Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS: SU GEOMETRÍA Y DINÁMICA.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Lizbeth Rojas Martínez

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Agustín Contreras Carreto
Dra. Patricia Domínguez Soto

PUEBLA, PUE. Junio 2019

John Louis von Neumann:

Si la gente no cree que las matemáticas son simples,
es solo porque no se dan cuenta de lo complicado
que es la vida.

Winstons Churchill:

Esto no es el final, ni siquiera el principio del fin,
pero quizás es el final del principio.

Agradecimientos

Me permito por este medio ofrecerles mis más sinceros agradecimientos a cada una de las personas que forman parte de esta historia. Si es que aún no lo hecho de manera adecuada quiero dirigirme a cada uno de los seres que he tenido la dicha, gracia y regocijo de conocer ya que forman parte de mi línea de tiempo aún latente.

En primera estancia a mis padres por crearme, darme educación, cariño, humildad y que a pesar de los momentos difíciles que les he hecho pasar, se que despues de una charla motivacional seguida de una lección importante ellos siempre me brindarán su apoyo, por lo que yo agradezco y quiero a estos seres maravillosos con cada uno de sus defectos y virtudes por que me han apoyado en todo lo que han podido aunque tal vez un poco más, así mismo doy las gracias por la tolerancia, respeto y apoyo que cada uno de mis hermanos. A pesar de no ser una persona cariñosa con estos seres siempre les estaré agradecida y trataré de seguir aprendiendo para mejorar en esto a lo que muchos le llaman vida.

En segúnda estancia les agradezco a cada uno de mis compañeros, maestros y amigos que logré encontrar desde mis primeros años de vida. Por mencionar algunos de ellos; Daniela, Karla, Gabriela, Julio, Kaled, Chalito, Juan, Beto, Hugo, Memo, Otañez, Daffne. Todos ellos me enseñaron y cuidaron en algún momento, por lo que les doy las gracias por su comprensión y cariño, de manera muy especial quiero agradecer a Julio por ser uno de mis amigos con los cual podia pelear sin quejas y que a pesar de molestarlo a tal punto de crearle problemas él nunca dudó en brindarme su ayuda. Del mismo modo quiero agradecerle a mi buen amigo Beto quien me brindó mucho cariño, comprensión y quien tambien me regaló demasiados ratos de diversión y felicidad, por supuesto me dió consejos pero no suficientes abrazos, por último le agradezco haber estado en un momento crucial de mi vida y no juzgarme por la decisión más dificíl que he tomado. A Daff agradezco su inoportuna acción de no concluir un posible fin de mi línea de tiempo.

En la licenciatura doy gracias a mis profesores, compañeros y amigos, por supuesto tambien a todos esos seres que no creyeron en mi y me trataron con la poca humanidad que su corazón les permitió darme, pero a pesar de eso tambien aprendí a saber quien no quiero llegar a ser como profesional ni como persona.

Quiero tomarme el tiempo de agradecer al culpable, al causante de que hoy yo esté disfrutando de un sabor agridulce de mi vida, aunque busque palabras difíciles de pronunciar o muy complicadas de escribir para poder

agradecerte todo lo que has hecho por mi no creo poder encontrar un número finito y ni siquiera numerable para poder decirte gracias, gracias por; enseñarme, por dejarme conocerte, cuidarme, regañarme, por tus consejos, por escucharme hasta altas horas de la madrugada, por secar litros y litros de lagrimas, en pocas palabras por tu ayuda incondicional en todo lo que podias ayudarme, por supuesto doy gracias por haberte hecho caso de intentar estudiar matemáticas por que gracias a ti conocí a una maravillosa persona la cual ha estado por mucho tiempo cuidándome, ayudándome a crecer en lo personal como en lo academico, a valorarme y quererme, en esta persona tan maravillosa he podido encontrar regocijo, consuelo, paz y tranquilidad. A pesar de no ser compatibles en muchas cosas hemos podido seguir enfrentandonos a diversas situaciones juntos, tomando decisiones tan importantes que incluso han llegado a doler pero lo hemos hecho juntos, como amigos, colegas, compañeros de vida que espero de gran parte de ella. Quiero agradecerle por ya estar desde hace más de una tercera parte de mi vida, definitivamente a esta persona ni siquera le puedo encontrar una palabra que defina lo mucho que significa para mí, pero que sin duda alguna cada uno de los instantes de felicidad desde que he tenido la oportunidad de estar con él y cruzar mirada los atesoro en mi mente y corazón, estaré eternamente agradecida por su apoyo, por sus concejos, regaños también por ayudarme a pelaer contra mis ideas tan obstinas y burdas en cierto momento, gracias por nunca dejarme sola y estar ahí cuando lo necesito por tus abrazos, besos, buenos deseos y por aún creer en mi, doy gracias por mirarte aquella primera vez, espero aún te pueda seguir viendo en un futuro y estar juntos, por siempre mi amor a primera vista Erick.

Algunos de mis amigos y conocidos dentro de la licenciatura son: Richard, Kike e Ivan lo tres mosqueteros inseparables que me enseñaron y ayudaron en multiples ocasiones, algunas de las cosas más lindas que aprendí de ellos fue no ser egoista con el conocimiento, espero poder seguir heredando esa cualidad a alguien más, de manera especial a mi sinodal no oficial Richad, gracias por cada minuto de tu tiempo, por tenerme paciencia y ayudarme hasta altas horas de la madrugada, mil más un gracias. Moi, Osmart, Jazmín, Edgar, Erika, Ame, Juan, Toñito, Gabriel, Gaby, Gloria, Yeni, Diana, Javi, Ivan, Mike, por supuesto a lo pequeños de la nuevas generaciones, todos ellos has sido una parte fundamental de nuevo conocimiento, aventuras, risas y buenos momentos juntos. Les soy mi gratitud por escuchar, por los consejos y abrazos a cada uno de ellos sobre todo cuando me enfreté a una situacion difícil. De manera breve quiero agradecer a Jaz por sus correcciones y observaciones para esta parte tan importante para mi. Por último y no

menos importantes a mis directores de tesis por aceptarme como tesista pese a mis multiples inconvenientes, por supuesto estoy agradecida con ellos por su apoyo con algunas becas, también a cada uno de mis sinodales oficiales y a los no oficiales.

“A mi yo de ayer una disculpa si no soy lo que un día quise ser”.

Índice general

Índice general IX

Introducción XI

1. Preliminares **1**
1.1. Grupos 1
1.2. Espacios métricos 3
1.3. El campo de los números complejos 5
1.4. Propiedades geométricas de las circunferencias 9

2. Geometría de funciones de variable compleja. **13**
2.1. Transformaciones lineales 13
2.2. Grupo de colineación del plano complejo 20
2.3. Dilatación y rotaciones 23
2.4. Similitudes 28
2.5. Orientación 33
2.6. Traslaciones y rotaciones 34
2.7. Reflexión 40

3. Reflexiones en rectas y circunferencias en el plano euclidiano. **55**
3.1. Reflexiones y el grupo de Möbius 55
3.2. Reflexión con respecto de una recta 58
3.3. Reflexiones de circunferencias 63
3.4. Reflexiones y ángulos 69
3.5. Reflexiones de circunferencias coaxiales 73

4. La acción de Möbius euclidiano $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ **79**
4.1. Transformaciones de Möbius elementales 79
4.2. Transformaciones parabólicas 80

4.3. Transformaciones elípticas 82
4.4. Transformaciones hiperbólicas 85
4.5. Transformaciones loxodrómicas 88
4.6. Acción de subgrupos elementales 88
4.7. Subgrupos parábolicos 90
4.8. Subgrupo elíptico 92
4.9. Subgrupos hiperbólicos 93

Referencias **97**

Introducción

El objetivo del presente trabajo de tesis es estudiar y desarrollar la geometría de las transformaciones homográficas, también llamadas bilineales o de Möbius, que llevan el nombre del matemático August Ferdinand Möbius, de origen Alemán.
Las trasformaciones de Möbius forman un grupo con la operación composición por lo que existe una íntima relación con el área del álgebra, esto debido a la geometría que se genera por medio de las acciones de grupos elementales con respecto a las trasformaciones de Möbius.
Para estudiar estas transformaciones, en este trabajo se desarrollo su geometría en el espacio complejo y real. También se proporcionan propiedades importantes de las transformaciones de Möbius.
Este trabajo tiene como interés destacar las relaciones que existen entre diversas áreas de la matemática. Hay al menos tres aspectos por los cuáles este tema resulta de gran interés: el primero es la base algebraica porque por medio de esta área es posible plantear isomorfismos; el segundo está estrechamente relacionado con el primero debido a que es posible dar el aspecto geométrico-analítico, porque las transformaciones de Möbius son composiciones de funciones analíticas o inversiones; el tercero es la relación topólogica que hay entre ciertas acciones de grupos y algunas figuras geométricas, más aún se puede desarrollar su dinámica.
En este trabajo se centrará en el desarrollo de la geometría que produce cada una de las trasformaciones lineales elementales que componen un trasformación de Möbius en el plano complejo; también se desarrolla una parte de su dinámica asociada.
Está dividida en cuatro capítulos. El primer capítulo de este trabajo se avoca a conceptos y resultados conocidos del álgebra que permitirán describrir propiedades geométricas desde una prespectiva diferente. Al incorporar la noción de grupo en las transformaciones se abre un horizonte muy amplio para un enfoque que permite relacionar a la geometría con otras áreas del conocimiento tales como lo son los sistemas dinámicos; tambien se

dan propiedades de los números complejos y de la geometría Euclidiana bidimensional elemental, como propiedades de cuadriláteros cíclicos, potencia de un punto, familias de circunferencias coaxiales.
En el segundo capítulo se estudia la geometría de funciones, esto es, isometrías, similitudes, traslaciones, rotaciones y reflexiones, tales transformaciones son estudiadas con la noción de grupo de transformaciones. La forma de visualizar la geometría a través de grupos se le atribuye al joven Felix Klein que en el año 1972 presentó su famoso "programa de Erlangen", en el cual establece que: "Una geometría es el estudio de las propiedades de un espacio que premanecen invariantes bajo un grupo de transfromaciones."
En el tercer capítulo se estudian las reflexiones con respecto de líneas y de circunferencias, se introduce la noción de transformacion de Möbius euclidiana general, la cual está definida por compocición finita de reflexiones y algunas de las propiedades de estas transformaciones son: el conjunto de líneas y circunferecias son enviadas en el conjunto de líneas y circunferencias, también se preservan la medida de ángulos que se forman entre intersección de líneas al igual que de circunferencia. Se define el grupo de Möbius euclidiano generalizado, que consiste de todas las transformaciones de Möbius euclidianas generales y se denota por $Mob(\mathbb{R}^2)$. Por otro lado dado que una reflexión invierte la orientación de los ángulos, se sigue que una composición par de reflexiones conserva dicha orientación. Se define el grupo de Möbius euclideano $Mob_+(\mathbb{R}^2)$, el cual consiste de composiciones pares de reflexiones.
En el cuarto capítulo se hace una descripción de las órbitas de puntos en el plano euclideano bajo iteraciones de estas transformaciones denotados por $F^n(P)$, donde P es un punto en el plano con n un número entero y F^n es la composición de F consigo misma n- veces, con este tipo de composiciones se trata de discernir el comportamiento asintótico de dichas órbitas, las cuales permiten conocer las propiedades dinámicas de estas transformaciones.
Se desea que el lector encuentre regocijo e intriga para conocer y profundizar en estos temas, en algún futuro próximo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enunciarán brevemente resultados y definiciones básicas para el desarrollo del tema principal de este trabajo, aclarando que la mayoría de los resultados que se mencionarán a continuación no serán demostrados, se le recomienda al lector consultar las referencias [1], [6], [5], [7].

1.1. Grupos

Definición 1.1. *Un conjunto G con una operación binaria *, se llama* ***grupo*** *si satisface las siguientes propiedades:*

1.- *Para todo $a, b \in G$, se tiene que $a * b \in G$.*

2.- *Cualquier elemento, $a, b, c \in G$, se tiene que $(a * b) * c = a * (b * c)$ (asociatividad).*

3.- *Existe $e \in G$, tal que $e * a = a = a * e$, para todo $a \in G$ (elemento neutro).*

4.- *Para cada elemento $a \in G$, existe $a' \in G$, tal que $a * a' = a' * a = e$ (a' es el elemento inverso de a).*

El grupo se denota por $(G, *)$

Definición 1.2. *Sea $(G, *)$ un grupo, se dice* ***grupo abeliano****, si cumple que para cada $a, b \in G$, se tiene que $a * b = b * a$.*

Definición 1.3. *Sean $(G, *)$ un grupo y $H \subset G$, se dirá que H es* ***subgrupo*** *de G si satisface las siguientes propiedades:*

1.- Para todo $a, b \in H$, se tiene que $a * b \in H$.

2.- El elemento neutro e en G, está en H.

3.- Para todo $a \in H$, se tiene que $a^{-1} \in H$.

El subgrupo se denota por: $H \leq G$.

Teorema 1.4. *[5] Sean $(G, *)$ un grupo y $H \subset G$ tal que H, entonces H es **subgrupo** de G, si y solo si :*

1.- El elemento neutro e en G, está en H.

2.- Para todo a y b en H, se tiene que $ab^{-1} \in H$.

Definición 1.5. *Sea H subgrupo de G, se dice que H es **subgrupo normal** de G si, para todo $g \in G$ y $h \in H$, implica que $ghg^{-1} \in H$*

Definición 1.6. *Una **relación** R de un conjunto $\mathcal{X}$ a un conjunto $\mathcal{Y}$ es un subconjunto del producto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Observación 1.7. *Si $(x, y) \in R$ se escribe xRy y se dice que x está relacionado con y. En el caso de que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ se afirma que R es una relación binaria en $\mathcal{X}$ o que R es una relación en $\mathcal{X}$.*

Definición 1.8. *Sean G un grupo, $H \leq G$ y $\equiv (o \equiv_H)$ la relación sobre G, definida; así: para todo $a, b \in G, a \equiv b mod H$ si $ab^{-1} \in H$. Esta relación se llama **congruencia módulo H** y $a \equiv b mod H$, se lee "a es congruente con b módulo H".*

Observación 1.9. *La congruencia módulo H es de equivalencia y permite clasificar a los elementos de G, debido a que, $(G/\equiv_H) = \{[a]|a \in G\}$ es una partición de G ($[a]$ es la notación para clase) de euivalencia de a.*

Definición 1.10. *Sean G un grupo, $H \leq G$ y $a \in G$. El conjunto $Ha := \{ha|h \in H\} \subseteq G$, se llama **clase lateral izquierda** de H en G determinada por a. El conjunto $aH := \{ah|h \in H\} \subseteq G$, se llama **clase lateral derecha** de H en G determinada por a.*

Definición 1.11. *Si $H \leq G$ entonces el **índice** de H en G, denotado por $[G : H]$ (o $i_G(H)$) es el número de clases laterales derechas (izquierdas) distintas de H en G.*

Teorema 1.12. *Si G es un grupo de índice 2, entonces G es un subgrupo normal.*

Definición 1.13. *Un **anillo** conmutativo con identidad es un conjunto $\mathcal{R}$, diferente del vacío, con dos operaciones binarias $(*_1, *_2)$ con las siguientes propiedades:*

1.- *($\mathcal{R}$,$*_1$) es un grupo abeliano.*

2.- *Si $a, b \in \mathcal{R}$, entonces $a *_2 b = b *_2 a$.*

3.- *Si $a, b, c \in \mathcal{R}$, entonces $a *_2 (b *_2 c) = (a *_2 b) *_2 c$.*

4.- *Existe un elemento neutro para la operación $*_2$, a saber $e \in \mathcal{R}$, tal que para cada $a \in \mathcal{R}$, $e *_2 a = a *_2 e = a$.*

5.- *Si $a, b, c \in \mathcal{R}$, entonces $a *_2 (b *_1 c) = (a *_2 b) *_1 (a *_2 c)$.*

Definición 1.14. *Un **campo** es un anillo conmutativo con identidad $\mathcal{R}$, si para todo a en $\mathcal{R}$, existe un elemento b en $\mathcal{R}$ tal que $a *_2 b = 1$, donde 1 es el elemento identidad de R.*

Definición 1.15. *Una función $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **transformación ortogonal**, si conserve el producto escalar de $\mathbb{R}^n$:*

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y \text{ para cada } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplo 1.16. *La **transformación antipodal** α de $\mathbb{R}^n$, definido por $\alpha(x) = -x$, es una transformación ortogonal, debido a que:*

$$\alpha(x) \cdot \alpha(y) = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

1.2. Espacios métricos

A los conjuntos dotados de una función distancia se les da el nombre de espacios métricos, y se le atribuyen al matemático francés Maurice Fréchet. Los espacios métricos constituyen parte de los fundamentos que son indispensables para el estudio del Análisis Matemático (véase [1],[6]).

Al introducir la noción de distancia entre los elementos de un conjunto dado, se intentará generalizar lo que sucede en la recta real o en el plano complejo. Al trabajar con conjuntos arbitrarios abstractos el problema se traduce en definir lo que se entiende como una distancia entre cualesquiera

dos elementos del conjunto. En ese sentido se da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.17. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto diferente del vacío. Una* ***métrica*** *(o distancia) en $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{R}$, con las siguientes propiedades:*

(1) Es no negativa: $d(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

(2) Es no degenerada: $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(3) Es simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$.

(4) Satisface la desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{X}$.

Se considerará un **espacio métrico** a la pareja $(\mathcal{X}, d)$, donde $\mathcal{X} \neq \emptyset$ y d es la métrica definida. Así mismo, si $\mathcal{Y}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$, se verifica que $d_{\mathcal{Y}} = d \restriction_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}}$ es una métrica para $\mathcal{Y}$. Al espacio $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ se le llama **subespacio métrico** de $(\mathcal{X}, d)$. Se escribirá únicamente $\mathcal{X}$ para denotar al espacio métrico, si no es necesario especificar la métrica del espacio.

A la función que sólo cumple (2) y (3) de la definición 1.17 pero que cumple la propiedad más débil. Si $x = y$, entonces $, d(x, y) = 0)$ se le llamará **función pseudo-métrica** y al espacio $(\mathcal{X}, d)$ se le llamará **espacio pseudo-métrico**. Ser un espacio pseudo-métrico generaliza el hecho de ser espacio métrico, dichos espacios se usan más en Topología y Análisis Funcional. Algunos ejemplos de espacios métricos son los siguientes:

Ejemplo 1.18. *Sea $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, y la función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida como;*

$$d(x, y) = |x - y|, \textit{para todo } (x, y) \textit{en} \mathcal{X} \times \mathcal{X}$$

es una métrica(o distancia) llamada la métrica(o distancia) usual o euclidiana.

Ejemplo 1.19. *El espacio métrico discreto $(\mathcal{X}, d)$, donde la métrica discreta d está definida para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ como sigue:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq y \\ 0, & si\ x = y. \end{cases}$$

Definición 1.20. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Una función $I : X \to Y$ se dirá* ***isometría*** *si cumple lo siguiente:*

(i) Preserva distancia,

$$d_Y(I(x_1), I(x_2)) = d_X(x_1, x_2), \quad \textit{para cada } x_1, x_2 \in X.$$

(ii) La función I es biyectiva.

Teorema 1.21. *Toda transformación ortogonal es una isometría, con la métrica euclidiana.*

Definición 1.22. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico no vacío y d, d' dos métricas definidas sobre $\mathcal{X}$. Se dirá que la métrica d es equivalente a la métrica d' si para todo A subconjunto de $\mathcal{X}$, A es $d-$abierto si y solo si A es $d'-$abierto*[1].

Se puede verificar que dado un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ existe una métrica equivalente a d, digamos d_1 tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, $d_1(x, y) < 1$. De lo anterior se puede suponer que cualquier métrica satisface que la distancia de cualesquiera dos puntos en su espacio es menor que 1.

1.3. El campo de los números complejos

Los número complejos fueron realmente aceptados gracias a Johann Carl Friedrich Gauss quien fue un matemático, astrónomo, geodesta y físico alemán. Gauss describió al conjunto de los números complejos desde el punto de vista geométrico, donde se considera el conjunto de parejas ordenadas, con entradas en los reales, y dos operaciones binarias definidas, en ese sentido se introducirá la definición formal, véase [9].

[1] Un conjunto B en a se dice η-abierto, si B es abierto respecto a la métrica η.

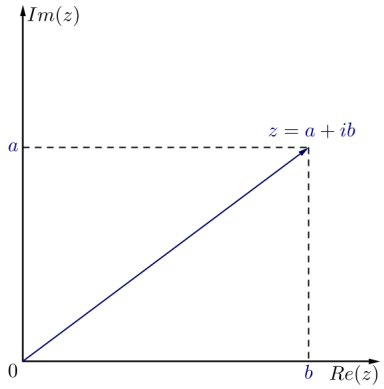

Imagen 1.1: Interpretación geométrica de un número complejo.

Definición 1.23. *Sea* $\mathbb{C}$ *el conjunto definido por:*
$\mathbb{C} = \{z = a + ib = (a, b) | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, *con dos operaciones binarias la suma y el producto que se definen como: Si* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ *tales que* $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, *se tiene:*

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) = (a + c, b + d).$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c).$$

Con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo que se llama el campo de los números complejos.

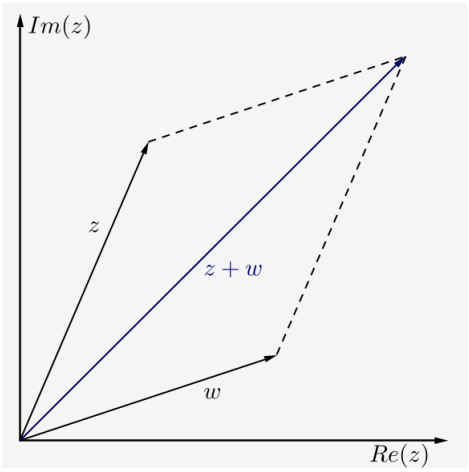

Imagen 1.2: Interpretación geométrica de la suma de números complejos.

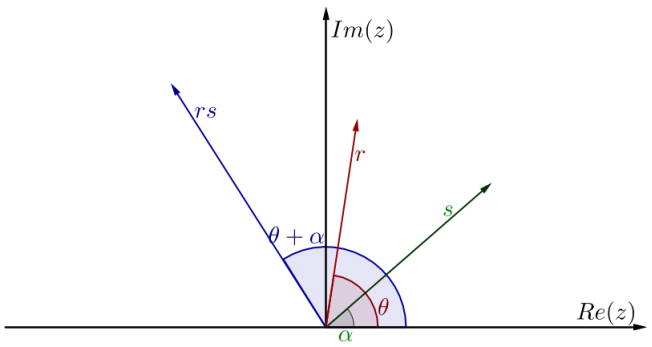

Imagen 1.3: Interpretación geométrica del producto de números complejos.

Observación 1.24.

1. *La parte real de un número complejo $z = a + ib$ es a y se denota por;* ***Re(z)****, la parte imaginaria de z es b y se denota por* ***Im(z)****.*

2. *Si $a = 0$ y $b \neq 0$ el número $z = ib$, se denomina* ***número imaginario puro****.*

3. *Si $a \neq 0$ y $b = 0$ el número $z = a$ es un* ***número real****.*

4. *Dos números complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.*

Definición 1.25. *Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + ib$, se define* ***el conjugado de un número complejo*** *como $\bar{z} = a - ib$.*

Proposición 1.26. *[9] Si $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$.*

La representación geométrica de los números complejos fue gracias a Jean Robert Argand, pero fue inicialmente descrita por el encuestador y matemático Noruego-danés Caspar Wessel, considerando el eje de las ordenadas por un eje de números imaginarios y dejando el eje de las abscisas como el eje real. Gracias a ese cambio, es posible dotar a los números complejos con su propia geometría.

Definición 1.27. *La forma trigonométrica de un número complejo no cero $z = a + ib$ está dada por, $z = r(cos\theta + isen\theta)$, donde $a = rcos\theta$, $b = rsen\theta$ y $r = |z|$.*

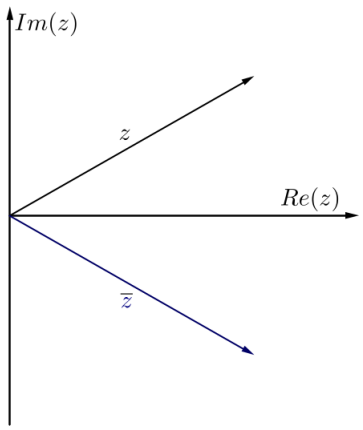

Imagen 1.4: Interpretación geométrica del conjugado de un número complejo.

Observación 1.28. *Si θ es alguno de los argumentos de z, es decir alguno de los ángulos que forma z (como vector desde el origen) con el eje real. Notar que si θ_1 y θ_2 son dos argumentos para z, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.*

Proposición 1.29. *[9] Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, y $arg(z_1 \cdot z_2) = argz_1 + argz_2 + 2k\pi$ para algun $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.30. *[9]* ***Fórmula de De Moivre***
Si $z = r(cos\theta + isen\theta)$ y n un entero positivo, entonces

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Demostración. Si $n = 2$, por la proposición 1.29 se cumple;
$z^2 = r^2(cos(\theta + \theta) + isen(\theta + \theta)) = r^2(cos2\theta + isen2\theta)$.
Ahora supóngase que se cumple para n, se demostrará que se cumple para $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z^1 \\ &= r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \cdot z^1 \\ &= r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \cdot r^1(cos\theta + isen\theta) \\ &= r^{n+1}(cos(n\theta + \theta) + isen(n\theta + \theta)) \\ &= r^{n+1}(cos(n+1)\theta + isen(n+1)\theta). \end{aligned}$$

□

Corolario 1.31. *[9] Sea w un número complejo, diferente de cero, en su representación polar $w = r(cos\theta + isen\theta)$. Entonces las n-ésimas raíces de w, están dadas por los números complejos*
$z_k = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + isen(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})), k = 0, 1..., n-1.$

Proposición 1.32. *[9] Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$.
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$.
3. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$, *para* $z_2 \neq 0$.
4. $\bar{z_1} \cdot z_1 = |z_1|^2$. *Más aún, si* $z_1 \neq 0$, *entonces* $z_1^{-1} = \frac{\bar{z_1}}{|z_1|^2}$.
5. $z_1 = \bar{z_1}$ *si y solo si* z_1 *es un número real.*
6. $\boldsymbol{Re}(z_1) = \frac{z_1 + \bar{z_1}}{2}$ *y* $\boldsymbol{Im}(z_1) = \frac{z_1 - \bar{z_1}}{2i}$.
7. $\bar{\bar{z_1}} = z_1$.
8. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
9. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, *para* $z_2 \neq 0$.
10. $-|z_1| \leq \boldsymbol{Re}(z_1) \leq |z_1|$ *y* $-|z_1| \leq \boldsymbol{Im}(z_1) \leq |z_1|$; *también,* $|\boldsymbol{Re}(z_1)| \leq |z_1|$ *y* $|\boldsymbol{Im}(z_1)| \leq |z_1|$.
11. $|\bar{z_1}| = |z_1|$.
12. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
13. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

1.4. Propiedades geométricas de las circunferencias

En esta sección se darán algunos conceptos, propiedades y resultados que cumplen las circunferencias en el plano euclidiano con ayuda de nociones elementales en geometría euclidiana como lo son la semejanza de tríangulos, ángulos inscritos y circunscritos, potencias de un punto, familia de circunferencias coaxiales, etc. Los resultados mencionados en esta sección

no serán demostrados, véase una demostración en [4]. Sin embargo, dichos resultados serán utilizados en secciones posteriores.
De ahora en adelante, se denotará por $\mathbb{R}^2$ al plano euclidiano y por $\mathscr{L}$ a una línea recta en el plano euclidiano o compejo, por $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2$ una circunferencia con centro en un punto O en el plano euclidiano con radio $r > 0$ y AB el segmento de A hasta B.
Un **ángulo inscrito** es un ángulo que tiene su vértice sobre una circunferencia y sus lados son secantes de la circunferencia.

Teorema 1.33. *Si un ángulo inscrito en una circunferencia y un ángulo central de la circunferencia abarcan el mimo arco, entonce el ángulo inscrito vale la mitad del ángulo central, véase la imagen 1.5.*

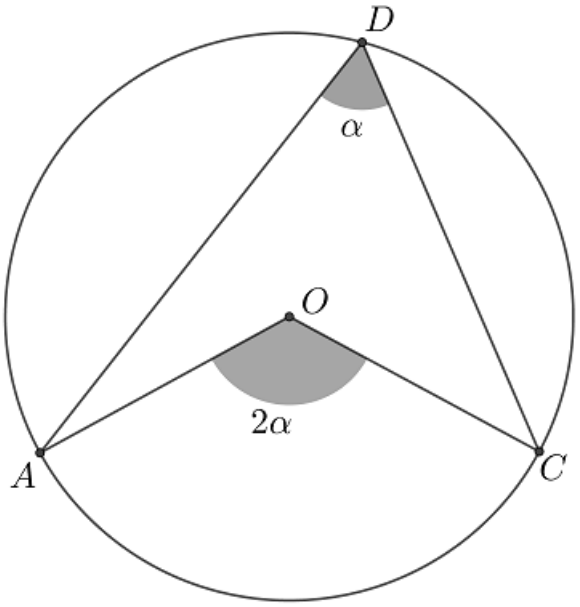

Imagen 1.5: Ángulo inscrito y ángulo central.

Definición 1.34. *A un conjunto de puntos que están sobre una misma circunferencia se les llama* ***concíclicos****. A un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos se le llama* ***cuadrilátero cíclico.***

Teorema 1.35. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si cualesquiera dos ángulos opuestos son suplementarios, véase la imagen 1.6.*

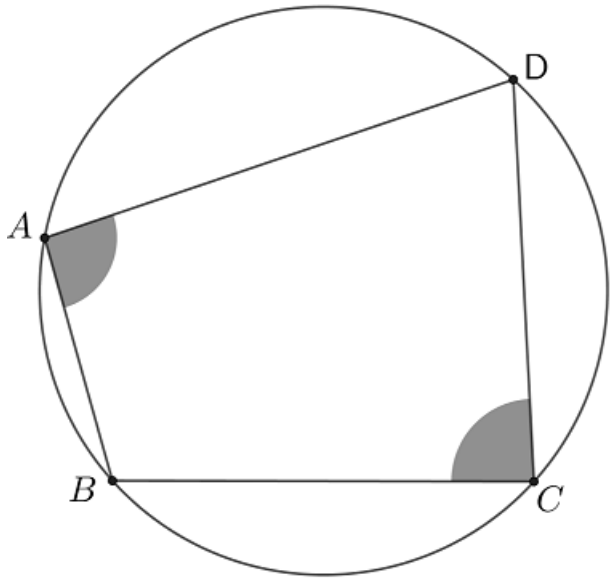

Imagen 1.6: Cuadrilátero ciclico.

Ahora se enunciarán algunas propiedades sobre las circunferencias coaxiales; para ello, se define el **eje radical** de dos circunferencias, esté es el lugar geométrico de todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$, tal que las potencias de P, con respecto de las dos circunferencias, son iguales.

Teorema 1.36. *Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias.*

(i) Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se intersecan, entonces su eje radical es la línea que pasa por los puntos de intersección.

(ii) Si las dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes, entonces su eje radical es la línea tangente común.

(iii) Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ajenas, entonces su eje radical es la línea determinada por los puntos donde concurren los ejes radicales de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}$, y de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}$, para cualquier circunferencia $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^2$ que corta a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Corolario 1.37. *Sean $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ tres circunferencias en $\mathbb{R}^2$, si sus centros no son colineales, entonces los tres ejes radicales (de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$; de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ y de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$)son concurrentes en un punto llamado **centro radical** de las tres circunferencias.*

Definición 1.38. *Sea $\mathscr{F}$ una familia de circunferencias en el plano euclidiano, se dirá que $\mathscr{F}$ es una **familia coaxial**, si existe una línea tal que es el eje radical de cualesquiera dos miembros de $\mathscr{F}$.*

En lo que sigue de este capítulo se enunciarán algunas definiciones y un resultado relacionados con las **Circunferencias coaxiales secantes ajenas**.

Definición 1.39. *El* ***ángulo entre dos circunferencias****, es el ángulo que forman las tangentes a ambas circunferencias en uno de sus puntos de intersección, véase la imagen 1.7.*

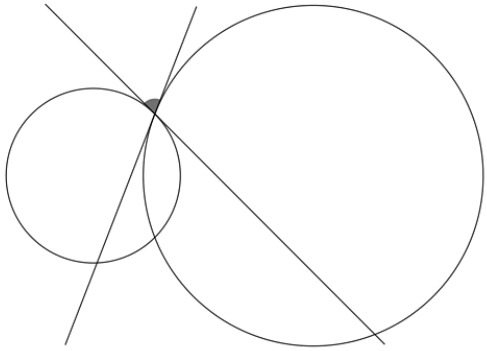

Imagen 1.7: Región fundamental de una transformación hiperbólica

Observación 1.40. *El ángulo entre dos circunferencias que se intersecan es igual en ambos puntos de intersección.*

Definición 1.41. *A una familia $\mathscr{F}$ de circunferencias que pasan por dos puntos fijos se le llama* ***familia secante.***

Proposición 1.42. *El eje radical de una familia secante $\mathscr{F}$ es la línea que pasa por los puntos de intersección. Más aún la familia es coaxial.*

Capítulo 2

Geometría de funciones de variable compleja.

2.1. Transformaciones lineales

En esta sección se estudiarán transformaciones que tienen la propiedad de ser isometrías en el plano complejo. En geometría también se les conoce como transformaciones congruentes o movimientos congruentes.

Teorema 2.1. *Sean a, b, c, d en el campo de los números complejos, y $|a| = |c| = 1$, entonces las transformaciones $I_1, I_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas como $z \mapsto az + b$ y $z \mapsto c\bar{z} + d$, para todo $z \in \mathbb{C}$ respectivamente, son isometrías del plano.*

Demostración. Observe que tanto I_1 y I_2 son funciones univaluadas, por otro lado, para mostrar que son biyectivas, primero se demostrará que I_1 es inyectiva. Sean z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ tal que $z_1 \neq z_2$, si $I_1(z_1) = I_1(z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} az_1 + b &= az_2 + b \\ az_1 &= az_2 \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$ se sigue que I_1 es inyectiva. Por otro lado si $w \in \mathbb{C}, z = \frac{w-b}{a}$ es tal que $I_1(z) = w$. Por lo tanto I_1 es sobreyectiva, así I_1 es una función biyectiva. Procediendo de manera análoga se comprueba que I_2 es función biyectiva.

Si z y w son dos puntos en el plano $\mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} |I_1(z) - I_1(w)| &= |az + b - aw - b| \\ &= |az - aw| \\ &= |a(z - w)| \\ &= |a||z - w| \\ &= |z - w|, \end{aligned}$$

donde $|a| = 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |I_2(z) - I_2(w)| &= |c\bar{z} + d - c\bar{w} - d| \\ &= |c\bar{z} - c\bar{w}| \\ &= |c(\bar{z} - \bar{w})| \\ &= |c|\overline{|z - w|} \\ &= \overline{|z - w|} \\ &= |z - w|, \end{aligned}$$

donde $|c| = 1$. Por lo anterior, se verifica que I_1 y I_2 son isometrías. □

Teorema 2.2. *Sean z_0, z_1, w_0 y w_1 números complejos, tales que $|z_1 - z_0| = |w_1 - w_0| \neq 0$. Entonces, existen dos tipos de transformaciones $T_1, T_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas como, $T_1(z) = az + b$ y $T_2(z) = c\bar{z} + d$, para toda $z \in \mathbb{C}$ respectivamente, tal que para toda $i \in \{1, 2\}$ y para toda $j \in \{0, 1\}$, se tiene que $T_i(z_j) = w_j$ con $|a| = |c| = 1$.*

Demostración. Si

$$w_0 = az_0 + b \qquad \text{y} \qquad w_1 = az_1 + b,$$

entonces

$$w_1 - w_0 = a(z_1 - z_0),$$

esto implica

$$a = \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0},$$

el cociente esta bien definido debido a que $|z_1 - z_0| \neq 0$. Entonces

$$|a| = \left|\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}\right| = \frac{|w_1 - w_0|}{|z_1 - z_0|} = 1.$$

La ultima igualdad se garantiza por la hipótesis.
Por otro lado

$$b = w_0 - az_0 = w_0 - z_0(\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}).$$

De manera análoga, si

$$w_0 = c\bar{z_0} + d \qquad \text{y} \qquad w_1 = c\bar{z_1} + d,$$

entonces

$$w_1 - w_0 = c(\bar{z_1} - \bar{z_0}),$$

esto implica

$$c = \frac{w_1 - w_0}{\bar{z_1} - \bar{z_0}},$$

de ahí que,

$$|c| = |\frac{w_1 - w_0}{\bar{z_1} - \bar{z_0}}| = \frac{|w_1 - w_0|}{|\bar{z_1} - \bar{z_0}|} = 1.$$

La ultima igualdad se garantiza por la hipótesis, es decir $|c| = 1$.

□

Las isometrías son de suma importancia para el desarrollo de la geometría, la cual es generada por las transformaciones, para ello primero se demostrará que toda isometría es una colineacion en el plano, donde colineación se entenderá como una función que manda rectas en rectas.

Teorema 2.3. *Toda isometría en el plano complejo es una colineación.*

Demostración. Sean $\mathscr{L}$ una recta en el plano y $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una isometría. Si $w, v \in \mathscr{L}$ tal que $w \neq v$, entonces $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{wv}$, es decir, la recta determinada por w y v. Se probará que $I(\mathscr{L}_{w,v}) = \mathscr{L}_{I(w)I(v)}$.
Si $s \in I(\mathscr{L}_{wv})$, entonces existe $z \in \mathscr{L}_{wv}$ tal que $I(z) = s$.

Caso 1. Si $z \in \{wv\}$, entonces $I(z) \in \{I(w), I(v)\}$; así, $s \in \mathscr{L}_{I(w)I(v)}$.

Caso 2. Si $z \notin \{wv\}$, entonces $I(z) \notin \{I(w)I(v)\}$; así, sean z, w, v tres puntos colineales diferentes entre sí, sobre una línea $\mathscr{L}$, por lo que uno de los puntos esta entre los otros dos; sin pérdida de generalidad, sea w entre z y v, entonces

$$|z - w| + |w - v| = |z - v|.$$

Como I es una isometría, entonces su imagen preserva la misma distancia, por lo cual se tiene que,

$$|I(z) - I(w)| + |I(w) - I(v)| = |I(z) - I(v)|.$$

Así, $I(z), I(w)$ y $I(v)$ son colineales, de lo contrario formarían un triángulo donde la suma de sus dos lados es mayor que el lado restante, esto es;

$$|I(z) - I(w)| + |I(w) - I(v)| > |I(z) - I(v)|.$$

Lo cual no ocurre.

Con lo anterior se acaba de probar que para todo isometría I del plano y para cualesquiera $w, v \in \mathbb{C}$, distintos entre sí, se tiene: $I(\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{L}_{I(w)I(v)}$, por definición de isometría se sigue que; $|I^{-1}(w) - I^{-1}(v)| = |I(I^{-1}(w)) - I(I^{-1}(v))| = |w - v|$, es decir, la inversa de una isometría también es una isometría; luego, $I^{-1}(\mathscr{L}_{I(w)I(v)}) \subseteq \mathscr{L}_{I^{-1}(I(w))I^{-1}(I(v))}$, así $I(I^{-1}(\mathscr{L}_{I(w)I(v)})) \subseteq I(\mathscr{L}_{wv})$, por lo que $\mathscr{L}_{I(w)I(v)} \subseteq I(\mathscr{L}_{wv})$, de lo anterior se concluye que $I(\mathscr{L}) = \mathscr{L}_{I(w)I(v)}$. Por lo tanto, toda isometría es una colineación. □

Corolario 2.4. *Toda isometría envía líneas paralelas en líneas paralelas.*

Demostración. Sean $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, dos rectas paralelas y $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una isometría. Por el Teorema 2.3, se sigue que toda línea es transformada en otra línea, es decír, $I(\mathscr{L}_1) = \mathscr{L}'_1$, $I(\mathscr{L}_2) = \mathscr{L}'_2$.
Supongamos que $\mathscr{L}'_1$ y $\mathscr{L}'_2$ no sean líneas paralelas, por lo que existe, $z_0 \in \mathscr{L}'_1 \cap \mathscr{L}'_2 = I(\mathscr{L}_1) \cap I(\mathscr{L}_2)$, esto implica que existen $z_1 \in \mathscr{L}$ y $z_2 \in \mathscr{L}$ tal que $I(z_1) = I(z_2) = z_0$; como I es inyectiva se sigue que, $z_1 = z_2$, es decir, $z_1 \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, esto es una contradicción. Por lo que se prueba el resultado. □

Teorema 2.5. *Toda isometía $I : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ está determinada de manera única por un triángulo dado y éste es congruente a su imagen .*

Demostración. Sean z_0, z_1, z_2 los vértices de un triángulo e
$I(z_0) = w_0, I(z_1) = w_1, I(z_2) = w_2$ los puntos imágenes, se tiene que:

$$|z_i - z_j| = |I(z_i) - I(z_j)| = |w_i - w_j|,$$

con $i, j = 0, 1, 2$.
Sea z un punto diferente de z_i, para todo $i = 0, 1, 2$. Observe la paralela a la línea $\mathscr{L}_{z_0 z_1}$ que pasa por el punto z e interseca en la prolongación de la línea

que pasa por los puntos z_0, z_2 en un punto z'', y la paralela a $\mathscr{L}_{z_0 z_2}$ que pasa por el punto z interseca a la línea $\mathscr{L}_{z_0 z_1}$ en el punto z'; véase la imagen 2.1.

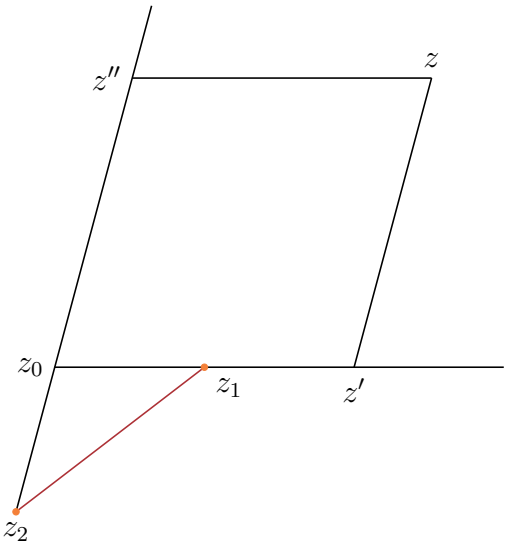

Imagen 2.1: Isometría determinada por un triángulo

Si w es la imagen de z bajo la isometría I y cada z_k es enviado a cada w_k, respectivamente, con $k = 1, 2, 3$, entonces por el teorema 2.3 y el corolario 2.4, se sigue que las líneas $\mathscr{L}_{zz'}$ y $\mathscr{L}_{zz''}$ son enviadas en sus correspondientes líneas $\mathscr{L}_{ww'}$ y $\mathscr{L}_{ww''}$, respectivamente, con w' en la línea $\mathscr{L}_{w_0 w_1}$ y w'' en la línea $\mathscr{L}_{w_0 w_2}$, de ahí se tiene lo siguiente:

$$|z_2 - z''| = |w_2 - w''|, |z_0 - z''| = |w_0 - w''| \tag{2.1}$$

y

$$|z_0 - z'| = |w_0 - w'|, |z_1 - z'| = |w_1 - w'|. \tag{2.2}$$

Como las líneas $\mathscr{L}_{w''w_2}$ y $\mathscr{L}_{w'w}$ son paralelas, por (2.1) y (2.2) se puede determinar que la posición de los puntos w' y w'' son únicos; más aún, la posición de w está definida de manera única, por lo antes mencionado. Como z es arbitrario, este teorema queda demostrado. □

Teorema 2.6. *Si existen exactamente dos isometrías tales que envían dos puntos z_0 y z_1 en dos puntos imagen w_0 y w_1, entonces*

$$|z_0 - z_1| = |w_0 - w_1| \neq 0. \tag{2.3}$$

Demostración. De la proposición 2.1 y el teorema 2.2, se sigue que las transformaciones que cumplen con la propiedad 2.3 son isometrías. Solo basta mostrar que no existe otra isometría con dicha propiedad.
En efecto, se tiene que cualquier isometría que manda z_0 a w_0 y z_1 en w_1 es una colineación, por lo que la línea recta que pasa por los puntos z_0 y z_1 es enviada mediante la isometría en una línea recta, la cual pasa por los puntos w_0 y w_1. Sea z un punto y w su punto imagen tal que:

$$|z - z_0| = |w - w_0|, |z - z_1| = |w - w_1|. \tag{2.4}$$

Si z, z_0, z_1 son colineales, entonces por el teorema 2.3 w, w_0 y w_1 también son colineales. Luego, de las igualdades (2.3) y (2.4), se determina una única posición de w sobre la línea que pasa por w_0 y w_1.
Si z no es colineal a z_0 y z_1, entonces z_0, z_1 y z forman un triángulo, el cual es enviado a un triángulo con vértices en w_0, w_1 y w, más aún, es congruente a este, véase la imagen 2.2. Los vértices w_0 y w_1 son fijos, note que el punto

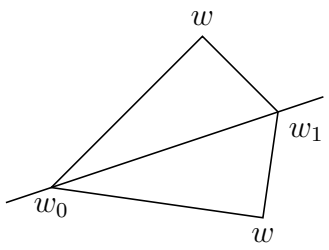

Imagen 2.2: Triángulos congruentes

w tiene dos posibles posiciones simétricas con respecto a la línea $\mathscr{L}_{w_0w_1}$.
Por lo que, todo punto z forma con z_0 y z_1 una colineación o es un triángulo. Luego, por el teorema 2.5, cada uno de estos tripletes; w_0, w_1 y w determinan una isometría.

□

Definición 2.7. *Se llama transformación directa o positiva a toda transformación que conserve la orientación de los ángulos, se denota por* $\mathfrak{M}_+$.

Definición 2.8. *Se llama transformación inversa o negativa, a toda transformación que cambie orientación de los ángulos, se denota por* $\mathfrak{M}_-$.

Se pueden resumir los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea $\mathfrak{M}$ el conjunto de todas las isometrías del plano, este conjunto está determinado por dos conjuntos $\mathfrak{M}_+$ y $\mathfrak{M}_-$, donde el conjunto $\mathfrak{M}_+$ consiste de todas las isometrías $I^+ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas como; $I^+(z) = az + b$ con $|a| = 1$, el conjunto $\mathfrak{M}_-$ es el de todas las isometrías $I^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma $I^-(z) = c\bar{z} + d$ con $|c| = 1$.*

Las transformaciones cambio de coordenadas es otro concepto relacionado con las isometrías y se dará la idea geométrica por medio de un ejemplo. Sea F el origen del nuevo sistema y el nuevo eje real se obtiene por medio del "viejo" eje real, por un ángulo ϕ.
Se asumirá el posible eje imaginario, el cual se transforma en un nuevo eje positivo imaginario por medio de una rotación de algún ángulo ϕ, véase la imagen 2.1.

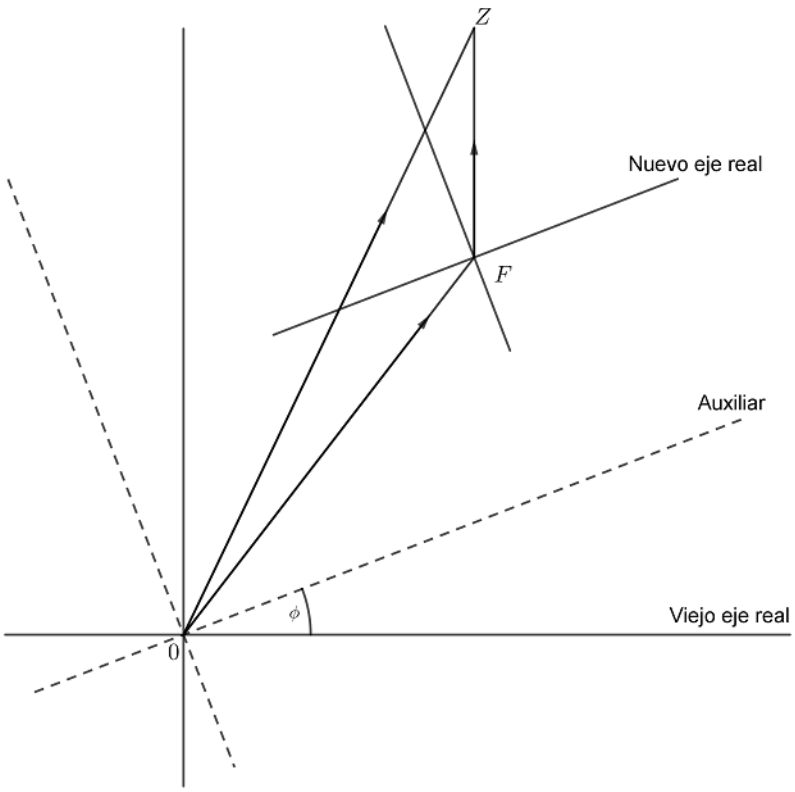

Imagen 2.3: Transformación cambio de coordenadas

Primero se considera un sistema auxiliar con origen en el cero, donde los ejes son perpendiculares al nuevo sistema. Si a los valores del sistema auxiliar se les asigna subíndice uno, entonces del mismo modo se asigna subíndice dos

a los valores del nuevo sistema y se asigna subíndice cero al viejo valor, por lo que se tiee a z un punto arbitrario tal que $z_0 = z$. En el sistema auxiliar todos los argumentos disminuyen por medio de ϕ. Así, de acuerdo al teorema de De Moivre:

$$z_1 = z[cos(-\phi) + isen(-\phi)] = z(cos\phi - isen\phi).$$

Si $F_1 = f(cos\phi - isen\phi)$, entonces el valor de z_2 se obtiene por una diferencia de F_1 y z_1, es decir,

$$z_2 = z_1 - F_1 = z(cos\phi - isen\phi) = f(cos\phi - isen\phi) = az + b.$$

Así, a y b son determinados de manera única por la elección de f, ϕ, y el $|a| = 1$. De manera recíproca, se puede mostrar que, dados a y b arbitrarios, con $|a| = 1$, existe una única transformación I^+ de coordenadas tal que $I^+(z) = az + b$.
Otro caso surge si ϕ es de nuevo el ángulo que hace girar de manera positiva al eje real, pero si el eje imaginario es "movido"por algún ángulo, entonces la nueva posición del eje imaginario es negativo. Se puede mostrar que el segundo tipo de transformaciones de coordenada. Está dado por la forma de la transformación $I^-(z) = a\bar{z} + b, |a| = 1$, se deduce que, $I^+(z) = az + b$ y $I^-(z) = a\bar{z} + b$ son dos transformaciones diferentes.

2.2. Grupo de colineación del plano complejo

En esta sección, se omitirá la restricción $|a| = 1$, la cual se empleo en las transformaciones $I^+ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas como, $I^+z = az + b$. La razón por la que se pedía esta restricción en la sección anterior, es debido a que era necesaria para que las transformaciones preserven distancias. De ahí que las transformaciones $I, I' : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas como; $I(z) = az + b$ y $I'(z) = a\bar{z} + b$, son más generales si no se pide la condición $|a| = 1$, pero aún así, preservan algunas propiedades similares a las transformaciones vistas anteriormente. Algunos ejemplos son la semejanza de triángulos y figuras en general. Por lo que resultan ser más débiles en estas propiedades, esto debido a que la congruencia entre figuras geométricas es un término más general que el de semejanza. En esta sección se dará uno de los tipos más simples de transformaciones llamadas **traslaciones** $T_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas por;$T(z) = z + b$. Por el teorema 2.1, las traslaciones son isometrías. Geométricamente, véase la imagen 2.4 que toda traslación toma cada punto z y lo envía a un punto z', donde el segmento de z a z' es paralelo y de "igual

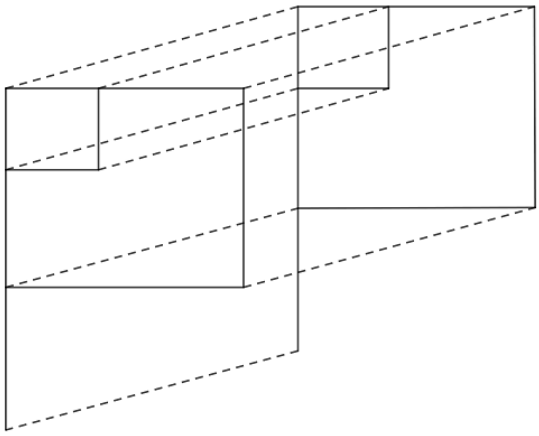

Imagen 2.4: Traslación

longitud" con respecto a la posición del vector $\vec{b}$, más aún con la misma dirección, véase la imagen 2.5.

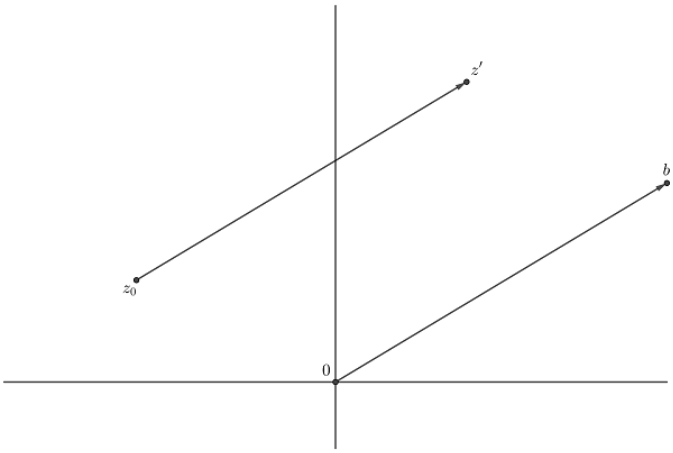

Imagen 2.5: Traslación respecto de $\vec{b}$

Teorema 2.10. *Las traslaciones de un plano forman un grupo abeliano $\mathscr{T}$, el cual es isomorfo al grupo de los números complejos con la adición.*

Demostración. Para cada $b \in \mathbb{C}$, se define $T_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $T_b(z) = z + b$. Así, el conjunto de las traslaciones se define como;

$$\mathscr{T} = \{T_b | b \in \mathbb{C}\}.$$

Sean $T_b, T_c \in \mathscr{T}$, con $b, c \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(T_b \circ T_c)(z) &= T_b(T_c(z)) \\ &= T_b(z+c) \\ &= (z+c)+b \\ &= z+(c+b) \\ &= z+b_1.\end{aligned}$$

Y $b_1 = c+b$, es decír, $(T_b \circ T_c)(z) = z+b_1$, por lo que $T_b \circ T_c \in \mathscr{T}$.
Recordar que la operación aditiva es asociativa en los $\mathbb{C}$, más aún, la composición también es asociativa.
Sea $0 \in \mathbb{C}$ tal que $T_0(z) = z+0 = z$, es decír, $T_0(z) = z$. Por lo que T_0 es el elemento neutro en $\mathscr{T}$.
Sea $T_b \in \mathscr{T}$, entonces

$$\begin{aligned}z &= (T_b \circ T_b^{-1})(z) \\ &= T_b(T_b^{-1}(z)) \\ &= T_b^{-1}+b.\end{aligned}$$

Esto implica que $z = T_b^{-1}+b$, por lo que $T_b^{-1} = z-b$, pero $T_{-b} = z-b$.
Por todo lo anterior se con cluye que $(\mathscr{T}, \circ)$ es un grupo.

Sea $\varphi : (\mathscr{T}, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}, +)$ definida por; $\varphi(T_b) = b$. Afirmación: φ está bién definida. En efecto, si $T_b = T_c$, entonces $\varphi(T_b) = \varphi(T_c)$, esto implica $b = c$, por lo que φ esta bien definida.
Se afirma que φ es un homomorfismo, en efecto dado que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi(T_c \circ T_b(z)) &= \varphi(T_{b+c}(z)) \\ &= b+c \\ &= \varphi(T_b)+\varphi(T_c).\end{aligned}$$

Así, $\varphi(T_c \circ T_b(z)) = \varphi(T_b)+\varphi(T_c)$.
Si $b = c$, entonces $\varphi(T_b) = \varphi(T_c)$, esto implica $T_b = T_c$, por lo que φ es inyectiva.
Por último se afirma que φ es suprayectiva, en efecto; si $b \in (\mathbb{C}, +)$ tal que existe $T_b \in \mathscr{T}$, entonces $\varphi(T_b(z)) = b$. Por lo tanto $(\mathscr{T}, \circ) \cong (\mathbb{C}, +)$. □

2.3. Dilatación y rotaciones

Una transformación análoga a las traslaciones es $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como; $T(z) = az, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, donde el cambio radica en la operación, ya que en lugar de la adición, es la multiplicación. Tenga en cuenta que $|a|$ no necesariamente es 1, este tipo de transformaciones no siempre son isometrías. Estas transformaciones son llamadas **rotaciones dilatadas** alrededor del cero (dilatar= expandir, extender) véase la imagen 2.6, dilatar podría representar una expansión o un estiramiento. La motivación de este término se aclarará en los teoremas siguientes.

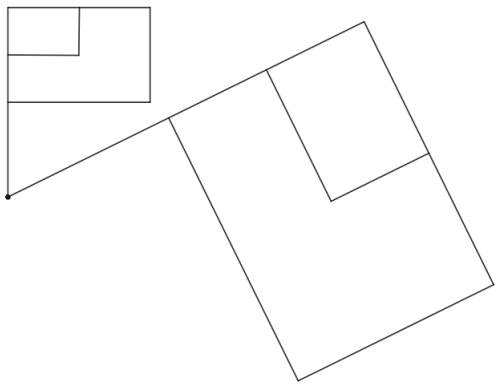

Imagen 2.6: Rotación dilatada

Teorema 2.11. *Las rotaciones dilatadas de un plano alrededor del cero forman un grupo abeliano $\mathscr{D}$, el cual es isomorfo al grupo de los números complejos con la operación multiplicación.*

Demostración. Para cada $b \in \mathbb{C}$. Se define $R_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $R_b(z) = bz$, el conjunto $\mathscr{D}$ se define como: $\{R_b | b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.
Sean $R_a, R_b \in \mathscr{D}$, tal que $R_a(z) = az, R_b(z) = bz$, luego

$$\begin{aligned}(R_a \circ R_b)(z) &= R_a(R_b(z)) \\ &= R_a(bz) \\ &= a(bz) = (ab)z = R_{ab}(z),\end{aligned}$$

con $ab \in \mathbb{C}$. Se afirma que $\mathscr{D}$ es asociativa, en efecto; sean $R_a, R_b, R_c \in \mathscr{D}$

tales que $R_a(z) = az, R_b(z) = bz$, y $R_c(z) = cz$, de ahí que

$$\begin{aligned} R_a((R_b \circ R_c)(z)) &= R_a(R_{bc}(z)) \\ &= R_a((bc)z) \\ &= a(bcz) \\ &= (ab)cz \\ &= R_{ab}(cz) \\ &= (R_a \circ R_b)(R_c(z)). \end{aligned}$$

Así $\mathscr{D}$ es asociativo.
Nótese que si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $a^{-1} \in \mathbb{C}$, luego para todo $R_a \in \mathscr{D}$, tiene elemento inverso, en efecto,

$$\begin{aligned} z &= (R_a \circ R_a^{-1})(z) \\ &= a(R_a^{-1}(z)). \end{aligned}$$

Así $z = a(R_a^{-1}(z))$ de ahí que $R_a^{-1}(z) = a^{-1}z$, $R_{a^{-1}}(z) = a^{-1}z$, así, $R_{a^{-1}} = R_a^{-1}$.
Por todo lo anterior se concluye que $(\mathscr{D}, \circ)$ es un grupo. Se afirma que $\mathscr{D}$ es abeliano, si $R_b, R_c \in \mathscr{D}$, entonces

$$\begin{aligned} (R_b \circ R_c)(z) = R_b(cz) &= b(cz) \\ &= (bc)z \\ &= (cb)z \\ &= c(bz) \\ &= R_c(bz) \\ &= (R_c \circ R_b)(z). \end{aligned}$$

Sea $\phi : (\mathscr{D}, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ definida como; $\phi(R_b) = z'$. Se afirma que ϕ esta bien definida, si $R_b = R_c$, entonces $\phi(R_b) = \phi(R_c)$ se tiene que $z' = z''$, así ϕ está bien definida. Se afirma que ϕ es un homomorfismo. En efecto, si

$$\begin{aligned} \phi(R_c \circ R_b)(z) &= \phi(R_{bc}(z)) \\ &= z'z'' \\ &= \phi(R_b) \cdot \phi(R_c). \end{aligned}$$

Así, $\phi((R_c \circ R_b)) = \phi(R_b) \cdot \phi(R_c)$. Más aún, ϕ es biyectiva, porque si $z' = z''$ se sigue que $\phi(R_b) = \phi(R_c)$, esto implica $R_b = R_c$, así ϕ es inyectiva.

Si $b^{-1}z \in (\mathbb{C}, +)$ tal que existe $R_b \in \mathscr{D}$, entonces $\phi(R_b(b^{-1}z)) = z$, véase la imagen 2.7.

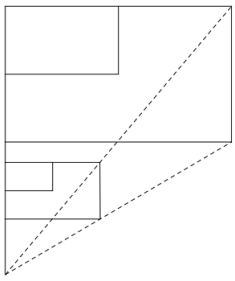

Imagen 2.7: Rotacion dilatada en un plano alrededor del cero

Por lo anterior se concluye que $(\mathscr{D}, \circ) \cong (\mathbb{C}, \cdot)$. □

El teorema 2.11 da pie a una motivación para aprender más acerca de la estructura de $\mathscr{D}$, para ello vamos a considerar subgrupos de $\mathscr{D}$ que son las rotaciones dilatadoras $T_a(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, véase la imagen 2.7, estas transformaciones definen una **dilatación** desde el cero, y cuando $|a| = 1$ se tratará de una rotación alrededor del cero, véase la imagen 2.8.
Si $|a| = 1$, a puede ser escrito como

$$a = cos\alpha + isen\alpha,$$

donde $\alpha = arg(a)$. Si $z = \rho(cos\phi + isen\phi)$, entonces $az = \rho(cos\alpha + isen\alpha)(cos\phi + isen\phi) = \rho(cos(\alpha + \phi) + isen(\alpha + \phi))$, y así, ρ está intacto, pero con un aumento en el argumento de α, en otras palabras, una rotación dada por α al rededor del cero.

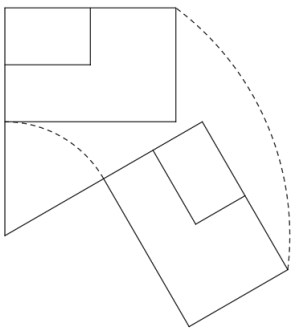

Imagen 2.8: Rotación alrededor del cero

Geométricamente una dilatación desde el cero, envía cada punto z desplazándolo en línea recta, la cual se une desde el cero hasta z.
El sentido de una rotación al rededor del cero es el habitual. Una dilatación rotada es una dilatación desde el cero, seguida por una rotación al rededor del cero, esto es,

$$z' = \frac{a}{|a|}(|a|z), |\frac{|a|}{|a|}| = 1.$$

Teorema 2.12. *Las dilataciones forman un subgrupo abeliano $\mathscr{D}*$ de $\mathscr{D}$, y las rotaciones al rededor del cero forman un subgrupo abeliano $\mathscr{R}$ de $\mathscr{D}$.*

Demostración. Si $0 \neq a \in \mathbb{R}$, entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}$, y como el producto de dos números reales es real, se tiene lo siguiente; $T_{a^{-1}} \circ T_c(z) = a^{-1}cz = dz$, con $d = a^{-1}c$ y por el teorema 1.4, se comprueba el resultado para $\mathscr{D}*$.
Si $|a| = |c| = 1$, entonces $|a^{-1}| = 1$ y $|ac| = 1$. Por otro lado, $\mathscr{R}$ y $\mathscr{D}*$ son subgrupos de un grupo abeliano $\mathscr{D}$. □

De manera similar, se considerarán grupos de isometrías.

Teorema 2.13. *Sea $\mathfrak{M}$ el conjunto de las isometrías en el plano. Entonces $\mathfrak{M}$ es un grupo con la composición, el conjunto $\mathfrak{M}_+$ de las isometrías directas es un subgrupo normal de $\mathfrak{M}$ y el conjunto $\mathfrak{M}_-$ de isometrías opuestas es una clase lateral con respecto a $\mathfrak{M}_+$, pero $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_+$ no son abelianos.*

Demostración. Para cuales quiera $a, b \in \mathbb{C}$ e $I^+_{a,b}, I^-_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas por; $I^+_{a,b}(z) = az + b$ y $I^-_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$, respectivamente. El conjunto de las isometrías se define como; $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_+ \cup \mathfrak{M}_-$, donde $\mathfrak{M}_+ =: \{I^+_{a,b} | a, b \in \mathbb{C} \text{ y } |a| = 1\}$ y $\mathfrak{M}_- =: \{I^-_{a,b} | a, b \in \mathbb{C} \text{ y } |a| = 1\}$. Se afirma que $\mathfrak{M}$ la composición de dos transformaciones isométricas es una transformación isométrica, ahora bien; Sean I_1, I_2 dos isometrías, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $w_1 = I(z_1), w_= I(z_2)$, entonces $|z_1 - z_2| = |I_1(z_1) - I_1(z_2)|$ y $|w_1 - w_2| = |I_2(w_1) - I_2(w_2)|$, de ahí que

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(I_2 \circ I_1)(z_1) - (I_2 \circ I_1)(z_2)| \\ &= |I_2(I_1(z_1)) - I_2(I_1(z_1))| \\ &= |I_2(w_1) - I_2(w_2)| \\ &= |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

La inversa de una isometría es también una isometría. Por lo tanto, se concluye que $\mathfrak{M}$ es un grupo bajo la composición.

Así, $\mathfrak{M}_+ =: \{I^+_{a,b} | a, b \in \mathbb{C}\}$ es el conjunto de las isometrías directas. Primero se demostrará que $\mathfrak{M}_+$ es un subgrupo de $\mathfrak{M}$. Se afirma que $\mathfrak{M}_+$ es diferente del vacío, debido a que $I^+_{1,0}(z) = 1z+0 = z = Id(z)$, donde Id es la isometría identidad en $\mathfrak{M}_+$.
Sean $I^+_{a,b}$ y $I^+_{c,d}$ en $\mathfrak{M}_+$ tales que

$$\begin{aligned}((I^+)^{-1}_{c,d} \circ I^+_{a,b})(z) &= (I^+)^{-1}_{c,d}(I^+_{a,b}(z)) \\ &= (I^+)^{-1}_{c,d}(az+b) \\ &= (I^+)_{c^{-1},-d}(az+b) \\ &= c^{-1}(az+b) - d \\ &= (c^{-1}a)z + (b-d).\end{aligned}$$

Así, $(I^+)^{-1}_{c,d} \circ I^+_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$ debido a que $|c| = 1$ y $|a| = 1$, lo que implica $|c^{-1}a| = 1$. Finalmente, por el teorema 1.4, se concluye que $(\mathfrak{M}_+, \circ) \leq (\mathfrak{M}, \circ)$.
Sea $I^-_{1,0}$ en $\mathfrak{M}$, donde $I^-_{1,0}$ es una isometría esto por el teorema 2.1 y de lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(I^+_{a,b} \circ I^-_{1,0})(z) &= I^+_{a,b}(I^-_{1,0}(z)) \\ &= I^+_{a,b}(\bar{z}) \\ &= a\bar{z} + b \\ &= I^-_{a,b}(z),\end{aligned}$$

donde $I^-_{a,b} \in \mathfrak{M}_-$. Luego por el teorema 2.6, solo hay dos sometrías. Así, todas las isometrías en $\mathfrak{M}_-$ pueden ser representadas de la siguente forma; $I^+_{a,b} \circ I^-_{1,0} = I^-_{a,b}$, donde $I^+_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$. Por lo que $\mathfrak{M}_- =: \{I^+_{a,b} \circ I^-_{1,0} | I^+_{a,b} \in \mathfrak{M}_+\}$. De ahí que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_+ \cup \mathfrak{M}_- = \mathfrak{M}_+ \cup \{I^-_{1,0} \circ \mathfrak{M}_+\}$, $\mathfrak{M}_-$ es una partición de $\mathfrak{M}$, más aún, $\mathfrak{M}_-$ es una clase lateral derecha con respecto a $\mathfrak{M}_+$. Por tanto $\mathfrak{M}$ está compuesto por dos clases laterales $\mathfrak{M}_+$ y $\mathfrak{M}_-$. Por todo lo anterior se tiene que $\mathfrak{M}_+$ es de índice dos en $\mathfrak{M}$ y por el teorema 1.12, se concluye que $\mathfrak{M}_+ \lhd \mathfrak{M}$.
Afirmamos que $\mathfrak{M}_+$ no es abeliano, sean $I^+_a(z) = az, (|a| = 1)$ y $(I^+_{1,b})'(z) = z + b$, de ahí que; $(I^+_{1,b})' \circ I^+_a(z) = az + b$ y $I^+_a \circ (I^+_{1,b})'(z) = az + ab$, para $a \neq 1$ y $b \neq 0$. Así, $(I^+_{1,b})' \circ I^+_a \neq I^+_a \circ (I^+_{1,b})'$, por lo que; $\mathfrak{M}_+$ no es un grupo abeliano. Más aún, $\mathfrak{M}$ no es abeliano. □

Teorema 2.14. *Sea $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(1) Es I una isometría.

(2) La funciónI preserva distancia.

(3) Es I de la forma $I(x) = \mathbf{A}x + a$, donde $\mathbf{A}$ es una matríz ortogonal y $a = I(0)$.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2), se da por definición de isometría. Para la implicación (2) $\Rightarrow$ (3), se supondrá que I preserva distancia, luego se define la siguiente función $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por $A(x) := I(x) - I(0)$. Primero se demostrará que A preserva distancia.
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que;

$$\begin{aligned} |A(x) - A(y)| &= |(I(x) - I(0)) - (I(y) - I(0))| \\ &= |I(x) - I(0) - I(y) + I(0)| \\ &= |I(x) - I(y)| \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

Más aún, $A(0) = I(0) - I(0) = 0$. Por tanto A preserva distancia. Observe que $|A(x)| = |A(x) - A(0)| = |x - 0| = |x|$, es decir, $|A(x)| = |x|$.
Se afirma que A es una transformación ortogonal,

$$\begin{aligned} 2A(x)\cdot A(y) &= A(x)\cdot A(x) + A(y)\cdot A(y) - ((A(x) - A(y))\cdot (A(x) - A(y))) \\ &= |A(x)|^2 + |A(y)|^2 - |A(x) - A(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2. \end{aligned}$$

Así, existe $\mathbf{A}$ matríz ortogonal de tamaño n x n tal que $I(x) = I(0) + \mathbf{A}x$.
Para (3.) $\Rightarrow$ (1). Si $I(x) = I(0) + \mathbf{A}x$, entonces I es composición de una tranasformación ortogonal seguida de una traslación, es decir, $I := T \circ \phi$, donde $\phi, T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\phi(x) = \mathbf{A}x, T(x) = x + a$. Luego por el teorema 1.21 se tiene que ϕ es una isometría recordando que las traslaciones son isometrías, por el teorema previo se sigue que I es una isometría. □

2.4. Similitudes

En esta sección se trabajará con transformaciones más generales, pero al mismo tiempo más débiles en términos geométricos, esto debido a que las similidutes no preservan congruencia.

Definición 2.15. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $S : X \longrightarrow Y$ es una función, se dirá* ***similaridad*** *de X en Y, si S cumple lo siguiente:*

(i) Cambio de escala;

$$d_Y(S(x_1), S(x_2)) = kd_X(x_1, x_2) \text{ para cada } x_1, x_2 \in X,$$

donde $k > 0$, es llamado factor de escala de S.

(ii) La función S es biyectiva.

Teorema 2.16. *Sea $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) La función S es una similaridad.

(2) Es S un cambio de escala.

(3) Es S de la forma $S(x) = a + k\mathbf{A}x$, donde $\mathbf{A}$ es una matríz ortogonal, k es una constante positiva y $a = S(0)$.

La demostración del teorema anterior es análoga a la demostración del teorema 2.14.

Ejemplo 2.17. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida como; $f(z) = az + b$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$.*
Observación. Si $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$, entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\binom{a_1}{a_2}$ y z con $\binom{x}{y}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Recordar que $\mathbb{C}$ es isomorfo a M_{2x2}, es decir,

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow M_{2x2},$$

$$a = a_1 + ia_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

$$az \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

En particular, si $a = |a|e^{i\theta}$, *entonces*

$$az = |a| \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ -yx \end{pmatrix}.$$

Así, $f(z) = |a|Az + b$, *donde* b *es una matríz y*

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

Con la misma idea que se hizo el ejercio anterior se trabajará con las siguientes transformaciones $S^+, S^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas como; $S^+(z) = az+b$ y $S^-(z) = a\bar{z}+b$, con $a \neq 0$, recordar que no necesariamente el valor absoluto de a es igual a uno. Este tipo de transformaciones se les llamará similitudes, donde $S^+(z) = az + b$ se llamarán similitudes directas y $S^-(z) = a\bar{z} + b$, son llamadas similitudes opuestas. El siguiente resultado se tiene como consecuencia de lo recién mencionado.

Teorema 2.18. *Las similitudes forman un grupo* S *con la composición, el conjunto* S_+ *de las similitudes directas forman un subgrupo y las similitudes opuestas forman una clase, denotada por* S_-, *con respecto a* S_+, *pero ni* S *ni* S_+ *son subgrupos abelianos. El conjunto* $\mathfrak{M}$ *es un subgrupo de* S *y* $\mathfrak{M}_+$ *es un subrupo de* S_+.

Demostración. Sean $S^+, S^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por; $S^+(z) = az + b$ y $S^-(z) = a\bar{z}+b$, para cada $a, b \in \mathbb{C}$. El conjunto de las similaridades se define como; $S := S_+ \cup S_-$, donde $S_+ =: \{S^+|a, b \in \mathbb{C}\}$ y $S_- =: \{S^-|a, b \in \mathbb{C}\}$. Una parte de la demostración de este teorema es análoga a la demostración en el teorema 2.13. Por lo que solo resta probar que $\mathfrak{M}$ es subgrupo de S y que $\mathfrak{M}_+$ es un subrupo de S_+. Como $\mathfrak{M}$ y S son grupos con la composición, únicamente basta mostrar que $\mathfrak{M} \subseteq S$ y exhibir que el elemento neutro en S es el mismo que en $\mathfrak{M}$.
Si $I_{a,b} \in \mathfrak{M}$, entonces $I_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$ o $I_{a,b} \in \{I^-_{1,0}\mathfrak{M}_+\}$.

Caso 1. Si $I_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$, entonces $I_{a,b}(z) = az+b$ con $|a| = 1$. Por lo tanto $I_{a,b} \in S$.

Caso 2. Si $I_{a,b} \in \{I^-_{1,0} \circ \mathfrak{M}_+\}$, entonces

$$\begin{aligned} I_{a,b}(z) &= I^-_{1,0} \circ I^+_{a_1,b_1}(z) \\ &= I^-_{1,0}(a_1 z + b_1) \\ &= 1\overline{(a_1 z + b_1)} + 0 \\ &= \bar{a_1}\bar{z} + \bar{b_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_{a,b} \in S$.

Observar que $S_{1,0} \in S$ es el elemento neutro, luego para cada $I_{a,b} \in \mathfrak{M}$, se tiene que: $S_{1,0} \circ I_{a,b}(z) = S_{1,0}(I_{a,b}(z)) = S_{1,0}(az+b) = az+b$. y $I_{a,b} \circ S_{1,0}(z) = I_{a,b}(S_{1,0}(z)) = I_{a,b}(z) = az+b$. Es decir, $S_{1,0}$ es el mismo elemento neutro para $\mathfrak{M}$. La demostración de que $\mathfrak{M}_+$ es subgrupo de S_+ es análoga.

□

Observación 2.19. *El diagrama en la imagen 2.9, resume la relación entre las transformaciones de grupos que han sido mencionados. La pregunta natural es la siguiente, ¿Cuáles son las similitudes desde el punto de vista geométrico? El siguiente teorema responde a esta pregunta y proporciona razones del porque el nombre de similaridades.*

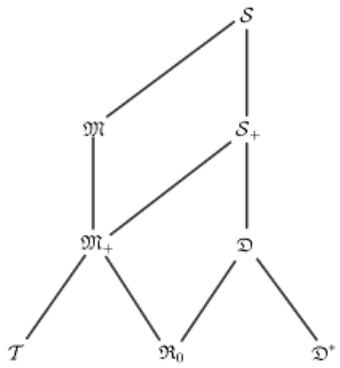

Imagen 2.9: Relación entre las transformaciones de grupos

Teorema 2.20. *Si z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo, entonces los vértices del triángulo son enviados por medio de una similitud directa a sus correspondientes vértices w_1, w_2, w_3 en otro triángulo si y solo si,*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}. \tag{2.5}$$

Demostración. Sean z_k los vértices de un triángulo, para $k = 1, 2, 3$ y supongase que S es una similitud directa tal que $S^+ : z \mapsto az + b$, donde $S^+(z_k) = w_k$ son los vértices de otro triángulo, para $k = 1, 2, 3$ y $a \neq 0$,

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{az_2 - az_1}{az_3 - az_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Para la suficiencia se supondrá la ecuación 2.5, lo cual implica que $w_3 \neq w_1$. Ahora, considere la similitud

$$S_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$S_1 : z \mapsto \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}.$$

La similitud S_1 envía; z_1 en 0, z_2 en $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ y z_3 en 1. De manera similar, sea

$$S_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$S_2 : z \mapsto \frac{z - w_1}{w_3 - w_1}.$$

De ahí que, S_2 envía; w_1 en 0, w_2 en $\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$ y w_3 en 1.
La composición $S_2^{-1} \circ S_1$ es en sí mismo una similitud, la cual está definida de la siguiente manera:

$$S_2^{-1} \circ S_1(z_1) = S_2^{-1}(0) = w_1,$$
$$S_2^{-1} \circ S_1(z_2) = S_2^{-1}(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}) = S_2^{-1}(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}) = w_2,$$
$$S_2^{-1} \circ S_1(z_3) = S_2^{-1}(1) = w_3$$

Así, $S_2^{-1} \circ S_1$ es similitud directa dado que S_1 y S_2^{-1} son similitudes directas y $(\mathscr{S}_+, \circ)$ es un grupo.
De manera explícita se tiene:

$$S_2^{-1} \circ S_1 : z \mapsto \frac{w_3 - w_1}{z_3 - z_1}(z - z_1) + w_1.$$

□

Una consecuencia inmediata del teorema previo es la siguiente.

Teorema 2.21. *Una similitud envía un triángulo en un triángulo similar.*

Demostración. Sean $S, S' : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ similitudes, definidas como; $S(z) = az + b, S'(z) = a\bar{z} + b$, con $a \neq 0$ y z_k los vértices de un triángulo para $k = 1, 2, 3$. Por la ecuación (2.5) del teorema 2.20 se sigue que;

Caso 1. Si $S(z_k) = w_k$ con w_k vertices de otro triángulo y $k = 1, 2, 3$, entonces

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|}. \tag{2.6}$$

Luego, por la ecuación de (2.5), y considerando el valor absoluto, se obtiene;

$$\frac{|z_2 - z_3|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_3|}{|w_3 - w_1|},$$

y dado que

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|w_1 - w_2|} = \frac{|z_2 - z_3|}{|w_2 - w_3|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|w_3 - w_1|},$$

los triángulos son similares.

Caso 2. Si $w_k = S'(z_k) = a\bar{z} + b$ con $k = 1, 2, 3$, entonces no podemos hacer uso del teorema 2.20 debido a que solo es para similitudes directas. Sin embargo;

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{\bar{z_2} - \bar{z_1}}{\bar{z_3} - \bar{z_1}} = \frac{\overline{z_2 - z_1}}{z_3 - z_1},$$

esto implica a la ecuación (2.6). El resultado de la prueba es como el caso directo.

□

2.5. Orientación

La razón de hacer la distinción entre "directo" y "opuesto", no se ha aclarado geométricamente, esto se explicará con ayuda de las transformaciones isométricas para discutir su orientación. Por el teorema 2.2 existe exactamente una transformación isométrica tal que los vértices de un triángulo dado, y sus correspondientes vértices del triángulo, son enviados a un triángulo congruente al dado. Si la isometría es directa se dirá que los triángulos tienen la misma orientación. Si es opuesto la orientación sera diferente. En el siguiente teorema se demostrará que la propiedad de tener orientaciones iguales es invariante bajo las isometrías.

Teorema 2.22. *Sean z_k, $w_k \in \mathbb{C}$ con $k = 1, 2, 3$, los vértices de dos triángulos congruentes y con la misma orientación. Si $I_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es cualquier isometría, entonces los triángulos con vértices $I_{a,b}(z_k)$ e $I_{a,b}(w_k)$, para cada $k = 1, 2, 3$ tienen la misma orientación. Si la orientación de los triángulos son diferentes, entonces sus imagenes bajo la isometría I son de orientación diferente.*

Demostración.

Caso 1. Si la orientación de los triángulos es la misma, entonces $I^+_{a,b}$ una isometría directa tal que $I^+_{a,b}(z_k) = w_k$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} I_{a,b}(w_k) &= I_{a,b} \circ I^+_{a,b}(z_k) \\ &= (I_{a,b} \circ I^+_{a,b}) \circ (I^{-1}_{a,b} \circ I_{a,b})(z_k) \\ &= (I_{a,b} \circ I^+_{a,b} \circ I^{-1}_{a,b}) \circ (I_{a,b}(z_k)). \end{aligned}$$

Así, $I^+_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$, de acuerdo al teorema 2.13, $\mathfrak{M}_+$ es un subgrupo normal de $\mathfrak{M}$, por lo que $I_{a,b} \circ I^+_{a,b} \circ I^{-1}_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$. Luego, $I_{a,b}(z_k)$ es enviado en $I_{a_b}(w_k)$ mediante una isometría directa, para cada $K = 1, 2, 3$. Así, los triángulos con vertices $I_{a,b}(z_k)$ e $I_{a,b}(w_k)$ para cada $k = 1, 2, 3$, tienen la misma orientación.

Caso 2. Si se supone que $I_{a,b}(z_k)$, $I_{a,b}(w_k)$ tienen la misma orientación y que $I^+_{a,b}$, es una isometría directa, entonces $I_{a,b}(z_k) = I^+_{a,b} \circ I_{a,b}(w_k)$ y $z_k = I^{-1}_{a,b} \circ I^+_{a,b} \circ I_{a,b}(w_k)$, con $k = 1, 2, 3$. Usando un argumento similar al anterior caso se concluye que $I^{-1}_{a,b} \circ I^+_{a,b} \circ I_{a,b} \in \mathfrak{M}_+$, pero esto es una contradicción.

□

Se puede observar que el concepto de orientación está dado de manera intuitiva y no mediante una definición. Todo lo que se ha logrado es definir la orientación directa u opuesta de triángulos congruentes.

2.6. Traslaciones y rotaciones

En esta sección se mostrará una idea más general de las transformaciones en el plano complejo. Debe ser claro, por ahora que, el grupo $\mathfrak{M}$ de isometrías es de especial interés en esta tesis debido a que las isometrías preservan distancias. Más aún, toda figura es enviada mediante una isometría en una figura congruente a la dada. Por ejemplo, el segmento AB es enviado al segmento CD por algúna isometría, por tanto tienen la misma longidud, el triángulo $\bigtriangleup ABC$ es enviado al triángulo $\bigtriangleup DEF$ por medio de una isometría, o dicho de otra manera se puede decir que es "el mismo triángulo pero en diferentes lugares", formalmente dichos triángulos son congruentes. Así, la preservación de distancias está fuertemente conectado al estudio de la

geometría Euclidiana, y las isometrías pueden ser consideradas como el grupo de transformaciones que "pertenecen a la geometría Euclidiana", más aún, las similitudes envían cada figura en otra figura similar cuyas dimensiones son $|a|$, al igual que lo son para la preimagen.
Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida como $T(z) = az + b$, si $|a| > 1$, no se puede considerar una figura y su figura imagen (Se puede llamar a la imagen "una copia amplificada") como "lo mismo". Se estará de acuerdo en tratar una geometría sólo en su forma y no en el tamaño. Tal geometría es diferente de la geometría Euclidiana. Está caracterización en geometría esta dada por medio grupos de transformaciones, esto es la esencia del "programa Earlangen", propuesto en 1872 por el matemático aleman Felix Klein (1849 - 1925) en su discurso inaugural en la universidad de Earlangen.
En topología las transformaciónes pueden ser de naturaleza muy general, porque la única restricción impuesta en las transformaciones es que sean continuas, por ejemplo; el interior de todo círculo y todo triángulo, son considerados copias del mismo objeto.
En este trabajo se tratará sólo con la geometría líneal, en la cual las transformaciones envían rectas en rectas y planos en planos. Así, las transformaciones de la geometría líneal son colineaciones en el plano. Más adelante se estudiará otra geometría líneal y sus grupos.

Grupo de translaciones y rotaciones

Se iniciará con el estudio de las isometrías simples y de las traslaciones. Hasta este momento siempre era dada la preimagen de una transformación y se tenia que dar la imagen. Ahora se hará de manera inversa, por lo cual sería interesante saber si hay un elemento del grupo de transformaciones que mande un punto determinado a un punto de la imagen dado.
Si para cada punto z_0 existe una transformación en el grupo tal que el cero lo envié a z_0, entonces este grupo de transformaciones se llamará **transitivo**. Un requisito equivalente, aunque aparentemente más fuerte para un grupo de transformaciones transitivas, es el tener un punto arbitrario w que sea enviado en otro punto arbitrario w'. Por lo anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.23. *El grupo $\mathscr{T}$ de las traslaciones es transitivo y es un subgrupo normal de $\mathfrak{M}_+$.*

Demostración. Sea $T_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $T_b(z) = z + b$ en $\mathscr{T}$. Observar que $T_b \in \mathfrak{M}$ cuando $b = 1$, por lo que $\mathscr{T} \subseteq \mathfrak{M}$ y como $\mathscr{T}$ es un grupo

con la composición, se implica que $\mathscr{T} \leq \mathfrak{M}$. Por otro lado, la traslación $T_{z_0}(z) = z + z_0$ envía el cero a z_0, así queda probada la transitividad.
Ahora, si $I^+_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $I^+_{a,b}(z) = az + b$ con $|a| = 1$, T_d es una traslación arbitraria y $(I^+_{a,b})^{-1}(z) = a^{-1}(z-b)$, entonces $I^+_{a,b} \circ T_d \circ (I^+_{a,b})^{-1}(z) = a[a^{-1}(z-b)+d]+b = z+ad$ y dado que $I^+_{a,b} \circ T_d \circ (I^+_{a,b})^{-1} = T_{ad} \in \mathscr{T}$, para cada T_d, así, $I^+_{a,b} \circ T_d \circ (I^+_{a,b})^{-1} \subset \mathscr{T}$, en consecuencia $\mathscr{T} \lhd \mathfrak{M}_+$. □

Una definición más general de rotación se dará a continuación, no sin antedes decir que en la introducción previa las "rotaciones alrededor del cero" encajan en la nueva definición.
De manera intuitiva una rotación puede describirse como una isometría que deja de ser uno y solo un punto en el plano. Si queremos estudiar las rotaciones será útil considerar tales puntos sin cambios, por lo que se llamarán "puntos invariantes".

Definición 2.24. *Un punto z es llamado* ***punto invariante*** *de una transformación β, si $\beta(z) = z$. Una línea $\mathscr{L}$ es un* ***línea invariante****, si β transforma cada punto de $\mathscr{L}$ en un punto de $\mathscr{L}$.*

La definición de una línea invariante podría causar problemas, se aclarará que no se requiere que cada punto de $\mathscr{L}$ sea un punto invariante, en otras palabras, β no solo deja fijos a ún subconjunto de puntos de $\mathscr{L}$ si no más bien a todo $\mathscr{L}$, es decir, todo se conserva bajo β.
Las traslaciones que no son la identidad, no tienen puntos invariantes. Algebraicamente esto es equivalente al hecho de que; $z = z + b$ con $b \neq 0$, no tiene solución. Por lo tanto, es razonable iniciar con el estudio de puntos invariantes para las isometrías directas que no son traslaciones.

Teorema 2.25. *Sea $I^+_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una isometría definida como $I^+_{a,b}(z) = az + b$ con $|a| = 1$, $a \neq 1$ y con exactamente un punto invariante*

$$w = b(1-a)^{-1}. \tag{2.7}$$

Así, $I^+_{a,b}$ puede ser reescrito como;

$$I^+_{a,b}(z) = a(z-w) + w. \tag{2.8}$$

Si $R_w, R_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ son rotaciones definidas; $R_w(z) = z + w$, $R_a(z) = az$, entonces $I^+_{a,b} = R_w \circ R_a \circ R_w^{-1}$.

Demostración. Si w es un punto invariante, entonces se tiene que $w = aw + b$ de la ecuación (2.7). Luego, como la operación es reversible este es el único punto invariante. Ahora, substituyendo se tiene que $b = w(1 - a)$ en $az + b$, de lo cual se obtiene la transformación (2.8), pero esto puede ser expresado como el resultado de actuar consecutivamente las transformaciones antes mencionadas, donde $R_w^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $R_w^{-1}(z)aw$. Así, se tiene que $I_{a,b}^{+} = R_w \circ R_a \circ R_w^{-1}$. □

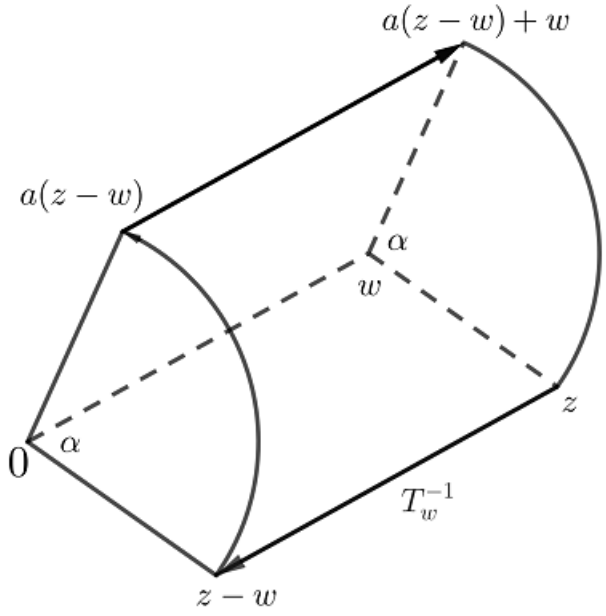

Imagen 2.10: Isometría directa

De lo antes mencionado, surge la siguiente pregunta ¿Qué significado tiene la geometría de una isometría directa que no es una traslación? para responder esta pregunta observe la imagen 2.10, se muestra las tres etapas usadas para la construcción de $\mathfrak{M}$. El significado geométrico de la construcción es una rotación alrededor de w por medio de un ángulo $\alpha = arg(a)$, por lo que es razonable usar el término de "rotación alrededor de w" con $arg(a)$, para toda isometría directa de la forma (2.8) que no es una traslación, véase la imagen 2.11 En particular, una rotación alrededor de w, donde π es una media vuelta al rededor de w, véase la imagen 2.12.

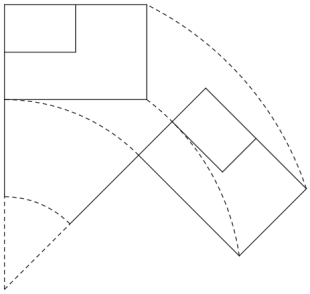

Imagen 2.11: Isometría directa

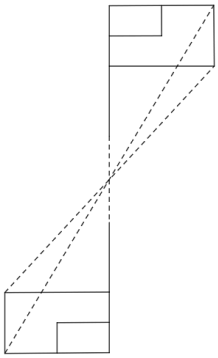

Imagen 2.12: Rotación alrededorde w

En este caso, $a = -1$ y $z \mapsto -z + 2w$, de hecho la definición de rotación se adapta a lo dicho antes en la introducción, "rotación alrededor del cero", de este modo se tendría $z \mapsto az$ con $|a| = 1$. El caso especial de las transformaciones es la identidad, la cual se representa como, $z \mapsto z$, dicha transformación 'puede considerarse como una rotación alrededor del cero con un ángulo de cero grados.

Otras formas de ver las isometrías directas son cuando $a \neq 1$, lo que implica una trasformación de coordenadas.

Si se mueve del origen al punto invariante w donde los nuevos ejes sean paralelos y de igual orientación a los ejes viejos, entonces en el nuevo sistema la isometría se convierte en $z \mapsto az$. Así, la geometría es más sencilla de apreciar en la imagen 2.10. Algebraicamente, la transformación 2.8 implica $I^+_{a,b}(z+w) = az+w$, y después las transformaciones de coordenadas giran por medio de $I_a(z) = az$. Se puede considerar esto como un estándar para toda isometría directa que no sea una traslación. Por lo cual se puede apreciar que toda isometría directa que no sea una traslación, en estos momentos se trata de una rotación alrededor de algún punto.

Una definición general del término canónico sería de la siguiente manera; sea S un conjunto y $G(S)$ un grupo de transformaciones bajo S. Supongamos que existe un subconjunto C de S con la propiedad de que $s \in S$, existe exactamente un elemento $c \in C$, para alguna transformación $T \in G(S)$ tal que $T(s) = c$, esto implica que c sea llamado forma canónica de s bajo $G(S)$. Un caso especial, donde $s := I^+_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la isometría directa definida por $I^+_{a,b}(z) = az + b$, c es la isometría $c := I_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida $I_a(z) = az$. Así, $T \circ (s(z)) = T(s(z)) = T(az + b) = I_a(az + b) = az$. En lo que sigue se estudiarán el conjunto de todas las rotaciones en un punto w.

Teorema 2.26. *El conjunto $\mathscr{R}_w$ de las rotaciones alrededor del punto w es un grupo, y los grupos $\mathscr{R}_w$ de todos los valores de w son isomorfos entre sí.*

Demostración. Por el teorema 2.25, se tiene que para toda $R \in \mathscr{R}_w$ se puede escribir, $R = R_w \circ R' \circ R_w^{-1}$, con $R' \in \mathscr{R}_0$. Sean $R = R_w \circ R' \circ R_w^{-1}$ y $R* = R_w \circ R'' \circ R_w^{-1}$ dos rotaciones alrededor de w.
Se probará que $\mathscr{R}_w$ es un grupo con la composición, para ello primero se mostrará que $\mathscr{R}_w$ es un subgrupo de $\mathfrak{M}$ por el teorema 1.4, solo basta exhibir que $R^{-1} \circ R* \in \mathscr{R}_w$. Así,

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R^* &= (R_w \circ R' \circ R_w^{-1})^{-1} \circ (R_w \circ R'' \circ R_w^{-1}) \\ &= R_w \circ (R')^{-1} \circ R^{-1} \circ R_w \circ R'' \circ R_w^{-1} \\ &= R_w \circ (R')^{-1} \circ (R^{-1} \circ R_w) \circ R'' \circ R_w^{-1} \\ &= R_w \circ (R'^{-1} \circ R'') \circ R_w^{-1}. \end{aligned}$$

Por el teorema 2.12 se tiene que, $\mathscr{R}_0$ es un grupo, así $(R')^{-1}R' = R''' \in \mathscr{R}_w$, esto es, $R^{-1}R* = R_w R''' R_w^{-1} \in \mathscr{R}_w$. Como todo subgrupo es un grupo, se concluye que $(\mathscr{R}_w, \circ)$ es un grupo.
Sea

$$\beta : \mathscr{R}_0 \longrightarrow \mathscr{R}_w,$$

definida como

$$R_0 \mapsto R_w \circ R_0 \circ R_w^{-1}.$$

Se afirma que β está bien definida, en efecto; si $R_0' = R_0''$, entonces $R_w \circ R_0' \circ R_w^{-1} = R_w \circ R_0'' \circ R_w^{-1}$. Se demostrará que β es biyectiva. Si $R_w \circ R_0' \circ R_w^{-1} = R_w \circ R_0'' \circ R_w^{-1}$, entonces $R_0' = R_0''$, esto porque $\mathscr{R}_w$ es un grupo. Si $R' = R_w \circ R \circ R_w^{-1}$ en $\mathscr{R}_w$, donde $R \in \mathscr{R}_0$, entonces $\beta(R) = R_w \circ R_0 \circ R_w^{-1} = R'$.
Por lo anterior se tiene que $R \circ R^*$ puede ser expresado como $R' \circ \beta \circ R'' \circ \beta$ o bien como $(R' \circ R'') \circ \beta$, con esto se prueba que β es un isomorfismo. Por lo tanto $\mathscr{R}_w \cong R_0$, y los $\mathscr{R}_w$'s son isomorfos a si mismos. □

Corolario 2.27. *Los grupos de rotación $\mathscr{R}_w$ forman un conjunto completo de subgrupos conjugados de $\mathscr{R}$ en el grupo de todas las isometrías.*

Demostración. Si $I_{a,b}^+, I_{a,b}^-, R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas como; $I_{a,b}^+(z) = az +$

$b, I^-_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$ y $R(z) = cz$, con $|a| = |c| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} I^+_{a,b} \circ R \circ (I^+_{a,b})^{-1}(z) &= I^+_{a,b} \circ R(a^{-1}(z-b)) \\ &= I^+_{a,b}(ca^{-1}(z-b)) \\ &= a(ca^{-1}(z-b)) + b \\ &= aa^{-1}c(z-b) + b \\ &= |a|c(z-b) + b \\ &= c(z-b) + b \\ &= R_b \circ R \circ R_b^{-1}(z), \end{aligned}$$

donde $R_b \in \mathscr{R}_w$. Así, $I^+_{a,b} \circ R \circ (I^+_{a,b})^{-1}(z) = R_b \circ R \circ R_b^{-1}(z)$. De manera análoga $I^-_{a,b} \circ R \circ (I^-_{a,b})^{-1}(z) = R_b \circ R' \circ R_b^{-1}$ con $R'(z) = \bar{c}z$, ambas transformaciones son elementos de $\mathscr{R}_b$, esto implica el resultado. □

El concepto de punto invariante el cual proporciona una caracterización geométrica de las traslaciones, que al comienzo de esta sección se definió de una manera puramente algebraica.

Teorema 2.28. *Una isometría en el plano es una traslación si y solo si no tiene puntos invariantes y la orientación se preserva.*

Demostración. Si la isometría $I^+_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ preserva orientación se trata de una isometría directa por lo que $I^+_{a,b}(z) = az + b$. Recordar que una isometría directa tiene un punto invariante w el cual satisface la ecuación (2.8), a no ser que $a = 1$. Así, en la ausencia de puntos invariantes será necesario que $a = 1$, y $I^+_{a,b}$ envíe z en $z + b$, que es una traslación.
De manera recíproca, si $I^+_{a,b}(z) = z + b$, entonces es un traslación, más aún, es una isometría directa así, $I^+_{a,b}$ no tiene puntos invariantes. □

2.7. Reflexión

En esta sección se tratarán las isometrías directas con respecto a sus puntos invariantes.
Se iniciará con el caso especial de isometrías opuestas del tipo $I^-_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $I^-_{a,b}(z) = a\bar{z}$ con $|a| = 1$, donde un punto invariante de esta transformación es w el cual satisface $w = a\bar{w}$, de ahí que $w = 0$ ó $w\bar{w}^{-1} = a$. Se hará una comparación de los argumentos en ambas ecuaciones.

Si α es el argumento de w, entonces el argumento de $\bar{w}$ es $-\alpha$, por lo cual α es el argumento de $\bar{w}^{-1}$, de ahí que $arg(w\bar{w}^{-1}) = \alpha + \alpha = 2\alpha$ y $2\alpha = arg(a)$, se concluye que $\alpha = \frac{arg(a)}{2}$. Así, todos los puntos cuyos argumentos sean $\frac{arg(a)}{2}$, serán el punto cero o puntos invariantes, esto debido a que el procedimiento que produjo este resultado puede ser reversible, por consiguiente estos son puntos invariantes. Más aún, todos ellos se encuentran en la línea recta que pasa por el cero formando un ángulo de $\frac{arg(a)}{2}$ con respecto al eje real, y todos los puntos en la línea son invariantes.
De lo mencionado previamente se tiene que para todo punto z y su punto simétrico, puede tomarse la isometría $I_a^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definada por $I_a^-(z) = a\bar{z}$ en un punto z' simétricamente a z con respecto a la línea invariante.
Una ***línea de reflexión*** se define como una isometría que deja invariante a todo punto de una línea fija $\mathscr{L}$, pero no deja fijo a los puntos que no pertenecen a la línea. De esta manera se entenderán a las líneas de reflexión como el reflejo de la línea $\mathscr{L}$.
Una reflexión óptica a lo largo de $\mathscr{L}$ en un espejo con ambos lados planteados, producirá el mismo resultado, véase la imagen 2.13.

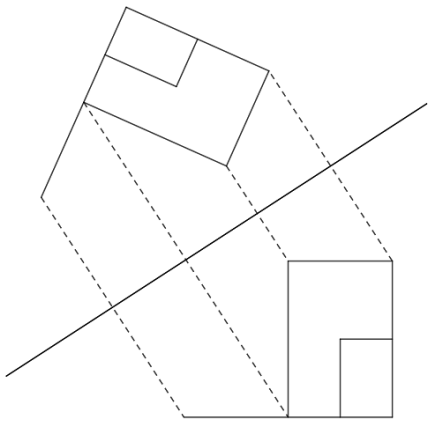

Imagen 2.13: Línea de reflexión

Observe que se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 2.29. *La isometría $F_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $F_a(z) = a\bar{z}$ con $|a| = 1$, es una reflexión en la línea recta que pasa por el cero, incluido el eje real positivo con un ángulo $\frac{arg(a)}{2}$.*

Ahora, se trabajará con transformaciones más generales, que serán de la forma $I_{a,b}^-(z) = a\bar{z} + b$ con $|a| = 1$. La pregunta natural es, ¿este tipo de

transformaciones tiene puntos invariantes? Para responder a esta pregunta, se debe de recordar que para un punto invariante w se tiene:

$$w = a\bar{w} + b. \tag{2.9}$$

Aplicando el conjugado se tiene

$$\bar{w} = \bar{a}w + \bar{b}, \tag{2.10}$$

luego sustituyendo la ecuación (2.10) en (2.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} w &= a(\bar{a}w + \bar{b}) + b \\ &= a\bar{a}w + a\bar{b} + b \\ &= |a|^2 w + a\bar{b} + b \\ &= w + a\bar{b} + b. \end{aligned}$$

De este modo se tiene que $w = w + a\bar{b} + b$, que implica

$$a\bar{b} + b = 0, \tag{2.11}$$

que es condición necesaria para la existencia de un punto invariante de $I^{-}_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$. La ecuación (2.11) es condición suficiente para que $w = \frac{b}{2}$ sea un punto invariante, en efecto,

$$a\bar{w} + b = \frac{a\bar{b}}{2} + b = \frac{a\bar{b} + b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} = w.$$

Ahora, supongamos que $I^{-}_{a,b}(z) = a\bar{z}+b$ con $|a| = 1$, tiene un punto invariante w por lo que $w = a\bar{w} + b$.
Si z' es la imagen de z, entonces $z' = a\bar{z} + b$, notar que $z' - w = a(\bar{z} - \bar{w}) = a(z \bar{-} w)$, por lo que $I^{-}_{a,b}(z) = a(\overline{z - w}) + w$, p

$$I^{-}_{a,b} = R_w \circ F_a \circ R_w^{-1}. \tag{2.12}$$

De lo anterior surge la siguiente pregunta, ¿Cuáles son los puntos invariantes de $I^{-}_{a,b}$? Para responder esta pregunta se hará el siguiente análisis.
Si $R_w \circ F_a \circ R_w^{-1}(z) = z$, entonces $F_a \circ R_w^{-1}(z) = T_w^{-1}(z)$ y $T_w^{-1}(z) = z - w$ es un punto invariante de F_a, pero de acuerdo al teorema 2.29, $z - w$ es invariante bajo F_a si y solo si se encuentra en la línea invariante $\mathscr{L}$. Si $v = z - w$, entonces se pueden observar que todos los puntos invariantes de la igualdad (2.12), son los puntos de la forma $v + w$, donde v asume los valores de todos

los puntos en $\mathscr{L}$, y w es un punto fijo invariante de $I^-_{a,b}$. Por el teorema 2.3 los puntos $v + w$ también están en una línea recta, e $I^-_{a,b}$ tiene que ser el reflejo de la línea.

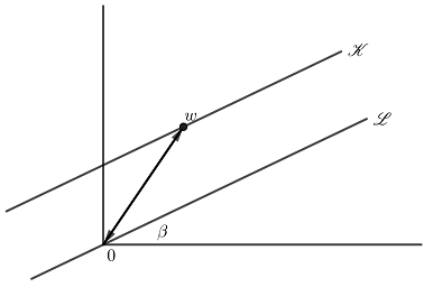

Imagen 2.14: Reflexión F sobre una línea $\mathscr{K}$

Por otro lado la imagen 2.14, es una reflexión F sobre una línea $\mathscr{K}$ dada, y sean w un punto en $\mathscr{K}$ y F_a una reflexión sobre la línea $\mathscr{L}$ la cual pasa por el cero y es paralela a $\mathscr{K}$. Notar que F_a existe debido a que si β es el ángulo entre $\mathscr{L}$ y el eje real positivo, entonces existe un número complejo $a = \cos 2\beta + i \sin 2\beta$ que satisface la condición $\beta = \frac{arg(a)}{2}$ y $|a| = 1$. Por lo que de la ecuación (2.12), $I^-_{a,b}$ deja invariante a todos los puntos de $\mathscr{K}$. Por el teorema 2.6, existen dos transformaciones isométricas tales que a cada punto de $\mathscr{K}$ es el mismo. Una de estas isometrías se trata de la identidad. Por otro lado, la ecuación (2.12) no es la identidad por lo que está determinada de manera única y como la isometría deja los puntos en $\mathscr{K}$, estos son todos los puntos invariantes. De esta manera se concluye que F es la ecuación (2.12), así el siguiente teorema está demostrado.

Teorema 2.30. *Una isometría opuesta $I^-_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $I^-_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$, tiene puntos invariantes si y solo si la ecuación (2.11) se cumple. Si una isometría opuesta tiene un punto invariante, es una reflexión en alguna recta y toda reflexión en una recta es una isometría opuesta.*

Se puede desarrollar la forma canónica utilizando una transformación de coordenadas adecuadas.

Si $I^-_{a,b}(z)a\bar{z}+b$ con $|a|=1$ y la ecuación (2.11) se cumple, entonces

$$\begin{aligned} I^-_{a,b}(z\sqrt{a}+\frac{b}{2}) = a\left(\overline{z\sqrt{a}+\frac{b}{2}}\right)+b &= a\bar{z}\sqrt{a}+\frac{a\bar{b}}{2}+b \\ &= \bar{z}\sqrt{a^3}+\frac{a\bar{b}+b}{2}+\frac{b}{2} \\ &= \bar{z}\sqrt{a^2}\sqrt{a}+\frac{b}{2} \\ &= \bar{z}\sqrt{a}+\frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Bajo la transformación de coordenadas $I^-_{a,b}(z) = \bar{z}\sqrt{a}+\frac{b}{2}$ se tiene que $z\mapsto\bar{z}$, pero tambien se puede considerar la forma canónica, la cual se define como $I^-_{1,0}(z)=\bar{z}$, para cada isometría opuesta que tenga puntos invariantes. Geométricamente es un reflejo de la línea cuyo espejo es el eje real.

Isometrías que son su propia inversa

Las **líneas de reflexión** tienen la propiedad de ser **involución**, es decir, que su inversa es ella mismas, lo que significa que su periodo es dos, es decir, para cada transformación involución $\phi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que sea su propia inversa, es decir, $\phi^2=Id$. Geométricamente los puntos se intercambian por V, o de manera similar $\phi(z)=z'$, si y solo si, $\phi(z')=z$. Con todo esto la pregunta natural sería, ¿las reflexiones de línea son las únicas isometrías con esta propiedad? Esto no es necesariamente cierto, puesto que hay un tipo de isometrías con esta propiedad que de alguna manera también merecen el nombre de "reflexión". Se trata del ***punto de reflexión*** que ya se ha mencionado con el nombre de media vuelta. Una media vuelta de w es una reflexión en el punto w. Una línea de reflexión deja invariante a una línea y todos los puntos sobre ella. Por consiguiente, algo análogo a esta propiedad sucedería si el punto de reflexión dejara un punto invariante y todas las líneas que inciden en el.
En el teorema que se enuncia a continuación se justifica el nombre alternativo para la media vuelta.

Teorema 2.31. *Una media vuelta respecto a un punto w, deja invariante a todas las líneas que pasan por w.*

Demostración. Una rotación respecto a un punto w por medio de una transformación π es invariante, porque una línea a través de w son enviados

en puntos de la misma línea, sin embargo una prueba analítica puede estar dada como las distancias entre los puntos z y w es decir $|z-w|$ y dado que es una media vuelta se trata de una isometría, I donde la imagen del punto $I(z') = -z+2w$ satisface $|z'-w| = |z-w|$. Por otro lado, $|z-z'| = |z+z-2w| = 2|z-w| = |z-w|+|z'-w|$.
Por lo tanto, para el triángulo cuyos vertices son z, z' y w, un lado es igual a la suma de los otros dos lados restantes. Esto solo puede suceder si los tres vértices son colineales. □

Teorema 2.32. *Toda isometría involución es una reflexión en una recta o reflexión en un punto (media vuelta) o la identidad y de manera inversa, estas reflexiones son isometrías involución.*

Demostración. Para una isometría directa involución $I_{\mathscr{L}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por; $I_{\mathscr{L}}(z) = az+b$. Si $z = a(az+b)+b = a^2z+ab+b$, entonces $a^2 = 1$ y $ab+b = 0$, lo que implica los siguientes casos;

Caso. 1 Si $a = 1$ y $b = 0$, se trata de la transformación identidad.

Caso. 2 Si $a = -1$ y b es arbitrario, se trata de una línea de reflexión o un punto de reflexión.

En consecuencia, se tiene que tanto la identidad como un punto de reflexión son isometrías. Ahora, para una isometría opuesta dada por;

$$z = a(\overline{a\bar{z}+b})+b = a(\bar{a}z+\bar{b})+b = a\bar{a}z+a\bar{b}+b,$$

por lo que, la ecuación (2.11) se cumple, luego por el teorema 2.30 se sigue que la transformación es una línea de reflexión.
Para el recíproco se tienen, los siguientes casos;

Caso. 1 Si la transformación es la identidad, entonces $Id \circ Id(z) = Id(z)$.

Caso. 2 Si es una línea de reflexión o un punto de reflexión, es decir, $I_{\mathscr{L}}(z) = -z+b$, entonces $I_{\mathscr{L}} \circ I_{\mathscr{L}}(z) = I_{\mathscr{L}}(-z+b) = z = Id(z)$

Por lo tanto son isometrías involución. □

Isometrías generadas por reflexiones

En estos momentos se está de acuerdo con la transformación que resulta de la línea consecutivamente pre formada de la reflexión, para ello primero se considerarán dos reflexiones.

Teorema 2.33. *La composicón de dos reflexiones en las rectas $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ es;*

(i) Una traslación si solo si $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ son paralelas.

(ii) Una rotación al rededor de un punto común de $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ si y solo si éstas se intersecan.

Demostración. Sean $F_1, F_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por; $F_1(z) = a\bar{z} + b$ con $|a| = 1$, una reflexión con respecto a $\mathscr{K}$ y $F_2(z) = c\bar{z} + d$ con $|c| = 1$, una reflexión con respecto a $\mathscr{L}$ y

$$c\bar{d} + d = 0. \tag{2.13}$$

Haciendo la composición de las reflexiones se obtiene,

$$F_2 \circ F_1(z) = c(\overline{a\bar{z} + b}) + d = c(\bar{a}z + \bar{b}) + d = \bar{a}cz + c\bar{b} + d.$$

En consecuencia se consideran dos casos;

Caso 1. Si $\bar{a}c = 1$, entonces $F_2 \circ F_1(z) = z + \bar{b}c + d$ es una traslación, más aún, $\bar{a}c = 1$, se sigue que $a\bar{a}c = a$, entonces $|a|^2 c = a$, por lo que $c = a$, esto implica que $\frac{arg(c)}{2} = \frac{arg(a)}{2}$, así, $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ tienen la misma pendiente con respecto a el eje x positivo. Por lo tanto, $\mathscr{K} || \mathscr{L}$.

Caso 2. Si $\bar{a}c \neq 1$, entonces $F_2 \circ F_1(z) = \bar{a}cz + (\bar{b}c + d)$ se trata de una rotación alrededor del punto $w = \frac{\bar{b}c+d}{1-\bar{a}c}$, por el teorema 2.8.

Para la necesidad.
Si $\mathscr{K} || \mathscr{L}$ se implica que $a = c$ y $a\bar{c} = 1$. Ahora, se probará que w es el punto de intersección de $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ ambas reflexiones dejan a w invariante.
Para la reflexión en $\mathscr{K}$ se tiene;

$$\begin{aligned} F'(w) = a\bar{w} + b &= a(b\bar{c} + \bar{d})(1 - a\bar{c} + b)^{-1} \\ &= \frac{ab\bar{c} + a\bar{d}}{1 - a\bar{c}} + b \\ &= \frac{ab\bar{c} + a\bar{d} + b - a\bar{c}b}{1 - a\bar{c}} \\ &= \frac{a\bar{d} + b}{1 - a\bar{c}} \\ &= \frac{a\bar{d} + b}{1 - a\bar{c}} \left(\frac{\bar{a}c}{\bar{a}c}\right) \\ &= \frac{ac\bar{a}\bar{d} + \bar{a}bc}{\bar{a}c - a\bar{a}c\bar{c}}. \end{aligned}$$

Recordando que $a\bar{a} = c\bar{c} = 1$, porlo cual;

$$F'(w) = \frac{c\bar{d} + \bar{a}bc}{\bar{a}c - 1}.$$

Luego $c\bar{d} + \bar{a}bc = c\bar{d} + d - d + \bar{a}bc = (c\bar{d} + d) - d + \bar{a}bc$ y de la ecuación (2.13) se sigue que $\bar{a}bc - d = \bar{a}bc + bc - bc - d = (\bar{a}b + b)c - bc - d = -bc - d$ y por la ecuación (2.11), finalmente se tiene que;

$$F'(w) = \frac{\bar{b}c + d}{1 - \bar{a}c}.$$

Por lo que, w esta en la línea $\mathscr{K}$.
La reflexión F''en $\mathscr{L}$ envia w en $c\bar{w} + d$, luego sustituyendo w se tiene;
$c\frac{(b\bar{c}+\bar{d})}{1-a\bar{c}} + d = \frac{c(b\bar{c}+\bar{d})+d-a\bar{c}d}{1-a\bar{c}} = \frac{b+c\bar{d}+d-a\bar{c}d}{1-a\bar{c}}$, de la ecuación (2.13), se sigue;

$$\begin{aligned}
\frac{b - a\bar{c}d}{1 - a\bar{c}} &= \frac{b - a\bar{c}d}{1 - a\bar{c}}\left(\frac{\bar{a}c}{\bar{a}c}\right) \\
&= \frac{b\bar{a}c - a\bar{c}\bar{a}cd}{\bar{a}c - a\bar{c}\bar{a}c} \\
&= \frac{\bar{a}bc - d}{\bar{a}c - 1} \\
&= \frac{d - \bar{a}bc}{1 - \bar{a}c} \\
&= \frac{d - \bar{a}bc - \bar{b}c + \bar{b}c}{1 - \bar{a}c} \\
&= \frac{d - \overline{a\bar{b}\bar{c}} - \overline{b\bar{c}} + \bar{b}c}{1 - \bar{a}c} \\
&= \frac{d - \overline{a\bar{b}\bar{c} - b\bar{c}} + \bar{b}c}{1 - \bar{a}c} \\
&= \frac{d - \overline{((a\bar{b} + b)\bar{c})} + \bar{b}c}{1 - \bar{a}c}.
\end{aligned}$$

Luego, por la ecuación (2.11) se concluye que; $F'' \circ F'(w) = \frac{\bar{b}c+d}{1-\bar{a}c}$.
Por lo que w es invariante bajo las reflexiones en $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$. Más aún, w es el punto de intersección de $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$. □

Dentro de las clasificaciones de isometrías se encuentran las traslaciones con $a = 1$ y las rotaciones con $a \neq 1$ en los casos directos, y en líneas de

reflexión con puntos invariantes en los casos opuestos. Por otro lado, el caso de isometrías opuestas sin puntos invariantes que en estos casos, $I^{-}_{a,b}(z) = a\bar{z}+b$ y $I^{-}_{a,b}(z) = F_a \circ T_b(z)$ es una traslación seguida de un línea de reflexión. A tal isometría sin puntos invariantes es llamada ***reflexión deslizante***. Geométricamente se puede obtener la siguiente caracterización.

Teorema 2.34. *Una reflexión sobre una línea seguida de una traslación T_b, resulta una reflexión deslizante, siempre que el reflejo de la línea $\mathscr{L}$ no sea perpendicular a la posición del vector b. Recíprocamente, cada reflexión deslizante es la composición de una traslación paralela a $\mathscr{L}$, véase la imagen 2.15.*

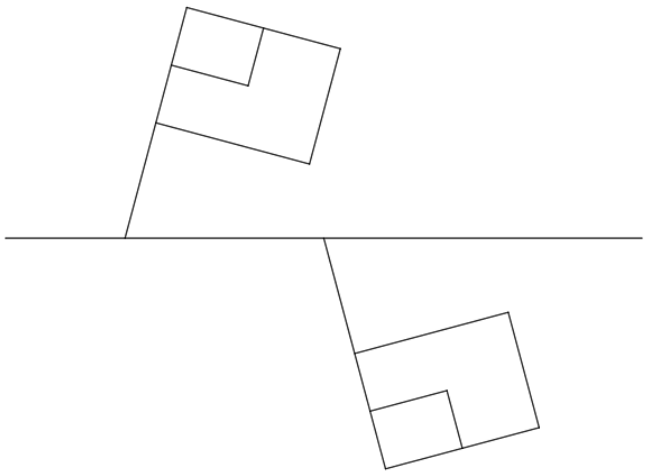

Imagen 2.15: Reflexión deslizante

Demostración. Primero se probará la suficiencia. Si $I^{-}_{a,b}(z) = F_a \circ T_b(z)$ no es una reflexión, entonces $I^{-}_{a,b}$ tiene un punto invariante por lo que la ecuación 2.11 es valida. De ahí que $a\bar{b} = -b$, por lo que el $arg(a\bar{b}) = arg(-b)$, esto se reescribe de la siguiente manera, $arg(a) - arg(b) = arg(b) \pm \pi$ que es equivalente a $\frac{arg(a)}{2} = arg(b) \pm \frac{\pi}{2}$. Por el teorema 2.29 se sigue que $\frac{arg(a)}{2}$ es el ángulo entre el eje real positivo y $\mathscr{L}$, mientras que el $arg(b)$ es el ángulo entre el lado positivo del eje real y la posición del vector b. Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es perpendicular a su vector de posición.
Para la necesidad. La reflexión de deslizamiento $D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$D(z) = a\bar{z} + b = a(\bar{z} - \frac{\bar{b}}{2}) + \frac{b}{2} + \frac{a\bar{b}+b}{2}$, luego

$$\begin{aligned} T_d \circ T_{\frac{b}{2}} \circ F_a \circ T_{\frac{b}{2}}^{-1}(z) &= T_d \circ T_{\frac{b}{2}} \circ F_a \left(z - \frac{b}{2}\right) \\ &= T_d \circ T_{\frac{b}{2}}(a\overline{\left(z - \frac{b}{2}\right)}) \\ &= T_d T_{\frac{b}{2}}(a\left(\bar{z} - \frac{\bar{b}}{2}\right)) \\ &= T_d(a\left(\bar{z} - \frac{\bar{b}}{2}\right) + \frac{b}{2}) \\ &= a\left(\bar{z} - \frac{\bar{b}}{2}\right) + \frac{b}{2} + d, \end{aligned}$$

con

$$d = \frac{a\bar{b} + b}{2} \neq 0.$$

Por lo cual $T_d \circ T_{\frac{b}{2}} \circ F_a \circ T_{\frac{b}{2}}^{-1}(z) = D(z)$. Ahora, solo resta probar que $2arg(d) = arg(a)$, para ello,

$$\begin{aligned} (\frac{d}{|d|})^2 &= \frac{d^2}{d\bar{d}} \\ &= \frac{a\bar{b} + b}{\bar{a}b + \bar{b}} \\ &= a\left(\frac{\frac{a\bar{b}+b}{a}}{\bar{a}b + \bar{b}}\right) \\ &= a\left(\frac{a\bar{b} + b}{|a|b + a\bar{b}}\right) \\ &= a\left(\frac{a\bar{b} + b}{b + a\bar{b}}\right). \end{aligned}$$

De ahí que $arg(\frac{d}{|d|})^2 = 2arg(\frac{d}{|d|}) = 2arg(d) = arg(a)$. Por lo tanto, queda demostrado el teorema. □

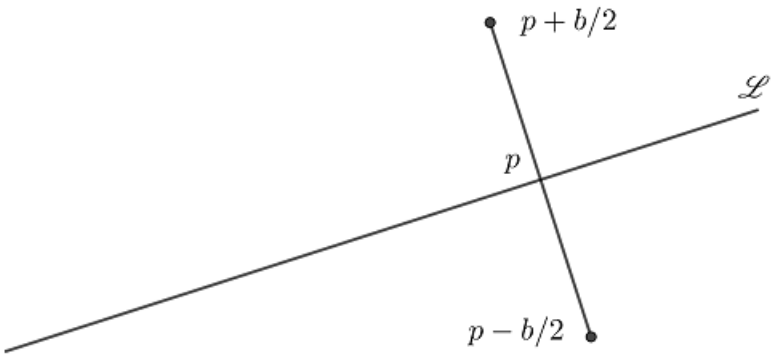

Imagen 2.16: Línea perpendicular a la vecto $\vec{b}$

Una simple consideración geométrica, véase la imagen 2.16 sería ver que sucede en el caso cuando $\mathscr{L}$ es perpendicular al vector b.
Si p es cualquier otro punto en $\mathscr{L}$, entonces $p + \frac{b}{2}$ es invariante ya que es enviada a $p - \frac{b}{2}$ por la reflexión en $\mathscr{L}$ y de nuevo en $p + \frac{b}{2}$ por T_b. Por lo que estas transformaciones tienen una línea de puntos invariantes y es un reflejo de la línea en lugar de un reflejo del plano.

Teorema 2.35. *La composición de tres reflexiones en rectas es en sí mismo una reflexión en una recta o una reflexión deslizante.*

Demostración. Sean tres reflexiones dadas $F_j : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas por $F_j(z) = a_j\bar{z} + b_j$ con $j = 1, 2, 3$,entonces la composición de las tres reflexiones se define como; $F_3 \circ F_2 \circ F_1(z) = a_3(\overline{a_2(\overline{a_1\bar{z} + b_1}) + b_2}) + b_3 = a_1\bar{a_2}a_3\bar{z} + \bar{a_2}a_3b_1 + a_3\bar{b_2} + b_3 = a_4\bar{z} + b_4$, con $a_4 = a_3\bar{a_2}a_1$ y $b_4 = a_3\bar{a_2}b_1 + a_3\bar{b} + b_3$, así, $F_3 \circ F_2 \circ F_1(z) = a_4\bar{z} + b_4$, por lo que $F_3 \circ F_2 \circ F_1$ pertenece al grupo de isométrias opuestas.
Si $F_3 \circ F_2 \circ F_1$ deja invariante a todo punto de una línea fija $\mathscr{L}$,pero no deja fijos a los puntos que no pertenecen a la línea, entonces se trata de una reflexión en una recta.
Si $F_3 \circ F_2 \circ F_1$ no tiene puntos invariantes se trata de una reflexión deslizante. □

El siguiente teorema ayuda a tener una idea más clara sobre los puntos invariantes de las isometrías.

Teorema 2.36. *Si las isometrías tienen un punto invariante en común, entonces estas forman un grupo.*

Demostración. Se demostrará que las isometrías con un punto invariante son subgrupos de las isometrías. El elemento neutro en el grupo de isometrías es $Id(z_0) = z_0$, por lo que Id es una isometría con un el punto z_0 invariante, luego la inversa de una isometría I tiene los mismos puntos invariantes que I ya que si z_0 no es invariante bajo I^{-1} y $I(z_0) = z_0$, entonces $I^{-1}(I(z_0)) = I^{-1}(z_0)$ y $I^{-1}(I(z_0)) = Id(z_0) = z_0$, como no es invariante sucede; $I^{-1}(z_0) \neq z_0$, por lo anterior se tiene $I^{-1}(z_0) = z_0$, pero esto no puede ocurrir.
Si I y I' son dos isometrias que dejan invariante a w, entonces $I' \circ I(w) = I'(w) = w$. Por lo tanto las isometrías con un punto invariante es un subgrupo de las isometrías, recordar que todo subgrupo es un grupo, se tiene el resultado. □

Existe una interesante relación entre perpendicularidad y reflexiones, esta relación se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.37. *Dos líneas distintas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{K}$ son perpendiculares entre sí, si y solo si la composición de las reflexiones con respecto a $\mathscr{L}$ y $\mathscr{K}$ son involución y no es la identidad(Imagenes 2.17 y 2.18).*

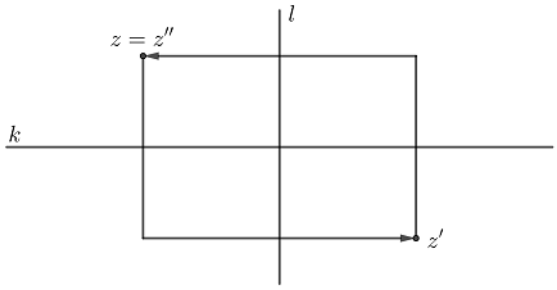

Imagen 2.17: Involución

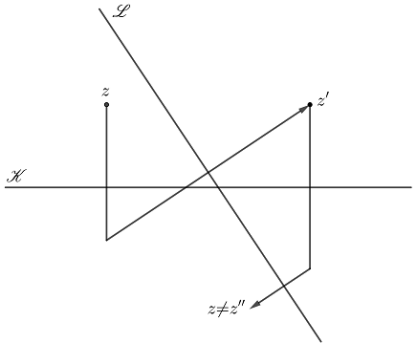

Imagen 2.18: Involución

Demostración. Supongase que $\mathscr{L} \perp \mathscr{K}$ y sea w el punto de intersección, por lo cual la composición se es involución $I_{a,b} = T_w \circ F_c \circ T_w^{-1} \circ T_w \circ F_a \circ T_w^{-1}$, donde $T_w \circ F_a \circ T_w^{-1}$ es la reflexión en $\mathscr{K}$ y $T_w \circ F_c \circ T_w^{-1}$, es la reflexión en $\mathscr{L}$. Por consiguiente, $I_{a,b} = T_w \circ F_c \circ F_a \circ T_w^{-1}(z) = c\overline{(a(z-w))} + w = \bar{a}cz - \bar{a}cw + w$. Por otro lado, $\mathscr{L} \perp \mathscr{K}$ implica que $\frac{arg(a)}{2} - \frac{arg(c)}{2} = \pm\frac{\pi}{2}$, esto es equivalente a $arg(a) - arg(c) = arg(\frac{a}{c}) = \pm\pi$, en consecuencia $\frac{a}{c} = -1$. Luego sustituyendo

$a = -c$ se tiene;

$$\begin{aligned} I_{a,b}(z) = \bar{a}(-a)z - \bar{a}(-a)w + w &= -(a\bar{a})z + \bar{a}aw + w \\ &= -|a|^2 z + |a|^2 w + w \\ &= -z + w + w = -z + 2w. \end{aligned}$$

Como $I_{a,b}$ es una isometría directa involución e $I_{a,b} \neq Id$ solo puede tener un punto de reflexión, por ello $I_{a,b}(z) = -z + 2w$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= -1 \\ \frac{a}{c}\left(\frac{\bar{c}}{c}\right) &= -1 \\ \frac{a\bar{c}}{|c|} &= -1 \\ a\bar{c} &= -1. \end{aligned}$$

Si $arg(c) - arg(a) = Id \pm \pi$, entonces $\frac{arg(c)}{2} - \frac{arg(a)}{2} = \pm\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \perp \mathscr{L}$. □

Otro concepto que relacionas las reflexiones son la incidencia de puntos y una línea la cual se refiere como; "el punto se encuentra en la línea " o "la línea pasa a través del punto."

Teorema 2.38. *La composición de la reflexión en un punto w y la reflexión con respecto a la línea $\mathscr{L}$, es involución si solo si w pertenece a $\mathscr{L}$, véanse las imagenes 2.19 y 2.20.*

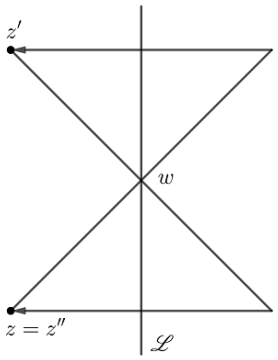

Imagen 2.19: Involución con w en $\mathscr{L}$

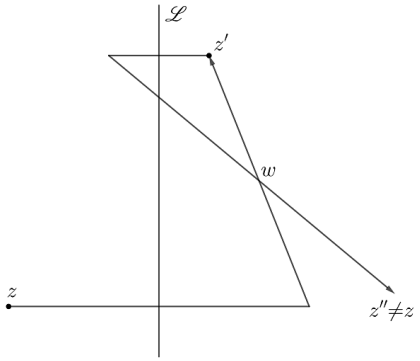

Imagen 2.20: Involución con $w \notin \mathscr{L}$

Demostración. Sea la reflexión $I_{\mathscr{L}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con respecto a la línea $\mathscr{L}$ definida por; $I_{\mathscr{L}}(z) = a\bar{z} + b$, con la ecuación (2.11).
La reflexión en el punto w es $F_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, que está definida por $F_b(z) = -z + 2w$, de ahí que $I_{a,b}(z) := I_{\mathscr{L}} \circ F_b(z) = I_{\mathscr{L}}(-z + 2w) = a\overline{(-z - 2w)} + b = -a\bar{z} + 2a\bar{w} + b$. Por lo que $w \in \mathscr{L}$
Si $w \in \mathscr{L}$, entonces w es invariante bajo $I_{\mathscr{L}}$, así, $w = a\bar{w} + b$, lo que implica $\bar{w} = \frac{w-a}{a}$. Luego, sustituyendo $\bar{w}$ en $I_{a,b}(z)$ se tiene; $I_{a,b}(z) = -a\bar{z} + 2a\left(\frac{w-b}{a}\right) + b = -a\bar{z} + 2w - b$, luego

$$\begin{aligned}
I^2_{a,b}(z) &= I_{a,b}(I_{a,b}(z)) \\
&= I_{a,b}(-a\bar{z} + 2w - b) \\
&= -a\overline{(-a\bar{z} + 2w - b)} + 2w + b \\
&= |a|z - 2a\bar{w} + a\bar{b} + 2w - b \\
&= z - 2a\bar{w} - 2b + 2b - b + a\bar{b} + 2w \\
&= z - (2a\bar{w} + 2b) + (b + a\bar{b}) + 2w \\
&= z - \left(2a\left(\frac{w-b}{a}\right) + 2b\right) + 2w \\
&= z \\
&= Id(z).
\end{aligned}$$

Así, $I_{a,b}$ es una involución.
Se asumirá que $I^2_{a,b} = Id$, de ahí que $I_{a,b}(z) = -a\bar{z} + 2a\bar{w} + b$ es una isometría opuesta involución, por lo que tiene un línea de reflexión y un punto invariante, esto último se da por la condición de la ecuación (2.11).

$$\begin{aligned}
-a\overline{(2a\bar{w} + b)} + 2a\bar{w} + b &= 0 \\
-2|a|w - a\bar{b} - 2a\bar{w} + b &= 0 \\
-2w - (a\bar{b} + b) + 2a\bar{w} + 2b &= 0 \\
-2w + 2a\bar{w} + 2b &= 0 \\
w &= a\bar{w} + b.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, w es invariante bajo $I_{\mathscr{L}}$ y por lo tanto w pertenece a la línea $\mathscr{L}$. □

Los dos últimos teoremas muestran la importancia de expresar las relaciones en términos de reflexiones. Esto es un intento razonable de una construcción de toda la geometría basada en los conceptos de reflexion.

De hecho, esta ha sido archivada por la escuela de geómetras, el principal de ellos fue un matemático Danes J.T. Hjelmslev(1873-1950). Para más información sobre este tema, véase F. Bachmam, Aufbauder Geometric aus dem spiegelungsbegriff.Berlin: Springer Verlang, 1959.
El siguiente teorema muestra de manera más clara, el significado fundamental de las reflexiones.

Teorema 2.39. *Toda isometría es la composición de a lo más tres reflexiones en rectas. Si la isometría tiene un punto invariante, entonces a lo más dos reflexiones en rectas son suficientes.*

Demostración. Si la isometría es directa, se trata de una traslación $T_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o una rotación $R_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $R_a = T_w \circ R'_a \circ T_w$. Respecto a T_b, $b \neq 0$ dado que la identidad es un caso sencillo puede ser omitida, luego existe un único $a \in \mathbb{C}$ tal que satisface la ecuación (2.11). Sean F_a y $T_{\frac{b}{2}} \circ F_a \circ T_{\frac{b}{2}}^{-1}$ dos reflexiones tal que;

$$\begin{aligned} T_{\frac{b}{2}} \circ F_a \circ T_{\frac{b}{2}}^{-1} \circ F_a(z) &= a\left(\overline{a\bar{z} - \frac{b}{2}}\right) + \frac{b}{2} \\ &= |a|z - \left(\frac{a\bar{b} - b}{2}\right) \\ &= z + b \\ &= T_b(z). \end{aligned}$$

Ahora, para el caso de la rotación se tiene que; $T_w \circ R'_a \circ T_w^{-1} = (T_w \circ F_a \circ T_w^{-1}) \circ (T_w \circ F_1 \circ T_w^{-1})$ es la composición de dos líneas de reflexión o una reflexión deslizante.
Una reflexión deslizante es la composición de una traslación y una línea de reflexión, pero la traslación es la composición de dos reflexiones. Por lo tanto, la reflexión deslizante se puede escribir como la composición de a lo más tres reflexiones.
Si la isometría tiene un punto invariante, la isometria es una rotación o una línea de reflexión que es la composición de a lo más dos reflexiones. □

Nota: La condición no es necesaria; las traslaciones son composición de dos reflexiones, pero no tienen puntos invariantes.

Capítulo 3

Reflexiones en rectas y circunferencias en el plano euclidiano.

Las reflexiones son transformaciones geométricas elementales, pero con consecuencias importantes ya que son necesarias para el estudio geométrico de las transformaciones de Möbius. Se muestra más adelante que estas funciones forma un grupo de transformaciones definidas en el plano euclidiano, donde cada una ellas está generada por composiciones finitas de reflexiones con respecto de líneas o circunferencias.
Se estudiará con detalle la geometría y se introducirán las primeras nociones para estudiar la dinámica de las transformaciones de Möbius elementales a saber, traslaciones, rotaciones y homotecias. Estas transformaciones serán clasificadas como parabólicas, elípticas e hiperbólicas en la notación clásica, las cuales se definirán posteriormente.

3.1. Reflexiones y el grupo de Möbius

Se seguira denotando con $\mathscr{L}$ a una línea recta cualquiera del plano euclideano, pero solo nos referiremos a $\mathscr{L}$ como recta, $\mathscr{C}$ a una circunferencia con centro en un punto $O \in \mathbb{R}^2$ con radio $r > 0$ y con AB se denotará el segmento de A a B.
En la sección previa se estudiarón las reflexiones con respecto a un línea en el plano complejo, por lo que en este caso solo se mencionarán algunas propiedades de estas reflexiones pero para el plano euclideano. De ahí que una **reflexión** con respecto de una recta $\mathscr{L}$ es una transformación

$R_{\mathscr{L}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por; $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$ tal que el segmento PP' es ortogonal a la línea $\mathscr{L}$ y es bisecado por esta línea, es decir $\mathscr{L}$ es mediatriz de PP', véase la imagen 3.1.

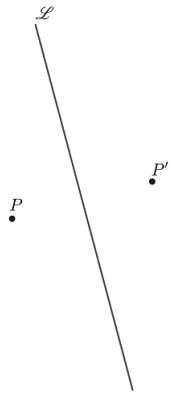

Imagen 3.1: Reflexión con respecto de $\mathscr{L}$

Observación 3.1. *Dos rectas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ pueden ser paralelas o bien pueden intersectarse; dependiendo de esto, la composición definirá dos tipos distintos de transformaciones elementales del espacio en $\mathbb{R}^2$.*

1. *Si $P \in \mathscr{L}$, entonces $R_{\mathscr{L}}(P) = P$.*
2. *Si $Id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la tranformación identidad y se define $R^2_{\mathscr{L}} := R_{\mathscr{L}} \circ R_{\mathscr{L}}$, entonces $\mathbb{R}^2$ fijos, es decir, $R^2_{\mathscr{L}} = Id$, por lo que $R_{\mathscr{L}}$ es una **involución**.*
3. *De la propiead anterior se sigue que $R_{\mathscr{L}}$ es invertible y que su inversa es $R^{-1}_{\mathscr{L}} = R_{\mathscr{L}}$.*

Otras reflexiones importantes del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ son las reflexiones con respecto a circunferencias.

Definición 3.2. *Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ con centro O y radio r, Se llama **inversión geométrica** o **reflexión** respecto de la circunferencia $\mathscr{C}$ en $\mathbb{R}^2$ a la función $R_{\mathscr{C}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus O$, entonces $P' = R_{\mathscr{L}}(P) \in \mathbb{R}^2$ el único punto P' que está sobre el rayo $\overrightarrow{OP}$ y satisface la siguiente relación:*

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

A P' se le llama el inverso de P respecto a $\mathscr{C}$.

A la circunferencia $\mathscr{C}$ se le llama **circunferencia de la inversión**; a su centro O, **centro de la inversión**, y a r^2, **potencia de la inversión.**
La construcción del inverso geométrico de un punto, dado $R_{\mathscr{C}} : \mathbb{R}^2 \setminus O \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus O$, entonces $P' = R_{\mathscr{L}}(P) \in \mathbb{R}^2$, se ven los siguientes dos casos:

Caso 1. Si P está en el exterior de la circunfencia de inversión $\mathscr{C}$ con centro O, se traza desde P la una línea tangente a la circunferencia $\mathscr{C}$; y sea T el punto de contacto. Se traza desde T la perpendicular a la recta OP, el punto P', pie de esta perpendicular, es el inverso del punto P respecto de la circunferencia $\mathscr{C}$. En efecto, por el criterio ángulo;ángulo;ángulo, se tiene que el $\bigtriangleup OTP \sim \bigtriangleup OP'T$, entonces $\frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP}$, por lo tanto $OP \cdot OP' = (OT)^2 = r^2$.

Caso 2. Si P está en el interior de la circunfencia de inversión $\mathscr{C}$ con centro O, entonces se levanta en P la perpendicular a la recta OP; ésta interseta a la circunferencia en dos puntos T y T'; en cualquiera de ellos, por ejemplo T, se traza la tangente a $\mathscr{C}$; dicha tangente se intersecta con el rayo $\overrightarrow{OP}$ en el punto P', que será el inverso de P respecto a $\mathscr{C}$.

Observación 3.3. *De acuerdo con la definición se puede observar:*

(i) *Si $OP > r$, entonces $OP' < r$.*

(ii) *Si $OP < r$, entonces $OP' > r$.*

(iii) *Si $OP = r$, entonces $OP' = r$. Esto es , $\mathscr{C}$ es invertible bajo $R_{\mathscr{C}}$.*

(iv) *Como $0P' = \frac{r^2}{OP}$, si P tiende a cero, es dicir, si OP tiende a infinito. Si OP tiende a infinito, entonces OP' tiende a cero. Entonces, si se añade a $\mathbb{R}^2$(o a $\mathbb{C}$) un punto al que se le llamará "punto al infinito" y se denotará por ∞, así, se puede el dominio y el codominio de $R_{\mathscr{C}}$ por $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, de tal manera que $R_{\mathscr{C}}(0) = \infty$ y que $R_{\mathscr{C}}(\infty) = 0$, es decir; $R_{\mathscr{C}} : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, lo cual resulta un función biyectiva.*

De la misma manera que las reflexiones con respecto de líneas, las reflexiones con respecto de circunferencias tienen las siguientes propiedades.

Proposición 3.4.

1. *La circunferencia de inversión $\mathscr{C}$ queda fijo bajo $R_{\mathscr{C}}$, es decir, si $P \in \mathscr{C}$, entonces $R_{\mathscr{C}}(P) = P$ ($\mathscr{C}$ es invariante puntual bajo $R_{\mathscr{C}}$).*

2. *La función $R_{\mathscr{C}}$ es una involución, es decir, si $R^2_{\mathscr{C}} = Id$.*

3. *La función $R_{\mathscr{C}}$ es invertible y su inversa es, $R^{-1}_{\mathscr{C}} = R_{\mathscr{C}}$.*

Desde estos momentos en adelante se denotará por R a una reflexión con respecto a una línea o a una circunferencia. Para especificar qué tipo de reflexión es, se usará la notación $R_{\mathscr{L}}$ para las reflexiones con respecto a una línea y $R_{\mathscr{C}}$ para las reflexiones con respecto a una circunferencia.

3.2. Reflexión con respecto de una recta

Teorema 3.5. *Las reflexiones es rectas con colineaciones.*

Demostración. Se a ℓ una línea.

Caso 1. Si ℓ es paralela a $\mathscr{L}$, entonces todo punto $P \in \ell$ se refleja en un punto $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$, el cual equidista de $\mathscr{L}$. El lugar geométrico que describen los puntos $P' \in \mathbb{R}^2$ para cada $P \in \ell$ es una línea ℓ', la cual es paralela a $\mathscr{L}$, véase la imagen 3.2.

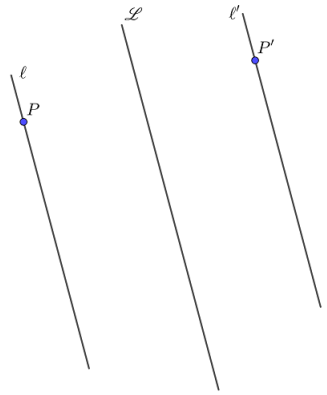

Imagen 3.2: Reflexión de una línea con respecto de $\mathscr{L}$

Caso 2. Si ℓ interseca a $\mathscr{L}$, entonces sea P el punto de intersección, como ya se sabe $R_{\mathscr{L}}(P) = P$, por la proposición 3.4 P es un punto fijo; sean $Q \in \ell \setminus \{P\}, Q' = R_{\mathscr{L}}(Q)$ y $\ell' := \overleftrightarrow{PQ'}$. si $R \in \ell$ y $R' = R_{\mathscr{L}}(R)$, entonces $\mathscr{L}$ es mediatriz del segmento RR'.Sea M es punto medio de RR' tal que $\angle RPM \cong \angle R'PM$ y por razones análogas el $\angle QPM \cong \angle Q'PM$, véase la imagen 3.3.

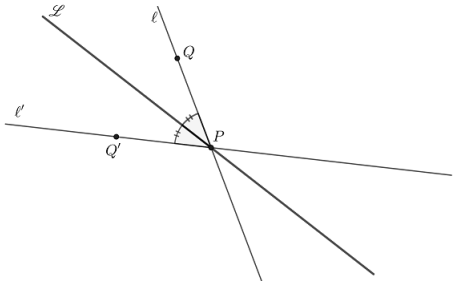

Imagen 3.3: Reflexión de una línea que interseca a $\mathscr{L}$

Así, $\angle R'PM \cong \angle RPM \cong \angle QPM \cong \angle Q'PM$ porque $R \in \overleftrightarrow{PQ}$, por lo que $R' \in \ell'$, así $R_{\mathscr{L}}(\ell) \subseteq \ell'$ y viseversa $R_{\mathscr{L}}(\ell') \subseteq \ell$, luego $\ell' = R^2_{\mathscr{L}}(\ell') \subseteq R_{\mathscr{L}}(\ell)$, así $\ell' \subseteq R_{\mathscr{L}}(\ell)$, por todo lo anterior se concluye que $\ell' = R_{\mathscr{L}}(\ell)$.

□

Para poder hacer el análisis de la reflexión de una línea con respecto de una circunferencia, se necesita el siguiente resultado.
Se hará uso de la notación $\measuredangle$, para denotar un ángulo.

Teorema 3.6. *Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia en el plano euclideano, con centro en O y radio r, si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tal que O, P, Q no son colineales; $P' = R_{\mathscr{C}}(P)$ y $Q' = R_{\mathscr{C}}(Q)$ son los respectivos inversos de los puntos P y Q con respecto de la circunferencia $\mathscr{C}$, entonces $\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OQP$ y $\measuredangle OQ'P' = \measuredangle OPQ$. Ver 3.4.*

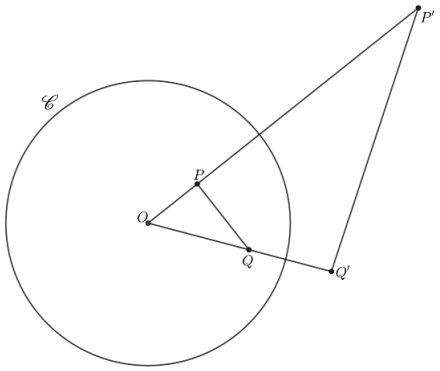

Imagen 3.4: Reflexión de P y Q

Demostración. Como $P' = R_{\mathscr{C}}(P)$ y $Q' = R_{\mathscr{C}}(Q)$

$$OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$$
$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$$
$$\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}.$$

Esto implica que los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$, son semejantes. Por lo que se tiene el resultado. □

Teorema 3.7. *La reflexión $R_{\mathscr{C}}$ de una línea con respecto de una circunferencia $\mathscr{C}$ con centreo O y radio r, es una línea o una circunferencia.*

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ una línea, se analizarán los siguientes casos;

Caso 1. Si $\mathscr{L}$ es ajena a $\mathscr{C}$, entonces se traza la línea ortogonal a $\mathscr{L}$ tal que pasa por O e interseca a $\mathscr{L}$ en un punto Q. Sea $P \neq Q$ un punto arbitrario de $\mathscr{L}$, aplicando la reflexión $R_{\mathscr{C}}$ se tiene que, $R_{\mathscr{C}}(P) = P'$ y $R_{\mathscr{C}}(Q) = Q'$, de ahí que $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$ son semejantes por el teorema anterior.
Como el ángulo $\angle OQP$ es recto, entonces $\angle OP'Q$ es recto tambien, así que P' está en la circunferencia $\mathscr{D}$, con diámetro OQ' de esta manera se tiene que $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) \subseteq \mathcal{D}$.
Notar que en la imagen del punto al "infinito" con respecto de la reflexión $R_{\mathscr{C}}$ es el punto O.
Por un argumento análogo y también usando el teorema 3.7, se tiene $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \subseteq \mathscr{L}$. Por 2) de la proposición 3.4 se tiene que $\mathcal{D} = R^2_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \subseteq R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L})$, por tanto $\mathcal{D} = R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L})$. También, $\mathscr{L} = R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D})$.

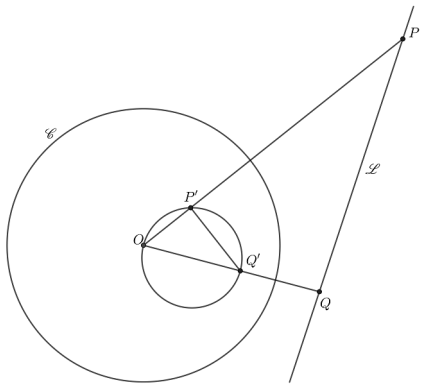

Imagen 3.5: Reflexión de una línea con respecto de $\mathscr{C}$

Casos particulares:

Caso (a). Si $\mathscr{L}$ es tangente en P a $\mathscr{C}$, como $R_{\mathscr{C}}(P) = P$, $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) = \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es la circunferencia con diametro OP. Por lo tanto $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) = \mathcal{D}$, véase la imagen 3.6.

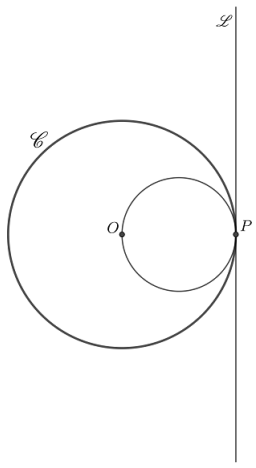

Imagen 3.6: Reflexión de una línea con respecto de $\mathscr{C}$

Caso (b) . Si $\mathscr{L}$ interseca a la circunferencia $\mathscr{C}$ en los puntos P y Q, entonces $\mathscr{L}$ se refleja en una circunferencia $\mathcal{D}$ que pasa por O, P y Q puesto que $R_{\mathscr{C}}(P) = P$ y $R_{\mathscr{C}}(Q) = Q$. Así $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) = \mathcal{D}$, véase la imagen 3.7.

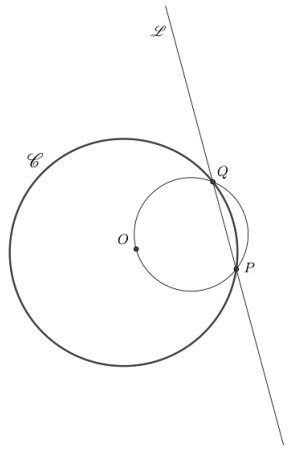

Imagen 3.7: Reflexión de una línea con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 2. Por definición, si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $P' = R_{\mathscr{C}}(P)$, entonces son colineales, así que si $\mathscr{L}$ pasa por el centro O de la circunferencia $\mathscr{C}$, entonces $P \in \mathscr{L}$ si y solo si $P' \in \mathscr{L}$. Por lo tanto, $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$, véase la imagen 3.8.

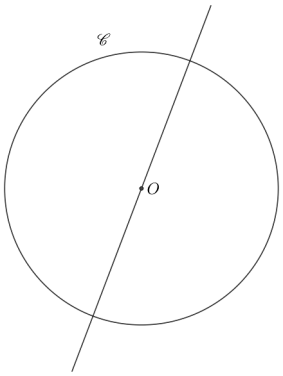

Imagen 3.8: Reflexión de una línea con respecto de $\mathscr{C}$

□

Corolario 3.8. *Las líneas paralelas que no pasan por el centro de la circunferencia de reflexión $\mathscr{C}$, se reflejan en circunferencias que son tangentes en el centro de reflexión, véase la imagen 3.9.*

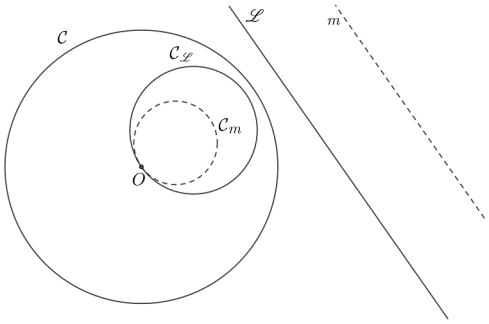

Imagen 3.9: Reflexión de dos líneas con respecto de $\mathscr{C}$

Demostración. Sean $\mathscr{L}$ y m líneas paralelas que no pasan por el centro de $\mathscr{C}$. Por el teorema previo, se tiene que $R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) = \mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ y $R_{\mathscr{C}}(m) = \mathcal{C}_m$, donde $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ y $\mathcal{C}_m$ son circunferencias que pasan por el centro de $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{L}$ y m son paralelas, se puede suponer que se intersecan en el punto al infinito[1]. De

[1]Por convención se supondrá que dos líneas paralelas cualesquiera en el plano se intersecan en el punto al infinito ∞.

acuedo con la observación 3.3, $R_{\mathscr{C}}(\infty) = O$, por lo que se concluye que $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ y $\mathcal{C}_m$ no se intersecan en otro punto salvo en O. Por lo tanto, $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ y $\mathcal{C}_m$ son tangentes en O. □

3.3. Reflexiones de circunferencias

Teorema 3.9. *La reflexión de una circunferencia con respecto de una recta $\mathscr{L}$ es una circunferencia.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O y radio r, se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si $\mathscr{C}$ no interseca a $\mathscr{L}$ y teniendo en cuneta que $R_{\mathscr{L}}(O) = O'$, entonces para cada punto $P \in \mathscr{C}$ se sigue que $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$, y como $R_{\mathscr{L}}$ es una isometría, todos los puntos P' equidistan al punto O' por lo que el lugar geométrico que describen los puntos $P' \in \mathbb{R}^2$ para cada $P \in \mathscr{C}$ es una circunferencia $\mathscr{C}'$ que no interseca a $\mathscr{L}$, véase la imagen 3.10.

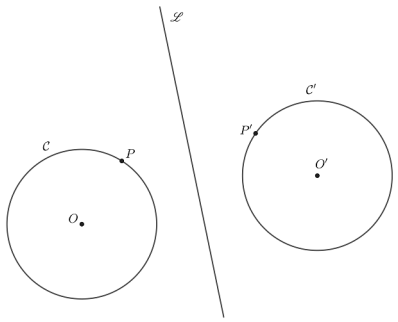

Imagen 3.10: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{L}$

Lo anterior es cierto, si $O_{\mathscr{L}} \in \mathscr{L}$ es el punto medio del segmento OO', entonces $OO_{\mathscr{L}} \cong O_{\mathscr{L}}O'$ y $PP_{\mathscr{L}} \cong P_{\mathscr{L}}P'$, donde $P_{\mathscr{L}}$ es el punto medio del segmento PP', por lo que $PO_{\mathscr{L}} \cong O_{\mathscr{L}}P'$ y por lo tanto $OP \cong O'P'$, por el criterio lado-lado-lado el triángulo $\triangle OPO_{\mathscr{L}}$ es congruente al triángulo $\triangle O'P'O_{\mathscr{L}}$, véase la imagen 3.11.

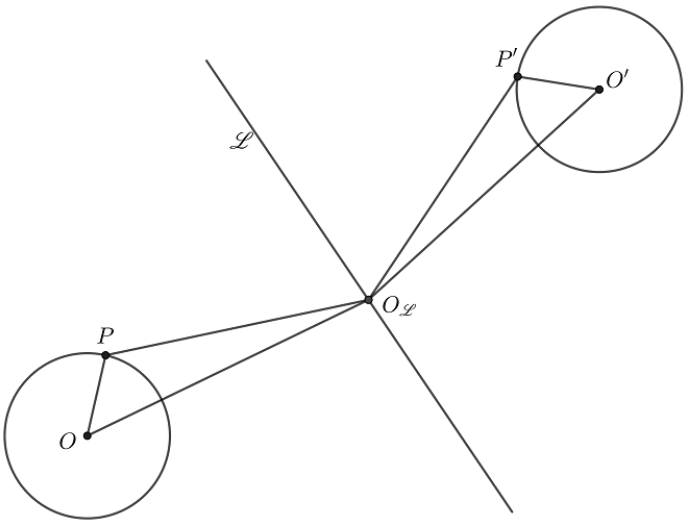

Imagen 3.11: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{L}$

Caso 2. Si $\mathscr{C}$ interseca a $\mathscr{L}$ en los puntos P y Q, por definición $R_{\mathscr{L}}(P) = P$ y $R_{\mathscr{L}}(Q) = Q$, sea $R' \in \mathbb{R}^2$, entonces describe una circunferencia que interseca a $\mathscr{L}$ en P y Q, véase la imagen 3.12.

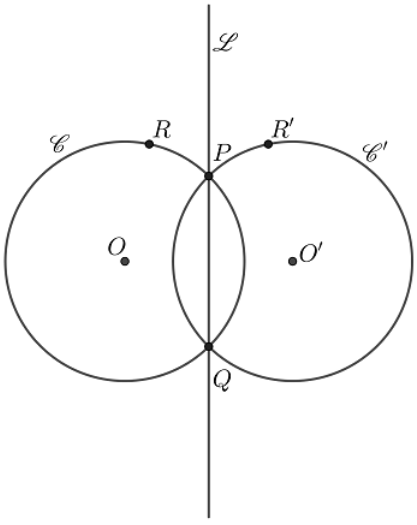

Imagen 3.12: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

□

Se dice que dos o más son **circunferencias concéntricas** cuando sus centros tienen la misma posición.

Teorema 3.10. *La reflexión $R_{\mathscr{C}}$ de un circunferencia cualquiera $\mathcal{D}$ con respecto de $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en un punto O y radio $r > 0$, es una línea o una círcunferencia.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una circunferencia, se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si $\mathcal{D}$ no interseca a $\mathscr{C}$, entonces se trazán dos líneas $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ desde el centro O de la circunferencia $\mathscr{C}$ tal que interseca a $\mathcal{D}$ en los puntos P, Q, R y S. Sean $R_{\mathscr{C}}(P) = P'$, $R_{\mathscr{C}}(R) = R'$ y $R_{\mathscr{C}}(S) = S'$, los puntos imagen con respecto a $R_{\mathscr{C}}$ y sea $\alpha = \measuredangle SPQ$ y $\beta = \measuredangle QRS$, por el teorema 1.35, $\square PQRS$ es un cuadrilátero cíclico, luego por el teorema 3.6, si $\measuredangle OS'R' = \beta$ y $\measuredangle P'Q'Q = \alpha$, se sigue que $\measuredangle R'QP' + \measuredangle P'S'R' = 180°$ porque $\alpha + \beta$ son suplementarios y sus suplementos también lo son, por el teorema 1.35, se tiene que $\square P'S'R'Q'$ es un cuadrilátero cíclico. Por lo tanto la reflexión $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, con $\mathcal{D}'$ una circunferencia que contiene a P', Q', R' y S'. Observe que $\mathcal{D}'$ no pasa por el centro de $\mathscr{C}$, véase la imagen 3.13.

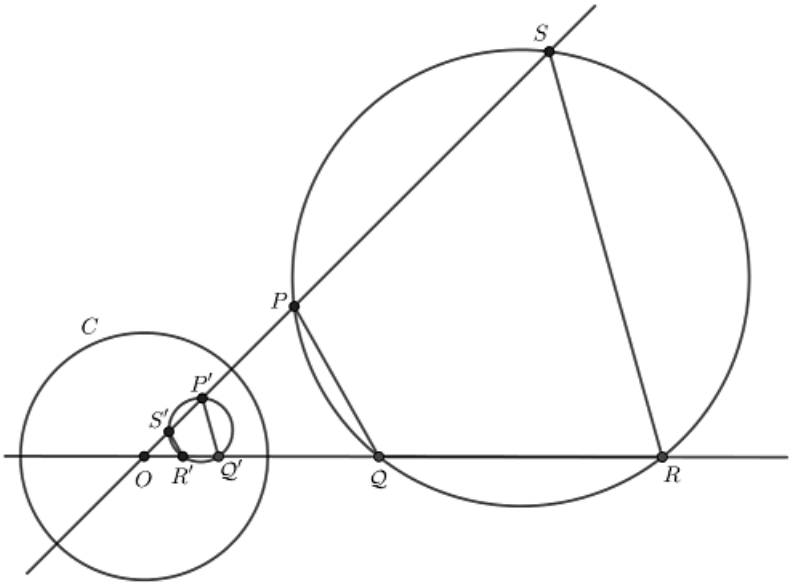

Imagen 3.13: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 2. Si $\mathcal{D}$ es tangente en el exterior a $\mathscr{C}$ en el punto P, por un

argumento similar al caso 1, se tiene que $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ tangente en el interior a $\mathscr{C}$ en e punto P, véase la imagen 3.14.

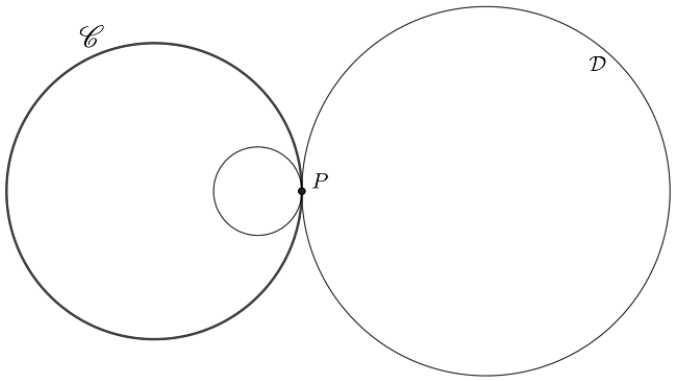

Imagen 3.14: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 3. Si $\mathcal{D}$ interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos P y Q pero no por O, entonces Q se refeja en una circunferencia $\mathcal{D}'$, es decir $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ la cual interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos P y Q, véase la imagen 3.15.

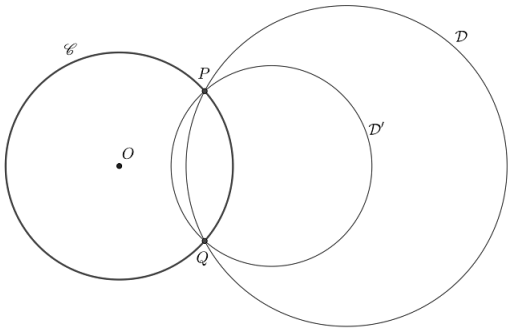

Imagen 3.15: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 4. Véase la imagen 3.16, si $\mathcal{D}$ pasa por el centro O de $\mathscr{C}$, por el teorema 3.7 y la proposición 3.4 inciso (ii), se tiene que

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) &= \mathcal{D} \\ R_{\mathscr{C}}(R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L})) &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ Id(\mathscr{L}) &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathscr{L} &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

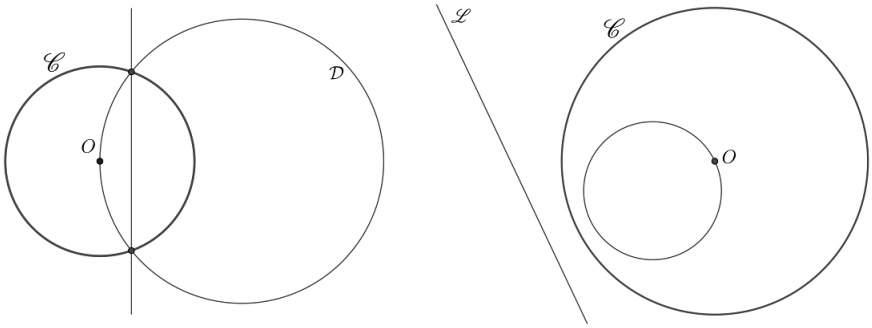

Imagen 3.16: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 5. Si $\mathcal{D}$ interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos P y Q, por el teorema 3.7 y la observación 3.3, entonces $R_{\mathscr{C}}((D)) = \mathcal{D}'$, con $\mathcal{D}'$ una circunferencia que interseca a $\mathscr{C}$ en P y Q.

Caso 6. Si $\mathcal{D}$ es una circunferencia concéntrica con $\mathscr{C}$, sean P un punto cualquiera en $\mathcal{D}$ y $OP = S$ el radio de $\mathcal{D}$, entonces $R_{\mathscr{C}}(P) = P'$, por lo anterior se tiene;

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= r^2 \\ S \cdot OP' &= r^2 \\ OP' &= \frac{r^2}{S}. \end{aligned}$$

Es decir, P' esta sobre una circunferencia de radio $\frac{r^2}{S}$, véase la imagen 3.17.

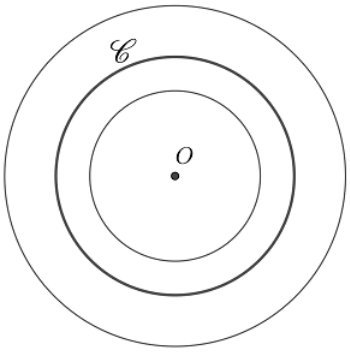

Imagen 3.17: Reflexión de una circunferencia con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 7. Si $\mathcal{D}$ esta contenida en $\mathscr{C}$, que es tangente a $\mathscr{C}$ en un punto P en el exterior de $\mathscr{C}$, por el caso 2, de esta prueba, se tiene que $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}'$ es una circunferencia en el exterior de $\mathscr{C}$, la cual es tangente en un punto P, entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{C}}(R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}')) &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ Id(\mathcal{D}') &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{D}' &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{D}$ bajo la reflexión $R_{\mathscr{C}}$ es una circunferencia en el exterior de $\mathscr{C}$, pero es tangente a $\mathscr{C}$.

Caso 8. Si $\mathcal{D}$ esta contenida en $\mathscr{C}$, que no es concentrico con $\mathscr{C}$ y encierra al centro de la circunferencia de $\mathscr{C}$, por el teorema 3.7 y la observación 3.3, entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) &= \mathcal{D} \\ R_{\mathscr{C}}(R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L})) &= R_{\mathscr{C}} \\ Id(\mathscr{L}) &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathscr{L} &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Caso 9. Si $\mathcal{D}$ es una circunferencia, que pasa por el centro O de $\mathscr{C}$ y por un punto P en $\mathscr{C}$, por el teorema 3.7 y la observación 3.3, entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L}) &= \mathcal{D} \\ R_{\mathscr{C}}(R_{\mathscr{C}}(\mathscr{L})) &= R_{\mathscr{C}} \\ Id(\mathscr{L}) &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathscr{L} &= R_{\mathscr{C}}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

□

Observación 3.11. *Si en la desmostración del teorema previo caso 1, el cuadrilátero $\square PQRS$ en la circunferencia $\mathcal{D}$ en sentido contrario de las manecillas del reloj, a su imagen $\square P'S'R'Q'$ en la circunferencia $\mathcal{D}'$ se le recorre en sentido de las manecillas del reloj.*

3.4. Reflexiones y ángulos

Teorema 3.12. *(i) Si dos líneas ℓ y m se intersecan, entonces sus reflexiones con respecto de $\mathscr{L}$ tambien se intersecan y forman el mismo ángulo que el comprendido entre ℓ y m.*

(ii) Si dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se intersecan, entonces sus reflexiones con respecto de $\mathscr{L}$ también se intersecan y con el mismo ángulo que el comprendido entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

Demostración. (i) Por el teorema 3.5 se sigue que $R_{\mathscr{L}}(\ell) = \ell'$ y $R_{\mathscr{L}}(m) = m'$ con ℓ, m rectas. Sea P el punto de intersección de las líneas ℓ y m, por otro lado $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$ es el único punto tal que es intersección de las líneas ℓ' y m'.
Sean α el ángulo que forman ℓ y m, Q un punto en ℓ y R un punto en m y $R_{\mathscr{L}}(Q) = Q'$, $R_{\mathscr{L}}(R) = R'$, como $R_{\mathscr{L}}$ es una isometría, se sigue que $QR = Q'R'$, $PR = PR'$ y $PQ = P'Q'$, luego por el criterio lado-lado-lado, el triángulo $\bigtriangleup PQR$ es congruente al triángulo $\bigtriangleup P'R'Q'$, de ahí que, $\measuredangle RPQ$ es congruente con $\measuredangle R'P'Q'$, véase la imagen 3.18.

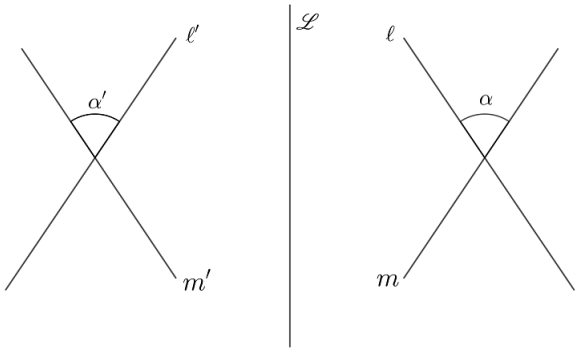

Imagen 3.18: Reflexión de dos líneas intersectadas con respecto de $\mathscr{L}$

(ii) Se tienen los siguientes casos:
Caso 1. Si $\mathcal{C}$ interseca a $\mathcal{D}$ en solo un punto P, entonces por el teorema 3.9 se sigue que $R_{\mathscr{L}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathscr{L}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ son circunferencias; como $P \in \mathcal{C}$ y $P \in \mathcal{D}$, por lo que $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$ es el único punto de ámbas circunferencias, es decir, $P' \in \mathcal{C}'$ y $P' \in \mathcal{D}'$ (Si $Q' \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{D}'$, entonces existe $Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, tal que $R_{\mathscr{L}}(Q) = Q'$ por tanto $Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P\}$. Así, $Q = P$). Luego trazando la recta $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ que pasa por los centros de ambas circunferencias, trazando la tangente ℓ_P a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ por el punto

P, por lo que el ángulo entre las líneas $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ y ℓ_P es un ángulo recto. Por la primera parte del teorema se sigue que el ángulo entre las rectas $R_{\mathscr{L}}(\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}) = \ell'_{O'_{\mathcal{C}'}O'_{\mathcal{D}'}}$ y $R_{\mathscr{L}}(\ell_P) = \ell'_{P'}$, tambien forman un ángulo recto. En pocas palabras las tangentes a $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}'$ en el punto P' coinciden, la cual es perpendicular a $\ell'_{O'_{\mathcal{C}'}O'_{\mathcal{D}'}}$, véase la imagen 3.19.

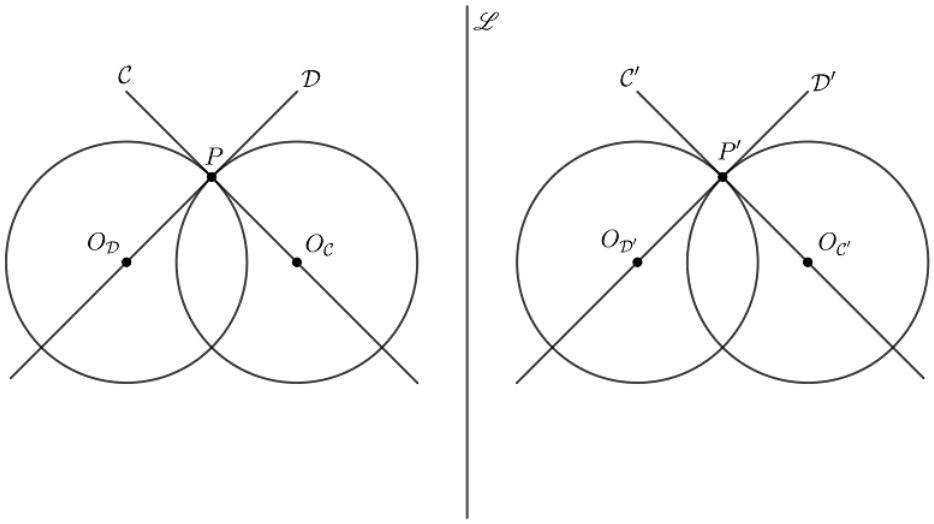

Imagen 3.19: Reflexión de dos circunferencias intersectadas con respecto de $\mathscr{C}$

Caso 2. Si $\mathcal{C}$ interseca a $\mathcal{D}$ en dos punto P y Q, por el teorema 3.9 se sigue que $R_{\mathscr{L}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathscr{L}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, como $P, Q \in \mathcal{C}$ y $P, Q \in \mathcal{D}$, se tiene que $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$ y $R_{\mathscr{L}}(Q) = Q'$ tal que $P', Q' \in \mathcal{C}'$ y $P', Q' \in \mathcal{D}'$. Se trazan las líneas tangentes $\ell_{\mathcal{C}}$ y $\ell_{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente en el punto P, luego se traza la recta que pasa por los centros de las dos circunferencias, la cual se denotará por; $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$, de ahí que la recta $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ interseca a $\ell_{\mathcal{C}}$ como a $\ell_{\mathcal{D}}$ en los puntos A y B respectivamente y también forman un ángulo θ entre las rectas $\ell_{\mathcal{D}}$ y $\ell_{\mathcal{C}}$ y un ángulo α entre las rectas $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ y $\ell_{\mathcal{C}}$, por ultimo un águlo γ entre las líneas $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ y $\ell_{\mathcal{D}}$, por el teorema 3.5, cada recta es enviada bajo $R_{\mathscr{L}}$ en otra recta, es decir, $R_{\mathscr{L}}(\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}) = \ell'_{O'_{\mathcal{C}'}O'_{\mathcal{D}'}}$, $R_{\mathscr{L}}(\ell_{\mathcal{C}}) = \ell'_{\mathcal{C}'}$ y $R_{\mathscr{L}}(\ell_{\mathcal{D}}) = \ell'_{\mathcal{D}'}$, por la primera parte de este teorema se sigue que los ángulos entre las rectas; $\ell'_{O'_{\mathcal{C}'}O'_{\mathcal{D}'}}$ y $\ell'_{\mathcal{D}'}$ es γ, $\ell'_{O'_{\mathcal{C}'}O'_{\mathcal{D}'}}$ y $\ell'_{\mathcal{C}'}$ es α, por ultimo $\ell'_{\mathcal{C}'}$ y $\ell'_{\mathcal{D}'}$ es θ, por lo que $\ell'_{\mathcal{C}'}$ y $\ell'_{\mathcal{D}'}$ son rectas tangentes a $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}'$ en el punto P respectivamente, por una razonamiento similar se concluye el resultado para el punto Q.

Por tanto se tiene el resultado.

□

Teorema 3.13. *Si dos rectas ℓ y m se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, entonces el ángulo de intersección en ese punto es igual al ángulo de intersección de las circunferencias reflejadas en el reflejado del punto de intersección, véase la imagen 3.20.*

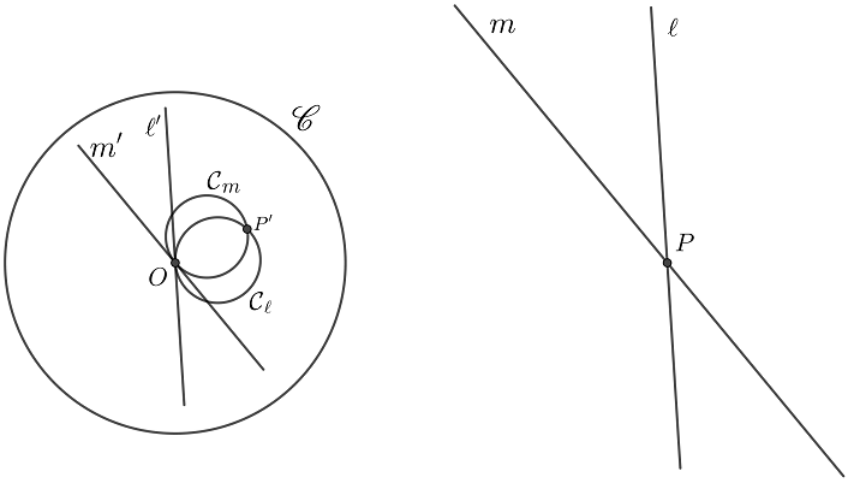

Imagen 3.20: Reflexión de dos líneas intersectadas con respecto de $\mathscr{C}$

Demostración. Sean rectas ℓ y m que se intersecan en un punto $P \neq O$ y sea γ el ángulo de la intersección de las rectas, entonces la recta ℓ se refleja en una circunferencia, es decir $R_{\mathscr{C}}(\ell) = \mathcal{C}_\ell$ la cual pasa por O, de manera análoga para la recta m se tiene que $R_{\mathscr{C}}(m) = \mathcal{C}_m$ la cual también pasa por el origen.
Sean $P' = R_{\mathscr{C}}(P)$ tal que $P' \in \mathcal{C}'$ y $P' \in \mathcal{D}'$ y α el ángulo formado entre las dos circunferencias en el punto P' (el formado por las paralelas tangentes a $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}'$ en O o en P'). Trazando la tangentes ℓ' y m' a $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}'$ en el punto O, son paralelas a ℓ y m respectivamente. El águlo formado entre ℓ' y m', es decir α es el mismo que el formado entre ℓ y m.

□

Observación 3.14.

(a) Los resultados anteriores muestran que las reflexiones preservan ángulos.

(b) *El ángulo en el vertice P' va en dirección contraria al ángulo en el vertice P', es decir, si α se orienta de ℓ a m, entonces α' se orienta en sentido contrario, de m a ℓ.*

Proposición 3.15. *Una circunferencia $\mathcal{C}$ que interseca a la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$ se refleja en otra circunferencia que pasa por los puntos de intersección y con el mismo ángulo.*

Demostración. Observe que los puntos de intersección P y Q de $\mathcal{C}$ y $\mathscr{C}$ quedan fijos bajo la reflexión $R_{\mathscr{C}}$, luego por el teorema 3.10, se tiene, $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, con $\mathcal{C}'$ una circunferencia que pasa por los puntos $R_{\mathscr{C}}(P) = P'$ y $R_{\mathscr{C}}(Q) = Q'$, luego por el teorema 3.12 $\mathcal{C}'$ y $\mathscr{C}$ preservan el mismo ángulo que $\mathcal{C}$ y $\mathscr{C}$. □

Corolario 3.16. *Si dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se intersecan en un punto P, entonces se reflejan conservando el ángulo de intersección.*

Demostración. Por el teorema 3.13 y la proposición previa se sigue el resultado. □

Dos circunferencias se dicen **ortogonales** si son secantes en un punto común (de intersección) sus tangentes respectivas son perpendiculares. Notar que por la propiedad de que el radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente, la definición es equivalente a decir que sus radios respectivos a uno de los puntos de intersección son perpendiculares.

Teorema 3.17. *Una circunferencia $\mathcal{C}$ ortogonal a $\mathscr{C}$, se refleja en sí misma, véase la imagen 3.21.*

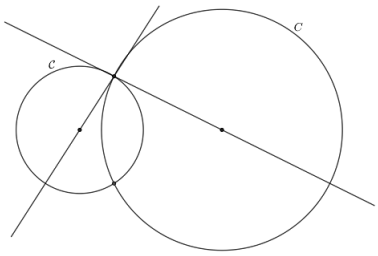

Imagen 3.21: Reflexiones y ortogonalidad

Demostración. Se tiene que $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ pasa por los puntos de intersección $R_{\mathscr{C}}(P) = P$ y $R_{\mathscr{C}}(Q) = Q$, por lo que la reflexion $R_{\mathscr{C}}$ conserva el ángulo, por lo que $\mathcal{C}$ se refleja en sí mismo. □

Teorema 3.18. *Si $\mathcal{C}$ es ortogonal a $\mathscr{C}$ con centro O y radio r, entonces cada rayo que parte de O interca a $\mathcal{C}$ en dos puntos P y Q, los envia en sus puntos de reflexión. Si $\mathcal{C}$ es una circunferencia que pasa por un punto y su respectivo punto de reflexión, entonces $\mathcal{C}$ es ortogonal a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Por el teorema previo, si $\mathscr{C}$ y $\mathcal{C}$ son dos circunferencias ortogonales, entonces $R_{\mathscr{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, esto implica que todo rayo que parte de O interseca a $\mathcal{C}$ en P de ahí que su punto de reflexión es $R_{\mathscr{C}}(P) = P'$, el cual esta sobre el mismo rayo, véase la imagen 3.22.

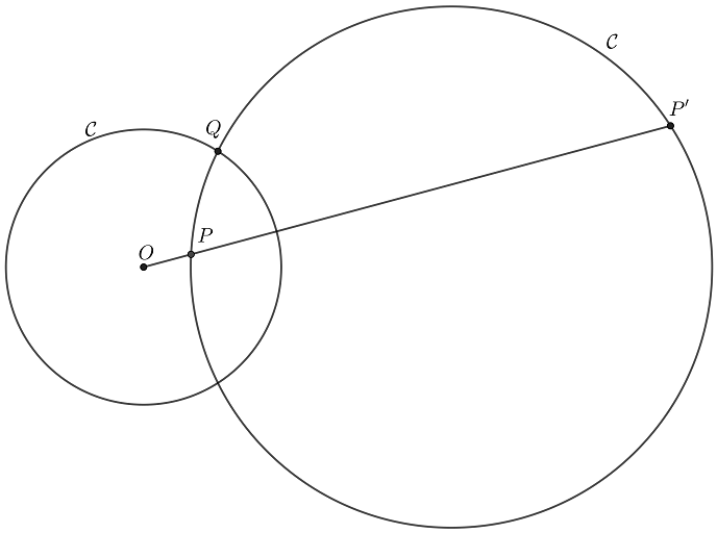

Imagen 3.22: Reflexiones y ortogonalidad

Si $P' = R_{\mathscr{C}}(P)$ y $\mathcal{C}$ es una circunferencia que pasa por los puntos P y P' e interseca a $\mathscr{C}$ en un punto Q, entonces $OP \cdot OP' = r^2$, como $OQ = r$, se sigue que OQ es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto Q, por lo tanto $\mathscr{C}$ y $\mathcal{C}$ son ortogonales. □

3.5. Reflexiones de circunferencias coaxiales

Se han mencionado algunos resultados sobre las reflexiones con respecto de una línea o una circunferencia. Por lo que en esta sección se analizará el comportamiento de la reflexión con respecto de circunferencias que pertencen a las diferentes familias coaxiales.
Para el siguiente analisis se definirá a $\mathscr{F}$ como la familia de circunferencias

coaxiales que intersecan en dos puntos y sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos circunferencias de dicha familia.
Sea G la familia ortogonal a $\mathscr{F}$ tal y como se describieron en 1.4, se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si se refleja a $\mathcal{C}$ con respecto de $\mathcal{C}'$, entonces $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}''$ pertenece a la familia de $\mathscr{F}$ ya que los puntos de intersección A y B quedan fijos bajo la reflexión $R_{\mathcal{C}}$, por la observación 3.3, véase la imagen 3.23.

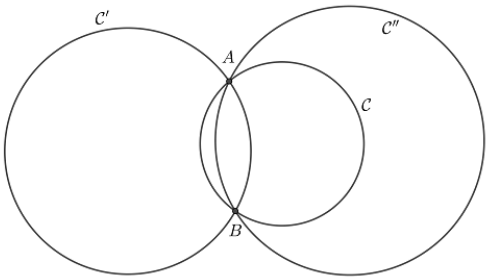

Imagen 3.23: Reflexión de $\mathcal{C}$ con respecto a $\mathcal{C}'$.

Caso 2. Las circunferencia $\mathcal{C}''$ que biseca el ángulo formado por las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ cumple que $R_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ yy $\mathcal{C}'$ en la familia $\mathscr{G}$, debido a que $R_{\mathcal{C}''}$ es inyectiva, véase la imagen 3.24

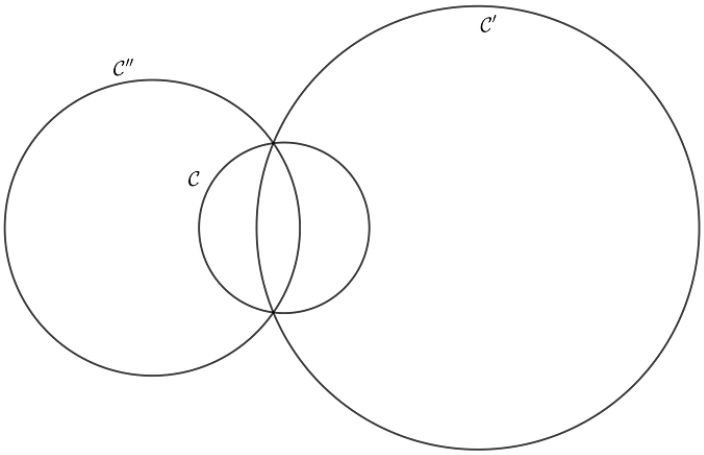

Imagen 3.24: Reflexión de $\mathcal{C}$ncon respecto a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

Caso 3. Si $\mathcal{C}$ es un elemento de la familia $\mathscr{F}$ y $\mathcal{D}$ algún elemento de la

familia ortogonal a $\mathscr{G}$, entonces por el teorema 3.17 se tiene $R_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, véase la imagen 3.25.

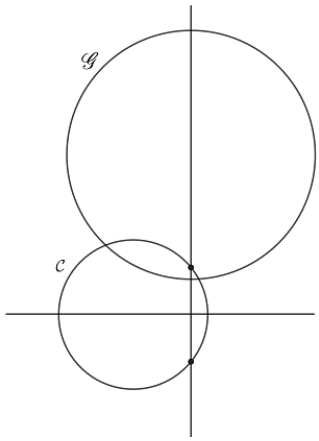

Imagen 3.25: Reflexión de $\mathcal{C}$ con respecto de la familia $\mathscr{G}$.

Caso 4. Si se refleja a un elemento de la famila $\mathscr{G}$ con respecto a otro mismo miembro de su misma familia, entonces por el teorema 3.10 caso 1, se refleja en otro miembro de $\mathscr{G}$, puesto que es una familia ajena, véase la imagen 3.26.

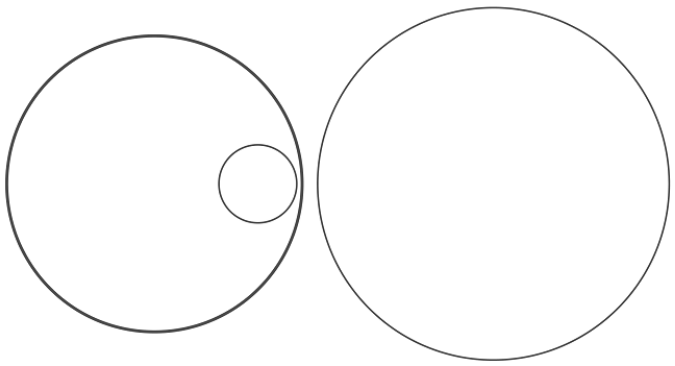

Imagen 3.26: Reflexión de la familia $\mathscr{G}$ con respecto de sí misma.

Caso 5. Si se refleja un elemento de la familia $\mathscr{G}$ con respecto a un miembro $\mathcal{C}$ de $\mathscr{F}$, entonces se refleja en sí misma, esto se sigue por el teorema 3.17, véase la imagen 3.27.

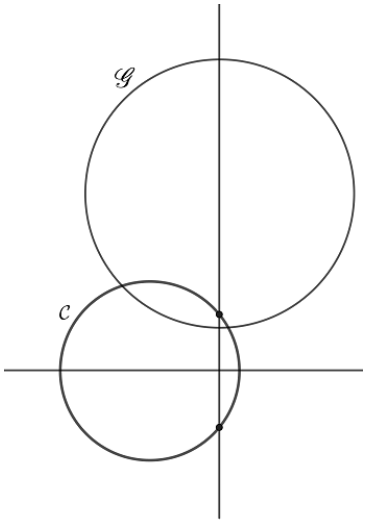

Imagen 3.27: Reflexión de $\mathcal{C}$ de la familia $\mathscr{G}$ con respecto de la familia $\mathscr{F}$.

En base a todo lo anterior se puede definir las transformaciones de Möbius en el plano Euclideano.

Definición 3.19. *Una* ***transformación de Möbius euclidiana general*** *en $\mathbb{R}^2$, es una composición finita de reflexiones con respecto de líneas o circunferencias. Al conjunto de todas las transformaciones de Möbius euclidianas generales se denotará por $Mob(\mathbb{R}^2)$.*

Teorema 3.20. *El conjunto de todas las transformaciones de Möbius $Mob(\mathbb{R}^2)$ forman un grupo con la composición.*

Demostración. Por definición 1.1, se tiene:

Cerradura.
Si $M_1, M_2 \in Mob(\mathbb{R}^2)$ tal que $M_1 = R_S \circ \cdots \circ R_1$ y $M_2 = R'_T \circ \cdots \circ R'_1$, entonces $M_1 \circ M_2 = R_S \circ \cdots \circ R_1 \circ (R'_T \circ \cdots \circ R'_1) \in Mob(\mathbb{R}^2)$.

Asociatividad. Si $M_1, M_2, M_3 \in Mob(\mathbb{R}^2)$, entonces $(M_1 \circ M_2) \circ M_3 = M_1 \circ M_2 \circ M_3 = M_1 \circ (M_2 \circ M_3)$.

Elemento neutro. La transformación $Id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación de Möbius euclidiana general definida por: $Id := R^2$, donde R es una reflexión de línea o de una circunferencia.

Elemento inverso. Si $M \in Mob(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $M' \in Mob(\mathbb{R}^2)$ tal que $M \circ M' = M' \circ M = Id$. Se denota a M' como M^{-1} y se llama inversa de M. Observe que si M es la composición $R_S \circ \cdots \circ R_1$, entonces $M^{-1} = R_1 \circ \cdots R_S$.

Así,$(Mob(\mathbb{R}^2), \circ)$ es un grupo. □

Apartir de ahora las circunferencias y líneas con el punto al infinito serán llamadas sólo circunferencias.

Teorema 3.21.

(i) Las transformaciones de Möbius euclideanas generales, envían circunferencias en circunferencias.

(ii) Las transformaciones de Möbius euclideanas generales conservan ángulos.

Demostración. Para (i), por los teoremas 3.4 y 3.5 y el teorema 3.20 se sigue el resultado.

Para (ii), por la primera parte de este teorema y por el teorema 3.12, se sigue el resultado.

□

Capítulo 4

La acción de Möbius euclidiano $Mob_+(\mathbb{R}^2)$

4.1. Transformaciones de Möbius elementales

En esta sección se hará la descripción de tres tipos elementales de transformaciones de Möbius, las cuales están en términos de traslaciones, rotaciones y homotecias. Estas transformaciones ya se analizaron de manera individual en el plano complejo, pero en el plano euclideano son muy sencillas de entender y también tienen la propiedad de que sus composiciones definen otras transfromaciones pero sus propiedades geométricas son más intrincadas que las elementales.
Antes de describir estas transformaciones se darán algunas definiciones generales que ayudarán a describir las propiedades dinámicas de dichas transformaciones.
Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de Möbius y P un punto en $\mathbb{R}^2$. Se define a **n-ésima iteración** de F como $F^n := F \circ \cdots \circ F$, con n en los enteros. Esto es, componer F con ella misma n veces. Obsérvese que si $n < 0$, como F es invertible, entonces $F^n = F^{-1} \circ \cdots \circ F^{-1}$.

Definición 4.1. *La **órbita** hacia adelante de un punto $P \in \mathbb{R}^2$ bajo F es el conjunto:*

$$\mathcal{O}_F(P) := \{F^n(P) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

4.2. Transformaciones parabólicas

Sean $\mathscr{L}$ y ℓ dos líneas paralelas en $\mathbb{R}^2$. La transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathscr{L}}$ con R_ℓ se llama **parabólica**. Esto es

$$T := R_\ell \circ R_{\mathscr{L}}.$$

Bajo esta transformación, a un punto $P \in \mathbb{R}^2$ se le asocia un punto $P'' = T(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de trasladar a P en la dirección ortogonal a las líneas dadas a partir de P. Observe que, si $R_{\mathscr{L}}(P) = P'$ y $R_{\mathscr{L}}(P') = P''$, entonces la magnitud del segmento PP'' es el doble de la distáncia entre $\mathscr{L}$ y ℓ, debido a que las reflexiones son isometrías, véase la imagen 4.1.

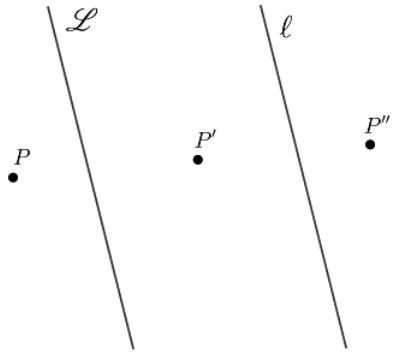

Imagen 4.1: Transformación parabólica

Sea $\mathscr{L}'$ la reflexión de $\mathscr{L}$ con respecto a ℓ. Si las dos líneas $\mathscr{L}$ y ℓ son verticales y separadas por la distancia $\frac{1}{2}$. Si se denota a la composición $R_\ell \circ R_{\mathscr{L}}$ por T_1, en este caso, el desplazamiento de cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$ se da en la dirección horizontal y perpendicular a $\mathscr{L}$ y ℓ con distacia de una unidad.
La transformación T_1 se puede decribir como $T_1(P) = P + 1$, donde 1 es la magnitud de un segmento fijo perpendicular a $\mathscr{L}$ y ℓ, determinado por las líneas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$. Además, T_1 es invertible y su inversa está dada por; $T_1^{-1}(P) = P - 1$.
La imagen de $\mathscr{L}$ bajo T_1 es $\mathscr{L}'$. A la región determinada por las líneas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$(**sin incluir las líneas**) se le llamará un **dominio (o región) fundamental** para la acción de la trasformación T_1 en $\mathbb{R}^2$.
Intuitivamente, por la acción de T_1 en $\mathbb{R}^2$ se referirá a la forma en que T_1 "mueve" a los puntos en $\mathbb{R}^2$ a través de sus órbitas. Cada elemento de la órbita de un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{T_1^n(\mathscr{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ está en una única "franja"

determinada por la región fundamental al aplicarle T_1 reiteradamente, véase la imagen 4.2.

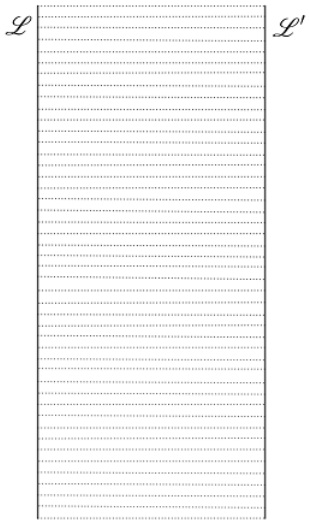

Imagen 4.2: Región fundamental de una transformación parabólica

Sea $\mathscr{F} := \{T_1^n(\mathscr{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de rectas verticales determinada como las imágenes de $\mathscr{L}$ bajo iteraciones de T_1, se tiene que $\mathscr{F}$ es invariante (como familia) bajo la acción de T_1.
Si m es una recta ortogonal a $\mathscr{L}$, entonces m es invariantes bajo la acción de T_1 y m es ortogonal a todos los miembros de $\mathscr{F}$; esto implica que la familia $\mathscr{G} := \{m : m \perp \mathscr{F}\}$ es invariante bajo la acción de T_1 y es precisamente la familia ortogonal de $\mathscr{F}$, véase la imagen 4.3.

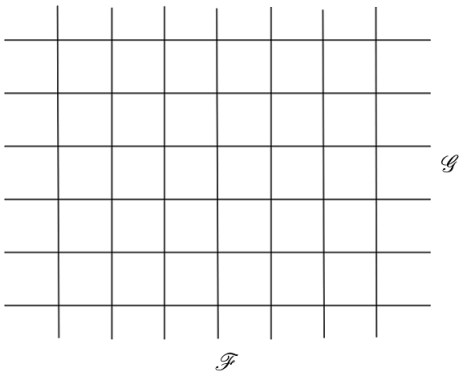

Imagen 4.3: Familias invariantes bajo una transformación parabólica

Las líneas paralelas se intersecan en el punto al infinito, entonces estas familias $\mathscr{G}$ y $\mathscr{F}$ son familias de "circunferencias" coaxiales tangentes, donde una familia es ortogonal a la otra y se intersecan en el punto al infinito. Estas familias de "circunferencias" se intersecan en cualquier otro punto $Q \in \mathbb{R}^2$ corresponden exactamente a las familias de circunferencias coaxiales tangentes, véase la imagen 4.4 y véase la sección 1.4.

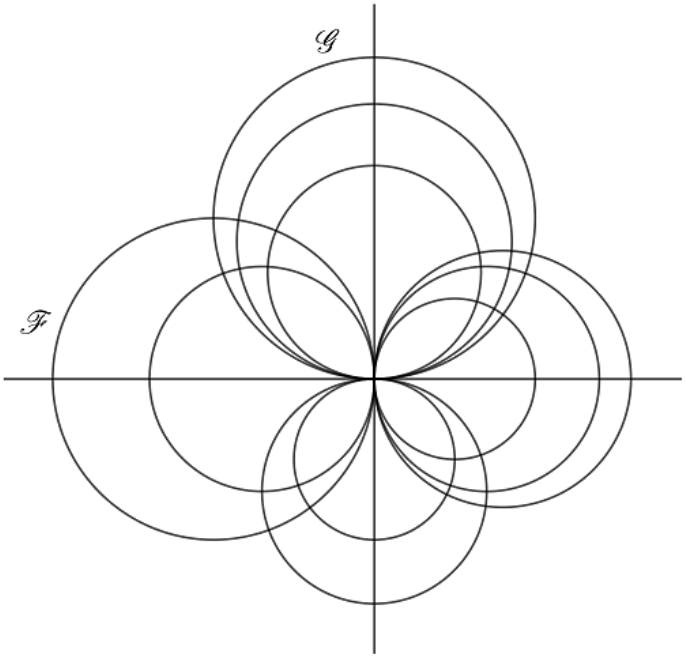

Imagen 4.4: Familias coaxiales tangentes $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ y sus ejes radicales

4.3. Transformaciones elípticas

Si las líneas $\mathscr{L}$ y ℓ se intersecan en un punto $O \in \mathbb{R}^2$. La transformación $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathscr{L}}$ y R_ℓ se llama **elíptica**. Esto es,

$$R := R_\ell \circ R_{\mathscr{L}}.$$

Esta transformación asocia a cada punto P de $\mathbb{R}^2$ a un punto $P'' = R(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de rotar a P alrededor de O un ángulo igual al doble de la magnitud del ángulo determinado por las líneas $\mathscr{L}$ y ℓ, véase la imagen 4.5.

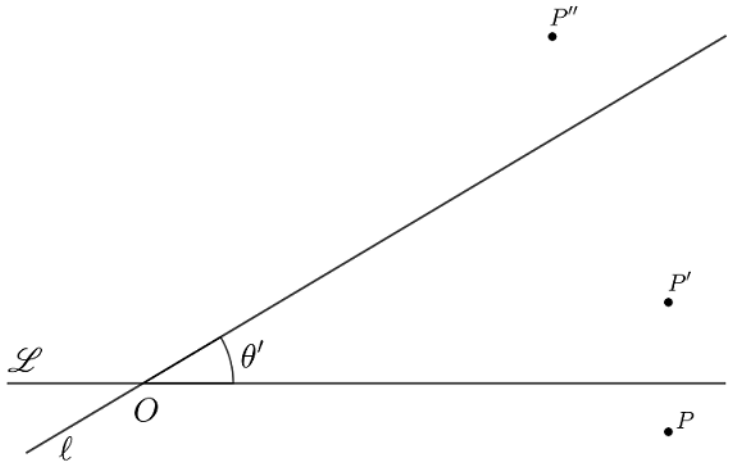

Imagen 4.5: Transformación elíptica

Supongasé que entre $\mathscr{L}$ y ℓ se forma un ángulo de $\frac{\theta}{2}$ al intersecarse en O. Si P es un 'punto que no esta en $\mathscr{L}$ y α el ángulo entre $\mathscr{L}$ y $\overleftrightarrow{OP}$, entonces $R_{\mathscr{L}}$ envía P en P' y el ángulo ente $\mathscr{L}$ y $\overleftrightarrow{OP'}$ es también α. Si $R_{\mathscr{L}}(P') = P''$ y el ángulo entre $m' := \overleftrightarrow{OP'}$ y ℓ es β, entonces el ángulo entre $m'' := \overleftrightarrow{OP''}$ y ℓ también es β. En suma, $\angle POP'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = \theta$, es decir $R_\ell \circ R_{\mathscr{L}}$ es una rotación a la que se denotará por; R_θ. En resumen, todo punto $P \in \mathbb{R}^2$ rota un ángulo θ con respecto de O. Más aún, las imágenes de P bajo iteraciones de R_θ están sobre la circunferencia con centro O y radio OP.

Observación 4.2. *Es importante saber, si $\theta := \frac{2p\pi}{q}$ con p y q coprimos, entonces las órbitas de los puntos en $\mathbb{R}^2$ bajo las iteraciones de R_θ son finitas por lo que es posible determinar una región fundamental para la acción de R_θ. Es decir, si $\theta = \alpha\pi$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces las órbitas de los puntos son infinitas y densas*[1] *en las circunferencia que las contiene. Por lo que en este caso no es posible determinar una región fundamental.*

Supongase que $\theta = \frac{2p\pi}{q}$, para algún $q > 1$, y se denotará por $\mathscr{L}'$ a la imagen de $\mathscr{L}$ bajo R_θ. Como las órbitas de los puntos en $\mathbb{R}^2$ son finitas de acuerdo a la observación previa, se sigue que el sector circular determinado por las líneas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ es una región fundamental para la acción de la transformación R_θ en $\mathbb{R}^2$, véase la imagen 4.6.

[1]Intuitivamente, el concepto de densidad se puede interpretar como que los puntos de las órbitas "llenan" la circunferencia que las contiene.

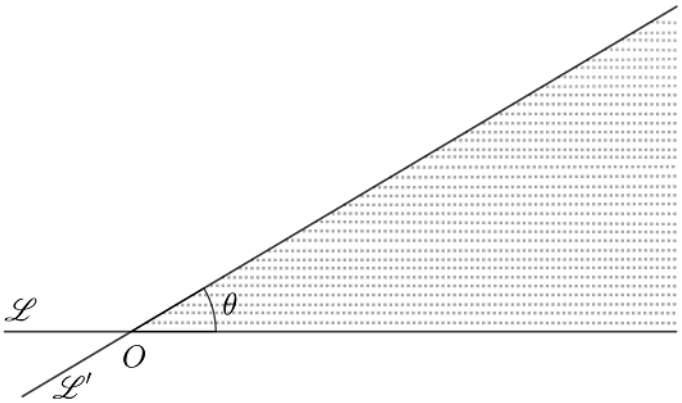

Imagen 4.6: Reflexión fundamental de una trasformación elíptica

Sea $\mathscr{F} := \{R_\theta^n(\mathscr{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de rayos que parten de O determinada por las imágenes de $\mathscr{L}$ bajo iteraciones de R_θ, por lo que $\mathscr{F}$ es invariante (como familia) bajo la acción de R_θ.
Si $\mathcal{C}$ es una circunferencia con centro en O, entonces $\mathcal{C}$ es invariante bajo la acción de R_θ y $\mathcal{C}$ es ortogonal a todos los miembros de $\mathscr{F}$, con lo que la familia de circunferencias $\mathscr{G} := \{\mathcal{C} : \mathcal{C}$ es una circunferencia con centro en O$\}$ es invarianate bajo la acción de R_θ y es la familia ortogonal de $\mathscr{F}$, véase la imagen 4.7.

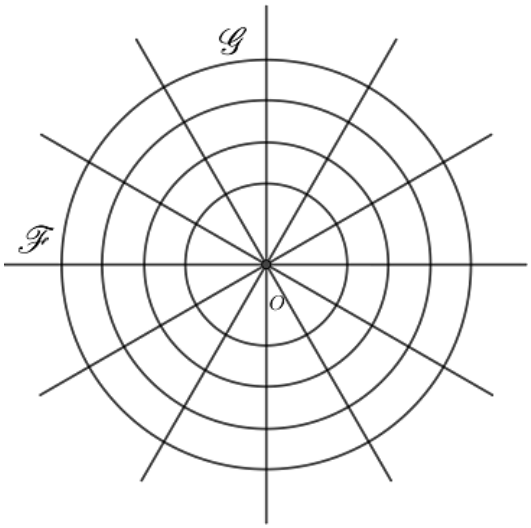

Imagen 4.7: Familias invariantes bajo una trasformación elíptica

Observación 4.3. *Las líneas que pasan por O se están intersecando en*

el punto al infinito, entonces estas familas son familas de circunferencias coaxiales mutuamente ortogonales. Esto es, la familia $\mathscr{F}$ corresponde a una familia coaxial secante que se interseca en los puntos O e ∞ y la familia $\mathscr{G}$ es la respectiva familia coaxial de circunferencias ajenas ortogonales a la famlia a $\mathscr{F}$, mencionadas en la sección 1.4, véase la imagen 4.8.

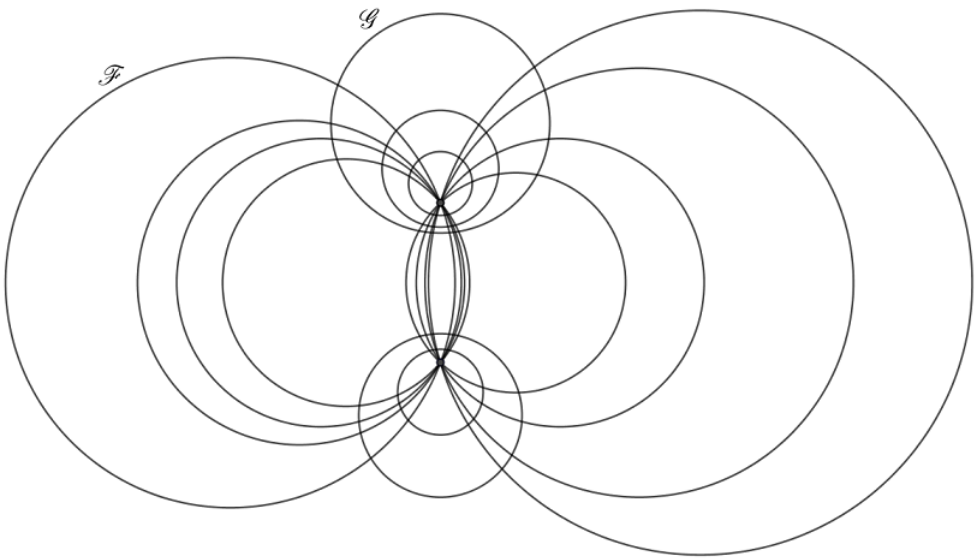

Imagen 4.8: Familias coaxiales $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$

4.4. Transformaciones hiperbólicas

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos circunferencias concéntricas en $\mathbb{R}^2$ con centro en O y r, r' sus radios, respectivamente, tales que $r < r'$. La transformación $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ se llama **hiperbólica**. Esto es,

$$H := R_{\mathcal{D}} \circ R_{\mathcal{C}}.$$

A un punto $P \in \mathbb{R}^2$ se le asocia, bajo esta transformación, un punto $P'' = H(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de trasladar a P un segmento cuya magnitud es proporcional al cuadrado del cociente de los radios $(\frac{r'}{r})^2 > 1$ y en la misma dirección que OP, véase la imagen 4.9.

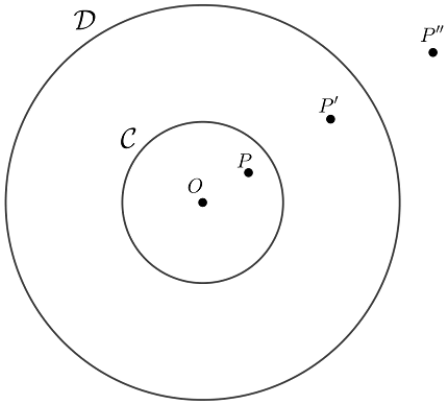

Imagen 4.9: Transformación hiperbólica

Sea $\mathcal{C}' = R_{\mathcal{D}}(\mathcal{C})$; las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son concéntricas y de radios α y 1 respectivamente, con $0 < \alpha < 1$. Se define a $\lambda := \frac{1}{\alpha^2}$ y a esta transformación se le denotará por H_λ. En este caso, cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$ se desplaza en la dirección OP al punto $\lambda \cdot OP$. Se puede describir a la transformación H_λ como $H_\lambda(P) = \lambda \cdot OP$. Además, H_λ es invertible y su inversa está dada precisamente por $H_\lambda^{-1}(P) = (\frac{1}{\lambda}) \cdot P$.
La imagen de $\mathcal{C}$ bajo H_λ es $\mathcal{C}'$. El anillo determinado por las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es una región fundamental para la acción de la transformación H_λ en $\mathbb{R}^2$, véase la imagen 4.10.

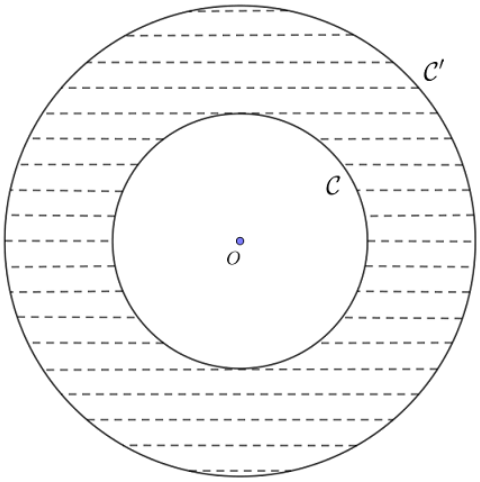

Imagen 4.10: Región fundamental de una transformación hiperbólica

Sea $\mathscr{F} := \{H_\lambda^n(\mathcal{C}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de circunferencias con céntricas con $\mathcal{C}$ determinada por las imagenes de $\mathcal{C}$ bajo iteraciones de H_λ, por lo que $\mathscr{F}$

es invariante(como familia) bajo la acción de H_λ.
Si ℓ es un rayo que parte de O, entonces ℓ es invariante bajo la acción de H_λ y es ortogonal a todos los miembros de $\mathscr{F}$, con lo que la familia $\mathscr{G} := \{\ell : \ell \text{ rayo que parte de O}\}$ es invariante bajo la acción de H_λ y es la familia ortogonal a $\mathscr{F}$, véase la imagen 4.11.

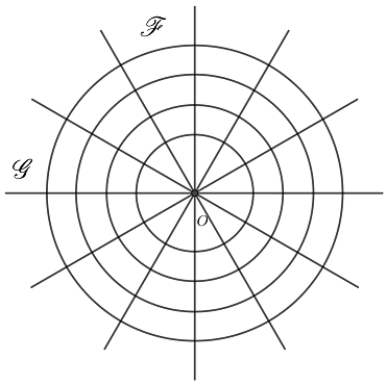

Imagen 4.11: Familias invariantes bajo una transformación hiperbólica

Observación 4.4. *Las líneas que pasan por O también se están intersecando en el punto al infinito, entonces estas familias son familias de circunferencias coaxiales secantes. La familia $\mathscr{F}$ corresponde a un famila coaxial ajena y la familia $\mathscr{G}$ corresponde a una familia de circunferencias coaxial secante en los puntos O e ∞ (basta unir sus rayos opuestos), véase la sección 1.4 y la imagen 4.12.*

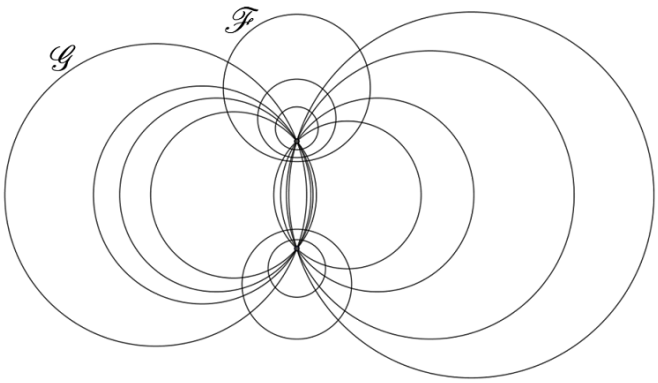

Imagen 4.12: Familias coaxiales $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$

4.5. Transformaciones loxodrómicas

Se le llama **loxodrómica** a la composición de una transformación elíptica R_θ con una transformación hiperbólica H_λ. Esto es,

$$L_{\lambda,\theta} := H_\lambda \circ R_\theta.$$

Una transformación loxodrómica asocia a un punto $P \in \mathbb{R}^2$ un punto $P'' = L_{\lambda,\theta}(P) \in \mathbb{R}^2$ que resulta de expandir el segmento OP por un factor $\lambda > 1$ en la misma dirección que OP y de rotar a P' un ángulo θ con respecto de O. Observe que:

$$L_{\lambda,\theta} := R_\theta \circ H_\lambda = H_\lambda \circ R_\theta.$$

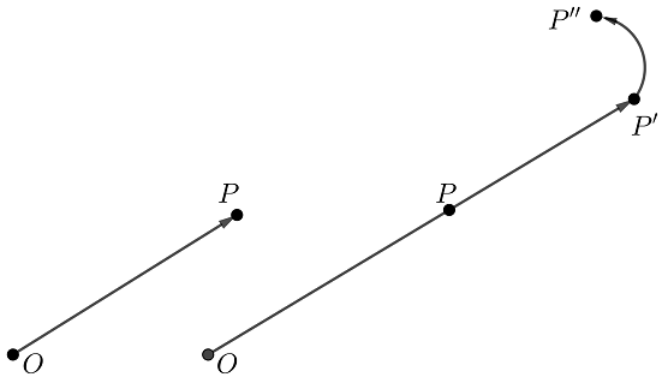

Imagen 4.13: El punto P expandido λ y rotación θ

Véase la imagen 4.13, si apartir del punto P'' repetimos el proceso de rotar el ángulo θ y expandir un factor λ, se obtiene otro punto en el plano, el cual se puede volver a expandir λ y rotar θ. Habiendo hecho este proceso varias veces, se puede ver que cada punto del plano tiene una óbita contenida en una trayectoria espiral.

4.6. Acción de subgrupos elementales

Teorema 4.5. *Si una reflexión $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ invierte la orientación de los ángulos, entonces una composición par de transformaciones de Möbius euclidiana gereral conserva la orientación de los ángulos.*

Si se considerá únicamente las composiciones pares de transformaciones de Möbius generales como subconjunto de todas las transformaciones de

Möbius generales, entonces es un grupo de transformaciones, en efecto la composición de un número par de transformaciones es un otra transformación par por lo cual la operación composición es cerrada y por el teorema previo las transformaciónes pares preservan la orientación, por tanto, pertenecen al subconjunto; por el mismo argumento, allí se encuentra la transformación identidad y la inversa de una transformación inversa de una transformación dada. A este grupo se llamará el grupo de Möbius euclidiano y se denotará por $Mob_+(\mathbb{R}^2)$.

Definición 4.6. *Una* ***acción*** *de subgrupo de transformacione, de Möbius euclidianas sobre el espacio de euclideano $\mathbb{R}^2$, se define por $\rho : Mob_+(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\rho(\gamma, P) = \gamma \cdot P := \gamma(P)$, donde P es un punto de $\mathbb{R}^2$ y $\gamma \in Mob_+(\mathbb{R}^2)$, satisface lo siguiente:*

(i) $Id \cdot P = P$, *para todo* $P \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $(\gamma_2\gamma_1) \cdot P = \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot P)$, *para todo* $\gamma_1, \gamma_2 \in Mob_+(\mathbb{R}^2)$ *y para todo* $P \in \mathbb{R}^2$.

En este sentido se dice que $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ actúa(por la izquierda) en $\mathbb{R}^2$; se supondrá que Γ es un subgrupo de $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ "discreto" (es decir, para cada $P \in \Gamma, \{P\} = A \cap \Gamma$, donde A es un abierto en $\mathbb{R}^2$).

Definición 4.7. *Sea $p \in \mathbb{R}^2$, se llama* ***órbita*** *de P bajo la acción de Γ como $\mathcal{O}_\Gamma(P) = \Gamma \cdot P; = \{\gamma(P) | \gamma \in \Gamma\}$.*

La órbita de P es un subconjunto discreto del plano formado por la imágen de P bajo los distintos elementos de Γ. Por lo que se puede difinir la relación $\sim$ en $\mathbb{R}^2$ como; $P \sim Q$ si solo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $Q = \gamma(P)$, más aún, $\sim$ es una relación de equivalencia.
En este caso la relación de equivalencia definida através de las órbitas de la acción del grupo Γ y la clase de equivalencia de un punto P, bajo esta relación corresponde a la órbita de P bajo la acción de Γ. Por lo cual las Γ- órbitas determinan una partición de $\mathbb{R}^2$ en subconjuntos ajenos; serán denotadas por $\mathbb{R}^2/\Gamma$ al conjunto de todas las órbitas de puntos en $\mathbb{R}^2$ bajo la acción de Γ, es decir;

$$\mathbb{R}^2/\Gamma := \{\mathcal{O}_\Gamma(P) : P \in \mathbb{R}^2\}$$

En general $\mathbb{R}^2/\Gamma$ es distinta de $\mathbb{R}^2$, así la acción del subgrupo Γ de $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ permite definir otros espacios como; $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$ definido por $\pi(P) = \mathcal{O}_\Gamma(P)$.

Definición 4.8. *Sea $P \in \mathbb{R}^2$, se llama* ***estabilizador(subgrupo de isotropía)*** *de P como*

$$Stab(P) = \Gamma_P := \{\alpha \in \Gamma : \alpha(P) = P\}.$$

Más aún, $Stab(P) \subset \Gamma$ es un subgrupo.

4.7. Subgrupos parábolicos

Definición 4.9. *Sea α un elemento en $Mob_+(\mathbb{R}^2)$, se llama* ***subgrupo elemental*** *al subgrupo generado por el elemento α y se denotará por $\Gamma := \{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$. La Γ- órbita o simplemente órbita de un punto $P \in \mathbb{R}^2$, bajo la acción de Γ es el conjunto $\mathcal{O}_\Gamma(P) := \{\alpha^n(P) : n \in \mathbb{Z}\}$ y además coincide con la órbita de P bajo iteraciones de α.*

Sean $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $\phi(P) = P + 1$ y $\Gamma_\phi := \{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$. A la región determinada por las líneas verticales $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ (distantes entre ellas una unidad) se denotará por $\mathcal{D}_\Gamma$, véase la imagen 4.14.

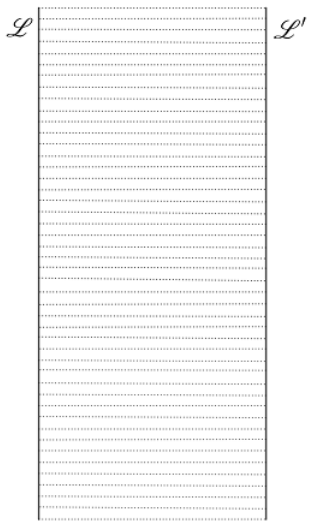

Imagen 4.14: Región fundamental de una transformación parabólica

Definición 4.10. *Se llama a $\mathcal{D}_\Gamma$ región fundamental de la acción de Γ_ϕ en $\mathbb{R}^2$.*

No es difícil ver que D_Γ cumple con:

(i) La órbita de P no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}^2$.

(ii) La órbita de P interseca a $\mathcal{D}_\Gamma$ exactamente en un punto.

(iii) Si $n \neq m$, entonces $\phi^n(D_\Gamma) \cap \phi^m(D_\Gamma) = \emptyset$.

(iv) Si $\mathscr{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$, entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \phi^n(\mathscr{D})$.

Observación 4.11. *1 El inciso (i) se refiere al hecho de que la órbita de P es discreta.*

2 La descomposición del espacio euclideano descrita en el inciso (ii) es llamada "teselación"; en otras palabras, es una descomposición de $\mathbb{R}^2$ en franjas que se yuxtaponen lateralmente a lo largo de las líneas verticales las cuales son trasladados de la región fundamental bajo la acción Γ_ϕ, véase la imagen 4.15.

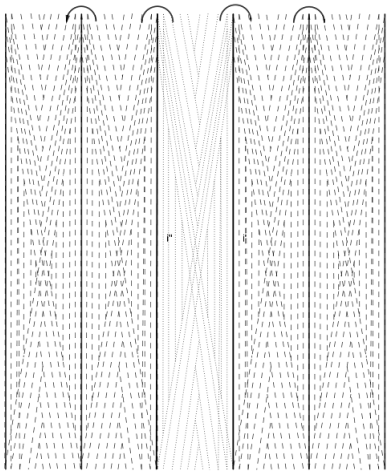

Imagen 4.15: Teselación generada por un subgrupo parabólico

Se denotará a X_ϕ al espacio de órbitas correspondientes a la acción de Γ_ϕ en $\mathbb{R}^2$ es decir, $X_\phi = \frac{\mathbb{R}^2}{\Gamma_\phi}$. La región fundamental $\mathcal{D}_\Gamma$ tiene un único punto en cada órbita de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que no están en $\{\phi^n(\mathscr{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$, más aún si $Q \in \mathcal{O}(P)$, entonces $\mathcal{O}(Q) = \mathcal{O}(P) \in X_\phi$. Los puntos de las líneas frontera $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ se "identifican" en el espacio cociente, es decir, si $P \in \mathscr{L}$, entonces $T(P) \in \mathscr{L}'$ y $\mathcal{O}(P) = \mathcal{O}(T(P))$. Esta relación indica que cada uno de los puntos de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ están superpuesto, por lo que estos puntos coinciden en el espacio de órbitas. Por lo que existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_ϕ y un cilindro recto, véase la imagen 4.16.

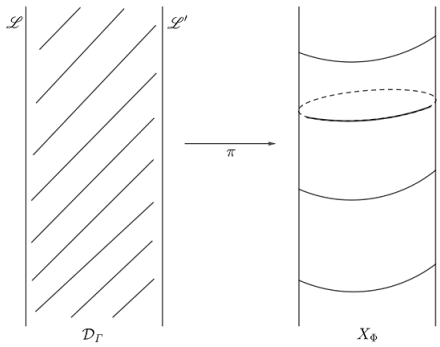

Imagen 4.16: Identificación entre el espacio de órbitas y un cilindro recto

4.8. Subgrupo elíptico

Para estos subgrupos, se hará la convención de que $\theta = \frac{2\pi}{k}$, para algún entero $k > 1$ y sean $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $R_\theta(P) = AP$, con A matríz definida como se definió en 2.17 y $\Gamma_{R_\theta} := \langle R_\theta^n : n \in \mathbb{Z} \rangle \cong \langle A^n : n \in \mathbb{Z} \rangle$. En este caso una región fundamental $\mathcal{D}_\Gamma$ para la acción Γ_{R_θ} en $\mathbb{R}^2$ está determinada por el sector a través de los rayos que parten del punto O, el cual es la intersección de las líneas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$, las cuales forman un ángulo θ entre ellas, véase la imagen 4.17.

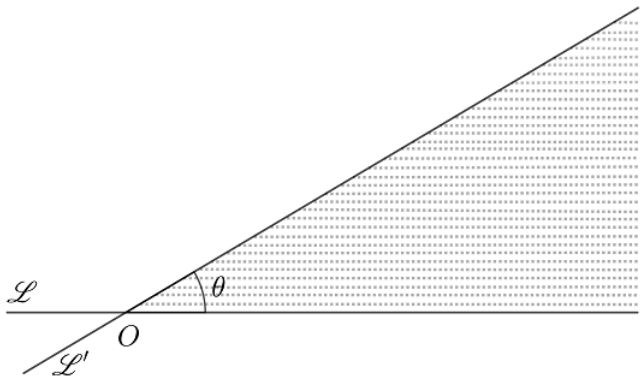

Imagen 4.17: Reflexión fundamental de una trasformación elíptica

Así, la región fundamental $\mathcal{D}_\Gamma$ de estos subgrupos cumple las siguientes propiedades: Sea $P \in \mathbb{R}^2$

(i) La órbita de P es discreto en $\mathbb{R}^2$, es decir, la órbita es finita (porque es una rotación con ángulo de la forma $\frac{2\pi}{k}$); además O es un punto fijo de R_θ.

(ii) La órbita de P interseca a $\mathcal{D}_\Gamma$ exactamente en un punto.

(iii) Sea $\mathscr{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup fr^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ por lo cual $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\theta^n(\mathscr{D})$.

Se denotará por X_{R_θ} al espacio de órbitas correspondiente a la acción de Γ_{R_θ} en $\mathbb{R}^2$. Notar que el punto O queda fijo bajo la acción de Γ_{R_θ}, es decir, $R_\theta(O) = O$ por tanto $R_\theta^n(O) = O$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, la órbita del cero es el conjunto de un solo punto; los demás puntos en $\mathcal{D}_\Gamma$ representan a un único punto en X_{R_θ} y los puntos de la frontera de $\mathcal{D}_\Gamma$ se identifican en el espacio cociente, de la siguiente manera; si P, Q y $P \neq Q$ estan en $fr(\mathcal{D}_\Gamma)$ se identifican si solo si $R_\theta(P) = Q$ es decir, existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{R_θ} y un cono, véase la imagen 4.18.

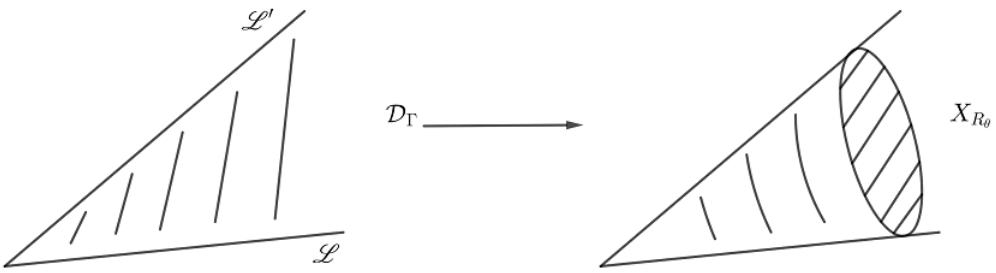

Imagen 4.18: Correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{R_θ} y un cono.

4.9. Subgrupos hiperbólicos

Sea $H_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definida por $H_\lambda(P) = \lambda \cdot P$ con $\lambda > 1$ y $\Gamma_{H_\lambda} := \{H_\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$. En este caso una región fundamental $\mathcal{D}_\Gamma$ para la acción de Γ_{H_λ} en $\mathbb{R}^2$ es el anillo cuya frontera es la unión de la circunferencia $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de radios λ y 1 respectivamente, donde $\mathcal{C} = H_\lambda(\mathcal{C}')$, véase la imagen 4.19.

[2]Es la frontera

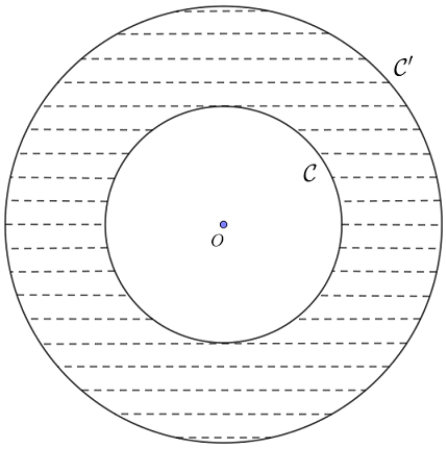

Imagen 4.19: Región fundamental de una transformación hiperbólica

Sea $P \in \mathbb{R}^2$ tal que;

(i) La órbita de P no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, es decir, la órbita de P es discreta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

(ii) La órbita de P interseca a D_Γ en un solo punto. Se sigue de la definición de dominio fundamental.

(iii) Si $n \neq m$, entonces $H_\lambda^n(D_\Gamma) \cap H_\lambda^m(D_\Gamma) = \emptyset$ (inmediato del inciso (ii)).

(iv) Si $\mathscr{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_\lambda^n(\mathscr{D})$, véase la imagen 4.20.

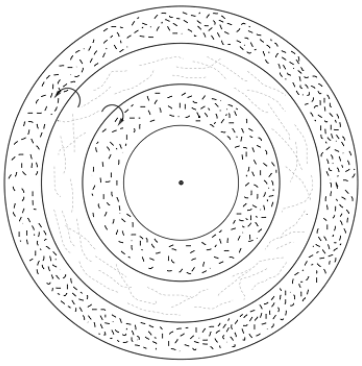

Imagen 4.20: Teselación generada por un subgrupo hiperbólico

Sea X_{H_λ} el espacio de órbitas asociado a la acción de Γ_{H_λ} en $\mathbb{R}^2$; por otro lado los puntos de las circunferencias frontera $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se identifican en el espacio

cociente, es decir, existe función en la cual hay una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{H_λ} y un toro, véase la imagen 4.21.

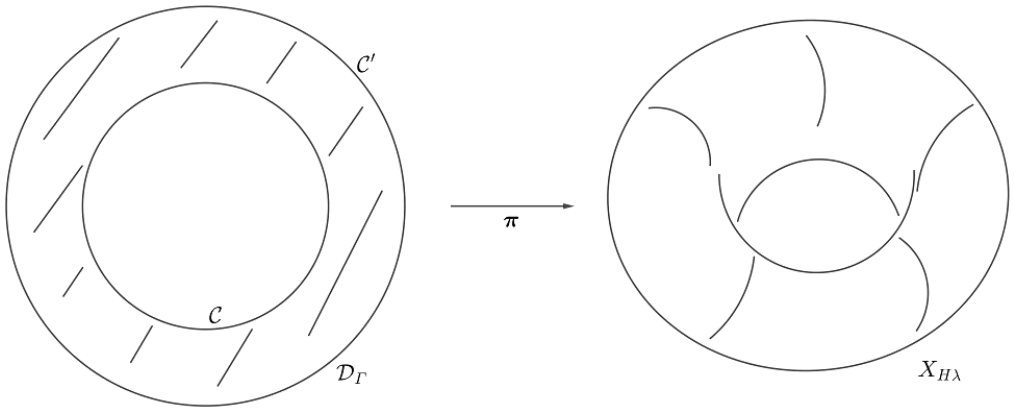

Imagen 4.21: Familias coaxiales $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$

Referencias

[1] Apostol, Y. *Análisis matemático*, 2 ed. Edit.Reverté, 1996.

[2] Artzy, R. *Linear geometry.* Addison-Wesley., 1965.

[3] Conway, J. B. *Functions of one complex variable*, 2 ed., vol. 159. Springer, 1978.

[4] Cruz, M., and García, M. *Geometría euclidiana bidimensional y su grupo de transformaciones.* Papirhos., 2017.

[5] Herstein, I. N. *Abstract algebra.* Prentice Hall., 1996.

[6] Iribarren, I. L. *Topología de espacios métricos.* Limusa-Wiley, México, 1973.

[7] Lang., S. *Complex analysis*, vol. 103. Springer Science and Business Media, 2013.

[8] Lascurain, A. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional.* UNAM, 2005.

[9] Marsden, J., and M. J. Hoffman, M. *Basic complex analysis.* Macmillan, 1987.

[10] Penrose, R., and Burnett-Stuart, G. *Visual Complex Analysis.* Tristan Needham, Department of Mathematics University of San Francisco, 1997.