56, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Dado que $\omega(A) = \omega(B)$, y haciendo uso de la definición 1.30 inciso (1), se tiene que $A = B$. ■

Definición 1.58. *Sea X un espacio métrico compacto y no vacío, se dice que es* ***único arco conexo*** *si para cualesquiera p, $q \in X$ tales que $p \neq q$, existe un único arco en X con puntos extremos p y q.*

Teorema 1.59. *[6, Teorema 18.8] Sea X un continuo. Entonces X es hereditariamente indescomponible si y solo si $C(X)$ es único arco conexo.*

Capítulo 2

Hiperespacios contraíbles

En este capítulo presentaremos algunos resultados básicos cuando 2^X y $C(X)$ son contraíbles. Probaremos dos teoremas generales 2.2 y 2.24, así determinaremos algunas clases de continuos para los cuales 2^X y $C(X)$ son contraíbles.

Recordemos que un espacio Y es *contraíble* si la función identidad de Y es no-esencial, dicho de otra manera, la función identidad de Y es homotópica a una función constante.

2.1. Un teorema fundamental

Comenzaremos con el que se considera el teorema fundamental con respecto a la contractibilidad de hiperespacios. El teorema muestra que si uno de los hiperespacios 2^X y $C(X)$ es contraíble, entonces el otro también lo es. Este teorema también muestra una manera usual para determinar cuando 2^X o $C(X)$ es contraíble, si el espacio de los singulares de X, $F_1(X)$, es contraíble en 2^X o $C(X)$.

Primero enunciaremos un resultado que nos ayudará en la demostración de nuestro Teorema.

Lema 2.1. *Sean X un continuo y $A \subset X$. Consideremos a las familias $\mathcal{C}(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$ y $\mathcal{D}(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$. Entonces se tienen las siguientes condiciones:*

(I) si A es abierto, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son abiertos en 2^X,

(II) *si A es cerrado, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración. (I) Sea $B \in \mathcal{C}(A)$. Como A es abierto y $B \in 2^X$, por el lema 1.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, B) \subset A$. Usaremos a $\beta(\varepsilon, B)$ para denotar la bola de radio ε alrededor de B con la métrica de Hausdorff. Sea $C \in \beta(\varepsilon, B)$. Entonces, $H(B, C) < \varepsilon$, así por la proposición 1.16, $C \subset N(\varepsilon, B)$. Por lo que $C \in \mathcal{C}(A)$. De ahí que $\beta(\varepsilon, A) \subset \mathcal{C}(A)$, luego $\mathcal{C}$ es abierto.
Ahora, sean $B \in \mathcal{D}(A)$ y $x \in B \cap A$. Como A es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, x) \subset A$. Sea $D \in \beta(\varepsilon, B)$, entonces $H(D, B) < \varepsilon$, por la proposición 1.16, $D \subset N(\varepsilon, B)$. Como $x \in B$, existe $y \in D$ tal que $d(x, t) < \varepsilon$, es decir, $y \in \mathcal{B}(\varepsilon, x) \subset A$, así $y \in D \cap A$. Por lo tanto $D \cap A \neq \emptyset$, es decir $D \in \mathcal{D}(A)$, de ahí que $\beta(\varepsilon, B) \subset \mathcal{D}(A)$, luego $\mathcal{D}(A)$ es abierto.

(II) Como A es cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es abierto en X. Note que $\mathcal{C}(A) = 2^X \setminus \mathcal{D}(X \setminus A)$ y $\mathcal{D}(X \setminus A)$ es abierto en 2^X, por el inciso *(I)*, se tiene que $\mathcal{C}(A)$ es cerrado en 2^X.
Como $X \setminus A$ es abierto en X, entonces por el inciso *(I)* se sigue que $\mathcal{C}(X \setminus A)$ es abierto en 2^X, así $2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus A)$ es cerrado en 2^X. Note que $2^X = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{C}(X \setminus A)$ y $\mathcal{D}(A) \cup \mathcal{C}(X \setminus A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en 2^X.

■

Teorema 2.2. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $F_1(X)$ *es contraíble en* $C(X)$*,*

(b) $F_1(X)$ *es contraíble en* 2^X*,*

(c) $C(X)$ *es contraíble,*

(d) 2^X *es contraíble.*

Demostración. (a) implica *(b)*. Haciendo uso del lema 1.43, se tiene que si un espacio es contraíble, entonces es contraíble en cualquier espacio que lo contenga, además como $C(X) \subset 2^X$.Tenemos que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X.

Demostremos que *(b)* implica *(d)* y *(b)* implica *(c)*. Por hipótesis existe una función continua $h : F_1(X) \times [0, 1] \to 2^X$ y un elemento $A_0 \in 2^X$ tales que, para toda $x \in X$, $h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h(\{x\}, 1) = A_0$. Por hipótesis X es continuo, entonces por el teorema 1.20, se tiene que 2^X es arco conexo, y por

el corolario 1.46, podemos suponer que $A_0 = X$.
Definimos $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ por:

$$L(A,t) = \bigcup \{h(\{x\}, s) : x \in A \text{ y } s \in [0,t]\}.$$

Probemos que L es continua. Sea $\varepsilon > 0$, como $F_1(X) \times [0,1]$ es compacto y h es continua, entonces h es uniformemente continua, así existe $\delta > 0$ tal que, si $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$, entonces $H(h(A,t), h(B,u)) < \varepsilon$.
Sean A, $B \in 2^X$ y $t, u \in [0,t]$ tales que $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$. Necesitamos ver que $H(L(A,t), L(B,u)) < \varepsilon$. Sea $m \in L(A,t)$. Entonces existe $x \in A$ y $s \in [0,t]$, tales que $m \in h(\{x\}, s)$. Ya que $x \in A \subset N(\delta, B)$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta$. Tomemos a $r = \text{mín}\{s,t\}$. Note que $r \in [0,u]$. Si $s \le u$, entonces $r = s \in [0,t] \cap [0,u]$, y si $u < s$, entonces $r = u < s \le t$ y como $t-u < \delta$, tenemos que $|s-r| < \delta$. En cualquiera de los dos casos se tiene que $|s-r| < \delta$. Por como elegimos a δ, se tiene que $H(h(\{x\}, s), h(\{y\}, r)) < \varepsilon$. De manera que $p \in h(\{x\}, s) \subset N(\varepsilon, h(\{y\}, r)) \subset N(\varepsilon, L(B,u))$, por lo que $L(A,t) \subset N(\varepsilon, L(B,u))$. De manera análoga se muestra que $L(B,u) \subset N(\varepsilon, L(A,t))$. Por lo tanto $H(L(A,t), L(B,u)) < \varepsilon$. Así, L es continua.
Ahora, demostremos que $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$, para toda $A \in 2^X$. Observemos que

$$\begin{aligned} L(A,0) =& \bigcup \{h(\{x\}, s) : x \in A \text{ y } s \in [0,0]\} \\ =& \bigcup \{h(\{x\}, 0) : x \in A\} = \bigcup \{\{x\} : x \in A\} = A, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(A,1) =& \bigcup \{h(\{x\}, s) : x \in A \text{ y } s \in [0,1]\} \\ \supset& \bigcup \{h(\{x\}, 1) : x \in A\} = X. \end{aligned}$$

Así, L es una homotópia para 2^X. Por lo tanto, 2^X es contraíble. Así queda demostrado *(b)* implica *(d)*.

Note que si, $A \in 2^X$ y $0 \le u \le t \le 1$, entonces $[0,y] \subset [0,t]$ y por como definimos L, se tiene que $L(A,u) \subset L(A,t)$.
Si $A \in C(X)$ y $t \in [0,1]$, probaremos que $L(A,t) \in C(X)$. Supongamos que esto no es cierto y que existe un $t \in [0,1]$ talque $L(A,t)$ no es conexo, es decir, $L(A,t) = G \cup K$, donde G y K son cerrados, ajenos y no vacíos. Por lo

demostrado anteriormente, tenemos que $A \subset L(A,t) = G \cup K$, y como A es conexo, entonces A debe estar contenido en G o K. Supongamos que $A \subset G$, tomemos $P = \{s \in [0,t] : L(A,s) \subset G\}$, $Q = \{s \in [0,t] : L(A,s) \cap K \neq \emptyset\}$ y sea $f : [0,t] \to 2^X$ definida por $f(s) = L(A,s)$. Ya demostramos que L es continua, por lo que f es continua, además notemos que $P = f^{-1}(D)$ y $Q = f^{-1}(B)$, donde $D = \{E \in 2^X : E \subset G\}$ y $B = \{E \in 2^X : E \cap K \neq \emptyset\}$. Por el lema 2.1, D y B son cerrados en 2^X, más aún f es continua, entonces P y Q son cerrados. Como G y K son ajenos, P y Q también son ajenos. Por lo que se demostró anteriormente, para toda $s \in [0,t]$, $L(A,s) \subset L(A,t) = G \cup K$, se tiene que $s \in P \cup Q$. Entonces P y Q son cerrados, ajenos y su unión es $[0,t]$. Como $[0,t]$ es conexo, P o Q debe ser vacío. Pero $L(A,0) = A \subset G$, por lo que $0 \in P$ y $L(A,t) = G \cup K$ y $K \neq \emptyset$ de donde $y \in Q$. Se tiene una contradicción.
Por último, de lo que hemos demostrado tenemos que $L|_{C(X)\times[0,1]} : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ es una homotópia para $C(X)$, con lo que queda demostrado *(b)* implica *(c)*.

Observemos que *(c)* implica *(a)* y *(d)* imlpica *(b)* se cumplen por el lema 1.42, pues si un espacio es contraíble, cualquier subespacio es contraíble en él. ∎

Note que el teorema 2.2, nos dice que no puede ocurrir que uno de los hiperespacios $C(X)$ o 2^X sea contraíble y el otro no lo sea. Más aún, si $F_1(X)$ es contraíble, entonces tiene que ser contraíble en cualquier espacio que lo contenga.

2.2. X contraíble, X hereditariamente indescomponible

Usaremos el teorema anterior para mostrar que 2^X y $C(X)$ son contraíbles para dos diversas clases de continuo X. Nuestros resultados están en los siguientes dos corolarios.

Primero recordemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X. En efecto, ya que existe una función $h : X \to F_1(X)$ dada por $h(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo. Esto nos ayudará a demostrar el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Si X es un continuo contraíble, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Sea X un continuo contraíble. Entonces, como $F_1(X) \approx X$, y $F_1(X)$ es contraíble en si mismo. De ahí que F_1 es contraíble en $C(X)$. Por lo tanto, haciendo uso del teorema 2.2, se tiene que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Corolario 2.4. *Si X es un continuo hereditario indescomponible, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Mostraremos que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$, luego se hará uso del teorema 2.2. Como por hipótesis X es compacto, entonces por el teroema 1.32, existe una función de Whitney ω, para el hiperespacio $C(X)$. Definamos $h : F_1 \times [0, \omega(X)] \to C(X)$ como sigue. Sea $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times [0, \omega(X)]$; por el teorema 1.33, consideremos un arco ordenado en $C(X)$ que va de $\{x\}$ a X, como ω es una función continua, entonces existe $A_{x,t} \in \omega^{-1}(t)$ tal que $x \in A_{x,t}$; más aún, por el lema 1.57, existe un único $A_{x,t}$; sea

$$h(\{x\}, t) = A_{x,t}.$$

Esto define a la función $h : F_1(X) \times [0, \omega(X)] \to C(X)$. Se sigue de la definición de función de Whitney(1.30) que, para cada $\{x\} \in F_1$,

$$h(\{x\}, 0) = \{x\} \text{ y } h(\{x\}, \omega(X)) = X.$$

Ahora, probaremos que h es continua. Sea $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times [0, \omega(X)]$, y sea $\{(\{x_i\}, t_1)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que converge en $F_1(X) \times [0, \omega(X)]$ a $(\{x\}, t)$. Supongamos, sin perdida de generalidad que la sucesión $\{h(\{x_i\}, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a B en $C(X)$. Entonces, dado que $x_i \in h(\{x_i\}, t_i)$ para cada i, note que $x \in B$; también, como $\omega(h(\{x_i\}, t_i)) = t_i$ para cada i y ya que ω es continua, se tiene que $\omega(B) = t$. Por lo tanto, $B = h(\{x\}, t)$. Así, queda demostrado que h es continua.

De las propiedades que se verificaron de h anteriormente, hemos probado que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$. Por lo tanto, por el teorema 2.2, se tiene que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Corolario 2.5. *[7, Corolario 2.3] Sea X es un continuo hereditariamente indescomponible. Si $\mathcal{H}$ es un subcontinuo arco conexo de $C(X)$, entonces $\mathcal{H}$ es contraíble.*

2.3. Propiedad de Kelley

Pongamos nuestra atención en una condición útil y suficiente para determinar si 2^X y $C(X)$ son contraíbles. Dicha condición se debe a Kelley y la llamaremos propiedad (k). Más adelante se mostrará que si X es un continuo que cuenta con la propiedad (k), entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.

Definición 2.6. *Sea X un continuo, y sea d una métrica para X. Decimos que X cuenta con la propiedad (k), o **propiedad de Kelley**, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface la siguiente condición:*

(k) *si p, $q \in X$ tales que $d(p,q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$. (donde H denota la métrica de Hausdorff para $C(X)$. ver la definición 1.13).*

Definición 2.7. *Sea X un continuo con métrica d, y sea $p \in X$; decimos que X tiene la **propiedad** (k) **en** p si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(p,\varepsilon) > 0$ tal que si $q \in X$ satisface $d(p,q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Note que, un continuo tiene la propiedad (k) si y solo si tiene la propiedad (k) en cada uno de sus puntos.

Teorema 2.8. *La propiedad de Kelley es una invariante topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos tales que son homeomorfos y X tiene la propiedad de Kelley.
Sean $f : X \to Y$ homeomorfismo y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = f(a)$ para algún $a \in X$, sea $B \in C(Y)$ tal que $f(a) \in B$. Como f es biyectiva, entonces para $b_n \in Y$ existe $a_n \in X$ tal que $f(a_n) = b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $f^{-1} : Y \to X$ continua, además $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(f(a_n)) = f^{-1}(f(a))$, así $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Como $B \in C(Y)$, se tiene que B es conexo y compacto, además f^{-1} es continua, así $f^{-1}(B)$ es conexo y compacto. Luego, como $f(a) \in B$, entonces $f^{-1}(f(a)) \in f^{-1}(B)$, de ahí que $a \in f^{-1}(B)$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n) = f^{-1}(B)$, luego $f(a_n) \in f(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es conexo y compacto, entonces $f(A_n)$ es conexo y compacto, así $f(A_n)$ es un

subcontinuo para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n) = f^{-1}(B)$, como f es continua $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n) = B$, por lo tanto Y tiene la propiedad de Kelley. ■

Teorema 2.9. *Sea X un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $a \in X$ y Y un subcontinuo de X talque $a \in Y$. Como X es localmente conexo, entonces para $\mathcal{B}(a, \frac{\varepsilon}{2})$ existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{U}$ de X tal que $a \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Además, como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}(a, \delta) \subset \mathcal{U}$. Si $d(a, b) < \delta$ con $b \in \mathcal{U}$. Note que por ser $\mathcal{U}$ conexo, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathcal{U})$ es conexo, de ahí que $\mathrm{cl}(\mathcal{U})$ es un subcontinuo de X. Definimos $Z = Y \cup \mathrm{cl}(\mathcal{U})$ un subcontinuo de X tal que $b \in Z$ y $\mathrm{diam}(\mathcal{U}) < \frac{\varepsilon}{2}$, así $H(Z, Y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley. ■

Veamos a continuación un resultado interesante, ya que nos ofrece una equivalencia a la definición de la propiedad de Kelley haciendo uso de sucesiones.

Teorema 2.10. *Sea X un continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley.

(2) Para toda $A \in C(X)$ con $a \in A$, para alguna $a \in X$, y para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Demostración. Supongamos que X es un continuo con la propiedad de Kelley.
Sean $a \in X$, $A \in C(X)$ con $a \in A$ y una sucesión $\{a_n\}_{a\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ y definimos $f_{a_n} : C(a_n, X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dada por $f(B) = H(A, B)$.
Veamos que f_{a_n} es continua.
Sean $B \in C(a_n, X)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $U = \mathcal{B}_H(B, \varepsilon) \cap C(a_n, X)$, note que U es abierto en $C(a_n, X)$. Tomemos un $r \in f_{a_n}(U)$, entonces existe un $C \in U$ tal que $f_{a_n}(C) = r = H(A, C)$. Como $C \in U$ se cumple que $H(B, C) < \varepsilon$, así $H(A, B) \leq H(B, C) + H(A, C) < \varepsilon + H(A, C)$, se sigue que $H(A, B) - H(A, C) < \varepsilon$, luego $f_{a_n}(B) - f_{a_n}(C) < \varepsilon$, de ahí que

$f_{a_n}(B) - r < \varepsilon$.
Por otro lado, $H(A,C) \leq H(A,B) + H(C,B) < H(A,B) + \varepsilon$, de ahí $-\varepsilon < H(A,B) - H(A,C)$, así $-\varepsilon < f_{a_n}(B) - r$. Por lo tanto tenemos que $|f_{a_n}(B) - r| < \varepsilon$, luego f_{a_n} es continua.
Como $C(a_n, X)$ es compacto y f_{a_n} es continua, entonces f_{a_n} alcanza su mínimo, es decir, existe $A_n \in C(a_n, X)$ tal que $H(A, A_n) \leq H(A, B)$ para toda $B \in C(a_n, X)$.
Sea $\varepsilon > 0$, como X tiene la propiedad de Kelley, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $b \in \mathcal{B}(a, \delta)$ existe $B \in C(X)$ con $b \in B$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $a_n \in \mathcal{B}(a, \delta)$. Así, para $n \geq N$ existe $B_n \in C(X)$ con $a_n \in B_n$ tal que $H(A, B_n) < \varepsilon$. Note que $B_n \in C(a_n, X)$, entonces $\varepsilon > H(A, B_n) \geq H(A, A_n)$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Ahora, supongamos que X no es de Kelley en algún punto a. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $b \in \mathcal{B}(a, \delta)$ y existe $A \in C(X)$ con $a \in A$, tal que para todo $B \in C(X)$ con $b \in B$, $H(A,B) \geq \varepsilon$. Sean $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $b_n \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{n})$ y existe $A_n \in C(X)$ con $a \in A_n$ tal que para toda $B \in C(X)$ con $b_n \in B$ se tiene que $A(A_n, B) \geq \varepsilon$.
Sea $C(a,X) = \{a \in C(X) : a \in A\}$, note que $C(a,X) = CL_{\{a\}} \cap C(X)$, entonces por el teorema 1.29, $C(a,X)$ es cerrado en $C(X)$. Ahora, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $C(a,X)$, entonces existe una subsuceción $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, para algún $A \in C(X)$ con $a \in A$. Además, $H(A_k, B) \geq \varepsilon$ para toda $B \in C(X)$ con $b_k \in B$ y $b_k \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{n})$ (#).
Tenemos que $A \in C(a,X)$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$ por construcción. Por hipotesis, existe $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ tal que $b_k \in B_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = A$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_k, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $k \geq N_1$. Además, como $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = A$ para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_k, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $k \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $k \geq N$, tenemos que

$$H(A_k, B_k) \leq H(A_k, A) + H(A, B_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces hemos encontrado $B_k \in C(X)$ con $b_k \in B_k$ y $b_k \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{k})$ tal que $H(A_k, B_k) < \varepsilon$, lo cual contradice lo dicho en (#). Por lo tanto X tiene la propiedad de Kelley. ■

Ilustremos la propiedad (k) con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.11. *Veamos un caso particular en el que se muestra que el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley. Sea A_n denotar al segmento de recta con puntos extremos $(0,0)$ y $(1, \frac{1}{n})$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea*

$$X = \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup ([0,1] \times \{0\})$$

el conjunto de la figura 2.1. Tomemos a $A = [0,1] \times \{0\}$ y la sucesión $\{(1, \frac{1}{n})\}_n \in \mathbb{N}$, note que $\lim_{n\to\infty}(1, \frac{1}{n}) = (1,0)$ y $(1,0) \in A$. Además, $(1, \frac{1}{n}) \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, más aún, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, así X tiene la propiedad de Kelley en el punto $(1,0)$.

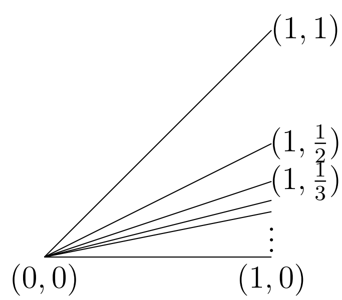

Figura 2.1: Abanico armónico

Ejemplo 2.12. *Consideremos al abanico con pata alargada 2.2. Si tomamos $A = [1,2] \times \{0\}$ y la sucesión $\{(1, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(1, \frac{1}{n}) = (1,0)$, note que $(1,0) \in A$. Observemos que el abanico de pata alargada no tiene la propiedad de Kelley en el punto $(1,0)$, porque podemos dar una sucesión $\{(1, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $(1,0)$. Sin embargo no podemos dar una sucesión de continuos que converga al arco A.*

Ejemplo 2.13. *Cualquier continuo hereditario indescomponible tiene la propiedad (k). Esto se sigue inmeditamente de la continuidad uniforme de la función homotópica h de la demostración del corolario 2.4*

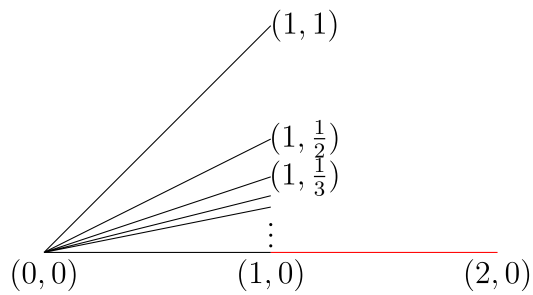

Figura 2.2: Abanico con pata alargada

Definición 2.14. *Sea X un espacio topológico. X es* ***conexo en pequeño en*** *p (cik por sus siglas en aleman) si p tiene una vecindad base de vecindades conexas, esto es, conjuntos conexos que contienen a p en sus interiores en X. X es* ***conexo en pequeño****, si es conexo en pequeño en todos sus puntos. Note que si X es localmente conexo en p, entonces X es cik en p.*

Lema 2.15. *Un espacio métrico X es localmente conexo si y solo si X es conexo en pequeño.*

Demostración. Sean X un espacio métrico que es localmente conexo y $x \in X$. De ahí que para cada vecindad U de x, existe un subconjunto abierto y conexo V tal que $x \in V \subset U$. Por lo tanto X es conexo en pequeño.

Recíprocamente, supongamos que X es conexo en pequeño. Sean $x \in X$ y $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$. Como X es conexo en pequeño, entonces existe una vecindad conexa V tal que $x \in V \subset U$, de ahí que X es localmente conexo. ■

Lema 2.16. *Si X es un cotinuo que es conexo en pequeño, entonces tiene la propiedad (k).*

Demostración. Sea X un continuo que es conexo en pequeño, por el lema 2.15, X es localmente conexo, haciendo uso del teorema 2.9, se tiene que X tiene la propiedad (k). ■

Ejemplo 2.17. *Sea Y un continuo que no es cik (2.14) en algún punto y_0; sea A un arco que es disjunto de Y, y sea $a_0 \in A$. Adjuntando A a Y identificando a a_0 con y_0, y sea X denotar el espacio cociente. Entonces, X es un continuo que no tiene la propiedad (k).*

Probaremos que 2^X y $C(X)$ son contraíbles cuando X tiene la propiedad (k). Basaremos la demostración del teorema en la función F_ω que se define a continuación.

Definición 2.18. *Sea X un continuo, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por el teorema 1.32). Definimos F_ω en $X \times [0, \omega(X)]$ por*

$$F_\omega(x,t) = \{A \in \omega^{-1}(t) : x \in A\},$$

para cada $(x,t) \in X \times [0, \omega(X)]$. Es útil formular F_ω en terminos de la contención de hiperespacios $C_x(X)$:

$$F_\omega(x,t) = C_x(X) \cap \omega^{-1}(t),$$

para cada $(x,t) \in X \times \{0, \omega(X)\}$.

Veamos el siguente hecho sobre F_ω.

Proposición 2.19. *Sea X un continuo. Entonces, para cada $(x,t) \in X \times [0, \omega(X)]$, $F_\omega(x,t) \in 2^{2^X}$.*

Demostración. Fijemos $(x,t) \in X \times [0, \omega(X)]$. Recordemos que $C(X)$, por el corolario 1.22, es un compacto, y $C_x(X)$ es compacto por la proposición 1.29. Entonces, dado que $F_\omega(x,t) = C_\omega(X) \cap \omega^{-1}(t)$, se tiene que $F_\omega(x,t)$ es compacto. También, $F_\omega(x,t) \neq \emptyset$, pues existe un arco ordenado α en $C(X)$ que va de $\{x\}$ a X por el teorema 1.33, y $\omega(A) = t$ para algún $A \in \alpha$. Por lo tanto, $F_\omega(x,t) \in 2^{2^X}$. ■

Los siguientes dos lemas muestran que F_ω es continua cuando X tiene la propiedad (k). Usaremos la siguiente terminología en las declaraciones de los lemas.

Sea (Y, d_Y), (Z, d_Z), y (M, d_M) espacios métricos, y sea f una función que va de $Y \times Z$ a M. Decimos que f es **equicontinua en la primera variable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda $z \in Z$,

$$d_M(f(y_1, z), f(y_2, z)) < \varepsilon \text{ cuando } d_Y(y_1, y_2) < \delta;$$

en otras palabras, $f_z(y) = f(y,z)$ para cada $y \in Y$ y $z \in Z$. De manera análoga, decimos que f es **equicontinua en la segunda variable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda $y \in Y$,

$$d_M(f(y,z_1), f(y,z_2)) < \varepsilon \text{ cuando } d_Z(z_1,z_2) < \delta.$$

En el siguiente lema no se asume que X tenga la propiedad (k).

Lema 2.20. *Si X es un continuo, entonces la función $F_\omega : X \times [0,\omega(X)] \to 2^{2^X}$ es equicontinua en la segunda variable.*

Demostración. Como es usual, H denotará la métrica de Housdorff para 2^X, y H_H denotará la métrica de Housdorff para 2^{2^X} que es inducida por H como en la definición 1.13. Sea $J = [0,\omega(X)]$.

Sea $\varepsilon > 0$, y sea $\eta(\varepsilon)$ como en el lema 1.31. Fijemos t_1, $t_2 \in J$ tales que $|t_1 - t_2| < \eta(\varepsilon)$. Demostraremos el lema probando que

$$H_H(F_\omega(x,t_1), F_\omega(x,t_2)) < \varepsilon \text{ para cada } x \in X. \tag{2.1}$$

Demostración de le ecuación 2.1: Fijemos $p \in X$. Sea $A_1 \in F_\omega(p,t_1)$. Como $p \in A_1$, existe un arco ordenado α en $C(X)$ que va de $\{p\}$ a X tal que $A_1 \in \alpha$ (usando el teorema 1.33 dos veces a menos que $A_1 = X$). Como $\omega(\alpha) = J$, existe $A_2 \in \alpha$ tal que $\omega(A_2) = t_2$. Como $A_2 \in \alpha$, $p \in A_2$; entonces, dado que $\omega(A_2) = t_2$, se tiene que $A_2 \in F_\omega(p,t_2)$. Ahora, mostremos que $H(A_1,A_2) < \varepsilon$ como sigue: Dado que A_1, $A_2 \in \alpha$, $A_1 \subset A_2$ o $A_2 \subset A_1$; también, como $|t_1 - t_2| < \eta$,

$$|\omega(A_1) - \omega(A_2)| = |t_1 - t_2| < \eta(\varepsilon);$$

así, por el lema 1.31, se tiene que $H(A_1,A_2) < \varepsilon$. Por lo tanto, como $A_2 \in F_\omega(p,t_2)$, hemos mostrado que

(1) $F_\omega(p,t_1) \subset N_H(\varepsilon, F_\omega(p,t_2))$.

De manera análoga, intercambiando t_1 y t_2 en el argumento para probar (1), tenemos que

(2) $F_\omega(p,t_2) \subset N_H(\varepsilon, F_\omega(p,t_1))$.

Por (1) y (2), $H_H(F_\omega(p,t_1), F_\omega(p,t_2)) < \varepsilon$ (por la proposición 1.16). Por lo tanto, hemos demostrado 2.1, concluyendo la demostración. ■

Lema 2.21. *Si X es un continuo tal que X tiene la propiedad (k), entonces $F_\omega : X \times [0, \omega(X)] \to 2^{2^X}$ es equicontinua en la primera variable.*

Demostración. Sea d la métrica para X; H la métrica de Housdorff para 2^X, y H_H la métrica de Hausdorff para 2^{2^X} inducida por H como en la definición 1.13. Sea $J = [0, \omega(X)]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ como en el lema 1.31. Dado que $C(X)$ es compacto (por el corolario 1.22) y ω es continua (por la definición 1.30), ω es uniformemente continua con respecto a H; así, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$ y

(1) $|\omega(K) - \omega(L)| < \eta(\frac{\varepsilon}{2})$ siempre que $H(K, L) < \gamma$.

Finalmente como X tiene la propiedad (k), existe $\delta > 0$ tal que

(2) si $d(p, q) < \delta$ y $p \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \gamma$.

Nuestro lema quedará demostrado si probamos lo siguiente:

$$\text{Para toda } t \in J \text{ , } H_H(F_\omega(p, t), F_\omega(q, t)) < \varepsilon \text{ siempre que } d(p, q) < \delta. \quad (2.2)$$

Demostración de 2.2: Fijemos $t_0 \in J$, y fijemos $p, q \in X$ tales que $d(p, q) < \delta$. Sea $A \in F_\omega(p, t_0)$ (por le inciso (6) a continuación). Dado que $p \in A$ y $d(p, q) < \delta$, existe B que satisface (2). Por (2) se tiene, $H(A, B) < \gamma$; así, por (1),

$$|\omega(A) - \omega(B)| < \eta(\frac{\varepsilon}{2}).$$

Entonces, como $\omega(A) = t_0$ (pues $A \in F_\omega(p, t_0)$), tenemos que

(3) $|t_0 - \omega(B)| < \eta(\frac{\varepsilon}{2})$.

Como B satisface (2), $q \in B$. Entonces, se sigue del teorema 1.33 que existe un arco ordenado β en $C(X)$ que va de $\{q\}$ a X tal que $B \in \beta$ (haciendo uso del teorema 1.33 dos veces a menos que $B = X$). Como $\omega(\beta) = J$, existe $C \in \beta$ tal que $\omega(C) = t_0$. Dado que $C \in \beta$, $q \in C$; además, como $\omega(C) = t_0$, se tiene

(4) $C \in F_\omega(q, t_0)$.

Mostramos que $H(A,C) < \varepsilon$. Comencemos mostrando que $H(B,C) < \frac{\varepsilon}{2}$: Como B, $C \in \beta$, $B \subset C$ o $C \subset B$; por (3),

$$|\omega(C) - \omega(B)| = |t_0 - \omega(B)| < \eta(\frac{\varepsilon}{2});$$

así, por el lema 1.31, $H(B,C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $H(A,B) < \eta$ (por (2)) y como $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ (esto por elección).

(5) $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C) < \eta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

De (4) y (5), hemos probado que

(6) $F_\omega(p,t_0) \subset N_H(\varepsilon, F_\omega(q,t_0))$.

De manera análoga, si intercambiando p y q en (2) y en los argumentos subsecuentes, se tiene

(7) $F_\omega(q,t_0) \subset N_H(\varepsilon, F_\omega(p,t_0))$.

Entonces de (6) y (7), $H_H(F_\omega(p,t_0), F_\omega(q,t_0)) < \varepsilon$. Por lo tanto, hemos demostrado 2.2. Conlcuyendo la demostrción de nuestro lema. ■

Como una consecuencia de los lemas que acabamos de probar, tenemos la relación entre la propiedad (k) y la función F_ω.

Proposición 2.22. *Sea X un continuo, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, X tiene la propiedad (k) si y solo si F_ω es continua.*

Demostración. El hecho de que la propiedad (k) implica que F_ω es continua se sigue de los lemas 2.20, 2.21 y el siguiente resultado: Sea (Y, d_Y), (Z, d_Z) y (M, d_M) espacios métricos, y sea D la métrica usual para $Y \times Z$ (es decir, $D = \sqrt{d_Y^2 + d_Z^2}$); si $f : Y \times Z \to M$ es equicontinua en cada variable (por separado), entonces f es uniformemente continua. La demostración de dicho resultado se obtiene tomando el mínimo de los dos deltas y usando la desigualdad del triángulo (note que $d_Y \leq D$ y $d_Z \leq D$).

Recíprocamente, supongamos que $F_\omega : X \times [0, \omega(X)] \to 2^{2^X}$ es continua (como es usual, asumimos que la métrica para 2^X es la métrica de Hausdorff H_H que es inducida, como en la definición 1.13, por la métrica de Hausdorff H para 2^X). Entonces, como $X \times [0, \omega(X)]$ es compacto, F_ω es uniformemente continua. Por lo tanto, usando las definiciones de F_ω (2.18) y H_H (1.13), se sigue que X tiene la propiedad (k). ■

Estamos listos para probar nuestro teorema acerca de la propiedad (k) y la contractibilidad. Notemos que la demostración es, en realidad, una generalización de lo que se hizo en la demostración del corolario 2.4.

Proposición 2.23. *[13, Teorema 81] Sea X un continuo. La función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ definida por*

$$\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\},$$

para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, es continua.

Teorema 2.24. *Si X es un continuo que tiene la propiedad (k), entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Mostremos que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X y haremos uso del teorema 2.2.

Sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por teorema 1.32). Por la proposición 2.22, $F_\omega : X \times [0, \omega(X)] \to 2^{2^X}$ es continua (recordando 2.19). Sea $D = F_1(X) \times [0, \omega(X)]$. Definimos una función h en D como sigue:

$$h(\{x\}, t) = \bigcup F_\omega(x, t) \text{ para cada } (\{x\}, t) \in D.$$

Note que la función natural de $F_1(X)$ en X (es decir, $\{x\} \to x$) es continua; como F_ω es continua, vemos que h es una función continua de D a 2^X usando la proposición 2.23. Más aún, usando la definición de función de Whitney (1.30), vemos que para cada $\{x\} \in F_1(X)$,

$$h(\{x\}, 0) = \bigcup F_\omega(x, 0) = \bigcup \{\{x\}\} = \{x\}$$

y

$$h(\{x\}, \omega(X)) = \bigcup F_\omega(x, \omega(X)) = \bigcup \{X\} = X.$$

Entonces, h es una función homotópica la cual muestra que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X. Por lo tanto, por el teorema 2.2, tenemos que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

El recíproco del teorema 2.24 es falso; el siguiente ejemplo nos da una clase de continuos en los cuales podemos ver esto.

Ejemplo 2.25. *Cualquier continuo contraíble que no tenga la propiedad* (k) *muestra que el recíproco de el teorema 2.24 es falso haciendo uso del corolario 2.3. Podemos obtener muchos continuos contraíbles* X *que no tengan la propiedad* (k) *como sigue: Comencemos con cualquier continuo contraíble* Y *que no sea cik en algún punto* y_0*. Entonces, sea* $X = Y \cup A$ *como en el ejemplo 2.17. Note que el continuo* X *es contraíble, ya que deforma* A *a* $y_0 = a_0$ *con una función homotópica que deja los puntos de* Y *fijos; entonces deforma* Y *a un punto, y note que como en el ejemplo 2.17,* X *no tiene la propiedad* (k)*.*

2.4. X localmente conexo, X homogéneo

Previamente se demostró que 2^X y $C(X)$ son contraíbles cuando X es un continuo contraíble y cuando X es un continuo hereditario indescomponible (vease los corolarios 2.3 y 2.4). Ahora usaremos el teorema 2.24 para mostrar que 2^X y $C(X)$ son contraíbles para otras dos clases de continuos.

Corolario 2.26. *Si* X *es un continuo localmente conexo, entonces* 2^X *y* $C(X)$ *son contraíbles.*

Demostración. Por el teorema 2.9, se tiene que X cuenta con la propiedad (k). Ahora, por el teorema 2.24, podemos concluir que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Definición 2.27. *Un espacio topológico* Y *se dice que es* ***homogéneo*** *si para cualesquiera* p *y* $q \in Y$*, existe un homeomorfismo* h *que va de* Y *en* Y *tal que* $h(p) = q$*.*

Mostraremos que 2^X y $C(X)$ son contraíbles cuando X es cualquier continuo homogéneo. Primero, probaremos el teorema 2.31. La demostración del teorema usa la idea de semi continuo superior. Discutamos esta idea a continuación.

Sea (Y, T_Y) y (Z, T_Z) espacios topológicos, y sea $F : Y \to 2^Z$ una función. Entonces F es **superior semi continua** (usc, por sus siglas en inglés) en p, con $p \in Y$, si $U \in T_Z$ tal que $F(p) \subset U$, entonces existe $V \in T_Y$ tal que $p \in V$ y $F(y) \subset U$ para toda $y \in V$ (vease la figura 2.3). Si F es *usc* en cada punto de Y, entonces diremos que F es *usc*. Veamos un tipo general de ejemplos de funciones *usc*: Si X y Y son compactos y f es una función

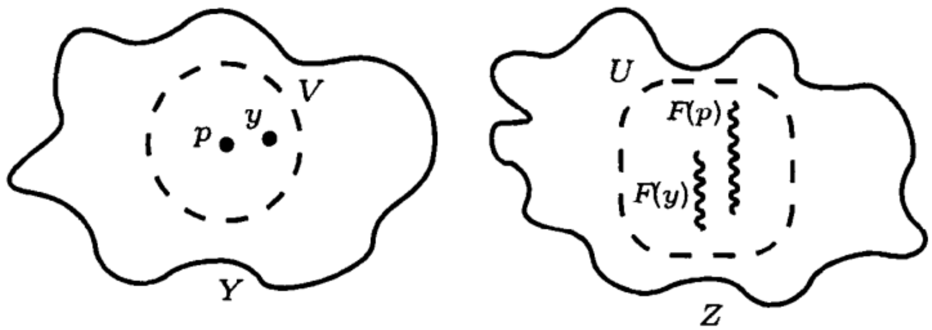

Figura 2.3: F es *usc* en p

sobreyectiva y continua de X a Y, entonces se tiene que $f^{-1}: Y \to 2^X$ es *usc*.

Recordemos la definición de límites de continuos.

Definición 2.28. *Sean $(X.T)$ un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se define el **límite inferior** y el **límite superior** de la suceción $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente, como:*

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{ si } U \text{ es un entorno de } x, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ salvo para un número finito}\}$$

y

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{ si } U \text{ es un entorno de } x, \text{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \\ \text{para una cantidad infinita de } n's, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y este hecho se denotará por $\lim A_n = A$.

Veamos el siguiente resultado sobre funciones *usc*.

Proposición 2.29. *sean Y y Z compactos, sea $F : Y \to 2^Z$ una función, y sea $p \in Y$. Entonces F es usc en p si y solo si $\limsup F(y_i) \subset F(p)$ siempre que la sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ en Y converge a p.*

Recordemos que un subconjunto Z de un espacio topológico (Y, T), es un **conjunto** G_δ **en** Y si $Z = \bigcap_{i=i}^{\infty} U_i$, donde $U_i \in T$ para cada i.

Proposición 2.30. *[8, pp. 207-208] Sea Y y Z compactos. Si $F : Y \to 2^Z$ es usc, entonces los puntos de continuidad de F forman un conjunto denso G_δ en Y.*

Ahora, pongamos nuestra atención en una versión del punto fijo de la propiedad (k). También note que, si un continuo es *cik* en p, entonces el continuo tiene la propiedad (k) en p.

Demostremos el siguente resultado.

Teorema 2.31. *Si X es un continuo, entonces X tiene la propiedad (k) en cada punto de un conjunto denso G_δ en X.*

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $F(x) = C_x(X)$. Notemos que, por el corolario 1.22 y la proposición 1.29, $F(x)$ es compacto, así por el teorema 1.33, $F(x)$ es conexo. Por lo tanto, F es una función continua de X a $C(C(X))$.

Mostremos que F es *usc* haciendo uso de la proposición 2.29. Sea $p \in X$, y sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que converge en X a p. Sea $A \in \limsup F(x_i)$. Dado que $x_{i(j)} \in A_{i(j)}$ para cada j y como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a p, se tiene que $p \in A$; así, $A \in F(p)$. Hemos mostrado que $\limsup F(x_i) \subset F(p)$. Por lo tanto, por la proposición 2.29, $F : X \to C(C(X))$ es *usc* en p. Esto prueba que F es *usc*.

Note que F es una función continua en x si y solo si X tiene la propiedad (k) en x. Por lo tanto, como F es *usc*, el teorema se sigue de la proposición 2.30 ■

Ahora, hagamos uso del teorema 2.24 y del teorema 2.31 a la clase de continuos homogéneos.

Corolario 2.32. *Si X es un continuo homogéneo, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Por el teorema 2.31 se tiene que X tiene la propiedad (k) en algún punto p. Entonces, como X es homogéneo, se sigue que X tiene la propiedad (k) en cada punto. Así, X tiene la propiedad (k). Por lo tanto, por el teorema 2.24, 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Capítulo 3

Hiperespacios con la propiedad del punto fijo

Discutiremos la propiedad del punto fijo para los hiperespacios 2^X y $C(X)$.

En la primera sección, veremos resultados preliminares acerca de la propiedad del punto fijo en general. En la segunda sección, determinaremos clases de continuos X, para los cuales 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo (algunos resultados son únicamente para $C(X)$).

Mencionaremos que exiten continuos Y, tales que tienen la propiedad del punto fijo, pero $C(Y)$ no tiene la propiedad del punto fijo.

3.1. Teorema de Brouwer, función universal, teorema de Lokuciewski

Definición 3.1. *Sean X un espacio métrico, $p \in X$ y $f : X \to X$, se dice que p es un **punto fijo** de f si $f(p) = p$. Diremos que X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua $h : X \to X$ tiene un punto fijo.*

Ejemplo 3.2. *El arco $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua, note que si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, entonces f tiene la propiedad del punto fijo, luego el arco $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo.*
Supongamos que $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - x$, note que g es continua, además $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ y

$g(1) = f(1) - 1 < 0$, de ahí que $g(0) > 0 > g(1)$, entonces por el teorema del valor intermedio existe un $c \in [0,1]$ tal que $0 = g(c) = f(c) - c$, es decir $f(c) - c = 0$ eso implica que $f(c) = c$, de ahí que f tiene la propiedad del punto fijo, luego el arco $[0,1]$ tiene la propiedad del punto fijo.

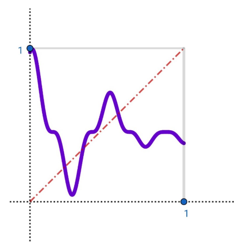

Figura 3.1

Veamos un resultado sobre esta propiedad.

Teorema 3.3. *La propiedad del punto fijo es una invariante topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, donde X tiene la propiedad del punto fijo, sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo y $g : Y \to Y$ una función continua. Como f, f^{-1} y g son continuas, se tiene que $f^{-1} \circ g \circ f : X \to X$ es continua. Sea $x \in X$ un punto fijo de la función $f^{-1} \circ g \circ f$, luego $(f^{-1} \circ g \circ f)(x) = x$, esto implica que $g(f(x)) = f(x)$. Si tomamos a $y = f(x)$ tenemos que $g(y) = y$. Por lo tanto, Y tiene la propiedad del punto fijo. ■

El resultado más célebre sobre la propiedad del punto fijo es el teorema de Brouwer:

Teorema 3.4 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** *[2, Corolario 2.2] Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Para los siguientes tres resultados, recordemos la definición de retracto y absolutamente retracto (AR) 1.48.

Teorema 3.5. *[6, Teorema 10.8] Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ son absolutamente retractos.*

Proposición 3.6. *Si un espacio métrico compacto y no vacío Y tiene la propiedad del punto fijo, entonces cada rectracto de Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean Z un retracto de Y, r una retracción sobreyectiva de Y en Z y $f : Z \to Z$ una función continua. Entonces, como $f \circ r$ es una función continua de Y en Y, $f \circ r$ fija un punto p. Luego $f \circ r(p) = p$ y $f \circ r(Y) \subset Z$, de ahí que $p \in Z$; entonces $r(p) = p$. Por lo tanto $f(r(p)) = p$, se tiene que $f(p) = p$. ■

Sean (Y, d) un espacio métrico, Z un espacio topológico, y $\varepsilon > 0$. Una función $f : Y \to Z$ es llamada **ε-función** (con respecto a d) si f es continua y para cada $z \in f(Y)$,

$$\mathrm{diam}_d(f^{-1}(z)) < \varepsilon.$$

A menudo consideraremos la siguiente condición:

1. Existe una ε-función de Y a Z para cada $\varepsilon > 0$.

Es importante tener en cuenta dos hechos en mente cuando consideremos 1. Primero, la ε-función en 1 se asume que es una ε-función con respecto a una métrica fija en Y; de lo contrario, 1 se satisface para cualquier Y por la siguiente razón: Para cada $\varepsilon > 0$, podemos elegir una métrica d_ε para Y, tal que $d_\varepsilon \leq \varepsilon$ y d_ε dada la topología en Y. Segundo, cuando Y es compacto, 1 es una invariante topológica; por lo tanto, cuando Y es compacto y consideramos 1, no necesitamos hacer mención de la métrica en Y.

Usaremos el termino **ε-retracción** para referirnos a una retracción que también es una ε-función.

Note que si $r_\varepsilon : Y \to Y$ es una ε-retracción con respecto a la métricca d para Y, entonces la distancia de r_ε a la función identidad en Y es menor que ε. En efecto, si $r_\varepsilon(y) = z$, entonces y, $z \in r_\varepsilon^{-1}(z)$; así, $d(y, z) < \varepsilon$ y, por lo tanto $d(y, r_\varepsilon(y)) < \varepsilon$.

Proposición 3.7. *Sea (Y, d) un espacio métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua f_ε de Y a un subconjunto Y_ε de Y, tal que Y_ε tiene la propiedad del punto fijo y f_ε dista de la función identidad en Y en menos que ε. Entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : Y \to Y$ continua. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $f_\varepsilon \circ f \mid_{Y_\varepsilon}$ es una función continua que va de Y_ε a Y_ε. Así, $f_\varepsilon \circ f \mid_{Y_\varepsilon}$ tiene un punto fijo p_ε. Entonces, como la distancia de f_ε a la función identidad en Y es menor que ε,

$$d(f(p_\varepsilon), p_\varepsilon) = d(f(p_\varepsilon), f_\varepsilon(f(p_\varepsilon))) < \varepsilon.$$

Ahora, de lo que mostramos, existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $d(f(p_i), p_i) < \frac{1}{i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como Y es compacto, alguna subsucesión de $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún p. Se sigue que $f(p) = p$. ■

Corolario 3.8. *Todo absoluto retracto (AR) tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema de metrizacón de Urysohn [8, p. 241] o [2, p. 195], todo AR puede ser encajado en el cubo de Hilbert $I^{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} [0,1]_i$. Entonces por la propiedad 3.6, es suficiente probar que I^{∞} tiene la propiedad del punto fijo.

Probaremos que I^{∞} tiene la propiedad del punto fijo usando las propiedades 3.6 y 3.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea I_n^{∞} la n-ésima celda en I^{∞} dada por

$$I_n^{\infty} = \{(t_i)_{i=1}^{\infty} \in I^{\infty} : t_i = 0 \text{ para cada } i \geq n+1\},$$

y sea r_n la retracción natural de I^{∞} en I_n^{∞} dada por

$$r_n((t_i)_{i=1}^{\infty}) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \text{ para cada } (t_i)_{t=1}^{\infty} \in I^{\infty}.$$

Note que cada una de las componentes de r_n, es una función continua, de ahí que r_n es continua. Además, para cada $(t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \in I_n^{\infty}$ existe $(t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \in I^{\infty}$, tal que $r_n((t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)$, de ahí que r_n es sobreyectiva. Por lo tanto, r_n en efecto es una retracción de I^{∞} en I_n^{∞}.

Veamos que para cada n, r_n es una 2^{-n}-retracción con respecto a la métrica d_{∞} para I^{∞} (vease la definición 1.3), es decir, $\text{diam}_{d_{\infty}}(r_n^{-1}(t_i)_{i=1}^{\infty}) < \frac{1}{2^{n-1}}$. En efecto, sean $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(p_i)_{i=1}^{\infty} \in r_n^{-1}(t_i)_{i=1}^{\infty}$, note que las primeros n componentes de $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ son iguales, entonces,

$$d_{\infty}((s_i)_{i=1}^{\infty}, (p_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i}.$$

Como para cada i se tiene que s_i y $p_i \in [0,1]$, entonces $|s_i - p_i| \leq 1$, de ahí que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

se puede demotrar por inducción que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n},$$

entonces

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^n},$$

más aún,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

de ahí que $\mathrm{diam}_{d_\infty}(r_n^{-1}(t_i)_{i=1}^{\infty}) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Además, note que $2^n = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces por la propiedad arquimediana para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar 2^n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ para algún n, así r_n es una ε-función tal que dista de la función identidad de I_n^∞ en menos de ε. Ahora, por el terorema 3.4, para cada n, I_n^∞ tiene la propiedad del punto fijo, además como r_n es una ε función, por la proposición 3.7, I^∞ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Veamos algunas nociones importantes.

Definición 3.9. *Sean Y y Z espacios topológicos. Una función $u : Y \to Z$ es una **función universal** si u es continua y u tiene una coincidencia con cada función continua de Y a Z, es decir, si $g : Y \to Z$ es continua, entonces existe $y \in Y$ tal que $g(y) = u(y)$.*

Note que si $u : Y \to Z$ es una función universal, entonces Z tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sea $f : Z \to Z$ una función continua; entonces existe $y \in Y$ tal que $(f \circ u)(y) = u(y)$.

Proposición 3.10. *Sea Y un espacio metrizable, compacto y no vacío. Para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función u_ε de Y al espacio métrico compacto y no vacío Z_ε. Entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : Y \to Y$ una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como $u_\varepsilon : Y \to Z_\varepsilon$ es una función universal y dado que $u_\varepsilon \circ f : Y \to Z_\varepsilon$ es continua, existe $p_\varepsilon \in Y$ tal que $(u_\varepsilon \circ f)(p_\varepsilon) = u_\varepsilon(p_\varepsilon)$. Entonces, denotemos con d la métrica en Y, note que como u_ε es una ε-función,

$$d(f(p_\varepsilon), p_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, como Y es compacto, se sigue como en la parte final de la demostración de la proposición 3.7 que f tiene un punto fijo. ■

Definición 3.11. *Sean Y un espacio topológico y Z una n-celda. Una función $\varphi : Y \to Z$ es* ***AH-esencial*** *(AH se refiere a Alexandroff-Hopf) si φ es continua y $\varphi\mid_{\varphi^{-1}(\partial Z)}: \varphi^{-1}(\partial Z) \to \partial Z$ no se puede extender a una función continua de Y a ∂Z.*

Teorema 3.12. *[14, Teorema 2.42] Sea Y un espacio topológico, y sea Z una n-celda. Una función de Y en Z es universal si y solo si es AH-esencial.*

Teorema 3.13 (Teorema de Lokuciewski)**.** *Sea Y un espacio metrizable, compacto y no vacío. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$. existe una ε-función AH-esencial de Y a una n_ε-celda. Entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea u_ε una ε-función AH-esencial de Y a una n_ε-celda, digamos Z_ε. Por la proposición 3.12, tenemos que u_ε es una ε-función universal de Y a Z_ε. Luego por la proposición 3.10, Y tiene la propiedad del punto fijo. ■

Enunciemos una proposición que nos permitirá saber cuales funciones que construiremos son AH-esencial. Tengamos en cuenta la definición de *contraíble con respecto a un espacio* (1.39) y la definición de *función esencial* (1.37).

Proposición 3.14. *Sea Y un espacio topológico que es contraíble con respecto a una $(n-1)$-esfera para algún n. Sea Z una n-celda, y sea $g : Y \to Z$ una función continua. Si existe $A \subset g^{-1}(\partial Z)$ tal que*

$$g\mid_A: A \to \partial Z \text{ es una función esencial,}$$

entonces g es una función AH-esencial (y recíprocamente).

Demostración. Suponogamos que g no es AH-esencial. Entonces, por definición, $g\mid_{g^{-1}(\partial Z)}$ puede ser extendida a una función continua $G : Y \to \partial Z$. Como Y es contraíble con respecto a ∂Z, G es no-esencial. Así, restringiendo una homotopía que una a G con una función constante, vemos que

$$G\mid_{g^{-1}(\partial Z)}: g^{-1}(\partial Z) \to \partial Z \text{ es no-esencial.}$$

Entonces, como $G\mid_{g^{-1}(\partial Z)} = g\mid_{g^{-1}(\partial Z)}$, $g\mid_{g^{-1}(\partial Z)}: g^{-1}(\partial Z) \to \partial Z$ es no-esencial.
Por lo tanto, para cualquier $A \subset g^{-1}(\partial Z)$, $g\mid_A: A \to \partial Z$ es no-esencial.
Esto prueba la proposición.

Para demostrar el recíproco, note que cualquier función no-esencial de cualquier subconjunto cerrado de Y en ∂Z puede ser extendido a una función continua de Y en ∂Z; en el caso de que Y sea un espacio métrico, vease [1, p. 94]. Entonces si $g : Y \to Z$ es una función AH-esencial, así $g\mid_{g^{-1}(\partial Z)}: g^{-1}(\partial Z) \to \partial Z$ es una función esencial. ■

3.2. Hiperespacios con la propiedad del punto fijo

Los resultados principales son acerca de los tipos de continuos: localmente conexos, continuos tipo-arcos, continuos tipo-circunferencia, dendroides, y continuos hereditariamente indescomponibles. Centraremos nuestra atención a los hiperespacios 2^X y $C(X)$.

3.3. X continuo localmente conexo

Teorema 3.15. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema 3.5, se tiene que 2^X y $C(X)$ son absolutamente retractos. Por lo tanto, haciendo uso del corolario 3.8, se tiene que 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo. ■

3.4. X continuos tipo-arco

Una interesante clase de continuos son generados por la siguiente idea: Comencemos con un continuo $\mathcal{P}$, y consideremos todos los continuos X, tales que para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función sobreyectiva f_ε de X en $\mathcal{P}$. Note que el **espacio descomposición** $D_{f_\varepsilon} = \{f_\varepsilon^{-1}(p) : p \in \mathcal{P}\}$, son homeomorfos a $\mathcal{P}$ (vease [11, p.44, Teorema 3.21]). Así, el hecho de que X admita una ε-función sobreyectiva en $\mathcal{P}$ para cada $\varepsilon > 0$ significa que, X llega a ser homeomorfo a $\mathcal{P}$ identificando los puntos de un arbitrario subconjunto en X; en el sentido de que, X "es casi igual a" $\mathcal{P}$. Esto nos conduce a la siguiente defición.

Definición 3.16. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{P}$ una colección de espacios métricos compactos, X es **tipo-$\mathcal{P}$** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función f_ε sobreyectiva de X a algún elemento Y_ε de $\mathcal{P}$.*

Así, tenemos las nociones de **tipo-arco** (tipo-$[0,1]$), **tipo-circunferencia** (tipo-S^1), **tipo-n-celda** (tipo-I^n).

Veamos unos resultados que nos ayudaran a demostraciones posteriores.

Lema 3.17. *Sea $Y = A \cup B$ un continuo, donde A y B son subcontinuos de Y tales que $A \cap B$ no es conexo, digamos que $A \cap B = E \mid F$. Sea $S = S_1 \cup S_2$ una curva cerrada simple, donde S_1 y S_2 son arcos tales que $S_1 \cap S_2 = \{p, q\}$. Sea $k : Y \to S$ una función continua tal que*

$$k(A) \subset S_1 \ , \ k(B) \subset S_2 \ , \ k(E) = p \ , \ k(F) = q.$$

Entonces k es una función esencial.

Demostración. Sean S^1_+ y S^1_- como en la demostración del lema 1.54. Sea $h : S \to S^1$ un homeomorfismo tal que

$$h(S_1) = S^1_+, h(s_2) = S^1_-, h(p) = (1,0), h(q) = (-1,0).$$

Sea $g = h \circ k : Y \to S^1$. Entonces, por la demostración del lema 1.54, se tiene que g es una función esencial. Por lo tanto, como $k = h^{-1} \circ g$, se tiene que k es una función esencial (si hubiera una función homotópica $\varphi : Y \times [0,1] \to S$ que une a k a una función constante, entonces $h \circ \varphi$ será una función homotópica que úne a g a una función constante). ■

Ahora haremos uso de las funciones inducidas entre hiperespacios.

Definición 3.18. *Sean X y Y compactos y sea $f : X \to Y$ una función continua. La **función inducida** $f^* : 2^X \to 2^Y$ dada por*

$$f^*(A) = f(A) \text{ para cada } A \in 2^X;$$

*la **función inducida** $\widehat{f} : C(X) \to C(Y)$ es $f^* |_{C(X)}$. (A veces f^* es denotada por 2^f y $\widehat{f}$ es denotada por $C(f)$.)*

Veamos un resultado que nos garantiza que f^* y (por lo tanto) $\widehat{f}$ son funciones continuas.

Lema 3.19. *[6, Lema 13.3] Sean X y Y compactos, y sea $f : X \to Y$ una función continua. Sea $f^* : 2^X \to 2^Y$ definida como sigue:*

$$f^*(A) = f(A) \text{ para cada } A \in 2^X.$$

Entonces, f^* es continua.

Proposición 3.20. *Sea X un continuo. Si f es cualquier función continua y sobreyectiva de X en $[0,1]$, entonces la función inducida $\widehat{f} : C(X) \to C([0,1])$ es una función AH-esencial.*

Demostración. Sea $I = [0,1]$. Recordemos por el lema 1.21 que $C(I)$ es una 2-celda y que

$$\partial C(I) = F_1(I) \cup C_0(I) \cup C_1(I).$$

Primero encontremos un subcontinuo $\mathcal{Y}$ de $C(X)$ tal que $\widehat{f} |_{\mathcal{Y}}: \mathcal{Y} \to \partial C(I)$ es una función esencial. Como $f(X) = I$, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$. Por el teorema 1.33, existe un arco ordenado α_i en $C(X)$ que va de $\{x_i\}$ a X para $i = 0$ e $i = 1$. Sea $\mathcal{A} = \alpha_0 \cup \alpha_1$, sea $\mathcal{B} = F_1(X)$, y sea

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Hemos mostrado que se satisfacen las hipótesis del lema 3.17: $\mathcal{A}$ es un continuo, ya que $X \in \alpha_0 \cap \alpha_1$, por la proposición 1.24 $\mathcal{B}$ es un continuo, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\{x_0\}, \{x_1\}\}$, ya que α_0 y α_1 son arcos ordenados, y por como está construido $\mathcal{Y}$ se tiene que es un continuo; también, de la fórmula para $\widehat{f}$,

$$\widehat{f}(\mathcal{A}) = C_0(I) \cup C_1(I), \widehat{f}(\mathcal{B}) = F_1(I), \widehat{f}(\{x_0\}) = \{0\}, \widehat{f}(\{x_1\}) = \{1\}.$$

Por lo tanto, por el lema 3.17, tenemos que

$$\widehat{f}\mid_{\mathcal{Y}}: \mathcal{Y} \to \partial C(I) \text{ es una función esencial.} \tag{3.1}$$

Ahora, recordemos que $C(X)$ es contraíble con respecto a S^1 por el teorema 1.50. Por lo tanto, por le ecuación 3.1, podemos aplicar la proposición 3.14 para concluir que $\widehat{f} : C(X) \to C(I)$ es una función AH-esencial. ■

Proposición 3.21. *Sean X y Y compactos, d una métrica para X, y $\varepsilon > 0$. Si $f : X \to Y$ es una ε-función con respecto a d, entonces la función inducida $f^* : 2^X \to 2^Y$ es una ε-función con respecto a H_d (como se definió en 1.13). Por lo tanto, para cada $\mathcal{H} \subset 2^X$, $f^* \mid_{\mathcal{H}}$ es una ε-función con respecto a $H_d \mid_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$.*

Demostración. Sea $K \in f^*(2^X)$, y sean $A, B \in (f^*)^{-1}(K)$. Mostremos que $H_d(A, B) < \varepsilon$. Sea $a \in A$. Entonces, ya que $f(A) = f(B)$, existe $b \in B$ tal que $f(b) = f(a)$. Así, como f es una ε-función con respecto a d, $d(a, b) < \varepsilon$. Por lo tanto, hemos probado que

$$A \subset N_d(\varepsilon, B).$$

De manera análoga se muestra que

$$B \subset N_d(\varepsilon, A).$$

Entonces por la proposición 1.16, se tiene que $H_d(A, B) < \varepsilon$. ■

Ahora probaremos nuestro teorema sobre continuos tipo-arco.

Teorema 3.22. *Si X es un continuo tipo-arco, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por definición de tipo-arco, existe una ε-función sobreyectiva f_ε, de X en $[0, 1]$ para cada $\varepsilon > 0$. Recordemos que por el lema 1.18, se tiene que $C([0, 1])$ es una 2-celda. Por la proposición 3.20, cada función inducida $\widehat{f_\varepsilon} : C(X) \to C([0, 1])$ es una función AH-esencial; por la proposición 3.21, cada $\widehat{f_\varepsilon}$ es una ε-función. Por lo tanto, por el teorema de Lokuciewski (3.13), $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Se desconoce si 2^X tiene la propiedad del punto fijo cuando X sea un continuo tipo-arco.

3.5. X continuos tipo-circunferencia

En está sección se probará que $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo para cualquier continuo tipo-circunferencia. Se demostró un teorema similar para continuos tipo-arco en el teorema 3.22.

Note que los continuos tipo-circunferencia son también continuos tipo-arco ([11, pp. 234-237]). Por lo que se vio en el teorema 3.22, solo necesitamos demostrar nuestro teorema para los continuos tipo-circunferencia que no son tipo-arco. El siguiente lema produce una conveniente manera para distinguir los continuos tipo-circunferencia que no son tipo-arco de aquellos que son tipo-arco.

Lema 3.23. *Sea X un continuo con más de un elemento. Si existe una ε-función esencial $f_\varepsilon : X \to S^1$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces X es tipo-arco (y recíprocamente).*

Demostración. Por el terorema 1.52, cada f_ε tiene un levantamiento $\varphi_\varepsilon : X \to \mathbb{R}^1$. Como $f_\varepsilon = \exp \circ \varphi_\varepsilon$ y f_ε es una ε-función, se sigue que φ_ε es una ε-función. Ahora, sea

$$\delta = \operatorname{diam}(X),$$

y note que $\delta > 0$. Como φ_ε es una ε-función, es claro que $\varphi_\varepsilon(X)$ tiene más de un elemento para cada $\varepsilon \leq \delta$. Así, para cada $\varepsilon \leq \delta$, φ_ε es una ε-función del continuo X en un intervalo con más de un elemento. Por lo tanto, X es tipo-arco, ya que se obtiene una ε-función de X en $[0,1]$ para cada $\varepsilon \leq \delta$ por la composición de φ_ε con un homeomorfismo de φ_ε en $[0,1]$.

Recíprocamente, supongamos que X es tipo-arco. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función g_ε de X en $[0,1]$. Sea $f_\varepsilon = \exp \circ g_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Note que para cada $f_\varepsilon : X \to S^1$ es una ε-función no-esencial: f_ε es no-esencial ya que g_ε es un levantamiento de f_ε (aplicando el teorema 1.52); f_ε es una ε-función pues g_ε es una ε-función y $\exp|_{[0,1]}$ es uno a uno. ■

Teorema 3.24. *Si X es un continuo tipo-circunferencia, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por definición de continuo tipo-circunferencia, existe una ε-función sobreyectiva f_ε de X en S^1 para cada $\varepsilon > 0$. Por la proposición 3.21, cada función inducida $\widehat{f_\varepsilon} : C(X) \to (S^1)$ es una ε-función. Por el teorema 3.22, podemos asumir para nuestra demostración que X no es tipo-arco. Entonces, ya que cada $f_\varepsilon : X \to S^1$ es una ε-función, el lema 3.23 nos proporciona un $\delta > 0$ tal que f_ε es una función no-esencial para cada $\varepsilon < \delta$. Ahora, recordemos del lema 1.19 que $C(S^1)$ es una 2-celda y que $\partial C(S^1) = F_1(S^1)$. Así, $f_\varepsilon : X \to S^1$ es una función no-esencial para cada $\varepsilon < \delta$, por la proposición 1.24

$$f_\varepsilon |_{F_1(X)}: F_1(X) \to \partial C(S^1) \text{ es una función no-esencial para cada } \varepsilon < \delta.$$

Entonces, como $C(X)$ es crS^1 por el teorema 1.50, se tiene por la proposición 3.14 que $\widehat{f_\varepsilon} : C(X) \to C(S^1)$ es una función AH-esencial para cada $\varepsilon < \delta$. Por lo tanto, ya que $\widehat{f_\varepsilon}$ es también una ε-función, podemos hacer uso del teorema de Lokuciewski 3.13 para concluir que $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Así como en el caso de los continuos tipo-arco, se desconoce si 2^X tiene la propiedad del punto fijo cuando X sea un continuo tipo-circunferencia.

3.6. Un teorema general

Ahora, se probará un teorema general que puede ser aplicado para varios tipos de continuos. Ilustraremos el teorema con tres ejemplos. La principal aplicación del teorema se encuentra en la siguiente sección, donde se darán resultados sobre hiperespacios de dendroides.

Teorema 3.25. *Sea X un continuo. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua f_ε de X a un continuo localmente conexo X_ε, con $X_\varepsilon \subset X$, tal que la distancia de f_ε a la función identidad en X es menor que ε. Entonces, 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Denotemos con d una métrica para X. Supongamos que la distancia de f_ε a la función identidad en X es menor que ε, con respecto a la métrica d en X. Así, vemos que la función inducida $f_\varepsilon^* : 2^X \to 2^{X_\varepsilon}$ dista de la función identidad en 2^X en menos que ε con respecto a H_d (como en la definición 1.13). También, 2^{X_ε} tiene la propiedad del punto fijo por el teorema 3.15. Por lo tanto, podemos hacer uso de la proposición 3.7 para concluir que 2^X tiene la propiedad del punto fijo. De manera análoga se demuestra para $C(X)$, haciendo uso de la función inducida $\widehat{f_\varepsilon} : C(X) \to C(X_\varepsilon)$. ■

Corolario 3.26. *Variaciones del teorema 3.25*

1. *Sea* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$*, donde* $n \leq \infty$ *y cada* X_i *es un continuo. Supongamos que para cada* i *y cada* $\varepsilon > 0$*, existe una función continua* $f_{i,\varepsilon}$ *de* X_i *en un continuo localmente conexo en* X_i*, tal que la distancia de* $f_{i,\varepsilon}$ *a la función identidad de* X *es menor que* ε*. Entonces* 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo.*

2. *Sea* $X =$*Cono*(Y)*, donde* Y *es un continuo. Supongamos que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una función continua y sobreyectiva* f_ε *de* Y *a un continuo localmente conexo en* Y*, tal que la distancia de* f_ε *a la función identidad en* Y *es menor que* ε*. Entonces* 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo.*

3. *Sea* $X = \sum(Y)$*, donde* Y *es un continuo. Supongamos que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una función continua* f_ε *de* Y *a una continuo localmente conexo en* Y *tal que la distancia de* f_ε *a la función identidad en* Y *es menor que* ε *. Entonces* 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo.*

Ejemplo 3.27. *Sea* X *el continuo-*sen$(\frac{1}{x})$ *en la figura 3.2. Note que existe una* ε*-retracción de* X *a un arco para cada* $\varepsilon > 0$ *(una proyección horizontal a la derecha). Por lo tanto, por el teorema 3.25,* 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo (en el caso particular de* $C(X)$ *se puede aplicar el teorema 3.22).*

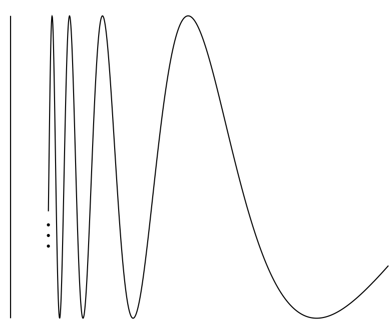

Figura 3.2: sen$(\frac{1}{x})$ continuo

Ejemplo 3.28. *El* ***círcuo de Varsovia*** W*, en la figura 3.3. Sea* $X = W \cup U$*, donde* U *es el componente acotado de* $\mathbb{R}^2 - W$*;* X *es llamado el* ***disco de Varsovia****. Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una* ε*-retracción de* X *en una*

2-celda (una proyección horizontal a la derecha). Por lo tanto, por el teorema 3.25, 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo.*

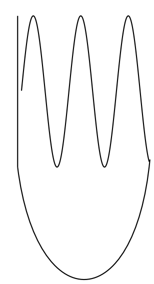

Figura 3.3: Círculo de Varsovia

Ejemplo 3.29. *Sea* X *un continuo indescomponible que es amenudo llamado* ***continuo de Knaster****. Note que de la figura 3.4 para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una función sobreyectiva* f_ε *de* X *en un arco de* X *tal que la distancia de* f_ε *a la función identidad en* X *es menor que* ε *. Por lo tanto, por el teorema 3.25,* 2^X *y* $C(X)$ *tienen la propiedad del punto fijo (para el caso de* $C(X)$ *se sigue del teorema 3.22).*

3.7. X dendroide

Definición 3.30. *Un* ***dendroide*** *es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente (hereditariamente unicoherente significa que cada subcontinuo es unicoherente 1.53).*

Estos son algunos ejemplos de dendroides.

Ejemplo 3.31. *El* ***abanico armónico*** *es el continuo de la figura 3.5; es el cono bajo el compacto* Y*, donde* $Y = \{e_i : e_0 = 0 \text{ y } e_i = \frac{1}{i} \text{ con } i = 1, 2, \ldots\}$

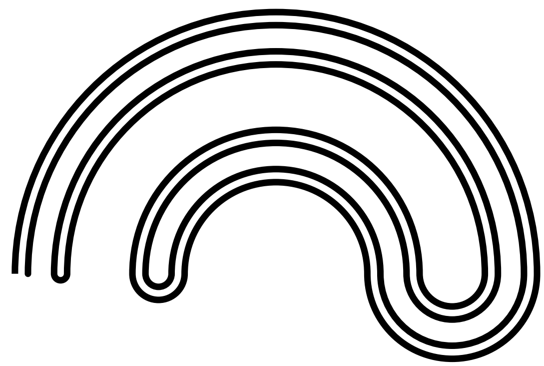

Figura 3.4: Continuo de Knaster

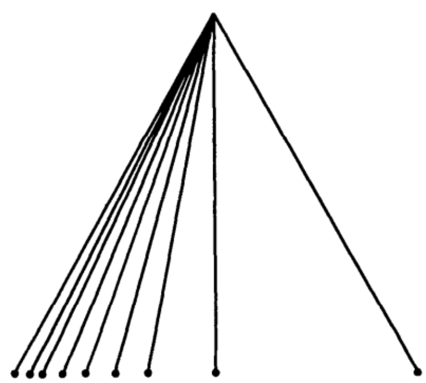

Figura 3.5: abanico armónico

Ejemplo 3.32. *Sea X el continuo de la figura 3.6. X consiste de dos abanicos armónicos unidos en un punto.*

Enunciaremos algunas propiedades generales de los dendroides.

1. Los dendroides son único arco conexos.

2. Todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide ([9, p. 301]).

3. Los dendroides son hereditarimante descomponibles ([11, p. 226]).

4. Los dendroides son unidimencionales ([11, p. 305, Teorema 13.57]).

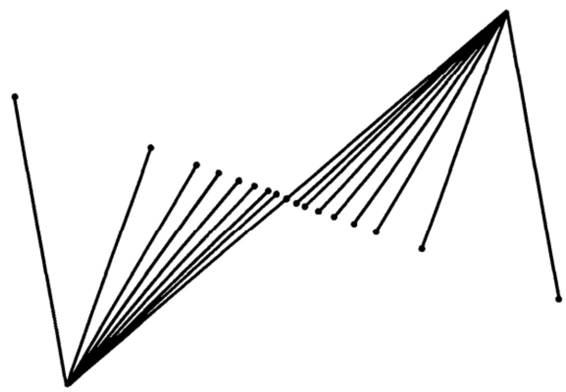

Figura 3.6: abanico armónico doble

5. Los dendroides son acíclicos, es decir, son crS^1 ([11, p. 271, (f)]).
6. Los dendroides tiene la propiedad del punto fijo ([14, Teorema 2.57]).

De la propiedad 1, la razón por la cuál los arcos son únicos, es que si hubiera dos arcos diferentes que unen a los puntos x a y, entonces la intersección de estos dos arcos, que son cerrados y conexos, no sería conexa.

No se sabe si 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para todos los dendroides X. Por lo tanto, mostraremos que 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo para dos tipos de dendroides, dendroides suaves y abanicos.

Usaremos la siguiente notación en la definición de dendroide suave: Sea X un dendroide, y sean $x, y \in X$. Si $x \neq y$, entonces denotaremos por xy al único arco en X con puntos extremos x y y; si $x = y$, entonces $xy = \{x\}$.

Recordemos la definición de límites de continuos 2.28, la cual nos ayudará en la definición de dendroide suave.

Definición 3.33. *Sea X un dendroide, y sea $p \in X$; entonces X es **suave en** p si dada cualquier sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X converge a un punto x en X, entonces $\lim px_i = px$. Un dendroide es **suave** si es suave en algún punto.*

Por ejemplo, el abanico armónico (vease la figura 3.5) es una banico suave. El abanico en la figura 3.7 no es un abanico suave.

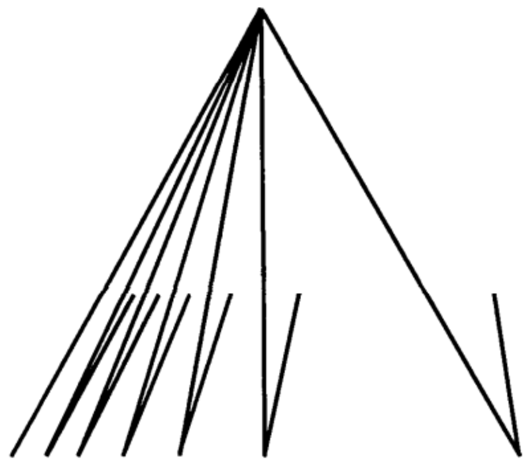

Figura 3.7: abanico que no es suave

Definición 3.34. *Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cuales quiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.*

Definición 3.35. *Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples (Note que un árbol es un dendroide localmente conexo).*

Teorema 3.36. *[4, p. 261] Si X es una dendroide suave y $\varepsilon > 0$, entonces existe una retracción r_ε de X en un árbol tal que la distancia de r_ε a la función identidad en X es menor que ε .*

Ahora estamos listos para enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.37. *Si X es un dendroide suave, entonces 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema 3.36, podemos hacer uso del teorema 3.25, así 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad de el punto fijo. ■

Se desconoce si existe una ε-retracción para cada dendroide a un árbol para cada $\varepsilon > 0$ (el problema se enuncia en [4, p. 261]). Si siempre existiera una retracción, entonces el teroema 3.37 se cumpliría para todo dendroide.

Definición 3.38. *Un* ***abanico*** *es un dendroide X, para el cual solo un punto es un punto extremo en común para tres o más arcos en X.*

Teorema 3.39. *(**Teorema de Fugate**)[3, p. 120] Si X es un abanico y $\varepsilon > 0$, entonces existe una retracción sobreyectiva r_ε de X a un árbol (el cual en este caso es un arco) tal que la distancia de r_ε a la función identidad en X es menor que ε.*

Gracias al teorema que acabamos de enunciar, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.40. *Si X es un abanico, entonces 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema de Fugate 3.39 podemos aplicar el teorema 3.25 para ver que 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Teorema 3.41. *Sea X un producto cartesiano a lo más númerable, donde cada espacio coordenado es un abanico o un dendroide suave. Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Usando el teorema de Fugate 3.39, el teorema 3.37 y el teorema 3.40, podemos aplicar el corolario 3.26 inciso 1 ■

Definición 3.42. *Sea Y un espacio topológico. El* ***cono bajo*** *Y, el cual denotaremos por Cono(Y), es el espacio cociente obtenido de $Y \times [0,1]$ al encoger $Y \times \{1\}$ a un punto; en otras pelabras, Cono(Y) es el espacio cociente $Y \times [0,1] \diagup \sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $Y \times [0,1]$ dada por $(y_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$ si y solo si $(y_1, t_1) = (y_2, t_2)$ o $t_1 = t_2 = 1$. El punto $Y \times \{1\}$ del Cono(Y) es llamado* ***vertice*** *del Cono(Y); el subconjunto $Y \times \{0\}$ del Cono(Y) es llamda la* ***base*** *del Cono(Y).*

Teorema 3.43. *Sea $X =$Cono(Y), donde Y es un abanico o un dendroide suave. Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Usando el teorema de Fugate 3.39, el teorema 3.37 y el teorema 3.40 para aplicar el corolario 3.26 inciso 2 ■

Definición 3.44. *Sea Y un espacio topológico. La **suspensión bajo** Y la cual denotaremos por $\Sigma(Y)$, es el espacio cociente obtenido de $Y \times [-1, 1]$ reduciendo $Y \times \{-1\}$ y $Y \times \{1\}$ a diferentes puntos.*

Recordemos que si Y es un compacto, entonces $\Sigma(Y)$ puede ser construido geometricamente de manera similar a la geometría del cono bajo Y, vease [6, p. 51].

Teorema 3.45. *Sea $X = \Sigma(Y)$, donde Y es un abanico o un dendroide suave. Entonces 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Usando el teorema de Fugate 3.39, el teorema 3.37 y el teorema 3.40 para aplicar el corolario 3.26 inciso 3. ■

3.8. Continuos hereditariamente indescomponibles

Teorema 3.46. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Más aún, si $\mathcal{H}$ es un subcontinuo arco conexo de $C(X)$, entonces $\mathcal{H}$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Young [16, p. 883] probó el siguiente teorema: Si Y es un único arco conexo, continuo Hausdorff contraíble, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto, nuestro resultado para $C(X)$ se sigue del teorema 1.59 y del 2.4. De manera análoga, el resultado para $\mathcal{H}$ se sigue del teorema 1.59 y del corolario 2.5.

■

Referencias

[1] Borsuk, K., *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne, Vol. 44, Polish Scientific Publishers, Warszawa, Poloand, 1967.

[2] Dugundji, James., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1978.

[3] Fugate, J. B., *Retracting fans onto finite fans*, Fund. Math. 71, (1971), 113-125.

[4] Fugate, J. B., *Small retractions of smooth dendroids onto trees.*, Fund. Math. 71, (1971), 255-262.

[5] Illanes, Alejandro, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Texto No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[6] Illanes, Alejandro; Nadler, Sam B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[7] Krasinkiewicz, J., *On the hyperspaces of hereditarily indescomposable continua*, Fund. Math. 84 (1974), 175-186

[8] Kuratowski, K., *Topology*, Vol. I, Acad. Press, New York, N.Y., 1966.

[9] Kuratowski, K., *Topology*, Vol. II, Acad. Press, New York, N.Y., 1968.

[10] Macías, Sergio,*Un breve panorama de los hiperespacios de continuos*, Revista Integración, Temas De matemáticas, 23(2), 1-13.

[11] Nadler, Sam B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[12] Pérez Rosales, Esaú Alejandro, *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 22 de junio de 2022.

[13] Regis Avila, Fátima Itzel, *Hiperespacios y Continuos Pseudocontráctiles*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias, UAEM, presentada el 19 de septiembre de 2019.

[14] Sánchez López, Cristina, *Propiedad del Punto Fijo: Lema de Spencer*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 30 de junio de 2014.

[15] Soufflé Ramos, Francisco Jesús, *La propiedad de Kelley y contractibilidad de hiperespacios*, tesis de la licenciatura en matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, presentada en junio de 2012.

[16] Young, G. S., *Fixed-point theorems for arcwise connected continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, (1960), 880-884

Índice alfabético