Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BLACK-SCHOLES: VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN SOBRE UN SWAP

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
KARLA TAPIA SOLARES

DIRECTOR DE TESIS
FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUE. 13 de diciembre de 2017

A Dios, mi familia y amigos

Agradecimientos

Quiero agradecer sinceramente a las personas que compartieron sus conocimientos conmigo para hacer posible la realización de este trabajo de tesis. Especialmente agradezco a mi asesor el Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria por cada detalle y momento dedicado para aclarar cualquier tipo de duda que me surgiera, agradecerle por la claridad y exactitud con la que enseño cada clase, discurso y lección.
Gracias al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, a la Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes y al Dr. Fernando Luna Velasco por sus ideas y recomendaciones para esta investigación.

Introducción

A lo largo de la historia se ha observado que en el mercado financiero es impredecible el comportamiento que tendrá el precio de los activos, como por ejemplo el desastre bursatil ocurrido el lunes negro (19 de octubre de 1987), donde los mercados de valores se desplomaron rápidamente. Por esta razón, corredores de bolsa e investigadores constantemente buscan nuevos métodos y herramientas que permitan a los usuarios e inversionistas protegerse de los cambios bruscos en los precios de tales activos.

El presente trabajo se enfoca principalmente a estudiar los derivados financieros centrándose en su uso para realizar cobertura, pero, ¿qué son los derivados? Brevemente se puede decir que son acuerdos entre dos entes financieros que eliminan la incertidumbre del movimiento de los precios de los activos subyacentes al pactar en este momento el precio que tendrán dichos activos en una fecha futura.

Los derivados que nos interesan estudiar en esta tesis son las Opciones y Swaps considerando el aspecto de su cobertura, debido a los beneficios que otorgan estos intrumentos, por ejemplo, una Opción da al poseedor el derecho de vender o comprar un activo subyacente, pero no está obligado a hacerlo. Para entrar en un contrato de una Opción hay que pagar una prima, además, en este contrato se fija un precio de ejercicio, es decir, se le asigna un precio al activo subyacente el cual puede ser igual, menor o mayor al precio del activo en el momento en que se ejerce la Opción. Otro beneficio que otorga la Opción es el de acotar la pérdida, pues si el precio de ejercicio es mayor al precio del activo en el momento de ejercer la Opción, no se ejerce la Opción y la pérdida sería la prima que se pagó por el contrato.

En el caso de un contrato de Swap, se pacta hacer intercambios de flujo de efectivo, esto se aplica para cambios de moneda o préstamos. El objetivo de este contrato es permutar el tipo de interés o la moneda para el préstamo. Por ejemplo, si el tipo de interés que se debe pagar por un préstamo (ya sea a una tasa fija o variable) es más alta que si se pagara en otro tipo (si se paga fija pero conviene más pagar en variable o viceversa) se entra en este tipo de contrato con una contraparte que tenga una ventaja semejante, con ello se hace el cambio de pagos del tipo de interés. Esta es una manera de protegerse de la fluctuación de intereses o divisas, y si es posible obtener alguna ganancia.

El presente trabajo de tesis tiene como fin hallar un método que permita valuar una Opción europea sobre un Swap de tipo de interés. Este tipo de derivado no es común, en México, la Bolsa Mexicana de Valores negocia con Swaps pero no con Opciones sobre Swaps. Con este objetivo, se hace una revisión de los métodos existentes para la valuación de derivados. De la cual se analizará la evolución que tuvo el primero de ellos y su metamorfosis hacia el Modelo de Black-Scholes. La importancia de utilizar este modelo radica en que ofrece cobertura para los inversionistas bajo ciertas condiciones financieras simplificadas ya que permite obtener el precio de una Opción antes de que venza.

Se debe señalar que la mayoría de estos instrumentos financieros conllevan un costo por el beneficio de adquirirlo, la cuestión importante es ¿cuál es el precio adecuado para tales instrumentos?

La estructura de la tesis se desarrolla de la forma siguiente, en el primer capítulo se da una descripción más detallada de qué son y cómo funcionan ciertos instrumentos financieros, además, se presentan algunas definiciones que son útiles para una mejor comprensión de los capítulos posteriores.

El Capítulo 2 trata sobre los derivados financieros como: Contratos a plazo, Futuros, Opciones y Swaps, donde se analiza la forma de como valuar cada uno de ellos, además, se muestra algunos ejemplos de derivados que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores, específicamente de los que se mencionan en este capítulo.

El Capítulo 3 se describe la forma de como obtener el valor de Opciones y de Swaps. Además, se estudia el modelo Binomial y el modelo de Black-Scholes que permiten obtener el precio de una Opción.

En el Capítulo 4 se profundiza en el análisis de un derivado sobre otro derivado, particularmente, el Swaption, se dan sus principales modalidades, se analiza una extensión del Modelo de Black-Scholes para la valuación y se ilustra con un ejemplo el proceso de valuación.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción I

1. Conceptos Generales 1

2. Derivados 9

2.1. Contrato a Plazo 11

2.1.1. Pago de un Contrato a Plazo 12

2.2. Futuro 13

2.3. Opción 23

2.4. Swap 29

3. Valuación de Algunos Derivados 35

3.1. Valuación de Swaps 35

3.1.1. Valuación de Swaps Sobre Tipos de Interés 35

3.1.2. Valuación de Swaps Sobre Divisas 40

3.2. Valuación de Opciones 42

3.2.1. Paridad Put-Call 43

3.2.2. Modelo Binomial 44

3.2.3. Probabilidad Neutral al Riesgo 50

3.2.4. Fórmula Cox-Ross-Rubistein 60

3.2.5. Fórmula de Black-Scholes 61

4. Swaption **73**
4.1. Valor de un Swaption en la Fecha de Vencimiento 74
4.1.1. Paridad Para un Swaption 74
4.2. El Modelo de Black 75
4.3. Valuación de Swaptions Europeas 76

5. Conclusiones **81**

Black-Scholes: Valuación de una Opción Sobre un Swap

Karla Tapia Solares

13 de diciembre de 2017

Capítulo 1

Conceptos Generales

En este capítulo se presentan los conceptos financieros generales y otras herramientas que serán útiles para una mejor comprensión del contenido de los demás capítulos de esta tesis.
Para esto, primero se inicia hablando del *mercado financiero*, que es el lugar donde oferentes y demandantes realizan transacciones con instrumentos financieros, ya sean acciones u otros activos. Ahora, algo que se necesita para participar en el mundo financiero es el *capital o principal*, que es la suma de dinero con el fin de invertirla y así, obtener una ganancia, en forma de dividendos o intereses. Cuando se habla de *capital nocional*, es para los casos en que no necesariamente se hace uso del capital, si no más bien se usa como base para generar algún interés, como en derivados sobre tipos de interés. Más adelante se verá con detalle como son los derivados.
En el caso de realizar un préstamo, la parte que adquirió la deuda, hace una *amortización del capital* en cuanto va devolviendo el dinero que le fue prestado, la devolución se puede hacer en pagos parciales o totales.

A continuación se presenta el valor descontado o valor presente.
Supóngase que se realiza una inversión en un banco, el valor de la inversión después de un año será la suma del capital y los intereses devengados durante

ese año. Así, el valor de la inversión para un tiempo $t \geq 0$ se denota como $V(t)$, donde

$$V(t) = (1 + tr)P, \tag{1.1}$$

donde $r > 0$ es el tipo de interés y P el capital o principal.
La ecuación (1.1) no solo es para el caso en que el tiempo está en años, ya que se puede modificar para n días. Así, el interés ganado quedaría como

$$\frac{n}{365} rP$$

y el valor de la inversión en ese tiempo sería

$$V\left(\frac{n}{365}\right) = \left(1 + \frac{n}{365} r\right) P.$$

Esta ecuación es la *regla de interés simple.*
Al número $1 + tr$ se le conoce como el *factor de crecimiento* y se hace el supuesto de que r es constante, [2].
Cuando se realiza una inversión con capital P en un tiempo $s > 0$, donde $t > s$, entonces, en el tiempo $t > 0$ el valor de la inversión será

$$V(t) = (1 + (t - s)r)\, P. \tag{1.2}$$

El rendimiento de una inversión que inicia en el momento s y termina en el tiempo t se denota con $K(s, t)$. El valor del rendimiento de la inversión es

$$K(s, t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} \;. \tag{1.3}$$

Como la inversión inicia en el momento s, se usa la ecuación (1.2) para obtener los valores de las inversiones en los tiempos t y s, así

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} \\ &= \frac{(1 + (t - s)r)\, P - (1 + (s - s)r)\, P}{(1 + (s - s)r)\, P} \\ &= \frac{P + (t - s)rP - P}{P} \\ &= (t - s)r. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Para el caso del rendimiento en un año se tiene que

$$
\begin{aligned}
K(0,1) &= \frac{V(1)-V(0)}{V(0)} \\
&= \frac{(1+(1-0)r)\,P-(1+(0-0)r)\,P}{(1+(0-0)r)\,P} \\
&= \frac{P+(1-0)rP-P}{P} \\
&= (1-0)r = r,
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

que es el interés establecido por hacer la inversión a un año, [2].
Un aspecto importante es hallar el valor inicial de una inversión cuando se da el tiempo t. En este caso, si se resuelve la ecuación (1.1) para el capital, se tiene que

$$V(0) = V(t)(1+tr)^{-1}. \tag{1.6}$$

A esta ecuación se le conoce como *valor descontado* o *valor actual o presente* de $V(t)$, y $(1+tr)^{-1}$ es el *factor de descuento*, ver [2].
Una *perpetuidad* es una secuencia de pagos que realizará el inversor en intervalos de tiempo iguales y se continuarán haciendo indefinidamente en el futuro. Supóngase que se realiza el pago C una vez por año, donde $C = rP$ será el primer pago con una tasa de interés constante r.
Nota: El interés simple es para inversiones a corto plazo. Para más detalles ver [2].
Ahora, supóngase que se realiza la inversión con un capital P a una tasa de interés r, donde el interés ganado durante un período (ya sea anual, semestral, trimestral, mensual e inclusive diariamente) en la duración de la inversión se invierte junto con el capital nuevamente. Este proceso se llama *composición discreta o periódica*. Entonces, sea m los pagos que se realizarán en un año, y el tiempo entre cada pago será $\dfrac{1}{m}$, para cada pago de los intereses el capital aumentará en $\left(1+\dfrac{r}{m}\right)$ y como consecuencia el valor de la inversión después de t años será

$$V(t) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} P. \tag{1.7}$$

Donde $\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{tm}$ es el factor de crecimiento, [2].

Proposición 1.1. *El valor futuro $V(t)$ aumenta si cualquiera de los parámetros m, t, r o P aumenta, mientras que los restantes permanecen sin cambios.*

Demostración. Es inmediato de (1.7) que $V(t)$ aumenta si t, r o P aumenta. Para demostrar que $V(t)$ aumenta a medida que aumenta la frecuencia de composición m, se necesita verificar que si $m < k$, entonces

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} < \left(1+\frac{r}{k}\right)^{tk}.$$

La desigualdad anterior se puede reducir a la siguiente expresión

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} &= 1+r+\frac{1-\frac{1}{m}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{m!}r^m \\
&\leq 1+r+\frac{1-\frac{1}{k}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{m-1}{k}\right)}{m!}r^m \\
&< 1+r+\frac{1-\frac{1}{k}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{k}\right)}{k!}r^k \\
&= \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

□

Para la composición periódica, el valor presente o descontado de $V(t)$ es

$$V(0) = V(t)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}, \tag{1.8}$$

siendo el número $\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{-tm}$ el factor de descuento, [2].

Observación 1.2. *Fijar el valor terminal $V(t)$ de una inversión es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.1 que el valor presente aumenta si cualquiera de los factores r, t, m disminuye, permaneciendo los otros sin cambios.*

Frecuentemente se requiere el valor $V(t)$ de una inversión en un tiempo intermedio $0 < t < T$, dado el valor $V(T)$ en un tiempo futuro fijo T. Esto puede lograrse calculando el valor presente de $V(T)$, donde a $V(T)$ se le considera como el principal, y ejecutar la inversión hasta el tiempo t. Bajo composición periódica con frecuencia m y tasa de interés r, esto da

$$V(t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-(T-t)m} V(T). \tag{1.9}$$

Para encontrar el rendimiento de un depósito que atrae intereses compuestos periódicamente se usa la fórmula general (1.3) y se llega a

$$K(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(t-s)m} - 1. \tag{1.10}$$

En particular,

$$K\left(0, \frac{1}{m}\right) = \frac{r}{m}\ ,$$

la cual proporciona una forma sencilla de calcular la tasa de interés dado el rendimiento, [2].

Observación 1.3. *El rendimiento de un depósito sujeto a la composición periódica no es aditivo. Por simplicidad, sea* $m = 1$*, entonces*

$$\begin{aligned} K(0,1) &= K(1,2) = r \\ K(0,2) &= (1 + r^2) - 1 = 2r + r^2, \end{aligned}$$

es claro que $K(0,1) + K(1,2) \neq K(0,2)$*.*

Una *anualidad* es una secuencia finita de pagos de una cantidad fija en intervalos de tiempo iguales, [2]. Supóngase que los pagos de una cantidad C se deben hacer una vez al año durante n años. Suponiendo que se aplica la composición anual, se encontrará el valor actual de dicho flujo de pagos. Se calculan los valores actuales de todos los pagos y se suman para obtener

$$\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n}\ .$$

La siguiente notación

$$PA(r,n) = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} \ , \tag{1.11}$$

es el factor del valor presente para una anualidad, [2]. La cual permite expresar el valor actual de una anualidad de forma concisa

$$PA(r,n) \times C.$$

La expresión $PA(r,n)$ puede simplificarse, para ello se usa la suma de los primeros n términos de una serie geométrica, la cual resulta ser

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a\frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

De esta manera, $a = q = \frac{1}{1+r}$, por tanto,

$$\begin{aligned} PA(r,n) &= \left(\frac{1}{1+r}\right) \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}} \\ &= \left(\frac{1}{1+r}\right) \frac{1-\left(\frac{1}{(1+r)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+r}} \\ &= \left(\frac{1}{1+r}\right) \frac{1-\left(\frac{1}{(1+r)^n}\right)}{\frac{r}{1+r}} \\ &= \left(\frac{1}{1+r}\right) \frac{(1+r)\left[1-\left(\frac{1}{(1+r)^n}\right)\right]}{r} \\ &= \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \ . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ahora, la ecuación que da el valor presente de una perpetuidad se obtiene de (1.11) cuando $n \to \infty$, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} PA(r,n) \times C &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \times C \\ &= \frac{1}{r} \times C = \frac{C}{r} \ . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Pero qué ocurre cuando se quiere realizar la composición para periodos de tiempo más pequeños.
Sea m las veces que se compone la inversión por año, entonces, el valor de dicha inversión se puede ver como

$$V(t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} P = \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr} P. \tag{1.14}$$

Como interesa conocer el valor de la inversión que se compone más seguido, se obtiene el límite de (1.14) cuando $m \to \infty$, así

$$V(t) = e^{tr} P, \tag{1.15}$$

recordando que el $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$. La ecuación (1.15) se conoce como *composición continua*, [2].

Proposición 1.4. *La composición continua produce un valor futuro más alto que el obtenido de la composición periódica para cualquier frecuencia m, considerando el mismo capital P y el tipo de interés r.*

Demostración. En efecto,

$$e^{tr} > \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} = \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr},$$

debido a que la desigualdad se mantiene por el hecho de que $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}$ converge a e cuando $m \to \infty$, [2]. $\square$

El valor presente de la composición continua da que

$$V(0) = V(t)e^{-tr}.$$

En este caso, el factor de descuento es e^{-tr}. Para un valor terminal dado $V(T)$, se tiene que

$$V(T) = e^{-r(T-t)} V(T). \tag{1.16}$$

Enseguida, se obtiene el rendimiento para la composición continua.

Definición 1.5. *Sea k(s,t) el rendimiento logarítmico para una inversión que inicia en el momento s y termina en el tiempo t. El valor del rendimiento de dicha inversión es*

$$k(s,t) = \ln \frac{V(t)}{V(s)} \ . \tag{1.17}$$

Proposición 1.6. *El rendimiento logarítmico es aditivo.*

$$k(s,t) + k(t,u) = k(s,u).$$

Demostración. Usando (1.17) se sigue que

$$\begin{aligned} k(s,t) + k(t,u) &= \ln \frac{V(t)}{V(s)} + \ln \frac{V(u)}{V(t)} \\ &= \ln \frac{V(t)}{V(s)} \frac{V(u)}{V(t)} = \ln \frac{V(u)}{V(s)} \\ &= k(s,u). \end{aligned}$$

□

Si $V(t)$ está dado por (1.15), entonces el rendimiento $k(s,t)$ para $s \leq t$ resulta ser

$$\begin{aligned} k(s,t) &= \ln \frac{V(t)}{V(s)} = \ln \frac{e^{tr}}{e^{sr}} \\ &= \ln e^{(t-s)r} = (t-s)r. \end{aligned}$$

De lo anterior se puede obtener el tipo r, así

$$r = \frac{k(s,t)}{t-s} \ .$$

Capítulo 2

Derivados

En el mercado hay un grupo especial de instrumentos financieros cuyo valor se determina a partir de otro(s) activo(s), que se denominan subyacentes. Esto es lo que caracteriza a un derivado, su valor depende del valor de un subyacente.
Los derivados se pueden clasificar en función del activo subyacente, esto es:

- De naturaleza financiera: como son acciones, índices accionarios, divisas, valores de renta fija, tipos (tasas) de interés, bonos, etc.

- No financieros (commodities): materias primas, productos agrícolas, minerales, petróleo, etc.

Hay dos tipos de mercado donde se opera con derivados ([4],[10] y [11]), estos son:

Mercado de Intercambio (Exchange Market). Este es un mercado organizado y corresponde a las bolsas, donde hay altos estándares de calidad, regulaciones, transparencia, las operaciones son estandarizadas, además, es un mercado electrónico donde los precios de venta y compra están dados por la oferta y la demanda.

Mercado organizado (Over the Counter Market). En los mercados Over the Counter, estos contratos (derivados) son hechos a la medida, se negocian fuera de la bolsa y de mercados de intercambio, por ejemplo, las instituciones financieras.

En México se tiene a **MexDer**, que es la Bolsa de Derivados de México, donde se comercializan contratos de Futuros, de Swaps y de Opciones. El MexDer inició sus operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de Futuros sobre subyacentes financieros, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Esta institución opera también a través de su Cámara de Compensación (Asigna); ambas autorreguladas que funcionan bajo la supervisión de las Autoridades Financieras (SHCP, Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores-CNBV).
Las operaciones más simples que se pueden hacer con los derivados es comprar y vender, en el caso de adquirir un activo se dice que tiene una *posición corta* (short position), y para el caso de vender un activo se tiene una *posición larga* (long position), [10].
Nótese que el **arbitraje financiero** es un proceso el cual consiste en comprar y vender un activo financiero en distintos mercados y así obtener una ganancia, resultado de aquellas transacciones.
Otras operaciones que se realizan son: hacer **especulación**, esta operación consiste en tomar una posición, ya sea corta o larga, y apostar por el precio del activo, es decir, si se va a la alza o baja, otra operación es la **cobertura**, esta pretende evitar la exposición a cambios bruscos en los precios de activos, para más detalle, ver [10].
Un hecho que destaca a los derivados es que unos dan derechos y otros dan obligaciones al poseedor o propietario del contrato. Enseguida se presentan algunos tipos de derivados.

2.1. Contrato a Plazo

Un *Contrato a plazo* es un acuerdo en el que se obliga a una de las partes a comprar (*short party*) y a la otra parte a vender (*long party*) cierto activo subyacente a un precio determinado, en una única fecha específica en el futuro. Es el contrato más simple que hay de todos los derivados, ([4], [8] y [10]).
Este tipo de contrato se negocia en el mercado extrabursátil de derivados (*Over-the-Counter*), es decir, que este pacto se realiza entre dos instituciones financieras o una financiera con uno de sus clientes. Los contratos a plazo son acuerdos personalizados en el sentido del tamaño del contrato, términos y condiciones, [10].
Son más comunes los contratos a plazo sobre:

Divisas Los contratos a plazo de divisas (*FX forwards*) disminuyen la incertidumbre alrededor de los tipos de cambio. El tipo de cambio de divisas no es más que el precio de una moneda, pues el tipo de cambio establece cuantas unidades de la moneda A equivale una unidad de la moneda B.

Materias primas energéticas Estos contratos permiten que los compradores y vendedores planifiquen las transacciones a un precio asegurado ya que es común que el precio al contado de estos productos fluctúen enormemente a lo largo del tiempo.

Dinero Los contratos a plazo de tipos de interés (*Forward Rate Agreement, FRA*) permiten fijar la tasa sobre un préstamo de dinero, ya que estas tasas de interés cambian todo el tiempo. El subyacente es una cantidad fija de dinero y el precio de entrega es un tipo de interés.

Para un contrato a plazo, se especifica un precio de entrega y un precio a plazo, este último es el precio de entrega que se aplicaría al vencimiento si se negociara hoy el contrato, en el momento en que se firma el contrato estos precios son iguales, pero el precio a plazo va cambiando con el tiempo y el precio de entrega es fijo. Además, para entrar en este contrato no hay costo, por lo que tener una posición corta o larga no implica hacer algún pago inicial. Los contratos a plazo se liquidan sólo en su fecha de vencimiento. [10].

Ejemplo 2.1. *Considere el siguiente escenario para un contrato a plazo:*

- *Fecha de inicio: 30 de Agosto.*
- *Fecha de vencimiento: 30 de Diciembre.*
- *Activo subyacente: Una acción.*
- *Precio del contrato a plazo: $1,250.*

Para la parte que tiene la posición larga, debe adquirir la acción a la parte con posición corta el día 30 de Diciembre por la cantidad $1,250. Esto es, en la fecha de vencimiento, la parte con posición larga paga $1,250 y recibe una acción.
Para la parte que tiene la posición corta, debe vender la acción a la parte con posición larga el día 30 de Diciembre por la cantidad $1,250. Esto es, en la fecha de vencimiento, la parte con posición corta recibe $1,250 y entrega una acción.

2.1.1. Pago de un Contrato a Plazo

Enseguida, se estudia con más detalle el pago de un contrato a plazo.
Se supone que el contrato a plazo tiene como fecha de vencimiento a T, se definen

S_T: Precio al contado (*spot*) del activo en la fecha T.

X: Precio de entrega en el contrato a plazo.

Entonces, el *valor terminal* o al vencimiento del contrato a plazo de una posición larga es $S_T - X$ y el de una posición corta es $X - S_T$, esto significa que en el caso de la posición larga, se adquiera un activo con precio al contado S_T por el precio de entrega X, y en el caso de la posición corta, se venda un activo con precio al contado S_T por el precio de entrega X. De esta manera, se puede obtener el *beneficio bruto* del contrato para las posiciones larga y corta como $S_T - X$ y $X - S_T$, respectivamente, los beneficios brutos pueden tener valores positivos como negativos, [10].

2.2. Futuro

Un *Futuro* es un acuerdo en el que dos partes se comprometen a intercambiar un activo subyacente a un precio determinado en una fecha específica, [6]. Los Futuros se caracterizan en que tanto comprador como vendedor tienen obligaciones:

- El comprador tiene la obligación de comprar el activo subyacente abonando su precio en la fecha establecida.
- El vendedor tiene la obligación de vender el activo subyacente recibiendo su pago en la fecha establecida.

Los contratos de Futuros normalmente se comercializan en mercados de intercambio, como lo son el Chicago Board of Trade (CBT), el Chicago Mercantile Exchanged (CME) y el New York Mercantile Exchanged, actualmente estos forman al Grupo CME. Otros mercados importantes son NYSE Euronext, Eurex, BM&F BOVESPA, y el Tokyo International Financial Futures Exchange.

Las posiciones que toman los involucrados en el Futuro son; *long futures position* para la parte compradora y *short futures position* para el vendedor. Es común que los Futuros no se concreten, ya que si alguna de las partes (comprador o vendedor) al observar la evolución del precio del activo nota

que está cambiando de manera no favorable para esta parte, lo que hace es entrar en la posición contraria al Futuro original en otro Futuro, ver[10].
Las partes que componen un contrato de Futuro son:

El activo subyacente Es un activo que puede ser un comoditie u otro instrumento financiero, es decir, un Futuro sobre algodón, granos, etc., o un Futuro sobre bonos del tesoro, divisas, tipos de interés de activos financieros, índices de cotización de acciones, etc., respectivamente.

El tamaño del contrato En este apartado se especifica el monto del activo que se debe entregar en la fecha pactada. Además, el tamaño del Futuro depende del usuario, pues no será el mismo tamaño para un Futuro sobre comodities que uno sobre un activo financiero.

Disposiciones para la entrega En el contrato se debe especificar el lugar de entrega para realizar el intercambio. Si el lugar de entrega es lejano, alterará el costo para la parte que tiene la posición corta. Es importante notar esto, pues hay productos que conllevan gastos de transporte costosos.

Meses de entrega El intercambio debe especificar el período preciso durante el mes en que se puede realizar la entrega. Para muchos contratos de Futuros, el plazo de entrega es todo el mes. Los meses de entrega varían de un contrato a otro y son elegidos por el mercado de intercambio para satisfacer las necesidades de los participantes de este. En cualquier momento dado, los contratos se negocian para el mes de entrega más cercano y un número de meses de entrega posteriores. El mercado de intercambio especifica cuándo comenzará el comercio en el contrato de un mes en particular. También especifica el último día que se puede negociar para un determinado contrato. El comercio generalmente cesa unos días antes del último día en que se puede realizar la entrega.

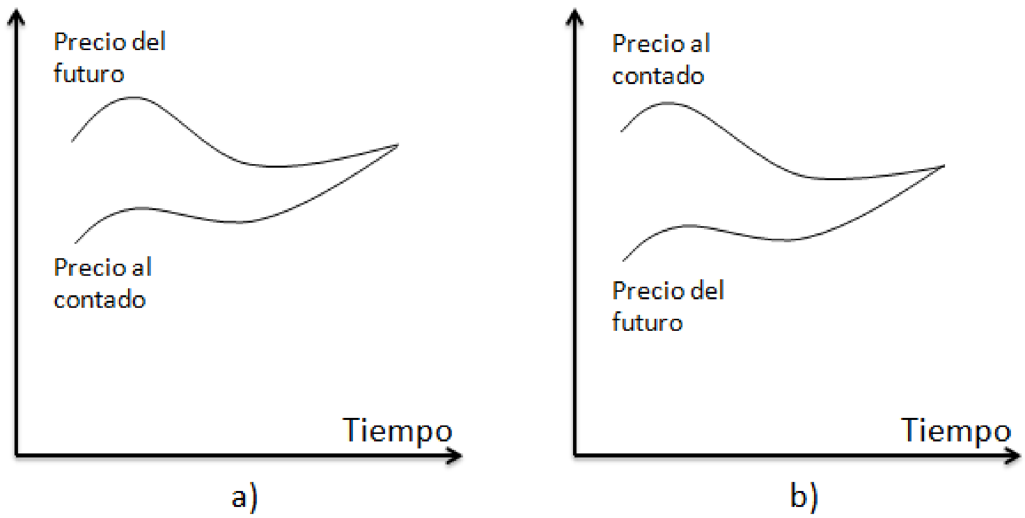

Figura 2.1: a) El precio del Futuro es mayor al precio de contado. b) El precio del Futuro es menor al precio de contado.

Cotizaciones de precios El mercado de intercambio especifica en que moneda se hará la cotización del activo (el precio del petróleo en EUA está en dólares).

Límites de precios y de posición Si el precio cae en un valor igual a la variación límite diaria, se dice que el contrato está en el límite inferior. Si se incrementa el valor límite se dice que está en el límite superior. Un *movimiento límite* es un incremento o decremento igual a la variación límite de precio. El hecho de que existan límites para el precio diario es para prevenir grandes movimientos sobre el precio causados por un exceso de especulación. Es por ello que hay un máximo de contratos de Futuros que puede poseer un especulador, este hecho se conoce como *posición límite*, [10].

El valor del Futuro converge al precio de contado del subyacente al acercarse al mes de entrega del Futuro, para ello se analiza la siguiente situación: Si el precio del Futuro es superior al precio de contado del subyacente durante el período de entrega, los operadores tendrían una oportunidad de arbitraje, ya que podrían vender un contrato de Futuro, comprar el activo y entregarlo, obteniendo una ganancia igual a la diferencia del precio del Futuro y del precio de contado. Al explotar esta oportunidad de arbitraje, el precio del Futuro descenderá. En caso de que el precio del Futuro esté por debajo del precio de contado del activo, los operadores optarán por comprar el Futuro en lugar del activo y esperarán la fecha de entrega, con lo cual el precio del Futuro aumentará. Esto puede ser más claro con la Figura 2.1.

Además, el mercado de intercambio, para evitar los posibles incumplimientos de contrato, utilizan los depósitos en garantía (*margins*). Al momento de entrar en el contrato se le solicita al inversor que realice un depósito de fondos el cual llaman cuenta de garantía (*margin account*), la cantidad depositada se conoce como garantía inicial. Esta cuenta es ajustada al finalizar cada día para reflejar las pérdidas y las ganancias del inversionista, [10]. Este ajuste se llama *marking to market* y consiste en la liquidación diaria de pérdidas y ganancias.

Una estrategía para evitar que sea negativo el saldo de la cuenta de garantía es fijar un saldo o garantía de mantenimiento (*maintenance margin*), el cual es menor al depósito inicial, si el saldo de la cuenta es menor al saldo de mantenimiento se le exige al inversionista un depósito adicional (*margin call*) para igualar el saldo del depósito inicial, se espera que lo haga al siguiente día. A cada depósito adicional se le denomina garantía de variación (*variation margin*). Si el inversionista no provee la garantía de variación, el corredor de bolsa cerrará la posición del inversionista. El inversionista tiene derecho a retirar de su cuenta de garantía los excedentes al depósito inicial.

El mercado es quién determina el valor para la garantía inicial y de mantenimiento teniendo en cuenta la volatilidad del activo subyacente. Comúnmente la garantía de mantenimiento es el 75 % de la garantía inicial.

El mercado donde se comercian los Futuros está regulado por la cámara de compensación *(clearing house)*, la cual funge como un comprador o vendedor para cada vendedor o comprador del contrato de Futuros, respectivamente. El objetivo de la cámara es eliminar el riesgo de la contraparte y permitir el anonimato de los participantes. Quienes realizan transacciones con Futuros son los miembros de la cámara de compesación. Además, la cámara realiza el seguimiento de las transacciones del día y posteriormente calcula la posición neta de sus miembros.

En el momento en que un inversionista tiene su cuenta de garantía con su corredor de bolsa, este último tiene una cuenta de garantía con el miembro de la cámara de compensación, quien a su vez mantiene una cuenta de garantía con la cámara, a esto se le conoce como *clearing margin*. Al igual que en la cuenta de garantía del inversor, la cuenta de garantía del miembro de la cámara es ajustada con las pérdidas y ganancias al finalizar el día. Sin embargo, el miembro de la cámara no tiene una cuenta de mantenimiento como la tiene un inversionista. Cada día, el saldo de la cuenta de cada contrato debe mantenerse en un importe igual al de la cuenta de garantía multiplicado por el número de contratos pendientes.

Por lo tanto, dependiendo de las transacciones durante el día y los movimientos de precios, el miembro de la cámara de compensación puede tener que agregar fondos a su cuenta de garantía al final del día o puede eliminar los fondos de la cuenta en este momento. En la determinación de los clearing margins, la cámara de compensación calcula el número de contratos pendientes sobre una base bruta o neta. Cuando se utiliza la base bruta, el número de contratos es igual a la suma de las posiciones largas y las cortas. Cuando se utiliza la base neta, éstas se compensan entre sí.

El propósito del sistema de garantías es asegurar que los fondos estén disponibles para pagar a los participantes cuando obtienen ganancias. En general, el sistema ha tenido mucho éxito. Los comerciantes que celebran contratos en las principales bolsas siempre han tenido sus contratos cumplidos.

En caso de presentarse una crisis, como la del lunes negro (19 de octubre de 1987), esta estrategía hace que haya líquidez y permite que se pague con las

garantías (iniciales, de mantenimiento), [10].
Las cotizaciones para los precios de Futuros los publica el mercado y están disponibles en la red, por medio de páginas, como lo es *The Wall Street Journal Market Data* http://markets.wsj.com/?mod=Home_MDW_MDC, además de las cotizaciones de otros derivados.
Hay dos tipos de operadores: agentes a comisión y locales, los primeros siguen los requerimientos de sus clientes a cambio de una comisión mientras que los locales administran sus propias cuentas. Hay una clasificación para estos operadores: especuladores, arbitrajistas y coberturistas, sin embargo, a los especuladores se les divide en tres grupos: scalpers, operadores de un día, y operadores de posición. Los scalpers observan las tendencias a muy corto plazo de precios de los contratos para obtener beneficios de los cambios ocurridos, el segundo grupo mantiene su posición durante el día mientras que los terceros mantienen su posición por periodos de tiempo más largos, [10].
La orden más simple que da un inversionista a su agente se conoce como una *orden de mercado* (market order), que consiste en que se lleve a cabo la orden inmediatamente al mejor precio disponible, [10].
Las ordenes más comunes que ocurren son:

Limit order Una orden límite especifica un precio, está orden se ejecuta a este precio o a uno más favorable. Esto no implica que siempre se lleve a cabo la orden debido a que no siempre se alcanza el precio límite.

Stop order or stop-loss order Una orden con límite de pérdida también fija un precio, se ejecuta al mejor precio disponible cuando se alcanza el precio determinado o uno menos favorable, así, se convierte en una orden de mercado. El propósito de esta orden es limitar la pérdida que se puede producir mediante el cierre de la posición cuando hay movimientos de precios desfavorables.

Stop-limit order Una orden límite de parada es una combinación de una orden límite y una orden con límite de pérdida, en esta orden se especifican dos precios, uno es el precio especificado para la orden límite de pérdidas y el otro es el precio para la orden límite. Este tipo de orden se convierte en una orden límite en el momento en que se presenta una oferta menor o igual al precio límite de pérdidas. En caso de que los precios sean iguales se llama orden límite y de parada.

Market-if-touched-order Una MIT especifica un precio y se convierte en una orden de mercado en el momento de alcanzar dicho precio, es decir, se ejecuta al mejor precio disponible después de aparecer una operación con un precio específico o un precio más favorable que este. Este tipo de orden tiene como fin asegurar que se obtendrán beneficios al haber cambios favorables en los precios, (también se conoce como *board order*).

Discretionary order Una orden discrecional se negocia como una orden de mercado excepto que su ejecución puede retrasarse a criterio del corredor para obtener un mejor precio.

Normalmente las ordenes tienen una vigencia de un día a menos que se especifique lo contrario, entonces, una orden a lo largo del día especifica el periodo del día en el que puede ejecutarse. Una orden abierta es efectiva hasta que se ejecuta o hasta el final del día. Por último, una orden de ejecución o nada, se efectua al momento de recibirla o no hacer nada al respecto.
Enseguida se enuncia un término común, con el fin de que queden más claros los ejemplos. Entonces, *puja*, es la variación mínima permitida del precio de contratos de Futuros y Opciones. ([12],[13] y [14]).

Ejemplo 2.2. *En México, los Futuros que se ofrecen son sobre los siguientes subyacentes.*

Divisas: *para este tipo de activo solo hay dos Futuros, uno sobre el Dólar americano y otro sobre el Euro. Enseguida se enuncian las características para uno de ellos.*

- *Futuro sobre el Dólar de los Estados Unidos de América.*

  Tamaño del contrato. *$10,000.00 Dólares americanos.*

  Período del contrato. *Ciclo diario, mensual o trimestral hasta por quince años.*

  Clave de pizarra. *DA más dos dígitos del día de vencimiento, más mes y año de vencimiento: DA13 MR17 (Marzo 2017).*

  Unidad de cotización. *Pesos por Dólar.*

  Fluctuación mínima. *0.0001 pesos, valor de la puja por contrato 1.00 pesos.*

  Horario de negociación. *7:30 a 14:00 horas tiempo de la Ciudad de México.*

  Último día de negociación y vencimiento. *Lunes en la semana que corresponda al tercer miércoles del mes de vencimiento y si fuera inhábil sería el día hábil inmediato anterior.*

  Liquidación al vencimiento. *Segundo día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

Índices: *para este caso, también hay dos Futuros, uno para el IPC y el otro para el MINI IPC. A continuación se muestran los detalles del Futuro para el IPC.*

- *Futuro Sobre Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (Bolsa Mexicana de Valores).*

  Tamaño del contrato. *$10.00 (diez pesos 00/100) multiplicados por el valor del IPC.*

  Período del contrato. *Ciclo trimestral hasta por un año.*

  Clave de pizarra. *IPC más mes y año de vencimiento: IPC JN16 (Junio 2016).*

  Unidad de cotización. *Puntos del IPC.*

Fluctuación mínima. *5.00 (cinco puntos del IPC) por el valor de un punto del IPC (10.00 pesos).*

Horario de negociación. *7:30 a 15:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Tercer viernes del mes de vencimiento o el día hábil anterior, si dicho viernes es inhábil.*

Liquidación al vencimiento. *Es el día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

Tasa de Dividendos *(aplicables para el cálculo de los Futuros del IPC durante 2015) 0.865886 %.*

Deuda: *para este tipo de activo se ofrece una gran variedad de Futuros, los cuales son sobre los siguientes activos: TIIE, CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación) de 91 días, Bono de 3 años, Bono de 10 años, Bono de 20 años, Bono de 30 años, Bono M181213, Bono M210610, Bono M241205, Bono M260305, Bono M310529, Bono M421113, Swap de TIIE 10 años (Liquidables en Especie), Swap de TIIE 2 años (Liquidables en Especie), UDI (Liquidación en Efectivo). Seguidamente de las componentes de uno de ellos.*

- *Futuro sobre TIIE (Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio) de 28 días.*

Tamaño del contrato. *100,000.00 Pesos.*

Período del contrato. *Ciclo mensual por 120 meses (10 años).*

Clave de pizarra. *TE28 más mes y año de vencimiento: TE28 JN16 (Junio 2016).*

Unidad de cotización. *Valor de la Tasa de Interés Futura.*

Fluctuación mínima. *1 Punto Base (0.01 %).*

Horario de negociación. *7:30 a 14:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Día hábil siguiente a la subasta primaria en la semana del tercer miércoles del mes de vencimiento.*

Liquidación al vencimiento. *Día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

Acciones: *en este caso, solo se ofrecen 7 Futuros, los cuales son sobre América Móvil L., Cemex CPO, Femsa UBD, Gcarso A1, GMEXICO, Walmex V y MEXTRAC09. Enseguida se muestra el Futuro sobre América móvil L.*

- *América Móvil L.*

Tamaño del contrato. *100 acciones / certificados.*

Período del contrato. *Ciclo trimestral: Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre.*

Clave de pizarra. *Tres letras relacionadas a la acción más mes y año de vencimiento: AXL DC16.*

Unidad de cotización. *Pesos y centavos de peso por acción / certificado.*

Fluctuación mínima. *El tamaño de la puja será igual a la utilizada en la negociación del subyacente en la BMV.*

Horario de negociación. *7:30 a 15:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Tercer viernes del mes de vencimiento o el día hábil anterior, si dicho viernes es inhábil.*

Liquidación al vencimiento. *Es el tercer día hábil posterior a la fecha de vencimiento.*

Commodities *En MexDer solo hay un Futuro para materias primas, a continuación se detalla.*

- *Futuro del Maíz Amarillo (Maíz Amarillo calidad US#2.).*

  Tamaño del contrato. *25 Toneladas Métricas.*

  Período del contrato. *Marzo, Mayo, Julio, Septiembre y Diciembre hasta, por 3 años.*

  Clave de pizarra. *MAIZ más el mes y año del vencimiento. MAIZ SP17.*

  Unidad de cotización. *Peso por Tonelada.*

  Fluctuación mínima. *$5.00 M.N. por Tonelada*

  Horario de negociación. *7:30 a 14:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

  Último día de negociación y vencimiento. *Último viernes que precede a por lo menos 2 días hábiles del mes anterior al mes de expiración. Si dicho viernes es inhábil, el día se deberá de mover al día hábil inmediato que procede.*

  Liquidación al vencimiento. *El día hábil siguiente.*

2.3. Opción

Una *Opción* es un contrato que otorga al propietario o comprador de la Opción el derecho a adquirir o vender cierto activo (activo subyacente) a un determinado precio (conocido como el precio de ejercicio) durante un período de tiempo o en una fecha especificada (es decir, la fecha de vencimiento), para obtener este derecho el comprador hace el pago de una prima que es el precio de dicha Opción, [10]. Este derivado se negocia en mercados organizados y en los mercados OTC.

Al igual que en los demás derivados, para las Opciones se puede tener una posición larga o corta. Hay dos tipos de Opciones, de compra y de venta,

conocidas como *call* y *put*.
Otra manera de clasificar a las Opciones es dependiendo del momento en que puede ser ejercida la Opción, es decir:

- Es una *Opción Americana*, si la opción puede ejercerse en cualquier momento de la vida del contrato hasta su fecha de vencimiento, [10].

- Es una *Opción Europea*, si la opción se ejerce solo en su fecha de vencimiento, [10].

Las Opciones tienen principalmente como activos subyacentes:

Acciones En estas Opciones, normalmente el tamaño del contrato es de 100 acciones de una empresa. Entonces, el poseedor de la Opción puede comprar o vender 100 acciones de dicha compañía. Además, estas Opciones se negocian en mercados organizados como el Chicago Board Options Exchange, NASDAQ OMX, NYSE Euronext, el International Securities Exchange, el Boston Options Exchange y MEXDER.

Divisas En este tipo de Opciones el tamaño del contrato va cambiando, ya que depende de la divisa, por ejemplo, para el caso de libras esterlinas, es de 31,250 libras y del yen japonés, 6,5 millones de yenes. Estas se negocian comúnmente en los mercados OTC, y en el NASDAQ OMX también las comercian y son de tipo europeo.

Índices Estas Opciones son sobre índices como el índice S & P 500 (SPX), el índice S & P 100 (OEX), el índice Nasdaq-100 (NDX), y el índice Dow Jones Industrial (DJX). Estos índices se negocian en el Chicago Board Options Exchange. La mayoría de estos contratos son del tipo europeo a excepción del OEX, el cual es del tipo americano. Estos contratos permiten comprar o vender 100 veces el índice por el precio de ejercicio. La liquidación se hace en efectivo.

Futuros Hay Opciones sobre todos los Futuros disponibles, ya que en el momento en que se ofrecen Futuros también se ofrecen Opciones sobre estos Futuros, además, éstos vencen después de la fecha de vencimiento de la Opción.

Ejemplo 2.3. *En México, las Opciones que se ofrecen son sobre los siguientes subyacentes:*

Índices:

- *Opciones sobre Futuros del Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV.*

Tamaño del contrato. *$10.00 (diez pesos 00/100) multiplicados por el Precio o Prima del Contrato de Opción.*

Tipo de contrato.

Opción de compra (call).

Opción de venta (put).

Estilo del contrato. *Europeo.*

Período del contrato. *Ciclo trimestral: Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre hasta por un año.*

Precios de ejercicio. *Se expresarán en puntos enteros del IPC y serán múltiplos de 50 puntos.*

Clave del mes de vencimiento.

	call	put
MAR	C	O
JUN	F	R
SEP	I	U
DIC	L	X

Clave de pizarra. *IP más cinco dígitos para especificar el precio de ejercicio y un dígito que especifica el tipo de Contrato de Opción y el mes de vencimiento:*

IP 10500C Opción CALL con vencimiento en Marzo.
IP 10500X Opción PUT con vencimiento en Diciembre.

Unidad de cotización. *Puntos del IPC.*

Fluctuación mínima. *Fluctuación mínima de la Prima de 1.00 puntos de índice (IPC).*

Horario de negociación. *7:30 a 15:00 horas tiempo de la Ciudad de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Tercer viernes del mes de vencimiento o el día hábil anterior, si dicho viernes es inhábil.*

Liquidación al vencimiento. *El día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

Acciones: *como lo son ALFA A, América Móvil L., Cemex CPO, FEMSA UBD, GMéxico B, LALA B, MEXCHEM, Naftrac ISHRS, PE&OLES, PINFRA, Televisa, CPO y Walmex V. A continuación se muestra como sería la opción para las acciones.*

- *Opciones sobre acciones individuales.*

Tamaño del contrato. *100 acciones.*

Tipo de contrato.

Opción de compra (call).

Opción de venta (put).

Estilo del contrato. *Americano.*

Período del contrato. *Ciclo trimestral: Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre hasta por un año.*

Precios de ejercicio. *Distarán uno del otro dependiendo del precio de la Acción y siempre serán múltiplos de un intervalo.*

Clave del mes de vencimiento.

	call	put
MAR	C	O
JUN	F	R
SEP	I	U
DIC	L	X

Clave de pizarra. *Los primeros dos dígitos serán característicos del Nombre del Activo Subyacente, se agregarán hasta 5 dígitos para especificar Precio de Ejercicio (tres enteros y dos decimales) y un dígito más Tipo de Contrato de Opción y el mes de vencimiento:*

AX 2400F Opción CALL con vencimiento en Junio.
AX 2400U Opción PUT con vencimiento en Septiembre.

Unidad de cotización. *Pesos y Centavos de Peso por unidad de Activo Subyacente.*

Fluctuación mínima. *Fluctuación mínima de la Prima de $0.01 (un centavo de Peso).*

Horario de negociación. *7:30 a 15:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Tercer viernes del mes de vencimiento o el día hábil anterior, si dicho viernes es inhábil.*

Liquidación al vencimiento. *El tercer día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

Divisas: *sobre la cual solo hay una opción. A continuación se enuncian sus características.*

- *Dólar de los Estados Unidos de América.*
  - *Opciones sobre el dólar de los Estados Unidos de América.*

Tamaño del contrato. *\$10,000.00 (diez mil dólares 00/100).*

Tipo de contrato.

Opción de compra (call).

Opción de venta (put).

Estilo del contrato. *Europeo.*

Período del contrato. *Ciclo trimestral: Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre hasta por un año.*

Precios de ejercicio. *Se expresarán en pesos de acuerdo al precio del Dólar fecha valor spot y serán múltiplos de 0.05 pesos.*

Clave del mes de vencimiento.

	call	put
MAR	C	O
JUN	F	R
SEP	I	U
DIC	L	X

Clave de pizarra. *DA más cinco dígitos para especificar el precio de ejercicio y un dígito que especifica el tipo de Contrato de Opción y el mes de vencimiento:*

DA 19250C Opción CALL con vencimiento en Marzo.
DA 19200X Opción PUT con vencimiento en Diciembre.

Unidad de cotización. *Pesos y Centavos de peso por unidad de Activo Subyacente.*

Fluctuación mínima. *Fluctuación mínima de la Prima de $0.001 (un milésimo de Peso).*

Horario de negociación. *7:30 a 14:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *Día de vencimiento del contrato de Futuro mensual sobre el dólar de los Estados Unidos de América listado en MexDer para el mes de vencimiento de dicha Serie.*

Liquidación al vencimiento. *El segundo día hábil siguiente a la fecha de vencimiento.*

2.4. Swap

Un *Swap* es un contrato entre dos entes financieros que se comprometen a intercambiar una serie de flujos de efectivo en fechas futuras. En el acuerdo se definen las fechas en las cuales se deben pagar los flujos de efectivo y la forma de calcular dichos flujos, [5]. Estos derivados se comercian en mercados OTC.
Hay dos clases de Swaps:

- Los Swaps sobre tipos de interes, los cuales están referenciados a tasas de interés que están en la misma moneda. Sus principales modalidades son: Swap Vanilla y Basis Swap.

- Los Swaps sobre divisas implican un cambio de una tasa local por una foránea. Sus principales modalidades son: Swaps simples (Straigth

Currency Swaps), los Swaps sin transferencia inicial de capital y Swaps sin transferencia de capital.

El Swap Vanilla también se conoce como Fixed-floating Swap o Coupon Swap, este contrato consiste en que una de las partes paga el interés fijo y la otra el interés variable (LIBOR). En el caso del Basis Swap, ambas partes pagan un interés variable, estos intereses son distintos y están referenciados a una base, ([5] y [10]).
En el caso de los Swaps sobre divisas, lo que caracteriza a la primera modalidad es: dos partes firman un acuerdo con el cual deciden, en un primer momento, proveerse recíprocamente de las diferentes divisas por un importe equivalente. El importe está determinado en una de las divisas y el tipo de cambio efectivo al día de la firma del acuerdo, que es utilizado para determinar el importe correspondiente de la otra divisa. Una previsión de pagos tiene el fin de asegurar el reembolso en cuanto los Swaps acaben con una transferencia inversa a la inicial de divisas. Estas previsiones conllevan el pago del capital y de los intereses. Numerosas modalidades son entonces consideradas: o el pago invertido del capital puede realizarse en una sola exhibición al final del Swap, o hacerse a plazos durante toda su duración, algo que resulta ser interesante cuando uno de los contrayentes financia su aportación en divisas con un préstamo estableciendo vencimientos particulares o el pago de los intereses puede dar lugar a ingresos separados o ser objeto de compensación donde una parte paga solamente la diferencia entre el tipo de interés de la divisa recibida y el tipo de la otra divisa. El tipo de cambio entre las dos divisas para los pagos de reembolso se queda durante todo el periodo del acuerdo al tipo inicial, es decir, al tipo de cambio constante en el día de la firma del acuerdo. La segunda subcategoría de estos Swaps la caracteriza el hecho de que alguna de las partes desea cubrirse sobre la evolución de una divisa, lo que interesa de este tipo de Swap de divisas es el pago del reembolso y no la transferencia inicial. Por último, en el Swap sin transferencia de capital, ninguna de las partes del contrato está interesada en la disponibilidad

inmediata del capital en la divisa extranjera puesto que tienen el objetivo financiero de cubrirse sobre esa moneda o hacer arbitraje, [10]
El uso de estos instrumentos se basa en la ventaja comparativa, la cual tiene relación con la calificación crediticia en un mercado, ya sea estandarizado u OTC de cada una de la partes interesadas en contratar un Swap. La calificación crediticia es la evaluación del riesgo de crédito de un posible deudor (individuo, empresa, gobierno, etc.), esto es, la capacidad de pago de ese posible deudor y si será moroso o no, ([7] y [10]). Las instituciones que realizan estás evaluaciones son Moody's, S & P, y Fitch.
A continución se enuncia la escala de calificación global de largo plazo.

Aaa Las obligaciones con calificación Aaa se consideran de la más alta calidad y están sujetas al riesgo crediticio mínimo.

Aa Las obligaciones con calificación Aa se consideran de alta calidad y están sujetas a un riesgo crediticio muy bajo.

A Las obligaciones con calificación A se consideran de grado intermedio-alto y están sujetas a un riesgo crediticio bajo.

Baa Las obligaciones con calificación Baa se consideran de grado intermedio y están sujetas a un riesgo crediticio moderado, por lo que pueden presentar ciertas características especulativas.

Ba Las obligaciones con calificación Ba se consideran especulativas y están sujetas a un riesgo crediticio considerable.

B Las obligaciones con calificación B se consideran especulativas y están sujetas a un riesgo crediticio alto.

Caa Las obligaciones con calificación Caa se consideran especulativas con mala reputación y están sujetas a un riesgo crediticio muy alto.

Ca Las obligaciones con calificación Ca son altamente especulativas y es probable que estén en incumplimiento o a punto de estarlo, con cierta perspectiva de recuperación de capital e intereses.

C Las obligaciones con calificación C presentan la calificación más baja y suelen estar en incumplimiento, con poca perspectiva de recuperación de capital e intereses.

En resumen, dependiendo del tipo de deudor que sea se le asigna el tipo de interés que pagará por un préstamo, es decir, si el deudor paga sus obligaciones a tiempo, el tipo será bajo y viceversa.

Ejemplo 2.4. *En la bolsa mexicana de Valores se ofrecen Swaps sobre tipos de interés fijo y variable:*

- *Futuro del Maíz Amarillo (Maíz Amarillo calidad US#2.).*

Tamaño del contrato. *$100,000.00 M.N. (Cien mil pesos M.N.).*

Período del contrato. *No habrá series por contratos de Swap. Número de cupones a 28 días.*

Clave de pizarra. *# Cupones × 1: 130 × 1.*

Unidad de cotización. *La Tasa de Interés Nominal Fija expresada en puntos porcentuales con cuatro decimales.*

Fluctuación mínima. *0.0025 de la tasa anual (1/4 Punto Base).*

Fluctuación máxima *No habrá fluctuación máxima de la Tasa durante una misma sesión de remate.*

Horario de negociación. *7:30 a 14:00 horas tiempo de la Cd. de México.*

Último día de negociación y vencimiento. *El día en que se determine la Tasa Variable con la que se hará el intercambio de* *flujos de dinero de la última Fecha de Liquidación Periódica que tenga el Contrato de Swap de TIIE.*

Liquidación al vencimiento. *El día hábil siguiente después de la fecha de vencimiento.*

Los fines principales de los derivados son, realizar ciertas operaciones de especulación, cobertura o arbitraje .
Estos tipos de contratos conllevan un riesgo de crédito, puesto que en caso de que alguna de las partes no cumpla con lo acordado, y el mercado OTC al no ser regulado, no hay alguna institución que obligue a pagar o vender a la parte que incumplió, tendría que ser por la vía legal.

Capítulo 3

Valuación de Algunos Derivados

En el presente capítulo se estudian y analizan los métodos para valuar Swaps y Opciones, posteriormente se muestra que modelo es empleado para valuar una Opción, llámese call o put (Europea).

3.1. Valuación de Swaps

Uno de los aspectos importantes en la valuación de derivados, y en particular de un Swap es determinar el valor justo o adecuado de este derivado, para esto, hay dos métodos para encontrar el valor de cada tipo de Swap en un tiempo distinto de cero, [10].

3.1.1. Valuación de Swaps Sobre Tipos de Interés

Un activo financiero importante en el mercado monetario son los *bonos*, los cuales son instrumentos de deuda que se emiten tanto en el sector público como en el privado, con el fin de captar recursos a corto plazo a cambio de un pago periódico de un interés y la amortización del capital, [10].

El más simple de este tipo de activo es un bono cupón cero (*Zero-coupon bond*), el cual implica un único pago. En este bono, emitido por una entidad (gobierno, banco o compañía), la emisora se compromete a entregar el bono por una cantidad F, conocida como *valor nominal*, en un tiempo específico T, que es la fecha de vencimiento. Comúnmente, la vida útil de un bono de cupón cero es de hasta un año, siendo el valor nominal una cifra redonda. Podría decirse que el comprador del bono está prestando dinero a la parte emisora del bono.

Dado un tipo de interés r, con vencimiento a 1 año, el valor presente de dicho bono es

$$\begin{aligned} V(0) &= F(1+r)^{-1} \\ r &= \frac{F}{V(0)} - 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Usualmente un bono se vende en algún tiempo $0 \leq t < T$, el precio del bono en el momento t es $B(t,T)$, ([2] y [10]).

Como el precio del bono ya está determinado por el mercado, lo que interesa es hallar su tipo de interés. Entonces, al relacionar el precio del bono con el valor de una inversión, es decir, $V(t) = B(t,T)$ y $V(T) = 1$. La tasa de composición anual cumple lo siguiente

$$B(t,T) = (1+r)^{-(T-t)}\,.$$

Para el caso de la composición periódica, con frecuencia m, se necesita resolver la siguiente ecuación

$$B(t,T) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m(T-t)}\,.$$

En el caso de la composición continua hay que resolver la siguiente ecuación

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}.$$

Esto muestra que la tasa no depende del tipo de composición, y además, $B(0,T)$ es el factor de descuento y $B(0,T)^{-1}$ el de crecimiento para los diferentes métodos de composición.

Ya se ha visto como son los bonos cupón-zero, pero hay otro tipo de bonos, los cuales hacen el compromiso de entregar una secuencia de pagos, se llaman cupones (*coupon bonds*), y los pagos de estos se realizan anualmente, semestralmente o trimestralmente. Estos pagos consisten en el valor nominal del bono en la fecha de vencimiento, [2].
El valor presente de un bono con cupón cuyo valor nominal es F, fecha de vencimiento T, valor del cupón C que se paga anualmente y la tasa de composición continua r, está dado como

$$V(0) = Ce^{-r} + Ce^{-2r} + Ce^{-3r} + \cdots + Ce^{-(T-1)r} + (F + C)e^{-Tr}. \tag{3.2}$$

El valor del bono en un tiempo t, con $T > t \geq 0$, está dado por

$$V(t) = Ce^{-r} + Ce^{-2r} + Ce^{-3r} + \cdots + Ce^{-[(T-t)-1]r} + (F + C)e^{-(T-t)r}. \tag{3.3}$$

El cupón se puede expresar como una fracción del valor nominal, esto es $C = iF$, donde i es llamada la *tasa del cupón*, [2].

Proposición 3.1. *Siempre que se pagan cupones anualmente, la tasa del cupón es igual a la tasa de una composición anual si y sólo si, el precio del bono es igual a su valor nominal. En este caso se dice que el bono se vende a la par.*

Demostración. $\Rightarrow$] En efecto, sea $r = i$, un bono con valor nominal F y fecha de vencimiento $T = n$, entonces el precio del bono es

$$\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F+C}{(1+r)^n} =$$

$$= \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF}{(1+r)^{n-1}} + \frac{F(1+r)}{(1+r)^n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF}{(1+r)^{n-1}} + \frac{F}{(1+r)^{n-1}} \\
&= \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF}{(1+r)^{n-2}} + \frac{F(1+r)}{(1+r)^{n-1}} \\
&= \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF}{(1+r)^{n-2}} + \frac{F}{(1+r)^{n-2}} \\
&= \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF}{(1+r)^{n-3}} + \frac{F(1+r)}{(1+r)^{n-2}} \\
&. \\
&. \\
&. \\
&= \frac{rF}{1+r} + \frac{F(1+r)}{(1+r)^2} = F.
\end{aligned}
$$

Ver [2]. $\square$

Observe que un Swap es un intercambio de flujos de efectivo. En el caso de un Swap de tipo de interés, será intercambio de un tipo fijo por uno variable o intercambios de tipos variables. Es por ello que el valor del Swap se define como la diferencia entre los valores de dos bonos. Sean

B_{fix}: Valor del bono a tipo fijo subyacente al Swap.

B_{fl}: Valor del bono a tipo variable subyacente al Swap.

El valor del Swap en caso de que se recibiera el tipo variable y se pagara el tipo fijo es

$$V_{Swap} = B_{fl} - B_{fix}. \tag{3.4}$$

En el caso en que se esté recibiendo el tipo fijo y pagando variable, B_{fl} y B_{fix} se calculan de manera idéntica y el valor del Swap es

$$V_{Swap} = B_{fix} - B_{fl}. \tag{3.5}$$

Ver [10].

Valuación en Términos de Bonos

La ecuación (3.4) se usa para valuar el Swap en un tiempo distinto a su inicio. Para ver como se usa esta ecuación se definen:

t_i: Tiempo hasta que se intercambia el pago i-ésimo con $1 \leq i \leq n$.

L: Capital nocional en el acuerdo de Swap.

r_i: Tipos LIBOR (London Interbank Oferred Rate) que es un tipo de interés interbancario variable, el cual se publica en 7 vencimientos y en 5 divisas diferentes cupón-cero correspondientes al vencimiento t_i.

k: Pago fijo realizado en cada fecha de pago.

La forma de valuar el bono a tipo fijo, B_{fix}, es la siguiente:
Si k son los flujos de efectivo generados por el bono en el momento t_i con $1 < i < n$ y L es el flujo de efectivo generado por el bono en el momento t_n, de forma que

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^{n} ke^{-r_i t_i} + Le^{-r_n t_n}. \tag{3.6}$$

En el caso del bono de interés variable es similar. Pero después de la fecha de pago del bono, es exactamente igual a un bono sobre un tipo de interés variable de nueva creación.
Se deduce que $B_{fl} = L$ inmediatamente después del pago. Entre las fechas de pago podemos utilizar el hecho de que B_{fl} igualará a L inmediatamente después de la siguiente fecha de pago. Pero justo antes de la próxima fecha de pago $B_{fl} = L + k^*$, donde k^* es el pago de interés variable que será realizado en la siguiente fecha de pago.
El valor del bono variable al día de hoy es

$$B_{fl} = (L + k^*)e^{-r^* t^*}, \tag{3.7}$$

donde r^* es la tasa de vencimiento en el tiempo t^*.

Valuación en Términos de Contratos a Plazo

Recordar que un contrato a plazo es un derivado, así que se puede tomar a un tipo de interés suscrito a un capital nocional como su activo subyacente, cuyo fin es fijar ese interés, este tipo de acuerdo se conoce como FRA (Forward Rate Agreement), ([3] y [10]).
Esto muestra que un Swap de tipo de interés no es otra cosa que una cartera de FRA. Suponiendo que se realizan los tipos de interés a plazo, un FRA puede valorarse de la siguiente manera

1. Calcular los tipos a plazo para cada uno de los tipos LIBOR que determinarán los flujos de efectivo del Swap.

2. Calcular los flujos de efectivo del Swap bajo el supuesto de que los tipos LIBOR igualarán a los tipos a plazo.

3. Fijar el valor del Swap igual al valor presente de estos flujos de efectivo.

La tasa fija en un Swap sobre tipo de interés se selecciona de tal forma que el Swap tiene un valor inicial nulo. Esto significa que la suma de los valores de los contratos FRA subyacentes al Swap en ese momento es cero, esto no significa que el valor de cada contrato FRA sea cero. Algunos tendrán valores positivos mientras otros los tendrán negativos, [10].

3.1.2. Valuación de Swaps Sobre Divisas

Valuación en Términos de Bonos

Un Swap sobre divisas puede descomponerse en una posición en dos bonos de manera similar a un Swap sobre tipo de interés. Si V_{swap} es el valor de un Swap, donde se recibe una moneda y se paga en otra moneda,

$$V_{swap} = B_D - S_0 B_F, \tag{3.8}$$

donde B_F es el precio, medido en la moneda extranjera, del bono en divisas subyacente al Swap, B_D es el valor del bono en moneda doméstica o moneda nacional subyacente al Swap, y S_0 es el tipo de cambio al contado (expresado como el número de unidades de la moneda doméstica por unidad de moneda extranjera).
Por tanto, el valor del Swap puede obtenerse a partir de los tipos LIBOR en las dos monedas, de las estructuras temporales de los tipos de interés en las monedas doméstica y extranjera, y el tipo de cambio al contado, [10].
De forma similar, el valor del Swap cuando se recibe en moneda extranjera y se paga en moneda doméstica está dada por

$$V_{swap} = S_0 B_F - B_D. \tag{3.9}$$

Valuación en Términos de Contratos a Plazo

Una descomposición alternativa del Swap sobre divisas, es a través de una serie de contratos a plazo, además, ese tipo de contratos pueden valorarse suponiendo que el precio de plazo del activo subyacente es conocido. Esto proporciona una vía para valorar los contratos a plazo subyacentes de un Swap sobre divisas.
Cuando se negocia por primera vez, el Swap vale cero. Si el valor de los dos capitales es exactamente el mismo usando el tipo de cambio al inicio del Swap, el valor del Swap también es cero inmediatamente después del intercambio inicial del principal. Esto no significa que uno de los contratos a plazo subyacentes al Swap valga cero. Además, cuando los tipos de interés en las dos divisas son significativamente distintos, el que paga en divisas de bajo tipo de interés está en una posición donde los contratos a plazo que corresponden a los primeros flujos de efectivo tienen valor positivo y los contratos a plazo correspondientes al intercambio final de principales tienen un valor esperado negativo. El que paga en la divisa de tipo de interés más alto está en la posición opuesta, es decir, los primeros intercambios de flujos

de efectivo tienen valores negativos y los intercambios finales tienen un valor esperado positivo, [10].

3.2. Valuación de Opciones

Para saber cuanto vale una Opción, hay que considerar los siguientes factores que afectan su precio:

1. El precio actual de una acción, S_0.
2. El precio de ejercicio, X.
3. El tiempo de vencimiento, T.
4. La volatilidad del precio de la acción, σ.
5. El tipo de interés libre de riesgo, r.
6. Los dividendos (los cuales son pagos en efectivo que provienen de una parte de las ganancias realizados al propietario de una acción) esperados durante la vida de la opción.

El precio de una Opción Europea de Compra, denotada por C, es

$$C = \text{máx}(S(T) - X, 0). \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) es resultado del siguiente razonamiento. En la fecha del vencimiento de la opción, si $S(T) > X$ (donde $S(T)$ es el precio de la acción en el vencimiento T), entonces el propietario de una Opción Europea de Compra puede comprar el activo por el precio X y venderlo en el mercado por el precio $S(T)$, ganando una cantidad $S(T) - X$. El otro caso es, cuando $X \geq S(T)$, entonces el propietario de la Opción no gana nada, ya que es mejor comprar el activo por el precio $S(T)$ que ejercer la Opción.
El precio de una Opción Europea de Venta, denotada por P, es

$$P = \text{máx}(X - S(T), 0). \tag{3.11}$$

Para la ecuación (3.11), se plantea lo siguiente. En la fecha del vencimiento de la Opción, si $X > S(T)$, entonces el propietario de una Opción Europea de Venta puede comprar en el mercado el activo por el precio $S(T)$ y ejercer la Opción vendiendo el activo por el precio X, ganando una cantidad $X - S(T)$. El otro caso es, cuando $S(T) \geq X$, entonces el propietario de la Opción no puede hacer nada, pues si este decidiera ejercer la Opción obtendría una pérdida igual a $S(T) - X$, [10].

3.2.1. Paridad Put-Call

La paridad Put-Call es un argumento para explicar la relación que hay entre el valor C de una Opción de compra y el valor P de una Opción de Venta Europea, ambas Opciones tienen un precio de ejercicio E con fecha de vencimiento T. Se consideran dos portafolios:

π_A**:** Una Opción de Compra más una cantidad Ee^{rT} de dinero (invertido en el banco).

π_B**:** Una Opción de Venta más una acción.

En la fecha de vencimiento, el valor del portafolio π_A es el

$$\text{máx}(S(T) - E, 0) + E,$$

que resulta ser el

$$\text{máx}(S(T), E),$$

mientras que el portafolio π_B tiene el valor $\text{máx}(E - S(T), 0) + S(T)$, es decir, este portafolio vale $\text{máx}(S(T), E)$. Esto, muestra que estos dos portafolios siempre tienen el mismo pago, entonces, estos deben tener el mismo valor en el tiempo cero, así que

$$C + Ee^{-rT} = P + S. \tag{3.12}$$

Esta relación, que conecta los valores de las Opciones de Compra y de Venta, se conoce como *ecuación fundamental de las Opciones Europeas (paridad put-call)*, [10]. La ecuación (3.12) permite tener un procedimiento para valuar una Opción de Compra Europea y a partir de esto, obtener el valor de la Opción de Venta, y viceversa.

3.2.2. Modelo Binomial

Un modelo para valuar las Opciones es el *modelo binomial*, este modelo fue el primero para valuar Opciones, el cual fue propuesto por Cox-Ross-Rubistein en el año 1979. Es un método númerico usado para las Opciones de Compra y Venta. En este tipo de valuación, se asume que el precio del activo sigue un proceso binomial sobre intervalos de tiempo los cuales se toman como periodos discretos, ([1] y [10]) .

Definición 3.2. *Una estrategia de portafolio de acciones y bonos es un vector de la forma $h(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in \{1, \ldots, T\}$ con T la fecha de vencimiento de las inversiones del portafolio, x representa el número de acciones e y el número de bonos que se tienen en el portafolio. Además, $x, y \in \mathbb{Z}$, si*

$$\begin{cases} x, y \geq 0, & \textit{significa que se ha comprado } x \textit{ acciones o } y \textit{ bonos;} \\ x, y < 0, & \textit{significa que se ha vendido } x \textit{ acciones o } y \textit{ bonos.} \end{cases}$$

Definición 3.3. *El valor del precio del portafolio está definido para un tiempo t como*

$$V_h(t) = x(t)S(t) + y(t)(1 + r) \tag{3.13}$$

donde $S(t)$ representa el precio de la acción en el tiempo t.

Definición 3.4. *Una estrategía de portafolio h se dice que es autofinanciable si la siguiente condición se mantiene para todo $t \in \{1, \ldots, T - 1\}$*

$$x(t)S(t) + y(t)(1 + r) = x(t + 1)S(t) + y(t + 1).$$

Definición 3.5. *Sea $D(T) = f(S(T))$ un reclamo contingente, el cual es una variable aleatoria con $S(T)$ el precio de la acción y f la función de pago.*

Definición 3.6. *Un reclamo contingente D se dice que es accesible si existe un portafolio h autofinanciable tal que*

$$V_h(T) = D.$$

En este caso se dice que h es un portafolio de cobertura o un portafolio replicante. Si todos los reclamos pueden replicarse se dice que el mercado es completo, ([1] y [2]).

Condición 3.7. *Los rendimientos $K(n)$ de un periodo sobre una acción son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que*

$$K(n) = \begin{cases} u, & \textit{con probabilidad p;} \\ d, & \textit{con probabilidad 1-p,} \end{cases}$$

en cada periodo de tiempo n, donde $-1 < d < u$ y $0 < p < 1$.

Esta condición implica que el precio de la acción $S(n)$ sube o baja por el factor $1 + u$ o $1 + d$ en cada periodo de tiempo. Además, la desigualdad $-1 < d < u$, garantiza que todos los precios de $S(n)$ serán positivos si $S(0)$ lo es.

Para describir la dinámica de los precios de las acciones $S(n)$ en términos de rendimientos, se hace el supuesto de que las acciones no pagan dividendos, [2]. Entonces, el rendimiento $K(n, m)$ sobre un intervalo [n,m] con $n, m \in \mathbb{N}$, está definido como la variable aleatoria

$$K(n, m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

El rendimiento sobre un solo periodo de tiempo [n-1,n] será denotado por $K(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, esto es

$$K(n) = K[n-1, n] = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow K(n)S(n-1) = S(n) - S(n-1)\\
&\Longrightarrow K(n)S(n-1) + S(n-1) = S(n)\\
&\Longrightarrow (K(n)+1)S(n-1) = S(n)\\
&\therefore \frac{S(n)}{S(n-1)} = 1 + K(n).
\end{aligned}$$

Sea r el rendimiento sobre una inversión libre de riesgo en un solo periodo de tiempo de longitud τ.

Condición 3.8. *El rendimiento r de un periodo sobre una inversión libre de riesgo es lo mismo en cada periodo y*

$$d < r < u.$$

Esta última condición describe los movimientos de una acción en relación a los activos libres de riesgo, como los bonos o dinero en una cuenta de banco.

Ya que $S(1)/S(0) = 1 + K(1)$, la condición (3.7) implica que la variable aleatoria $S(1)$ puede tomar dos valores

$$S(1) = \begin{cases} S^u = S(0)(1+u) & \text{con probabilidad } p;\\ S^d = S(0)(1+d) & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

que se ilustra en la Figura 3.1.
Para replicar el valor derivado general con pago f, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x(1)S^u + y(1)(1+r) = f(S^u),\\ x(1)S^d + y(1)(1+r) = f(S^d). \end{cases}$$

para $x(1)$ y $y(1)$. Entonces, primero se determina el valor de $x(1)$:

$$[x(1)S^u + y(1)(1+r) = f(S^u)] - [x(1)S^d + y(1)(1+r) = f(S^d)]$$

$$\Rightarrow [x(1)S^u + y(1)(1+r)] - [x(1)S^d + y(1)(1+r)] = f(S^u) - f(S^d)$$
$$\Rightarrow [x(1)S^u - x(1)S^d] + [y(1)(1+r) - y(1)(1+r)] = f(S^u) - f(S^d)$$
$$\Rightarrow [x(1)(S^u - S^d)] + 0 = f(S^u) - f(S^d)$$
$$\therefore x(1) = \frac{f(S^u) - f(S^d)}{(S^u - S^d)},$$

este valor, el de $x(1)$, es la *delta*(Δ) de la opción, esta Δ se define como la tasa de cambio entre el precio de la opción respecto al precio del activo subyacente. Esto es,

$$\Delta = \frac{f(S^u) - f(S^d)}{(S^u - S^d)}.$$

Enseguida, se encuentra el valor de $y(1)$

$$x(1)S^u + y(1)(1+r) = f(S^u)$$

$$\Rightarrow \frac{f(S^u) - f(S^d)}{(S^u - S^d)}(S^u) + y(1)(1+r) = f(S^u)$$
$$\Rightarrow y(1)(1+r) = f(S^u) - \frac{f(S^u) - f(S^d)}{(S(0)(1+u) - S(0)(1+d))}(S(0)(1+u))$$
$$\therefore y(1) = -\frac{(1+d)f(S^u) - (1+u)f(S^d)}{(u-d)(1+r)}$$

donde $y(1)$ es el valor de la posición en el mercado.

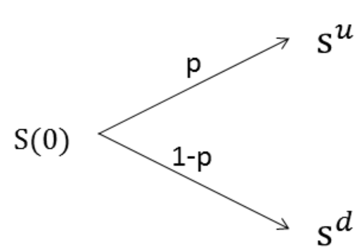

Figura 3.1: Árbol binomial para un periodo de tiempo.

Ahora, se verá como es el método binomial para dos periodos. Entonces, el precio de la acción $S(2)$ tiene tres posibles valores:

$$S(2) = \begin{cases} S^{uu} = S(0)(1+u)^2 & \text{con probabilidad } p^2; \\ S^{ud} = S(0)(1+u)(1+d) & \text{con probabilidad } 2p(1-p); \\ S^{dd} = S(0)(1+d)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2. \end{cases}$$

Esto puede ser más claro con la Figura 3.2, donde, $S^{ud} = S(0)(1+u)(1+d)$,

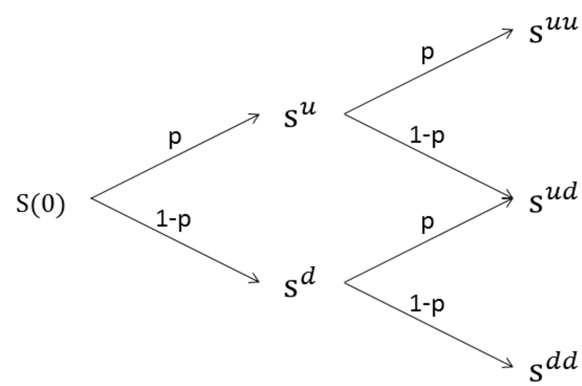

Figura 3.2: Árbol binomial para dos periodos de tiempo.

el cual puede surgir de un moviento creciente del precio de $S(0)$ y después un movimiento decreciente, o de un movimiento decreciente del precio de $S(0)$ y posteriormente un movimiento creciente.

En general, en el tiempo n hay $n+1$ posibles valores para $S(n)$, esto es

$$S(n) = (1+u)^j(1+d)^{n-j}S(0), \text{ con probabilidad } \binom{n}{j} p^j(1-p)^{n-j} \quad (3.14)$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$, el cual se ilustra en la Figura 3.3.

El precio de la acción $S(n)$ en el tiempo n es una variable aleatoria discreta con $n+1$ valores diferentes, y su distribución está dada por (3.14).

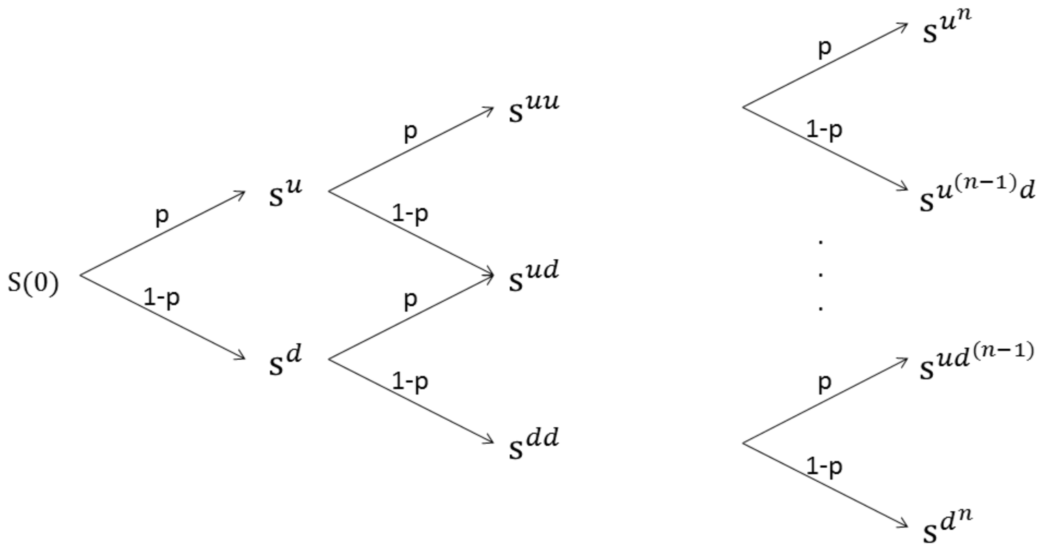

Figura 3.3: Árbol binomial para n periodos de tiempo.

El número j de movimientos de precios al alza es una variable aleatoria con una *distribución binomial*. De manera semejante, el número $n-j$ de movimientos de precios a la baja es una variable aleatoria con una distribución binomial, [2].

Por lo tanto, el proceso de precios sigue un modelo de árbol binomial. En un árbol binomial con n períodos, Ω es el conjunto de todos los escenarios posibles, esto es, el recorrido de los n-períodos se mueven hacia arriba o hacia abajo, en cada período se tienen 2^n elementos.

Entonces, el valor inicial del portafolio de réplica es $x(1)S(0) + y(1)$. Por la Definición 3.6 se sigue que

$$D(0) = x(1)S(0) + y(1),$$

que resulta ser igual a

$$= \frac{f(S^u) - f(S^d)}{u-d} - \frac{(1+d)f(S^u) - (1+u)f(S^d)}{(u-d)(1+r)}. \tag{3.15}$$

3.2.3. Probabilidad Neutral al Riesgo

El valor esperado de los precios de las acciones $E(S(n))$, para $n = 1$, es de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E(S(1)) &= pS(0)(1+u) + (1-p)S(0)(1+d) \\ &= S(0)(p(1+u) + (1-p)(1+d)) = S(0)(p + up + 1 - p + d - pd) \\ &= S(0)(pu + (1-p)d + 1) = S(0)(1 + E(K(1))), \end{aligned}$$

donde

$$E(K(1)) = pu + (1-p)d,$$

es el valor esperado del rendimiento de un periodo. Esto se puede generalizar para cualquier n.

Proposición 3.9. *El valor esperado para los precios de las acciones para* $n = 0, 1, 2, ...$ *está dado por*

$$E(S(n)) = S(0)(1 + E(K(1)))^n.$$

Demostración. Dado que los rendimientos $K(1), K(2), ...$ son independientes de acuerdo a la condición (3.7), entonces, también lo son las variables $1 + K(1), 1 + K(2), ...$
Resulta que

$$\begin{aligned} E(S(n)) &= E(S(0)(1+K(1))(1+K(2))\cdots(1+K(n))) \\ &= S(0)E(1+K(1))E(1+K(2))\cdots E(1+K(n)) \\ &= S(0)(1+E(K(1)))(1+E(K(2)))\cdots(1+E(K(n))) \end{aligned}$$

como las $K(n)$ son idénticamente distribuidas, por la condición (3.7), tienen la misma esperanza, esto es

$$E(K(1)) = E(K(2)) = \cdots = E(K(n))$$

por lo tanto, tenemos que

$$E(S(n)) = S(0)(1 + E(K(1)))^n.$$

□

Si el monto $S(0)$ es la inversión libre de riesgo en el momento 0, crecería hasta $S(0)(1+r)^n$ después de n periodos de tiempo. Para comparar $E(S(n))$ y $S(0)(1+r)^n$ sólo basta con comparar $E(K(1))$ y r. Para ello se hace el siguiente análisis:

Caso 1: Si $E(K(1)) < r$. Esta situación no es atractiva para los inversionistas ya que el rendimiento arriesgado es alto comparado con el valor esperado del rendimiento.

Caso 2: Si $r < E(K(1))$. Por lo general, los inversores con aversión al riesgo, requieren que se cumpla esta condición, con el argumento de que deben ser compensados con un mayor rendimiento por el riesgo asumido.

El caso de un mercado en el que se cumple $E(K(1)) = r$ se conoce como *riesgo neutral*. Por conveniencia de notación se usará p_* que representa su probabilidad y E_* para su valor esperado correspondiente, entonces se debe satisfacer la siguiente condición

$$E_*(K(1)) = p_*u + (1 - p_*)d = r. \tag{3.16}$$

Al tener el valor esperado neutral al riesgo (3.16) se puede obtener la probabilidad neutral al riesgo.

$$\begin{aligned} p_*u + (1 - p_*)d = r & \\ & \Rightarrow p_*(u - d) + d = r \\ & \Rightarrow p_* = \frac{r - d}{u - d}. \end{aligned}$$

Así, la probabilidad p_* es la siguiente

$$p_* = \frac{r - d}{u - d}. \tag{3.17}$$

La condición (3.16) implica que

$$p_*(u-r)+(1-p_*)(d-r)=0.$$

Por (3.16) el valor esperado de $S(n)$ con respecto a la probabilidad neutral al riesgo p_* es

$$E_*(S(n))=S(0)(1+r)^n, \tag{3.18}$$

donde $r=E_*(K(1))$.

Proposición 3.10. *Dado que el precio de las acciones $S(n)$ es conocido en el momento n, la esperanza condicional del riesgo neutral de $S(n+1)$ será*

$$E_*(S(n+1)|S(n))=S(n)(1+r).$$

Demostración. Supóngase que $S(n)=x$ después de n períodos de tiempo. Entonces

$$E_*(S(n+1)|S(n)=x)=p_*x(1+u)+(1-p_*)x(1+d),$$

ya que el precio de $S(n+1)$ puede tomar dos valores: $x(1+u)$ con probabilidad p_* y $x(1+d)$ con probabilidad $1-p_*$, además

$$\begin{aligned}
&p_*x(1+u)+(1-p_*)x(1+d)\\
&=p_*x+p_*xu+x+xd-p_*x-p_*xd\\
&=x(1+p_*u+(1-p_*)d)\\
&=x(1+r).
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$E_*(S(n+1)|S(n))=x(1+r)=S(n)(1+r).$$

□

Si a la ecuación de la Proposición 3.10 se le divide entre $(1+r)^{n+1}$, se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{E_*(S(n+1)|S(n))}{(1+r)^{n+1}} = \frac{S(n)(1+r)}{(1+r)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow E_*\left(\frac{S(n+1)}{(1+r)^{n+1}}\middle| S(n)\right) = S(n)(1+r)^{-n}$$

$$\Rightarrow E_*\left(S(n+1)(1+r)^{-(n+1)}\middle| S(n)\right) = S(n)(1+r)^{-n}$$

$$\Rightarrow E_*\left(\widetilde{S}(n+1)\middle| S(n)\right) = \widetilde{S}(n),$$

este resultado es importante para el *proceso de descuento de los precios de las acciones*, donde $\widetilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$.
Se dará una definición formal de martingala bajo la probabilidad p_* neutral al riesgo.

Definición 3.11. *Considere el modelo binomial para la valuación de precios de acciones. Sean $\widetilde{M}_0, \widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_N$ una sucesión de variables aleatorias, donde cada $\widetilde{M}_n$ depende de los primeros n períodos y $\widetilde{M}_0$ es constante. Dicha sucesión de variables aleatorias es llamado un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathfrak{F}_n$.*

1. *Si*
$$\widetilde{M}_n = E_*(\widetilde{M}_{n+1}|M_n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3.19}$$
se dice que este proceso es una martingala

2. *Si*
$$\widetilde{M}_n \leq E_*(\widetilde{M}_{n+1}|M_n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$
se dice que el proceso es una submartingala.

3. *Si*
$$\widetilde{M}_n \geq E_*(\widetilde{M}_{n+1}|M_n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$
se dice que el proceso es una supermartingala.

Corolario 3.12. *Para* $n = 0, 1, 2, ...$

$$E_*(\widetilde{S}(n+1)|S(n)) = \widetilde{S}(n).$$

Demostración. Ver [2]. □

Esto dice que los precios de las acciones con descuento $\widetilde{S}(n)$ forman una martingala bajo la probabilidad neutral al riesgo p_*. La probabilidad p_* también es referida como la *probabilidad martingala*, [2].

Este último resultado muestra que el proceso de descuento del precio de las acciones $(1+r)^{-n}S(n)$ sea una martingala.

Teorema 3.13. *El valor esperado del pago descontado calculado con respecto a la probabilidad neutral al riesgo es igual al valor presente de la reclamación contingente,*

$$D(0) = E_*((1+r)^{-1}f(S(1))). \tag{3.20}$$

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de (3.2.2)

$$\begin{aligned}
D(0) &= \frac{f(S^u) - f(S^d)}{u-d} - \frac{(1+d)f(S^u) - (1+u)f(S^d)}{(u-d)(1+r)} \\
&= \frac{1}{1+r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)f(S^u) + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)f(S^d)\right] \\
&= \frac{1}{1+r}(p_*f(S^u) + (1-p_*)f(S^d)) \\
&= \frac{1}{1+r}(E_*(f(S(1)))) \\
&= E_*((1+r)^{-1}f(S(1))).
\end{aligned}$$

□

Nótese que $D(T) = f(S(T))$, entonces, $D(1)$ tiene dos posibles valores

$$\frac{1}{1+r}[p_*f(S^{uu}) + (1-p_*)f(S^{ud})],\ \frac{1}{1+r}[p_*f(S^{du}) + (1-p_*)f(S^{dd})],$$

que son resultado de la réplica del modelo binomial en un período.
Para ello, se toma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x(1)S^{uu} + y(1)(1+r) = f(S^{uu}), \\ x(1)S^{ud} + y(1)(1+r) = f(S^{ud}). \end{cases}$$

donde S^{uu} representa el precio de la acción cuando este subió los 2 primeros períodos y S^{ud}es el precio de la acción cuando esta subió en el primer período y bajo en el segundo, ([1],[2] y [16]).
Se procede de manera semejante al calcular $D(0)$, entonces se calcula el valor de $x(1)$

$$[x(1)S^{uu} + y(1)(1+r) = f(S^{uu})] - [x(1)S^{ud} + y(1)(1+r) = f(S^{ud})]$$

$$\Rightarrow [x(1)S^{uu} - x(1)S^{ud}] + [y(1)(1+r) - y(1)(1+r)] = f(S^{uu}) - f(S^{ud})$$
$$\therefore x(1) = \frac{f(S^{uu}) - f(S^{ud})}{(S^{uu} - S^{ud})}.$$

Enseguida se calcula el valor de $y(1)$

$$x(1)S^{uu} + y(1)(1+r) = f(S^{uu})$$

$$\Rightarrow \frac{f(S^{uu}) - f(S^{ud})}{(S^{uu} - S^{ud})}(S^{uu}) + y(1)(1+r) = f(S^{uu})$$

$$\therefore y(1) = -\frac{(1+d)f(S^{uu}) - (1+u)f(S^{ud})}{(u-d)(1+r)}.$$

Como se está haciendo una réplica de $D(0)$ para obtener $D(1)$, se toma como valor inicial a

$$D(1) = x(1)S(1) + y(1).$$

Hay dos casos:

$$\begin{tikzcd} & S^{uu} \\ S^{u} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S^{ud} \end{tikzcd}$$

Figura 3.4: Parte del árbol binomial cuando $S(0)$ sube.

Caso 1: cuando sube el precio de la acción. Sí $S(1) = S(0)(1+u)$, se procede a calcular $D(1)$

$$D(1) = x(1)S(1) + y(1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(S^{uu}) - f(S^{ud})}{(S^{uu} - S^{ud})} S(0)(1+u) - \frac{(1+d)f(S^{uu}) - (1+u)f(S^{ud})}{(u-d)(1+r)} \\
&= \frac{1}{1+r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right) f(S^{uu}) + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) f(S^{ud})\right] \\
&= \frac{1}{1+r}(p_* f(S^{uu}) + (1-p_*) f(S^{ud})).
\end{aligned}$$

Caso 2: cuando baja el precio de la acción Sí $S(1) = S(0)(1+d)$, se procede a calcular $D(1)$

$$\begin{tikzcd} & S^{du} \\ S^{d} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S^{dd} \end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Parte del árbol binomial cuando $S(0)$ baja.

$$
\begin{aligned}
D(1) &= x(1)S(1) + y(1) \\
&= \frac{f(S^{du}) - f(S^{dd})}{(S^{du} - S^{dd})} S(0)(1+d) - \frac{(1+d)f(S^{du}) - (1+u)f(S^{dd})}{(u-d)(1+r)} \\
&= \frac{1}{1+r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right) f(S^{du}) + \left(\frac{u-r}{u-d}\right) f(S^{dd})\right] \\
&= \frac{1}{1+r}(p_* f(S^{du}) + (1-p_*) f(S^{dd})).
\end{aligned}
$$

De lo anterior se concluye que

$$
\begin{aligned}
D(1) &= \frac{1}{1+r}[p_* f(S(1)(1+u)) + (1-p_*) f(S(1)(1+d))] \\
&= g(S(1)),
\end{aligned}
$$

donde $g(x) = \frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u)) + (1-p_*) f(x(1+d))]$.
Por tanto, para $D(0)$ se tiene que

$$
D(0) = \frac{1}{1+r}[p_* g(S(0)(1+u)) + (1-p_*) g(S(0)(1+d))].
$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
D(0) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(S^u) + (1-p_*) g(S^d)] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}[p_*^2 f(S^{uu}) + 2p_*(1-p_*) f(S^{ud}) + (1-p_*)^2 f(S^{dd})].
\end{aligned}
$$

Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *El valor esperado del pago descontado calculado respecto a la probabilidad neutral al riesgo es igual al valor presente del contingente*

$$
D(0) = E_*((1+r)^{-2} f(S(2))).
$$

Para generalizar lo anterior se analiza lo siguiente

$$
\begin{aligned}
D(2) &= \frac{1}{1+r}[p_* f(S(2)(1+u)) + (1-p_*) f(S(2)(1+d))] \\
&= g(S(2)), \\
D(1) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(S(1)(1+u)) + (1-p_*) g(S(1)(1+d))] \\
&= h(S(1)),
\end{aligned}
$$

donde

$$g(x) = \frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u)) + (1-p_*)f(x(1+d))],$$

$$h(x) = \frac{1}{1+r}[p_* g(x(1+u)) + (1-p_*)g(x(1+d))].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} D(2) &= \frac{1}{1+r}[p_* f(S^u) + (1-p_*)f(S^d)] \\ &= g(S(2)) \ . \\ D(1) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(S(1)(1+u)) + (1-p_*)g(S(1)(1+d))] \\ &= h(S(1)) \ . \\ D(0) &= \frac{1}{1+r}[p_* h(S(0)(1+u)) + (1-p_*)h(S(0)(1+d))] \ , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u)) + (1-p_*)f(x(1+d))], \\ h(x) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(x(1+u)) + (1-p_*)g(x(1+d))], \end{aligned}$$

de lo anterior se sigue

$$\begin{aligned} D(0) &= \frac{1}{1+r}[p_* h(S^u) + (1-p_*)h(S^d)] \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}[p_*^2 g(S^{uu}) + 2p_*(1-p_*)g(S^{ud}) + (1-p_*)^2 g(S^{dd})] \\ &= \frac{1}{(1+r)^3}[p_*^3 f(S^{uuu}) + 3p_*^2(1-p_*)f(S^{uud}) \\ &\quad + 3p_*(1-p_*)^2 f(S^{udd}) + (1-p_*)^3 f(S^{ddd})]. \end{aligned}$$

Siguiendo con este procedimiento, se tiene que

$$D(0) = \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p_*^k(1-p_*)^{N-k}f(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k}). \quad (3.21)$$

Teorema 3.15. *El valor de un derivado europeo con pago $f(S(N))$ en el $N-$ésimo periodo de tiempo empleando el modelo binomial es la esperanza del pago descontado bajo la probabilidad neutral al riesgo*

$$D(0) = E_*\left((1+r)^N f(S(N))\right). \tag{3.22}$$

Demostración. Para su prueba se recomienda ver [2]. □

Observación 3.16. *No es necesario conocer el valor real de la probabilidad p para calcular $D(0)$. Esta propiedad notable del precio de la opción es importante en la práctica, como el valor de p puede ser díficil de estimar del mercado. En cambio, la fórmula $D(0)$ tiene p_*, la probabilidad neutral al riesgo, la cual no tiene nada en común con p, pero es sencillo calcularla a partir de (3.17).*

Una manera de obtener las variables u y d se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17. *Supóngase que los precios de las acciones siguen un árbol binomial, los posibles valores de $S(2)$ son \$121, \$110 y \$100. Encontrar u y d cuando $S(0) = \$100$.*
Sol. Para hallar los valores u y d hay que resolver las siguientes ecuaciones:

$$S(0)(1+u)^2 = 121,$$
$$S(0)(1+d)^2 = 100,$$

se consideran las soluciones que satisfacen $1+u > 0$ y $1+d > 0$, así, los valores de u y d quedan de la siguiente manera

$$u = \sqrt{\frac{121}{100}} - 1 = 0{,}1,$$
$$d = \sqrt{\frac{100}{100}} - 1 = 0.$$

3.2.4. Fórmula Cox-Ross-Rubistein

El pago para una Opción de Compra con precio de ejercicio X, satisface que $f(x) = 0$ para $x \leq X$, la cual reduce el número de términos en (3.22). La suma inicia con el mínimo m tal que

$$S(0)(1+u)^m(1+d)^{N-m} > X.$$

Por tanto, el precio de una Opción de Compra Europea, está dado por

$$C(0) = (1+r)^{-N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p_*^k (1-p_*)^{N-k} \left(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k} - X\right).$$

Esto se puede escribir como

$$C(0) = x(1)S(0) + y(1),$$

relacionando el precio de la Opción con el portafolio de réplica inicial $x(1)$, $y(1)$, donde

$$x(1) = (1+r)^{-N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p_*^k (1-p_*)^{N-k}(1+u)^k(1+d)^{N-k},$$

$$y(1) = -X(1+r)^{-N} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} p_*^k (1-p_*)^{N-k}.$$

La expresión para $x(1)$ puede reescribirse como

$$x(1) = \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} \left(p_* \frac{1+u}{1+r}\right)^k \left((1-p_*)\frac{1+d}{1+r}\right)^{N-k} = \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} q^k(1-q)^{N-k},$$

donde,

$$q = p_* \frac{1+u}{1+r}.$$

Estos resultados importantes se resumen en el siguiente teorema, en el cual $\Phi(m, N, p)$ denota la función de distribución acumulada con N ensayos y probabilidad p de éxito en cada ensayo, [2]

$$\Phi(m, N, p) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Teorema 3.18. *En el modelo binomial, el precio de una Opción de Compra o de Venta europea con precio de ejercicio X, puede ser ejercida después de N periodos de tiempo, está dada por*

$$C(0) = S(0)[1 - \Phi(m-1, N, q)] - (1+r)^{-N} X[1 - \Phi(m-1, N, p_*)],$$
$$P(0) = -S(0)[\Phi(m-1, N, q)] + (1+r)^{-N} X[\Phi(m-1, N, p_*)].$$

El portafolio de réplica inicial $x(1)$, $y(1)$ está dado por

Opción	$x(1)$	$y(1)$
Compra	$1 - \Phi(m-1, N, q)$	$-(1+r)^{-N} X[1 - \Phi(m-1, N, p_*)]$
Venta	$\Phi(m-1, N, q)$	$(1+r)^{-N} X[\Phi(m-1, N, p_*)]$

3.2.5. Fórmula de Black-Scholes

A partir del modelo binomial se pretende llegar al modelo de Black-Scholes. Se considera una secuencia de modelos de árboles binomiales con periodos de tiempo $\tau = \frac{1}{N}$, cuando $N \to \infty$, en la cual se hace el supuesto de que los precios de ir a la alza o a la baja son equiprobables, esto es, tienen probabilidad de $\frac{1}{2}$ de ocurrir en cada periodo de tiempo [2].

Definición 3.19. *El rendimiento logarítmico del precio de acciones sobre un intervalo de tiempo $[n, m]$ es una variable aleatoria*

$$k(n, m) = \ln \frac{S(m)}{S(n)}.$$

El rendimiento logarítmico de un periodo de tiempo será denotado por $k(n)$, esto es,

$$k(n) = k(n-1, n) = \ln \frac{S(n)}{S(n-1)},$$

así que,

$$S(n) = S(n-1)e^{k(n)}. \tag{3.23}$$

En este contexto se usa el rendimiento logarítmico dado de la siguiente manera, sea $K(n)$ como en la Condición 3.7

$$k(n) = \ln(1 + K(n)) = \begin{cases} \ln(1+u), & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}; \\ \\ \ln(1+d), & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En lugar de la tasa de rendimiento libre de riesgo para un periodo de tiempo, se usa la tasa r de composición continua, así que el rendimiento sobre un período de tiempo de longitud τ será $e^{\tau r}$.
Sean m la esperanza y σ la desviación estándar del rendimiento logarítmico $k(1) + k(2) + \cdots + k(N)$ sobre el intervalo de tiempo unitario $[0, 1]$, consistente de N periodos de tiempo de longitud τ. Los rendimientos logarítmicos $k(1), k(2), \ldots, k(N)$ son independientes e idénticamente distribuidos, como lo son los rendimientos $K(1), K(2), \ldots, K(N)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} m &= E(k(1) + k(2) + \cdots + k(N)) \\ &= E(k(1)) + E(k(2)) + \cdots + E(k(N)) = NE(k(n)), \\ \sigma^2 &= Var(k(1) + k(2) + \cdots + k(N)) \\ &= Var(k(1)) + Var(k(2)) + \cdots + Var(k(N)) = NVar(k(n)) \end{aligned}$$

para cada $n = 1, 2, \cdots, N$.
Entonces, su valor esperado es

$$E(k(n)) = \frac{m}{N} = m\tau,$$

y su desviación estándar es

$$\sqrt{Var(k(n))} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{N}} = \sigma\sqrt{\tau},$$

así, los posibles valores de cada $k(n)$ deben ser

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= m\tau + \sigma\sqrt{\tau}; \\ \ln(1+d) &= m\tau - \sigma\sqrt{\tau}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Se introduce una sucesión de variables alatorias independientes $\xi(n)$, con dos posibles valores

$$\xi(n) = \begin{cases} +\sqrt{\tau}, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}; \\ \\ -\sqrt{\tau}, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

El rendimiento logarítmico se puede escribir como

$$k(n) = m\tau + \sigma\xi(n).$$

Definición 3.20. *Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución común dada por*

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = -1) = 1 - q = p.$$

La sucesión $\{S_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

es llamada caminata aleatoria simple. En general, S_0 puede ser constante o una variable aleatoria, se dice que la caminata inicia en S_0. Si $p = q = \frac{1}{2}$ es llamada caminata aleatoria simple simétrica.

Enseguida, se introduce una sucesión de variables aleatorias $w(n)$, la cual es una caminata aleatoria simétrica, tal que

$$w(n) = \xi(1) + \xi(2) + \cdots + \xi(n),$$

y $w(0) = 0$.
Nótese que $\xi(n) = w(n) - w(n-1)$.

De ahora en adelante, se usa la notación $S(t)$ y $w(t)$ en lugar de $S(n)$ y $w(n)$ para $t = \tau n$, donde $n = 1, 2, \ldots$.

Proposición 3.21. *El precio de la acción en el tiempo $t = \tau n$ está dado por*

$$S(t) = S(0)\exp(mt + \sigma w(t)). \tag{3.25}$$

Demostración. Se emplea (3.23), y así

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(n\tau) = S((n-1)\tau)e^{k(n)} = S(n\tau - \tau)e^{k(n)} \\
&= S([(n-1)-1]\tau)e^{k(n)}e^{k(n-1)} = S(n\tau - 2\tau)e^{k(n-1)+k(n)} \\
&= \cdots = S(0)e^{k(1)+\cdots+k(n)} \\
&= S(0)e^{(m\tau+\sigma\xi(1))+\cdots+(m\tau+\sigma\xi(n))} \\
&= S(0)e^{mn\tau+\sigma(\xi(1)+\cdots+\xi(n))} \\
&= S(0)e^{mt+\sigma w(t)}.
\end{aligned}$$

□

Note que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Pero para el caso de tiempo continuo solo se empleará la aproximación

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

donde no se consideran los demás términos de la suma por ser "o" pequeñas, es decir, sean $f(n) = x^n$ y $g(n) = n!$ con $n > 3$ donde $f(n)/g(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y debido a que los términos $k(n) = m\tau + \sigma\xi(n)$ son pequeños por $\tau = \dfrac{1}{N}$ con $N \to \infty$, así, se obtiene

$$\frac{S(n\tau + \tau)}{S(n\tau)} = e^{k(n+1)} \approx 1 + k(n+1) + \frac{1}{2}(k(n+1))^2.$$

Luego, se calcula

$$k(n+1)^2 = (m\tau + \sigma\xi(n+1))^2 = \sigma^2\tau + ...,$$

los puntos indican todos los términos con potencias de τ superiores a 1, que se desprecian por ser "o" pequeñas para $\tau = \dfrac{1}{N}$ cuando $N \to \infty$. Se sigue

$$\begin{aligned}\frac{S(n\tau+\tau)}{S(n\tau)} &\approx 1 + m\tau + \sigma\xi(n+1) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\ &= 1 + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\xi(n+1),\end{aligned}$$

entonces

$$S(n\tau+\tau) \approx S(n\tau) + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau S(n\tau) + \sigma\xi(n+1)S(n\tau)$$

y, así

$$S(n\tau+\tau) - S(n\tau) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S(n\tau)\tau + \sigma S(n\tau)\xi(n+1).$$

Dado que $\xi(n+1) = w(n\tau+\tau) - w(n\tau)$, se obtiene una ecuación aproximada que describe la dinámica de los precios de las acciones

$$S(t+\tau) - S(t) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)\tau + \sigma S(t)\left(w(t+\tau) - w(t)\right) \tag{3.26}$$

donde $t = n\tau$. La solución $S(t)$ de esta ecuación aproximada está dada por la ecuación (3.25).

Para cualquier $N = 1, 2, \ldots$, se considera el modelo del árbol binomial con periodos de tiempo de longitud $\tau = \frac{1}{N}$. Sean $S_N(t)$ los precios de las acciones correspondientes y sea $w_N(t)$ la caminata aleatoria simétrica correspondiente con incrementos $\xi_N(t) = w_N(t) - w_N(t - \frac{1}{N})$, donde $t = \frac{n}{N}$ es el tiempo después de n periodos, [2].

Dado que son conocidos el valor esperado y la desviación estándar de $k(n)$, se utiliza el Teorema Central del Límite ([15]) para obtener el límite cuando $N \to \infty$ de una caminata aleatoria $w_N(t)$. Para esto se tiene que

$$z(n) = \frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$, la cual es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde cada variable tiene esperanza 0 y varianza 1. Por el Teorema Central del Límite, se obtiene que

$$\frac{z(1) + z(2) + \ldots + z(n)}{\sqrt{n}} \to Z$$

en distribución cuando $n \to \infty$, donde Z es una variable aleatoria con una distribución normal estándar (media 0 y varianza 1), [15].
Dado que la caminata aleatoria w_N sólo está definida en tiempos discretos siendo múltiplos del período $\tau = \frac{1}{N}$, se considera $w_N(t_N)$, donde t_N es el múltiplo de $\frac{1}{N}$ más cercano a t. Entonces, Nt_N es el entero para cada N, y así

$$w_N(t_N) = \sqrt{t_N}\frac{z(1) + z(2) + \ldots + z(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}}.$$

Como $N \to \infty$, tenemos que $t_N \to t$ y $Nt_N \to \infty$, así que

$$w_N(t_N) \to W(t)$$

en distribución, donde $W(t) = \sqrt{t}Z$. La última igualdad implica que $W(t)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t.

El límite $W(t)$ es llamado *proceso Weiner*, [9].

Definición 3.22. *Un proceso Wiener $W(t)$ es un proceso estocástico con $t \geq 0$, el cual satisface las siguientes condiciones:*

1. $W(0) = 0$.

2. $W(t) - W(s)$ *tiene una distribución normal con media 0 y varianza* $(t - s)$ *para* $s \leq t$.

3. $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ *son independientes para* $t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_n$.

4. $W(t)$ *es una función continua para todo* t.

Una diferencia importante entre $W(t)$ y $w_N(t)$ es que $W(t)$ está definida para todo $t \geq 0$, mientras que el tiempo en $w_N(t)$ es discreto, $t = n/N$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.
El proceso de los precios obtenido del límite de $S_N(t)$ cuando $N \to \infty$ será denotado por $S(t)$. Mientras $S_N(t)$ satisface la ecuación aproximada (3.26), con las sustituciones apropiadas, a saber

$$S_N\left(t+\frac{1}{N}\right) - S_N(t) \approx \left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right) S_N(t)\frac{1}{N} + \sigma S_N(t)\left(w_N\left(t+\frac{1}{N}\right) - w_N(t)\right),$$

los precios de las acciones en un tiempo continuo $S(t)$ satisfacen una ecuación de la forma

$$dS(t) = \left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \tag{3.27}$$

Donde $dS(t) = S(t+dt) - S(t)$ y $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ son los incrementos de $S(t)$ y $W(t)$ sobre intervalos de tiempo muy pequeños dt, [17] . La ecuación explícita para las soluciones también son similares,

$$S_N(t) = S_N(0)\exp(mt + \sigma w_N(t)),$$

en el caso discreto, mientras que

$$S(t) = S(0)\exp(mt + \sigma W(t)),$$

en el caso continuo.

Ya que $W(t)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t, se sigue que $\ln S(t)$ tiene una distribución normal con media $\ln S(0) + mt$ y varianza $\sigma^2 t$. De esto se puede decir que el proceso de los precios de las acciones $S(t)$ tiene una distribución lognormal.
El número σ es llamada la *volatilidad* del precio $S(t)$. Se considera una Opción Europea sobre la acción con fecha de vencimiento T y pago $f(S(T))$. Se considera el Teorema (3.15), en el tiempo 0, el precio $D(0)$ de la Opción debe ser igual a la esperanza del pago descontado $e^{-rT}f(S(T))$,

$$D(0) = E_*\left(e^{-rT}f(S(T))\right), \tag{3.28}$$

bajo la probabilidad neutral al riesgo P_* que transforma al proceso de descuento del precio de las acciones $e^{-rt}S(t)$ en una martingala, esto es análogo al caso discreto.

Además, una condición necesaria es que el valor esperado de los precios descontados de las acciones

$$e^{-rt}S(t),$$

debe ser constante (es decir, independiente de t), como en el caso discreto, ver (3.18).
Se procede a calcular el valor esperado usando la probabilidad de mercado P. Dado que $W(t)$ está distribuida normalmente con media 0 y varianza t, tiene una densidad $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ bajo la probalidad P. Como resultado,

$$\begin{aligned}
E(e^{-rt}S(t)) &= S(0)E\left(e^{\sigma W(t)+(m-r)t}\right) \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x+(m-r)t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= S(0)e^{(m-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2-2t\sigma x-(t\sigma)^2+(t\sigma)^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}dx \\
&= S(0)e^{(m-r+\frac{\sigma^2}{2})t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2t}}dx \\
&= S(0)e^{(m-r+\frac{\sigma^2}{2})t}.
\end{aligned}$$

Si $m+\dfrac{\sigma^2}{2}\neq r$, el valor esperado $E(e^{-rt}S(t)) = S(0)e^{(m-r+\frac{\sigma^2}{2})t}$ depende de t y por ello $S(t)$ no puede ser martingala bajo P.

Sin embargo, se puede realizar una modificación respecto a P, en su lugar se usa P_* tal que $V(t) = W(t) + (m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t/\sigma$, donde $W(t)kl$ un proceso de Wiener. Dado que, $V(t)$ tiene densidad $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ bajo la probalidad P_*, es decir, que tiene distribución normal con esperanza 0 y varianza t, [2], se sigue que

$$
\begin{aligned}
E_*(e^{-rt}S(t)) &= S(0)E_*\left(e^{\sigma W(t)+(m-r)t}\right) \\
&= S(0)E_*\left(e^{\sigma W(t)+(m-r)t+\frac{1}{2}\sigma^2 t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\right) \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}dx \\
&= S(0),
\end{aligned}
$$

de esta forma se elimina el factor exponencial en el valor esperado $E_*(e^{-rt}S(t)) = S(0)$ que es independiente de t, condición necesaria para que el proceso de los precios descontados $e^{-rt}S(t)$ sea una martingala bajo P_*.
Para mostrar que $e^{-rt}S(t)$ es en efecto una martingala bajo P_*, basta con probar la siguiente condición

$$E_*(e^{-rt}S(t)|S(u)) = e^{-ru}S(u), \tag{3.29}$$

para cualquier $t \geq u \geq 0$, involucrando la esperanza condicional de $e^{-rt}S(t)$ dado $S(u)$. Lo que indica (3.29) es que para cada $a > 0$

$$E_*(e^{-rt}S(t))1_{S(u)<a} = E_*(e^{-ru}S(u))1_{S(u)<a}, \tag{3.30}$$

donde $1_{S(u)<a}$ es la variable aleatoria indicadora igual a 1 si $S(u) < a$ y 0 si $S(u) \geq a$.
Para verificar la anterior desigualdad, primero se toma un b tal que $S(0)e^{\sigma b+ru-\frac{1}{2}\sigma^2 u} = a$ y $V(t) = W(t) + \left(m - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{t}{\sigma}$
para cualquier $t \geq 0$, el cual es un proceso de Wiener bajo P_*, en particular, $V(u)$ está normalmente distribuida bajo P_* con media 0 y varianza u.

Entonces

$$
\begin{aligned}
E_*(e^{-ru}S(u))1_{S(u)<a} &= S(0)E_*\left(e^{\sigma V(u)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}\right)\\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b} e^{\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 u}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2u}}dx\\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}dx.
\end{aligned}
$$

Como $V(t)$ es un proceso Wiener bajo P_*, las variables aleatorias $V(u)$ y $V(t)-V(u)$ son independientes y distribuidas normalmente con media 0 y varianza u y $t-u$, respectivamente, donde su densidad es $\dfrac{1}{2\pi t}e^{-\frac{y^2}{2(t-u)}-\frac{x^2}{2u}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
E_*(e^{-rt}S(t))1_{S(u)<a} &= S(0)E_*\left(e^{\sigma V(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}\right)\\
&= S(0)E_*\left(e^{\sigma (V(t)-V(u))+\sigma V(u)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}\right)\\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma y+\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{y^2}{2(t-u)}-\frac{x^2}{2u}}dy\right)dx\\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{(y-\sigma(t-u))^2}{2(t-u)}-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}dy\right)dx\\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}dx.
\end{aligned}
$$

Por tanto, se cumple la igualdad (3.30).

Ahora se considera una Opción de Compra Europea sobre una acción con precio de ejercicio X y vencimiento en el tiempo T. La ecuación (3.28) para el precio de una Opción se convierte en

$$
C(0) = E_*(e^{-rt}(S(T)-X)^+). \tag{3.31}
$$

Como $V(t) = W(t) + (m - r + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{t}{\sigma}$ para $t \geq 0$ es un proceso de Wiener bajo P_*, la variable aleatoria $V(T) = W(T) + (m - r + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{\sigma}$ tiene densidad $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}$ bajo la probalidad P_*, es decir, tiene distribución normal con esperanza 0 y varianza T, [2]. Se procede a calcular la esperanza, lo cual resulta

$$\begin{aligned}
C(0) &= E_*(e^{-rt}(S(T) - X)^+) \\
&= E_*\left(\left(S(0)e^{\sigma V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - Xe^{-rT}\right)^+\right) \\
&= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} \left(S(0)e^{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - Xe^{-rT}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx \\
&= S(0)\int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy - Xe^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2),
\end{aligned}$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

y

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

es la función de distribución normal.

Haber elegido al tiempo 0 para calcular el precio de la Opción es arbitrario, En general, se puede obtener para cualquier tiempo $t < T$. En cuyo caso el tiempo restante antes de que se ejerza la Opción será $T - t$. Sustituyendo t para 0 y $T - t$ por T en la ecuación anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.23. *El precio en el tiempo t de una Opción de Compra Europea, con precio de ejercicio X y vencimiento en el tiempo T, donde $t < T$,* *está dada por*

$$C(t) = S(t)N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{3.32}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Teorema 3.24. *El precio en el tiempo t de una Opción de Venta Europea, con precio de ejercicio X y vencimiento en el tiempo T, donde $t < T$, está dada por*

$$P(t) = Xe^{-r(T-t)}N(d_2) - S(t)N(d_1) \tag{3.33}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S(0)}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Para detalles de esta prueba ver [2],[10] y [17].

Capítulo 4

Swaption

Note que el activo subyacente de un derivado puede tener una naturaleza financiera, es decir, que su valor dependerá del valor de otro instrumento financiero. Ahora, se presenta un ejemplo de este tipo de derivado: un Swaption, además se estudia como se valua, [5].

Definición 4.1. *Un Swaption, es una Opción para entrar en un determinado tiempo futuro en un contrato de Swap de tipo de interés. Se pueden distinguir dos tipos de Swaptions:*

Receiver Swaption *(Call Swaption). Esta Opción da al poseedor el derecho a recibir el tipo de interés fijo y pagar el tipo de interés variable en un Swap.*

Payer Swaption *(Put Swaption). En este caso la Opción da al poseedor el derecho de pagar el tipo fijo y recibir el tipo variable en un Swap.*

Las Opciones empleadas para formar un Swaption son las de tipo Europeo, Bermuda o Multi-Europea, o Americana. Esto es que un Swaption se puede ejercer en una fecha; la de vencimiento, en una secuencia de fechas dentro de la vida de la Opción hasta su fecha de vencimiento o en cualquier momento dentro del período de tiempo de la vigencia de la Opción.
Aquí solo se considera a los Swaptions de tipo Europeo.

4.1. Valor de un Swaption en la Fecha de Vencimiento

Primero se determina el valor de un Call Swaption. Para ello, se utiliza la ecuación (3.5), que se emplea para obtener el valor de un Swap de tipo de interés donde se recibe el tipo fijo y se paga el tipo variable, así, el valor del Call Swaption Europeo es

$$\text{máx}\left(B_{fix} - B_{fl}, 0\right), \tag{4.1}$$

donde B_{fix} y B_{fl} son como en (3.6) y (3.7), respectivamente.
De la ecuación (4.1), la Opción se ejercerá cuando $B_{fix} > B_{fl}$, esta es una manera análoga al valor de una Opción respecto a la relación que hay entre el precio del activo en la fecha de vencimiento y el precio de ejercicio, ver (3.10).

Similarmente, para un Put Swaption Europeo, en el cual el poseedor del Swaption tiene derecho a pagar el tipo fijo y recibir el tipo variable, su valor es

$$\text{máx}\left(B_{fl} - B_{fix}, 0\right). \tag{4.2}$$

4.1.1. Paridad Para un Swaption

Anteriormente ya se ha visto como es la relación entre el valor de una Opción de Compra y una Opción de Venta Europea, conocida como la ecuación fundamental para las opciones europeas, ver Sección 3.2.1.
Para este tipo de opción sigue siendo válida dicha ecuación, por tanto

$$\text{máx}\left(B_{fix} - B_{fl}, 0\right) - \text{máx}\left(B_{fl} - B_{fix}, 0\right) = B_{fix} - B_{fl}. \tag{4.3}$$

Caso 1 Suponga que $B_{fix} \geq B_{fl}$.
Entonces, el $\text{máx}\left(B_{fix} - B_{fl}, 0\right) = B_{fix} - B_{fl}$ y $\text{máx}\left(B_{fl} - B_{fix}, 0\right) = 0$, por tanto, $\text{máx}\left(B_{fix} - B_{fl}, 0\right) - \text{máx}\left(B_{fl} - B_{fix}, 0\right) = B_{fix} - B_{fl}$.

Caso 2 Suponga que $B_{fl} \geq B_{fix}$.

Entonces, el $\max(B_{fix} - B_{fl}, 0) = 0$ y $\max(B_{fl} - B_{fix}, 0) = B_{fl} - B_{fix}$, por tanto, $\max(B_{fix} - B_{fl}, 0) - \max(B_{fl} - B_{fix}, 0) = -(B_{fl} - B_{fix}) = B_{fix} - B_{fl}$.

La ecuación (4.3) quiere decir que en la fecha de vencimiento el valor del Call Swaption menos el valor del Put Swaption es igual al valor actual del tipo fijo recibido del Swap subyacente, [5].
Dado que los pagos de estas posiciones se mantienen iguales que en la fecha de vencimiento, el valor actual de dichas posiciones son iguales a

$$\begin{aligned} &\text{Valor de la posición receiver} - \text{Valor de la posición payer} \\ &= \text{Valor actual de tipo fijo recibido del Swap subyacente de inicio directo.} \end{aligned} \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) se conoce como *paridad swaption.*

4.2. El Modelo de Black

El modelo de Black es una extensión del modelo Black-Scholes, este modelo es una herramienta popular para valuar Opciones Europeas en términos de precios de contratos a plazo (*forwards*) cuando el tipo de interés es constante. Además, el supuesto principal es que el precio del contrato a plazo tiene distribución lognormal (éste también es un supuesto para el Modelo de Black-Scholes).

Se considera una Opción Europea de Compra sobre una variable V y se definen las siguientes variables:

T**:** Tiempo para el vencimiento de la Opción.

F**:** Precio del contrato a plazo de V con vencimiento en el momento T.

F_0: Valor de F en el momento 0.

F_T: Valor de F en el momento T.

X: Precio de ejercicio de la Opción.

r: Tipo de interés hasta el vencimiento T.

σ: Volatilidad de F.

V_T: Valor de V en el momento T.

La Opción pagará $\text{máx}(V_T - X, 0)$ en el momento T. Como $F_T = V_T$, se puede ver a la Opción como si pagase el $\text{máx}(F_T - X, 0)$ en el momento T. El precio de la Opción Europea de Compra, C y el precio de la Opción Europea de Venta, P vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
C &= e^{-rT}[F_0 N(d_1) - XN(d_2)] && (4.5) \\
P &= e^{-rT}[XN(-d_2) - F_0 N(-d_1)] && (4.6)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(F_0/X) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{y} \\
d_2 &= \frac{\ln(F_0/X) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

y σ es la volatilidad del precio del contrato a plazo.

4.3. Valuación de Swaptions Europeas

El tipo de un Swap para un vencimiento particular en un tiempo específico es el tipo fijo que sería intercambiado por un tipo LIBOR en un Swap recién emitido con ese vencimiento. El modelo generalmente usado para valuar una

Opción Europea sobre un Swap supone que el tipo subyacente al Swap en el vencimiento de la Opción tiene distribuión lognormal.

Se considera un Swaption donde el poseedor tiene el derecho a pagar un tipo s_K y recibe LIBOR sobre un Swap que durará n años a partir de T años. Ahora, se asume que hay m pagos por año bajo el Swap y el principal nocional es L. Por el momento se ignora el efecto de las convenciones de la cuenta de los días y se asume que cada pago fijado en el Swap es el tiempo del tipo fijo multiplicado por L/m.

Se asume que el tipo del Swap para un Swap de n-años que inicia en el tiempo T resulta ser s_T. Mediante la comparación de los flujos de efectivo sobre un Swap donde el tipo fijo es s_T, para los flujos de efectivo sobre un Swap donde el tipo fijo es s_K, se puede observar que el pago del Swaption consiste en una serie de flujos de efectivo igual a

$$\frac{L}{m}\operatorname{máx}(s_T - s_K, 0).$$

Los flujos de efectivo son recibidos m veces por año para los n años de la vida del Swap. Supóngase que las fechas de pagos del Swap son: $T_1, T_2, ..., T_{mn}$, medidas en años a partir de hoy, ($T_i = T + i/m$). Cada flujo de efectivo es el pago de una Opción de Compra sobre s_T con precio de ejercicio s_K.

Un Swaption es una Opción sobre el tipo del Swap con pagos repetidos, [5]. El modelo estándar del mercado da el valor de un Swaption donde el poseedor tiene derecho a pagar s_K como

$$\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}B(0,T_i)[s_0N(d_1) - s_KN(d_2)],$$

donde

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}};\\
d_2 &= \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T},
\end{aligned}$$

y $B(0,T)$ es el precio de un bono cupón cero en el tiempo 0 y vencimiento T, s_0 es el tipo a plazo del Swap en el tiempo cero calculado como se indica enseguida

$$s_0 = s(0) = \frac{B(0,T_1) - B(0,T_{mn})}{A(0)},$$

σ es la volatilidad del tipo a plazo del Swap (así que, $\sigma\sqrt{T}$ es la desviación estándar de $\ln s_T$).

Esta es una extesión natural del modelo de Black. La volatilidad σ es multiplicada por $\sqrt{T}$. Los términos $\sum_{i=1}^{mn} B(0,T_i)$ son los factores de descuento para los mn pagos. Se define A como el valor de un contrato que paga $1/m$ en los tiempos T_i $(1 \leq i \leq mn)$, el valor del Swaption se convierte en

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)],$$

donde

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} B(0,T_i).$$

Si el Swaption da al poseedor el derecho para recibir un tipo fijo de s_K en lugar de pagarlo, el pago del Swaption es

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T, 0).$$

Esta es una Opción de Venta sobre s_T. Como antes, los pagos se reciben en los tiempos T_i $(1 \leq i \leq mn)$. El modelo estándar del mercado da el valor del Swaption como

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)]. \tag{4.7}$$

Ejemplo 4.2. *Considere un Swaption que da al poseedor el derecho de pagar una tasa fija de 6.2 % en un Swap a 3 años que inicia en 5 años. Supongamos que la curva de rendimiento LIBOR es plana al 6 % anual con composición* *continua.. La volatilidad de la tasa a plazo del Swap es del 20 %. Hay dos cupones por año, y el principal es de 100 millones de pesos. En este caso*

$$A = \frac{1}{2}\left(e^{-(0{,}06)(5{,}5)} + e^{-(0{,}06)(6)} + e^{-(0{,}06)(6{,}5)}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-(0{,}06)(7)} + e^{-(0{,}06)(7{,}5)} + e^{-(0{,}06)(8)}\right) = 2{,}0035$$

Una tasa de 6 % por año con composición continua se convierte en 6.09 % compuesta semianulamente. Se sigue que $s_0 = 0{,}0609$, $s_K = 0{,}062$, $T = 5$ *y* $\sigma = 0{,}2$, *así*

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{0{,}0609}{0{,}062}) + (0{,}2)^2\frac{5}{2}}{0{,}2\sqrt{5}} = 0{,}1836$$

y

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{5} = -0{,}2636.$$

De la ecuación (4.7) se tiene que

$$\$100,000,000(2{,}0035)\left(0{,}062N(0{,}1836) - 0{,}0609N(-0{,}2636)\right) = \$2,070,000.$$

Capítulo 5

Conclusiones

- Se llevó a cabo el estudio y análisis de los métodos de valuación de derivados financieros, principalmente de las Opciones y los Swpas. El modelo de Black es adecuado para valuar un Swaption porque a diferencia del modelo de Black-Scholes, el primero usa los precios de contratos a plazo en lugar del precio de las acciones, donde estos contratos a plazos nos darán los valores de los tipos de interés para realizar la permuta.

- El modelo de Black-Scholes se debe usar para los casos en que el contrato de Opción satisface las condiciones que el modelo establece, el abuso del uso de esta fórmula para obtener el precio de la Opción u Opciones ha llevado a algunas de las crisis económicas recientes por no tomar en cuenta las condiciones en las que se encuentra el contrato que se quiere valuar.

- Se presenta un ejemplo de valuación de una Opción sobre un Swap.

- Como un trabajo futuro se pretende revisar los métodos de Valuación de Opciones Exóticas sobre Swaps.

Bibliografía

[1] Björk T., Arbitrage Theory in Continuos Time, Third Edition, Oxford University Press Inc., New York, 2009.

[2] Capinski M., Zastawniak T., Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering, Springer, United States of America, 2003.

[3] Chisholm A., Derivatives Demystified, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Gran Bretaña, 2010.

[4] Chorafas D., Introduction to Derivative Financial Instruments, The McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America, 2008.

[5] Corb H., Interest Rate Swaps and other derivatives, Columbia Business School publishing, United States of America, 2012.

[6] Durbin M., All about Derivatives, Second Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America, 2011.

[7] Emery K., (2016) Rating Symbols and Definitions. Recuperado el 30 de marzo de 2017, de Moody's Investors Service Sitio web: https://www.moodys.com/sites/products/AboutMoodysRatingsAttachments/MoodysRatingSymbolsandDefinitions.pdf

[8] Gottesman A., Derivatives Essentials, ohn Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2016.

[9] Hoel P., Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company Boston, United States of America, 1972.

[10] Hull, J. Options, Futures and Other Derivatives, Eight Edition, Pearson Prentice Hall, United States of America, 2012.

[11] Kolb R., Overdahl J., Financial Derivatives: Pricing and Risk Management, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2010.

[12] MeXDer, Contratos de Futuro. Recuperado el 24 de marzo de 2017, de MexDer Sitio Web:
https://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_futuro

[13] MexDer, Contratos de Opción. Recuperado el 24 de marzo de 2017, de MexDer Sitio Web:
http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_opcion

[14] MexDer, Contratos de SWAPS. Recuperado el 25 de marzo de 2017, de MexDer Sitio Web:
http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_swaps

[15] Rincón L., Curso Intermedio de Probabilidad, México D.F. 2010.

[16] Shreve S., Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model, Springer, United States of America, 2004.

[17] Shreve S., Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models, Springer, United States of America, 2004.