Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

DOS DEMOSTRACIONES DE UNA PROPIEDAD DEL CONJUNTO DE JULIA DE FUNCIONES ENTERAS TRASCENDENTES

Tesis que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta

Lizzeth Trujillo Santamaría

Directora de Tesis

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla, Pue. Diciembre 2014

Agradecimientos

A mis padres, Luisa y Juan, por todo su amor, comprensión, ayuda y apoyo; por sus palabras de aliento en el transcurso de la licenciatura y a lo largo de mi vida. Gracias por estar incondicionalmente.

A mis hermanos, Iveth, Lizbeth y Juan, porque en el exterior crecemos pero nos conocemos como siempre y siempre permaneceremos.

A mi familia, por brindarme su apoyo y hacerme saber que todo es posible. Por aquellos que ya no están sin embargo nunca se han alejado de mí.

A Juan Ángel, porque nos encontramos en el mismo tiempo y espacio. Llegaste no antes ni después: llegaste a tiempo. Gracias por tu amor y paciencia.

A mi directora de tesis, Dra. Patricia Domínguez Soto, por el tiempo y espacio dedicado a la realización de esta tesis. Gracias por todo el apoyo brindado, por sus enseñanzas, sus conocimientos, su paciencia, sus consejos y su ánimo.

Al M. C. Iván Hernández Orzuna, por el tiempo dedicado a mis dudas, por su paciencia; por sus asesorias y sus consejos.

A mis sinodales, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y M. C. Julio Erasto Poisot Macías, por aceptar serlo y por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A mis amigos y compañeros, por los momentos y experiencias compartidas más allá de la carrera.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haber financiado esta tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Si f es una función racional de grado al menos 2 o una función trascendente entera, llamaremos *conjunto de Fatou* denotado por $F(f)$ al conjunto de puntos cercanos donde la sucesión de iteradas f^n forma una familia normal y a su complemento, denotado por $J(f)$, *conjunto de Julia*, rigurosamente hablando, la dinámica es *estable* en el *conjunto de Fatou* y es *caótica* en el *conjunto de Julia*. Las propiedades de los conjuntos $F(f)$ y $J(f)$ fueron establecidas para funciones racionales por Gaston Julia (1893-1978) en *Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles* [14] y Pierre Fatou (1878-1929) en *Sur les équations fonctionelles* [10] en los años 1918 y 1920 respectivamente, y para las funciones enteras trascendentes, por Fatou, en *Sur l'itération des fonctions transcendantes entiéres* [11], en 1926. Fatou estudió la iteración de funciones enteras trascendentes dando ejemplos donde surgían significativas diferencias a la teoria que habia sido desarrollada hasta ese entonces para funciones racionales. Fatou enunció la siguiente pregunta básica para f, una función entera trascendente

¿Los puntos periódicos repulsores de f son densos en $J(f)$?

La pregunta es de gran importancia teórica, y fue respondida afirmativamente para funciones racionales por los matemáticos Fatou y Julia. Esta pregunta también fue respondida de forma afirmativa por Baker, en su trabajo *Repulsive fixpoints of entire functions* [4] en 1968, el cual es de importancia fundamental en la dinámica compleja. Aquí, Baker usa un teorema profundo de Ahlfors, de la teoría de superficies cubrientes, para demostrar que cerca de cada punto de $J(f)$ hay un punto periódico repulsor de f. Más adelante, Detlef Bargmann en 1997 en [5] también demuestra que el conjunto $J(f)$ es la clausura de todos los puntos periódicos repulsores para f entera usando el Lema de Zalcman y el teorema de Montel Caratheodory.

En esta tesis se presentan dos demostraciones de la pregunta que Fatou formuló. Ambas demostraciones utilizan métodos distintos; la primera está basada en la demostración de Baker y la segunda está basada en la de Bargamann, es decir, utilizaremos el Lema de Zalcman.

Capítulo 2

Preliminares

En este primer capítulo recordaremos algunos conceptos básicos de la Variable Compleja que serán de gran utilidad para el entendimiento y la comprensión de los capítulos subsecuentes de esta tesis. Estos temas así como sus resultados, pueden ser consultados en [1], [13] [15], [17], [18], [19] y [20].

2.1. Números Complejos

Empezaremos recordando algunos conceptos de Variable Compleja.

Sea $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ como un vector.

Como parejas ordenadas $(x, y), (y, x)$ son diferentes, es decir, si $x \neq y$ entonces $(x, y) \neq (y, x)$.

Ahora, sea $\mathbb{C}$ el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, definiremos las operaciones de adición $+$ y multiplicación $\cdot$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x, y) + (z, w) &= (x + z, y + w) \\ (x, y) \cdot (z, w) &= (xz - yw, xw + yz). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se pueden verificar las siguientes propiedades de la adición y la multiplicación en $\mathbb{C}$:

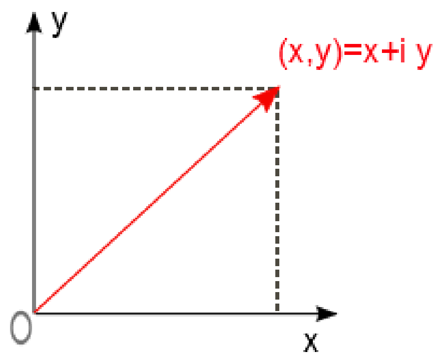


Figura 2.1: Plano $\mathbb{R}^2$.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 && (\textit{conmutatividad suma}) \\
z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 && (\textit{asociatividad suma}) \\
z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 && (\textit{conmutatividad producto}) \\
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) && (\textit{asociatividad producto}) \\
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 && (\textit{distributiva})
\end{aligned}$$

Además, existe un elemento único $0 \in \mathbb{C}$, a saber, $0 = (0, 0)$, tal que

$$z_1 + 0 = z_1, \quad \forall\, z_1 \in \mathbb{C},$$

y existe un único $\omega = (1, 0)$, tal que

$$z_1 \cdot \omega = z_1, \quad \forall\, z_1 \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.1.1. El conjunto $\mathbb{C}$ será el *conjunto de los números complejos*, y a los elementos de $\mathbb{C}$ los llamaremos *números complejos*.

Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, entonces el número real x se llama la *parte real*, y el número real y la *parte imaginaria* del número complejo z, con notación: $x = Re(z),\ y = Im(z)$.

Si denotamos por i al número $(0,1)$ de (2,1), se deduce que $(0,1)^2 = (-1,0)$, es decir, $i^2 = -1$. El número i, llamado la *unidad imaginaria*, resulta ser una raíz cuadrada de -1.

Ahora, consideremos un número complejo cualquiera $z = (x,y)$, este se puede representar de la forma:

$$z = x + iy,$$

particularmente $0 = 0 + i0$.

Las diferentes operaciones algebraicas definidas en el conjunto de los números complejos se pueden ver como siguen:

$$\begin{aligned}
(x+iy)+(z+iw) &= (x+z)+(y+w)i \qquad &&(\textit{suma})\\
(x+iy)(z+iw) &= (xz-yw)+(xz+yz)i \qquad &&(\textit{producto})\\
(x+iy)-(z+iw) &= (x-z)+(y-w)i \qquad &&(\textit{resta})\\
\frac{x+iy}{z+iw} &= \frac{xz+yw}{z^2+w^2}+\frac{yz-xw}{z^2+w^2}i \qquad &&(\textit{si } z^2+w^2>0)
\end{aligned}$$

Con las operaciones de suma y producto definidas anteriormente, $\mathbb{C}$ tiene estructura de campo.

Definición 2.1.2. El *conjugado* $\overline{z}$ de un número complejo $z = (x,y) = x+iy$ es el número $\overline{z} = (x,-y) = x - yi$.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{z}+\overline{w}\\
\overline{z\cdot w} &= \overline{z}\cdot\overline{w}\\
\overline{z-w} &= \overline{z}-\overline{w}\\
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\ (w\neq 0)\\
\overline{\overline{z}} &= z\\
z \textit{ es número real} &\iff z=\overline{z}
\end{aligned}$$

Definición 2.1.3. El *módulo o valor absoluto* $|z|$ de un número complejo $z = (x,y) = x+iy$ es el número real $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} |z| \geq 0,\ |z| = 0 &\Longleftrightarrow z = 0 \\ |Re(z)| \leq |z|\,,\ |Im(z)| &\leq |z| \\ |\overline{z}| = |-z| &= |z| \\ |z|^2 &= z \cdot \overline{z} \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La última desigualdad se conoce como la *desigualdad triangular*.

Para $z, w \in \mathbb{C}$, pongamos $d(z,w) = |z - w|$, la *distancia* entre z y w, y satisface:

$$\begin{aligned} d(z,w) = 0 &\Longleftrightarrow & z = w \\ d(z,w) &= & d(w,z) \\ d(z_1,z_2) + d(z_2,z_3) &\geq & d(z_1,z_3). \end{aligned}$$

Poniendo al plano complejo $\mathbb{C}$ y a la métrica $d(z,w)$ con $z, w \in \mathbb{C}$, tenemos que $(\mathbb{C}, d(z,w))$ forma un espacio métrico.

2.1.1. Forma polar de un número complejo

Para cualquier número complejo $z = x + iy$ distinto de cero, es decir, $r = |z| \neq 0$, y θ el ángulo (en radianes), formado por la dirección positiva del eje real y por el vector $\vec{0z}$.

Este ángulo θ está determinado por z, salvo múltiplos enteros de 2π, y se llama *argumento arg(z)* de z. Tomemos $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$, ahora todo número $z = x + iy \neq 0$ se puede escribir en la forma $z = r\,(cos\theta + isen\theta)$. Hay infinitos valores de θ; a cualquiera de ellos lo llamaremos *argumento* de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo, z, se representa por $Arg(z)$. Los números r, $\theta = arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se llaman *coordenadas polares* de z, y $z = r\,(cos\theta + isen\theta)$ se llama la *representación polar* de z. Véase el ejemplo 1.

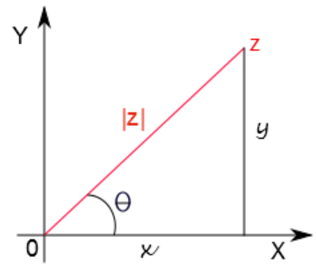


Figura 2.2: Forma Polar de z.

Ejemplo 2.1.1. Sea $z = -1+i$, entonces $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $Arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, y todos los argumentos θ de $-1+i$ están dados por la fórmula $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ así, la representación polar de $-1+i$ es $-1+i = \sqrt{2}\,(cos\theta + isen\theta)$.

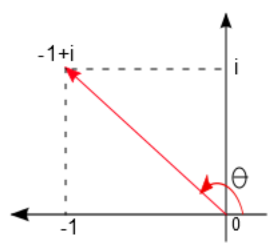


Figura 2.3: Forma Polar de z.

Definición 2.1.4. Para un número complejo $z = x + iy$, el valor de e^z está dado por la fórmula

$$e^z = e^x\,(cosy + iseny)\,.$$

Para $z = iy$ nos da $e^{iy} = cosy + iseny$, ya que $e^0 = 1$. Por lo tanto, se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\theta}, \quad (r = |z|\,, \quad \theta = arg(z))\,.$$

A continuación exponemos algunas propiedades que cumple e^z:

$$
\begin{array}{rcl}
e^{z_1}e^{z_2} & = & e^{z_1+z_2} \\
e^{-z} & = & \dfrac{1}{e^z} \\
e^z & \neq & 0 \; para \; todo \; z \\
|e^z| & = & e^x, \;\; y = arg(e^z) \\
e^z = 1 & \Longleftrightarrow & z = 2k\pi i, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{array}
$$

2.1.2. Raíz de un número complejo

Si z es un número complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\theta \in Arg(z^n)$, es decir,

$$z^n = |z|^n \left(cos\left(n\theta\right) + isen\left(n\theta\right)\right).$$

Esta última se conoce como la *fórmula de Moivre*. Esta ecuación se puede utilizar para encontrar las raíces de un número complejo como sigue:

$$z_k = |z|^{1/n}\left(cos\left(\frac{arg(z)+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{arg(z)+2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

$$z_k = r^{1/n}\left(cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

2.2. Proyección Estereográfica

Sea $\mathcal{P}$ el plano complejo y consideremos una esfera unidad $\mathbb{S}^2$ de radio uno centrada en el origen. Y sea $\mathcal{N}$ el punto $(0, 0, 1)$ de dicha esfera; a este punto lo llamaremos *polo norte*. Identifiquemos al plano complejo $\mathbb{C}$ con el hiperplano

$$\{U = 0\} : z \in \mathbb{C}, \; z = (x + iy) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Tomemos una recta que proyecte al punto *polo norte* a cualquier otro punto, digamos (x, y, u) de la esfera $\mathbb{S}^2$, esta recta corta a $\mathbb{C}$ en solo un punto

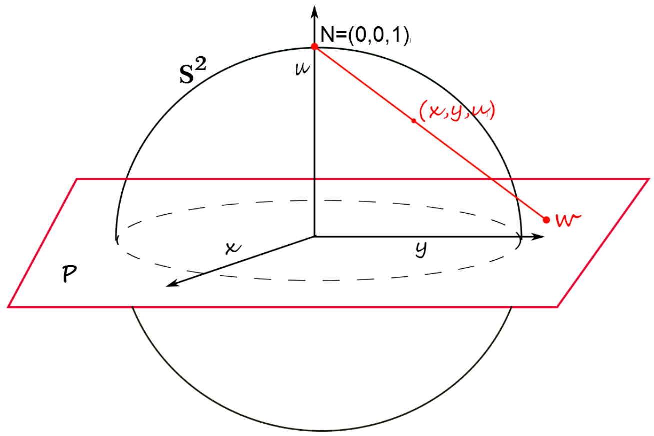


Figura 2.4: Proyección estereográfica.

ω de dicha esfera y podemos representar cualquier número complejo por un punto sobre la esfera. Para encontrarla hagamos lo siguiente:

Consideremos la línea que va de un punto $(x, y, u) \in \mathbb{S}^2$ al polo norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, como hemos mencionado, esta línea cruza a $\mathbb{C}$ en un único punto. Parametrizando, se tiene:

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $[N + t\,((x, y, u) - N)] \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= [N + t\,((x, y, u) - N)] \\ &= (0, 0, 1) + t\,[(x, y, u - 1)] \\ &= (0, 0, 1) + (tx, ty, t(u - 1)) \\ &= (tx, ty, 1 + t(u - 1)), \end{aligned}$$

donde $1 + t(u - 1) = 0$, debido a la identificación que hicimos del plano $\mathbb{C}$ con el hiperplano $U = 0$, por tanto

$$t = \frac{1}{1 - u}.$$

Así, para $\omega \in \mathbb{C}$ obtenemos que

$$\omega = \left(\frac{x}{1-u}, \frac{y}{1-u}, 0\right) = \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u} = \frac{x+iy}{1-u}.$$

Si $z = \frac{x+iy}{1-u}$, entonces

$$|z|^2 = \left|\frac{x+iy}{1-u}\right|^2 = \frac{|x+iy|^2}{|1-u|^2} = \frac{x^2+y^2}{(1-u)^2},$$

como $(x, y, u) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, se cumple que $x^2+y^2+u^2 = 1$, es decir $x^2+y^2 = 1-u^2$

$$\frac{x^2+y^2}{(1-u)^2} = \frac{1-u^2}{(1-u)^2} = \frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)(1-u)} = \frac{1+u}{1-u},$$

tenemos que

$$|z|^2 = \frac{1+u}{1-u}.$$

Ahora despejaremos u:

$$|z|^2 (1-u) = 1+u$$

$$|z|^2 - |z|^2 u = 1+u$$

$$|z|^2 - 1 = u + u|z|^2 = u(1+|z|^2)$$

$$u = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

También,

$$z + \overline{z} = \frac{x+iy}{1-u} + \frac{x-iy}{1-u} = \frac{2x}{1-u}$$

así, $(z+\overline{z})(1-u) = 2x$, despejamos x:

$$x = \frac{(z+\overline{z})(1-u)}{2} = \frac{(z+\overline{z})}{2}\left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2} + 1\right)$$

$$= \frac{(z+\overline{z})}{2}\left(\frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}\right),$$

se sigue que

$$x = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}$$

y para y tenemos:

$$z - \overline{z} = \frac{x+iy}{1-u} - \frac{x-iy}{1-u} = \frac{2iy}{1-u}.$$

Así, $(z-\overline{z})(1-u) = 2iy$, despejamos y:

$$y = \frac{(z-\overline{z})(1-u)}{2i} = \frac{(z-\overline{z})}{2i}\left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

$$= \frac{(z-\overline{z})}{2i}\left(\frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}\right) = \frac{(z-\overline{z})}{2i}\left(\frac{2}{|z|^2}+1\right)$$

esto es,

$$y = \frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}.$$

Finalmente,

$$(x,y,u) = \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

Decimos que el punto $\mathbf{N}$ corresponde al punto *infinito* del plano. El conjunto de todos los puntos del plano, incluyendo el punto en el infinito, reciben el nombre de *plano complejo* o el *plano complejo extendido* $\mathbb{C}_\infty$.

A continuación obtendremos en términos de z y ω, puntos del plano complejo, una fórmula de la distancia entre sus proyecciones en la esfera.

Si denotamos éstas por (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3), se tiene

$$(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3-y_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

dado que (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) se encuentran en la esfera, se cumple que

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1,$$
$$y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 1,$$

entonces nuesta última igualdad resulta $2-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$, de donde

$$x_1y_1{+}x_2y_2{+}x_3y_3 = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}\cdot\frac{\omega+\overline{\omega}}{|\omega|^2+1}+\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}\cdot\frac{\omega-\overline{\omega}}{i(|\omega|^2+1)}+\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\cdot\frac{|\omega|^2-1}{|\omega|^2+1}$$

$$= \frac{(z+\overline{z})(\omega+\overline{\omega})-(z-\overline{z})(\omega-\overline{\omega})+(|z|^2-1)(|\omega|^2-1)}{(|z|^2+1)(|\omega|+1)}$$

$$= \frac{2z\overline{\omega}+2\overline{z}\omega+|z\omega|^2-|\omega|^2-|z|^2+1}{(|z|^2+1)(|\omega|+1)}$$

agregamos un “cero”

$$\frac{=2z\overline{\omega}+2\overline{z}\omega+|z\omega|^2-|\omega|^2-|z|^2+|z|^2+|\omega|^2-|z|^2-|\omega|^2+1}{(|z|^2+1)(|\omega|+1)}$$

realizando operaciones y recordando algunas propiedades del valor absoluto de un número complejo obtenemos

$$= 1-2\frac{(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}.$$

Por tanto

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = 1-2\frac{(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}.$$

Así,

$$2-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) = 2-2\left(1-2\frac{(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}\right)$$

$$= 2-2+4\frac{(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)} = 4\frac{(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}$$

$$= 4\frac{|z-\omega|^2}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}.$$

Concluyendo así:

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} = \sqrt{4\frac{|z-\omega|^2}{(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)}}$$

$$= \frac{2\,|z-\omega|^2}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\omega|^2}}.$$

En este caso, si $\omega = \infty$,

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = x_3$$

$$= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

por lo que

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2} = \sqrt{2 - 2\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{|z|^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

Todos estos calculos inducen una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 2.2.1. Dados z_1, $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, definimos la métrica en $\hat{\mathbb{C}}$, a la que llamaremos *métrica cordal* o *métrica esférica*, de la siguiente manera:

$$d_\chi(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)}\sqrt{(1+|z_2|^2)}} & \text{si} \quad z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty; \\ \\ \frac{2}{\sqrt{(|z_1|^2+1)}} & \text{si} \quad z_2 = \infty; \\ \\ 0 & \text{si} \quad z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

De esta manera, a la esfera S^2 se la considera un subespacio métrico de $\mathbb{R}^3$ con la métrica heredada η. El término *cordal* proviene de que se miden cuerdas en la esfera

$$d_\chi(z_1, z_2) = |\pi(z_1), \pi(z_2)|\,.$$

Proposición 1. La métrica esférica y la métrica euclidiana inducen la misma topología en $\mathbb{C}$, es decir, definen los mismos abiertos en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para esta demostración tomemos lo siguiente:

I.

$$\Psi : \mathbb{S}^2\ (0,0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Demostraremos que Ψ es una biyección, esto es,

(a) Ψ es *inyectiva* y

(b) Ψ es *sobreyectiva.*

Demostración de **(a)**.

Para probarlo construyamos su inversa. Tomemos $z = \Psi(x_1, x_2, x_3)$, haciendo cálculos similares a los anteriores tenemos lo siguiente:

$$|z|^2 = \left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

despejando x_3 obtenemos

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

despejando x_1,

$$x_1 = \frac{(z + \overline{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \overline{z}}{2}\left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = \frac{z + \overline{z}}{2}\left(\frac{2}{|z|^2 + 1}\right)$$

obtenemos

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}.$$

Haciendo cálculos análogos para x_2, obtenemos:

$$x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}.$$

Por lo tanto, Ψ es inyectiva, porque z determina al punto (x_1, x_2, x_3).

Ahora demostraremos **(b)**.

Esto es, demostraremos que dado $z \in \mathbb{C}$, $\pi(z) \in \mathbb{S}^2$.

Pongamos $\pi(z) = \rho = (y_1, y_2, y_3)$ y $\Psi(\rho) = z'$.

De $y_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$ tenemos que:

$$(|z|^2 + 1) \cdot y_3 = |z|^2 - 1$$

$$|z|^2 \cdot y_3 + y_3 - |z|^2 = -1$$

$$|z|^2 = \frac{1+y_3}{1-y_3} = |z'|^2.$$

De

$$\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1} = \frac{2}{|z|^2+1} \cdot \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{2Re(z)}{|z|^2+1} = \frac{2Re(z')}{|z|^2+1} = y_1,$$

y de

$$\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)} = \frac{2}{|z|^2+1} \cdot \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{2Im(z)}{|z|^2+1} = \frac{2Im(z')}{|z'|^2+1} = y_2-$$

Así,

$$Re(z) = Re(z');$$

$$Im(z) = Im(z').$$

Por lo tanto,

$$Re(z) = Re(z'),\ Im(z') = Im(z),\ i.e.\ z' = z.$$

Asi, Ψ es sobreyectiva y π es su inversa.

II. Definamos las funciones identidad $I_{\mathbb{C}}$ y $I_{\mathbb{S}^2\setminus\{N\}}$ de la siguiente forma:

$$I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C};$$

$$z \longmapsto z,$$

$$
\begin{aligned}
I_{\mathbb{S}^2\setminus\{N\}} : \mathbb{S}^2\setminus\{N\} &\to \mathbb{S}^2\setminus\{N\}\,; \\
(x_1,x_2,x_3) &\mapsto (x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}
$$

Demostraremos que: **(a)** $\Psi\circ\pi = I_{\mathbb{C}}$ y **(b)** $\pi\circ\Psi = I_{\mathbb{S}^2}$.

Demostración de **(a)**.

Sea $z\in\mathbb{C}$, tomemos $\Psi\circ\pi$

$$
\begin{aligned}
\Psi\circ\pi(z) &= \Psi(\pi(z)) = \Psi\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\
&= \frac{\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}+i\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}}{1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}} \\
&= z.
\end{aligned}
$$

De lo que se concluye que $\Psi\circ\pi = I_{\mathbb{C}}$.

Demostración de **(b)**.
Sea $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{S}^2$ y tomemos $\pi\circ\Psi$,

$$
\begin{aligned}
\pi\circ\Psi(x_1,x_2,x_3) &= \pi(\Psi(x_1,x_2,x_3)) \\
\pi\left(\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right) &= \left(\frac{\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}+\overline{\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}}}{\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|^2+1},\frac{\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}-\overline{\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}}}{i\left(\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|^2+1\right)},\frac{\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|^2-1}{\left|\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}\right|^2+1}\right) \\
&= (x_1,x_2,x_3)\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\pi\circ\Psi = I_{\mathbb{S}^2\setminus(0,0,1)}$.

III. La función identidad

$$Id:\mathbb{C}_E\to\mathbb{C}_\chi,$$

donde $\mathbb{C}_E$ es el plano complejo provisto con la métrica euclidiana, y $\mathbb{C}_\chi$ el plano complejo con la métrica cordal es bicontinua.

Si $|z_n - z| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces, dado que la función π es continua, $|\pi(z_n) - \pi(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual prueba que la función Id es también continua. Ahora, dado que Ψ es continua, tenemos que si $d_\chi(z_n, z) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$|\pi(z_n) - \pi(z)| \to 0$$

y

$$|\Psi\pi(z_n) - \Psi\pi(z)| = |z_n - z| \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto la función Id es bicontinua.

De **I**, **II** y **III** se obtiene que la métrica esférica y la métrica euclidiana inducen la misma topología en $\mathbb{C}$.

†

2.3. Topología del Plano Complejo

Definición 2.3.1. Para un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y un número real $r > 0$, definimos el *disco o bola* de radio r con centro z_0 por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

En particular, cuando $z_0 = 0$, ponemos

$$B(r) = B(0, r),$$

y a $B(1)$ la llamaremos el *disco unitario*.

Definición 2.3.2. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe $r > 0$ con $S \subset B(r)$. El conjunto S se dice *abierto* si para cualquier $a \in A$ existe un $r > 0$ con $B(a, r) \subset S$.

Definición 2.3.3. Un punto z_0 de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se llama *punto interior* de S si existe una vecindad $B(z_0, r)$ de z_0 tal que $B(z_0, r) \subset S$. El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama el *interior* de S y se denota por $int(S)$. S será un conjunto abierto si $S = int(S)$.

Teorema 2.3.1. 1. La unión de una *familia cualquiera* de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto.

2. La intersección de un *número finito* de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.3.1. El anillo $S = \{z : 1 < |z| < 2\}$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.3.2. Toda vecindad $B(z_0, r)$ de un punto z_0 es un conjunto abierto.

Definición 2.3.4. Un conjunto S se llama *cerrado* si el complemento de S es abierto.

Observemos que es posible que un conjunto sea abierto y cerrado al mismo tiempo, como lo es en el caso del conjunto $\emptyset$ y de todo plano complejo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2.3.3. El conjunto $S = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, donde $r > 0$ es cerrado, porque su complemento es el conjunto abierto $int(S) = \{z : |z - z_0| > r\}$.

Teorema 2.3.2.

1. La intersección de una *familia cualquiera* de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado.
2. La unión de un *número finito* de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Definición 2.3.5. Un punto z_0 se llama *punto de acumulación* de un conjunto S si cada vecindad $B(z_0, r)$ contiene un punto de S *diferente* de z_0.

Ejemplo 2.3.4. $z = 1$ es un punto de acumulación del círculo $S = \{z : |z| < 1\}$, sin embargo $1 \notin S$.

En caso de ser S cerrado, todo punto de acumulación de S pertenece a S. Si denotamos con $\overline{S}$ la unión de S con el conjunto de sus puntos de acumulación, entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. S es cerrado si y sólo si, $S = \overline{S}$.

El conjunto $\overline{S}$ se llama la *cerradura* o la *adherencia* de S.

Definición 2.3.6. Sea A un subconjunto de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. A se llama *abierto* en S si existe un conjunto abierto B tal que $A = B \cap S$.

Definición 2.3.7. Un conjunto S se llama *conexo* si no existen conjuntos H_1, H_2 distintos del vacío y abiertos en S, tales que:

1. $H_1 \cap H_2 = \emptyset$;
2. $H_1 \cup H_2 = S$.

El conjunto $\mathbb{C}$ de todos los números complejos es conexo. Así mismo, esto equivale a decir que en $\mathbb{C}$ los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son $\emptyset$ y $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2.3.5. El círculo abierto $S = \{z : |z| < 1\}$ es conexo.

Definición 2.3.8. Se llama *dominio* a todo conjunto abierto y conexo del plano complejo.

Ejemplo 2.3.6. El círculo $S = \{z : |z - z_0| < r\}$, $r > 0$ es un dominio.

Ejemplo 2.3.7. Los semiplanos $A = \{z = x + iy : x > 0\}$ y $B = \{z = x + iy : x < 0\}$ son ambos dominios.

Definición 2.3.9. Un conjunto se llama *compacto* si es a la vez cerrado y acotado.

En [5] se puede consultar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4 (Baire)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $\mathcal{Q}$ un conjunto numerable de subconjuntos abiertos y densos de X. Entonces $\bigcap \{Q : Q \in \mathcal{Q}\}$ es también denso.

2.4. Funciones de Variable Compleja

Definición 2.4.1. Dado un conjunto $D \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = Re(f)$ *parte real de* f y la función $v = Im(f)$ *parte imaginaria de* f, definidas para todo $(x, y) = x + iy \in D$ por:

$$u = (x, y) = Re\{f(x + iy)\}, \quad v(x, y) = Im\{f(x + iy)\}.$$

Naturalmente $f(z) = Re\{f(z)\} + Im\{f(z)\}$. Si $A \subset D$, entonces $f(A) = \{w : w = f(z), z \in A\}$ es el conjunto de las imágenes de los elementos $z \in A$, se llama la *imagen de* A *bajo* f.

Definición 2.4.2. Sea f como en la definición anterior. La *función conjugada de* f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z) = Re\{f(z)\} - iIm\{f(z)\}$. La *función módulo de* f es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

Ejemplo 2.4.1. Sea $f(z) = |z|$, $f(z)$ es una función de dominio $\mathbb{C}$ y su conjunto imagen los números reales mayores o iguales a cero.

Definición 2.4.3. Sea D subconjunto de . Diremos que una función $f : D \to \mathbb{C}$ es acotada sobre D si satisface que

$$sup\{|f(s)| : \ s \in D\} < \infty.$$

2.4.1. Continuidad y límite de una función

Definición 2.4.4. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Se dice que la función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in D$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, \ |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Una función compleja es continua en a sí, y sólo si, las funciones $Re(f)$ y $Im(f)$ son continuas en a.

Definición 2.4.5. Sea una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Decimos que el número $l \in D$ es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a $z_0 \in D$ y escribimos $\lim_{z \to z_0} f(z)$ si dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$.

Teorema 2.4.1. Sea $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ función. Cuando el límite l de $f(z)$ existe, $l \in D'$, es único.

Teorema 2.4.2. Sean $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$

(a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = A + B$.

(b) $\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = A \cdot B$.

(c) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$.

2.4.2. Continuidad uniforme

Definición 2.4.6. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es *uniformemente continua* en D si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ siempre que z, w estén en D y $|z - w| < \delta$.

Proposición 2. Una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

2.4.3. Sucesión de funciones complejas

Sea D un subconjunto de $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el espacio de funciones complejas de $D \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Una *sucesión de funciones complejas* es una aplicación

$$f : n \in \mathbb{N} \to f(n) = f_n \in \mathcal{F},$$

que suele representarse como $\{f_n\}$.

Definición 2.4.7. Sea $\{f_n\}$ una sucesión, llamaremos *subsucesión de* $\{f_n\}$ a una sucesión $\{f_{n_i}\}$ donde $n_i < n_{i+1}$.

Definición 2.4.8. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas definidas en D. Decimos que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge* a $z \in D$ si la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de números es convergente. Si $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge para toda $z \in D$, entonces $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que converge a D, y la función $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ en $z \in D$ se llama la *función límite* de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definición 2.4.9. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformemente* a f si para un arbitrario $\epsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, y $z \in D$

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Definición 2.4.10. Una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformemente a* ∞ si dado $\epsilon > 0$, $|f_{n_k}(z)| \geq \epsilon$ para $k \geq k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in D$.

Definición 2.4.11. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones en $D \subset \mathbb{C}$ dominio converge de forma *localmente uniformemente* a una función límite f si ésta converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset D$.

Definición 2.4.12. Un conjunto $\mathcal{F}$ de funciones es acotada *local y uniformemente* en un dominio D, $D \in \mathbb{C}$, si para cada subconjunto compacto $K \subset D$ hay una constante $M(K) < \infty$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ y para toda $z \in K$,

$$|f(z)| < M(K).$$

Definición 2.4.13. Una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones complejas en $D \subset \mathbb{C}$ se dice *uniformemente acotada* si existe un $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$

$$|f_n(z)| \leq M.$$

Definición 2.4.14. Una región es *simplemente conexa* si su complemento con respecto al plano extendido es conexo.

Definición 2.4.15. Un conjunto F de funciones es *localmente uniformemente acotada* en $D \subset \mathbb{C}$ dominio si para cada subconjunto compacto $K \subset D$ hay una constante $M(K) < \infty$ tal que para toda $f \in F$ y para toda $z \in K$, $|f(z)| \leq M(K)$.

2.5. Funciones Holomorfas

Definición 2.5.1. Sea D un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea f una función en D. Diremos que f es *complejo-diferenciable* en un punto $a \in D$ si existe un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ con

$$\left| \frac{f(a+z) - f(z)}{h} - \alpha \right| < \epsilon \tag{2.3}$$

para todo $h \in \Delta(\delta) \setminus \{0\}$. Llamaremos a α la *derivada compleja* de f en a, y la denotaremos por $f'(a) = \frac{df}{dz}(a)$. La expresión 2.3 es equivalente a

$$f(a+h) = f(a) + \alpha h + o(h), \quad \alpha = f'(a),$$

donde $o(h)$ es un témino tal que $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$.

Si f es complejo-diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Definición 2.5.2. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto. Una función $f : D \to \mathbb{C}$ es *holomorfa* en D si es diferenciable para todo $z \in D$. En este caso la función $f' : z \in D \to f'(z) \in \mathbb{C}$ se llama la *función derivada* o la *derivada de* f, y se denota por df/dz.

Sean f, f_1, f_2 holomorfas y a_1, a_2 constantes, entonces se cumplen:

1. Si f es holomorfa, entonces $1/f$ también lo es fuera del conjunto $\{f = 0\}$, y
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$
2. $(a_1 f_1 + a_2 f_2)' = a_1 f_1' + a_2 f_2'$
3. *[Fórmula de Leibniz]* $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$.

Definición 2.5.3. Una función definida en un abierto $D \subset \mathbb{C}$, f es *holomorfa en un punto* $a \in D$ si existe el siguiente límite
$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Proposición 3. Si una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en un punto $a \in D$, es continua en a.

Teorema 2.5.1. Para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida en una región $D \subset \mathbb{C}$ sea derivable en un punto z de esta región como función de varibale compleja, es necesario y suficiente que las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ sean derivables en este punto y además se cumplan las condiciones:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$
y la derivada se expresa:
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

A las ecuaciones en 2.4 se les llama *Ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Ejemplo 2.5.1. La función $f(z) = e^z$ tiene como derivada $f'(z) = e^x cosy + ie^x seny$.

Sea f una función holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Sea D' un dominio de $\mathbb{C}$ que contiene la imagen $f(\mathbb{C})$. Sea g una función holomorfa en D'. Fijemos un punto $z_0 \in D$ arbitrario, y sea $\omega_0 = f(z)$. Entonces para un h pequeño

$$
\begin{aligned}
g(f(z_0+h)) - g(f(z_0)) &= g(\omega_0 + hf'(z_0 + o(h))) - g(\omega_0) \\
&= g'(\omega_0)(hf'(z_0) + o(h)) + o(hf'(z_0 + o(h))) \\
&= g'(\omega_0) f'(z_0) h + o(h).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{h} = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Así tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.5.2. La composición de dos funciones holomorfas f y g es holomorfa, y

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

Tomemos una serie de potencias convergente alrededor de $a \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Sea $R > 0$ su radio de convergencia.

Teorema 2.5.3. La anterior $f(z)$ es una función holomorfa en $\Delta(a; R)$, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}.$$

Aquí el *radio de convergencia de la parte derecha* es también R.

Definición 2.5.4. Una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en D si para todo $z_0 \in D$ existen $r_0 > 0$ y una serie de potencias centrada en z_0, $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$ tal que $B(z_0, r_0) \subset D$ y $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r_0)$.

Teorema 2.5.4. Una función analítica es holomorfa.

Se sigue del Teorema 2.5.11 que una función $f(z)$ expresada como una serie de potencias convergente alrededor de a es complejo diferenciable, arbitrariamente, muchas veces, y los coeficientes a_n son determinados por las n-ésimas derivadas $f^{(n)}(a)$ de $f(z)$:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Por lo tanto vemos que si una función es expandible a una serie de potencias, los coeficientes de la serie de potencia se determinan de forma única.

Los Teoremas 2.5.5, 2.5.6 y 2.5.7 pueden consultarse en [19].

Teorema 2.5.5. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Una función holomorfa f en D es analítica; y alrededor de un punto arbitrario $a \in D$ $f(z)$ es expandible a una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in \Delta(a; d(a; \partial D)),$$

cuyo radio de convergencia no es menor que $d(a; \partial D)$.

De los teoremas 2.5.4 y 2.5.5 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.6. Una función f es analítica si, y sólo si es holomorfa.

Teorema 2.5.7. Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D, subconjunto de $\mathbb{C}$, que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D. Entonces la función límite f es holomorfa y

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n \to \infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in D, \ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Teorema 2.5.8 (Del Módulo Mínimo)**.** [24] Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre una curva cerrada M y $f(z) \neq 0$ dentro de M, entonces $f(z)$ toma su valor mínimo sobre M.

Teorema 2.5.9 (Del Módulo Máximo)**.** [24] Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre una curva cerrada M y $f(z)$ no idénticamente igual a una constante, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ ocurre sobre M.

2.5.1. Singularidades y su clasificación

Definición 2.5.5. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y sea f una función de variable compleja. Un punto $z \in D$ en el cual la función f no es analítica se llama un *punto singular o singularidad de f.*

Definición 2.5.6. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Una función f tiene una singularidad aislada en $z_0 \in D$ si f no es diferenciable en z_0 y existe $r > 0$ tal que f está definida y es analítica en $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Si z_0 es una singularidad aislada de f, entonces puede ser singularidad removible, polo o singularidad esencial:

(i) Una singularidad aislada z_0 de f es una *singularidad removible* si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe y pertenece a $\mathbb{C}$.

(ii) Una singularidad aislada z_0 de f es un *polo* si

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

(iii) Una *singularidad esencial* es una singularidad aislada que no es polo ni singularidad removible.

Definición 2.5.7. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : D \to \mathbb{C}$ función. f tiene un *polo de orden m en z_0* si f tiene un polo en z_0 y m es el mínimo natural tal que $f(z)(z - z_0)^m$ tiene una singularidad removible en z_0.

Definición 2.5.8. Un punto $z_0 \in D$ es un *valor omitido* o un *valor excepcional de Picard* de una función $f : D \to D$ si $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in D$.

Teorema 2.5.10. Sean D un subconjunto abierto del plano complejo y $f : D \to \mathbb{C}$ una función. Si f tiene una singularidad removible en $z_0 \in D$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe. Además, si se define $f(z_0)$ como este límite la función es analítica en un entorno de z_0.

2.5.2. Fórmula de la integral de Cauchy

Definición 2.5.9. Sean $h : [a, b] \to \mathbb{C}$, $h(t) = u(t) + iv(t)$, donde u y v son funciones continuas. Se define

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Definición 2.5.10. Una trayectoria en una región $D \subset \mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [a, b] \to D$ para algún intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si $\gamma'(t)$ existe para cada $t \in [a, b]$ y $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua, entonces γ es una trayectoria suave.

Definición 2.5.11. Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ continua, y $\gamma : [a, b] \to D$ de clase C^1. Se define

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Proposición 4. Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ continua, y $\gamma : [a, b] \to D$ de clase C^1. Escribamos $f = u + iv$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy] + i\int_\gamma [u(x, y)\,dy + v(x, y)\,dx].$$

Teorema 2.5.11. Sea $D \subset \mathbb{C}$ una región y $f : D \to \mathbb{C}$ continua, supóngase también que $f = g'$, donde $g : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa, y que $\gamma : [a, b] \to D$ es una curva C^1 por tramos en D. Entonces

$$\int_\gamma f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

En particular, si $\gamma(b) = \gamma(a)$,

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b g'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b (g\circ\gamma)'(t)\,dt\\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).\end{aligned}$$

†

Ejemplo 2.5.2. Veamos que, si γ es el círculo de radio r alrededor de $a \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq -1, \\ 2\pi i & si \quad n = -1. \end{cases}$$

Solución. Se consideran dos casos:

(i) Si $n \geq 0$ o $n \leq -2$,

$$(z-a)^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}\right)$$

en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, y por teorema 2.5.11

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = 0.$$

(ii) Si $n=-1$, parametrizando γ como $\gamma(\theta) = re^{i\theta}+a$, $\theta \in [0,2\pi]$, se tiene que $\gamma'(t) = ire^{i\theta}$ y

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta}+a)-a}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Una curva simple cerrada es una curva continua que solo se autointersecta en sus puntos finales, es decir, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de dicha curva, la única autointersección es $\gamma(a) = \gamma(b)$. En esta sección hablaremos del *interior* de una curva simple cerrada γ de una manera intuitiva.

Teorema 2.5.12 (Cauchy)**.** Sean γ una curva simple cerrada C^1 por tramos, D una región en $\mathbb{C}$ que contiene a γ y a su interior, $f : D \to \mathbb{C}$ analítica con f' continua; entonces

$$\int_\gamma f = 0.$$

Observación 2.5.12. Obsérvese que si f no es analítica en el interior de γ, $\int_\gamma f$ no es necesariamente cero, por ejemplo, $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, donde γ es el círculo unitario.

Se definirá el índice de una curva cerrada γ con respecto a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ fuera de γ. De manera intuitiva esto será el *número de vueltas* que la curva efectúa alrededor del punto.
Para definirlo rigurosamente, recuérdese (ver ejemplo 2.5.2) que

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq -1, \\ \\ 2\pi i & si \quad n = -1. \end{cases}$$

Esto se generaliza a curvas que consisten en recorrer n veces dicho círculo, por ejemplo, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, es una curva que rodea al cero n veces, y se tiene que

$$\int_\gamma z^{-1} = (2\pi i)\, n \;\; o \;\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = n.$$

Más generalmente se puede demostrar que si γ es una curva cerrada que rodea z_0 n veces, entonces γ es homotópica a $\varphi(\theta) = z_0 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi n]$ y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = n.$$

En particular, si γ es una curva simple cerrada que contiene a z_0 en su interior,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 1.$$

Definición 2.5.13. Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$, y sea $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \gamma$. Definiremos al *índice o número de vueltas de* γ *con respecto a* z_0 por la ecuación

$$\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Observación 2.5.14. $\eta(-\gamma, z_0) = -\eta(\gamma, z0)$.

Teorema 2.5.13 (Fórmula de Cauchy para la Integral)**.** Sea $D \subset \mathbb{C}$ una región, γ una curva cerrada homotópica a un punto en D, $f : D \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in D \backslash \gamma$, entonces

$$f(z_0)\,\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)}dz.$$

Está fórmula se aplica especialmente cuando γ es una curva simple y z_0 es un punto interior de γ, obteniéndose

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \tag{2.5}$$

Esta última fórmula dice que los valores que toma f en γ, determinan los valores de f en el interior de γ.

La fórmula anterior (véase la fórmula 2.5) nos ayudará para el estudio de algunas propiedades locales de las funciones holomorfas.

La n-ésima derivada de $f(z)$ en $z = z_0$ está dada por la siguiente fórmula:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

A continuación veremos la *Desigualdad de Cauchy.*

Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre un círculo C de radio r y centro en $z = z_0$, entonces

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde M es una constante tal que $|f(z)| < M$ sobre C, es decir, M es una cota superior de $|f(z)|$ sobre C.

Capítulo 3

Familias Normales

En este capítulo estudiaremos algunos resultados relacionados con Familias Normales, iniciando con la definición de convergencia normal en una sucesión de funciones para después revisar algunos resultados importantes que serán de ayuda para el tema principal de esta tesis. La referencia a este capítulo: [1], [7] y [20].

Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ y definamos

$$\mathbb{F} = \{f | f : A \to B\},$$

a $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}$ le llamamos una *familia de funciones* de $\mathbb{F}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ está *acotada puntualmente* en $D \subset \mathbb{C}$ si para cada z fijo en D, el conjunto de valores

$$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$$

es un conjunto acotado de números complejos.

La familia $\mathcal{F}$ es *localmente acotada* en $D \subset \mathbb{C}$ si cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente acotada en cada conjunto compacto de D, es decir, existe para cada subconjunto compacto K de D una constante $m = m(K)$ con la propiedad $|f(z)| \leq m$ para cada punto $z \in K$ y cada función $f \in F$.

3.1. Resultados sobre Familias Normales

Definición 3.1.1. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones complejas se dice *normal en* $D \subset \mathbb{C}$ si cada sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente, o bien una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que tiende uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto de D.

Nota 3.1.2. Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones analíticas, entonces la función límite f, de $\{f_{n_k}\}$ es una función analítica o identicamente ∞.

Observación 3.1.3. La definición anterior no requiere que las funciones límite de las subsucesiones convergentes pertenezcan a la familia $\mathcal{F}$. Por ejemplo, $\mathcal{F}$ puede estar formada por todas las iteradas de $f(z) = z^2$, definidas sobre un abierto D contenido en S^1; para este caso la función límite es la función constante cero; no pertenece a $\mathcal{F}$ y sin embargo es normal.

Lema 3.1.1. Supongamos que D es un conjunto abierto en el plano complejo y K un subconjunto compacto de D. Entonces existe un $r > 0$ tal que para cada $z \in K$, el disco $\Delta(z, r)$ está contenido en D.

Demostración. (Por contradicción). Sea $r > 0$ fijo. Si $D = \mathbb{C}$, el lema se cumple para cualquier $r > 0$ que tomemos. Supongamos que $D \neq \mathbb{C}$. Además, para cada $r > 0$, existe $z \in K$ tal que $\Delta(z, r) \subset D$.

Si $r = 1$, existe $z_1 \in K$, $\Delta(z_1, 1) \not\subset D$, entonces $w_1 \in \Delta(z_1, 1)$ tal que $w_1 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{2}$, existe $z_2 \in K$, $\Delta\left(z_2, \frac{1}{2}\right) \not\subset D$, entonces $w_2 \in \Delta\left(z_2, \frac{1}{2}\right)$ tal que $w_2 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{3}$, existe $z_3 \in K$, $\Delta\left(z_3, \frac{1}{3}\right) \not\subset D$, entonces $w_3 \in \Delta\left(z_3, \frac{1}{3}\right)$ tal que $w_3 \notin D$.

$\vdots$

Si $r = \frac{1}{n}$, existe $z_n \in K$, $\Delta\left(z_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset D$, entonces $w_n \in \Delta\left(z_n, \frac{1}{n}\right)$ tal que $w_n \notin D$.

Observemos que $w_n \in \mathbb{C}\backslash D$, $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$. Dado que K es compacto, la sucesión $\{z_n\}$ tiene un punto de acumulación en K. Sea z_0 tal punto, y sea

$\{z_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{z_n\}$ con la propiedad $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$. Entonces

$$|w_{n_k} - z_0| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \leq \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z_0| \to 0$$

cuando $k \to \infty$, así $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = z_0$. Esto lleva a que z_0 sea un punto de acumulación de $\{w_n\}$. Como $\{w_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}\backslash D$ y $\mathbb{C}\backslash D$ es un conjunto cerrado, entonces $z_0 \in \mathbb{C}\backslash D$. Por tanto, $z_0 \in K \cap (\mathbb{C}\backslash D)$, lo cual es imposible ya que K es un subconjunto de $D = \mathbb{C}\backslash(\mathbb{C}\backslash D)$.

†

El siguiente lema será de gran ayuda para la comprensión de la convergencia normal de una sucesión de funciones.

Lema 3.1.2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto abierto D del plano complejo. La sucesión converge normalmente en D si y sólo si converge uniformemente sobre cada disco cerrado contenido en D.

Demostración. $(\Longrightarrow)$ se cumple por definición de la convergencia normal.
$(\Longleftarrow)$ Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre cada disco cerrado de D. Denotamos por f a la función límite. Sea $K \subseteq D$, compacto y no vacío. Demostraremos que $f_n \to f$ uniformemente sobre K. Sea $r > 0$ fijo tal que para cada $z \in K$ el disco $\bar{\Delta}(z, r)$ está contenido en D, y considerando el lema 3.1.1 escogemos un punto $z_1 \in K$, o K está contenido en $\Delta_1 = \bar{\Delta}(z_1, r)$, o podemos elegir un z_2 de $K\backslash\Delta_1$. Si sucede este último caso, sea $\Delta_2 = \bar{\Delta}(z_2, r)$. Entonces, o $K \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, o podemos elegir un punto z_3 de $K\backslash(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos, digamos p pasos llegamos a una colección $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_p$ de discos cerrados en D, cuya unión cubre a K. Dado que $f_n \to f$ uniformemente en cada uno de los discos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$, la convergencia uniforme se da también en $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_p$, y por tanto en K. Se sigue que $f_n \to f$ normalmente en D. †

Ejemplo 3.1.1. La familia de funciones $\left\{f_n(z) = \frac{z}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es una familia normal en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z_n$. Entonces $\{f_n\}$ converge normalmente en $|z| < 1$.

Definición 3.1.4. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Las funciones de una familia $\mathcal{F}$ se dicen *equicontinuas en un conjunto* $D' \subset D$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$

$$z, w \in D,\ |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \epsilon.$$

Observación 3.1.5. En este caso, cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente continua.

Teorema 3.1.1. [19] Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones complejas en $D \subset \mathbb{C}$ es uniformemente acotada y equicontinua sobre subconjuntos compactos de D, entonces contiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D.

Teorema 3.1.2. [20] Supongamos que cada función de la sucesión $\{f_n\}$ es analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ converge normalmemte en D a la función límite f. Entonces f es analítica en D. Por otra parte, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ normalmente en D para cada entero positivo k.

A continuación enunciaremos un teorema bastante útil, que establece la relación entre la definición de equicontinuidad y normalidad de una familia de funciones complejas

Teorema 3.1.3 (Arzelà-Ascoli)**.** [1] Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas definidas en una región D del plano complejo es normal sí, y sólo si

1. $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada subconjunto compacto $E \subset D$; y
2. Para cada $z \in D$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ se encuentra en un subconjunto compacto del plano.

Demostración. Probaremos la necesidad de 1. Si $\mathcal{F}$ es equicontinua en E, entonces existe un $\epsilon > 0$ sucesiones de puntos z_n, $z_n' \in E$ y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|z_n - z_n'| \to 0$ si $|f_n(z_n) - f_n(z_n')| \geq \epsilon$ para toda n. Dado que E es compacto, podemos elegir subsucesiones de $\{z_n\}$ y $\{z_n'\}$ que converjan a un límite en común $z'' \in E$, y dado que $\mathcal{F}$ es normal, existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en E. Observemos que podemos elegir a las tres subsucesiones de tal forma que todas tengan los mismos subíndices n_k. La función límite f de $\{f_{n_k}\}$ es uniformemente continua en E. Por lo tanto podemos encontrar un k tal que las distancias de $f_{n_k}(z_{n_k})$ a $f(z_{n_k})$, de $f(z_{n_k})$ a $f(z_{n_k}')$, y de $f(z_{n_k}')$ a $f_{n_k}(z_{n_k}')$ sean todas $< \epsilon/3$. Se sigue que $|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_{n_k}')| < \epsilon$, contrariamente a la suposición de que

$|f_n(z_n) - f_n(z_n')| \geq \epsilon$ para toda n. Para la necesidad de 2. Mostraremos que la clausura del conjunto formado por todos los valores $f(z)$, $f \in \mathcal{F}$, es compacto. Sea $\{w_n\}$ una sucesión en dicha clausura. Para cada w_n fijamos $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f_n(z) - w_n| < 1/n$. Por la normalidad existe una subsucesión convergente $\{f_{n_k}(z)\}$, y la sucesión $\{w_{n_k}\}$ converge al mismo valor.

Para demostrar la suficiencia de 1 y 2 usaremos el proceso de la diagonal de Cantor. Primero observemos que por todas partes de D existe una sucesión densa de puntos ζ_k. De la sucesión $\{f_n\}$ escogeremos una subsucesión tal que converja en todos los puntos ζ_k. Encontrar una subsucesión que converja a un punto dado es siempre posible por la condición 2. Por tanto podemos encontrar un colección de subíndices

$$\begin{array}{lcl}
n_{11} < n_{12} < & \ldots & < n_{1i} < \ldots \\
n_{21} < n_{22} < & \ldots & < n_{2i} < \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n_{k1} < n_{k2} < & \ldots & < n_{ki} < \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

tal que

(a) cada fila está contenida en la anterior, y

(b) $\lim_{i\to\infty} f_{n_{k_i}}(\zeta_k)$ existe para toda k.

Por tanto $\{n_{ii}\}$ es una sucesión de $\{f_n\}$ que converge por (b) a todos los puntos ζ_k. Por conveniencia, escribiremos f_{n_i} en lugar de $f_{n_{ii}}$. Ahora, sea K un subconjunto compacto de D, entonces, por 1, $\mathcal{F}$ es equicontinua en K. Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $z_1,\ z_2 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$ sucede $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$. Dado que K es compacto, la cubierta de las vecindades de radio $\delta/2$ tiene una subcubierta finita; tomemos un punto ζ_k de cada una. Para toda h y j suficientemente grandes, diremos que $h,\ j > i_0$, $|f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| < \epsilon$ para todos los ζ_k (esto porque $f_{n_i}(\zeta_k)$ converge cuando $i \to \infty$).

Como hemos tomado una $\delta/2$ subcubierta, para cada $z \in K$, existe un ζ_k tal que $|\zeta_k - z| < \delta$, y así $|f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| > \epsilon$, $|f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| < \epsilon$ por la equi continuidad.

Así,

$$3\epsilon > |f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| + |f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| + |f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| \geq |f_{n_h}(z) - f_{n_j}(z)|.$$

Por lo tanto, dado que ϵ es un número positivo arbitrario, $\{f_{n_i}\}$ es uniformemente convergente en K. †

Para familias de funciones analíticas, podemos aplicar la siguiente consecuencia del teorema de *Arzelà-Ascoli*.

Teorema 3.1.4. [1] Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas en una región $D \subset \mathbb{C}$ es normal si las funciones en $\mathcal{F}$ son uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de D.

Teorema 3.1.5 (Weierstrass)**.** [21] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D a una función f. Entonces f es analítica en D, y la sucesión de derivadas $\left\{f_n^{(k)}\right\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos a $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Demostración. Para un $z_0 \in D$, escogemos un disco $\Delta(z_0; r) \subseteq D$, y escribimos

$$C_r = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon$$

para toda $\zeta \in C_r$. Ahora, definimos

$$F_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}},$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ para $z \in \Delta(z_0; \frac{r}{2})$. Entonces para $n \geq n_0$,

$$|F_k(z) - f_n^{(k)}| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} |d\zeta| < \frac{k! \epsilon 2^{k+1}}{r^k},$$

esto es, $f_n^{(k)}(z) \to F_k(z)$ uniformemente en $\Delta(z_0; \frac{r}{2})$, k=0,1,2,.... Para $k = 0$, $f_n(z) \to f(Z)$ y $f_n(z) \to F_0(z)$, da $f(z) \equiv F_0(z)$, que es una función analítica en $\Delta(z_0; \frac{r}{2})$. Como z_0 es arbitrario, $f(z)$ es analítica en D. Entonces $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en $\Delta(z_0, \frac{r}{2})$, y el argumento para la compacidad prueba el teorema. †

Teorema 3.1.6 (Rouché)**.** [3] Sea D un abierto acotado de $\mathbb{C}$. Sean φ y ψ dos funciones holomorfas en D y continuas en $\bar{D}$. Supongamos que se verifica

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)| \;\; \forall z \in D.$$

Entonces φ y ψ tienen el mismo número de ceros (contando los órdenes de multiplicidad) en D.

Teorema 3.1.7 (Hurwitz)**.** [6] Sea $D \subset \mathbb{C}$ una región y supongamos que la sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función holomorfa f. Si f no es identicamente cero, $D(z_0, r) \subset D$ y $f(z) \neq 0$ para z tal que $|z - z_0| = r$, entonces existe un N tal que para todo $n \geq N$, f y f_n tienen el mismo número de ceros en $B(z_0, r)$.

Corolario 3.1.1. [6] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, y supongamos que f_n converge a una función $f : D \to \mathbb{C}$ cuando $n \to \infty$ localmemte uniformemente en D. Sea $a \in \mathbb{C}$. Si $f_n(z) \neq a$ para todo $z \in D$ y para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) \neq a$ para toda $z \in D$ o $f \equiv a$.

Demostración. Supongamos que $f(z) \neq 0$. Entonces los ceros de $\underline{f}(z)$ son aislados. Así, dado $z_0 \in D$, existe un r con $f(z) \neq 0$ para $z \in B(\bar{z}_0, r) \backslash z_0$. Entonces $inf_{z \in C(z_0,r)} |f(z)| = m > 0$. Por tanto $\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformemente a $\frac{1}{f(Z)}$ en $C(z_0, r)$. También (por teorema de Weierstrass), $f_n'(z)$ converge uniformemente a $f'(z)$ en $C(z_0, r)$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Pero, por hipótesis, cada integral de la izquierda es igual a 0. Por lo tanto la integral de la derecha es 0 y así $f(z_0) \neq 0$. Como $z_0 \in D$ es arbitrario, el teorema se sigue. †

Montel estableció condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea normal.

Teorema 3.1.8 (Montel)**.** [20] Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones que son analíticas en un conjunto abierto D. Supongamos que $\mathcal{F}$ es localmente acotada en U. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en este conjunto.

Demostración. Observemos que la familia $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada en D, dado que es localmente acotada. Por el Teorema de Arzelà-Ascoli, bastará demostrar que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en D. Fijamos un punto z_0 en D y establecemos la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ en z_0. Para esto, escojamos $r > 0$ con la propiedad de que el disco cerrado $K = \bar{\Delta}(z_0, 2r)$ está en D. Por hipótesis, existe una constante $m = m(K) > 0$ tal que $|f(\zeta)| \leq m$ es válido siempre que f pertenezca a $\mathcal{F}$ y ζ a K. Para z en el disco $\Delta = \Delta(z_0, r)$, usamos la fórmula de la integral de Cauchy, que nos da una estimación válida para cada miembro f de $\mathcal{F}$:

$$|f(z) - f(z_0)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0}|$$

$$= \frac{|z - z_0|}{2\pi}|\int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}|$$

$$\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi}\int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} \leq \frac{m|z - z_0|}{r}.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \text{mín}\{r, r\epsilon/m\}$. La estimación anterior de que la desigualdad $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ es válida para cada f de la familia $\mathcal{F}$, siempre que z satisfaga $|z - z_0| < \delta$. Esto prueba la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ en z_0, un punto arbitrario de D. La normalidad de $\mathcal{F}$ en D se sigue. †

De ahora en adelante, vamos a considerar la métrica esférica d_χ definida en el capítulo anterior.

Definición 3.1.6. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge *uniformemente en el sentido esférico* a f en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un número n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$d_\chi\left(f(z), f_n(z)\right) < \epsilon,$$

para cada $z \in D$.

Observación 3.1.7. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D, entonces también converge uniformemente en el sentido esférico a f en D. La convergencia es válida si la función límite es acotada.

Teorema 3.1.9. [21] Si una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente de manera esférica a una función acotada f en D, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D.

Demostración. Supongamos que $|f(z)| \leq M$ en D. Entonces

$$d_\chi(0, f(z)) \leq d_\chi(0, M) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} < 1.$$

Escogemos a $\epsilon < 1 - \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$. Entonces existe un entero positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$d_\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon,$$

entonces,

$$\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} = d_\chi(0, f_n(z)) \leq d_\chi(0, f(z)) + d_\chi(f(z), f_n(z))$$

$$< \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \epsilon = m < 1.$$

Así,

$$|f_n(z)| < \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = M_1,$$

para toda $n \geq n_0$. Por tanto,

$$|f(z) - f_n(z)| = \sqrt{1+|f(z)|^2}\sqrt{1+|f_n|^2} \cdot d_\chi(f(z), f_n(z))$$

$$< \sqrt{1+M^2}\sqrt{1+M_1^2} \cdot d_\chi(f(z), f_n(z)),$$

$n \geq n_0$. Por lo tanto, la convergencia uniforme se cumple. †

Para tener una noción de continuidad con respecto a la métrica cordal tenemos la siguiente definición:

Definición 3.1.8. Una función f es *esféricamente continua* en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_\chi(f(z), f(z_0)) < \epsilon,$$

siempre que $|z - z_0| < \delta$.

Ahora bien, la siguiente definición es una extensión de la definición de una Familia Normal.

Definición 3.1.9. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es *normal* en D si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión que converge a una función límite $f \not\equiv \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D o una subsucesión que converge uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto.

En el primer caso, la función límite es una función analítica por el teorema de Weierstrass.

Definición 3.1.10. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas es un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es *normal en un punto* $z_0 \in D$ si es normal en alguna vecindad de z_0.

Teorema 3.1.10. Una familia de funciones analíticas $\mathcal{F}$ es normal en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ si, y sólo si $\mathcal{F}$ es normal en cada punto de D.

Definición 3.1.11. Denotaremos por $\rho(f)$ a la *derivada esférica de* f, esto es,

(a) $\rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$, si $z \neq \infty$ y $f(z) \neq \infty$,

de otra manera,

(b) $\rho(f(z)) = \lim_{w \to z} \rho(f(z))$.

Definición 3.1.12. Una función $f : D \to \mathbb{C}$ donde D es abierto de $\mathbb{C}$ se dice *meromorfa en* D si existe $A \subset D$ tal que:

(i) $A' \cap D = \emptyset$

(ii) f es analítica en $D \backslash A$

(iii) f tiene un polo en cada punto de A.

Teorema 3.1.11 (Teorema de Marty)**.** [6] Una familia $\mathcal{F} : D \to \mathbb{C}$ de funciones holomorfas es normal si, y sólo si la derivada esférica es localmente acotada.

Teorema 3.1.12 (Montel-Carathéodory)**.** [13] Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Si existen dos valores distintos a y $b \in \mathbb{C}$ tales que $a \notin f(D)$ y $b \notin f(D)$ para toda función f en la familia, entonces $\mathcal{F}$ es normal en D.

Corolario 3.1.2. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas tal que para toda vecindad V de z_0 la familia no es normal. Entonces,

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(V)$$

omite a lo más dos puntos en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Teorema 3.1.13 (Grande de Picard)**.** [19] Si una función meromorfa f en $D \setminus \{z_0\}$ tiene una singularidad esencial en z_0, entonces f toma todos los puntos de $\mathbb{C}_\infty$ un número infinito de veces en una vecindad arbitraria de z_0, excepto a lo más para dos puntos de $\mathbb{C}_\infty$.

Capítulo 4

Funciones de clase $\mathcal{E}$

En este capítulo presentaremos la definición de las funciones enteras trascendentes que estudiaremos en el siguiente capítulo, así como algunas de sus propiedades, y definiremos los puntos fijos y la iteración.

4.1. Funciones Enteras

Definición 4.1.1. A las funciones definidas y holomorfas en todo $\mathbb{C}$ se les llama *funciones enteras*. En este caso la función $f' : z \in D \to f'(z) \in \mathbb{C}$ es llamada la *función derivada o derivada de f*, y también la denotamos por $\frac{df}{dz}$.

Sea f una función entera. Entonces uno de los tres siguientes casos sucede:

(i) f es una función constante;

(ii) f tiene un polo en ∞;

(iii) f tiene una singularidad aislada esencial en ∞.

Este resultado se sigue de los siguiente casos: si f se expande a una serie de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces,

(i) $a_n = 0$, $n \geq 1$;

(ii) Existe algún n_0 tal que $a_n = 0$, $n \geq n_0$, es decir, $f(z)$ es un polinomio;

(iii) Hay infinitos n con $a_n \neq 0$.

En el último caso, (iii), f se dice ser *trascendental*. Es decir, las funciones enteras trascendentes son aquellas en las que la función es analítica y $f(\infty)$ no está definida, no hay polos.

Al conjunto de funciones enteras trascendentes lo denotaremos como sigue:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \ es\ entera\ trascendente\}.$$

Ejemplo 4.1.1. Las siguientes funciones pertenecen a la clase $\mathcal{E}$.

(i) $f(z) = e^z + sen(z)$.

(ii) $g(z) = \lambda sen(z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $h(z) = e^z + z$.

A continuación enunciaremos el teorema pequeño de Picard.

Teorema 4.1.1 (Pequeño de Picard)**.** [19] El número de valores omitidos de una función entera no constante f es a lo más dos.

4.2. Iteración y Puntos Fijos

Si $f(z)$ es una función entera, las iteradas

$$f^{\circ n}(z),\ n = 1, 2, \ldots$$

se definen inductivamente por

$$f^{\circ(n+1)}(z) = f(f^{\circ n}(z)),\ n \geq 1 \ \ y \ \ f^1(z) = f(z).$$

Nota 4.2.1. La n-ésima iterada de f se denota como $f^{\circ n}(z)$, donde $z \in \mathbb{C}$.

Observación 4.2.2. Las funciones en la clase $\mathcal{E}$ cumplen lo siguiente:

$$\textit{Si } f \in \mathcal{E}, \textit{ entonces } f^{\circ n} \in \mathcal{E}.$$

Definición 4.2.3. Un *punto fijo* α *de orden* n de $f(z)$ es una solución de $f^{\circ n}(z) = z$; tiene un orden exacto n si $f^{\circ k}(\alpha) = \alpha$ para $k = n$, pero no para cualquier $k < n$, y en este caso $\lambda = (f^{\circ n})'(\alpha)$ es llamado *el multiplicador de* α.

Observación 4.2.4. Por regla de la cadena

$$(f^{\circ n})'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^{\circ j}(z_0)).$$

Definición 4.2.5. El punto fijo α es llamado

(a) *super-atractor* si $\lambda = 0$,

(b) *atractor* si $|\lambda| < 1$,

(c) *repulsor* si $|\lambda| > 1$,

(d) *indiferente* si $|\lambda| = 1$.

Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, la *órbita hacia adelante* de z_0 se define como

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Nota 4.2.6. Si z_0 es un punto periódico de período n, entonces $\mathcal{O}^+(z_0)$ es llamada *ciclo*.

La *órbita hacia atrás* de z_0 se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

La gran órbita de z_0 está definida por:

$$\mathcal{O}(z_0) = \mathcal{O}^-(z_0) \cup \mathcal{O}^+(z_0).$$

Definición 4.2.7. Un punto $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ es llamado un *punto excepcional* si $\mathcal{O}^-(z_0)$ es finita. El conjunto de puntos excepcionales de f es denotado por $\mathbf{E(f)}$.

A continuación enunciaremos (y demostraremos) el *Lema de Zalcman*, el cual es bastante útil en la dinámica compleja, especialmente en el estudio de la dinámica trascendente.

Teorema 4.2.1 (Zalcman)**.** [26] Sea F una familia de funciones meromorfas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Si F no es normal en $z_0 \in D$, entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ en F, una sucesión $\{z_n\} \in D$, una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales positivos, y una función meromorfa no constante $g : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z_n \to z_0$, $\rho_n \to 0$ y la sucesión $f_n (z_n + \rho_n z) \to g(z)$ localmente uniformemente en $\mathbb{C}$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Por teorema de Marty (véase Teorema 3.1.11) existe $f_n \in F$ y $z_n^* \in D$ tal que $z_n^* \to z_0$ y $K_n = f_n^\sharp (z_n^*) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Definamos $r_n = max\left\{2\left|z_n^* - z_0\right| \ , \ 1/\sqrt{K_n}\right\}$. Entonces $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto podemos asumir que $B(z_0, r_n) \subset D$. Podemos escoger $z_n \in B(z_0, r_n)$ tal que

$$M_n = max_{|z-z_0| \le r_n} \left(1 - \frac{\left|z - z_0\right|^2}{r_n^2}\right) f_n^\sharp (z) = \left(1 - \frac{\left|z_n - z_0\right|^2}{r_n^2}\right) f_n^\sharp (z_n) .$$

Entonces

$$M_n \ge \left(1 - \frac{\left|z_n^* - z_0\right|^2}{r_n^2}\right) f_n^\sharp (z_n^*) \ge \frac{3}{4} K_n$$

de modo que $M_n \to \infty$. Definamos

$$\rho_n = \frac{1}{f_n^\sharp (z_n)} = \frac{1}{M_n} \left(1 - \frac{\left|z_n - z_0\right|^2}{r_n^2}\right) .$$

Entonces $\rho_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y

$$\begin{aligned}
\sqrt{K_n} \rho_n &= \frac{\sqrt{K_n}}{M_n} \frac{r_n + |z_n - z_0|}{r_n} \frac{r_n - |z_n - z_0|}{r_n} \\
&\le \frac{2\sqrt{K_n}}{M_n r_n} (r_n - |z_n - z_0|) \\
&\le \frac{8}{3\sqrt{K_n} r_n} (r_n - |z_n - z_0|) \\
&\le \frac{8}{3} (r_n - |z_n - z_0|) .
\end{aligned}$$

Deducimos que si $|z| < \frac{3}{8}\sqrt{K_n}$, entonces

$$|z_n + \rho_n z - z_0| \leq |z_n - z_0| + \rho_n |z| < |z_n - z_0| + (r_n - |z_n - z_0|) \leq r_n$$

y por lo tanto $z_n + \rho_n z \in B(z_0, r_n) \subset D$. Así $g_n(z) = f_n(z_n + \rho_n z)$ está definida por $|z| < \frac{3}{8}\sqrt{K_n}$. Para $|z| < \frac{3}{16}\sqrt{K_n}$ tenemos

$$\begin{aligned} g_n^\sharp(z) &= \rho_n f_n^\sharp(z_n + \rho_n z) \\ &\leq \frac{\rho_n M_n}{1 - \frac{|z_n - z_0|^2}{r_n^2}} \\ &= \frac{r_n^2 - |z_n - z_0|^2}{r_n^2 - |z_n + \rho_n z - z_0|^2} \\ &\leq \frac{r_n^2 - |z_n - z_0|^2}{r_n^2 - (|z_n - z_0| + \rho_n |z|)^2} \\ &= \frac{r_n + |z_n - z_0|}{r_n + |z_n - z_0| + \rho_n |z|} \frac{r_n - |z_n - z_0|}{r_n - (|z_n - z_0| + \rho_n |z|)} \\ &\leq \frac{r_n - |z_n - z_0|}{r_n - \left(|z_n - z_0| + \frac{1}{2}(r_n - |z_n - z_0|)\right)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Así, $\left\{g_n^\sharp\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada localmente uniformemente en $\mathbb{C}$, y por teorema de Marty (véase Teorema 3.1.11), $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en $\mathbb{C}$. Restringiendo a una subsucesión, si es necesario, podemos asumir que $g_n \to g$ cuando $n \to \infty$ para alguna función g meromorfa en $\mathbb{C}$. Porque $g_n^\sharp(0) = 1$ por construcción, tenemos que $h^\sharp(0) = 1$ y por tanto g es no constante. El teorema de Hurwitz (véase Teorema 3.1.7) implica que $g : D \to V$. †

Los siguientes resultados muestran la relación que existe entre la definición topológica y el multiplicador.

Definición 4.2.8. Un *punto fijo* z_0 de una función f es *atractor* si existe una vecindad V de z_0, donde la sucesión $\{f^n(z_0)\}$ converge uniformemente a la función constante z_0.

Teorema 4.2.2 (Caracterización Topológica de Puntos Atractores)**.** [16] Un punto fijo para una función holomorfa es *topológicamente atractor* si, y sólo si, su multiplicador λ satisface $|\lambda| < 1$.

Definición 4.2.9. Un punto fijo z_0 de una función f es *repulsor* si existe una vecindad V de z_0 tal que para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$ existe $n \geq 1$ que cumple que $f^n(z) \in V$.

En otras palabras, la única órbita que está completamente contenida en V es la órbita del punto fijo z_0. Si este es el caso, V es llamada *vecindad aislada bajo iteración.*

Teorema 4.2.3 (Caracterización de Punto Repulsor)**.** [16] Un punto fijo para una función holomorfa es *topológicamente repulsor* si, y sólo si , su multiplicador λ satisface $|\lambda| > 1$.

Teorema 4.2.4. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica y supóngase que z_0 es un punto fijo repulsor para f, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f no es normal en z_0.

Demostración. Supongamos que $\{f^n\}$ es normal en alguna vecindad V de z_0. Por hipótesis $f^n(z_0) = z_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se sigue que no converge a ∞ en V. Por lo tanto existe alguna subsucesión de $\{f^n\}$, digamos f^{n_j}, que converge uniformemente a una función g sobre v, así $|(f^{n_j})(z_0)| \to |g'(z_0)|$ por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, pero $|(f^{n_i})(z_0)| = |f'(z_0)| \dots n_i$ veces $\dots |f'(z_0)| = |\lambda|^n \to \infty$ ya que $|\lambda| > 1$ por ser z_0 un punto repulsor de f, pero esto es una contradicción, porque $|(f^{n_i})'(z_0)| \to |g'(z_0)|$. Por lo tanto la familia de iteradas de f no es normal en z_0. †

Corolario 4.2.1. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica y supóngase que z_0 es un punto periódico repulsor de f, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ no es normal en z_0.

Capítulo 5

Conjunto de Fatou y Conjunto de Julia

En este capítulo enunciaremos las definiciones de los conjuntos de Fatou y Julia, así como algunos resultados y propiedades básicas de éstos para las funciones enteras trascendentes $\mathcal{E}$.

El plano complejo se divide en dos conjuntos, el estable y el inestable; a la parte estable se le llama conjunto de Fatou y a la parte inestable se le llama conjunto de Julia.

5.1. Conjuntos de Fatou y Julia y sus Propiedades

Definición 5.1.1. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente ($f \in \mathcal{E}$), *el conjunto de Fatou de* f o *conjunto estable*, denotado por $F(f)$, está formado por todos los puntos $z \in D$ tal que la sucesión de iteradas de f está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de z, es decir,

$$F(f) = \{z \in D : f^n(z)\; está\; definida\; y\; \{f^n\}\, es\; normal\; en\; una\; vecindad\; de\; z\}.$$

Definición 5.1.2. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente, $f \in \mathcal{E}$, el *conjunto de Julia de* f o *conjunto inestable*, denotado por $J(f)$, es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$J(f) = (F(f))^c = D \backslash F(f).$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para una función entera trascendente, esto es, $f \in \mathcal{E}$.

Teorema 5.1.1. Si $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente, se tienen las siguientes propiedades (véase [8], [12] y [25]):

(a) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.

(b) $J(f)$ es perfecto.

(c) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes, es decir, $z \in F(f)$ si, y sólo si $f(z) \in F(f)$ y $z \in J(f)$ si, y sólo si $f(z) \in J(f)$.

(d) $F(f^n) = F(f)$ y $J(f^n) = J(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aproximadamente entre 1918 y 1920, Fatou y Julia demostraron estas propiedades para funciones racionales. Para las funciones enteras trascendentes, las propiedades (a)-(d) fueron demostradas por Fatou en 1926.

A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema que relaciona al conjunto de Julia con las órbitas hacia atrás dado un punto $z_0 \in J(f)$.

Teorema 5.1.2. Si $z_0 \in J(f)$ y $z_0 \notin \mathbf{E}(\mathbf{f})$, entonces $J = \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$.

Demostración. Dado que J es cerrado y completamente invariante, se cumple que $\overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \subset J$. Para probar la otra inclusión, tomemos $z_1 \in J$, y sea D una vecindad de dicho punto, y supongamos que $D \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} = \emptyset$. Entonces $f^n(z) \neq \omega$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$ y $\omega \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$. Como $\left|\overline{\mathcal{O}^-(z_0)}\right| = \infty$, el teorema de Montel (véase Teorema 3.1.8) muestra que $\{f^{\circ n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en D, lo que contradice nuestro supuesto de $z_1 \in J$. Por lo tanto $D \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \neq \emptyset$. Se sigue que $z_1 \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$ y así $J \subset \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$.

†

5.2. Componentes del Conjunto de Fatou

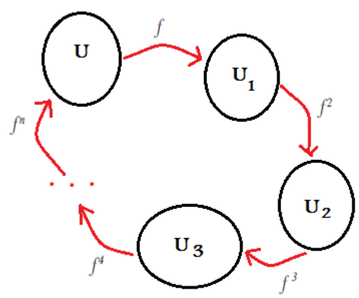
Recordemos que si X es un espacio topológico y E un subespacio de X, entonces E es una componente de X si, y sólo si

(i) E es conexo, y

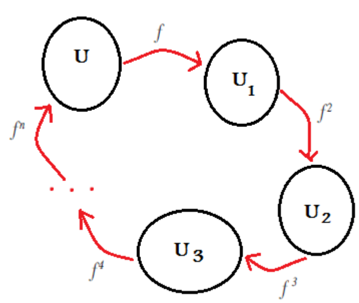
(ii) si D es un subespacio conexo de X que contiene a E, entonces, $D = E$. (Las componentes son subespacios conexos maximales).

Definición 5.2.1. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera trascendente y U una componente de Fatou. El comportamiento de la órbita de U bajo f tiene tres posibilidades:

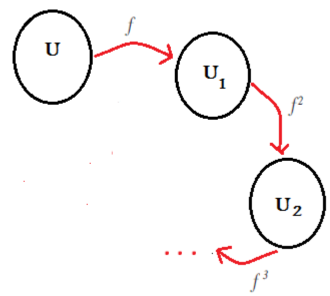
(i) Si $f^n(U) \subset U$ para algún $n \geq 1$, U, es llamada una *componente periódica de* $F(f)$. El mínimo n es el período de la componente U. En particular si $n = 1$, se dice que la componente U es *invariante*.



(ii) Si f^m es periódica para algún entero $m \geq 1$, llamamos a U una *componente pre-periódica*. En particular, si U es pre-periódica pero no periódica, entonces llamamos a U una *componente pre-periódica propia*.



(iii) Si U no es periódica o pre-periódica, llamamos a U una *componente errante.*



5.2.1. Clasificación de componentes periódicas

Sea f una función entera trascendente y sea U una componente periódica de Fatou de período p, entonces tenemos una de las siguientes posibilidades:

(i) U contiene un punto periódico atractor z_0 de período p. Entonces $f^{np}(z) \to z_0$, para $z \in U$ cuando $n \to \infty$. U es llamado una *componente atractora.* Si z_0 es punto periódico superatractor, entonces U es llamado un *Dominio de Bötcher.* En cualquier otro caso U es llamado un *Dominio de Schröder.*

(ii) ∂U contiene un punto periódico z_0 de período m y $f^{nm}(z) \to z_0$ para $z \in U$ cuando $n \to \infty$. Entonces $(f^m)'(z_0) = 1$. En este caso, U es llamado una *Componente Parabólica* o *Dominio de Leau.*

(iii) Existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \to D$, donde D es el disco unitario tal que $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. En este caso, U es llamado un *Disco de Siegel.*

(iv) $f^{np}(z) \to z_0 \in \partial U$ para $z \in U$ cuando $n \to \infty$, pero f^p no es holomorfa en z_0. En este caso, U es llamado un *Dominio de Baker.*

Capítulo 6

Puntos Periódicos Repulsores son Densos en Julia

En este capítulo se darán dos demostraciones de la pregunta que Fatou enunció, mencionada en la introducción.

Sea f función entera trascendente diferente de un polinomio, tenemos que,

Teorema Principal. $J(f)$ es la clausura del conjunto de todos los puntos periódicos repulsores de f.

Es decir,

$$J(f) = \overline{\{puntos\ peri\acute{o}dicos\ repulsores\ de\ f\}}.$$

Primero veremos la prueba con el *Lema de Ahlfors* y después la prueba usando el *Lema de Zalcman.*

6.1. Demostración 1

Demostración. Primero enunciaremos el lema conocido como *Lema de las 5 islas de Ahlfors*, pero para el caso de funciones holomorfas.

Lema 6.1.1 (Ahlfors). Sea $f(z)$ holomorfa en el disco $|z| < R$ y sean K_1, K_2, K_3 regiones simplemente conexas en el ω-plano, acotadas por curvas de Jordan seccionalmente analíticas y tal que las clausuras de K_1, K_2, K_3

son mutuamente disjuntas. Si existe una constante c que depende solamente de las regiones K_1, K_2, K_3 y no de $f(z)$ tal que cumple

$$\frac{R\,|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} > c,$$

entonces el disco $|z| < R$ contiene un dominio que es aplicado univalentemente por $f(z)$ sobre uno de los K_i, $0 \leq i \leq 3$.

Ahora, sean $p \in J(f)$ y N una vecindad arbitraria de p. Por demostrar que N contiene un punto fijo repulsor de algún orden.

Por propiedades del conjunto de Julia, tenemos que $J(f)$ es perfecto, así N contiene un subconunto no numerable de $J(f)$; tomemos a_1, a_2 y $a_3 \in J(f)$ puntos distintos que estén contenidos en N y tal que ninguno sea punto excepcional para $f(z)$. Como $J(f)$ es denso, podemos tomar $\delta > 0$ tan pequeña que las clausuras de los $K_i = |z - a_i| < \delta$ estén contenidas en N, sean mutuamente disjuntas y además ninguna de las tres clausuras contenga puntos excepcionales, en caso de que hubiese.

Sean $D_i = \left\{|z - a_i| < \frac{\delta}{3}\right\}$, $i = 1, 2, 3$. Para el inicio de la prueba debemos encontrar puntos $b_1 \in D_1$, $b_2 \in D_2$ y $b_3 \in D_3$, $b_i \in J(f)$, $i = 1, 2, 3$ tal que la derivada esférica

$$\rho\,(f) = \frac{|f'|}{\left(1+|f|^2\right)}$$

satisfaga

$$\rho\left(f^{\circ n}\left(b_i\right)\right) = \frac{\left|\left(f^{\circ n}\right)'\left(b_i\right)\right|}{1+\left|f^{\circ n}\left(b_i\right)\right|^2} \geq \frac{3c}{\delta},$$

donde c es la constante del *Lema de Ahlfors* cuando $R = \frac{\delta}{3}$ y K_1, K_2, K_3 son las tres regiones.

Como $J(f)$ es completamente invariante, es equivalente encontrar dichos puntos en $J\left(f^{\circ n}\right)$.

Tomemos b_1, b_2, $b_3 \in J(f^{\circ n})$, donde $b_1 \in D_1$, $b_2 \in D_2$ y $b_3 \in D_3$, como dichos puntos se encuentran en el conjunto de Julia, la sucesión de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ no es normal en cada b_i, $1 \leq i \leq 3$, luego, por *Teorema de Marty* (véase el teorema 3.1.11), la familia de derivadas esféricas $\{\rho\left(f^{\circ n}\right)\}$ no es localmente uniformemente acotada en b_i, $1 \leq i \leq 3$, por tanto existe una vecindad compacta D_i, $1 \leq i \leq 3$ y una constante $M(D_i) < \infty$ tal que $\{\rho\left(f^{\circ n}\left(b_i\right)\right)\} > M\left(D_i\right)$.

Observemos que si $M\left(D_i\right) = \frac{3c}{\delta}$,

$$\rho\left(f^{\circ n}\left(b_i\right)\right) = \frac{\left|\left(f^{\circ n}\right)'\left(b_i\right)\right|}{1 + \left|f^{\circ n}\left(b_i\right)\right|^2} \geq \frac{3c}{\delta}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\frac{\delta}{3}\left|\left(f^{\circ n}\right)'\left(b_i\right)\right|}{1 + \left|f^{\circ n}\left(b_i\right)\right|^2} > c$$

tenemos ya a los b_i buscados.

A continuación haremos un cambio de variable debido a que la hipóteis del *Lema de Ahlfors*, $\frac{R\left|\left(f^{\circ n}\right)'(0)\right|}{1+\left|f^{\circ n}(0)\right|^2} > c$, está dada en cero. Pongamos $g_i\left(t\right) = f^{\circ n}\left(z\right)$, $z = b_i + t$ así $g_i\left(t\right)$ es holomorfa en el disco $|t| < \frac{\delta}{3}$, el cual corresponde al disco $L_i = |z - b_i| < \frac{\delta}{3}$ en el z-plano. Observemos que $\overline{L_i} = |z - b_i| \leq \frac{\delta}{3}$ está contenida en K_i.

Ahora,

$$\rho\left(g_i\left(0\right)\right) = \rho\left(f^{\circ n}\left(b_i\right)\right) > \frac{3c}{\delta}.$$

Con $R = \frac{\delta}{3}$ y K_1, K_2, K_3 regiones en el w-plano, aplicamos el *Lema de Ahlfors* y así L_i contiene un subconjunto G_i, el cual es aplicado univalentemente por $f^{\circ n}$ sobre uno de los discos K_1, K_2 o K_3. Se tienen dos casos:

1. G_i es aplicado univalentemente por $f^{\circ n}$ sobre K_i
2. Sin pérdida de generalidad, G_1 es aplicado univalentemente por $f^{\circ n}$ sobre K_i, $i = 2, 3$.

Caso 1. Consideremos a $z := \phi\left(w\right)$ como la aplicación inversa de $f^{\circ n}$ que aplica el disco K_i (en w-plano) univalentemente sobre G_i.

Aplicando el Teorema de Rouché, (véase Teorema 3.1.6), a la función

$$z - \phi\left(z\right) = \left(z - a\right) - \left(\phi(z) - a\right) \; \ldots \; (3)$$

en el disco $K_i = |z - a_i| < \delta$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\left(z - a\right) - \left(\left(z - a\right) + \left(a - \phi\left(z\right)\right)\right)\right| &= \left|\left(z - a\right) - \left(z - \phi(z)\right)\right| \\ &= \left|\phi\left(z\right) - a\right|, \end{aligned}$$

y $|\phi(z) - a| < |z - a|$ ya que $G_i \subset K_i$, de (1)

$$\begin{aligned} |z-a| &= |(z-\phi(z)) + (\phi(z)-a)| \\ &\leq |(z-\phi(z))| + |(\phi(z)-a)| \; por \; (2). \end{aligned}$$

Luego,

$$|(z-a) - ((z-a) + (a - \phi(z)))| \leq |z - \phi(z)| + |\phi(z) - a|$$

por lo tanto, $(z-a)$ y $((z-a) + (a-\phi(z)))$ tienen el mismo número de ceros.

Como $(z-a)$ tiene un solo cero $z = a$, entonces $((z-a)+(a-\phi(z)))$ tiene solo un cero. Así, $\phi(z) = z$ tiene una solución, digamos γ en K_i pero $\overline{G_i} \subset \overline{L_i} \subset K_i$, entonces la solución $\gamma \subset \overline{G_i}$ y por tanto es un punto fijo de $(f^{\circ n})^{-1}$.

Fijemos $K_i = K$, con $i = 1, 2$ o 3 y $a_i = a$, con $i = 1, 2$ o 3. Sea $\omega = L(t)$ una aplicación bilineal tal que

$$L(t) : |t| < 1 \longrightarrow K$$

con

$$t = 0 \longrightarrow \omega = \gamma.$$

Sea $\Psi(t) = L^{-1}(\phi(L(t)))$ que aplica $|t| < 1$ sobre un conjunto propio $p \subset |t| < \sigma$ para algún $0 < \sigma < 1$.

$\psi(0) = L^{-1}(\phi(L(0))) = L^{-1}(\phi(a))$, pero la relación $\phi(z) - z = 0$ tiene una solución en $z = a$, así $\phi(a) = a$, entonces $L^{-1}(\phi(a)) = L^{-1}(a)$, luego, como a es el centro correspondiente a K_i, entonces L^{-1} aplica a a al centro de t que es cero, por lo tanto $L^{-1}(\phi(a)) = 0$, así $\Psi(0) = 0$.

Apliquemos el Lema de Scharwz a $\frac{\Psi(t)}{\sigma}$:

- $\frac{\Psi(t)}{\sigma}$ es holomorfa en $|t| < 1$,
- $\left|\frac{\Psi(0)}{\sigma}\right| = 0$ puesto que $\frac{\Psi(0)}{\sigma} = 0$,
- $\left|\frac{\Psi(z)}{\sigma}\right| \leq 1$ $\forall z \in |t| < 1$ pues $\left|\frac{\Psi(z)}{\sigma}\right| < 1$ si, y sólo si $|\psi(z)| < |\sigma|$ pero $0 < \sigma < 1$.

Se sigue $\left|\frac{\Psi'(0)}{\sigma}\right| \leq 1$ y $\frac{\Psi(z)}{\sigma} \leq |z|$. Por lo tanto $|\Psi'(0)| \leq |\sigma| < 1$. Finalmente,

$$\psi'(0) = 0 = \phi'(\gamma) = \left((f^{\circ n})'\right)^{-1}(\gamma) = \left((f^{\circ n})'\right)^{-1}(\gamma)$$

lo que implica que

$$1 > |\Psi'(0)| = |\phi'(\gamma)| = \left|\left((f^{\circ n})^{-1}\right)'(\gamma)\right| = \left((f^{\circ n})'\right)^{-1}(\gamma),$$

de aquí

$$1 > \left|\left((f^{\circ n})^{-1}\right)'(\gamma)\right|,$$

concluimos que:

$$1 < \left|(f^{\circ n})'(\gamma)\right|.$$

Es decir, hemos encontrado un punto fijo repulsor γ de orden n tal que $\gamma \in K_i \subseteq N$.

Caso 2. Demostrémoslo para K_2, es similar para K_3.

Supongamos entonces que G_1 es aplicado univalentemente en K_2, apliquemos el *Lema de Ahlfors* (véase Lema 6.1.1) en $|t| < \frac{\delta}{3}$ correspondiente a $L_2 = |z - b_2| < \frac{\delta}{3}$, entonces existe G_2 dominio contenido en $L_2 \subseteq K_2$, el cual es aplicado univalentemente por $f^{\circ n}$ sobre uno de los discos K_1, K_2, K_3.

Teniendo tres subcasos:

- Si G_2 es aplicado sobre K_1. Apliquemos nuevamente el *Lema de Ahlfors* en G_1, luego existirá un dominio $H_1 \subset G_1$tal que es aplicado univalentemente sobre K_1, K_2 o K_3. Ahora, si H_1 es aplicado por $f^{\circ n}$ sobre K_1, se continúa con la parte de la prueba del *Caso 1.* Si H_1 es aplicado sobre K_2 o sobre K_3, se procede con el inicio del *Caso 2.*

- Si G_2 es aplicado sobre K_2, se sigue del *Caso 1.*

- Si G_2 es aplicado sobre K_3, procedemos como en el *Caso 2.*

En todos los subcasos anteriores conseguimos algún K_i, $i = 1, 2, 3$ en el cual existe un dominio $H_i \subset K_i$ que es aplicado univalentemente por $f^{\circ n}$ sobre K_i, de aquí se sigue como en el *Caso 1.*

†

6.2. Demostración 2

A continuación demostraremos la propiedad utilizando el *Lema de Zalcman.*

Demostración. Por demostrar primero:

$$J(f) \supseteq \overline{\{puntos\ periódicos\ repulsores\ de\ f\}} \ \ldots \quad (1)$$

Sea p un punto periódico repulsor de la función f de período n, entonces tenemos que p es punto fijo repulsor de $g = f^n$. Supongamos por contradicción que $\left\{g^k\right\}$ es normal en p, entonces existe una vecindad abierta V tal que $p \in V$, y cada subsucesión g^{k_i} converge a una función analítica, digamos g_0; observemos que dicha subsucesión no puede converger a ∞ porque $g^k(p) = p$ para toda k. Por Teorema de Weierstrass, las derivadas también convergen, $\left(g^{k_i}\right)'(z) \to g_0'(z)$ si $z \in V$. Sin embargo, por regla de la cadena, $\left|\left(g^{k_i}\right)'(p)\right| = \left|(g'(p))^{k_i}\right|$, como p es punto fijo repulsor y $|g'(p)| > 1$ tenemos que

$$\left|(g'(p))^{k_i}\right| \to \infty$$

y, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, esto implica que ninguna subsucesión de $\left\{g^{k_i}\right\}$ converge uniformemente en una vecindad de p. Así, $\left\{g^k\right\}$ no puede ser normal en el punto p. Por lo tanto, p pertenece al conjunto de $Julia$ de f^n, así $p \in J(g) = J(f^n) = J(f)$, por la propiedad del conjunto de $Julia$. Porque $J(f)$ es cerrado, la clausura de los puntos fijos repulsores está en $J(f)$.

Para demostrar la segunda contención, esto es,

$$J(f) \subseteq \overline{\{puntos\ periódicos\ repulsores\ de\ f\}} \ \ldots \quad (2)$$

definamos $\mathbb{B}$ al conjunto de todas las $z \in J$ que pertenecen a la clausura del conjunto $\{f^{\circ n}(z) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{z\}$, es decir, el conjunto de puntos recurrentes pero no periódicos de J.

La prueba se divide en dos pasos.

Paso 1. $\mathbb{B}$ está contenido en la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de f.

Paso 2. $\mathbb{B}$ es denso en J.

Demostración del Paso 1. Tomemos $z_0 \in \mathbb{B}$. Sea U una vecindad del punto z_0, $U \subset \mathbb{C}$. Aplicando el *lema de Zalcman* (véase Teorema 4.2.1) existe una sucesión α_n estrictamente creciente de números naturales, sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en U y $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales positivos y una función meromorfa no constante $g : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 \;\; y \quad \lim_{n\to\infty} f^{\circ\alpha_n} \circ (z_n + \rho_n Id_{\mathbb{C}}) = g.$$

Como $z_0 \in \mathbb{B}$ y g es no constante, se sigue del teorema Pequeño de Picard que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{\circ k}(z_0) \in U \cap g(\mathbb{C})$.

Tomemos $x \in g^{-1}\left(f^{\circ k}(z_0)\right)$, entonces existe V vecindad abierta de x en el plano complejo tal que $g(V) \subset U$ y $g'(v) \neq 0$ para cada $v \in V \setminus \{x\}$.

Si $z_0 \in \mathbb{B}$, entonces cada iterada de z_0 está en $\mathbb{B}$, es decir, $f^{\circ n}(z_0) \in \mathbb{B}$. Existe i número natural y $v \in V \setminus \{x\}$ tal que $g(v) = f^{\circ i}(z_0)$.

Si definimos h como $h := g - f^{\circ i}(z_0)$, entonces v es un cero aislado de dicha función y observemos que

$$h := g - f^{\circ i}(z_0) = \lim_{n\to\infty} \left((f^{\circ\alpha_n} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)) - f^{\circ i} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n) \right).$$

Por el teorema de Hurwitz existe una sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ y

$$f^{\circ\alpha_n}(\rho_n v_n + z_n) - f^{i}(\rho_n v_n + z_n) = 0$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Por tanto, si $\omega_n := f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)$, tenemos que $f^{\circ\alpha_n - i} \circ (f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)) = f^{\circ\alpha_n} \circ (\rho_n v_n + z_n) = g(v) = f^{\circ i}(z_0) = f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Así, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, ω_n es un punto fijo de $f^{\circ\alpha_n - i}$.

Usando el Teorema de Weierstrass y la regla de cadena tenemos que:

$$
\begin{aligned}
g'(v) &= \lim_{n\to\infty} \left(f^{\circ\alpha_n} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)\right)'(v_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(f^{\circ\alpha_n - i} \circ f^{\circ i}\right)'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)'\right)(v_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(f^{\circ\alpha_n - i}\right)'\left(f^{\circ i}(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)\right)\left(f^{\circ i}\right)'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)(\rho_n Id_C + z_n)'\right)(v_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(f^{\circ\alpha_n - i}\right)'(\omega_n)\left(f^{\circ i}\right)'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)\,\omega_n\right)(v_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(f^{\circ\alpha_n - i}\right)'(\omega_n)\left(f^{\circ i}\right)'(\rho_n v_n + z_n)\,\omega_n\right).
\end{aligned}
$$

Como $v \in V\setminus\{x\}$, tenemos que $g'(v) \neq 0$. Además, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(f^{\circ i}\right)'(\rho_n v_n + z_n)\,\rho_n = \left(f^{\circ i}\right)'(z_0) \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

concluimos que $\lim_{n\to\infty} \left|\left(f^{\circ(\alpha_n - i)}\right)'(\omega_n)\right| = \infty$, así todos excepto un número finito de puntos periódicos ω_n, $n \in \mathbb{N}$, son repulsores. Por último,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n) = f^{\circ i}(z_0) \in U,$$

por tanto, U contiene un punto periódico repulsor de f.

Demostración del Paso 2. Como J no contiene puntos aislados, la prueba es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 6.2.1. $\{z \in J : \{f^{\circ n} : n \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* $J\}$ es denso en J.

Demostración. Para $J \neq \emptyset$, de lo contrario no hay nada que probar, sea d la métrica esférica cuando $D = \overline{\mathbb{C}}$, la métrica euclideana para el caso $D = \mathbb{C}$ y definiremos

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \times \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$(z, w) \mapsto |z - w| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|$$

para el caso $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. En cualquiera de los tres casos, $(J, d_{J\times J})$ forma un espacio métrico completo y separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{B_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de d-bolas con radio $\frac{1}{n}$ tal que $J \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}$ y $B_{n,k} \cap J \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como J no contiene puntos aislados, concluimos que, para cada

$n, k \in \mathbb{N}$, el conjunto $B_{n,k} \cap J$ es un conjunto infinito, el teorema de Montel-Caratheodory

$$\mathcal{Q}_{n,k} := J \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}\left(B_{n,k}\right)$$

es abierto y denso en J. Por el Teorema de Baire (véase Teorema 2.3.4) concluimos que

$$\mathcal{Q} := \bigcap_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_{n,k}$$

también es denso en J. Ahora, sea $q \in \mathcal{Q}$. Entonces $\{f^j(q) : j \in \mathbb{N}\} \cap B_{n,k} \neq \emptyset$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{f^j(q) : j \in \mathbb{N}\}$ es denso en J.

†

De (1) y (2) se obtiene el resultado deseado:

$$J(f) = \overline{\{puntos\ peri\acute{o}dicos\ repulsores\ de\ f\}}.$$

†

Bibliografía

[1] Ahlfors, Lars V. *Complex Analysis an Introduction to the Theory of Analytic functions of one Complex Variable*, 2da ed. McGraw-Hill Book Company, (1966).

[2] Alexander, Daniel S., Lavernaro, Felice and Rosa, Alessandro. *Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906-1942*. American Mathematical, Soc., (2012).

[3] Amo, Enrique de. *Introducción al curso de Análisis Complejo*, Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-2009, Universidad de Almería.

[4] Baker, Irving N. Repulsive Fixpoints of Entire Fuctions. *Math. Zeitschr.*, (1968), págs. 252-256.

[5] Bargmann, Detlef. Simple Proofs of Some Fundamental Properties of the Julia Set, *Mathematisches Seminar*, Universitaet Kiel, G.,(1999), págs. 553-558.

[6] Bergweiler, Walter. An Introduction to Complex Dynamics, *Textos de Matemática*, Universidad de Coimbra, Série B, No. 6, (1995).

[7] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, (1978).

[8] Domínguez, Patricia and Contreras, V. J. E. *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, (2014).

[9] Etcheberry, Alain. *Elementos de Variable Compleja*, 2da ed. Equinoccio, (2000).

[10] Fatou, Pierre. Sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Vol. 47, (1919), págs. 161-271.

[11] Fatou, Pierre. Sur l′itération des fonctions transcendantes entiéres, *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Vol. 47, (1926), págs. 337-370.

[12] Hua, Xin-Hou and Yang, Chung-Chung. *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).

[13] Ivorra, Carlos C. Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números. *Universidad de Valencia*, (2008).

[14] Julia, Gaston. Mémoire sur l'itération des fonctions rationelles, *J. Math. Pure Appl.*, (1918), págs. 61-64.

[15] Lascurain, Antonio O. *Curso básico de Variable Compleja*, 1era edición, (2007).

[16] Milnor, John. *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, third edition, (2006).

[17] Munkres, James R. *Topology a first Course*, Prentice Hall, Incorporated, (2000).

[18] Nieto, José I. and Chesneau, Eva V. *Funciones de Variable Compleja*, ed. 3, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, (1980).

[19] Noguchi, Junjiro. *Introduction to Complex Analysis*, Vol. 168, American Mathematical Society, (1998).

[20] Palka, Bruce P. *An introduction to Complex Function Theory*, 2da ed. Springer-Verlag, (1990).

[21] Schiff, Joel F. *Normal Families*, Springer, (1993).

[22] Segal, Sanford L. *Nine Introductions in Complex Analysis*. Elsevier, (2008).

[23] Sibony, N., Schleicher, D., Cuong, D.T., Brunella, M., Bedford, E., Abate, M. *Holomorphic Dynamical Systems*. Lectures notes in mathematics, Springer, (1998).

[24] Spiegel, Murray R. *Variable Compleja*. McGraw-Hill, (2004).

[25] Yang, Chung-Chun, Chuang, Chuang. *Fix-Points and Factorization of Meromorphic Functions*. World Scientific, (1990).

[26] Zalcman, Lawrence. A Heuristic Principle in Complex Function Theory. *The American Mathematical Monthly*, (1975), págs. 813-817.