Estudio del $n-$ésimo hiperespacio de un continuo

Tesis escrita por
Levent Arturo Chaves Moreno

Dirigida por

Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

Como requerimiento para obtener
el título de
Licenciado en Matemáticas

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Puebla, Puebla

Defendida el 2 de Febrero de 2018

AGRADECIMIENTOS

Una lección que me parece fundamental en Matemáticas[1], es aquella que reza que uno no puede hacerlo todo solo. Sin problemas se puede extender dicha lección a todo el complejo que es la vida misma. En esta sección me dedico a agradecer a todas aquellas personas que me ayudaron en este viaje, o que por lo menos, me lo hicieron más llevadero.

Primero, a mi mamá. Es cliché darte las gracias por darme la vida. Quiero ir más lejos y darte las gracias por más cosas. Quiero darte las gracias por acompañarme durante todo este trayecto. Por enseñarme a ser una persona con principios. Por enseñarme que rendirse nunca es una opción. Por enseñarme a trabajar contra la corriente. Recuerdo incluso que tu me enseñaste el concepto del infinito mientras me llevabas cocadas cuando yo era niño. Eres la piedra angular de todo este trabajo, y sin todo el esfuerzo y sacrificio que hiciste a lo largo de estos años, esto no hubiera sido posible. Te quiero mucho mamá, y no tienes idea de lo agradecido que estoy por todo lo que hiciste por mí. Gracias por estar siempre a mi lado. Gracias por apoyarme todos estos años.

Segundo, a mi papá. Yo quiero darte las gracias por apoyarme con tu esfuerzo durante estos años. Con tu ejemplo me has mostrado el valor de la responsabilidad y de que hay que hacer lo correcto. Las circunstancias no nos fueron favorables pero eso no significa que no nos vayan a ser favorables en el futuro y yo tengo esperanza de que así sea. Te agradezco todo el sacrificio que has hecho y que haces con tal de que yo cumpla mis proyectos. Te agradezco también tu generosidad con los consejos, con las lecciones de vida. Te agradezco porque siempre, siempre, siempre, te las has ingeniado -ante la adversidad- para siempre haber formado parte de mi vida, y para apoyarme en los momentos cruciales de mi desarrollo. Te quiero mucho papá.

Tercero, a Brenda. Yo tengo tanto que agradecerte. Eres y has sido un apoyo y un soporte en mi vida. Contigo comprendí que no es necesario caminar solo, si no que se puede caminar con alguien, contigo. Me diste el derecho a descansar, a dejar de defenderme de la vida, y a vivirla un poco más. Yo te estoy muy agradecido por todo el cariño que me das, por toda tu paciencia y por tu mera existencia. Yo podría jurar que el corazón se me hace más grande cada que te veo. Yo quiero echarle muchas muchas ganas a las matemáticas para poderte regalar una casa y

[1] Me tardé lo que dura la carrera en comprenderla realmente, pero vaya, más vale tarde que nunca.

que vivamos siempre ahí. Regalarte muchos chocolates, y cantarte canciones para hacerte feliz. Yo te puedo decir que me has hecho muy feliz, y le has hecho la vida colorida al desgraciado que escribe esto. Me haces sentir que no camino solo, y en particular por eso te doy las gracias. Yo nunca había vivido algo así y espero poder compensártelo de alguna manera. Soy tan feliz que creo que siempre voy a estar en deuda contigo. Te amo mucho, Brenda.

Cuarto, a mis amigos y compañeros de relajo. Al Papu, Dios, Ferras, Cacalina, Brayan y Erikita. A Mire, Luis y Migue. A Aldo, Jerga, Yoko, y Talía. Al Gordo y a Armando. A Laurita. Al Doctor Raspados y al Popocatépetl. A Mario. A los Cobras de biología. A mis queridísimos Liga y Cuep. Me la pasé a todo dars con ustedes dudes y les aprendí un montón. Gracias por tantos momentos y comentarios inapropiados.

Quinto, a mis profesores. A Paty Domínguez, a Carlos Guillén, a Manuel Ibarra, a Iván Martínez, a Angel Contreras, a Francisco Estrada. Gente comprometida que pone el ejemplo. Matemáticos en toda la extensión de la palabra. Verdaderos ejemplos a seguir. Gracias por sus clases, por su apoyo, por sus consejos y puntos de vista. También quiero darle las gracias a Pedro Tolentino y a Gilberto Silva por todos sus consejos. Su visión me ha resultado invaluable y les estoy profundamente agradecidos.

Sexto, a David Carrasco y Fernando Macías. Le agradezco al profesor Carrasco haber aceptado que yo fuera su alumno, le agradezco su paciencia y apoyo a lo largo de todos estos años. Usted me enseño que las cosas se hacen con paciencia y trabajo. Francamente creo que las enseñanzas de matemáticas más importantes me las enseñó usted. Espero no haber dado tanta lata. Mil gracias por su dirección y su amistad durante todos estos años. También le doy las gracias al profesor Macías. Aunque no tuve el gusto de tratarlo tanto, siempre me ha apoyado en las circunstancias que han sido surgiendo. También le agradezco su revisión de esta tesis. Usted tiene un verdadero ojo de águila para detectar errores y la tesis no hubiera sido lo mismo sin su dirección. Gracias por todo.

Séptimo, a mis sinodales Raúl Escobedo, Alexander Bykov y Paty Domínguez, quienes a pesar de sus múltiples ocupaciones, se tomaron el tiempo de revisar esta tesis y de mejorarla sustancialmente.

A todos, reitero, muchas gracias.

RESUMEN

Este trabajo está basado en la sección 6.1 del libro *Topics on Continua* de Sergio Macías ([8]). En dicha sección se recolectan algunos resultados que se encuentran en dos artículos de Sergio Macías llamados *On the hyperspaces* $C_n(X)$ *of continua* ([6]) y *On n-fold hyperspaces of continua II* ([7]). El objetivo es desarrollar las demostraciones encontradas en dicha sección. La razón de ello obedece a que los resultados enunciados en dicha sección se pueden entender como propiedades generales del *n−ésimo hiperespacio* de un continuo.

Este texto está organizado del siguiente modo:

(i) En el Capítulo 1, se exponen los resultados necesarios para poder comprender las demostraciones del Capítulo 2. Se exploran los conceptos de hiperespacios, convergencia de sucesiones, topología de Vietoris, conexidad local, continuos descomponibles e indescomponibles, funciones de Whitney, arcos ordenados, homotopía y contractibilidad. Se dan demostraciones distintas de algunos resultados. Además, se hacen explícitos algunos resultados que no se encuentran en la literatura, pero que se considera, son lo suficientemente interesantes como para ser enunciados y demostrados.

(ii) En el Capítulo 2, se desarrollan los resultados de la sección 6.1 de [8]. Además, se hacen explícitos resultados que, al criterio del autor, son lo suficientemente interesantes como para ser enunciados.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

CONCEPTOS ASOCIADOS A LA TEORÍA DE LOS CONTINUOS Y SUS HIPERESPACIOS

1.1. Hiperespacios de continuos y convergencia de sucesiones

Definición 1.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio métrico compacto no vacío .

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se definen los siguientes conjuntos:

(i) $2^X = \{A\colon A$ es un conjunto cerrado no vacío de X$\}$;

(ii) $C(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ es conexo}\}$;

(iii) $C_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\}$;

(iv) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$;

(v) $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$.

A los conjuntos definidos anteriormente les llamaremos *hiperespacios*.

Teorema 1.1.3. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo.*

La prueba del Teorema 1.1.3 está en [8, pp. 60-62].

Definición 1.1.4. Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Para cada $\epsilon > 0$ y cada $A \in 2^X$ defínase

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : d(a, x) < \epsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Lema 1.1.5. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Para cada $A \in 2^X$, $N_d(\epsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B_d(a, \epsilon)$.*

Demostración. Sea $x \in N_d(\epsilon, A)$. Entonces $d(x, a_0) < \epsilon$ para algún $a_0 \in A$. Así, $x \in B_d(a_0, \epsilon)$ y tenemos que $N_d(\epsilon, A) \subset \bigcup_{a\in A} B_d(a, \epsilon)$.

Ahora, si $x \in \bigcup_{a\in A} B_d(a,\epsilon)$, entonces $x \in B_d(a_0,\epsilon)$ para algún $a_0 \in A$. Así, $x \in N_d(\epsilon, A)$ y tenemos que $\bigcup_{a\in A} B_d(a,\epsilon) \subset N_d(\epsilon, A)$.

Por tanto $N_d(\epsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B_d(a,\epsilon)$. ∎

Lema 1.1.6. *Sea X un continuo y $A \subset X$ un cerrado de X. Suponga que $A \subset G$, donde G es un abierto de X. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(A,\epsilon) \subset G$.*

Demostración. Como A es cerrado de X y X es un espacio métrico compacto, se sigue que A es compacto. Como $A \subset G$, y G es abierto en X, se sigue que para cada $a \in A$, existe $\epsilon_a > 0$ tal que $B_d(a,\epsilon_a) \subset G$. Así, $A \subset \bigcup_{a\in A} B_d(a, \frac{\epsilon_a}{2})$. Pero como A es compacto, se sigue que existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_d(a_i, \frac{\epsilon_{a_i}}{2})$.

Ahora, definamos $\epsilon = \text{mín}\{\frac{\epsilon_{a_i}}{2} : i \in \{1,\ldots,m\}\}$. Note que $\epsilon > 0$.

Veamos ahora que $N(A,\epsilon) \subset G$. Si tomamos $x \in N(A,\epsilon) = \bigcup_{a\in A} B_d(a,\epsilon)$ entonces existe $a \in A$ tal que $x \in B_d(a,\epsilon)$. Pero tenemos que

$$B_d(a,\epsilon) \subset B_d(a, \frac{\epsilon_{a_i}}{2}) \subset B_d(a,\epsilon_a) \subset G.$$

Por tanto, $x \in G$ y ya podemos concluir que $N(A,\epsilon) \subset G$. ∎

Teorema 1.1.7. *Sea X un espacio métrico compacto y no vacío. Sean $\epsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$. Entonces*

(i) Si $0 < \delta \leq \epsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, B)$;

(ii) $cl_X N(\epsilon, A) \subset N(2\epsilon, A)$;

(iii) $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$;

(iv) $N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) \colon \delta \in (0,\epsilon)\}$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$. Denotemos por d a la métrica de X.

Verifiquemos la propiedad (i).

Sean $0 < \delta \leq \epsilon$ y $A \subset B$. Tomemos $x \in N(\delta, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \delta$. Como $A \subset B$, se sigue que $a \in B$. Como $\delta \leq \epsilon$, se sique que $d(x,a) < \epsilon$. Por tanto, $x \in N(\epsilon, B)$.

Verifiquemos la propiedad (ii).

Sea $x \in cl_X N(\epsilon, A)$. Entonces existe $y \in N(\epsilon, A)$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Además, existe $a \in A$ tal que $d(y, a) < \epsilon$. En consecuencia, de la desigualdad del triángulo, obtenemos que $d(x, a) < 2\epsilon$. Por tanto, $x \in N(2\epsilon, A)$.

Verifiquemos la propiedad (iii).

Por (i), tenemos que $N(\epsilon, A), N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Entonces $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Por otro lado, si $x \in N(\epsilon, A \cup B)$, entonces existe $c \in A \cup B$ tal que $d(x, c) < \epsilon$. Como $c \in A$ o bien, $c \in B$, se sigue en cualquier caso que $x \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$.

Finalmente, verifiquemos la propiedad (iv).

Dado $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$, tenemos por (i) que $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$. Entonces $\bigcup\{N(\delta, A)\colon \delta \in (0, \epsilon)\} \subset N(\epsilon, A)$. Por otro lado, tomemos $x \in N(\epsilon, A)$. Entonces, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Podemos tomar $\delta' > 0$ tal que $d(x, a) < \delta' < \epsilon$. En consecuencia, $x \in N(\delta', A)$, pero claramente $N(\delta', A) \subset \bigcup\{N(\delta, A)\colon \delta \in (0, \epsilon)\}$. Por tanto, $N(\epsilon, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A)\colon \delta \in (0, \epsilon)\}$ y se concluye la igualdad deseada. ■

Definición 1.1.8. Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Para cada $A, B \in 2^X$ sea

$$M(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$$

y defínase

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\, M(A, B).$$

A H_d le llamaremos la *métrica de Hausdorff*.

Lema 1.1.9. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. La función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ está bien definida.*

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$. Note primero que A, B son no vacíos por la definición de 2^X. Luego $N_d(\epsilon, A)$ y $N_d(\epsilon, B)$ son no vacíos. Ahora, como el conjunto $\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$ está acotado inferiormente por 0, lo único que resta verificar es que dicho conjunto es no vacío. Como X es compacto, se sigue que X es precompacto [1], esto es, existen $a_1, \ldots, a_M \in X$ tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_d(a_i, 1).$$

[1]Ver por ejemplo, [3, (3.16.1), pp. 58-59]

Así, X es acotado. Luego, el diámetro de X, denotado por diám(X) existe y es finito.

Ahora, definamos $\epsilon_0 = \text{diám}(X) + 1 > 0$. Note que para cada $x, y \in X$, se cumple que $d(x, y) \leq \text{diám}(X) < \text{diám}(X) + 1 = \epsilon_0$, en particular para todo $x \in A$ y $y \in B$. Entonces es inmediato que $A \subset N_d(\epsilon_0, B)$ y $B \subset N_d(\epsilon_0, A)$.

Por tanto, $\epsilon_0 \in \{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}$ y así, H_d está bien definida. ■

Teorema 1.1.10. *Sea (X, d) un espacio métrico no vacío y $K \subset X$ un compacto tal que $x_0 \notin K$. Entonces existe $y_0 \in K$ tal que $d(y_0, x_0) \leq d(x, x_0)$ para cada $x \in K$.*

Demostración. Considere la función $f : K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Como f es continua (la función distancia es continua), y K es un compacto, se sigue que f alcanza su mínimo, esto es, existe $y_0 \in K$ tal que $d(y_0, x_0) \leq d(x_0, x)$ para cada $x \in K$. ■

Lema 1.1.11. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Si $K, L \in 2^X$ y $x \in K$, entonces existe $y \in L$ tal que $d(x, y) \leq H_d(K, L)$.*

Demostración. Como $K, L \in 2^X$, se sigue que K, L son cerrados no vacíos. Notando que son subconjuntos cerrados del compacto X, se sigue que K y L son compactos.

Ahora, sea $x \in K$. Si $x \in L$, entonces $d(x, x) = 0 \leq H_d(H, K)$.

Suponga que $x \notin L$. Entonces, como L es compacto, se sigue por el Teorema 1.1.10 que existe $y \in L$ tal que $d(x, y) \leq d(x, z)$ para cada $z \in L$.

Ahora, solo resta verificar que $d(x, y) \leq H_d(K, L)$.

Si no fuera así, tendríamos que $H_d(K, L) < d(x, y)$. Note que $d(x, y)$ es fijo. Entonces por propiedades del ínfimo, existe $\epsilon_0 \in M(A, B)$ tal que $\epsilon_0 < d(x, y)$. Se sigue que $K \subset N_d(\epsilon_0, L)$ y $L \subset N_d(\epsilon_0, K)$. En particular, $K \subset N_d(\epsilon_0, L)$ y así, para $x \in K$, existe $\theta \in L$ tal que

$$d(x, \theta) < \epsilon_0 < d(x, y),$$

pero esto es una contradicción, ya que $d(x, y) \leq d(x, z)$ para todo $z \in L$, y $\theta \in L$

Por tanto $d(x, y) \leq H_d(K, L)$. ■

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. La función H_d es una métrica.*

Demostración. Verifiquemos las siguientes proposiciones:

(i) $H_d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.

Suponga que $H_d(A, B) = 0$. Entonces $0 = \text{ínf} M(A, B)$. Así, $A \subset N_d\left(\frac{1}{n}, B\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in A$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe b_n en B tal que $d(a, b_n) < \frac{1}{n}$. Como B es compacto, para la sucesión $\{b_n\}$ existe una subsucesión convergente digamos $\{b_{n_s}\}$ con límite $b \in B$ cuando $s \to \infty$. De ahí que $d(a, b) \leq d(a, b_{n_s}) + d(b_{n_s}, b)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $s \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(a, b) \leq 2\epsilon$. Entonces $d(a, b) = 0$ y así $a = b$. Por tanto $a \in B$ y se concluye que $A \subset B$.

Para probar que $B \subset A$ se usa un método análogo. Así, se concluye que $A = B$.

Ahora, si $A = B$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $A \subset N_d(\epsilon, B)$ y $B \subset N_d(\epsilon, A)$. Así, $\text{ínf} M(A, B) = 0$ y por tanto $H_d(A, B) = 0$.

(ii) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$.

Se sigue de la definición.

(iii) $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

Sean $\delta > 0$ y $a \in A$. Entonces por el Lema 1.1.11, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B)$. Usando otra vez el Lema 1.1.11 y el mismo $b \in B$, existe $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq H_d(B, C)$. Así,

$$d(a, c) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta.$$

Entonces, para todo $a \in A$, se tiene que $A \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta, C)$. Mediante un proceso análogo, se obtiene que $C \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta, A)$. De aquí se sigue que $H_d(A, C) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta$. Finalmente, como δ es arbitrario, se concluye que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

Por tanto, H_d es una métrica. ■

Teorema 1.1.13. *Sea $\epsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \epsilon$ si y solo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Es inmediato de la definición de la métrica de Hausdorff que $H(A, B) < \epsilon$ implica que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Supongamos ahora que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 1.1.7, inciso (iv), se sigue que

$$A \subset N(\epsilon, B) = \bigcup\{N(\delta, B) \colon 0 < \delta < \epsilon\},$$

$$B \subset N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A)\colon 0 < \delta < \epsilon\}.$$

Como A es compacto, existen $\delta_1, \ldots, \delta_n \in (0, \epsilon]$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Denotemos por $\delta' = \text{máx}\{\delta_i\colon i = 1, \ldots, n\}$. Note que $0 < \delta' < \epsilon$. Entonces $A \subset N(\delta', B)$. Análogamente, de la compacidad de B, existe $\delta'' > 0$ con $\delta'' < \epsilon$ tal que $B \subset N(\delta'', A)$. Si $r = \text{máx}\{\delta', \delta''\}$, se sigue que $0 < r < \epsilon$ y además $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Por la definición de la métrica de Hausdorff, se sigue que $H(A, B) \leq r < \epsilon$ y se sigue el resultado. ■

Ahora, demostraremos y/o enunciaremos algunos teoremas de convergencia que son necesarios para demostrar algunos teoremas relacionados con los hiperespacios n-ésimos.

Definición 1.1.14. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X, decimos que A_n *tiende a* A y lo denotamos por $A_n \longrightarrow A$ con $A \in 2^X$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $H_d(A_n, A) < \epsilon$.

Note que la Definición 1.1.14 de convergencia está definida en términos de la métrica de Hausdorff. Nosotros queremos mostrar una equivalencia de convergencia en términos de conjuntos.

Definición 1.1.15. Sea X un compacto no vacío y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X.

Se define el *límite inferior* de A_n como $\text{límínf}(A_n) = \{x \in X\colon \text{para todo } \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ salvo un número finito}\}$.

Se define el *límite superior* de A_n como $\text{límsup}(A_n) = \{x \in X\colon \text{para todo } \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset, \text{para una infinidad de } n \in \mathbb{N}\}$.

Observación. Note que si $x \in \text{límínf}(A_n)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset$; y si $x \in \text{límsup}(A_n)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B(x, \epsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ para $n \in J$.

Así, una consecuencia inmediata es que $\text{límínf}(A_n) \subset \text{límsup}(A_n)$.

Definición 1.1.16. Decimos que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en 2^X *converge a* $A \in 2^X$ si $\text{líminf}(A_n) = \text{límsup}(A_n) = A$ y lo denotamos por $\text{lím}A_n = A$.

Teorema 1.1.17. *Toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de un espacio métrico separable X tiene una subsucesión convergente en el sentido de la Definición 1.1.16.*

La prueba del Teorema 1.1.17 se puede encontrar en [8, Teorema 1.2.28]

Además, se tiene la siguiente equivalencia entre convergencias.

Teorema 1.1.18. *Sea X un continuo, y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X. Entonces $Y_n \to Y$ si y solo si $\lim Y_n = Y$.*

La prueba del Teorema 1.1.18 se puede encontrar en [10].

Una consecuencia importante del Teorema 1.1.18 es la siguiente.

Teorema 1.1.19. *Si X es un compacto no vacío, entonces 2^X es compacto.*

Demostración. Note que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X, entonces como cada A_n es un conjunto cerrado y X es compacto -y por tanto separable-, se sigue por el Teorema 1.1.17 que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en el sentido de la Definición 1.1.16. Pero por el Teorema 1.1.18 esto es equivalente a que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenga una subsucesión convergente en el sentido de la Definición 1.1.14.

Así, 2^X es compacto. ∎

Teorema 1.1.20. *Sea X un compacto no vacío. Supongamos que $A, B \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Entonces,*

(I) si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;

(II) si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$;

(III) $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [1, Teorema 20]

Teorema 1.1.21. *Sea X un compacto no vacío. Suponga que $U \subset X$ y*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{A \in 2^X : A \subset U\}\\ \mathcal{W} &= \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Entonces, si U es abierto, entonces $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son abiertos en 2^X y si U es cerrado, entonces $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son cerrados en 2^X.

Demostración. Suponga que U es abierto. Veamos que $\mathcal{T} = 2^X \setminus \mathcal{V}$ es cerrado, es decir, que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{T}$ convergente, es decir, $A_n \to A$. Veamos que $A \in \mathcal{T}$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ (pues cada $A_n \in \mathcal{T}$), y como $X \setminus U$ es cerrado, se sigue por el Teorema 1.1.20 que $A \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

Así, $A \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrado en 2^X.

Por tanto $\mathcal{V}$ es abierto en 2^X.

La prueba de los demás casos es análoga. ■

1.2. Topología de Vietoris y propiedades métricas destacables de los continuos

Primero definiremos y enunciaremos algunas propiedades de una topología sobre 2^X que se llama *Topología de Vietoris*.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio métrico compacto con topología τ.

Para cada $U \in \tau$, se define:

$$\Gamma(U) = \{A \in 2^X : A \subset U\};$$

$$\Delta(U) = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Y para $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^n U_i, \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Lema 1.2.2. *Se verifican las siguientes relaciones.*

(I) $\Gamma(U) = \langle U\rangle$ *y* $\Delta(U) = \langle X, U\rangle$*;*

(II) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \left[\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^n \Delta(U_i)\right]$*;*

(III) y si $U_0 = \bigcup_{i=1}^n U_i$ *y* $V_0 = \bigcup_{i=1}^m V_i$*, entonces*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle = \langle V_0 \cap U_1, U_2, \ldots, V_0 \cap U_n, U_0 \cap V_1, \ldots, U_0 \cap V_m\rangle.$$

Demostración. Para ver que $\Gamma(U) = \langle U\rangle$ basta observar que cada $A \in 2^X$ es no vacío.

Y para ver que $\Delta(U) = \langle X, U \rangle$, basta observar que $U \cup X = X$ y cada $A \in 2^X$ es no vacío.

Ahora verifiquemos que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left[\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^n \Delta(U_i)\right]$.

En efecto. Note que $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i\}$ y por otro lado, tenemos que $\bigcap_{i=1}^n \Delta(U_i) = \{A \in 2^X : A \in \Delta(U_i) \neq \emptyset\} = \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}$ y se sigue el resultado.

Finalmente veamos que si $U_0 = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V_0 = \bigcup_{i=1}^m V_i$, entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \langle V_0 \cap U_1, U_2, \ldots, V_0 \cap U_n, U_0 \cap V_1, \ldots, U_0 \cap V_m \rangle$.

En efecto. Tenemos las siguientes igualdades:

$\langle V_0 \cap U_1, U_2, \ldots, V_0 \cap U_n, U_0 \cap V_1, \ldots, U_0 \cap V_m \rangle = \{A \in 2^X \colon A \subset \bigcup_{i=1}^n (V_0 \cap U_i) \cup \bigcup_{i=1}^m (U_0 \cap V_i)$, y $A \cap V_0 \cap U_i \neq \emptyset, A \cap U_0 \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Y también tenemos que

$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \{A \in 2^X \colon A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Así, la igualdad se sigue. ■

Teorema 1.2.3. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d y topología τ.*

Se definen

(I) $C = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \colon U_i \in \tau$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}\}$*;*

(II) $\mathcal{P} = \{\Gamma(U) \colon U \in \tau\} \cup \{\Delta(U) \colon U \in \tau\}$.

Entonces C es una base para la topología obtenida de la métrica de Hausdorff H_d para 2^X y $\mathcal{P}$ es una subbase para dicha topología.

Demostración. Del Lema 1.2.2 y observando que $\langle X \rangle = 2^X$, tenemos que C es una base para alguna topología τ_V para 2^X ya que C es cerrado bajo intersección finita.

Ahora, sea $[\mathcal{P}] = \{\bigcap \mathcal{L} \colon \mathcal{L}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{P}\}$. De (ii) del Lema 1.2.2, se sigue que $C \subset [\mathcal{P}]$ ya que si $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \in C$ entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left[\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^n \Delta(U_i)\right]$ y pues $\{\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right), \Delta(U_1), \Delta(U_2), \ldots, \Delta(U_n)\} \subset \mathcal{P}$. Así, efectivamente $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \in [\mathcal{P}]$.

Por tanto, ya tenemos que $C \subset [\mathcal{P}]$.

Además, usando que C es cerrado bajo intersecciones finitas, y de (i) del Lema 1.2.2 se sigue que $\mathcal{P} \subset C$. Entonces $[\mathcal{P}] \subset C$ pues si $\bigcap \mathcal{L} \in [\mathcal{P}]$, donde $\mathcal{L}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{P}$, entonces $\bigcap \mathcal{L}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{P}$, pero cada elemento de $\mathcal{P}$ es un elemento de C. Así, $\bigcap \mathcal{L} \in C$. Así, efectivamente concluimos que $[\mathcal{P}] \subset C$.

Por tanto, $C = [\mathcal{P}]$. De aquí que $\mathcal{P}$ es una subbase para τ_V

Ahora, sea τ_H la topología inducida por la métrica de Hausdorff H_d para 2^X. Para concluir la prueba, bastará mostrar que $\tau_V = \tau_H$.

Verifiquemos primero que $\tau_V \subset \tau_H$.

Sea $U \in \tau$ tal que $U \neq X$. Sea $A \in \Gamma(U)$. Entonces, para $\epsilon = d(A, X \setminus U)$, tenemos que $\epsilon > 0$, ya que $A \subset U, U \neq X, A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y tanto A como $X \setminus U$ son cerrados. Veamos que $B_H(A, \epsilon) \subset \Gamma(U)$. Si $R \in B_H(A, \epsilon)$ entonces $R \in 2^X$ y $H_d(A, R) < \epsilon$, de ahí que $R \subset N_d(\epsilon, A)$ y así $R \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Así, $R \subset U$, y se sique que $R \in \Gamma(U)$. Por tanto se verifica que $B_H(A, \epsilon) \subset \Gamma(U)$. Así, $\Gamma(U) \in \tau_H$.

Ahora, suponga que $A \in \Delta(U)$. Como $A \cap U \neq \emptyset$, existe $p_0 \in A \cap U$. Sea $\epsilon_0 = d(\{p_0\}, X \setminus U)$. Luego $\epsilon_0 > 0$. Veamos que $B_H(A, \epsilon_0) \subset \Delta(U)$. Si $R \in B_H(A, \epsilon_0)$ y $R \cap U = \emptyset$, entonces $R \subset X \setminus U$, luego $R \subset N_d(\epsilon_0, A)$ y dado que $R \in 2^X$, se sigue que $R \neq \emptyset$, luego existe $r \in R$. Lo anterior implica que $d(r, p) < \epsilon_0 = d(\{p_0\}, X \setminus U)$ y $r \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción. Así, $R \cap U \neq \emptyset$ y se concluye que $R \in \Delta(U)$. Por tanto, tenemos que $B_H(A, \epsilon_0) \subset \Delta(U)$.

Así, $\Delta(U) \in \tau_H$.

Y notando que $\Gamma(X) = \Delta(X) = 2^X$, se sigue que $\mathcal{P} \subset \tau_H$. Recordando que $\mathcal{P}$ es una subbase para τ_V, se sigue que $\tau_V \subset \tau_H$ dado que cada elemento de la base de τ_V es intersección finita de elementos de $\mathcal{P} \subset \tau_H$.

Ahora, resta verificar que $\tau_H \subset \tau_V$. Para ello, bastará mostrar que para cada bola abierta $B_H(A, \epsilon)$ en 2^X, existen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau$ tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset B_H(A, \epsilon)$.

Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Note que A es un compacto no vacío por ser un subconjunto cerrado del compacto X. Así, tenemos que A es precompacto y esto nos garantiza que para $\epsilon/2 > 0$ existen abiertos de X, digamos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tales que $diam(U_i) < \epsilon/2$, $A \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$, y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Así, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$.

Veamos ahora que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset B_H(A, \epsilon)$.

Sea $R \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. Entonces $R \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$ y $R \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Note además que $R \in 2^X$. Veamos entonces que $R \in B_H(A, \epsilon)$, es decir, $H_d(R, A) < \epsilon$.

Note que si $w \in R$, entonces $w \in U_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y dado que $A \cap U_{i_0} \neq \emptyset$, se sigue que existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \in U_{i_0}$. Luego tenemos que $d(w, a) < \epsilon/2$. Así, $R \subset N_d(A, \epsilon/2)$. Mediante un argumento análogo obtenemos que $A \subset N_d(R, \epsilon/2)$. Por tanto $H_d(R, A) \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Así, efectivamente ya tenemos que $R \in B_H(A, \epsilon)$.

Entonces ya podemos concluir que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset B_H(A, \epsilon)$.

Y entonces ya podemos decir que $t_H \subset t_V$ pues si $Y \in B_H(A, \epsilon)$, por propiedades de espacio métrico existe $r > 0$ tal que $Y \in B_H(Y, r) \subset B_H(A, \epsilon)$ y de lo anterior existe $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \in \tau_V$ tal que $Y \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \subset B_H(Y, r) \subset B_H(A, \epsilon)$.

Así cada $B_H(A, \epsilon)$ se puede ver como unión arbitraria de abiertos de τ_V.

Por tanto, $\tau_V = \tau_H$ ∎

Corolario 1.2.4. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces la topología obtenida de la métrica de Hausdorff para 2^X depende solo de la topología en X.*

Demostración. Basta observar que la topología t_V del Teorema 1.2.3 solo depende de la topología τ de X y $\tau_V = \tau_H$. ∎

A la topología τ_V se le conoce a veces como *Topología de Vietoris*.

Observación. Sea X un continuo. Escribiremos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m\rangle_n$ para denotar a la intersección $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap C_n(X)$, es decir, los abiertos relativos de $C_n(X)$.

La demostración del siguiente teorema muestra la utilidad de los abiertos vietóricos. Compare con la demostración aquí expuesta con la de [12, 0.8 THEOREM].

Teorema 1.2.5. *Si X es un compacto, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $A_n \to A$. Veamos que $A \in C(X)$, es decir, que A es conexo. Suponga que A es disconexo. Entonces existen U, V abiertos de X ajenos, no vacíos y tales que $A \subset U \cup V$; además, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Entonces $A \in \langle U, V\rangle$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces $A_n \in \langle U, V\rangle$. En particular, $A_N \in \langle U, V\rangle$. Esto implica que $A_N \subset U \cup V$, $A_N \cap U \neq \varnothing$ y $A_N \cap V \neq \varnothing$, lo cual es falso debido a que $A_N \in C(X)$ y $U \cap V = \varnothing$.

Así, sin pérdida de generalidad, podemos concluir que $A \subset U$ y $A \cap V = \varnothing$. En consecuencia, A es conexo.

Por tanto, $C(X)$ es cerrado en 2^X. ■

A continuación enunciamos y demostramos algunas propiedades que si bien son de espacios métricos, toman un significado especial al situarlas en el contexto de la teoría de continuos.

Teorema 1.2.6. *En cualquier espacio topológico, la compacidad y la conexidad son propiedades independientes del espacio ambiente. Dicho de manera más formal, si (X, τ_X) es un espacio topológico, y (A, τ_A) es un subespacio topológico de X, entonces, dado $K \subset A \subset X$:*

(i) K es compacto en X si y solo si K es compacto en A;

(ii) K es conexo en X si y solo si K es conexo en A.

Demostración. Verifiquemos (i).

Suponga que K es compacto en X. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de K en A. Entonces, cada $V_\alpha = G_\alpha \cap A$, para cierto G_α abierto de X y $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$. Entonces $K \subset [\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha] \cap A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. De la hipótesis se sigue que existe $F \subset I$ finito tal que $K \subset \bigcup_{\alpha\in F} G_\alpha$. Como $K \subset A$, esto implica que $K \subset [\bigcup_{\alpha\in F} G_\alpha] \cap A = \bigcup_{\alpha\in F}[G_\alpha \cap A] = \bigcup_{\alpha\in F} V_\alpha$. Así, K es compacto en A.

Ahora, suponga que K es compacto en A. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de K en X. Entonces $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$, y como $K \subset A$, se sique que $K \subset \bigcup_{\alpha\in I}[V_\alpha \cap A]$. Note que cada $V_\alpha \cap A$ es un abierto de A, y como K es compacto en A, se sigue que existe $F \subset I$ finito, tal que $K \subset \bigcup_{\alpha\in F}[V_\alpha \cap A] \subset \bigcup_{\alpha\in F} V_\alpha$. Así, K es compacto en X.

Ahora verifiquemos (ii).

Suponga que K es conexo en X. Esto quiere decir que (K, τ_K) es conexo, donde τ_K es la topología del subespacio relativa a X. Veamos que (K, τ'_K) es conexo, donde τ'_K es la topología del subespacio relativa a A. En efecto. Supongamos que existe $U \neq \varnothing$ tal que U es abierto y cerrado respecto a la topología τ'_K. Entonces

$U = K \cap G = K \cap F$, donde G es abierto de A y F es cerrado de A. En particular, $G = A \cap G'$, $F = A \cap F'$, donde G' es abierto de X y F' es cerrado de X. Como $K \subset A$, tenemos que $K \cap A = K$, en consecuencia, lo anterior se puede escribir como $U = K \cap G' = K \cap F'$. Así, U es un abierto y cerrado respecto a la topología τ_K. Como (K, τ_K) es conexo, se sigue que $U = K$.

Por tanto, (K, τ'_K) es conexo.

Ahora, supongamos que K es conexo en A. Esto quiere decir que (K, τ'_K) es conexo, donde τ'_K es la topología del subespacio relativa a A. Verifiquemos que (K, τ_K) es conexo, donde τ_K es la topología del subespacio relativa a X. En efecto. Supongamos que existe $U \neq \varnothing$ tal que U es abierto y cerrado respecto a la topología τ_K. Entonces $U = K \cap G = K \cap F$, donde G es abierto de X y F es cerrado de X. Como $K \subset A$, se sigue que $K \cap A = K$, entonces $U = K \cap (A \cap G) = K \cap (A \cap F)$. Así, U es un abierto y cerrado respecto a τ'_K. Como (K, τ'_K) es conexo, se sigue que $U = K$.

Por tanto, (K, τ_K) es conexo. ■

Uno de los fines del Teorema 1.2.6 es mostrar que no necesitamos indicar el espacio ambiente de un continuo. Es decir, si $Y \subset X$, entonces todo continuo de Y es continuo de X.

A continuación, enunciamos un teorema que nos garantiza que podemos separar continuos ajenos.

Teorema 1.2.7. *Sea X un espacio métrico. Sean $K_1, \ldots, K_n$ cerrados propios y ajenos dos a dos de X. Entonces existen abiertos ajenos $G_1, \ldots, G_n$ de X, tales que $K_i \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Hagamos una demostración por inducción. El caso $n = 2$ es inmediato pues X es un espacio métrico. Suponga que el enunciado se verifica para n compactos propios y ajenos cualesquiera. Veamos que el enunciado se cumple para $n + 1$ cerrados propios y ajenos cualesquiera. Sean $K_1, \ldots, K_n, K_{n+1}$ cerrados propios y ajenos de X. Por hipótesis inductiva, existen $A_1, \ldots, A_n$ abiertos ajenos dos a dos de X tales que $K_i \subset A_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Ahora, como $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ es cerrado por ser unión finita de cerrados, y $K \cap K_{n+1} = \varnothing$, existen dos abiertos de X, digamos U, V, tales que $K \subset U$, $K_{n+1} \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. De aquí, se sigue que $K_i \subset A_i \cap U$, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, si denotamos por $G_i = A_i \cap U$, para $i = 1, \ldots, n$ y $G_{n+1} = V$, se sigue que $K_i \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n, n + 1$, y los abiertos $G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}$ son ajenos dos a dos.

Por inducción, se sigue el resultado. ■

Corolario 1.2.8. *Sea X un continuo. Sean $K_1, \ldots, K_n$ compactos propios y ajenos dos a dos de X. Entonces existen abiertos ajenos dos a dos, $G_1, \ldots, G_n$ de X, tales que $K_i \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Basta observar que como X es un espacio métrico, en particular es Hausdorff. Entonces todo compacto es cerrado en X. Así, por el Teorema 1.2.7, se sigue el resultado. ■

Observe el lector que este teorema nos permite separar cualquier cantidad finita de continuos.

Corolario 1.2.9. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Sean $K_1, \ldots, K_n$ continuos propios ajenos dos a dos de X tales que $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset U$, donde U es un abierto de X. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} K_n \subsetneq U$. En particular, $\bigcup_{i=1}^{n} K_n \subsetneq X$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada $K_i \neq \emptyset$. Hagamos un argumento por contradicción. Suponga que $U = \bigcup_{i=1}^{n} K_n$. Note que cada K_i es compacto, en consecuencia cada K_i es cerrado en X. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} K_n$ es cerrado en X por ser unión finita de cerrados de X. Así, U es abierto y cerrado de X, y además $U \neq \emptyset$. Como X es un conexo, se sigue que $U = X$. Entonces $X = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Pero por el Corolario 1.2.8, existen $G_1, \ldots, G_n$ abiertos ajenos dos a dos de X tales que $K_i \subset G_i$, para $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i \subset X.$$

Se sigue que $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, lo cual contradice que X es conexo.

Por tanto, $U \neq \bigcup_{i=1}^{n} K_n$. ■

Recuerdelo bien: un abierto de X nunca va a ser igual a la unión finita de cualesquiera de sus subcontinuos propios.

Teorema 1.2.10. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Sea Y un subcontinuo propio de X no vacío. Si A es un abierto en X tal que $Y \subset A$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ distintos y tales que $x_i \notin Y$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Por inducción. Para $n = 1$, note que si $Y = A$, entonces Y es abierto, cerrado y no vacío en X, y como X es conexo, se sigue que $Y = X$, lo cual es falso. Por tanto, $Y \subsetneq A$, es decir, existe $x_1 \in A \backslash Y$. Ahora, suponga que la proposición se verifica para $n \in \mathbb{N}$ dado. Tenemos que $Y \subsetneq A$ y existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ distintos y tales que $x_i \notin Y$ para $i = 1, \ldots, n$. Si $A = Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces A es abierto, cerrado y no vacío de X, y como X es conexo, pues $A = X$, es decir, $Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\} = X$. Esto contradice al Corolario 1.2.9. Por tanto, $Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \subsetneq A$. Entonces existe $x_{n+1} \in A \setminus [Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\}]$, es decir $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ son puntos distintos, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in A \setminus Y$.

Por inducción, se sigue el resultado. ■

Corolario 1.2.11. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Sea Y un subcontinuo propio de X no vacío y A un abierto en X tal que $Y \subset A$. Entonces existen n subcontinuos propios de X no degenerados y ajenos dos a dos, $C_1, \ldots, C_n$ tales que $C_i \subset A$ y $C_i \cap Y = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.10, tenemos que existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ distintos y tales que $x_i \notin Y$ para $i = 1, \ldots, n$. Por el Teorema 1.2.8, existen $G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}$ abiertos de X ajenos dos a dos, tales que $x_i \in G_i$, para $i = 1, \ldots, n$ y $Y \subset G_{n+1}$. Más aún, $x_i \in G_i \cap A$, para $i = 1, \ldots, n$. Por el Teorema 1.4.8, existen $C_1, \ldots, C_n$ subcontinuos propios no degenerados tales que $x_i \in C_i \subset G_i \cap A$ para $i = 1, \ldots, n$. Como los G_i son ajenos dos a dos, se sigue que los C_i también son ajenos dos a dos. Por un argumento similar, $C_i \cap Y = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$. ■

Teorema 1.2.12. *Sea X un continuo y Y_1, Y_2 subcontinuos propios de X. Si $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, entonces $Y_1 \cup Y_2$ es un continuo.*

Demostración. Como $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, se sigue que $Y_1 \cup Y_2$ es conexo. Además $Y_1 \cup Y_2$ es unión finita de compactos y X es métrico, luego $Y_1 \cup Y_2$ es compacto y en consecuencia un continuo. ■

Teorema 1.2.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ y $A \subset X$, donde X es un espacio métrico. Suponga que A tiene al menos n componentes y $A \neq \emptyset$. Entonces existen $C_1, \ldots, C_n$ conjuntos no vacíos y separados dos a dos tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.*

Demostración. Haremos una prueba por inducción sobre n. Para el caso $n = 2$, suponga que A tiene al menos dos componentes. En consecuencia, A es disconexo. Entonces existen C_1, C_2 conjuntos no vacíos y separados tales que $A = C_1 \cup C_2$.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Veamos a continuación que el resultado se cumple para $n+1$. Suponga que A tiene al menos $n+1$ componentes y $A \neq \emptyset$. En particular, A tiene al menos n componentes. Entonces por hipótesis inductiva, existen $C_1, \ldots, C_n$ conjuntos no vacíos y separados dos a dos tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Supongamos que los $C_1, \ldots, C_n$ son conexos; por ser separados dos a dos, en particular son disjuntos dos a dos. En consecuencia, $C_1, \ldots, C_n$ son las componentes de A, lo cual es falso pues A tiene al menos $(n+1)$ componentes. Entonces, al menos uno de los $C_1, \ldots, C_n$ es disconexo; digamos C_n. Así, existen R, T subconjuntos separados y no vacíos de X tales que $C_n = R \cup T$. En consecuencia, $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i \cup (R \cup T)$. Ahora, para terminar la prueba, solo resta verificar que R y T están separados de los $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Como $R \subset C_n$ y $[cl_X C_n] \cap C_j = \emptyset$, para $j = 1, \ldots, n-1$, se sigue que $[cl_x R] \cap C_j = \emptyset$; análogamente, como $C_n \cap [cl_X C_j] = \emptyset$, para $j = 1, \ldots, n-1$, se sigue que $R \cap [cl_X C_j] = \emptyset$, para $j = 1, \ldots, n-1$. Así, R está separado de los $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Análogamente T está separado de los $C_1, \ldots, C_{n-1}$.

Por inducción, se sigue el resultado. ■

1.3. Conexidad local en continuos

El objetivo de esta sección es probar que los conceptos de conexidad *im kleinen* en cada punto y conexidad local son equivalentes.

Definición 1.3.1. Un espacio topológico es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ y cada vecindad V de x, existe un abierto conexo $A_x \subset V$ tal que $x \in A_x$.

Se puede decir de modo equivalente que un espacio topológico es localmente conexo si la familia de subconjuntos abiertos y conexos forma una base para la topología dada.

Definición 1.3.2. Sea X un continuo y $x \in X$. Diremos que X *es conexo im kleinen en* X si para cada cerrado F de X tal que $F \subset X \setminus \{x\}$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus F$.

Teorema 1.3.3. *Si X es un continuo y $x \in X$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) X es conexo im kleinen en x;

(ii) *Para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y donde V tiene la propiedad de que para cada $y \in V$, existe un subconjunto conexo C_y de X tal que $\{x, y\} \subset C_y \subset U$;*

(iii) *Para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subcontinuo W de X donde se verifica que $x \in int_x(W) \subset W \subset U$.*

Demostración. Sea X un continuo y $x \in X$.

Verifiquemos que (i) implica (ii).

Suponga que X es conexo im kleinen en x. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Entonces $X \setminus U$ es un cerrado que no contiene a x. De ahí, tenemos que existe un subcontinuo W de X tal que $x \in int_x(W) \subset W \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Definiendo $V = int_X(W)$ se cumple lo requerido.

Verifiquemos que (ii) implica (iii).

Suponga (ii). Sea U un abierto de X tal que $x \in U$. Elíjase algún U_0 un abierto de X tal que $U_0 \subset cl_X(U_0) \subset U$ y $x \in U_0$. Por hipótesis, se sique que existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U_0$ y con la propiedad de que para cada $y \in V$, existe un subconjunto conexo C_y de X tal que $\{x, y\} \subset C_y \subset U_0$.

Ahora, defínase $W = cl_X(\bigcup_{y \in V} C_y)$. Note que W es un subcontinuo pues la conexidad de W se verifica ya que cada C_y contiene al punto x y es bien sabido que la clausura de un conexo es conexo, además W es cerrado en X y X es compacto por ser un continuo, luego W es compacto. Así, efectivamente W es un subcontinuo.

Además, $x \in V \subset W \subset cl_X(U_0) \subset U$. Como V es abierto en X, se sigue que $V \subset int_X(W)$. Así, $x \in int_X(W) \subset W \subset U$.

Finalmente verifiquemos que (iii) implica (i).

Suponga (iii). Sea F un cerrado de X tal que $F \subset X \setminus \{x\}$. Entonces $X \setminus F$ es un abierto de X y $x \in X \setminus F$. Por hipótesis, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus F$.

Por tanto, X es conexo im kleinen. ■

Lema 1.3.4. *Un continuo X es localmente conexo si y solo si las componentes de los subconjuntos abiertos de X son abiertos.*

Demostración. Suponga que X es localmente conexo. Sea U un abierto en X y sea C una componente de U. Veamos que C es abierta.

Para cada $x \in C$, existe (por hipótesis) un abierto conexo V_x tal que $x \in V_x \subset U$. Entonces $C \cup V_x$ es un conjunto conexo de X y $C \cup V_x \subset U$. Así, $V_x \subset C$ por propiedades de las componentes conexas.

Por tanto C es un abierto en X.

Ahora suponga que las componentes de abiertos de X son abiertos en X. Veamos que X es localmente conexo. Sea $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea C una componente de U tal que $x \in C \subset U$. Estas siempre existen en los espacios métricos, por ejemplo $\{x\}$ es un conexo de U. De la hipótesis se sigue que C es un abierto de X. Así, C es un abierto conexo de X tal que $x \in C \subset U$.

Por tanto, X es localmente conexo. ■

Teorema 1.3.5. *Un continuo X es conexo im kleinen en cada uno de sus puntos si y solo si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea X un continuo.

Suponga que X es localmente conexo. Sea $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Elíjase un abierto V tal que $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo W tal que $x \in W \subset V \subset cl_X(V) \subset U$. Luego $cl_X(W)$ es conexo y como X es un continuo, en particular X es compacto.

Así $cl_X(W)$ es compacto por ser un cerrado de X y se tiene que $cl_X(W)$ es un subcontinuo de X. Notando que $x \in W = int_X(W) \subset cl_X(W) \subset cl_X(V) \subset U$, obtenemos que $x \in int_X(cl_X(W)) \subset cl_X(W) \subset U$.

Por tanto, X es conexo im kleinen en x por el Teorema 1.3.3.

Como x fue arbitrario, se concluye que X es conexo im kleinen en cada uno de sus puntos.

Ahora suponga que X es conexo im kleinen en cada uno de sus puntos.

Sea U un abierto de X y C una componente de U. Bastará probar que C es abierto para poder usar el Lema 1.3.4. Si $x \in C$, entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in int_X(W) \subset W \subset U$. Como $C \cap W \neq \emptyset$ y W es conexo, se sigue que $C \cup W$ es conexo. Por propiedades de componentes, dado que $x \in C$, se sique que $W \subset C$.

Así $x \in int_X(W) \subset W \subset C$ y concluimos que C es abierto.

Y del Lema 1.3.4, se concluye que X es localmente conexo. ■

1.4. Continuos descomponibles

Definición 1.4.1. Un continuo X es *descomponible* si puede ser escrito como unión de dos de sus subcontinuos propios. Diremos que X es *indescomponible* si no es descomponible. Diremos que X es *hereditariamente descomponible* (respectivamente, *indescomponible)*, si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible (indescomponible).

Lema 1.4.2. *Sea X un continuo y sea A un subcontinuo de X tal que $X \setminus A$ es disconexo. Si $U, V \in \tau_X$ son disjuntos y no vacíos, y además $X \setminus A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.*

Demostración. Note que $X \setminus (A \cup U) = (X \setminus A) \cap (X \setminus U) = V$. Entonces $A \cup U$ es cerrado, y como X es continuo, pues $A \cup U$ es compacto. Análogamente $A \cup V$ es compacto.

Veamos que $A \cup U$ es conexo. Suponga que $A \cup U$ es disconexo. Note que $A \cup U$ es cerrado en X ya que X es Hausdorff por ser un espacio métrico, entonces existen K y L cerrados de X, ajenos y no vacíos, tales que $A \cup U = K \cup L$. Como A es conexo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subset K$. Note entonces que $L \cap A = \emptyset$, luego $L \subset U$. Así, $L \cap cl_X(V) = \emptyset$.

Por otro lado, note que si $x \in X$, entonces $x \in A \cup U$ o bien $x \in V$, entonces $x \in K \cup L$ o bien $x \in cl_X(V)$. Así, $X = L \cup (K \cup cl_X(V))$. Pero tanto L como $(K \cup cl_X(V))$ son cerrados no vacíos de X, y de lo anterior sabemos que son ajenos. Así, X es disconexo, lo cual es falso.

Entonces, $A \cup U$ es conexo. Análogamente, $A \cup V$ es conexo. Por tanto, $A \cup U$ y $A \cup V$ son continuos. ■

Lema 1.4.3. *Un continuo X es descomponible si, y solo si, X continene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Sea X un continuo descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios A y B, de X, tales que $X = A \cup B$. Note que $X \setminus B$ es un abierto y está contenido en A. Así, A es un subcontinuo propio de X con interior no vacío.

Ahora, suponga que A es un subcontinuo propio de X con interior no vacío.

Tenemos dos casos: $X \setminus A$ es conexo, o bien, $X \setminus A$ es disconexo.

Si $X \setminus A$ es conexo, entonces $cl_X(X \setminus A)$ es conexo, y por ser cerrado, se sigue que es compacto. Así, $cl_X(X \setminus A)$ es un continuo de X y, además, dicho subcontinuo es propio, ya que si $X = cl_X(X \setminus A)$, entonces $int_X(A) \subset cl_X(X \setminus A)$, lo cual es una contradicción. Así, efectivamente $cl_X(X \setminus A)$ es un subcontinuo propio de X y entonces podemos concluir que $X = A \cup cl_X(X \setminus A)$ y por tanto, X es descomponible.

Si $X \setminus A$ es disconexo, y dado que $X \setminus A$ es abierto, tenemos que existen $U, V \in \tau_X$ ajenos y no vacíos, tales que $X \setminus A = U \cup V$. Por el Lema 1.4.2, tenemos que $X = (A \cup U) \cup (A \cup V)$. Además, $A \cup U$ es subcontinuo propio de X, ya que de lo contrario, tendríamos que $A \cup V \subset A \cup U$, luego $V \subset A$, pero ya teníamos que $V \subset X \setminus A$ y $V \neq \emptyset$.

Así, $A \cup U$ es subcontinuo propio de X. Análogamente, $A \cup V$ es subcontinuo propio de X.

Por tanto, X es descomponible. ∎

Corolario 1.4.4. *Un continuo X es indescomponible si, y solo si, cada subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

Definición 1.4.5. Diremos que un continuo X es un *arco* si es homeomorfo a $[0, 1]$.

Teorema 1.4.6. *Sea X un arco. Entonces X es hereditariamente descomponible.*

Demostración. Como X es un arco, entonces X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Claramente $[0, \frac{1}{2}]$ es un continuo con interior no vacío en $[0, 1]$. Por el Lema 1.4.3, se sigue que $[0, 1]$ es descomponible. Más, aún, note que todos los subconjuntos conexos de $[0, 1]$ son los intervalos abiertos y todos los compactos de $[0, 1]$ son los intervalos cerrados y acotados en $[0, 1]$. Entonces todos los subcontinuos de $[0, 1]$ son sus subintervalos cerrados. Repitiendo el argumento anterior, se verifica que todos los intervalos cerrados son descomponibles. Así, $[0, 1]$ es hereditariamente descomponible. Además, como X es homeomorfo al $[0, 1]$ y claramente la propiedad de ser descomponible es topológica -pues está enunciada en términos de conexos, compactos y abiertos según el Lema 1.4.3-, se sigue que X es hereditariamente descomponible. ∎

Teorema 1.4.7. *Sea X un continuo y sea U un abierto no vacío y propio de X. Si K es una componente de $cl_X(U)$, entonces $K \cap fr_X(U) \neq \emptyset$.*

Una prueba de este Teorema puede encontrarse en [12, Teorema 5.4].

Corolario 1.4.8. *Sea X un continuo no degenerado. Si A es un subcontinuo propio de X y U es un abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$. En particular, todo continuo no degenerado tiene un subconjunto propio no degenerado.*

Una prueba del Corolario 1.4.8 puede encontrarse en [12, Teorema 5.5].

Teorema 1.4.9. *Si X es un continuo tal que cada uno de sus subcontinuos propios es indescomponible, entonces X es indescomponible. Así, X es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Hagamos un argumento por contradicción. Suponga que X es descomponible, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Note que $X \setminus B$ es un abierto de X y $X \setminus B \subset A$. Así, A tiene interior no vacío. Por otro lado, como X es un espacio métrico, y A es un compacto propio de X, existe $G \in \tau_X$ tal que $G \neq X$ y $A \subset G$. Por el Teorema 1.4.8, tenemos que existe un subcontinuo H de X tal que $A \subsetneq H \subset G$. Así, H es un subcontinuo propio de X y, por hipótesis, tenemos que H es indescomponible, entonces por el Corolario 1.4.4, tenemos que H tiene interior vacío. Pero $A \subset H$ y A tiene interior no vacío, luego H tiene interior no vacío y obtenemos una contradicción.

Por tanto, X es indescomponible, y como además cada uno de sus subcontinuos propios también es indescomponible, podemos concluir que X es hereditariamente indescomponible. ∎

Definición 1.4.10. Un *n-odo* ($n \geq 2$) es un continuo M que contiene a un subcontinuo N de tal modo que $M \setminus N$ es la unión de n conjuntos no vacíos y mutuamente separados.

Teorema 1.4.11. *Si X es un continuo descomponible, entonces X contiene un 2-odo Y. Además, $Y = P \cup Q$, donde P, Q son continuos propios de Y y $P \cap Q$ es un continuo.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios de X tal que $X = A \cup B$. Suponga que $A \cap B$ es disconexo. Luego, existen al menos dos componentes de $A \cap B$. Sean K_1, K_2 componentes de $A \cap B$. Como A es un espacio métrico, existen abiertos de A, digamos W_1, W_2 tales que $K_i \subset W_i$ y $cl_A W_1 \cap cl_A W_2 = \emptyset$. Denotemos por $F_i = fr_A W_i$. Entonces $F_i = cl_A W_i \setminus W_i$, debido a que W_i es abierto de A. Denotemos por M_i a la componente de $cl_A W_i$ tal que $K_i \subset M_i$. Por el teorema de golpes en la frontera, tenemos que $M_i \cap F_i \neq \emptyset$. De lo anterior se sigue que $M_i \subsetneq K_i$, debido a que $F_i \cap K_i \subset F_i \cap W_i = \emptyset$, dicho de otro modo, debido a que K_i no puede tener elementos de F_i y $M_i \cap F_i \neq \emptyset$. Ahora, como M_i es componente de $cl_A W_i$, se sigue que M_i es un conexo. Además, M_i es, por la misma razón, un cerrado de $cl_A W_i$, en consecuencia es un cerrado de X y por tanto, M_i es compacto. Así, M_i es un continuo de A. Como ya tenemos que $M_i \subsetneq K_i$ y K_i es una componente de $A \cap B$, tenemos que $M_i \setminus B \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, $K_i \subset A \cap B$ y $K_i \subset M_i$. Además, como $M_i \subset cl_A W_i$, y $cl_A W_1 \cap cl_A W_2 = \emptyset$, se sigue que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Ahora, definamos $M = B \cup M_1 \cup M_2$ y $N = B$.

Mostraremos que M es el 2-odo requerido. Note que $B \cup M_1$ es conexo ya que como $K_1 \subset A \cap B$ y $K_1 \subset M_1$, pues $B \cap M_1 \neq \emptyset$. Asimismo, $B \cup M_1$ es compacto ya que B y M_1 son cerrados, luego B y M_1 son compactos. Por tanto, $B \cup M_1$ es un continuo. Análogamente, $B \cup M_2$ es un continuo.

Por otro lado, se tiene que $(B \cup M_1) \cap (B \cup M_2) = B$ ya que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Así, $M = (B \cup M_1) \cup (B \cup M_2)$. De lo anterior tenemos que $M \setminus N = M_1 \cup M_2$ y M_1, M_2 son separados, ya que como M_i es una componente de $cl_A W_i$, se sigue que M_i es un cerrado de $cl_A W_i$, luego M_i es un cerrado de A. Como A es un subcontinuo de X, se sigue que A es cerrado en X, luego M_i es cerrado en X. Como $K_i \neq \emptyset$ debido a que son componentes de $A \cap B$, se sigue que $M_i \neq \emptyset$.

Por tanto, M es un $2-$odo. Además, si denotamos por $P = B \cup M_1$ y $Q = B \cup M_2$, se sigue que $P \cap Q = B$ es conexo y P, Q son subcontinuos propios de M pues $M1 \cap M2 = \emptyset$ y $M_1, M_2 \subset M$.

Así, $Y = P \cup Q$ cumple lo requerido. ∎

1.5. Funciones de Whitney y arcos ordenados

En esta sección definimos las funciones de Whitney y demostramos que todo arco ordenado se puede parametrizar. Además, enunciamos algunas propiedades útiles de los arcos ordenados. Por otro lado, mostramos la utilidad de los arcos ordenados en el estudio de los hiperespacios.

Definición 1.5.1. Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para 2^X es una función continua $\mu\colon 2^X \to [0, \infty)$ tal que:

(i) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$;

(II) para cada $A, B \in 2^X$, si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Teorema 1.5.2. *Las funciones de Whitney para 2^X existen.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [12, pp. 19-20].

Observación. Considere una función de Whitney $\mu\colon 2^X \to [0, \infty)$ y un continuo X no degenerado (con más de un punto). Note que como 2^X es compacto, se sigue que $\mu(2^X)$ es un compacto en $[0, \infty]$. En particular, $\mu(2^X)$ es acotado y así $\mu(2^X) \in [0, \infty]$. Como 2^X es un compacto no degenerado, pues por ejemplo, $\mathcal{F}(X) \subset 2^X$, entonces $0 = \mu(\{X\}) < \mu(2^X)$, es decir, $\mu(2^X) > 0$. Entonces, podemos normalizar a μ definiendo

$$\mu'(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(2^X)},$$

para cada $A \in 2^X$. Note que $\mu'\colon 2^X \to [0, 1]$ y μ' también es una función de Whitney.

Definición 1.5.3. Sea A un conjunto con una relación de orden parcial $\leq'$. Diremos que A es una *red* respecto a $\leq'$, si para cada $a, b \in A$ sucede que $a \leq' b$ o bien $b \leq' a$.

Definición 1.5.4. Un *arco ordenado* en 2^X es un arco $\mathcal{A} \subset 2^X$ que además es una red respecto a $\subset$.

Lema 1.5.5. *Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ es compacto y es una red respecto a $\subset$, entonces toda función de Whitney es inyectiva en $\mathcal{A}$, y si además, $\mathcal{A}$ es compacto, se sigue que la restricción de toda función de Whitney es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mu\colon 2^X \to [0, 1]$ una función de Whitney.

Veamos que μ es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$. Por hipótesis, se tiene que $A \subsetneq B$ o bien $B \subsetneq A$. En cualquiera de los dos casos, por propiedades de las funciones de Whitney, se sigue que $\mu(A) \neq \mu(B)$. Así, μ es inyectiva. Si además, $\mathcal{A}$ es un compacto, dado que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es continua e inyectiva por ser la restricción de una función continua e inyectiva, tenemos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. ∎

Teorema 1.5.6. *Sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ un subcontinuo no degenerado de 2^X. Entonces*

$\mathcal{A}$ es un arco ordenado si y solo si $\mathcal{A}$ es una red.

Demostración. Suponga que $\mathcal{A}$ es una red. Por el Teorema 1.5.2, existe $\mu\colon 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Definamos $\mu' = \mu|_{\mathcal{A}}$. Entonces μ' es un homeomorfismo ya que 2^X es compacto. Como $\mathcal{A}$ es un subcontinuo no degenerado, se tiene que $\mathcal{A}$ es un compacto, conexo con más de un punto. Entonces, como μ' es homeomorfismo, se sigue que $\mu'(\mathcal{A}) \subset [0,1]$ es un compacto, conexo, con más de un punto, es decir, $\mu'(\mathcal{A})$ es un intervalo cerrado con más de un punto, digamos $\mu'(\mathcal{A}) = [a,b]$, para $a, b \in [0,1]$.

Así, $\mathcal{A}$ es un arco. Además, dado que $\mathcal{A}$ es una red, entonces $\mathcal{A}$ es un arco ordenado.

La otra implicación es inmediata. ■

Lema 1.5.7. *Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en 2^X, entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ y $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Note que $\mathcal{A} \simeq [0,1]$. Entonces $\mathcal{A}$ es compacto. Sea $\mu\colon 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. De la compacidad de $\mathcal{A}$, se sigue que $\mu(\mathcal{A}) \subset [0,1]$ es un compacto, y como μ es continua, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A_0) = \min \mu(\mathcal{A})$.

Veamos que $A_0 \subset A$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Suponga que no es así. Entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A_0 \not\subset A$. Como $\mathcal{A}$ es arco ordenado, se sigue que $A \subsetneq A_0$. Entonces $\mu(A) < \mu(A_0)$, lo cual es falso pues $\mu(A_0) = \min \mu(\mathcal{A})$.

Ahora, como $A_0 \subset A$ para cada $A \in \mathcal{A}$, se sigue que $A_0 = \bigcap \mathcal{A}$. Como teníamos que $A_0 \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

Análogamente se obtiene que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$. ■

Teorema 1.5.8. *Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en 2^X, entonces los dos puntos extremos de $\mathcal{A}$ son $\bigcap \mathcal{A}$ y $\bigcup \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mu\colon 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Consideremos $\mu' = \mu|_{\mathcal{A}}$. Note que μ' es continua e inyectiva, y como $\mathcal{A}$ es un compacto -es un arco-, se sigue que μ' es un homeomorfismo. Además, para cada $A \in \mathcal{A}$, tenemos que $\bigcap \mathcal{A} \subset A \subset \bigcup \mathcal{A}$. En consecuencia,

$$\mu'(\cap \mathcal{A}) \leq \mu'(A) \leq \mu'(\cup \mathcal{A})$$

para cada $A \in \mathcal{A}$.

Así, $\mu'(\mathcal{A}) \subset [\mu'(\bigcap \mathcal{A}), \mu'(\bigcup \mathcal{A})]$. Y si tomamos $t \in [\mu'(\bigcap \mathcal{A}), \mu'(\bigcup \mathcal{A})]$, entonces como $\mathcal{A}$ es conexo -es un arco- y μ' es continua, se sigue que existe $A_t \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A_t) = t$. Así, $\mu'(\mathcal{A}) = [\mu'(\bigcap \mathcal{A}), \mu'(\bigcup \mathcal{A})]$. Ahora, dado que $\mu'(\bigcap \mathcal{A})$ y $\mu'(\bigcup \mathcal{A})$

son los puntos extremos de $\mu'(\mathcal{A})$, y μ' es un homeomorfismo, se sigue que $\bigcap \mathcal{A}$ y $\bigcup \mathcal{A}$ son los puntos extremos de $\mathcal{A}$. ■

De lo anterior, podemos decir que la siguiente definición tiene sentido.

Definición 1.5.9. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en 2^X, diremos que $\mathcal{A}$ es un *arco ordenado de* $\bigcap \mathcal{A}$ *a* $\bigcup \mathcal{A}$.

El siguiente teorema nos permite parametrizar arcos. Sirve además como una reconciliación entre dos definiciones de *arco ordenado de* A a B que se encuentran en la literatura; una definición es la que decidimos usar en este escrito -a saber la Definición 1.5.9-, y la otra, la cual define un arco ordenado como una función continua e inyectiva del intervalo en 2^X que cumple que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$, y para cada $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$ se cumple que $\alpha(S) \subsetneq \alpha(t)$.

Veremos a continuación que dichas definiciones son equivalentes.

Teorema 1.5.10. *Sea X un compacto y $A, B \in 2^X$. Entonces un arco ordenado de A a B es exactamente la imagen de una función continua e inyectiva $\alpha\colon [0, 1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$, y para cada $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$ se cumple que $\alpha(S) \subsetneq \alpha(t)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ un arco ordenado de A a B. Note que $A = \bigcap \mathcal{A}$ y $B = \bigcup \mathcal{B}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $A \neq B$. Considere $\mu\colon 2^x \to [0, 1]$ una función de Whitney. Definamos $\mu' = \mu|_{\mathcal{A}}$. Note que μ' es continua e inyectiva. Como $\mathcal{A}$ es un arco, en particular es compacto. En consecuencia, μ' es un homeomorfismo. También, de la prueba del Teorema 1.5.8 podemos observar que $\mu'(\mathcal{A}) = [\mu'(A), \mu'(B)]$.

Ahora vamos a construir la función $\alpha\colon [0, 1] \to 2^X$ que necesitamos.

Definamos $\gamma = (\mu')^{-1}$. Notemos que $\gamma\colon [\mu'(A), \mu'(B)] \to \mathcal{A}$ es un homeomorfismo. Consideremos también a $\beta\colon [0, 1] \to [\mu'(A), \mu'(B)]$ dada por

$$\beta(t) = t(\mu'(B) - \mu'(A)) + \mu'(A)$$

que es el segmento de recta que conecta el punto $(0, \mu'(A))$ con el punto $(1, \mu'(B))$. Naturalmente, β es un homeomorfismo. Además, β es estrictamente creciente.

Definamos $\alpha = \gamma \circ \beta\colon [0, 1] \to [\mu'(A), \mu'(B)]$.

Tenemos que $\alpha(0) = (\gamma \circ \beta)(0) = \gamma(\beta(0) = \gamma(\mu'(A)) = A$.

Análogamente, $\alpha(1) = (\gamma \circ \beta)(1) = \gamma(\beta(1) = \gamma(\mu'(B)) = B$.

Ahora, sean $s, t \in [0, 1]$ tales que $s < t$. Como β es estrictamente creciente, tenemos que $\beta(s) < \beta(t)$. Como $\beta(s), \beta(t) \in [\mu'(A), \mu'(B)] = \mu'(\mathcal{A})$, existen $Y, Z \in \mathcal{A}$ tales que $\beta(s) = \mu'(Y)$ y $\beta(t) = \mu'(Z)$. Dado que $\mu'(Y) < \mu'(Z)$, se sigue que $Y \subsetneq Z$. Pero $Y = \gamma(\mu'(Y)) = \gamma(\beta(s)) = (\gamma \circ \beta)(s) = \alpha(s)$ y análogamente tenemos que $Z = \gamma(\mu'(Z)) = \gamma(\beta(t)) = (\gamma \circ \beta)(t) = \alpha(t)$.

Por tanto, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Finalmente, como β, γ son homeomorfismos, se sigue que α es un homemorfismo, en particular, α es continua e inyectiva. Así queda demostrada la necesidad.

Para demostrar la suficiencia, consideremos $\alpha \colon [0, 1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$, y para cada $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$ se cumple que $\alpha(S) \subsetneq \alpha(t)$. Como α es continua e inyectiva y $[0, 1]$ es compacto, se sigue que α es un homeomorfismo. Más aún, tenemos el homeomorfismo $[0, 1] \simeq \alpha([0, 1])$. Es inmediato que $\alpha([0, 1])$ es un arco. Y si $A, B \in \alpha([0, 1])$, entonces existen $s, t \in [0, 1]$ tales que $A = \alpha(s)$ y $B = \alpha(t)$. Como tenemos que $s \leq t$ o bien $t \leq s$, nuestra suposición sobre α implica que $A \subset B$ o bien, $B \subset A$. Así, $\alpha([0, 1])$ es una red, y como ya teníamos que $\alpha([0, 1])$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, entonces podemos decir que $\alpha([0, 1])$ es un arco ordenado. ■

Teorema 1.5.11. *Sea X un compacto y $A, B \in 2^X$. Entonces existe un arco ordenado de A a B si, y solo si $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A.*

La prueba del Teorema 1.5.11 puede encontrarse en [5, 15.3 Theorem].

Teorema 1.5.12. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$ tal que $A \neq X$. Como X es conexo, se sigue que la única componente de X es X. Note que $A \subset X$ implica que cada componente de X intersecta a A. Como X es compacto, por el Teorema 1.5.11, existe un arco ordenado en 2^X de A a X. Entonces, dado que cada elemento de $2^X \setminus X$ puede conectarse con X mediante un arco, se sigue que 2^X es arcoconexo. ■

En la prueba del Teorema 1.5.12, nótese que el arco debía estar contenido en 2^X.

Lema 1.5.13. *Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ es un arco ordenado en 2^X que empieza en $A \in C(X)$, entonces $\mathcal{A} \subset C(X)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{A}$ es no degenerado, esto es, que $\mathcal{A}$ tiene más de un punto. Note que A es conexo por pertenecer a $C(X)$. Sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \neq A$. Por el Teorema 1.5.10, existe $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ tal que α es continua e inyectiva, y para $s, t \in [0,1]$ con $s < t$ se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$; además $\alpha([0,1]) = \mathcal{A}$ y $\alpha(0) = A$ pues $\mathcal{A}$ empieza en A. Entonces existe $t \in [0,1]$ con $t \neq 0$ tal que $\alpha(t) = B$. Se sigue que $A \subsetneq B$. Además, $\alpha' = \alpha|_{[0,t]}$ hereda todas las propiedades enunciadas de α. En particular, $\alpha'([0,t])$ es un arco ordenado que empieza en A y termina en B. Entonces por el Teorema 1.5.11, tenemos que cada componente de B intersecta a A. Esto implica que, si K es una componente de B, entonces $A \cup K$ es conexo debido a que $K \cap A \neq \emptyset$ y A es conexo. Además, si recordamos que $A \subset B$, es inmediato que $B = \bigcup\{A \cup K\colon K \text{ es componente de } B\}$; basta notar que, si $b \in B$ entonces existe una componente de B, digamos K_b tal que $b \in K_b$, luego $b \in A \cup K_b$. Además, $A \subset \bigcap\{A \cup K\colon K \text{ es componente de } B\}$ y $A \neq \emptyset$. Por tanto, B es la unión de conexos que tienen intersección no vacía; en consecuencia B es conexo. Como ya teníamos que $B \in 2^X$, entonces $B \in C(X)$.

Como $B \in \mathcal{A}$ era arbitrario, se sigue que $\mathcal{A} \subset C(X)$. ∎

Teorema 1.5.14. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in C(X)$ tal que $A \neq X$. Por el Teorema 1.5.11, existe un arco ordenado de A a X en 2^X, digamos $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dado que $A \in C(X)$, se sigue por el Lema 1.5.13, tenemos que $\mathcal{A} \subset C(X)$. Así, cada punto de $C(X) \setminus \{X\}$ puede ser conectado a X por un arco contenido en $C(X)$. En consecuencia, $C(X)$ es arcoconexo. ∎

Teorema 1.5.15. *Sea X un continuo. Entonces 2^X y $C(X)$ son continuos arcoconexos no degenerados.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.19, sabemos que 2^X es compacto. También, por el Teorema 1.5.12, tenemos que 2^X es arcoconexo, lo cual implica que 2^X es conexo. Como $\mathcal{F}(X) \subset 2^X$, se sigue que 2^X es no vacío y con más de un punto. Así, 2^X es un continuo no degenerado.

Por otro lado, ya sabemos que $C(X)$ es arcoconexo, en particular $C(X)$ es conexo. Por el Teorema 1.2.5, tenemos que $C(X)$ es compacto. Como $\mathcal{F}(X) \subset C(X)$, se sigue que $C(X)$ es no vacío y con más de un punto. Así, $C(X)$ es un continuo no degenerado.

∎

1.6. Homotopía y contractibilidad

Definición 1.6.1. Sean X, Y espacios topológicos. Una *homotopía* es una función continua $h\colon X\times[0,1]\to Y$. Si $f\colon X\to Y$ y $g\colon X\to Y$ son dos funciones continuas y si $h\colon X\times[0,1]\to Y$ es una homotopía tal que, para cada $x\in X$ se cumple que

$$h(x,0) = f(x)$$

$$h(x,1) = g(x),$$

entonces se dice que h es una homotopía de f a g.

Además, si existe una homotopía de f a g diremos que f y g son *homotópicas*.

Definición 1.6.2. Un espacio topológico X se dice *contráctil en si mismo*, o simplemente *contráctil*, si la función identidad de X, es homotópica a una función constante de X en X.

Definición 1.6.3. Sea $f\colon X\to Y$ una función continua entre espacios métricos compactos. Entonces $2^f\colon 2^X\to 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A)$ se llama la *función inducida entre* 2^X *y* 2^Y.

Observe que 2^f está bien definida pues la imagen continua de un compacto es compacto y los compactos en espacios métricos son, en particular, cerrados.

Teorema 1.6.4. *Sea $f\colon X\to Y$ una función continua entre espacios métricos compactos. Entonces 2^f es continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $A\in 2^X$. Como X es un compacto, se sigue que f es uniformemente continua. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, x'\in X$ tal que $d_X(x,x') < \delta$, se cumple que $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$. Sea $A'\in 2^X$ tal que $h_d(A,A') < \delta$. Entonces existe $\delta' < \delta$, con $\delta' > 0$ tal que $A\subset\bigcup_{a'\in A'} B_{d_X}(a',\delta')$ y $A'\subset\bigcup_{a\in A} B_{d_x}(a,\delta')$. Ahora, sea $f(a')\in f(A')$. Entonces $a'\in A'$. De lo anterior tenemos que existe $a\in A$ tal que $d_X(a',a) < \delta' < \delta$. Entonces $d_Y(f(a'), f(a)) < \epsilon$. En consecuencia, tenemos la contención $f(A')\subset\bigcup_{a\in A} B_{d_Y}(f(a),\epsilon) = N(\epsilon, f(A))$. Análogamente, obtenemos que $f(A)\subset\bigcup_{a\in A'} B_{d_Y}(\epsilon, f(a)) = N(\epsilon, f(A'))$.

Por el Teorema 1.1.13, se concluye que $H_{d_Y}(f(A), f(A')) < \epsilon$.

Por tanto 2^f es continua en A. Como $A\in 2^X$ era arbitrario, podemos concluir que 2^f es continua. ■

Lema 1.6.5. *Sea* $f\colon 2^X\times[0,1]\to 2^{2^X\times[0,1]}$ *dada por* $f(A,t)=\{A\}\times[0,t]$. *Entonces* f *es continua.*

Demostración. Note primero que $2^X\times[0,1]$ es compacto por ser producto de compactos. Además, tenemos el homeomorfismo $\{A\}\times[0,t]\simeq[0,t]$, para cada $t\in[0,1]$. Entonces $\{A\}\times[0,t]$ es un compacto en $2^X\times[0,1]$, y en particular es cerrado en $2^X\times[0,1]$. Así, f está bien definida.

Cabe recalcar que estamos considerando a $2^X\times[0,1]$ con la métrica

$$d^*((A,t),(A',t'))=\sqrt{H_d(A,A')^2+|t-t'|^2}.$$

Observe que $H_d(A,A')\leq d^*((A,t),(A',t'))$ y que $|t-t'|\leq d^*((A,t),(A',t'))$. También es importante notar que $d^*((A,t),(A',t'))\leq H_d(A,A')^2+|t-t'|^2$, para todo $t,t'\in[0,1]$.

Sea ahora $\epsilon>0$ y $(A,t)\in 2^X\times[0,1]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon<1$.

Definamos $\delta=\frac{\epsilon}{4}$. Note que $\delta>0$.

Si $d^*((A,t),(A',t'))<\delta=\frac{\epsilon}{4}$, entonces $|t-t'|<\frac{\epsilon}{4}$ y $H_d(A,A')<\frac{\epsilon}{4}$. Ahora observemos lo siguiente: sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t<t'$. Entonces $[0,t']=[0,t]\cup[t,t']$. En consecuencia, tenemos que:

(i) para cada $x\in[0,t]$, existe $x'\in[0,t']$ tal que $|x-x'|<\frac{\epsilon}{2}$, y además

(ii) para cada $y'\in[0,t']$, existe $y\in[0,t]$ tal que $|y-y'|<\frac{\epsilon}{2}$.

Para convencerse de esto último, note que, en el caso de (i), si tomamos $x\in[0,t]$, podemos elegir $x'=x\in[0,t]\subset[0,t']$ y pues $|x-x'|=0<\frac{\epsilon}{2}$; en el caso de (ii), si tomamos $y'\in[0,t']$, hay dos casos, que $y'\in[0,t]$ o bien que $y'\in[t,t']$, el primer caso es análogo al anterior, y si $y'\in[t,t']$, podemos tomar $y=t\in[0,t]$ y claramente $|y'-y|<\frac{\epsilon}{2}$.

Así, si además notamos que $H_d(A,A')<\frac{\epsilon}{2}$, se obtiene que:

(i) para cada $x\in[0,t]$, existe $x'\in[0,t']$ tal que

$$d^*((A,x),(A',x'))\leq H_d(A,A')^2+|x-x'|^2<\frac{\epsilon^2}{2}<\epsilon^2<\epsilon,$$

donde la última desigualdad se verifica pues $\epsilon<1$;

(II) para cada $y' \in [0, t']$, existe $y \in [0, t]$ tal que

$$d^*((A', y'), (A, y)) \leq H_d(A, A')^2 + |y - y'|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} < \epsilon^2 < \epsilon,$$

y donde, análogamente, la última desigualdad se verifica ya que $\epsilon < 1$.

De aquí se sigue que:

(I) $\{A\} \times [0, t] \subset \bigcup_{x' \in [0,t']} B_{d^*}((A', x'), \epsilon) = N_{d^*}(\{A'\} \times [0, t'], \epsilon)$;

(II) $\{A'\} \times [0, t'] \subset \bigcup_{y \in [0,t]} B_{d^*}((A, y), \epsilon) = N_{d^*}(\{A\} \times [0, t], \epsilon)$.

Así, obtenemos que, $H_{d^*}(\{A\} \times [0, t], \{A'\} \times [0, t']) \leq \epsilon$, es decir,

$$H_{d^*}(f(A, t), f(A', t')) \leq \epsilon.$$

Por tanto f es continua en (A, t). Como (A, t) es arbitrario, se concluye que f es continua. ∎

Lema 1.6.6. *Sea $h\colon 2^X \times [0, 1] \to 2^X$ una función continua, es decir, una homotopía. Si $g\colon 2^X \times [0, 1] \to 2^{2^X}$ está dada por $g(A, t) = h(\{A\} \times [0, t])$, entonces g es continua.*

Demostración. Sea $f\colon 2^X \times [0, 1] \to 2^{2^X \times [0,1]}$ dada por $f(A, t) = \{A\} \times [0, t]$. Note que $(2^h \circ f)(A, t) = 2^h(f(A, t)) = 2^h(\{A\} \times [0, t]) = h(\{A\} \times [0, t]) = g(A, t)$, para todo $A \in 2^X$ y $t \in [0, 1]$. Entonces, $g = 2^h \circ f$. Ahora, como h va de $2^X \times [0, 1]$ -que es compacto- en 2^X -que también es compacto-, se sigue que 2^h es continua. Además, por el Lema 1.6.5, se sigue que f también es continua. Por tanto, g es continua por ser composición de funciones continuas. ∎

Definición 1.6.7. Sea $\Delta \subset 2^X$. Sea $h\colon \Delta \times [0, 1] \to 2^X$ una homotopía. A la función $h'\colon \Delta \times [0, 1] \to 2^X$ dada por $h'(A, t) = \bigcup\{h(A, s)\colon 0 \leq s \leq t\}$ se le llama el *segmento homotópico asociado a h*.

Lema 1.6.8. *Sea X un compacto. Sea $\sigma\colon 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Entonces σ está bien definida y satisface la desigualdad*

$$H_d(\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2)) \leq H^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2),$$

donde H^2 es la métrica de Hausdorff para 2^{2^X}. Note además que σ es continua.

La prueba de este Teorema puede encontrarse en [12, Theorem 1.48].

Teorema 1.6.9. *El segmento homotópico asociado a una homotopía es una función continua.*

Demostración. Sea $\Delta \subset 2^X$. Sea $h\colon \Delta \times [0,1] \to 2^X$ una homotopía. Sea $g\colon 2^X \times [0,1] \to 2^{2^X}$ dada por $g(A,t) = h(\{A\} \times [0,t])$. Consideremos a $h'\colon \Delta \times [0,1] \to 2^X$ dada por $h'(A,t) = \bigcup\{h(A,s)\colon 0 \leq s \leq t\}$ el segmento homotópico asociado a h. Observe que $h(\{A\} \times [0,t]) = \{h(A,s)\colon 0 \leq s \leq t\}$. De aquí, se sigue que

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ g)(A,t) &= \sigma(g(A,t)) \\
&= (\sigma \circ g)(A,t) \\
&= \bigcup g(A,t) \\
&= \bigcup h(\{A\} \times [0,t]) \\
&= \bigcup \{h(A,s)\colon 0 \leq s \leq t\} \\
&= h'(A,t),
\end{aligned}$$

para cada $A \in 2^X$ y $t \in [0,1]$. En consecuencia, $h' = \sigma \circ g$. Pero por el Lema 1.6.8, se sabe que σ es continua, y por el Lema 1.6.6, sabemos que g es continua.

Así, podemos concluir que h', el segmento homotópico asociado a h es una función continua. ■

Definición 1.6.10. Un continuo X dice que tiene la *propiedad de Kelley* si ocurre que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $a, b \in X$ son tales que $d(a,b) < \delta$ y $a \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \epsilon$.

A δ se le llama el *número de Kelley asociado a* ϵ.

Teorema 1.6.11. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces 2^X y $C(X)$ son contráctiles.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en [10, 16.15 THEOREM].

Teorema 1.6.12. *Todo continuo hereditariamente indescomponible tiene la propiedad de Kelley.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en [10, 16.27 Theorem].

1.7. Algunos resultados sobre Teoría de la dimensión

Definición 1.7.1. Sea X un espacio métrico. Definimos $\dim(X)$ de modo recursivo.

(i) $\dim(X) = -1$ si $X = \emptyset$. También, $\dim(X) \leq -1$ es equivalente a $X = \emptyset$;

(ii) Suponga inductivamente que ya está definido qué significa $\dim(Y) \leq n-1$ para un espacio métrico Y y $n \leq 0$. Entonces, para un espacio métrico X, definimos $\dim_p(X) \leq n$ si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas en X cuyas fronteras tienen $dim \leq n-1$. Aquí, $\dim_p(X)$ es la dimensión de X en el punto p;

(iii) $\dim(X) \leq n$ si $\dim_p(x) \leq n$ para todo $p \in X$;

(iv) $\dim(x) = n$ si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) > n-1$;

(v) $\dim_p(X) = n$ si $\dim_p(X) \leq n$ y $\dim_p(X) > n-1$;

(vi) $\dim(X) = \infty$ si para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ se cumple $\dim(X) > n$;

(vii) $\dim_p(X) = \infty$ si para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ se cumple $\dim_p(X) > n$.

Teorema 1.7.2. *La dimensión una propiedad topológica.*

Demostración. La prueba es inmediata pues la Definición 1.7.1 está en términos de vecindades y fronteras, las cuales son propiedades topológicas. ■

Lema 1.7.3. *Sea X un espacio métrico y $Y \subset X$. Entonces, para todo $A \subset X$*

$$fr_Y(A \cap Y) \subset fr_X(A).$$

Demostración. Sabemos que $fr_Y(A \cap Y) = cl_Y(A \cap Y) \cap cl_Y(Y \setminus A)$. Como $cl_Y(A \cap Y) \subset cl_X(A)$ y $cl_Y(Y \setminus A) \subset cl_X(X \setminus A)$, se sigue el resultado. ■

Teorema 1.7.4. *Sea X un espacio métrico con $dim(X) \leq n$. Si $Y \subset X$, entonces $dim(Y) \leq n$.*

Demostración. Hagamos una prueba por inducción. El caso $n = -1$ es inmediato, pues si $\dim(X) \leq -1$, entonces $X = \emptyset$, luego $Y = \emptyset$ y así, $\dim(Y) \leq -1$. Ahora, supongamos que el teorema es verdadero para cualquier espacio métrico de dim $\leq n-1$. Ahora, suponga que $\dim(X) \leq n$ y $Y \subset X$. Sea $p \in Y$. Como $\dim_p(X) \leq n$, se sigue que p tiene una base de vecindades de abiertos $\mathcal{U}$ de X tal que $dim(fr_X(U)) \leq$

$n-1$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Por el Lema 1.7.3, se sigue que $fr_Y(U \cap Y) \subset fr_X(U)$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Por nuestra hipótesis inductiva, se sigue que $\dim(fr_Y(U \cap Y)) \leq n-1$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Como $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una base de vecindades de p de abiertos de Y, se sigue que $\dim_p(Y) \leq n$. Como $p \in Y$ era arbitrario, se sigue por definición que $\dim(Y) \leq n$.

Por inducción, se sigue el resultado. ■

Teorema 1.7.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $I^n = [0,1]^n$. Entonces $dim(I^n) = n$.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [11, 9.5 Theorem]

Teorema 1.7.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio métrico. Suponga que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, con A_i cerrados y $dim A_i \leq n$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $dim X \leq n$.*

La prueba del Teorema 1.7.6 puede encontrarse en [4, Theorem III.2].

Corolario 1.7.7. *Sea $X = Y \cup Z$, donde X, Y, Z son espacios métricos y además $dim(Y) \leq n$ y $dim(Z) \leq n$. Si Y o Z son cerrados en X, entonces $dim(X) \leq n$.*

La prueba del Corolario 1.7.7 puede encontrarse en [4, Corollary 1, pp.32].

Capítulo 2

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE HIPERESPACIOS N–ÉSIMOS

2.1. Propiedades generales de los hiperespacios n-ésimos

Teorema 2.1.1. *Todo arco ordenado que empieza en $C_n(X)$, se queda contenido en $C_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado que empieza en A, donde $A \in C_n(X)$. Por el Teorema 1.5.10, existe $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ continua e inyectiva, tal que $\alpha([0,1]) = \mathcal{A}$ y, si $s < t$ con $s, t \in [0,1]$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. Además, $\alpha(0) = A$. Tomemos $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \neq A$. Entonces existe $t_0 \in (0,1]$ tal que $B = \alpha(t_0)$. Note que $\alpha([0,t_0])$ es un arco ordenado que va de A a B. Además, $A \subset B$. Entonces, por el Teorema 1.5.11, tenemos que cada componente de B intersecta a A. Denotemos por $A_1, \ldots, A_k$ a todas las distintas componentes de A. Note que $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Además, como $A \in C_n(X)$, se sigue que $k \leq n$. Denotemos por $C_1, \ldots, C_k$ a las componentes de B tales que $A_i \subset C_i$, para $i = 1, \ldots, k$. Note que si existiera una componente de B, digamos C' tal que $C' \neq C_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces como las componentes distintas son ajenas, tendríamos que $C' \cap C_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$, luego $C' \cap A_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$, y en consecuencia, $C' \cap A = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto, todas las componentes[1] de B son $C_1, \ldots, C_k$. Así, obtenemos $B \in C_n(X)$.

Como $B \in \mathcal{A}$ era arbitrario, podemos concluir que $\mathcal{A} \subset C_n(X)$. ■

Teorema 2.1.2. *Sea X un continuo. Entonces $C_n(X)$ es un continuo arcoconexo, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sabemos por el Teorema 1.5.15 que $C(X)$ es un continuo. Entonces, por el Teorema 1.1.3 tenemos que $\mathcal{F}_n(C(X))$ es un continuo. Veamos que $\sigma(\mathcal{F}_n(C(X)) = C_n(X)$. Note que si $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n(C(X))$, entonces $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ para ciertos $A_1, \ldots, A_k \in C(X)$ distintos y $k \leq n$. Sea $\sigma\colon 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Así, $\sigma(\{A_1, \ldots, A_k\}) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Además, $\sigma(\{A_1, \ldots, A_k\})$ tiene k componentes, y como cada componente es un cerrado de X, se sigue que

[1] Es importante notar que no estamos diciendo que las $C_1, \ldots, C_k$ son todas componentes distintas.

$\sigma(\{A_1, \ldots, A_k\}) \in C_n(X)$. Así, $\sigma(\mathcal{F}_n(C(X)) \subset C_n(X)$. Ahora, para $A \in C_n(X)$, notamos que A tiene $k \leq n$ componentes distintas, digamos $A_1, \ldots, A_k$. Si definimos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, entonces como cada $A_i \in C(X)$, se sigue que $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n(C(X))$. Es inmediato que $\sigma(\mathcal{A}) = A$. Así, $A \in \sigma\mathcal{F}_n(C(X))$. Entonces, $\sigma(\mathcal{F}_n(C(X)) = C_n(X)$. Ahora, por el Lema 1.6.8 sabemos que σ es continua. En consecuencia, como $\mathcal{F}_n(C(X)$ es un compacto y conexo, se sigue que $\sigma(\mathcal{F}_n(C(X)) = C_n(X)$ es compacto y conexo. Así, $C_n(X)$ es un continuo.

Ahora veamos que $C_n(X)$ es arcoconexo.

Sea $A \in C_n(X)$ tal que $A \neq X$. Por el Teorema 1.5.11, existe un arco ordenado de A a X, digamos $\mathcal{A} \subset 2^X$. Por el Teorema 2.1.1, se sigue que $\mathcal{A} \subset C_n(X)$. Como A era arbitrario, se sigue que cada punto de $C_n(X)$ se puede conectar con X con un arco ordenado contenido en $C_n(X)$; en consecuencia, $C_n(C)$ es arcoconexo. ■

Lema 2.1.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, y X un continuo. Si $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de $C_n(X)$, entonces $\cup\mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ tiene a lo más n componentes conexas.*

Demostración. Suponga que existe $\mathcal{A}$ subconjunto de $C_n(X)$ conexo tal que $\cup\mathcal{A}$ tiene al menos $n+1$ componentes conexas. Por el Teorema 1.2.13, existen $C_1, \ldots, C_{n+1}$ conjuntos separados dos a dos y no vacíos tales que $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n+1} C_j$.

Como $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, podemos tomar $A_0 \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$. Note que A_0 tiene a lo más n componentes conexas y

$$A_0 \subset \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n+1} C_j.$$

Entonces dado que los $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}$ son separados, se sigue que A_0 puede estar contenido en a lo más n de dichos conjuntos, pues cada componente de A_0 solo puede estar contenido en un C_j. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$.

Ahora definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j\}$$

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap C_{n+1} \neq \emptyset\}$$

Demostraremos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son una separación de $\mathcal{A}$.

Note que $A_0 \in \mathcal{B}$. Así, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Ahora, como $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n+1} C_j$, y cada C_j es no vacío, se sigue que si $w \in C_{n+1}$ entonces $w \in A_1$ para algún $A_1 \in \mathcal{A}$. Así, $A_1 \in \mathcal{D}$ y se sigue que $\mathcal{D} \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$.

En efecto. Claramente ya tenemos que $\mathcal{B} \cup \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Resta verificar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$

Si $A \in \mathcal{A}$, sucede que $A \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ o bien $A \cap C_{n+1} = \emptyset$.

Si $A \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

Y si $A \cap C_{n+1} = \emptyset$, como $A \subset \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n+1} C_j$, se sigue que $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ y así $A \in \mathcal{B}$.

Por tanto, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$.

Ahora veamos que $[\mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{B}] \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Suponga que existe $A \in \mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{B} \cap \mathcal{D}$. Entonces, existe una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathcal{B}$ tal que $A_k \to A$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$. Además, como $A \in \mathcal{D}$, se sigue que $A \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Entonces, existe $x' \in A \cap C_{n+1}$. Como $A_k \to A$, existe una sucesión $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ tales que $x_n \to x'$. Entonces, $x' \in \mathrm{cl}_X[\bigcup_{j=1}^{n} C_j] = \bigcup_{j=1}^{n}[\mathrm{cl}_X C_j]$. Así, existe $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x' \in \mathrm{cl}_X C_{j_0}$. Pero esto último es una contradicción, pues $x' \in C_{n+1}$ y $[\mathrm{cl}_X C_{j_0}] \cap C_{n+1} = \emptyset$. Por tanto, $\mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Finalmente, veamos que $[\mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{D}] \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Suponga que existe $A \in [\mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{D}] \cap \mathcal{B}$. Entonces, $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ y existe una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos de $\mathcal{D}$ tal que $A_k \to A$. En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $A_k \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, luego $A_k \cap [\mathrm{cl}_X C_{n+1}] \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema 1.1.20, tenemos que $A \cap [\mathrm{cl}_X C_{n+1}] \neq \emptyset$. Pero $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ y como los $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ son separados, tenemos que$[\mathrm{cl}_X C_{n+1}] \cap [\bigcup_{j=1}^{n} C_j] = \emptyset$, en consecuencia $A \cap [\mathrm{cl}_X C_{n+1}] = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Por tanto, $[\mathrm{cl}_{2^X}\mathcal{D}] \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Así, concluimos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ forman una separación de $\mathcal{A}$, lo cual es una contradicción debido a que $\mathcal{A}$ es conexo.

Por tanto, $\bigcup \mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes. ■

Corolario 2.1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo y $\mathcal{A} \in C(C_n(X))$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \in C_n(X)$.*

Demostración. Como $\mathcal{A} \in C(C_n(X))$, se sigue que $\mathcal{A}$ es conexo y $\mathcal{A} \subset C_n(X)$, donde $\mathcal{A}$ es un cerrado no vacío de 2^X. En particular, $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 2.1.3, se tiene que $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ tiene a lo más n componentes conexas y por el Lema 1.6.8, se tiene que $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$.

Por tanto, $\sigma(\mathcal{A}) \in C_n(X)$. ∎

Teorema 2.1.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el continuo X es localmente conexo si y solo si $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Suponga que $C_n(X)$ es localmente conexo. Sea $x \in X$ y U un abierto de X de tal manera que $x \in U$. Note que como $C_n(X)$ es un espacio métrico, en particular es normal. Entonces existe un abierto V en $C_n(X)$ de tal manera que $\{x\} \in V \subset cl_{C_n(X)}V \subset \langle U\rangle_n$ y luego, utilizando que $C_n(X)$ es localmente conexo, encontramos un abierto conexo C tal que $\{x\} \in C \subset V$. Así, existe un abierto conexo C de $C_n(X)$ tal que $\{x\} \subset C \subset cl_{C_n(X)}C \subset \langle U\rangle_n$.

Ahora, sea $\langle V_1, \ldots, V_k\rangle_n$ un básico de $C_n(X)$ con $\{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_k\rangle_n \subset C$ y defínase el conjunto $W = \bigcap_{j=1}^{k} V_j$. Nosotros queremos cumplir las condiciones del Teorema 1.3.3, inciso (ii). Para esto, veamos primero que si $y \in W$, entonces $y \in \sigma(cl_{C_n(X)}C) = \bigcup cl_{C_n(X)}C$.

En efecto. Si $y \in W$, entonces $y \in \bigcap_{j=1}^{k} V_j$. De ahí que $\{y\} \in \langle V_1, \ldots, V_k\rangle_n \subset C \subset cl_{C_n(X)}C$. Así, $\{y\} \in cl_{C_n(X)}C$. Por tanto, $y \in \sigma(cl_{C_n(X)}C)$.

Ahora, veamos que $\sigma(cl_{C_n(X)}C)$ es un conexo. Como $\{x\} \in C(X)$ -pues $\{x\}$ es un conexo en 2^X-, y $cl_{C_n(X)}C$ es un conexo -ya que C es conexo-, y $\{x\} \in cl_{C_n(X)}C$, entonces por el Lema 2.1.3, se sique que $\bigcup cl_{C_n(X)}C$ es conexo.

Así, tenemos que $x, y \in \sigma(cl_{C_n(X)}C)$.

Finalmente, veamos que $\sigma(cl_{C_n(X)}C) \subset U$.

Si $w \in \sigma(cl_{C_n(X)}C)$, entonces existe $H \in cl_{C_n(X)}C$ con $w \in H$. Como $cl_{C_n(X)}C \subset \langle U\rangle_n$, se sigue que $H \in \langle U\rangle_n$. Así, $H \subset U$ y por tanto, $w \in U$.

En resumen, tenemos lo siguiente. Dado $x \in X$ y U abierto de X, existe un abierto W tal que $x \in W$ y $W \subset U$ -debido a que $\langle V_1, \ldots, V_k\rangle_n \subset C \subset \langle U\rangle_n$-. Además, W tiene la propiedad de que si $y \in W$, entonces existe un conjunto conexo $\sigma(cl_{C_n(X)}C)$ tal que $\{x, y\} \subset \sigma(cl_{C_n(X)}C) \subset U$. Entonces por el Teorema 1.3.3, se sigue que X es conexo im kleinen. Pero por el Teorema 1.3.5, como x fue arbitrario, tenemos que X es localmente conexo. ∎

Teorema 2.1.6. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es un conjunto denso en ninguna parte en $C_{n+1}(X)$.*

Demostración. Observemos lo siguiente. Como $C_n(X)$ es un continuo, en particular es compacto en 2^X. Como $C_{n+1}(X)$ es un espacio métrico, entonces $C_n(X)$ es cerrado en $C_{n+1}(X)$. Así $C_n(X) = cl_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$. Veamos que $int_{C_{n+1}(X)}C_n(X) = \emptyset$. Supongamos que $int_{C_{n+1}}C_n(X) \neq \emptyset$. Veamos primero que $X \notin int_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$. Si $X \in int_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$, entonces existen abiertos no vacíos de X, digamos $U_1, \ldots, U_l$ tales que

$$X \in \langle U_1, \ldots, U_l \rangle \cap C_{n+1}(X) \subset C_n(X).$$

En particular, $X = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$. Definamos $m = n + 1 - l$. Como cada U_i es no vacío, podemos elegir $x_i \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, l$. Además, por el Corolario 1.2.9, se sigue en particular que $\{x_1\} \subsetneq U_1$. Entonces podemos tomar $y_1 \in U_1 \setminus \{x_1\}$. Otra vez, por el Corolario 1.2.9, tenemos que $\{x_1, y_1\} \subsetneq U_1$. Entonces podemos tomar $y_2 \in U_1 \setminus \{x_1, y_1\}$. Siguiendo así, podemos tomar una sucesión finita de puntos distintos $y_1, \ldots, y_m \in U_1$. Definamos $B = \{x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m\}$. Entonces $B = \{x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m\}$ tiene $l + m = n + 1$ puntos distintos. Además, por como fue construido B, tenemos que $B \cap U_i \neq \emptyset$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$. Entonces $B \in \langle U_1, \ldots, U_l \rangle$. Más aún, es inmediato verificar que B tiene exactamente $n + 1$ componentes; en consecuencia, $B \in C_{n+1}(X) \setminus C_n(X)$. Así, obtenemos que

$$B \in \langle U_1, \ldots, U_l \rangle \cap C_{n+1}(X) \subset C_n(X),$$

lo cual implica que $B \in C_n(X)$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $X \notin int_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$.

Ahora, como seguimos suponiendo que $int_{C_{n+1}(X)}C_n(X) \neq \emptyset$, podemos tomar $A \in int_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$. De lo anterior tenemos que $A \neq X$. Además, $A \in C_n(X)$. Sean $A_1, \ldots, A_k$ las componentes (distintas) de A. Note que $k \leq n$. Como $int_{C_{n+1}(X)}C_n(X)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_H(A, r) \subset C_n(X)$. Además, por el Corolario 1.2.8, existen $G_1, \ldots, G_k$ abiertos de X ajenos dos a dos tales que $A_j \subset G_j$, para $j = 1, \ldots, k$. Por el Lema 1.1.6, existen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k > 0$ tales que

$$A_j \subset N(A_j, \epsilon_j) \subset G_j,$$

para $j = 1, \ldots, k$. Definamos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, r\}$. Note que $\epsilon > 0$. Entonces $A_j \subset N(A_j, \epsilon)$ y como $N(A_j, \epsilon) \subset G_j$ para $j = 1, \ldots, k$, se sigue que los $N(A_j, \epsilon)$ son ajenos dos a dos. Además, $B_H(A, \epsilon) \subset C_n(X)$. Definamos $p = n + 1 - k$. Ahora, como

$N(A_1, \epsilon)$ es abierto, se sigue por el Corolario 1.2.9, que $A_1 \subsetneq N(A_1, \epsilon)$. Entonces, podemos elegir $a_1 \in N(A_1, \epsilon) \setminus A_1$ y otra vez por el Corolario 1.2.9, tenemos que $A_1 \cup \{a_1\} \subsetneq N(A_1, \epsilon)$, luego existe $a_2 \in N(A_1, \epsilon) \setminus \{a_1\}$. Continuando de esta manera, podemos elegir $a_1, \ldots, a_p \in N(A_1, \epsilon) \setminus A_1$. Ahora, definamos $B = A \cup \{a_1, \ldots, a_p\}$. Note que B tiene $k + p = n + 1$ componentes. Además, como $A \subset B$, se sigue que $A \subset N(B, \epsilon)$. Notando que que $\{a_1, \ldots, a_p\} \subset N(A_1, \epsilon) \subset N(A, \epsilon)$, podemos concluir que $B = A \cup \{a_1, \ldots, a_p\} \subset N(A, \epsilon)$. Por el Teorema 1.1.13, se sique que $H(A, B) < \epsilon$. Por tanto $B \in B_H(A, \epsilon)$ y como ya teníamos que $B_H(A, \epsilon) \subset C_n(X)$, se sigue que $B \in C_n(X)$, lo cual es una contradicción ya que B tiene exactamente $n + 1$ componentes.

Por tanto, $int_{C_{n+1}(X)} C_n(X) = \emptyset$. ∎

Lema 2.1.7. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces existen n subcontinuos de X no degenerados y disjuntos dos a dos.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ distintos. Como X es métrico, en particular es Hausdorff, entonces existen abiertos disjuntos $U_1, \ldots, U_n$ con $x_i \in U_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces por el Teorema 1.4.8, existen subcontinuos $B_1, \ldots, B_n$ tales que $\{x_i\} \subsetneq B_i \subset U_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Así, cada B_i es no degenerado y dicha colección es disjunta dos a dos. ∎

Corolario 2.1.8. *Sea X un continuo. Si $M_1, \ldots, M_p$ son subcontinuos propios de X ajenos dos a dos, y $k \in \mathbb{N}$, entonces existen k subcontinuos propios de X no degenerados, digamos $C_1, \ldots, C_k$, tales que $M_j \cap C_l = \emptyset$ para $j = 1, \ldots, p$ y $l = 1, \ldots, k$.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Note que $X \neq \bigcup_{j=1}^{p} M_j$, ya que de lo contrario, X no sería un conexo. Más aún, $X \setminus \bigcup_{j=1}^{p} M_j$ no puede ser finito por la misma razón. Entonces podemos tomar k puntos distintos en $X \setminus \bigcup_{j=1}^{p} M_j$, digamos $x_1, \ldots, x_k$. ∎

Teorema 2.1.9. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ contiene una $n-$celda.*

Demostración. Por el Lema 2.1.7, podemos tomar $A_1, \ldots, A_n$ subcontinuos de X que son disjuntos dos a dos y no degenerados. Para $j = 1, \ldots, n$, sea $a_j \in A_j$. Entonces por el Teorema 1.5.11, existen arcos ordenados $\alpha_j \colon [0, 1] \to C(X)$ tal que $\alpha_j(0) = \{a_j\}$ y $\alpha_j(1) = A_j$. Note que, efectivamente, el codominio de cada α_j es $C(X)$ por el Lema 1.5.13. Ahora, consideremos a la función $\xi \colon [0, 1]^n \to C_n(X)$ dada por $\xi(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_1(t_1) \cup \ldots \cup \alpha_n(t_n)$. Observemos que ξ está bien definida, ya que cada $\alpha_j(t_j)$ es conexo, y los $\alpha_j(t_j)$ son disjuntos dos a dos, por estar contenidos en A_j, para cada $j = 1, \ldots, n$, respectivamente. Así, $\xi(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_1(t_1) \cup \ldots \cup \alpha_n(t_n)$ tiene n componentes y por tanto, está bien definida.

A continuación, verifiquemos que ξ es un encaje de $[0, 1]^n$ en $C_n(X)$.

Para probar la inyectividad de ξ, observemos que si $(t_1, \ldots, t_n) \neq (t'_1, \ldots, t'_n)$, entonces existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $t_{i_0} \neq t'_{i_0}$, luego $\alpha_{i_0}(t_{i_0}) \neq \alpha_{i_0}(t'_{i_0})$, pues α_{i_0} es inyectiva por ser un arco ordenado. Entonces, como los $\alpha_j(t_j)$ son disjuntos dos a dos, tenemos que $\xi(t_1, \ldots, t_n) \neq \xi(t'_1, \ldots, t'_n)$.

Ahora demostremos que ξ es continua. Como $[0, 1]^n$ es métrico, bastará ver que ξ manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes.

Si $(t_1^{(m)}, \ldots, t_n^{(m)}) \to (s_1, \ldots, s_n)$ cuando $m \to \infty$, entonces $t_i^{(m)} \to s_i$. Como cada α_j es continua, se tiene que $\alpha_j(t_i^{(m)}) \to \alpha_j(s_i)$. Por el Teorema 1.1.20, se sigue que $\xi(t_1^{(m)}, \ldots, t_n^{(m)}) \to \xi(s_1, \ldots, s_n)$.

Así, ξ es continua.

Y finalmente, como ξ es biyectiva en su imagen y además es continua con dominio compacto y codominio Hausdoff, se sique que ξ es un encaje de $[0, 1]^n$ en $C_n(X)$. ■

Teorema 2.1.10. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene k, donde $k \leq n$, subcontinuos descomponibles y disjuntos dos a dos, entonces $C_n(X)$ contiene una $(k + n)-$celda.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que $k < n$. La estrategia a seguir en esta demostración es la siguiente: primero construiremos ciertos continuos con ciertas propiedades particulares y después propondremos una función de una $(k + n)-$celda en $C_n(X)$ y verificaremos que, de hecho, es un encaje.

Por hipótesis, tenemos que existen $M_1, \ldots, M_k$ subcontinuos descomponibles de X disjuntos dos a dos. Por el Teorema 1.4.11, podemos suponer que, para $j = 1, \ldots, k$, se tiene que $M_j = A_j \cup B_j$, donde $A_j, B_j, A_j \cap B_j$ son continuos, $A_j \setminus (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, $B_j \setminus (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$ y $[A_j \setminus (A_j \cap B_j)] \cap [B_j \setminus (A_j \cap B_j)] = \emptyset$. Aquí, estamos tomando los $2-$odos garantizados por el Teorema 1.4.11.

Por otro lado, por el Teorema 1.2.8, existen $G_1, \ldots, G_n$ abiertos de X ajenos dos a dos, tales que $M_j \subset G_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Por el Corolario 1.2.11, existen $C_{k+1}, \ldots, C_n$ subcontinuos propios de X no genenerados y ajenos dos a dos, tales que $C_i \subset G_1$ y

$C_i \cap M_1 = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, dado que los G_i son ajenos dos a dos, y $M_j \subset G_j$, para $j = 1, \ldots, n$, tenemos que $C_i \cap M_j = \emptyset$ para $j = 1, \ldots k$ y $i = k+1, \ldots, n$.

Ahora, como para cada $j = 1, \ldots, k$ tenemos que $A_j \cap B_j \subset A_j$, $A_j \cap B_j \subset B_j$, y cada componente de A_j, B_j intersecta a cada componente de $A_j \cap B_j$ -ya que son continuos, en particular conexos-, por el Teorema 1.5.11, existen arcos ordenados $\alpha_j \colon [0,1] \to 2^X$ y $\beta_j \colon [0,1] \to 2^X$ tales que $\alpha_j(0) = A_j \cap B_j$, $\alpha_j(1) = A_j, \beta_j(0) = A_j \cap B_j$, y $\beta_j(1) = B_j$. Note que como $\alpha_j(0)$ y $\beta_j(0)$ son conexos, se sigue por el Lema 1.5.13 que, para cada $t \in [0,1]$, tanto $\alpha_j(t)$ como $\beta_j(t)$ son conexos y además están contenidos en A_j y B_j, respectivamente. Entonces es más preciso escribir que $\alpha_j \colon [0,1] \to C(A_j)$ y $\beta_j \colon [0,1] \to C(B_j)$.

Por otro lado, como los continuos $C_{k+1}, \ldots, C_n$ son no degenerados, podemos tomar $x_i \in C_i$, para $i = k+1, \ldots, n$. Es inmediato verificar que, para $i = k+1, \ldots, n$, se cumple que $\{x_i\} \subsetneq C_i$ y cada componente de C_i intersecta a cada componente de $\{x_i\}$. Entonces por el Teorema 1.5.11, se sigue que para $i = k+1, \ldots, n$, existen arcos ordenados $\gamma_i \colon [0,1] \to C(C_i)$ tales que $\gamma_i(0) = x_i$ y $\gamma_i(1) = C_i$. Note que escribimos que $C(C_i)$ es el codominio de γ_i por un argumento análogo al del párrafo anterior.

Ahora propondremos el encaje que nos permitirá demostrar el teorema.

Notemos primero el homeomorfismo $[0,1]^{k+n} \simeq [0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$. Ahora, sea $\xi \colon [0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k} \to C_n(X)$ dada por

$$\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k})) = \left(\bigcup_{j=1}^{k} [\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})] \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l) \right).$$

Naturalmente, antes de continuar, primero tenemos que verificar que ξ está bien definida. Sea $((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k})) \in [0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$. Por la manera en que fueron construidas las γ_i, se sigue que $\gamma_{l+k}(s_l) \subset C_{k+l}$, para $l = 1, \ldots, n-k$. Además, como cada $\gamma_{l+k}(s_l)$ es conexo y es un subconjunto cerrado del compacto C_{k+l}, se sigue que cada $\gamma_{l+k}(s_l)$ es un compacto, y en consecuencia un continuo. Entonces como los C_i son ajenos dos a dos, se sigue que $\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l)$ es la unión de $n-k$ continuos ajenos dos a dos.

Por otro lado, para $j = 1, \ldots, k$, tenemos que, debido a la manera en que $\alpha_j(t_{2j-1})$ y $\beta_j(t_{2j})$ fueron construidos, se sigue que también son subconjuntos conexos y cerrados de los compactos A_j y B_j, respectivamente. Entonces $\alpha_j(t_{2j-1})$ y $\beta_j(t_{2j})$

son compactos y, en consecuencia, son continuos. Podemos decir un poco más. Note que, por como fueron construidos los arcos ordenados α_j, β_j, tenemos que $A_j \cap B_j = \alpha_j(0) = \beta_j(0) \subset \alpha_j(t_{2j-1}) \cap \beta_j(t_{2j})$. Entonces, como $A_j \cap B_j$ es un continuo, en particular $A_j \cap B_j$ es no vacío, luego por el teorema 1.2.12 se sigue que $\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})$ es un continuo. Como $\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j}) \subset A_j \cup B_j = M_j$, y los M_j son ajenos dos a dos, se sigue que los continuos $\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})$ son ajenos dos a dos, para $j = 1, \ldots, k$.

Así, $\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})]$ es la unión de k continuos ajenos dos a dos.

Por tanto, como sabemos que, para $j = 1, \ldots, k$ y $l = 1, \ldots, n-k$, se cumple que

$$C_{k+l} \cap M_j = \emptyset,$$

$$\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j}) \subset M_j, \text{ y}$$

$$\gamma_{l+k}(s_l) \subset C_{k+l},$$

entonces $\left(\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})]\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l)\right) = \xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k}))$ es la unión de n continuos ajenos dos a dos. Así, $\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k}))$ es cerrado por ser unión finita de continuos (recuerde que los continuos son compactos, y como X es métrico, se sigue que los compactos son cerrados en X) y es inmediato que $\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k}))$ tiene n componentes.

Así, concluimos que $\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k})) \in C_n(X)$ y por tanto, ξ está bien definida.

Ahora ya estamos en condiciones de verificar que ξ es un encaje.

Para ver que ξ es continua, como $[0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$ es un espacio métrico, bastará demostrar que ξ manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Suponga que $((t_1^{(m)}, \ldots, t_{2k}^{(m)}), (s_1^{(m)}, \ldots, s_{n-k}^{(m)})) \to ((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k}))$ cuando $m \to \infty$. Entonces, para $j = 1, \ldots, k$ y $l = 1, \ldots, n-k$, se tiene que $t_{2j}^{(m)} \to t_{2j}$, $t_{2j-1}^{(m)} \to t_{2j-1}$, y $s_l^{(m)} \to s_l$, cuando $m \to \infty$. Como cada arco α_j, β_j y γ_l es, en particular, una funcion continua, se sigue que $\alpha_j(t_{2j-1}^{(m)}) \to \alpha_j(t_{2j-1})$, $\beta_j(t_{2j}^{(m)}) \to \beta_j(t_{2j})$ y $\gamma_l(s_l^{(m)}) \to \gamma_l(s_l)$, cuando $m \to \infty$. Por el Teorema 1.1.20, se sigue que

$$\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l^{(m)}) \to \bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l)$$

y también que

$$\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}^{(m)}) \cup \beta_j(t_{2j}^{(m)})] \to \bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})]$$

cuando $m \to \infty$.

Así, por el Teorema 1.1.20, tenemos que

$$\xi((t_1^{(m)}, \ldots, t_{2k}^{(m)}), (s_1^{(m)}, \ldots, s_{n-k}^{(m)})) \to \xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k}))$$

cuando $m \to \infty$.

Por tanto, ξ es continua.

A continuación, veamos que ξ es inyectiva.

Suponga que $\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k})) = \xi((t'_1, \ldots, t'_{2k}), (s'_1, \ldots, s'_{n-k}))$. Esto es equivalente a que

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})]\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l)\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})]\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s'_l)\right).$$

Notemos que

$$\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})] \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j,$$

$$\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})] \subset \bigcup_{j=1}^{k} M_j,$$

$$\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l) \subset \bigcup_{l=1}^{n-k} C_{k+l}, \text{ y}$$

$$\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s'_l) \subset \bigcup_{l=1}^{n-k} C_{k+l}.$$

Ahora, recordemos que, por como fueron construidos los M_j y los C_{k+l}, sabemos que para $j = 1, \ldots, k$ y $l = 1, \ldots, n-k$, se cumple que $C_{k+l} \cap M_j = \emptyset$. Entonces $\left[\bigcup_{j=1}^{k} M_j\right] \cap \left[\bigcup_{l=1}^{n-k} C_{k+l}\right] = \emptyset$. De nuestra hipótesis -en la que estamos suponiendo que $\xi((t_1, \ldots, t_{2k}), (s_1, \ldots, s_{n-k})) = \xi((t'_1, \ldots, t'_{2k}), (s'_1, \ldots, s'_{n-k}))$-, y de lo anterior, se obtiene que

$$\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})] = \bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})],$$

$$\left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s_l)\right) = \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(s'_l)\right).$$

En particular, como los C_{k+l} son ajenos dos a dos y dado que tanto $\gamma_{k+l}(s_l)$ como $\gamma_{k+l}(s'_l)$ son subconjuntos de C_{k+l}, se sigue que $\gamma_{k+l}(s_l) = \gamma_{k+l}(s'_l)$, para $l = 1, \ldots, n-k$. Pero cada γ_{k+l} es un arco ordenado, en particular inyectivo. Entonces $s_l = s'_l$ para cada $l = 1, \ldots, n-k$. Análogamente, como los M_j son ajenos dos a dos, y tanto $\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})]$ como $\bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})]$ son subconjuntos de M_j, se sigue que $[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})] = [\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})]$, para $j = 1, \ldots, k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
[\alpha_j(t_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)] \cup [\beta_j(t_{2j}) \setminus (A_j \cap B_j)] &= [\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})] \setminus (A_j \cap B_j) \\
&= [\alpha_j(t'_{2j-1}) \cup \beta_j(t'_{2j})] \setminus (A_j \cap B_j) \\
&= [\alpha_j(t'_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)] \cup [\beta_j(t'_{2j}) \setminus (A_j \cap B_j)].
\end{aligned}$$

Ahora, note que tanto $[\alpha_j(t_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)]$ como $[\alpha_j(t'_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)]$ están contenidos en $A_j \setminus (A_j \cap B_j)$. Análogamente, tanto $[\beta_j(t_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)]$ como $[\beta_j(t'_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)]$ están contenidos en $B_j \setminus (A_j \cap B_j)$. Ahora, por como fueron elegidos los A_j, B_j, tenemos que $[A_j \setminus (A_j \cap B_j)] \cap [B_j \setminus (A_j \cap B_j)] = \emptyset$. Entonces, de la cadena de igualdades anterior, se sigue que $\alpha_j(t_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j) = \alpha_j(t'_{2j-1}) \setminus (A_j \cap B_j)$ y $[\beta_j(t_{2j}) \setminus (A_j \cap B_j) = [\beta_j(t'_{2j}) \setminus (A_j \cap B_j)]$. Esto implica que $\alpha_j(t_{2j-1}) = \alpha_j(t'_{2j-1})$ y $\beta_j(t_{2j}) = \beta_j('t_{2j})$. Como los α_j y β_j son arcos ordenados, en particular son inyectivos. Así, $t_{2j-1} = t'_{2j-1}$ y $t_{2j} = t'_{2j}$, para $j = 1, \ldots, k$.

Por tanto, ξ es inyectiva.

Finalmente, como $\xi\colon [0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k} \to C_n(X)$ es continua e inyectiva, y $[0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$ es un compacto por ser un producto de compactos, se sique que ξ es un homeomorfismo.

Así, ξ es un encaje de $[0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$ en $C_n(X)$. Así, como tenemos el homeomorfismo $[0,1]^{n+k} \simeq [0,1]^{2k} \times [0,1]^{n-k}$, entonces efectivamente ξ es un encaje de $[0,1]^{n+k}$ en $C_n(X)$.

Para el caso $k = n$ el encaje es $\xi\colon [0,1]^{2k} \to C_n(X)$ dada por

$$\xi((t_1, \ldots, t_{2k}) = \bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})].$$

La demostración, en este caso, de que ξ efectivamente es un encaje, es análoga a la del caso $k < n$. ■

Corolario 2.1.11. *Si X es un continuo que no es hereditariamente indescomponible, entonces $dim(C_n(X)) \geq n+1$.*

Demostración. Si X no es hereditariamente indescomponible, existe A subcontinuo de X que es descomponible. Por el Teorema 2.1.10, se sigue que $C_n(X)$ contiene una $(n+1)-$celda. Por el Teorema 1.7.5, sabemos que $\dim(I^{n+1}) = n+1$. Finalmente, como $I^{n+1} \subset X$, se sigue por el Teorema 1.7.4 que $\dim(x) \leq n+1$. ■

Corolario 2.1.12. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene n subcontinuos descomponibles y disjuntos dos a dos, entonces $C_n(X)$ contiene una $2n-$celda.*

Demostración. Note que tenemos n subcontinuos descomponibles y disjuntos dos a dos. Por el Teorema 2.1.10, se sique que $C_n(X)$ tiene una $2n-$celda. ■

Corolario 2.1.13. *Si X es un continuo que contiene un arco, entonces $C_n(X)$ contiene una $2n-$celda, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como X es un arco, se sigue que X es homeomorfo a $[0,1]$. Note que, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $[0,1] = \bigcup_{j=0}^{2n-1} \left[\frac{j}{2n}, \frac{j+1}{2n}\right]$. Así, los intervalos de la forma $[\frac{j}{2n}, \frac{j+1}{2n}]$ para j par, son exactamente n subcontinuos de $[0,1]$ ajenos dos a dos. Como $[0,1]$ es hereditariamente descomponible, se sigue que los $\left[\frac{j}{2n}, \frac{j+1}{2n}\right]$ para j par, son subcontinuos descomponibles y ajenos dos a dos. Como X es homeomorfo a $[0,1]$, se sigue que X tiene n subcontinuos propios, ajenos dos a dos que son descomponibles. Por el Corolario 2.1.12, se sigue que $C_n(X)$ tiene una $2n-$celda. ■

Teorema 2.1.14. *Sea X un continuo. Sea $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) 2^X *es contráctil;*

(II) $C_n(X)$ *es contráctil;*

(III) $C(X)$ *es contráctil.*

Demostración. Suponga que 2^X es contráctil. Entonces existe una homotopía $H' \colon 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que, para todo $A \in 2^X$, se cumple que $H'(A,0) = A$ y $H'(A,1) = A_0$, para un $A_0 \in 2^X$. Construiremos una homotopía $H^* \colon 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que para todo $A \in 2^X$, se cumple que $H^*(A,0) = A$ y $H^*(A,1) = X$. Sabemos por el Teorema 1.5.12 que 2^X es arcoconexo. Entonces existe $\alpha \colon [0,1] \to 2^X$ continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = A_0$ y $\alpha(1) = X$. Definamos

$$H^*(A,t) = \begin{cases} H(A,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ \alpha(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Por el Lema del Pegado[2], como H^* restringida a $[0, \frac{1}{2}]$ y a $[\frac{1}{2}, 1]$ es continua, y tanto $[0, \frac{1}{2}]$ como $[\frac{1}{2}, 1]$ son cerrados de $[0, 1]$, y $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, se sigue que H^* es continua.

Ahora, definamos $H\colon 2^X \times [0, 1] \to 2^X$ dada por $H(A, t) = \bigcup\{H^*(A, s)\colon 0 \leq s \leq t\}$. Note que H es el segmento homotópico asociado a H^*. Como H^* es continua, se sigue por el Teorema 1.6.9, tenemos que H es continua.

Ahora, sea $A \in 2^X$. Nuestra siguiente intención es construir un arco ordenado de A a X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \neq X$. Observemos que $H(A, 0) = \bigcup\{H^*(A, s)\colon s = 0\} = H^*(A, 0) = A$ y también que $H(A, 1) = \bigcup\{H^*(A, s)\colon s \in [0, 1]\} = X$, ya que $X = H^*(A, 1) \in \{H'(A, s)\colon s \in [0, 1]\}$.

Veamos ahora que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado. Para ello, mostraremos que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un subcontinuo no degenerado de 2^X y que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es una red. Notemos que $\{A\} \times [0, 1] \simeq [0, 1]$. Como $[0, 1]$ es compacto y conexo, se sigue que $\{A\} \times [0, 1]$ también es compacto y conexo. Entonces, como H es continua, se sigue que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es compacto y conexo. Más aún, como $H(A, 0), H(A, 1) \in H(\{A\} \times [0, 1])$ y j y $H(A, 0) = A \neq X = H(A, 1)$, se sigue que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un continuo no degenerado. Ahora, para ver que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es una red, tomemos $H(A, t), H(A, t') \in H(\{A\} \times [0, 1])$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $t \leq t'$. Entonces $\{H^*(a, s)\colon s \in [0, t]\} \subset \{H^*(a, s)\colon s \in [0, t']\}$. De ahí que

$$H(A, t) = \bigcup\{H^*(a, s)\colon s \in [0, t]\} \subset \bigcup\{H^*(a, s)\colon s \in [0, t']\} = H(A, t').$$

Así, $H(\{A\} \times [0, 1])$ es una red. Entonces, por el Teorema 1.5.6, se sigue que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado. Además, por el Lema 1.5.8, sabemos que los extremos de $H(\{A\} \times [0, 1])$ son precisamente $\bigcap H(\{A\} \times [0, 1])$ y $\bigcup H(\{A\} \times [0, 1])$. Notemos que, como $A = H(A, 0) \subset H(A, t)$, para cada $t \in [0, 1]$, se sigue que $A \subset \bigcap\{H(A, t)\colon t \in [0, 1]\} \subset A$. Entonces, $A = \bigcap\{H(A, t)\colon t \in [0, 1]\}$. Por otro lado, dado que $H(A, 1) = X$, es inmediato que $\bigcup\{H(A, t)\colon t \in [0, 1]\} = X$. En consecuencia, los puntos extremos del arco ordenado $H(\{A\} \times [0, 1])$ son precisamente A y X.

Por tanto, para cada $A \in 2^X$ con $A \neq X$, tenemos que $H(\{A\} \times [0, 1])$ es un arco ordenado que va de A a X.

A continuación, construiremos una homotopía que nos servirá para demostrar que $C_n(X)$ es contráctil. Definamos $G = H|_{C_n(X) \times [0,1]}\colon C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$. Notemos

[2] Ver por ejemplo [9, Theorem 18.2]

que, si $A \in C_n(X)$ entonces como $H(\{A\} \times [0,1])$ es un arco ordenado que empieza en A, se sigue por el Teorema 2.1.1 que $H(\{A\} \times [0,1]) \subset C_n(X)$. Aí, H está bien definida. Ahora, como H es continua, se sigue que G es continua. Más aún, para cada $A \in C_n(X)$ tenemos que $G(A,0) = H(A,0) = A$ y $G(A,1) = H(A,1) = X$. Así, G es una homotopía de la identidad en la función constante $c(A) = X$, para $A \in C_n(X)$.

Por tanto, $C_n(X)$ es contráctil.

La prueba para demostrar que $C_n(X)$ es contráctil implica que $C(X)$ es contráctil es completamente análoga[3].

Finalmente, sabemos que $C(X)$ es contráctil si y solo si 2^X es contráctil por [12, 16.7 THEOREM]. ■

Corolario 2.1.15. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces $C_n(X)$ es contráctil, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces por el Teorema 1.6.11, se sique que 2^X y $C(X)$ son contráctiles. Por el Teorema 2.1.14, se sique que $C_n(X)$ es contráctil, para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Lema 2.1.16. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo con la propiedad de Kelley. Si $\mathcal{W}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$ con $int_{C_n(X)}\mathcal{W} \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{W}) \in C_n(X)$ y $int_X\sigma(\mathcal{W}) \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $\mathcal{W}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$, se sigue que $\mathcal{W} \in C(C_n(X))$. Por el Corolario 2.1.4, se sigue que $\sigma(\mathcal{W}) \in C_n(X)$.

Veamos ahora que $int_X\sigma(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. Sea $A \in int_{C_n(X)}\mathcal{W}$. Entonces A tiene $k \leq n$ componentes, digamos $A_1, \ldots, A_k$. Por el Teorema 1.2.8, existen $G_1, \ldots, G_k$ abiertos de X disjuntos dos a dos y tales que $A_i \subset G_i$, para $i = 1, \ldots, k$. Por el Lema 1.1.6, existen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ tales que $N(A_i, \epsilon_i) \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Definamos $\epsilon' = \min\{\epsilon_i : i = 1, \ldots, k\}$. Observe que $N(A_i, \epsilon') \subset N(A_i, \epsilon_i) \subset G_i$. En consecuencia, los $N(A_i, \epsilon')$ son disjuntos dos a dos pues los G_i son ajenos dos a dos. Por otro lado, como $A \in int_{C_n(X)}\mathcal{W}$, existe $r > 0$ tal que $B_H(A, r) \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$. Definamos $\epsilon = \min\{\epsilon', r\}$. Note que $\epsilon > 0$. Note que los $N(A_i, \epsilon)$ son disjuntos dos a dos; además $B_H(A, \epsilon) \cap C_n(X) \subset B_H(A, r) \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$. Ahora, sea $\delta > 0$ el número

[3] Basta tomar la prueba anterior, y cada que usted vea 2^X sustituir por $C_n(X)$ y $C_n(X)$ por $C(X)$.

de Kelley asociado a $\frac{\epsilon}{2}$. Como $A \in \mathcal{W}$, se sigue que $A \subset \bigcup \mathcal{W} = \sigma(\mathcal{W})$. Elijamos $a_i \in A_i$, para $i = 1, \ldots, k$.

Hechas las construcciones anteriores, notemos que para concluir esta prueba basta mostrar que $\bigcup_{i=1}^{k} B_d(a_i, \delta) \subset \sigma(\mathcal{W})$. Sea $x_i \in B_d(a_i, \delta)$, para $i = 1, \ldots, k$. Note que $d(a_i, x_i) < \delta$, para $i = 1, \ldots, k$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existen subcontinuos de X, digamos, B_i tales que $x_i \in B_i$ y $H_d(A_i, B_i) < \frac{\epsilon}{2}$, para $i = 1, \ldots, k$. Definamos $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Note que $B \in C_n(X)$ dado que B tiene a lo más k componentes (puede ocurrir que algunos B_i se intersecten, entonces no podemos afirmar que B tiene exactamente k componentes). Ahora, como $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, se sigue por el teorema 1.1.7 que $N(\frac{\epsilon}{2}, A) = \bigcup_{i=1}^{k} N(\frac{\epsilon}{2}, A_i)$ y que $N(\frac{\epsilon}{2}, B) = \bigcup_{i=1}^{k} N(\frac{\epsilon}{2}, B_i)$. Como ya sabemos que $H_d(A_i, B_i) < \frac{\epsilon}{2}$, para $i = 1, \ldots, k$, se sigue que $A_i \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B_i)$ y $B_i \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_i)$, para $i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} N\left(\frac{\epsilon}{2}, B_i\right) = N\left(\frac{\epsilon}{2}, B\right),$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} N\left(\frac{\epsilon}{2}, A_i\right) = N\left(\frac{\epsilon}{2}, A\right).$$

Así $H(A, B) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Entonces, como ya teníamos que $B \in C_n(X)$, se sigue que $B \in B_H(A, \epsilon) \cap C_n(X) \subset B_H(A, r) \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$. Así, $B \in \mathcal{W}$. Entonces $B \subset \sigma(\mathcal{W})$. Finalmente, recordando que $x_i \in B_i \subset B$ para $i = 1, \ldots, k$, podemos concluir que $x_i \in \sigma(\mathcal{W})$.

Por tanto, $\bigcup_{i=1}^{k} B_d(a_i, \delta) \subset \sigma(\mathcal{W})$, y en consecuencia, $int_X \sigma(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.1.17. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo indescomponible con la propiedad de Kelley, entonces X es el único punto en el que $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Veamos primero que, para cada $\epsilon > 0$, ocurre que $B_H(X, \epsilon) \cap C_n(X)$ es arcoconexo. Sea $\epsilon > 0$. Sea $A \in B_H(X, \epsilon) \cap C_n(X)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \neq X$. Por el Teorema 2.1.2, existe un arco ordenado en $C_n(X)$, digamos $\mathcal{A}$, que empieza en A y termina en X. Veamos que $\mathcal{A} \subset B_H(X, \epsilon) \cap C_n(X)$. Claramente, $\mathcal{A} \subset C_n(X)$. Resta verificar que $\mathcal{A} \subset B_H(X, \epsilon)$. Sea $B \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, se sigue que $A \subset B \subset X$. Claramente $B \subset N(\epsilon, X)$. Además, como $H(A, B) < \epsilon$, se sigue que $X \subset N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, B)$. Así, $H(B, X) < \epsilon$. Entonces, $\mathcal{A} \subset B_H(X, \epsilon)$. Por tanto, $\mathcal{A} \subset B_H(X, \epsilon) \cap C_n(X)$. Entonces como cada punto de $A \in B_H(X, \epsilon) \cap C_n(X)$ se puede unir a X con un arco ordenado contenido en $B_H(X,\epsilon) \cap C_n(X)$, se sigue que $B_H(X,\epsilon) \cap C_n(X)$ es arcoconexo y en particular conexo.

Ahora, si $\mathcal{W}$ es un abierto de $C_n(X)$ tal que $X \in \mathcal{W}$, entonces existe $\epsilon' > 0$ tal que $X \in B_H(X,\epsilon') \cap C_n(X) \subset \mathcal{W}$ y de lo anterior ya sabemos que $B_H(X,\epsilon') \cap C_n(X)$ es conexo.

Por tanto, $C_n(X)$ es localmente conexo en X.

Ahora veamos que X es el único punto donde $C_n(X)$ es localmente conexo. Suponga que $C_n(X)$ es localmente conexo en A, y $A \neq X$, donde $A \in C_n(X)$. Veamos que existe un subcontinuo $\mathcal{W}$ de $C_n(X)$ tal que $A \in int_{C_n(X)}\mathcal{W}$ y $\sigma(\mathcal{W}) \neq X$. En efecto. Tenemos que $A = A_1 \cup \ldots, A_l$, donde $A_1, \ldots, A_l$ son las componentes de A y $l \leq n$. Como las componentes siempre son cerrados en X, se sigue por el Teorema 1.2.7, existen abiertos no vacíos $V_1, \ldots, V_l$ de X, ajenos dos a dos, y tales que $A_i \subset V_i$, para $i = 1, \ldots, l$. Entonces $A \in \langle V_1, \ldots, V_l \rangle_n$. Como $C_n(X)$ es localmente conexo en A, por el Teorema 1.3.5 se sigue que $C_n(X)$ es conexo im kleinen en A. Entonces existe un subcontinuo $\mathcal{W}$ de $C_n(X)$ tal que $A \in int_{C_n(X)}\mathcal{W} \subset \mathcal{W} \subset \langle V_1, \ldots, V_l \rangle_n$. Además, notemos que como X es conexo, se sigue que $\bigcup_{i=1}^{l} V_i \neq X$. Es inmediato que $\sigma(\mathcal{W}) = \bigcup \mathcal{W} \subset \bigcup_{i=1}^{l} V_i$, entonces $\sigma(\mathcal{W}) \neq X$. Como $int_{C_n(X)}\mathcal{W} \neq \emptyset$, se sigue por el Lema 2.1.16 que $\sigma(\mathcal{W}) \in C_n(X)$ y $int_X(\sigma(\mathcal{W})) \neq \emptyset$. Ahora, mostraremos que existe un subcontinuo de X con interior no vacío. Consideremos las componentes de $\sigma(\mathcal{W})$, digamos $C_1, \ldots, C_m$, con $m \leq n$. Entonces por el Teorema 1.2.7, existen $U_1, \ldots, U_m$ abiertos ajenos de X no vacíos tales que $C_i \subset U_i$, para $i = 1, \ldots, m$. Así, $\sigma(\mathcal{W}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Como $int_X(\sigma(\mathcal{W})) \neq \emptyset$, existe $a \in int_X(\sigma(\mathcal{W}))$. . En consecuencia, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a,\epsilon) \subset \sigma(\mathcal{W}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ y $B(a,\epsilon) \subset U_{i_0}$, para un $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ único. Así, $B(a,\epsilon) \subset U_{i_0} \cap \sigma(\mathcal{W}) = C_{i_0}$. Pero C_{i_0} es una componente conexa de $\sigma(\mathcal{W})$, en particular es un cerrado de $\sigma(\mathcal{W})$. Pero como $\sigma(\mathcal{W}) \in 2^X$, se sigue que $\sigma(\mathcal{W})$ es cerrado en X. En consecuencia, C_{i_0} es un cerrado en X, luego C_{i_0} es compacto. Así, C_{i_0} es un continuo y $B(a,\epsilon) \subset C_{i_0}$, lo cual implica que $int_X C_{i_0} \neq \emptyset$. Entonces por el Lema 1.4.3, se sigue que X es descomponible, lo cual es una contradicción.

Por tanto, X es el único punto en el que $C_n(X)$ es localmente conexo. ∎

Corolario 2.1.18. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces X es el único punto en el que $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Como X es hereditariamente indescomponible, por el Teorema

1.6.12, se sigue que X tiene la propiedad de Kelley. Además, por el Teorema 2.1.17, se sigue X es el único punto en el que $C_n(X)$ es localmente conexo. ∎

Lema 2.1.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y X un continuo. Sea $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ y suponga que $A_1, \ldots, A_n$ son las componentes de A. Elijamos $\epsilon > 0$ de tal modo que $N(2\epsilon, A_j) \cap N(2\epsilon, A_k) = \emptyset$ si $j \neq k$, con $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $B \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ y $B_1, \ldots, B_n$ las componentes de B. Entonces*

$$H(A, B) < \epsilon \Leftrightarrow H^2(\{A_1, \ldots A_n\}, \{B_1, \ldots, B_n\}) < \epsilon,$$

donde H^2 es la métrica de Hausdorff en $\mathcal{F}_n(C(X))$ inducida por H.

Demostración. Note que las componentes de A y de B son no vacías por definición de componente. Observe que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, donde cada A_i, B_i es una componente, lo cual implica que cada A_i, B_i es un continuo. Suponga que $H_d(A, B) < \epsilon$. Entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 1.1.7, se sigue que

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset N(\epsilon, B) = \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, B_i), \text{ y que}$$

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset N(\epsilon, A) = \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, A_i).$$

Afirmamos que para cada $i = 1, \ldots, n$, existe un $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal modo que $N(\epsilon', A_i) \cap B_{j_i} \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $N(\epsilon', A_i) \cap B_j = \emptyset$. Entonces $N(\epsilon', A_i) \cap B = \emptyset$.

Note que, como $A \subset N(\epsilon, B) = \bigcup_{b \in B} B_d(b, \epsilon)$, se sigue que, para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Sea $a_0 \in A$. Entonces existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) < \epsilon$. Así, $b_0 \in \bigcup_{a \in A} B_d(a, \epsilon') = N(\epsilon, A)$, lo cual es una contradicción pues ya teníamos que $N(\epsilon, A_i) \cap B = \emptyset$.

Así, efectivamente tenemos que para cada $i = 1, \ldots, n$, existe un $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal modo que $N(\epsilon, A_i) \cap B_j \neq \emptyset$.

Ahora, nótese que $N(\epsilon, A_i) \subset N(2\epsilon, A_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$; en consecuencia, los $N(\epsilon, A_i)$ son disjuntos dos a dos, ya que los $N(2\epsilon, A_i)$ son disjuntos dos a dos. Entonces como cada B_j es conexo -por ser continuo-, se sigue que cada B_j puede estar contenido en, a lo más, un $N(\epsilon, A_i)$. En consecuencia, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, si ocurre que $B_j \cap N(\epsilon', A_i) \neq \emptyset$, entonces $B_j \subset N(\epsilon', A_i)$. Pero ya teníamos que para cada $i = 1, \ldots, n$, existe un $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal modo que $N(\epsilon', A_i) \cap B_{j_i} \neq \emptyset$. Entonces $B_{j_i} \subset N(\epsilon, A_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Así, podemos reindexar los índices de los B_j de tal modo que, para cada $i = 1, \ldots, n$, se cumpla que $B_i \subset N(\epsilon', A_i)$.

Ahora queremos probar que, para cada $i = 1, \ldots, n$, se cumple que $A_i \subset N(\epsilon, B_i)$.

Afirmamos que $N(\epsilon, B_i) \subset N(2\epsilon, A_i)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x \in N(\epsilon, B_i)$. Entonces existe $b \in B_i$ tal que $d(x, b) < \epsilon$. Pero como ya tenemos que $B_i \subset N(\epsilon, A_i)$ en consecuencia, existe $a \in A_i$ tal que $d(b, a) < \epsilon$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(x, a) < 2\epsilon$. Así, $x \in N(2\epsilon, A_i)$.

Por tanto, ya tenemos que $N(\epsilon, B_i) \subset N(2\epsilon, A_i)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Ahora, como los $N(2\epsilon, A_i)$ son ajenos dos a dos, se sigue que los $N(\epsilon, B_i)$ también son ajenos dos a dos. Entonces, si suponemos que $A_i \subset N(\epsilon, B_j)$ con $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, se obtiene que $A_i \subset N(2\epsilon, A_j)$, lo cual es una contradicción, pues A_i es conexo, $A_i \subset N(2\epsilon, A_i)$ y $N(2\epsilon, A_j) \cap N(2\epsilon, A_i) = \emptyset$, ya que $i \neq j$. En consecuencia, como $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, B_i)$, se sigue de lo anterior que $A_i \subset N(\epsilon, B_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Dado que ya teníamos que $B_i \subset N(\epsilon, A_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces por el Teorema 1.1.13 se sigue que $H(A_i, B_i) < \epsilon$, para cada $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, tenemos las siguientes contenciones

$$\{A_1 \ldots, A_n\} \subset \bigcup_{B \in \{B_1, \ldots, B_n\}} B_H(B, \epsilon) = N_H(\epsilon, \{B_1, \ldots, B_n\}),$$

$$\{B_1 \ldots, B_n\} \subset \bigcup_{A \in \{A_1, \ldots, A_n\}} B_H(A, \epsilon) = N_H(\epsilon, \{A_1, \ldots, A_n\}).$$

Entonces $H^2(\{A_1 \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_n\}) < \epsilon$.

Ahora supongamos que $H^2(\{A_1 \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_n\}) < \epsilon$.

Notemos que $\sigma(\{A_1 \ldots, A_n\}) = \bigcup\{A_1 \ldots, A_n\} = A$ y $\sigma(\{B_1, \ldots, B_n\}) = \bigcup\{B_1, \ldots, B_n\} = B$. Entonces por el Lema 1.6.8, tenemos que

$$\begin{aligned} H(A, B) &= H(\sigma(\{A_1 \ldots, A_n\}), \sigma(\{B_1, \ldots, B_n\})) \\ &\leq H^2(\{A_1 \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_n\}) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

que era lo que queríamos. ■

Teorema 2.1.20. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si X es un continuo, entonces la función $f_n\colon C_n(X) \setminus C_{n-1}(X) \to \mathcal{F}_n(C(X))$ dada por*

$$f_n(A) = \{K\colon K \text{ es una componente de } A\}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Veamos primero que f_n está bien definida. Sea $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Entonces $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i son las componentes de A. Se sigue que $f_n(A) = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Ahora, note que $\mathcal{F}_n(C(X)) = \{\mathcal{Y} \in 2^{C(X)}\colon \mathcal{Y} \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$. Además, como cada A_i es una componente de A, en particular es un conjunto cerrado de A, y como A es cerrado en X pues $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X) \subset 2^X$, se sigue que cada A_i es un cerrado en X. Además, como cada A_i es una componente de A, tenemos que cada A_i es conexo. Entonces $A_i \in C(X)$, para $i = 1, \ldots, n$. Como $C(X)$ es un espacio métrico, se sigue que $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset C(X)$ es un cerrado de $C(X)$ y claramente $\{A_1, \ldots, A_n\}$ tiene n puntos. Así, $\{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{F}_n(C(X))$.

Por tanto, f_n está bien definida.

Ahora veamos que f_n es continua.

Sea $\epsilon > 0$. Definamos $\delta = \epsilon$. Suponga que $A, B \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ son tales que $H(A, B) < \delta$. Tenemos que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i son las componentes de A; análogamente, $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, donde B_i son las componentes de B. Note que

$$H^2(f_n(A), f_n(B)) = H^2(\{A_1, \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_n\}) < \epsilon,$$

donde la desigualdad se sigue por el Lema 2.1.19.

Por tanto, f_n es continua.

Ahora, mostraremos que $\sigma|_{\mathcal{F}_n(C(X))}$ es la función inversa de f_n.

Recordemos que $\sigma\colon 2^{2^X} \to 2^X$ está dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Por el Lema 1.6.8, sabemos que σ es continua. Entonces $\sigma|_{\mathcal{F}_n(C(X))}$ también es continua. Por comodidad, denotemos por $\sigma' = \sigma|_{\mathcal{F}_n(C(X))}$.

Ahora, sea $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$. Tenemos que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i son las componentes de A. Observemos que

$$\begin{aligned}(\sigma' \circ f_n)(A) =& \sigma'(f_n(A))\\ =& \sigma'(\{A_1, \ldots, A_n\})\\ =& \sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})\\ =& \bigcup \{A_1, \ldots, A_n\}\\ =& A.\end{aligned}$$

Ahora, sea $\{A_1, \ldots A_n\} \in \mathcal{F}_n(C(X))$. Entonces $A_i \in C(X)$ para $i = 1, \ldots, n$. En particular, cada A_i es conexo. Denotemos por

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sigma'\{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Notemos que como los A_i son distintos, entonces son disjuntos dos a dos. En consecuencia, se sigue que A tiene n componentes que son precisamente $A_1, \ldots, A_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}(f_n \circ \sigma')(\{A_1, \ldots A_n\}) =& f_n(\sigma'(\{A_1, \ldots A_n\}))\\ =& f_n(A)\\ =& \{A_1, \ldots, A_n\},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se verifica ya que las componentes de A son precisamente $A_1, \ldots, A_n$.

Por tanto, podemos concluir que σ' es la función inversa de f_n. Como ya teníamos que f_n es continua e inyectiva, y que σ' es continua, podemos concluir que f_n es un homeomorfismo. Más aún, $C_n(X) \setminus C_{n-1}(X) \simeq \mathcal{F}_n(C(X))$. ■

Corolario 2.1.21. *Si X un continuo, entonces $dim(C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)) = dim(\mathcal{F}_n(C(X))$.*

Demostración. Como la dimensión es una propiedad topológica, el resultado se sigue del Teorema 2.1.20. ■

Lema 2.1.22. *Sea X un continuo. Entonces $dim(\mathcal{F}_n(X)) \leq ndim(X)$.*

Una prueba del Lema 2.1.22 se puede encontrar en [2, 3.1 Lemma].

Corolario 2.1.23. *Si X es un continuo tal que $C(X)$ es de dimensión finita, entonces para cada $n \geq 2$, $dim(C_n(X)) \leq ndim(C(X))$.*

Demostración. Hagamos una prueba por inducción.

Sea $n = 2$. Note que, por el Teorema 1.5.15, se tiene que $C(X)$ es un continuo. Por el Corolario 2.1.21 y el Lema 2.1.22, tenemos que

$$\dim(C_2(X) \setminus C(X)) = \dim(\mathcal{F}_2(C(X))) \leq 2\dim(C(X)),$$

$$\dim(C(X)) \leq 2\dim(C(X)),$$

y $C(X)$ es cerrado en $C_2(X)$ debido a que $C(X)$ es un compacto contenido en $C_2(X)$. Entonces, por el Teorema 1.7.7, se sigue que $\dim(C_2(X)) \leq 2\dim(C(X))$.

Ahora supongamos que el enunciado es válido para cierto $n \in \mathbb{N}$. Veamos a continuación que el enunciado es válido también para $n + 1$. Por un argumento análogo al caso $n = 2$, tenemos que

$$\dim(C_{n+1}(X) \setminus C_n(X)) = \dim(\mathcal{F}_{n+1}(C(X)) \leq (n + 1)\dim(C(X)),$$

y por hipótesis inductiva,

$$\dim C_n(X) \leq n\dim(C(X)) \leq (n + 1)\dim(C(X)).$$

Por el Teorema 2.1.2, se sigue que $C_n(X)$ es un continuo, en particular $C_n(X)$ es compacto, y como $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$, se sigue que $C_n(X)$ es cerrado en $C_{n+1}(X)$. Entonces, por el Teorema 1.7.7 tenemos que $\dim(C_{n+1}(X)) \leq (n + 1)\dim(C(X))$.

Por inducción, se sigue el resultado. ■

Finalmente, vamos a calcular la dimensión de $C_n(X)$ cuando todos los subcontinuos no degenerados de X son arcos. Para ello enunciamos algunos teoremas previos.

Teorema 2.1.24. *Si X es un arco, entonces $C(X)$ es una $2-$celda.*

Una demostración del Teorema 2.1.24 puede encontrarse en [5, 5.1 Example].

Teorema 2.1.25. *Sea X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Si $dim(C(Y)) < n$ para cada subcontinuo propio Y de X, entonces $dim(C(X)) < n$.*

Una demostración del Teorema 2.1.25 puede encontrarse en [13, Theorem 2.2].

Teorema 2.1.26. *Si X es un continuo no degenerado, entonces $dim(C(X)) \geq 2$.*

Una demostración del Teorema 2.1.26 puede encontrarse en [5, 22.18 Theorem].

Ahora sí, el teorema final.

Teorema 2.1.27. *Si X es un continuo. no degenerado tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, entonces dim*$(C_n(X)) = 2n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$

Demostración. Por el Corolario 1.4.8, existe un subcontinuo propio no degenerado de X, digamos Y. Por hipótesis, Y es un arco. Por el Teorema 2.1.24, tenemos el homeomorfismo $C(Y) \simeq I^2$, donde $I = [0, 1]$. Como la dimensión es una propiedad topológica, se sigue que $\dim(Y) = \dim(I^2) = 2$, donde la última igualdad se sigue por el Teorema 1.7.5. Así, $\dim(Y) < 3$. Entonces por el Teorema 2.1.25, tenemos que $\dim(C(X)) < 3$. Como X es un continuo no degenerado, por el Teorema 2.1.26 tenemos que $\dim(C(X)) \geq 2$. Entonces $\dim(C(X)) = 2$.

Por otro lado, como $Y \subset X$, se sigue que X contiene un arco. Entonces por el Teorema 2.1.13, se sique que $C_n(X)$ contiene una $2n-$celda. Por el Teorema 1.7.4, se sigue que $\dim(C_n(X) \geq 2n$. Además, por el Teorema 2.1.23, tenemos que $\dim(C_n(X)) \leq 2n$ debido a que ya teníamos que $\dim(C(X)) = 2$.

Por tanto, $\dim(C_n(X)) = 2n$. ■

ÍNDICE ALFABÉTICO

BIBLIOGRAFÍA

[1] Gerardo Acosta. "Continuos con hiperespacio único". Tesis doct. Av Universidad 3000, Cd. Universitaria, Coyoacán, 04510 Ciudad de México, CDMX: UNAM, 1999.

[2] Doug Curtis y Nguyen To Nhu. "Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to N0-dimensional linear metric spaces". En: *Topology and its Applications* 19.3 (1985), págs. 251-260.

[3] Jean Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Foundations of Modern Analysis v. 1; v. 10. Academic Press, 1969.

[4] Witold Hurewicz y Henry Wallman. *Dimension theory*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1948.

[5] Alejandro. Illanes y Sam B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Pure and Applied Mathematics series, vol. 216, Chapman & Hall/CRC. Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 1999.

[6] Sergio Macías. "On the hyperspaces Cn(X) of a continuum X". En: *Topology and its Applications* 109.2 (2001), págs. 237-256.

[7] Sergio Macías. "On the hyperspaces Cn(X) of a continuum X, II". En: *Topology Proceedings* 25 (2000), págs. 255-276.

[8] Sergio Macías. *Topics on continua,* Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[9] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[10] Sam B. Nadler Jr. *Continuum theory.* Monographs and Texbooks Pure Applied Mathematics, vol. 49. Marcel Dekker, New York, 1992.

[11] Sam B. Nadler Jr. *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*. Aportaciones matemáticas: Textos. Sociedad Matemática Mexicana, 2002. ISBN: 9789703200269.

[12] Sam B. Nadler Jr. *Hyperspaces of Sets.* Monographs and Texbooks Pure Applied Mathematics, vol. 49. Marcel Dekker, New York, 1978.

[13] James T. Rogers. "Dimension and the Whitney subcontinua of C(X)". En: *General Topology and its Applications* 6.1 (1976), págs. 91-100.