



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

*Una propuesta didáctica sobre la enseñanza de la
geometría en el nivel medio superior*

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

JUAN MANUEL RAMÍREZ CONTRERAS

Asesores de tesis:

*Dr. FERNANDO MACÍAS ROMERO
Dr. JUAN CARLOS MACÍAS ROMERO*

PUEBLA, PUE.

MARZO 2012

Jurado

Dr. David Herrera Carrasco.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM.

Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM.

Dr. José Ramón E. Arrazola Ramírez.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM.

Dedicatoria

A mis padres:

Jesús Ramírez Montes y Ana Bertha Contreras Morales.

Por todo su apoyo, comprensión, confianza y cariño en cada minuto de mi vida.

A mis hermanos:

Jesús Alberto Ramírez Contreras y Nanyeli Ramírez Contreras.

Por sus sabios consejos, apoyo y cariño en todo momento.

A Citlali Ramos Ramírez y Paulina Hernandez Ramírez.

Por todo su amor y alegría a esta gran familia.

Agradecimientos

A mis padres y hermanas por confiar en mí cuando nadie más lo hizo, por siempre tener una sonrisa al sentirse cansados de tanto trabajar para poder sacarme adelante, por ser las mejores personas que conozco, por enseñarme lo que es bueno y lo que es malo, por darme la oportunidad de estudiar, por estar siempre a mi lado. Gracias por todo, los quiero mucho LCL.

Al Dr. Juan Carlos Macías Romero, por darme la oportunidad de realizar este trabajo bajo su supervisión, por confiar en mí, por su paciencia, por sus comentarios, sugerencias, consejos, y sobre todo por el tiempo dedicado para la realización este trabajo. Gracias.

Al Dr. Fernando Macías Romero, por apoyar este trabajo en todo momento, por confiar en que su realización valía la pena, por sus comentarios, sugerencias y por el tiempo dedicado a este trabajo. Gracias.

Dr. David Herrera Carrasco, Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez y Dr. José Ramón E. Arrazola Ramírez, por el tiempo invertido en revisar y mejorar este trabajo. Gracias.

A cada uno de los profesores que tuve oportunidad de conocer como estudiante, gracias por dedicar su tiempo en mi educación, me llevo un gran aprendizaje de cada uno de ustedes.

A mis amigos y compañeros, gracias por tener la oportunidad de convivir con ustedes a lo largo de toda mi vida estudiantil, gracias por sus consejos, apoyo, cariño y amistad.

Gracias a todos

Índice general

Índice general	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. ROMPECABEZAS	1
1.1. <i>Conservación del área</i>	1
1.2. <i>Juegos de rompecabezas</i>	9
2. PLEGADOS: UNA GEOMETRÍA SIN INSTRUMENTOS	16
2.1. <i>Plegados, una geometría sin instrumentos</i>	16
2.1.1. <i>Precisiones sobre el rectángulo</i>	16
2.1.2. <i>Construcción de un cuadrado</i>	17
2.1.3. <i>Triángulo equilátero, plantilla a 60°</i>	17
2.1.4. <i>Otra construcción a partir de un círculo</i>	20
2.1.5. <i>Hexágono regular</i>	23
2.1.6. <i>Pentágono regular</i>	23
2.2. <i>Las simetrías axiales y las rotaciones</i>	25
2.2.1. <i>Composición de dos simetrías axiales</i>	28
3. FIGURAS POLIGONALES	35
3.1. <i>Cuadriláteros</i>	35
3.1.1. <i>Simetría central</i>	41
3.1.2. <i>Simetría axial</i>	44
3.2. <i>Pentágonos</i>	49
3.3. <i>Polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio r</i>	58
4. TESELADOS	60
4.1. <i>Teselados</i>	60
4.2. <i>El teselado del Cairo</i>	67
4.3. <i>Los teselados semirregulares</i>	71
4.4. <i>Teselados periódicos y aperiódicos</i>	77
4.5. <i>Los teselados y los 17 grupos de simetría</i>	81
4.5.1. <i>Nomenclatura de los grupos cristalográficos</i>	82
4.6. <i>Frisos</i>	84
4.7. <i>Dualidad</i>	87

5. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO	89
5.1. <i>Aproximación a π (pi)</i>	89
5.1.1. <i>La aproximación egipcia</i>	91
5.1.2. <i>π en el teselado del templo de Diana en Nîmes</i>	92
5.1.3. <i>Método de los polígonos regulares inscritos</i>	97
6. CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIDA	105
6.1. <i>Aritmética y Geometría</i>	106
6.2. <i>Estimación</i>	109
6.3. <i>Las áreas</i>	109
6.3.1. <i>Geoplano</i>	110
6.4. <i>Perímetro y área</i>	111
6.4.1. <i>Perímetro con área constante</i>	112
6.4.2. <i>Área con perímetro constante</i>	113
6.5. <i>Una curiosidad</i>	114
7. ÁREAS	123
7.1. <i>Partición del rectángulo</i>	138
7.2. <i>Partición de un paralelogramo</i>	140
7.3. <i>Ejemplos</i>	140
8. EL TEOREMA DE PITÁGORAS	153
8.1. <i>Demostración de Euclides</i>	157
8.2. <i>Demostración de Pappus</i>	159
8.3. <i>Consecuencias y aplicaciones variadas</i>	161
8.3.1. <i>Relaciones métricas en el triángulo rectángulo</i>	166
8.4. <i>Algunos problemas de aplicación</i>	169
9. EL TEOREMA DE TALES Y SUS APLICACIONES	171
9.1. <i>Otra demostración del teorema</i>	176
9.2. <i>Consecuencias variadas</i>	177
9.3. <i>Circunferencia de Apolonio</i>	185
9.4. <i>Homotecias</i>	189
9.4.1. <i>Ampliación y reducción</i>	191
10. LOS OBJETOS EN EL ESPACIO	194
10.1. <i>Los poliedros regulares y los otros</i>	194
CONCLUSIONES	208
Bibliografía	210
Índice alfabético	212

INTRODUCCIÓN

La geometría ha sido siempre una de las ramas más queridas por los matemáticos, por ser una de las raíces sobre las cuales ha crecido la matemática. Más aún, los expertos en su enseñanza, la distinguen como la disciplina más apropiada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y así, despertar su interés por las matemáticas en cualquier nivel de estudio. Esta excepcional cualidad se debe esencialmente a la imagen que nos formamos de los conceptos geométricos, los cuales son una excelente guía tanto en la forma de intuir una propiedad como en la demostración misma. Sin embargo, es muy difícil atreverse a afirmar que para la mayoría de los docentes es “una de las ramas más queridas por ellos”, puesto que su enseñanza trae al docente un ambiente donde él es quien tiene la responsabilidad de proponer los fenómenos geométricos a estudiar, las condiciones que deben cumplir las figuras, los trazos auxiliares necesarios, etcétera. Además, por si no fuera poco tiene la obligación de conocer el camino correcto que asegure a los estudiantes entender desde los conceptos más elementales para posteriormente en los siguientes niveles ser capaz de efectuar razonamientos lógicos que permitan aclarar perfectamente el significado, en matemáticas, de una demostración.

Esto último, genera un desconcierto total en los docentes (*probablemente por la falta de conocimiento de los temas*), de aquí la geometría es el tema cuya enseñanza ha sufrido los cambios más radicales en las últimas décadas.

En el bachillerato, se procede a observar y admitir, más que a demostrar. Mientras que la mayor razón de ser de la geometría, a partir de Euclides, y sobre todo del siglo XVII, es oponer a la obligatoriedad del aprendizaje de propiedades geométricas un método de razonamiento certero.

Las confusiones pedagógicas explican probablemente porqué la geometría deja tan pocos recuerdos, o tan malos, en la memoria de los estudiantes, y en especial de los futuros docentes.

En efecto, en el mejor de los casos se observa un déficit de conocimientos; en el peor, una actitud negativa hacia la geometría, y seguramente una insuficiencia en la formación de los docentes.

De aquí, a estas confusiones pedagógicas se ha venido añadiendo, desde hace

algunos años y con el pretexto de aligerar, una reducción de la geometría en los programas de estudio.

En el plan de estudios de 1890 en México, la aritmética y nociones de geometría aparecen como materias separadas, a las cuales se les destina cerca de una cuarta parte del tiempo total efectivo de las clases [14, p. 44].

En la ley de 1908, la aritmética y la geometría se presentan integradas en una sola materia, con lo que se redujo una séptima parte del tiempo destinado a la formación matemática [14, p. 44].

Antes de dichas reformas educativas, los maestros de matemáticas trabajaban con libros de autores europeos (principalmente franceses) traducidos al español, donde cada estudiante contaba con una pequeña pizarra en donde realizaba ejercicios. El ábaco, la regla métrica, la escuadra y el transportador servían de apoyo al docente. Para que los estudiantes llevaran a cabo algunos ejercicios, había en las escuelas diversas figuras geométricas de madera en cajas que contenían “magnitudes lineales, superficiales y de volumen” [14, p. 50].

“A un siglo de distancia, resulta complejo hablar de la forma de la vida cotidiana en las aulas; sin embargo, algunas condiciones como el espacio y tiempo educativo, la cantidad de estudiantes por docente, los programas y libros de texto pueden proporcionar algunas ideas.”

Así, durante poco más de medio siglo, la utilización de los instrumentos de medición conducían “naturalmente” a la intuición de las nociones de punto, línea, superficie, volumen y no a su definición.

Hasta 1960 y 1970, con las “matemáticas modernas”, se introduce una ruptura decisiva. El origen se encuentra, sin duda, en una coincidencia: el encuentro del constructivismo y la renovación contemporánea de las matemáticas. De modo que.

- En las escuelas primaria y secundaria, la reforma se refirió sobre todo a la construcción del concepto de número, en dos direcciones: la reducción de las etapas, la introducción de las nuevas nociones conjuntistas. En consecuencia, la geometría se retiró a un segundo plano.
- En el nivel medio superior y superior, la introducción de las nociones conjuntistas va unida a una geometría decididamente axiomatizada y abstracta inspirada en una corriente formalista.

Cabe mencionar que en el nivel superior, el rechazo de la intuición y el fervor axiomático mostraron rápidamente (hacia 1980) que en la enseñanza, había la necesidad de volver a centrarse en la actividad de resolución de problemas para aproximar al punto de vista constructivista, moderando sus excesos logicistas.

En la resolución de problemas se ha dado una atención cada vez mayor al método, en detrimento de la sección de conocimientos exigibles y su estructuración. Ésta es una manera de devolverle el lugar a la intuición, sin caer por ello en la construcción fuertemente deductiva.

En mi punto de vista, si un docente posee una excelente preparación matemática y pedagógica, aunada a condiciones adecuadas de trabajo, y por supuesto, a una personalidad de buena voluntad y entusiasta, logrará salir adelante con cualquier programa de estudio, cualquier tema y cualquier método. Sin embargo, esta labor se dificulta en gran parte a la imposición de los programas y métodos inadecuados.

El material que constituye esta tesis tiene como objetivo el de servir como apoyo didáctico para los docentes del nivel medio superior quienes tienen que enseñar la geometría.

En este trabajo, a diferencia de los libros de texto, no partimos de definiciones básicas como la de punto, línea o plano sino más bien, estudiaremos enunciados de teoremas, y su demostración en algunos de ellos. Se presentan dos casos.

- Algunas pruebas son accesibles a los alumnos, para captar la idea de la demostración y no esperar un desarrollo completo de la misma, haciendo deseable comprender que las matemáticas no son una ciencia empírica, ni un discurso de autoridad.
- Algunos resultados o demostraciones son ún poco más técnicos: están destinados a los docentes en el marco de su formación, o para satisfacer su curiosidad.

La mayor parte de las nociones geométricas son abordables desde varios puntos de vista, o bien, poniendo en juego diferentes soportes. Justamente esta variedad de perspectiva es lo que constituye el objeto geométrico. De ello, podría pensarse en un enfoque por tema o por tipo de actividad: ése es el elegido en varios casos: rompecabezas, plegados, teselados, etcétera.

Algunos resultados, como las traslaciones, son fácilmente captados por la intuición, mientras que las composiciones de simetría o de rotaciones, no lo son. No obstante, la experiencia elemental que pueda obtenerse es un buen indicio para el estudio posterior de las mismas.

Es entonces cuando interviene la prueba; la importancia de una justificación puede abordarse muy tempranamente, y por diversos medios, dando paso a la demostración convencional. Note que explicar o justificar no es probar, pero constituye una legitimidad de la prueba.

Es importante mencionar que la sucesión impuesta en los capítulos no constituye una progresión cronológica o temática. Cada capítulo está organizado

alrededor de un eje, de un tema práctico o de un objeto teórico, e intenta exponer su desarrollo longitudinal con ayuda de actividades realizables en clase, o de problemas de diversos niveles.

El material de cada capítulo no se encuentra comúnmente en los programas de bachillerato, es por eso que sugerimos su estudio para que los estudiantes y docentes tengan otra perspectiva de la geometría de este nivel.

Este trabajo está estructurado por 10 capítulos, mismos que el docente puede utilizar en el momento que lo requiera para su aplicación.

En el *capítulo 1* hablamos de los rompecabezas, y cómo su utilización conduce fundamentalmente al concepto de área y su conservación. Esto lo hacemos mediante varios ejemplos de distintos niveles. Finalmente, se propone una serie de juegos con los rompecabezas, con los cuales (si se aprovechan de forma adecuada) se podrá tener un buen entendimiento de la noción de área.

En el *capítulo 2* estudiamos los plegados, y cómo su utilización genera una geometría sin instrumentos con la cual podemos obtener diferentes figuras geométricas (rectángulos, cuadrados, triángulos, pentágonos, hexágonos), de modo que se tenga un buen material a la hora de pasar a profundizar en las propiedades de dichas figuras. Finalmente, se da una noción del alcance que pueden tener los plegados (simetrías axiales y rotaciones).

En el *capítulo 3* analizamos las figuras poligonales, principalmente en la clasificación de los cuadriláteros, puesto que son los más comunes y sobre todo los que más confusión presenta en su clasificación. También se habla de la regularidad de algunos ejemplos de pentágonos.

En el *capítulo 4* tratamos con los teselados. En general, es un capítulo que profundiza más que otros trabajos con la finalidad de poder tener una noción bastante clara de ellos, de modo que al consultar trabajos que propongan más actividades didácticas, se pueda saber lo que hay que trabajar y qué nivel de conocimientos se va a manejar.

En el *capítulo 5* trabajamos con la circunferencia y el círculo, principalmente de la relación constante que existe entre ellos y cómo a lo largo de la historia esa constante ha ido tomando forma (desde los egipcios, los teselados y el método de los polígonos regulares inscritos).

En el *capítulo 6* ilustramos la construcción de la medida, de la relación entre la geometría y la aritmética, los tres componentes que dan función a la estimación, del geoplano y su relación con las áreas, de la confusión que existe entre el perímetro y área. Finalmente, se da un ejemplo no trivial, donde se puede notar la independencia de dichos conceptos.

En el *capítulo 7* hablamos de las áreas. En general, se establecen numerosas propiedades geométricas y su demostración, también cómo se pueden establecer fórmulas de cálculo de área de un paralelogramo, triángulo, trapecio a partir de un rectángulo y se dan ejemplos del cálculos de áreas de problemas geométricos.

En el *capítulo 8* analizamos el teorema de Pitágoras, la demostración de Euclides, la demostración de Pappus, sus consecuencias y aplicaciones. Finalmente se dan algunos problemas de aplicación.

En el *capítulo 9* tratamos el teorema de Tales, una demostración formal, otra demostración por medio de resultados vistos en áreas, otra demostración particular que surge en los rompecabezas, sus consecuencias variadas, y su relación que existe con las homotecias.

En el *capítulo 10* trabajamos con los objetos en el espacio, principalmente se habla de los poliedros regulares y cómo la fórmula de Euler-Poincaré interviene en la existencia de ellos.

Finalmente, al término de cada capítulo se encontrarán sugerencias de aplicaciones pedagógicas las cuales permitirán al docente mostrar una cara diferente a sus estudiantes, ya sea a través de un juego, un reto o una aplicación directa en el aula.

Capítulo 1

ROMPECABEZAS

En este capítulo se abordarán las características propias del juego, el interés de cada tipo de rompecabezas y como construir algunos. Los rompecabezas que aquí intervienen utilizan dos criterios: la localización de una pieza con relación a una imagen global y las relaciones afinadas de proximidad debido al recortado.

Cuando el juego comprende un gran número de piezas, se trata fundamentalmente de un juego de paciencia. Se trata, más bien, de un juego de memoria; después de varios ensayos acertados, en lugar de asumir de nuevo una actitud inicial de búsqueda se fija en la posición de grupos de piezas que forman uniones parciales; es decir, el reconocimiento global.

El número y la variedad de los juegos permiten evitar el desgaste del interés, pero ese efecto del aprendizaje es inevitable.

1.1. *Conservación del área*

El tangram es un juego de paciencia de origen chino que se difundió en Europa a comienzos del siglo XIX y cuya popularidad renace periódicamente. Su construcción es particularmente sencilla (Fig. 1.1) y consiste en tres formas esenciales:

1. T (triángulo rectángulo).
2. C (cuadrado).
3. P (paralelogramo).

Notemos que T tiene otras dos escalas T' y T'' en el juego.

Una característica del tangram es la relación que existe entre sus piezas; es decir, las piezas pueden formarse con triángulos de la forma T'' (Fig. 1.2).

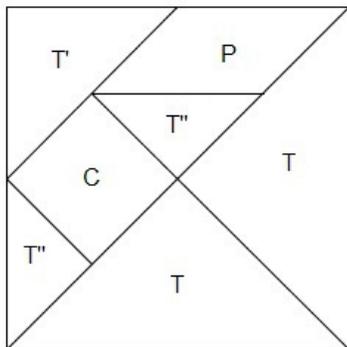


Fig. 1.1

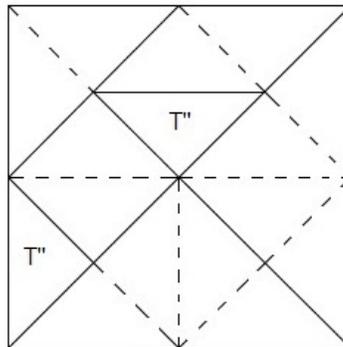


Fig.1.2

Observe que las piezas T' , P , C tienen el doble de área que T'' y que T tiene el cuádruple de área que T'' . Con esto podemos notar que los rompecabezas están sujetos fundamentalmente a la conservación del área. Dicho esto podemos pensar que se abre un campo de observación para los rompecabezas.

Comencemos con un resultado sencillo.

Teorema 1.1.1. Dado R un rectángulo con vértices A , B , C , D ; sea S un cuadrado dentro de R con vértices E , F , G , D , y T un rectángulo dentro de R con vértices A , I , E , H , entonces T y S tienen la misma área si y sólo si el vértice E se encuentra en cualquiera de las diagonales del rectángulo R (Ver Fig. 1.3).

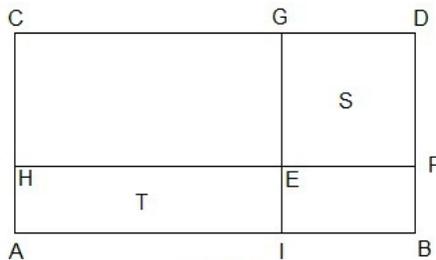


Fig. 1.3

Antes de comenzar la demostración, notemos que R tiene dos diagonales que son los segmentos AD y CB . Por convención denotamos el área de una figura geométrica de la siguiente manera: $a[\text{figura geométrica}]$. Por ejemplo, si queremos referirnos al área del triángulo ABC , lo escribimos $a[\Delta ABC]$.

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que E se encuentra en el segmento CB (Ver Fig. 1.4).

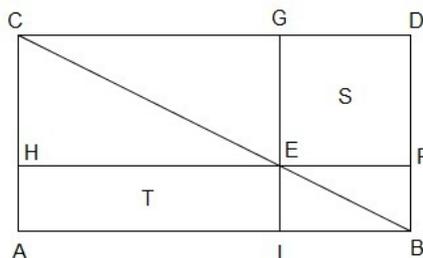


Fig. 1.4

Veamos que, $a[S] = a[T]$.

Para esto, notemos que el segmento CB es diagonal de R , de esto los triángulos ABC y CDB son congruentes, de aquí

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta CDB].$$

Por otro lado,

$$a[\Delta ABC] = a[T] + a[\Delta EIB] + a[\Delta CHE]$$

y

$$a[\Delta CDB] = a[S] + a[\Delta FBE] + a[\Delta CGE].$$

Por lo que,

$$a[T] + a[\Delta EIB] + a[\Delta CHE] = a[S] + a[\Delta FBE] + a[\Delta CGE]. \quad (1.1)$$

Ahora, como el segmento CB también es diagonal del rectángulo $(IFBE)$, y por el criterio de congruencia [16, T. 1.36] de triángulos LLL, tenemos que los triángulos EIB y FBE son congruentes, de tal modo que,

$$a[\Delta EIB] = a[\Delta FEB].$$

Análogamente, los triángulos ECH y CGE son congruentes. En consecuencia,

$$a[\Delta CHE] = a[\Delta CGE].$$

De estas igualdades, y de la igualdad (1.1), obtenemos

$$a[S] = a[T].$$

Si suponemos que E se encuentra en el segmento AD de manera análoga se puede mostrar que $a[S] = a[T]$.

(\Rightarrow) Supongamos que $a[S] = a[T]$.

Veamos que, E se encuentra en el segmento CB de R .

Supongamos que E no se encuentra en el segmento CB , y llamemos J y K a los puntos de intersección del segmento CB con S (Fig. 1.5).

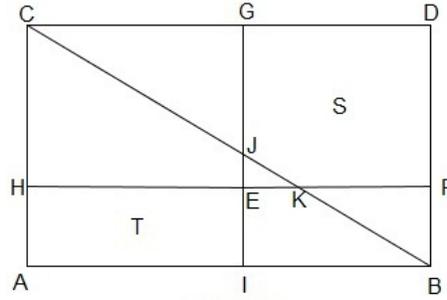


Fig. 1.5

Notemos en la Figura 1.5, que éste sólo es un caso de todos los posibles al suponer que E no está en el segmento CB , pero los pasos siguientes son análogos en todos ellos.

Ahora, por la construcción anterior,

$$a[\Delta CGJ] < a[\Delta CHK] \text{ y } a[\Delta KFB] < a[\Delta IJB]. \quad (1.2)$$

Por otro lado,

$$a[\Delta CHK] = a[\Delta JKE] + a[CH EJ] \quad (1.3)$$

y

$$a[\Delta IJB] = a[\Delta JKE] + a[IEKB]. \quad (1.4)$$

Sustituyendo (1.3) y (1.4) en (1.2), tenemos que

$$a[\Delta CGJ] < a[\Delta JKE] + a[CH EJ] \quad (1.5)$$

y

$$a[\Delta KFB] < a[\Delta JKE] + a[IEKB]. \quad (1.6)$$

Si sumamos (1.5) y (1.6), obtenemos que

$$2(a[\Delta JKE]) + a[CH EJ] + a[IEKB] > a[\Delta CGJ] + a[\Delta KFB] \quad (1.7)$$

Por otro lado, por ser el segmento CB diagonal de R , se sigue que

$$a[\Delta ACB] = a[\Delta CDB].$$

Por otra parte,

$$a[\Delta ACB] = a[T] + a[\Delta JKE] + a[IEKB] + a[CH EJ]$$

y

$$a[\Delta CDB] = (a[S] - a[\Delta JKE]) + a[\Delta KFB] + a[\Delta CGJ].$$

Por hipótesis, tenemos que $a[S] = a[T]$; es decir,

$$a[\Delta JKE] + a[IEKB] + a[CH EJ] = -a[\Delta JKE] + a[\Delta KFB] + a[\Delta CGJ].$$

En consecuencia,

$$2(a[\Delta JKE]) + a[IEKB] + a[CH EJ] = a[\Delta CGJ] + a[\Delta KFB].$$

Lo cual no es posible por (1.7). □

Una consecuencia del Teorema 1.1.1 es una prueba del teorema de Tales [Cap. 9, Teorema 9.0.1].

Teorema 1.1.2. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo rectángulo corta sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales.

Demostración. En efecto, si llamamos a a la medida de los segmentos CG , HE , y AI ; b a la medida de los segmentos GD , EF , y IB ; c a la medida de los segmentos CH , GE , y DF . Por último, llamamos d a la medida de los segmentos HA , EI , y FB (Fig. 1.6). Observar que con el triángulo rectángulo CDB , construimos el rectángulo $CDBA$. Supongamos que el segmento GI es paralelo al segmento DB . Por construcción el vértice E está en una diagonal del rectángulo $CDBA$.

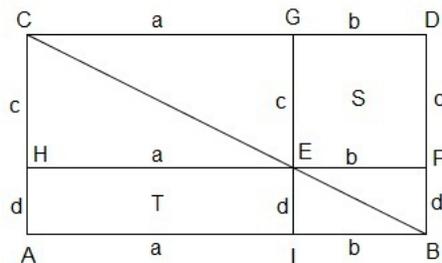


Fig. 1.6

Por el Teorema 1.1.1, tenemos que

$$a[S] = a[T].$$

Como acabamos de definir a como la base y d como la altura del rectángulo T , tenemos que

$$a[T] = a \times d.$$

Análogamente,

$$a[S] = b \times c.$$

De tal manera que,

$$a \times d = c \times b.$$

En consecuencia,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Así,

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}. \quad \square$$

Notemos que hemos demostrado el teorema de Tales para el caso particular de un triángulo rectángulo.

Los rompecabezas también sirven para hacer comprobaciones que pueden ser de orden numérico como demuestran los siguientes rompecabezas aritméticos cuyo origen se remonta a la escuela de Pitágoras. Los rompecabezas siguientes se inspiran en el principio llamado *Inducción* [13, p. 9]. Mostraremos una situación particular sirviendo para dar una generalización de procesos de inducción.

1. Sea un cuadrado de lado 4 como en la figura 1.7.

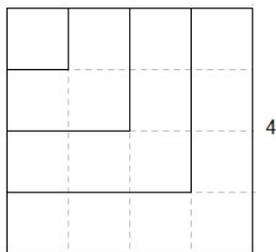


Fig. 1.7

Hemos formado “escuadras” que contienen 1, 3, 5, 7, ... cuadrados pequeños tomados como unidades. Recordemos que los rompecabezas se basan

fundamentalmente en la conservación del área, de modo que sobre la figura vemos,

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4 = 4^2.$$

Lo cual es el área del cuadrado de lado 4.

Si generalizamos, obtenemos que

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

donde n es el lado del cuadrado n -ésimo.

2. Sea un rectángulo de base 5 y altura 4 marcado como lo muestra la Figura 1.8.

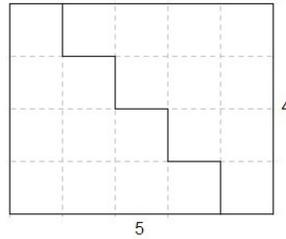


Fig. 1.8

Observemos que obtenemos dos “escaleras” con la misma cantidad de cuadros pequeños; es decir, que son idénticas.

Por otro lado, sabemos que el área de este rectángulo es $20 = 4 \times 5$ cuadros pequeños y que el área abajo de cada escalera es $1 + 2 + 3 + 4$ cuadros pequeños, pero son dos escaleras. Dicho esto,

$$(1 + 2 + 3 + 4) \times 2 = 4 \times 5$$

cuadros pequeños, recordando que los rompecabezas conservan el área.

Si generalizamos, tenemos un rectángulo de base $n + 1$ y altura n .

Resulta que,

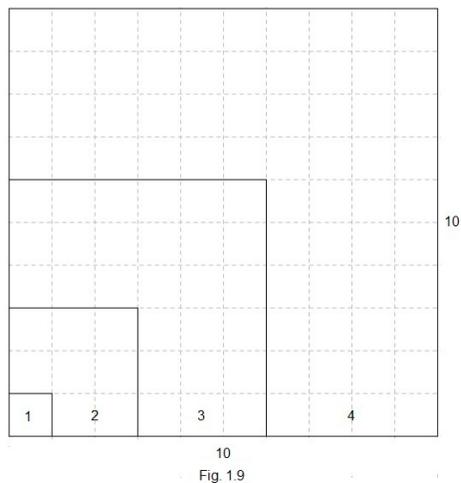
$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \times 2 = n \times (n + 1).$$

Por lo tanto,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

donde n es la cantidad de cuadros pequeños en la base de la escalera.

3. Sea un cuadrado de lado 10 marcado como indica la Figura 1.9.



Hemos formado “escuadras” con ancho 1, 2, 3, 4 cuadros pequeños y que contienen 1, 8, 27, 64 cuadros pequeños tomados como unidades, respectivamente.

Notando que, $1 = 1^3$; $8 = 2^3$; $27 = 3^3$ y $64 = 4^3$, tenemos que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

porque los rompecabezas conservan el área.

Por otro lado, la base del cuadrado está formada por los anchos de las “escuadras”. De tal manera que, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Luego,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Si generalizamos, tenemos un cuadrado de lado m y los anchos de las “escuadras” son 1, 2, 3, 4, \dots , n con $n < m$.

De aquí,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2.$$

Por otra parte, por el ejemplo anterior, tenemos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

En consecuencia,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n \times (n + 1)}{2} \right)^2$$

donde n es el número de cuadros pequeños correspondiente a la escuadra más ancha contenida en el cuadrado de lado m .

Este tercer ejemplo demuestra claramente que el paso de la lectura de la imagen a la generalización requiere algunas precauciones que la Figura en si misma no puede proporcionar (por ejemplo, note que necesitamos del ejemplo anterior para poderlo resolver).

1.2. Juegos de rompecabezas

1. Reacomodar los elementos del cuadrado de la Figura 1.10, para obtener un triángulo isósceles. Donde la medida del lado del cuadrado es a y las marcas de los elementos están a medida $\frac{a}{2}$.

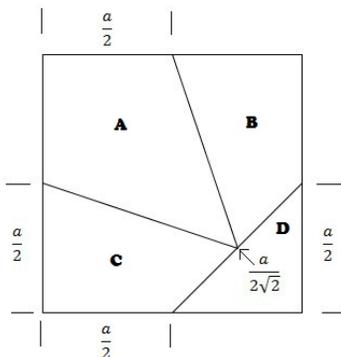


Fig. 1.10

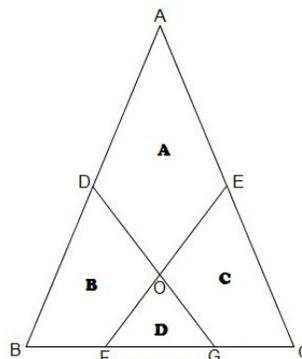


Fig. 1.11

La forma de reacomodar los elementos para formar un triángulo isósceles, nos la da la Figura 1.11.

Llamemos A, B, C a los vértices de este triángulo, O al punto interior donde coinciden los vértices de los elementos del cuadrado inicial y D, E, F, G a los vértices de los elementos que coinciden con un lado del $\triangle ABC$.

Sólo falta mostrar que esta forma de reacomodar los elementos del cuadrado de lado a , efectivamente forman un triángulo isósceles.

Nota 1.2.1. Un triángulo es *isósceles* si tiene al menos dos lados iguales.

Note que, por ser lados del cuadrado original, los segmentos FO , OG , OE , y OD son iguales y su medida es $\frac{a}{2}$. Así, el triángulo FOG es isósceles.

En consecuencia, los ángulos OFG y OGF son iguales [16, p. 12, T. 1.35].

Análogamente, el triángulo ODE es isósceles y los ángulos ODE y OED son iguales.

Como los segmentos FO , OG , OE , y OD son iguales, se tiene que los ángulos ODE , OED , OFG y OGF son iguales.

De aquí, los segmentos DE y BC son paralelos (Fig. 1.12).

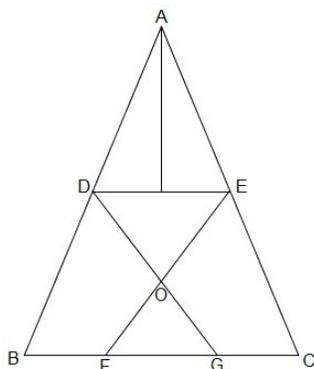


Fig. 1.12

Esto quiere decir que sólo basta con fijarnos que en el triángulo ADE los segmentos AD y AE sean iguales. Supongamos que los segmentos AD y AE son diferentes. Luego, los ángulos ODE y OED serían diferentes, lo cual no puede pasar. En consecuencia, los segmentos AD y AE son iguales. Por lo tanto, el triángulo ABC es isósceles.

Es importante notar que $a[\Delta ABC] = a^2$, puesto que los rompecabezas conservan el área, además tiene base $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, su altura es $a\sqrt{2}$. Recordar que el área de un triángulo es base por altura sobre dos.

Dicho esto, al tomar la mitad de la base, y la altura del triángulo ABC de tal manera que formen un ángulo recto, formamos el triángulo $A'B'C'$ (Fig. 1.13).

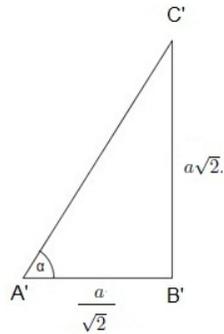


Fig. 1.13

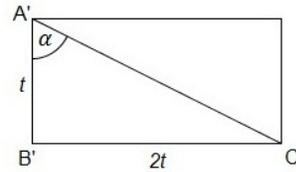


Fig. 1.14

Posteriormente, el ángulo α en la Figura 1.13, lo podemos calcular mediante la expresión siguiente

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

De aquí,

$$\text{Tan } \alpha = 2$$

Así, el triángulo ABC es un triángulo isósceles en el cual sus ángulos en la base provienen de dividir un rectángulo cuya base es el doble de la altura (Fig. 1.14).

2. Con las seis piezas de la Figura 1.15, construir un rectángulo, un triángulo y una cruz.

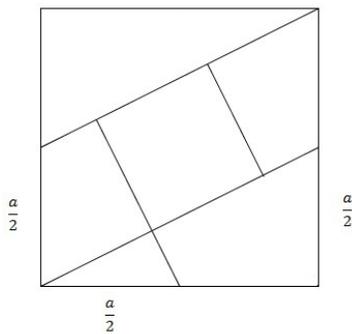


Fig. 1.15

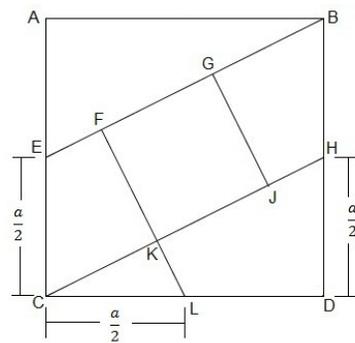


Fig. 1.16

Análogamente como en el ejemplo anterior, tenemos un cuadrado de lado a , y vértices A, B, C, D . Llamamos E, H, L a los vértices de las piezas

interiores del cuadrado inicial, que coinciden con un lado del cuadrado inicial. Por último llamanos F, G, K, J a los vértices del cuadrado que está dentro del cuadrado inicial (Fig. 1.16).

La forma de acomodar las piezas para formar un rectángulo, un triángulo y una cruz, se da a continuación (Fig. 1.17-1.19). Pero el análisis se deja para el lector, con el objetivo de que investigue un poco para advertir que, a pesar de no ser aparente, las tres figuras están relacionadas y poder disminuir el azar de los tanteos mediante relaciones entre las formas geométricas.

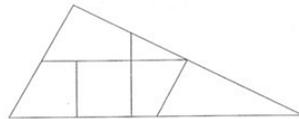


Fig. 1.17

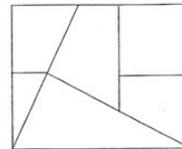


Fig. 1.18

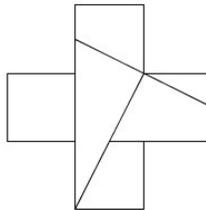


Fig. 1.19

3. Construir 5 cuadrados de lado a y recortarlos como muestra la Figura 1.20, y reacomodarlos de tal manera que formemos un cuadrado más grande con las diez piezas obtenidas.

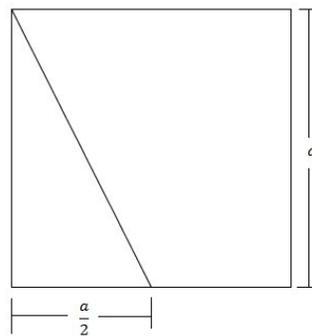


Fig. 1.20

Primero al efectuar el recorte sobre un cuadrado, notar que tenemos dos piezas, una es un triángulo rectángulo de base $\frac{a}{2}$ y altura a y la otra es un

cuadrilátero que tiene lados $\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $\frac{a}{2}$, a , a (Fig. 1.21).

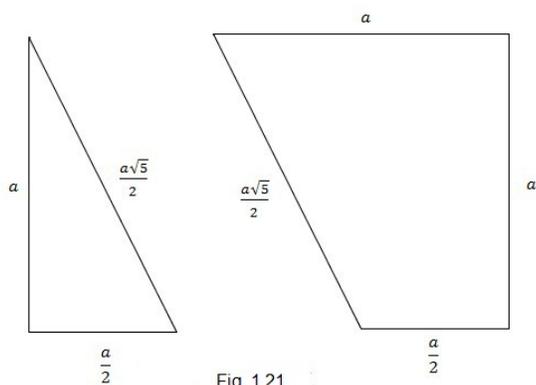


Fig. 1.21

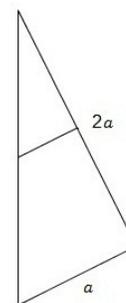


Fig. 1.22

Ahora, si acomodamos los lados que miden $\frac{a}{2}$ de estas dos figuras, obtenemos un triángulo rectángulo que tiene base a y altura $2a$ como lo muestra la Figura 1.22. *La hipotenusa de éste triángulo mide $a\sqrt{5}$.*

Por otro lado, es fácil construir una cruz con los 5 cuadrados iniciales (Fig. 1.23).

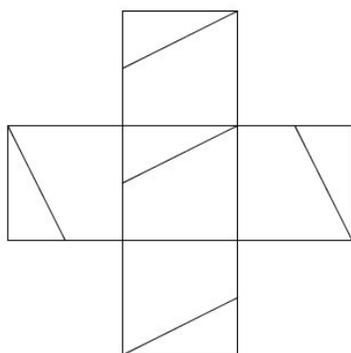


Fig. 1.23

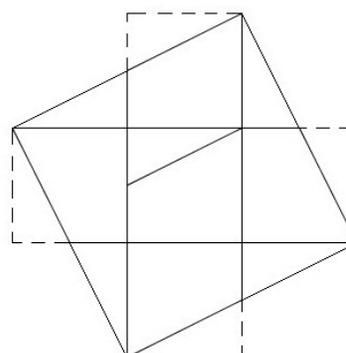


Fig. 1.24

Ahora, si hacemos los movimientos descritos anteriormente sobre los cuadrados en esta cruz, obtenemos *el cuadrado buscado* (Fig. 1.24).

En conclusión, a partir de 5 cuadrados de lado a , haciendo el recorte a cada uno de ellos como lo muestra la Figura 1.21, y acomodando de tal manera que formemos un cuadro más grande, este cuadrado tendrá de

lado,

$$a\sqrt{5}.$$

Estos problemas son una oportunidad para combinar formas, notar regularidades, hacer y comprobar hipótesis. Además podemos hacer una ilustración del teorema de Pitágoras, una alusión atractiva al debate histórico sobre los irracionales y a la partición de superficies en “partes alícuotas”.

Nota 1.2.2. Algunas de las imágenes aquí mostradas han sido modificadas para no afectar la calidad, la distribución y la vista del documento; es decir, las imágenes modificadas en forma física pueden ser de diferentes tamaños a los aquí mostrados.

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

Los **rompecabezas** constituyen, junto con los plegados, una de las mejores ilustraciones de la continuidad de los **medios** de la geometría desde el jardín de niños hasta el bachillerato gracias a su doble utilización.

Por una parte, ponen en juego un **reconocimiento de la forma** y la **identificación de un desplazamiento** (una pieza dada ocupa determinada ubicación, está orientada en determinada forma). Ésta es la **componente manipulativa**. Sólo tiene interés (matemático) si no es demasiado difícil. Proporciona un modelo tamaño natural, o lo que es aún mejor, una silueta vacía, es una ayuda significativa.

El procedimiento buscado procura anticipar la ubicación de las piezas en su lugar y disminuir los tanteos. El grado de dificultad depende del número de piezas y del tamaño del motivo.

Por otra parte, los rompecabezas ponen en juego el principio fundamental de la **conservación del área**, que es un poderoso instrumento de demostración, y antes que eso, un punto de apoyo importante en la construcción de la medida. Precisamente esta prioridad decisiva inclinó a Clairaut [7] a redactar su tratado de geometría a partir de la “medición de los terrenos”.

La conservación del área es un resultado intuitivamente sólido, y sin duda más fácilmente aceptable que el postulado de las paralelas o la invariancia de la “relación de proyección”. Bkouche [2] parece aceptar este “punto de vista”. *Con justa razón utilizamos las áreas para demostrar estos teoremas (Tales y Pitágoras). [...] Podemos comprender que, en un primer momento, está utilización de las áreas se redujera únicamente al aspecto rompecabezas [...] tanto más porque este aspecto rompecabezas permite poner en juego razonamientos que marcan los primeros pasos en el método deductivo; [...] podríamos utilizar los rompecabezas*

para comparar o calcular áreas en el transcurso de los dos primeros años de la secundaria y mostrar, en el bachillerato, cómo el postulado de las paralelas permite legitimar el método.

En bachillerato, los rompecabezas tienen otra función. Mientras que en los primeros rompecabezas intervienen piezas cuyas formas pueden resultar arbitrarias, estos últimos utilizan formas que resumen relaciones geométricas interesantes. Ellos permiten constituir un capital de experiencias y representaciones que será útilmente explotado al final del bachillerato (resultados de Pitágoras y de Tales, trigonometría,...).

Capítulo 2

PLEGADOS: UNA GEOMETRÍA SIN INSTRUMENTOS

2.1. Plegados, una geometría sin instrumentos

Este capítulo expone las situaciones y los resultados que permiten alcanzar los plegados (dobletes) de una hoja y dar coherencia a esa diversidad de actividades. Gran parte de la geometría elemental se ha desarrollado de esa manera, permitiendo abordar objetos geométricos de una manera específica, complementaria de la que ofrecen los instrumentos usuales.

2.1.1. Precisiones sobre el rectángulo

Es evidente que una hoja de papel da la imagen de un rectángulo (Fig. 2.1).



Fig. 2.1

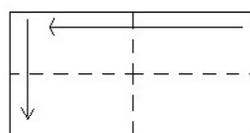


Fig. 2.2

Por medio de dos plegados podemos hacer aparecer dos ejes de simetría, estos plegados consisten en superponer dos a dos las esquinas del rectángulo (Fig. 2.2).

Nota 2.1.1. Las flechas muestran el plegado realizado sobre la hoja.

Podemos ver que los ejes de simetría se encuentran en el centro del rectángulo [Cap. 3, Fig. 3.11].

Análogamente, por dos plegados podemos hacer aparecer las diagonales del rectángulo (Fig. 2.3).

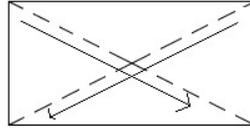


Fig. 2.3

Estas diagonales se encuentran en el centro del rectángulo [Cap. 3, Teo. 3.1.5]. Además, cada una divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos congruentes. No obstante, estas diagonales, en general, no son ejes de simetría. Cuando lo son, la base y altura del rectángulo pueden superponerse; es decir, son iguales. Cuando esto sucede se trata de un cuadrado.

2.1.2. Construcción de un cuadrado

Dada una hoja de papel, plegamos el ancho sobre el largo (Fig. 2.4). Luego, plegamos siguiendo el borde obtenido (Fig. 2.5). Finalmente, desplegamos (Ver Fig. 2.6). La superficie obtenida es un cuadrado.



Fig. 2.4

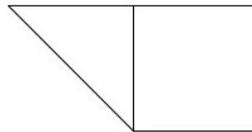


Fig. 2.5

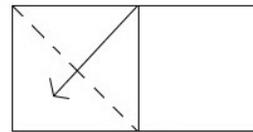


Fig. 2.6

Es un cuadrado, puesto que *sus ángulos interiores son rectos y sus cuatro lados son iguales* [Cap. 3, Def. 3.1.1].

2.1.3. Triángulo equilátero, plantilla a 60°

De una hoja rectangular, llamemos A, B, C, D a sus esquinas (Fig. 2.7).

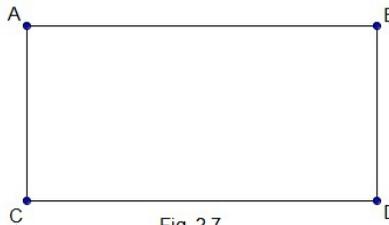


Fig. 2.7

Como la hoja es rectangular,

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ.$$

Ahora, hagamos aparecer el plegado l (Fig. 2.8), el cual es obtenido al superponer A con C , y B con D .

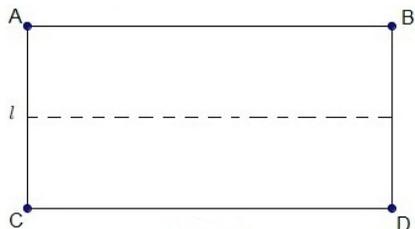


Fig. 2.8

Luego, formamos el plegado l' que pasa por C y E (Fig. 2.9), superponiendo la esquina A en el plegado l de tal manera que sigamos conservando el ángulo recto en A (note que E se forma al superponer la esquina A en l y conservando el ángulo recto en A). Así, llamemos F al punto sobre l donde A coincide con L .

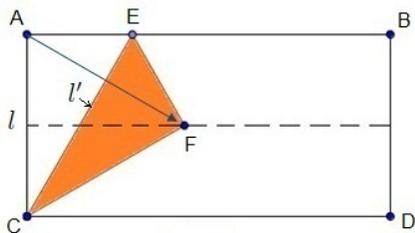


Fig. 2.9

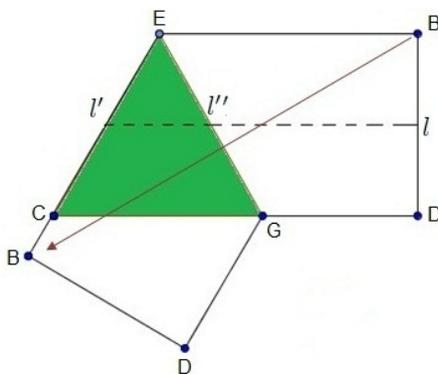


Fig. 2.10

Nota 2.1.2. F no es el centro de la hoja inicial.

Con esto hemos formado un lado de nuestro futuro triángulo equilátero; a saber, el segmento CE . Posteriormente, formemos el plegado l'' , plegando B con respecto al segmento EF (Fig. 2.10) y llamemos G al punto sobre el segmento CD que coincide con l'' . Obteniendo así, el triángulo CEG .

Sólo falta mostrar que el triángulo CEG es equilátero.

Para ello, nombremos H al punto sobre el segmento CD que es el simétrico de E con respecto a l (notar que l es eje de simetría de la hoja [Sec 2.1.1]). Luego, sea J el punto sobre el segmento CD que es pie de la perpendicular al segmento CD y que pasa por F (Fig. 2.11). Por último, llamemos K al punto de intersección de l con el segmento EH .

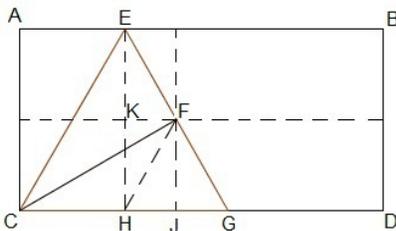


Fig. 2.11

Por el criterio de congruencia de triángulos LAL [16, T. 1.31], tenemos que

$$\triangle EKF \cong \triangle KFH.$$

De aquí,

$$\overline{HF} = \overline{EF}.$$

Por otro lado, $KFJH$ es un rectángulo y el segmento HF es una de sus diagonales. Luego,

$$\triangle HJF \cong \triangle KFH.$$

Si plegamos G con respecto del segmento FJ , entonces G es el simétrico de H respecto al segmento FJ .

De modo que,

$$\overline{HJ} = \overline{JG}$$

Por el criterio de congruencia de triángulos LAL, tenemos que

$$\triangle HFJ \cong \triangle FJG.$$

Así,

$$\overline{HF} = \overline{FG}.$$

Análogamente:

$$\triangle CEF \cong \triangle CFG$$

y

$$\overline{CE} = \overline{CG}.$$

Si plegamos G con respecto del segmento EH , entonces G es el simétrico de C respecto al segmento EH .

Resulta que,

$$\overline{CH} = \overline{HG}.$$

Por el criterio de congruencia de triángulos LAL, tenemos que

$$\Delta CEH \cong \Delta HEG.$$

En consecuencia,

$$\overline{CE} = \overline{GE}.$$

De aquí,

$$\overline{CE} = \overline{GE} = \overline{CG}.$$

Por lo tanto, el triángulo CEG es equilátero.

Esta construcción es un medio muy bueno para construir una **plantilla** de 60° .

2.1.4. Otra construcción a partir de un círculo

Tenemos aquí otra construcción de un triángulo equilátero a partir de un círculo.

Sobre una hoja tracemos una circunferencia con centro en O y radio r , después recortemos obteniendo el círculo α (Fig. 2.12).

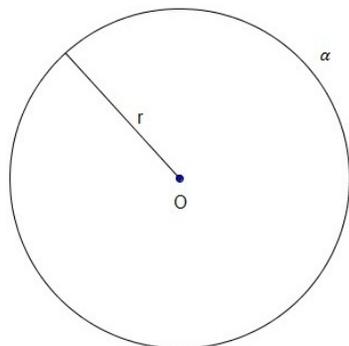


Fig. 2.12

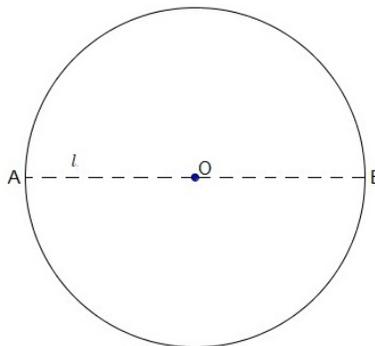


Fig. 2.13

Comencemos formando el plegado l (ver Fig. 2.13).

Para ello, tomemos un diámetro cualquiera del círculo α y pleguemos por dicho diámetro (Fig. 2.13).

Luego, llamemos A , B a los extremos de l , después superponemos A con B y así formamos el plegado l' , el cual pasa por O (Fig. 2.14); es decir, que l' también es un diámetro de α .

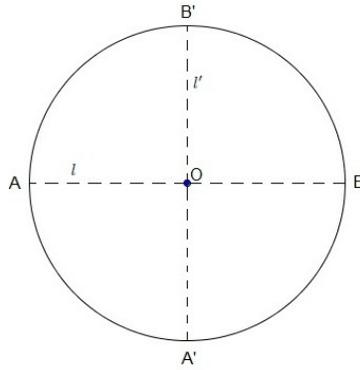


Fig. 2.14

De manera análoga, llamemos A' , B' a los extremos de l' .

Note que, al plegar sobre l coinciden A' y B' ; es decir, que A' es el simétrico de B' respecto a l y viceversa.

De aquí,

$$\Delta B'OB \cong \Delta BOA'$$

y

$$\Delta B'OA \cong \Delta AOA'.$$

Análogamente, al plegar sobre l' coinciden A y B ; es decir, que A es el simétrico de B respecto a l' y viceversa.

De modo que,

$$\Delta B'OB \cong \Delta B'OA'$$

y

$$\Delta A'OB \cong \Delta AOA'.$$

En consecuencia,

$$\angle B'OA = \angle AOA' = \angle A'OB = \angle B'OB.$$

De esta manera, cada ángulo mide 90° , es decir,

$$l \perp l'.$$

Por otro lado, al hacer coincidir A' con O hacemos aparecer el plegado l'' (Fig. 2.15).

Posteriormente, sean C , D los extremos de l'' y E el punto de intersección de l' con l'' .

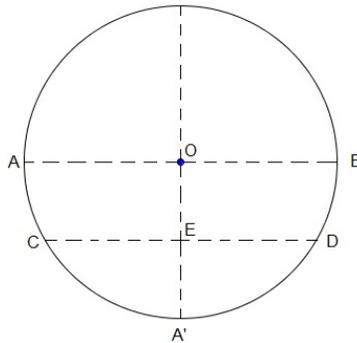


Fig. 2.15

Notar que, A' es el simétrico de O respecto a l'' .

De esta manera,

$$\overline{OE} = \overline{EA'}.$$

Ahora, note que al plegar primero por l'' y luego por l' , se tiene que

$$\angle CEA' = \angle CEO = \angle OED = \angle A'ED.$$

Por el criterio LAL [16, T. 1.31] de congruencia de triángulos, tenemos que

$$\triangle BEO \cong \triangle BEA'.$$

Por otra parte, como α es un círculo con centro en O y radio r , tenemos que

$$\overline{OA'} = \overline{OC}.$$

De aquí,

$$\overline{OA'} = \overline{OC} = \overline{CA'}.$$

Así, el triángulo COA' es equilátero.

Luego,

$$\angle COA' = 60^\circ.$$

En consecuencia,

$$\angle COD = 120^\circ.$$

Mediante un razonamiento análogo, podemos hacer esta misma construcción para el segmento CB' y el segmento $B'D$ (Fig. 2.16).

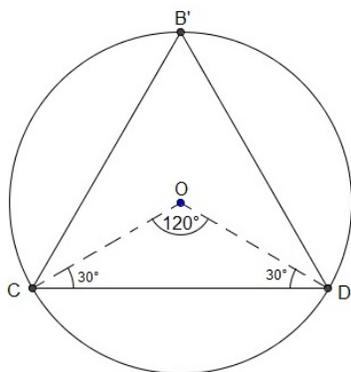


Fig. 2.16

Por lo tanto, el triángulo $CB'D$ es equilátero.

Esta es otra forma de construir una plantilla de 60° .

2.1.5. *Hexágono regular*

Esta construcción es muy sencilla, ya obtenido el triángulo equilátero, simplemente hay que tomar sus vértices y plegarlos a su centro y obtenemos el hexágono regular (Fig. 2.17).

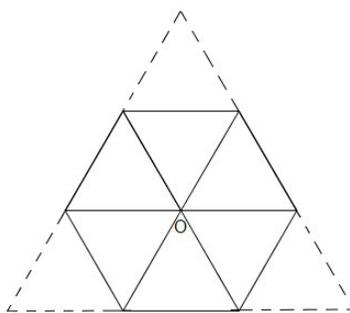


Fig. 2.17

2.1.6. *Pentágono regular*

Recordemos que un pentágono regular es un polígono de 5 lados iguales y la medida de sus ángulos interiores es de 108° . Además, el pentágono regular posee 5 ejes de simetría. Cada eje es la perpendicular al lado opuesto del vértice seleccionado y pasa por su punto medio, una **diagonal** es el segmento de recta que uno dos vértices no consecutivos de un polígono (Fig. 2.18).

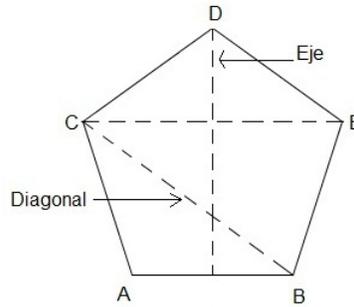


Fig. 2.18

Nota 2.1.3. Observe en la Figura que cada eje es perpendicular a una diagonal. (Es este caso, el eje que sale del vértice D es perpendicular a la diagonal CE).

Recordemos que un trapecio es *isósceles* si tiene los lados no paralelos de la misma medida. Por ejemplo, en la Figura 2.18, $ACEB$ es un trapecio isósceles.

Como los segmentos AC , EB y AB son lados del pentágono regular, se tiene que

$$\overline{AC} = \overline{EB} = \overline{AB}.$$

Además, las diagonales CB y CE son iguales.

En consecuencia, un trapecio es isósceles si y sólo si los lados no paralelos son iguales a la base menor y las diagonales a la base mayor.

Lo que sigue es una construcción simple e interesante del pentágono regular.

Sea T una banda de papel rectangular de ancho a y largo b (el largo debe ser lo suficientemente adecuado) (Fig. 2.19).

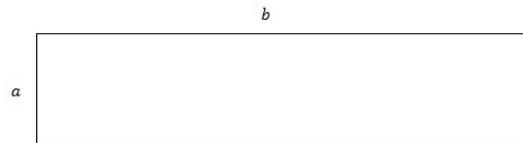


Fig. 2.19

Hagamos un nudo con T (con mucho cuidado) y aplastemos el nudo de manera que quede bien marcado. La silueta que obtenemos (si se realizó bien) es un pentágono regular (Fig. 2.20).

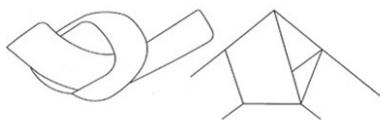


Fig. 2.20

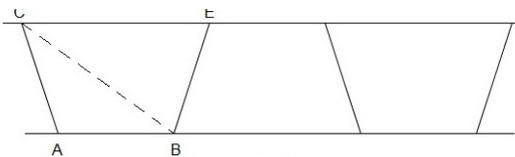


Fig. 2.21

Ahora, si desplegamos el nudo, la banda T queda marcada de una serie de trapecios isósceles (Fig. 2.21).

Como podemos observar, los plegados los hemos utilizado de una manera en la que las simetrías se vuelven elementales para la realización de la geometría de este tipo.

2.2. Las simetrías axiales y las rotaciones

Sea H un rectángulo (*una hoja de papel tamaño carta*) y sean M , M' dos puntos en H entonces, al ser convexo, la recta que une los puntos M y M' está contenida en H (Fig. 2.22) [16, pag. 6].

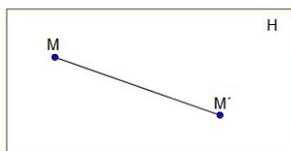


Fig. 2.22

Por otro lado, si pensamos en un plegado que haga corresponder M con M' , podemos ver que dicho plegado será la mediatriz D del segmento MM' . Este plegado D lo podemos obtener mediante un doblez de la hoja de papel de tal manera que hagamos coincidir M con M' (Fig. 2.23).

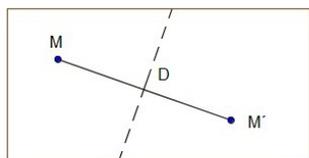


Fig. 2.23

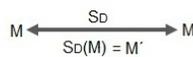


Fig. 2.24

Notemos que el plegado D transporta el punto M en M' y recíprocamente (Fig. 2.24), donde S_D es la función de doblar H con respecto al plegado D .

Además la mediatriz D es un eje de simetría y ésta define una simetría determinada por un punto M y su imagen M' . A esta simetría la llamaremos

simetría axial [Cap. 3, Sec. 3.1.2].

Ejemplo 2.2.1. La imagen de una recta bajo una simetría axial es una recta.

Supongamos que en una hoja de papel tenemos un punto M que se encuentra en una recta L la cual corta a un pliegue arbitrario D (Fig. 2.25).

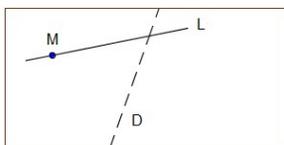


Fig. 2.25

Como tenemos el pliegue D , podemos hallar la imagen de M ; la cual llamaremos M' (Fig. 2.26). De este modo, D será la mediatriz del MM' . De aquí, podremos hacer esto para cualquier punto de L ; es decir, que D será la mediatriz de los puntos de L y sus imágenes. Ahora, como todos los puntos de L están en la misma recta, sus imágenes también estarán en una recta, la cual llamaremos L' . Por lo tanto, la imagen de una recta bajo una simetría axial es una recta.

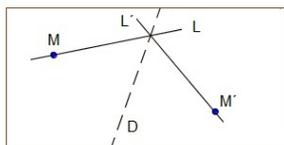


Fig. 2.26

Nota 2.2.1. El punto de intersección de L con D es invariante; es decir, que coincide con su imagen mediante el pliegue D .

Ejemplo 2.2.2. La imagen de una recta paralela bajo una simetría axial es una recta paralela (Fig. 2.27).

La manera de verlo es similar al ejemplo 2.2.1.

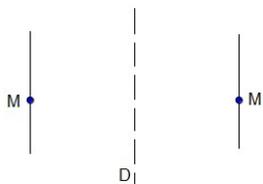


Fig. 2.27

Ejemplo 2.2.3. La imagen de una circunferencia bajo una simetría axial es una circunferencia (Fig. 2.28).

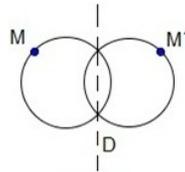


Fig. 2.28

El razonamiento es análogo al del ejemplo 2.2.1.

Nota 2.2.2. Los puntos de intersección de la circunferencia que contiene el punto M con el eje de simetría son invariantes.

Ejemplo 2.2.4. Dadas dos rectas concurrentes, existen dos plegados que hacen que las rectas se correspondan.

Sean L y L' dos rectas que son concurrentes en un punto O , A y D puntos en L y B , y C puntos en L' (Fig. 2.29).

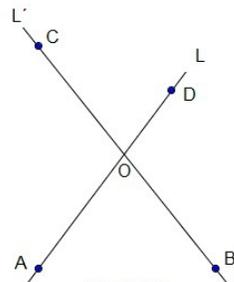


Fig. 2.29

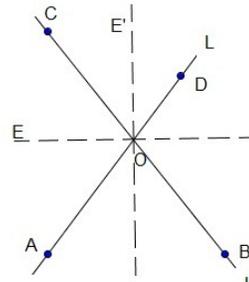


Fig. 2.30

Notemos que,

$$\angle COA = \angle DOB$$

y

$$\angle COD = \angle AOB$$

por ser ángulos opuestos por el vértice.

Si trazamos las respectivas bisectrices de los ángulos, entonces la bisectriz del ángulo COA con la bisectriz del ángulo DOB forman una recta E y la bisectriz del ángulo COD con la bisectriz del ángulo AOB forman una recta E' (Fig. 2.30).

Como E es bisectriz de los ángulos COA y DOB , tenemos que podemos hacer corresponder el segmento OA con el segmento CO y el segmento OD con

el segmento OB . Análogamente, podemos hacer corresponder el segmento CO con el segmento DO y el segmento AO con el segmento BO .

Por lo tanto, E y E' hacen que las rectas L y L' se correspondan.

Nota 2.2.3. No necesariamente los segmentos que hemos hecho coincidir son de la misma longitud.

2.2.1. Composición de dos simetrías axiales

Sean S_D y $S_{D'}$ dos simetrías axiales (Fig. 2.31). La composición de ellas es: $(S_D \circ S_{D'})$ (Fig. 2.32).

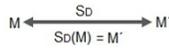


Fig. 2.31

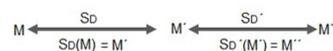
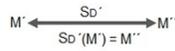


Fig. 2.32

Note que no hemos dicho nada sobre la composición; es decir, que no hemos dicho que es la composición. Por ejemplo, si es una transformación o una rotación, etcétera.

Con esto se presentan varios casos:

1. *Dos simetrías con el mismo eje D .*

Recordemos que S_D lleva M en M' y reciprocamente con respecto al eje D . De aquí, si tenemos dos simetrías con el mismo eje, entonces necesariamente tendríamos que, $M \rightarrow M' \rightarrow M$; es decir, $(S_D \circ S_D) = Id$.

2. *Los dos ejes D y D' son paralelos.*

Supongamos que tenemos dos simetrías axiales S_D y $S_{D'}$ con $D \parallel D'$ tal que $S_D(A) := A'$ y $S_{D'}(A') := A''$ y además; $S_D, S_{D'}$ tienen la misma dirección (Fig. 2.33).

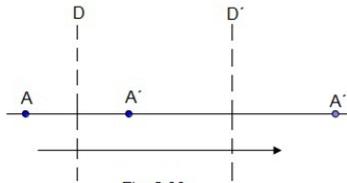


Fig. 2.33

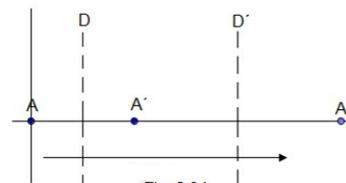


Fig. 2.34

Definamos x a la medida del segmento AA' ; y a la medida del segmento $A'A''$ y tracemos la paralela a D que pasa por A (Fig. 2.34).

De esto,

$$\overline{AA''} = \overline{AA'} + y.$$

En otras palabras $(S_D \circ S_{D'})$ es una traslación.

Finalmente, como D es mediatriz del segmento AA' y D' es mediatriz del segmento $A'A''$, se sigue que

$$\overline{DD'} = \frac{\overline{AA''}}{2}.$$

Nota 2.2.4. Si aplicamos $S_{D'}$ primero y después S_D , entonces la traslación se dirige de D' a D ; es decir, que en general $(S_D \circ S_{D'}) \neq (S_{D'} \circ S_D)$.

3. Los ejes D y D' son concurrentes

Sean S_D y $S_{D'}$ dos simetrías axiales, con D y D' concurrentes en O tales que $S_D(M) := M'$ y $S_{D'}(M') := M''$ (Fig. 2.35).

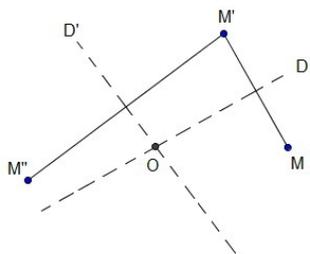


Fig. 2.35

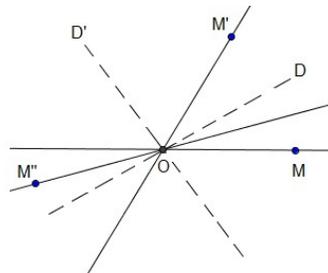


Fig. 2.36

Tracemos las rectas que pasan por los puntos M , M' , M'' con el punto O respectivamente (Fig. 2.36).

Por el ejemplo 2.2.4, D es bisectriz del ángulo MOM' . Análogamente, D' es bisectriz del ángulo $M'OM''$. Posteriormente, si llamamos α al ángulo que forma el eje D con la recta que contiene los puntos O , y M y β al ángulo que forma el eje D' con la recta que contiene los puntos O , y M' , tenemos que

$$\angle MOM'' = 2(\alpha + \beta).$$

Por otro lado, $\alpha + \beta$ es igual al ángulo formado por D y D' en O .

Por lo tanto, $(S_D \circ S_{D'})$ es una rotación de centro O , cuyo ángulo es el doble del ángulo formado por D y D' en O .

Nota 2.2.5. No es equivalente componer S_D y luego $S_{D'}$ o bien $S_{D'}$ y luego S_D . Ya que esta última rotación es recíproca de la primera.

En resumen, cuando los ejes son paralelos: el resultado es una traslación. Cuando los ejes son concurrentes: la composición es una rotación.

Es importante mencionar que lo hecho en estos tres casos anteriores, además de ayudarnos a construir traslaciones y rotaciones nos sirve para poder darnos una idea de como descomponer dichos desplazamientos.

- *Es posible descomponer una traslación en dos simetrías axiales cuyos ejes sean perpendiculares a la dirección de la traslación.*
- *Es posible descomponer una rotación de centro O en dos simetrías axiales cuyos ejes pasen por O .*

Pregunta 2.2.1. ¿Qué sucede cuando componemos dos desplazamientos como las rotaciones y las traslaciones?

Hay tres casos a considerar: traslación y luego traslación, traslación y luego rotación y rotación y luego rotación. *La descomposición en simetrías facilita la resolución de estos casos.*

1. Traslación y luego traslación

Sean T, T' dos traslaciones tales que $T(\overline{MN}) := \overline{M'N'}$ y $T'(\overline{M'N'}) := \overline{M''N''}$ (Fig. 2.37).

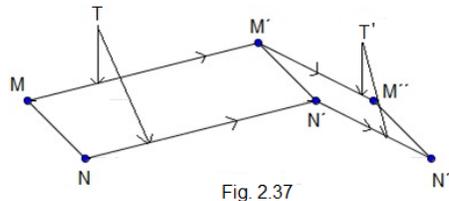


Fig. 2.37

Sean $S_D, S_{D'}$ y $S_{E'}, S_{E''}$ las simetrías axiales que descomponen respectivamente a T y T' (Fig. 2.38).

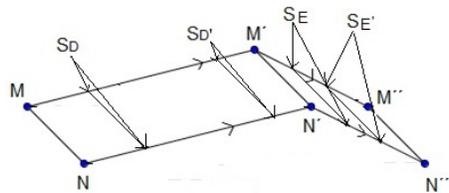


Fig. 2.38

Por otro lado, como D es paralelo al segmento $M'N'$ y el segmento $M'N'$ es paralelo a E , tenemos que

$$D \parallel E.$$

De aquí, $(T \circ T')$ podemos descomponerlo mediante dos simetrías axiales S_D y S_E con ejes perpendiculares a la dirección de la traslación; es decir, $(T \circ T')$ es una traslación (Fig. 2.39).

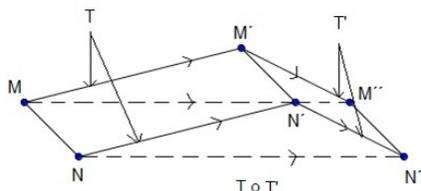


Fig. 2.39

2. Traslación y luego rotación

Sea T una traslación tal que $T(M) := M'$ y R una rotación con centro O tal que $R(M') := M''$. Como podemos descomponer a R en dos simetrías axiales cuyos ejes pasen por el centro de rotación O y como podemos descomponer a T en dos simetrías axiales cuyos ejes sean perpendiculares a la dirección de la traslación. Es posible optar porque uno de los ejes de las simetrías que componen a T pase por O , y que uno de los ejes que componen a R también sea este eje; es decir, que T y R tienen un eje en común.

Dicho esto, sean S_D , y $S_{D'}$ las simetrías axiales que descomponen a T con $D \parallel D'$ y $S_{D''}$ las simetrías axiales que descomponen a R con D' concurrente a D'' en O . Notemos que el eje que comparten T y R es D' . Llamemos a al ángulo formado por los ejes D' y D'' en O (Fig. 2.40).

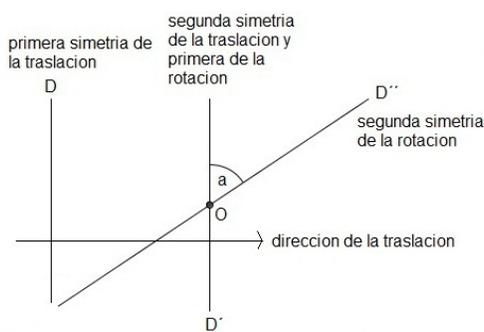


Fig. 2.40

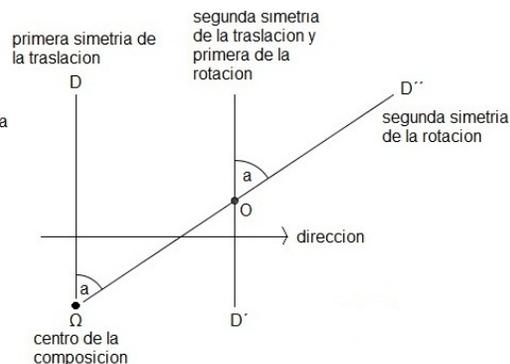


Fig. 2.41

Como $D \parallel D'$ y D' es concurrente a D'' en O . Si prolongamos a D'' hasta concurrir con D en Ω , entonces el ángulo formado por los ejes D y D'' en

Ω es igual a a . Por lo tanto, $(T \circ R)$ es una rotación de ángulo a y centro en Ω (Fig. 2.41).

3. Rotación y luego rotación

Sean R y R' dos rotaciones con centros O y O' respectivamente. Podemos optar porque el eje de la segunda simetría que descompone a R también pase por O' , y que la primera simetría que descompone a R' sea la segunda simetría que descompone a R ; es decir, R y R' tienen en común una simetría.

Dicho esto, sean S_D la primera simetría que descompone a R y $S_{D'}$ la segunda simetría que descompone a R . También $S_{D'}$ es la primera simetría que descompone a R' y $S_{D''}$ la segunda simetría que descompone a R' . Notemos que D y D' son concurrentes en O y que D' y D'' son concurrentes en O' . Ahora, llamemos a al ángulo que forman los ejes D y D' en O y b al ángulo que forman los ejes D' y D'' en O' (Fig. 2.42).

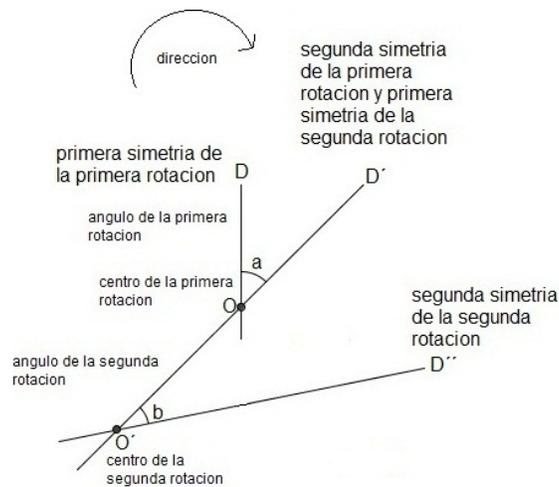


Fig. 2.42

Note que, queremos la composición de R con R' ; es decir, necesitamos ver la forma de componer la simetría de eje D con la simetría de eje D'' .

De este modo, Llamemos Ω al punto de intersección del eje D con el eje D' . Así, hemos formado el triángulo $OO'\Omega$.

Por el teorema del ángulo exterior [6, p. 25], tenemos que el ángulo formado por los ejes D y D'' en Ω es $a + b$.

Por lo tanto, $(R \circ R')$ es una rotación con centro Ω y cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las dos rotaciones (Fig. 2.43).

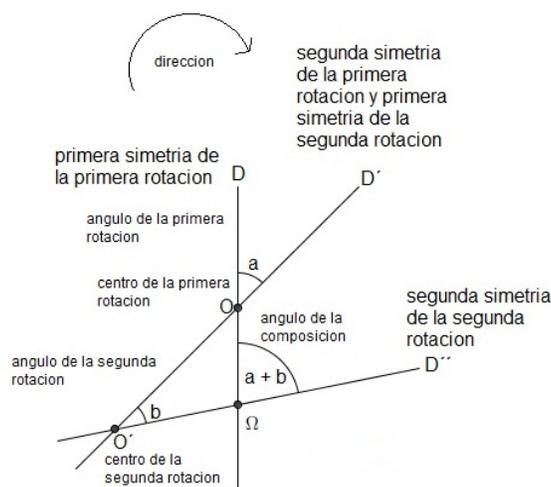


Fig. 2.43

Nota 2.2.6. Las rotaciones pueden ser en cualquier dirección.

Nota 2.2.7. Como las rotaciones pueden ser en cualquier dirección, cuando $a + b = 0$, los ejes D y D'' son paralelos; es decir, que la composición es una traslación.

Nota 2.2.8. Estas composiciones no necesariamente son conmutativas.

En conclusión, *una sucesión de un número par de simetrías axiales podemos reducirla a dos simetrías axiales.*

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

Los plegados relativos al rectángulo, al cuadrado e incluso al triángulo equilátero pueden abordarse desde la primaria. En este caso, hacemos observar propiedades, proporcionamos procedimientos (por ejemplo, para obtener una plantilla), sin pasar a definir un vocabulario preciso, y menos aún de justificar un procedimiento. La construcción a partir de un círculo (Fig. 2.12) ofrece la oportunidad de construir poliedros de caras triangulares en los cuales los segmentos circulares sirven de pestañas [Cap. 10].

Lo que buscamos aquí es la utilización práctica de los plegados.

Es algo distinto cuando se trata de la aplicación a las áreas. Ahí se trata de establecer la fórmula a partir de una representación visual que facilita su memorización. Para que más adelante permita reconstruirla.

Finalmente, las composiciones de plegados [Cap. 2, Sec. 2.2.1] que permiten aproximar resultados importantes sobre las simetrías axiales y los desplazamientos del plano, pueden realizarse en todo el trancurso del bachillerato.

Cabe mencionar que, la manera del plegado de una hoja permite tratar de una manera elemental resultados de gran generalidad que se obtienen de la comparación de simetrías. Pueden verse tempranamente estas cuestiones de manera puramente empírica, aunque no figuren oficialmente en los programas de bachillerato. En la primaria y al comienzo del bachillerato, sólo se trata de acumular una experiencia que luego enriquecerá la intuición de las transformaciones geométricas. Esta cuestión la analizamos en [Cap. 2, sec. 2.2], para desarrollarla con medios un poco más precisos para hacer captar su alcance.

Capítulo 3

FIGURAS POLIGONALES

3.1. Cuadriláteros

Las figuras poligonales son una parte importante en la geometría elemental porque siendo un poco observador, podremos notar que gran parte de la estructura de las cosas que nos rodea, tienen como base algún polígono.

Diremos que un conjunto C de propiedades **caracteriza** a una figura si C contiene a las propiedades mínimas que definen a dicha figura. Siendo todas estas propiedades indispensables.

Podemos comenzar, como se muestra a continuación, por buscar para cada cuadrilátero (*polígono de cuatro lados*) cuáles son, entre éstas, todas sus propiedades y poder dar una clasificación de los mismos. Por el momento sólo consideramos los cuadriláteros convexos [16, p. 6].

Definición 3.1.1. Sea C_1 un cuadrilátero con vértices A, B, C, D ; diremos que C_1 es un *cuadrado* si sus cuatro lados son iguales y sus ángulos interiores son iguales y de medida 90° .

Definición 3.1.2. Sea S un cuadrilátero con vértices A, B, C, D ; diremos que S es un *rombo* si sus cuatro lados son iguales

Definición 3.1.3. Sea R un cuadrilátero con vértices A, B, C, D ; diremos que R es un *rectángulo* si sus cuatro ángulos interiores son iguales y de medida 90° .

Definición 3.1.4. Sea P un cuadrilátero con vértices A, B, C, D ; diremos que P es un *paralelogramo* si sus lados son paralelos 2 a 2.

Definición 3.1.5. Sea T un cuadrilátero con vértices A, B, C, D ; diremos que T es un *trapecio* si tiene dos lados paralelos.

Observación 3.1.6. *Los cuadriláteros tienen la propiedad de que la suma de sus ángulos interiores es 360° .*

Teorema 3.1.1. Si C es un cuadrado con vértices A, B, D, E , entonces C es un rombo.

Demostración. Por hipótesis C es un cuadrado. En consecuencia, los lados de C son iguales. Por lo tanto C es un rombo. \square

Teorema 3.1.2. Si S es un rombo con vértices A, B, C, D , entonces las diagonales de S son perpendiculares.

Demostración. Sea S un rombo con vértices A, B, C, D (Fig. 3.1).

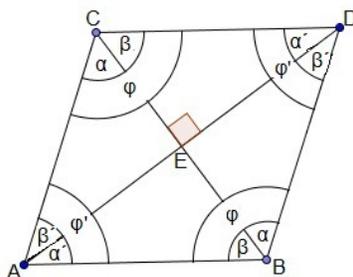


Fig. 3.1

Sean $\overline{AD}, \overline{CB}$ las diagonales de S .

Veamos que, $\overline{AD} \perp \overline{CB}$.

Como S es un rombo, se tiene que $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AC}$. Luego, por el criterio LLL de congruencia de triángulos [16, T. 1.36], se sigue que

$$\triangle CAB \cong \triangle CDB$$

y

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

En consecuencia,

$$\angle ACB = \angle CBD$$

$$\angle CAB = \angle CDB$$

$$\angle ABC = \angle BCD$$

y

$$\angle DAB = \angle ADC$$

$$\angle ADB = \angle CAD$$

$$\angle ACD = \angle ABD.$$

Denotemos $\alpha := \angle ACB, \varphi := \angle CAB, \beta := \angle ABC, \alpha' := \angle DAB, \varphi' := \angle ADB$ y $\beta' := \angle ACD$.

Notemos que,

$$\varphi = \alpha + \beta$$

y

$$\varphi' = \alpha' + \beta'.$$

Por la Observación 3.1.6 se sabe que,

$$2\varphi + 2\varphi' = 360^\circ.$$

Así,

$$\varphi + \varphi' = 180^\circ. \quad (3.1)$$

Note que,

$$\alpha' + \beta + \angle E = 180^\circ. \quad (3.2)$$

Similarmente,

$$\alpha + \beta' + \angle E = 180^\circ. \quad (3.3)$$

Ahora, igualando (3.2) y (3.3), se tiene que

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta.$$

Por (3.1), se sigue que

$$\alpha + \beta' + \alpha' + \beta = 180^\circ. \quad (3.4)$$

Por (3.4),

$$2\alpha + 2\beta' = 180^\circ.$$

Así, $\alpha + \beta' = 90^\circ$. Luego, por (3.2), $\angle E = 90^\circ$.

Por lo tanto, $\overline{AD} \perp \overline{CB}$. □

Recordemos que, dadas dos rectas r y s que corten a una recta t en dos puntos P y Q . Diremos r y s son paralelas si y sólo si los ángulos alternos internos que determinan son iguales (Fig. 3.2) [16, p. 51].

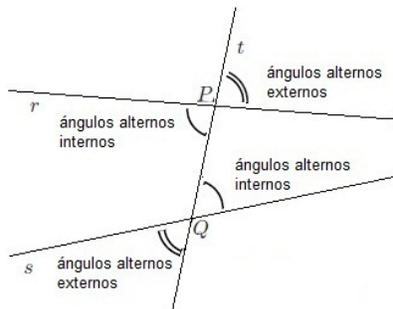
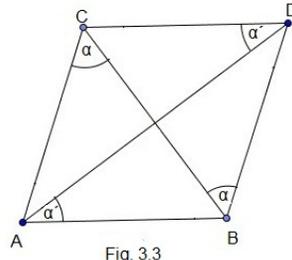


Fig. 3.2

Teorema 3.1.3. Si S es un rombo con vértices A, B, C, D , entonces S es un paralelogramo

Demostración. Sea S un rombo con vértices A, B, C, D (Fig. 3.3).



Veamos que, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Notemos que, por construcción \overline{AD} es secante de los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} .

Por otro lado, por el criterio LLL de congruencia de triángulos, se sigue que

$$\triangle ACD \cong \triangle ABD.$$

En consecuencia,

$$\angle DAB = \angle ADC.$$

Definimos $\alpha := \angle DAB$.

Note que, α es un ángulo alterno interno.

Por lo tanto, $\overline{AD} \parallel \overline{CD}$.

Análogamente,

$$\angle ACB = \angle CBD.$$

Definimos $\alpha' := \angle ACB$.

De aquí, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

Por lo tanto, S es un paralelogramo. □

Teorema 3.1.4. Si P es un paralelogramo con vértices A, B, C, D , entonces sus lados paralelos son iguales 2 a 2.

Demostración. Sea P un paralelogramo con vértices A, B, C, D , y supongamos que \overline{AD} y \overline{CB} son sus diagonales.

Veamos que, $\overline{AC} = \overline{BD}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Por comodidad, tomemos como referencia el segmento AD .

Ahora, como el segmento AD es diagonal de P , tenemos que P quedó dividido en los triángulos ACD y ABD , los cuales tienen en común el segmento AD como lado.

Por otra parte, por hipótesis P es un paralelogramo.

En consecuencia, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Así, $\angle DAB = \angle ADC$ y $\angle CAD = \angle ADB$.

Luego, por el criterio ALA de congruencia de triángulos [16, T. 1.32], se tiene que

$$\triangle ACD \cong \triangle ABD.$$

Por lo tanto,

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

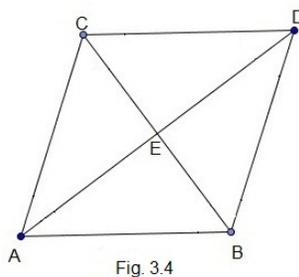
y

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

□

Teorema 3.1.5. Si P es un paralelogramo, entonces sus diagonales se intersecan en su punto medio.

Demostración. Sea P un paralelogramo con vértices A , B , C , D y los segmentos AD y CB las diagonales de P . Llamemos E al punto de intersección de las diagonales de P (Fig. 3.4).



Veamos que, E es el punto medio de las diagonales AD y CB .

Por hipótesis, P es un paralelogramo. De aquí

$$\angle DAB = \angle ADC$$

$$\angle CAD = \angle ADB$$

y

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle BCD \\ \angle ACB &= \angle CBD.\end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 3.1.4, tenemos que

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

y

$$\overline{AC} = \overline{BD}.$$

De esta manera, por el criterio ALA de congruencia de triángulos [16, T. 1.32], se tiene que

$$\triangle CED \cong \triangle AEB.$$

Por consiguiente,

$$\overline{AE} = \overline{ED}$$

y

$$\overline{CE} = \overline{EB}.$$

Así,

$$\overline{AD} = 2(\overline{ED})$$

y

$$\overline{CB} = 2(\overline{EC}).$$

Por lo tanto, E es punto medio de los segmentos AD y CB . □

Teorema 3.1.6. Si P es un paralelogramo, entonces P es un trapecio.

Demostración. Por la Definición 3.1.4, P tiene lados paralelos dos a dos. Luego, para ser trapecio basta con que tenga dos lados paralelos [Def. 3.1.5]. Por lo tanto, P es un trapecio. □

Teorema 3.1.7. Si C es un cuadrado, entonces C es un rectángulo.

Demostración. Por la Definición 3.1.1, C tiene los cuatro ángulos interiores iguales y de medida 90° . Luego, para ser rectángulo basta con que tenga los cuatro ángulos interiores de medida 90° [Def. 3.1.3]. Por lo tanto C_1 es un rectángulo. □

Teorema 3.1.8. Si R es un rectángulo con vértices A, B, C, D , entonces sus diagonales son iguales.

Demostración. Sea R un rectángulo con vértices A, B, C, D y supongamos que $\overline{AD}, \overline{CB}$ son sus diagonales.

Veamos que, $\overline{AD} = \overline{CB}$.

Dado que R es un rectángulo, tenemos que $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

En consecuencia,

$$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

y

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

Notemos que, \overline{AD} , \overline{CB} son secantes de \overline{AB} y \overline{CD} .

Así, $\angle ADC = \angle DAB$ y $\angle ACB = \angle CBD$.

Por lo que $\triangle ACD \cong \triangle ABD$. De aquí

$$\overline{AC} = \overline{BD} \tag{3.5}$$

y

$$\overline{AB} = \overline{CD}. \tag{3.6}$$

Por el teorema de Pitágoras [Cap. 8, Teo. 8.0.1], se tiene que

$$\overline{AD} = \sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{BD})^2} \tag{3.7}$$

y

$$\overline{CD} = \sqrt{(\overline{CD})^2 + (\overline{AC})^2}. \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.5) y (3.6) en (3.7) ó (3.8),

$$\sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{BD})^2} = \sqrt{(\overline{CD})^2 + (\overline{AC})^2}.$$

Por lo tanto, $\overline{AD} = \overline{CB}$. □

Teorema 3.1.9. Si R es un rectángulo, entonces R es un paralelogramo.

Demostración. Por la Definición 3.1.3, R tiene los cuatro ángulos interiores de medida 90° . En consecuencia, R tiene lados paralelos dos a dos. Por lo tanto, R es un paralelogramo. □

Recordemos un tipo importante de simetría ó reflexión, es la simetría respecto a un punto, la cual es comúnmente llamada *simetría central*.

3.1.1. *Simetría central*

Dado un punto fijo O , se llama *simetría (reflexión) respecto al punto O* a aquella transformación isométrica (movimiento que preserva las distancias) que lleva cada punto A del plano a un punto B del mismo plano, de modo que la recta AB tiene a O como punto medio (Fig. 3.5). Se dice que un cuerpo es *simétrico respecto a un centro O* si el simétrico (homólogo) de cualquier punto del cuerpo respecto a O pertenece también al cuerpo (Fig. 3.6) [1, p. 312, tomo III].

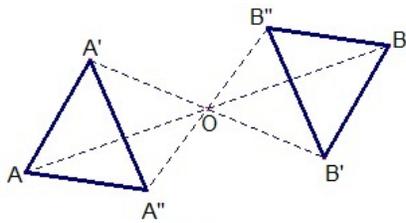


Fig. 3.5

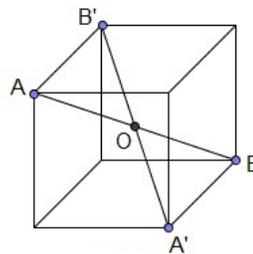


Fig. 3.6

Nota 3.1.1. En general, llamaremos al punto O centro de simetría, y a los puntos A, B correspondientes u homólogos respecto a O .

Teorema 3.1.10. Si P es un paralelogramo con vértices A, B, C, D , entonces P tiene un centro de simetría.

Demostración. Sea P un paralelogramo con vértices A, B, C, D y supongamos que $\overline{AD}, \overline{CB}$ son sus diagonales.

Veamos que, existe O en P tal que para cualquier punto A en P , se tiene que el homólogo de A con respecto a O esta en P .

Dado que P es un paralelogramo, por el Teorema 3.1.5, se sigue que $\overline{AD}, \overline{CB}$ se cruzan en su punto medio.

Llamemos E al punto medio donde se cruzan las diagonales AD y CB ; es decir, E es punto medio del segmento AD y también punto medio del segmento CB .

En consecuencia, los puntos A, D son homólogos respecto al punto E y los puntos C, B son homólogos respecto a punto E (Fig. 3.7).

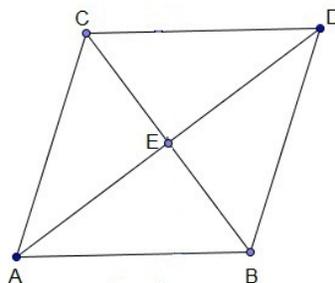


Fig. 3.7

Definimos $O := E$ y tomemos F en P con $F \neq A, B, C, D$ y E .

Caso 1: cuando F esta en \overline{AD} ó \overline{CB} .

Supongamos que F esta en \overline{AD} . Como $F \neq E$, se tiene que F esta en \overline{AE} ó \overline{ED} .

Propongamos F en \overline{AE} , luego $\overline{AE} < \overline{FE}$.

Por lo tanto, el simétrico de F respecto a E esta en P .

Análogamente con los supuestos faltantes.

Caso 2: cuando P esta en \overline{AB} ó \overline{BD} ó \overline{CD} ó \overline{AC} .

Supongamos que F esta en \overline{AB} .

Puesto que P es un paralelogramo, tenemos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Por lo tanto, el simétrico de F esta en P (Fig. 3.8).

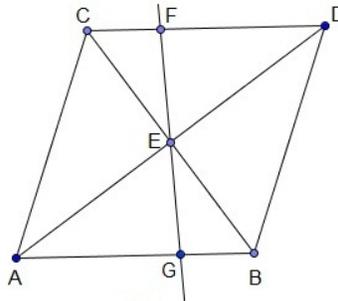


Fig. 3.8

Análogamente con los demás supuestos.

Caso 3: cuando P está en el interior de P .

Este caso se puede reducir al caso 2, prolongando el segmento FE en el extremo F hasta intersectar a cualquiera de los extremos de P . \square

Recordemos otro tipo importante de simetría ó reflexión, es la simetría respecto a una recta, la cual es comúnmente llamada *simetría axial ó especular*.

3.1.2. Simetría axial

Dada una recta fija l , Se llama *simetría axial* con respecto a la recta l a aquella transformación isométrica (movimiento del plano que preserva distancias) tal que, dados dos puntos A, B del plano, estos puntos son homólogos respecto a la recta l , y dicha recta corta perpendicularmente al segmento AB en su punto medio (Fig. 3.9). Se dice que un cuerpo es simétrico respecto a una recta l o que tiene a la recta l como eje de simetría si para cada punto del cuerpo, su simétrico pertenece también al cuerpo (Fig. 3.10) [1, p. 312, tomo III].

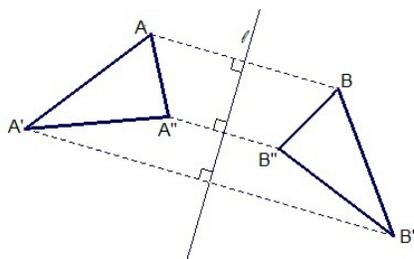


Fig. 3.9

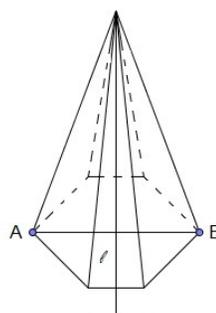


Fig. 3.10

Teorema 3.1.11. Si R es un rectángulo con vértices A, B, C, D , entonces R tiene dos ejes de simetría.

Demostración. Sea R es un rectángulo con vértices A, B, C, D y supongamos que $\overline{AD}, \overline{CB}$ son sus diagonales.

Veamos que, existen l, l' rectas tales que P es simétrico respecto a l y l' .

Llamemos F, G, H, I a los puntos medios de los segmentos AB, BD, CD, AC , respectivamente.

Definimos $l := \overline{IG}$ y $l' := \overline{FH}$ (Fig. 3.11).

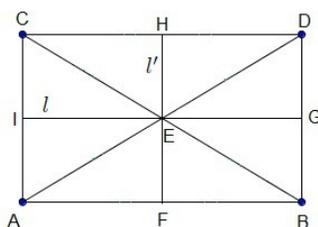


Fig. 3.11

Notemos que l es paralelo al \overline{AB} y al \overline{CD} porque l siempre mantiene la misma distancia respecto a estos dos segmentos. Análogamente l' es paralelo al \overline{AC} y al \overline{BD} .

Ahora, tomemos J en P . Como, dado un punto fuera de una recta, existe una y sólo una paralela a dicha recta que pasa ese punto [16, p. 49, 50].

Tenemos que por J pasa una y sólo una paralela al \overline{AB} y al \overline{CD} . De la misma manera por J pasa una y sólo una paralela al \overline{AC} y al \overline{BD} .

Así, el simétrico de J , digamos J' , estará en P y además l y l' cortarán al segmento JJ' en su punto medio.

Por lo tanto, P es simétrico respecto a l y l' . □

Teorema 3.1.12. Si S es un rombo con vértices A, B, C, D , entonces S tiene dos ejes de simetría.

Demostración. Sea S es un rombo con vértices A, B, C, D y $\overline{AD}, \overline{CB}$ son sus diagonales.

Veamos que, existen rectas l, l' tales que S es simétrico respecto a l y l' .

Definimos $l := \overline{AD}$ y $l' := \overline{CB}$.

Tomando el punto F en S .

Note que, si el punto F está en el \overline{AD} ó \overline{CB} no hay nada que demostrar.

Supongamos que el punto F no está en las diagonales de S . Así, podemos tomar la paralela a cualquiera de las diagonales que pase por F .

Luego, por el Teorema 3.1.2, $\overline{AD} \perp \overline{CB}$.

En consecuencia, la paralela a cualquiera de las diagonales que pase por F , será perpendicular a la otra diagonal (Fig. 3.12).

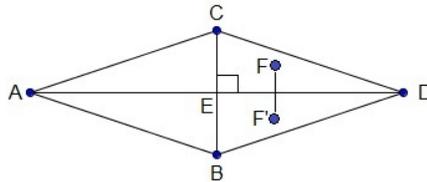


Fig. 3.12

De aquí, el simétrico del punto F respecto a las rectas l y l' estará en S .

Por lo tanto, S es simétrico respecto a l y l' . □

Teorema 3.1.13. Si C es un cuadrilátero con dos ejes de simetría, entonces C tiene un centro de simetría.

Demostración. Sea C un cuadrilátero con dos ejes de simetría.

Llamemos l y l' a los ejes de C .

Veamos que, existe un punto O en C tal que para cualquier punto A en C , se tiene que el simétrico del punto A con respecto al punto O esta en C .

Notemos que los ejes l y l' se intersectan en un punto que llamaremos E .

Así, definimos $O := E$. Luego, tomamos A en C .

Note que si el punto A esta en el eje l ó en el eje l' no hay nada que demostrar.

Ahora, como l y l' son ejes de simetría de C , podemos tomar el simétrico de A con respecto de cualquiera de los dos ejes.

Por ejemplo, tomemos el simétrico de A con respecto de l y llamemosle A' . Luego, tomemos el simétrico de A' con respecto de l' y nombremoslo A'' . De esta manera, hemos formado el triángulo rectángulo $AA'A''$ (Fig. 3.13).

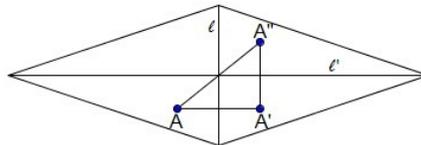
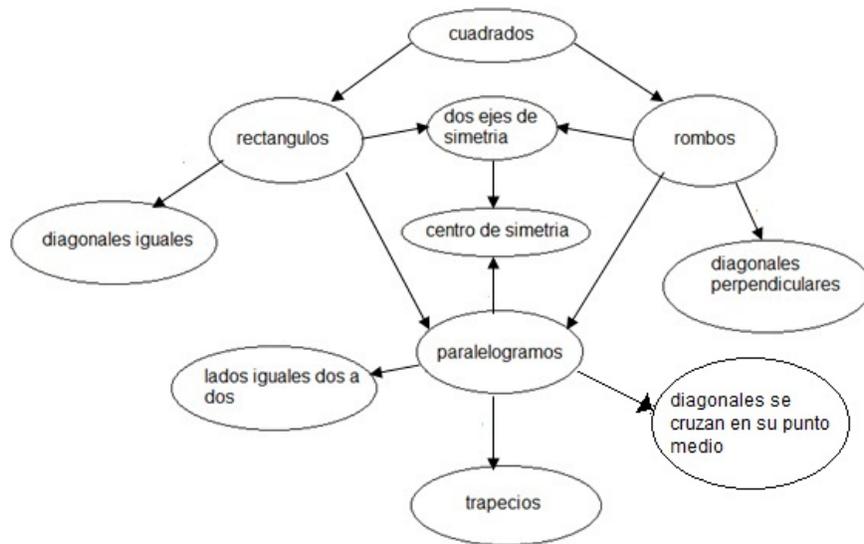


Fig. 3.13

En consecuencia, el simétrico de A respecto a O es encuentra en C ; a saber, A'' .

Por lo tanto, C tiene un centro de simetría. □

Con lo hecho hasta ahora, hemos obtenido el siguiente esquema de los cuadriláteros, donde la flecha \rightarrow significa implica.



Ahora, veamos que los recíprocos no se cumplen.

- No todo rectángulo es un cuadrado.
Basta tomar un rectángulo que tenga base 3 y altura 1. Evidentemente no todos los lados del rectángulo son iguales.
- No todo rombo es un cuadrado.
Tomemos un rombo de lado 3, y que uno de sus ángulos sea de 120° . Claramente, dicho rombo no podrá tener sus cuatro ángulos interiores de medida 90° .
- No todo cuadrilátero con dos ejes de simetría es un rectángulo.
Basta tomar un rombo [Teo. 3.1.12].
- No todo cuadrilátero con dos ejes de simetría es un rombo.
Basta tomar un rectángulo [Teo. 3.1.11].
- No todo paralelogramo es un rectángulo.
Basta con tomar un rombo.
- No todo paralelogramo es un rombo.
Basta con tomar un rectángulo.
- No todo cuadrilátero con diagonales iguales es un rectángulo.
Sea $\overline{AD} = \overline{CD} = 6$ tal que están cruzados de la siguiente manera, (Fig. 3.14).

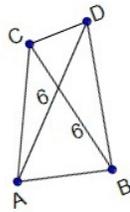


Fig. 3.14

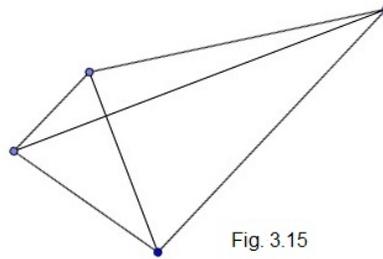


Fig. 3.15

- No todo cuadrilátero es un rombo
Observe la Figura 3.15.
- No todo cuadrilátero con centro de simetría tiene dos ejes de simetría.
Tomemos un paralelogramo que no sea rectángulo ni rombo (*romboide*).
Por el Teorema 3.1.10, tiene un centro de simetría, pero no tiene ejes de simetría.
- No todo cuadrilátero con centro de simetría es un paralelogramo.
Observe la Figura 3.16.

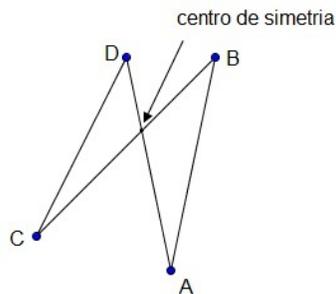


Fig. 3.16

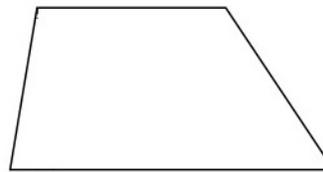


Fig. 3.17

- No todo cuadrilátero con lados iguales dos a dos es un paralelogramo.
Darle valores apropiados a la Figura 3.16.
- No todo trapecio es un paralelogramo.
Para que un cuadrilátero sea un trapecio sólo basta que el cuadrilátero tenga dos lados paralelos. Luego, la Figura 3.17, no es un paralelogramo.

Con esto, podemos obtener el siguiente diagrama de conjuntos que nos clasifica de una manera a los cuadriláteros (Fig. 3.18).

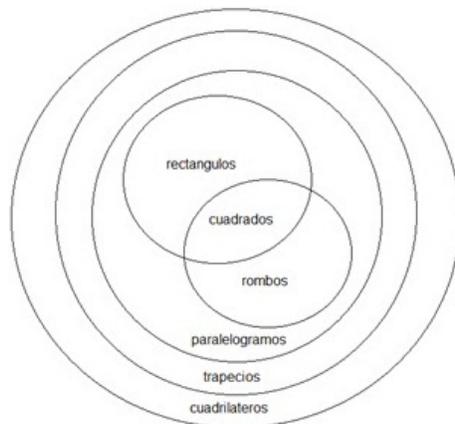


Fig. 3.18

3.2. *Pentágonos*

En los plegados [Cap. 2, Sec. 2.1.6], se dio una manera de construir un pentágono regular mediante una cinta. A continuación, mostraremos y justificaremos otras construcciones exactas que permiten obtener un pentágono regular.

1. En una circunferencia de centro O , trazamos dos diámetros perpendiculares y llamemos A , A' , B , B' a los extremos de esos diámetros (Fig. 3.19).

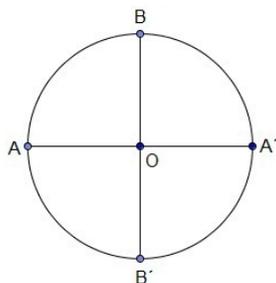


Fig. 3.19

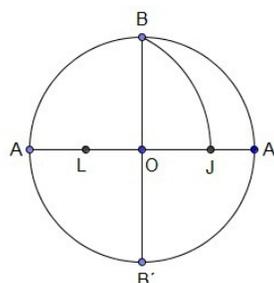


Fig. 3.20

Tomemos el punto medio L del segmento OA como centro, y con radio LB trazamos el arco que pasa por B y que corta al $\overline{AA'}$ en J (Fig. 3.20).

Ahora, la mediatriz del \overline{OJ} corta a la circunferencia en M . Así podemos unir M con A' , obteniendo el segmento MA' (Fig. 3.21).

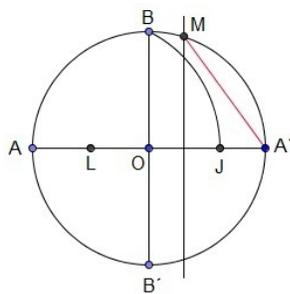


Fig. 3.21

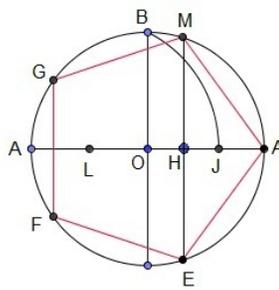


Fig. 3.22

Tomando como base el $\overline{MA'}$, podemos construir un pentágono con vértices M, A', E, F, G el cual justificaremos que es regular (Fig. 3.22).

Justificación.

Para que este pentágono sea regular, sus ángulos interiores deben ser de la misma medida y sus lados también.

Primero calculemos cual es el valor del ángulo $A'OM$.

Llamemos $\varphi := \angle A'OM$. Luego, notemos que el radio de la circunferencia coincide con el $\overline{OA'}$.

Definimos $R := \overline{OA'}$.

Como L es punto medio, se sigue que $\overline{LO} = \frac{R}{2}$.

Ahora, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\overline{LO}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{LB}^2.$$

En consecuencia,

$$\overline{LB} = \frac{\sqrt{5}}{2}R.$$

Ahora, como \overline{LB} y \overline{LJ} son radios de un arco de circunferencia podemos decir que, $\overline{LB} = \overline{LJ}$.

Así, $\overline{OJ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

De aquí,

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}R.$$

Notemos que $\overline{OH} = R \cos \varphi$.

Así que,

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 72^\circ.$$

Ahora, pasemos a saber cuanto mide el $\overline{MA'}$.

Por el teorema de Pitágoras, se obtiene que,

$$\overline{HM}^2 = \overline{MA'}^2 - \overline{HA'}^2 \quad (3.9)$$

y

$$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.10),

$$\overline{MA'}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2 + \overline{HA'}^2.$$

Note que, $\overline{OA'} = \overline{OM}$.

Con esto, $\overline{MA'} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$.

En base a un razonamiento análogo se puede ver que los otros cuatro lados del pentágono miden lo mismo y también sus ángulos centrales.

Por lo tanto, el pentágono es regular.

2. En una circunferencia de centro O y radio r , tracemos dos diámetros perpendiculares y llamemos A, A', B, B' a los extremos de dichos diámetros (Fig. 3.23).

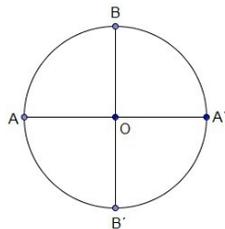


Fig. 3.23

Definamos J el punto medio del segmento OA' y tracemos una circunferencia con centro en J y radio $\frac{r}{2}$ (Fig. 3.24).

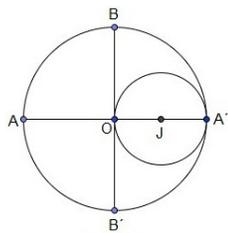


Fig. 24

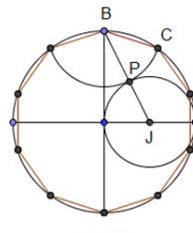


Fig. 25

Ahora, tracemos el segmento BJ , el cual corta a la circunferencia de radio $\frac{R}{2}$ en el punto P . Posteriormente tomando como centro B tracemos un arco de circunferencia que pase por P . Luego dicho arco, cortará a la circunferencia de radio r en el punto C . Finalmente, unamos el punto B con el punto C , obteniendo el segmento BC . Usando el \overline{BC} como base, podemos obtener un decágono, el cual justificaremos que es regular (Fig. 3.25).

Justificación.

Primero mostraremos la forma de calcular cuanto mide cada lado de este decágono.

Note que $\overline{OJ} = \overline{PJ}$ por ser radios de la circunferencia con centro en J y radio $\frac{r}{2}$, y $\overline{BC} = \overline{BP}$ por ser radios del arco de circunferencia con centro en B .

Puesto que los diámetros BB' y AA' son perpendiculares, tenemos que el ángulo en O es de 90° . Luego, podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo BOJ .

En consecuencia,

$$\overline{BJ} = \frac{\sqrt{5}}{2}r.$$

Por otro lado, $\overline{BJ} = \overline{BP} + \overline{PJ}$.

De aquí,

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

Como $\overline{BC} = \overline{BP}$, se sigue que $\overline{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$.

De manera análoga se puede calcular los demás lados del decágono, los cuales serán iguales.

Sólo falta mostrar cuanto mide sus ángulos interiores. *La justificación se deja como ejercicio.*

Así, el decágono será regular.

Nota 3.2.1. Tomando el punto B como centro, el arco que pasa por P corta a la circunferencia con centro en O en C y C' , y el arco que pasa por Q corta a la misma circunferencia en E y E' . Así, B', E, E', C, C' forman un pentágono regular inscrito (Fig. 3.26).

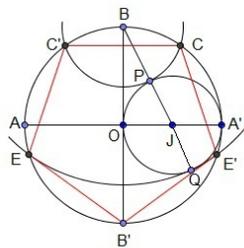


Fig. 3.26

- Tracemos dos circunferencias C_1, C_2 ambas de radio r , las cuales son tangentes en el punto O (Fig. 3.27).

Ahora, tomando como centro el punto O tracemos la circunferencia C_3 con radio $2r$ (Fig. 3.28).

Posteriormente, tomemos el punto O' en C_3 y tracemos la circunferencia C_4 , la cual sea tangente interiormente a C_1 y a C_2 y además corte a C_3 en los puntos B y B' (Fig. 3.29).

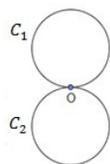


Fig. 3.27

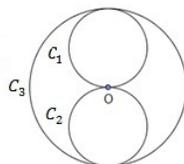


Fig. 3.28

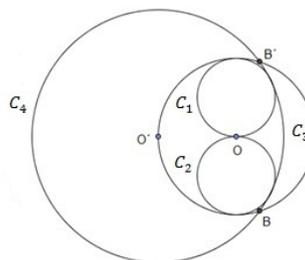


Fig. 3.29

Hecho esto, tracemos la recta que pasa por O y O' , y llamemos D al punto de intersección de C_4 con la recta OO' . Luego, formemos las rectas DB y DB' , y llamemos A, A' ; respectivamente, a los puntos de intersección de C_3 con las rectas DB y DB' (Fig. 3.30).

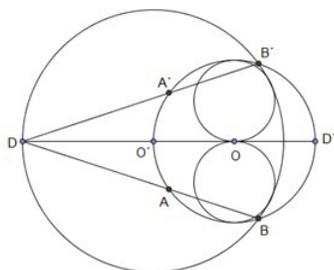


Fig. 3.30

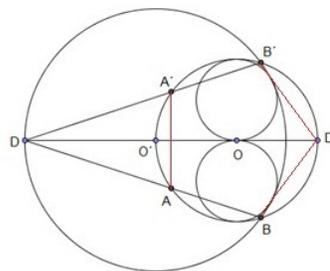


Fig. 3.31

Finalmente, los puntos A, B, D', B', A' forman un **pentágono regular** (Fig. 3.31).

4. El pentágono casi regular de Durero

Antes de comenzar a analizar la construcción que hizo Alberto Durero sobre el pentágono, enunciemos el siguiente teorema, el cual es fundamental para la justificación de esta construcción.

Teorema 3.2.1 (teorema del seno). Dado un triángulo con vértices A, B, C ; las medidas de los lados opuestos a los ángulos en A, B y C son proporcionales a los senos de dichos ángulos.

Demostración. Sea T un triángulo con vértices A, B, C , y a, b, c las medidas de los lados CB, AC, AB respectivamente (Fig. 3.32).

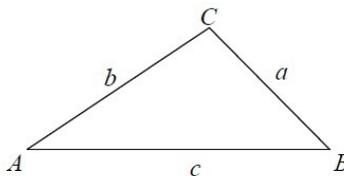


Fig. 3.32

Veamos que, $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$.

Comencemos trazando en el triángulo ABC una de las alturas, por ejemplo la correspondiente al vértice C . Luego, llamemos h_C a dicha altura, y M al punto en que h_C corta al lado AB (Fig. 3.33).

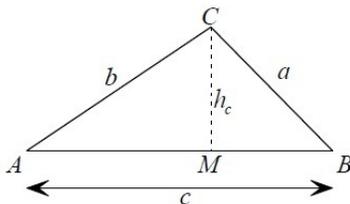


Fig. 3.33

Así, obtenemos los triángulos rectángulos AMC y MBC .

Ahora, recordar que $\text{Sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

En consecuencia, en el triángulo AMC , se tiene que

$$\text{Sen } A = \frac{h_C}{b}.$$

De modo que,

$$h_C = b \times \text{Sen } A. \quad (3.11)$$

Por otro lado, en el triángulo MBC , tenemos que

$$\text{Sen } B = \frac{h_C}{a}.$$

De tal manera que,

$$h_C = a \times \text{Sen } B. \quad (3.12)$$

Igualando (3.11) y (3.12), obtenemos que

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}.$$

Repetiendo el proceso con la altura correspondiente a el vértice A , obtendremos que,

$$\frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}. \quad \square$$

Ahora comencemos con la construcción del pentágono de Durer.

Tracemos tres circunferencias C_1 , C_2 , C_3 con centro en A , B , O , respectivamente. Todas las circunferencias de radio r , dispuestas de tal manera

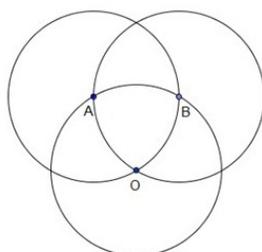


Fig. 3.34

que cada una de ellas pasa por el centro de la otra (Fig. 3.34).

Llamemos F , F' a los puntos de intersección de C_1 y C_2 con C_3 , y llamemos L al punto medio del arco que pasa por los centros A y B . Luego, la recta $F'L$ corta a la circunferencia C_2 en el punto C ; análogamente, la recta FL corta a C_1 en D . Por último, trazamos un par de circunferencias con centros en E y C de radio r , para obtener el punto D el cual corta a la recta OL (Fig. 3.35).

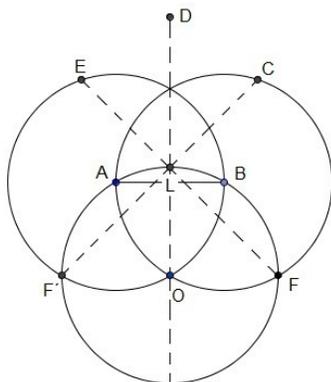


Fig. 3.35

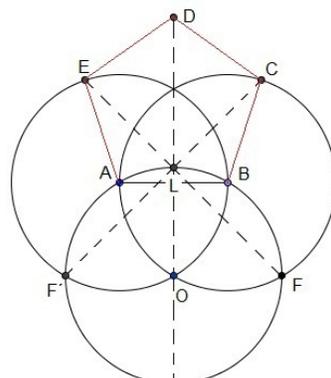


Fig. 3.36

Hemos formado así un pentágono; a saber, los vértices que forman el pentágono propuesto por Durero son A , B , C , D , E (Fig. 3.36).

Nota 3.2.2. No hay indicios de que Durero sea conciente de la dificultad de la justificación de esta construcción. No obstante es una brillante construcción de un polígono equilátero.

No hay dificultad en advertir que el pentágono es equilátero, porque cada uno de sus lados tiene una longitud igual al radio r . No obstante, falta verificar que el polígono no es equiángulo [9, p. 167-171].

Justificación:

Como los segmentos AB , AF' , $F'O$, AO , OB , OF , BF son radios,

$\Delta F'AO$, ΔAOB , ΔOBF son equilteros.

En consecuencia, $\angle F'OA + \angle AOB + \angle BOF = 180^\circ$; es decir, los puntos F' , O , F son colineales.

Así, el triángulo $F'LF$ tiene como lado el diámetro de la circunferencia C_3 , de aquí el ángulo $F'LF$ es de 90° . Con esto, el ángulo ALD es de 45° .

Por otro lado, llamemos Y al punto de intersección del segmento AB con la recta OL (Fig. 3.37).

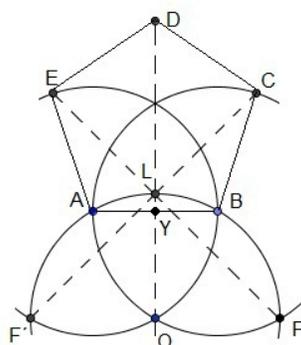


Fig. 3.37

Sin pérdida de generalidad, tomemos $R = 1$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AOY , tenemos que

$$\overline{YO} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De esta manera, $\overline{LY} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Análogamente, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ALY decimos que, $\overline{AL} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

De esto, obtenemos que el ángulo ALY es de 75° . Luego, el ángulo ALF' es de 30° . Así, el ángulo ALE es de 60° .

Ahora, aplicando el Teorema 3.2.1, al triángulo ALE obtendremos que, $\angle E = 26.6338$.

Por otro lado, aplicando la observación 3.1.6, al cuadrilátero $EAYL$, obtenemos que $\angle A = 108.37$.

Por lo tanto, el *pentágono no es regular*.

3.3. *Polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio r*

La utilización de los polígonos regulares se retoma más adelante para una aproximación del número π [Cap. 5, Sec. 5.1.3].

Definición 3.3.1. Diremos que r es el *radio* de un polígono regular si y sólo si r es el radio del círculo circunscrito al polígono (Fig. 3.38).

Definición 3.3.2. Diremos que a es el *apotema* de un polígono regular si sólo si a es el radio del círculo inscrito al polígono (Fig. 3.38).

Definición 3.3.3. Diremos que o es el *centro* de un polígono regular si sólo si o es el centro del círculo circunscrito al polígono, y también es el centro del círculo inscrito al polígono (Fig. 3.38).

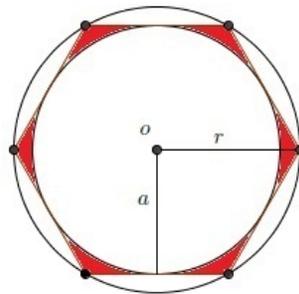


Fig. 3.38

Nota 3.3.1. Se dice que un círculo está circunscrito a un polígono, cuando el círculo toca cada uno de los vértices del polígono. Análogamente, se dice que un círculo está inscrito a un polígono, cuando el círculo es tangente a cada lado del polígono.

El siguiente cuadro, muestra algunos resultados calculados en relación a los primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio r

Polígono regular	Lado del polígono	Apotema
triángulo equilátero	$a = r\sqrt{3}$	$h = \frac{r}{2}$
cuadrado	$a = r\sqrt{2}$	$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$
pentágono	$a = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$	$h = \frac{r(1 + \sqrt{5})}{4}$
hexágono	$a = r$	$h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
octágono	$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$h = \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
Decágono	$a = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$	$h = \frac{r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$
Dodecágono	$a = \frac{r(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$	$h = \frac{r(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

Las figuras poligonales y sus propiedades constituyen una parte importante de la geometría plana elemental. Lo más apropiado no es comenzar por abordar las figuras simples (los triángulos) sino por las más familiares; es más frecuente encontrar rectángulos que cuadriláteros “cualesquiera”.

Los capítulos anteriores presentaron varios enfoques sobre estos objetos mediante plegados o rompecabezas. Aquí proponemos nuevos enfoques y un desarrollo en el sentido de una geometría esquemática: de la observación a la formulación. Estos enfoques son independientes unos de otros.

La organización lógica de los cuadriláteros permite jerarquizar las propiedades; esto merece particular atención.

Es muy común que los estudiantes en el bachillerato aún tengan ciertas imprecisiones respecto a las definiciones de lo que aprendieron en la primaria. Por ejemplo, se les hace difícil creer que un cuadrado puede ser un rectángulo. Es por ello que sugerimos a los docentes del bachillerato que trabajen este tema con sus estudiantes para disminuir las concepciones erróneas aprendidas desde la primaria.

En fin, los paralelogramos tienen un papel importante ya que permiten tratar las propiedades de traslación [Cap. 4], tanto como los vectores.

Capítulo 4

TESELADOS

4.1. Teselados

Históricamente, el punto de vista estético de una comunidad refleja su origen étnico, un ejemplo de ello son los musulmanes que en el islam constituyen el punto focal de sus vidas, tal es así que los artistas islámicos tenían estrictamente prohibido trabajar con cualquier figura, animal o ser humano en sus habilidades creativas, que en su mayoría son los mosaicos con los cuales adornaban los pisos, paredes, colchas, etcétera. Pero no sólo en esta comunidad se ve reflejado lo que queremos mostrar en este capítulo. Si vemos a nuestro alrededor observamos que las construcciones más sencillas hechas por el hombre, esconden tras de sí el concepto de teselado (teselación).

Desde la antigüedad los hombres utilizaban pequeñas piezas hechas de materiales diversos (vidrio, piedra, cerámica, etcétera.) para cubrir un espacio, llamando teselado o teselación a la producción completa.

Definición 4.1.1. Un *teselado* es un patrón de figuras que cubren una superficie plana sin dejar hueco ni traslaparse entre ellas. A cada elemento del patrón de figuras se le llama *tesela*.

Notemos que esta definición no permite la comparación entre las teselas. Con esto surge la necesidad de tener una definición que lo permita.

Definición 4.1.2. Diremos que dos teselas son congruentes si y sólo si son obtenidas una de la otra, mediante transformaciones isométricas.

Nota 4.1.1. Una transformación isométrica es un movimiento de una figura en el plano, que se realiza sin cambiar la forma y el tamaño de dicha figura; es decir, que la figura inicial y final son iguales.

Generalmente las teselas se construyen usando transformaciones isométricas sobre un conjunto de figuras base. A dicho conjunto que sirven como modelo

para la construcción de las teselas, se les llama: *motivos* .

Definición 4.1.3. Dado un teselado T , el conjunto de motivos de T es un conjunto mínimo δ de teselas en T tal que, cada tesela t en T es congruente con una tesela S en δ , además, los elementos de δ no son congruentes entre si. Cada elemento de δ se denomina **motivo** de T .

Con esto surge la siguiente pregunta:

Pregunta 4.1.1. ¿Como construir un teselado, mediante motivos?

Para esto, comencemos por un ejemplo simple.

Ejemplo 4.1.4. Sea A un cuadrilátero convexo con ángulos a , b , c , d (Fig. 4.1).

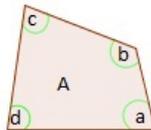


Fig. 4.1

Nota 4.1.2. Decimos que un conjunto C es convexo , si dados dos puntos de C , entonces el segmento que los une se encuentra dentro de C [16, p. 6].

Ahora, con el cuadrilátero A tratemos de formar un teselado. Uno podría simplemente observar, y tal vez jamás lograría construir el teselado; sin embargo, es más fácil encontrar la construcción por ensayo y error. Unos instantes después de tanteo encontramos una solución (Fig. 4.2).

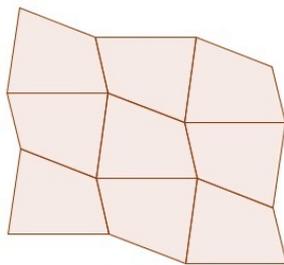


Fig. 4.2

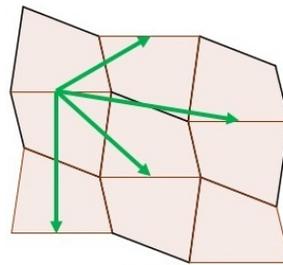


Fig. 4.3

Es necesario notar que dos cuadriláteros unidos constituyen una baldosa hexagonal, la cual se repite luego de aplicarle tipos de translaciones, como se muestra en la siguiente figura, (Fig. 4.3).

Una vez observado esto, nos damos cuenta que nuestro motivo es la baldosa hexagonal, y es ésta la que nos construye el teselado.

Nota 4.1.3. En el ejemplo 4.1.4, se obtiene que el teselado fué formado por un sólo motivo; en consecuencia, se dice que el teselado es *monoedral*. Luego, diremos que un teselado es *diedral*, si puede ser formado sólo por dos motivos, etcétera.

Pregunta 4.1.2. ¿Cómo acomodar el cuadrilátero A para formar el teselado?

La respuesta es, efectuando una reflexión del cuadrilátero por un punto medio del lado seleccionado (Fig. 4.4).

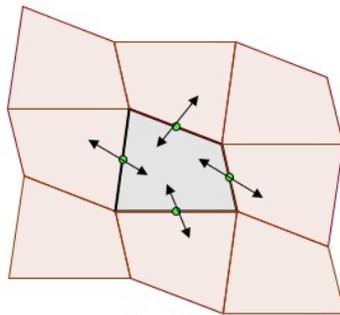


Fig. 4.4

Nota 4.1.4. Dada esta forma de reflexionar al cuadrilátero A , tenemos que A es un motivo.

Ya entendido el concepto, podemos formular la siguiente pregunta:

Pregunta 4.1.3. ¿Porqué un cuadrilátero convexo siempre permite cubrir el plano?

Para contestar esta pregunta, recordemos la siguiente propiedad:

Propiedad 4.1.5. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360° .

Ahora, notando que en la forma de acomodar el cuadrilátero A en la pregunta 4.1.3, tenemos que en cada vértice concurren cuatro aristas, determinando cuatro ángulos, que son los ángulos interiores del cuadrilátero A (Fig. 4.5). Luego, por la Propiedad 4.1.5, nos damos cuenta que la suma de estos cuatro ángulos es 360° .

Por lo tanto, podemos afirmar que extendiendo el teselado tan lejos como queramos, podemos cubrir el plano si tener huecos ni traslapar las figuras.

Esto nos lleva a la siguiente pregunta:

Pregunta 4.1.4. ¿Podemos tener un teselado monoedral del plano con cualquier polígono regular?

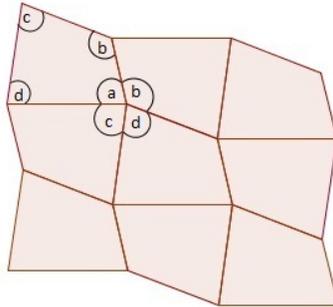


Fig. 4.5

La respuesta es no.

Mostraremos este hecho de la siguiente manera.

Definición 4.1.6. Un *polígono* es una curva cerrada que consiste en la unión finita de segmentos, llamados *lados* y los extremos de los lados se llaman *vértices*.

Definición 4.1.7. Un *polígono regular* es un polígono en el todos sus lados tienen la misma longitud y los ángulos interiores son de la misma medida.

Algunas de sus propiedades son las siguientes:

Propiedad 4.1.8. Los polígonos regulares pueden ser trazados en una circunferencia que toca cada uno de sus vértices.

Propiedad 4.1.9. El centro de un polígono regular es un punto equidistante de todos los vértices.

Propiedad 4.1.10. Los ángulos centrales son congruentes y su medida α se obtiene a partir del número de lados n del polígono; es decir, $\alpha = \frac{360}{n}$

Estas propiedades las podemos observar en la Figura 4.6.

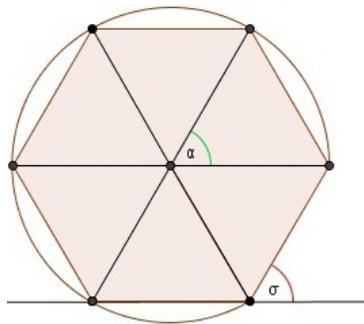


Fig. 4.6

Teorema 4.1.1. En un polígono regular un ángulo exterior es igual al ángulo central.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, tomemos como referencia el polígono mostrado en la Figura 4.6.

Definamos O al centro del polígono; A, B, C, D, E, F a los vértices; β al ángulo interior; α al ángulo central y σ al ángulo exterior (Fig. 4.7).

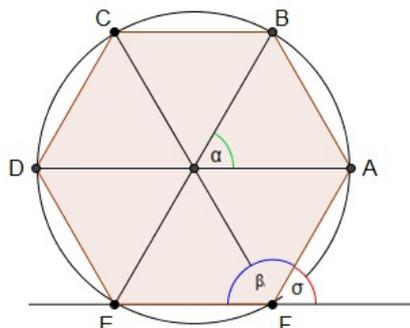


Fig. 4.7

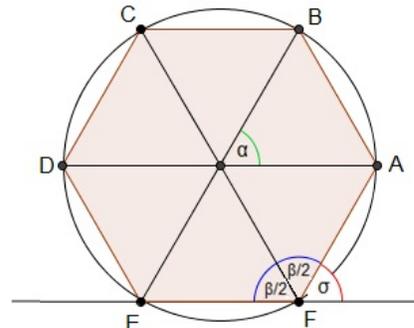


Fig. 4.8

Veamos que, $\sigma = \alpha$.

Por la Propiedad 4.1.9, se dice que los triángulos EOF , FOA , AOB , BOC , COD , y DOE son isosceles.

De aquí,

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \alpha = 180^\circ.$$

Por otro lado, notemos que los ángulos β y σ son complementarios; es decir, $\beta + \sigma = 180^\circ$.

Ahora, por el criterio LLL de congruencia de triángulos [16, T. 1.36], se sigue que

$$\triangle EOF \cong \triangle FOA.$$

De tal manera que cada segmento que va del centro O a los vértices del polígono, divide a β en dos partes iguales (Fig. 4.8).

Por lo tanto, $\alpha = \sigma$. □

Teorema 4.1.2. Si P es un polígono regular de n lados con ángulo interior β , entonces $\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Demostración. Sea P es un polígono regular de n lados, con ángulo interior β , con ángulo exterior σ y ángulo central α .

Recordemos que $\beta + \sigma = 180^\circ$.

Ahora; por el Teorema 4.1.1, se sigue que $\beta + \alpha = 180^\circ$.

Por la Propiedad 4.1.10, tenemos que $\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$. □

Recordemos que, en un teselado, no hay huecos ni se traslapan las figuras, entonces, si cualquier polígono pudiera teselar el plano monoedralmente, necesariamente el número de veces que el ángulo interior concurre en cada vértice tendría que sumar 360° .

Supongamos que tenemos un polígono regular de n lados y con ángulo interior β , el cual tesela el plano monoedralmente.

De manera que, si t es el número de veces que concurre β en cada vértice, entonces $t\beta = 360^\circ$ para $t > 1$.

Por lo tanto, $\beta \mid 360$ para algún $t > 1$.

Lo cual, no necesariamente ocurre.

Supongamos que $n = 5$, por el Teorema 4.1.2 se tendría que, $\beta = 108$ pero 108 no divide a 360.

En consecuencia, existen ϵ , δ enteros tales que, $360 = 108\epsilon + \delta$ con $0 < \delta < 108$

De aquí, $\epsilon = 3$ y $\delta = 48$.

Esto nos dice, que cada tres pentágonos cubrirán 324° de los 360° ; por lo tanto, cuatro pentágonos cubrirán 432° y este es mayor que 360° ; esto quiere decir, que se traslapan los pentágonos (Fig. 4.9).

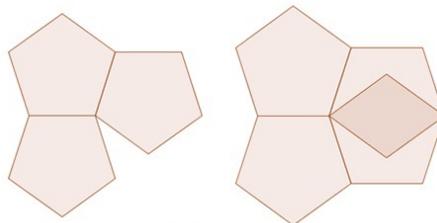


Fig. 4.9

Así, la respuesta de la pregunta 4.1.4, ha sido justificada. Más aún, podemos decir que los polígonos regulares que teselan el plano monoedralmente, son los que su ángulo interior divide a 360° .

Teorema 4.1.3. Si P es un triángulo equilátero, un cuadrado ó un hexágono, entonces P tesela el plano monoedralmente, y además son los únicos polígonos regulares que lo hacen.

Demostración. Caso 1: supongamos que P es un triángulo equilátero con ángulo interior β

Por el Teorema 4.1.2, $\beta = 60$, de tal manera que β divide a 360.

Por lo tanto, P tesela el plano monoedralmente.

Caso 2: supongamos que P es un cuadrado con ángulo interior β

Por el Teorema 4.1.2, $\beta = 90$, de tal manera que β divide a 360.

Por lo tanto, P tesela el plano monoedralmente.

Caso 3: supongamos que P es un hexágono con ángulo interior β

Por el Teorema 4.1.2, $\beta = 120$, de tal manera que β divide a 360.

Por lo tanto, P tesela el plano monoedralmente.

Sólo falta demostrar que son los únicos polígonos regulares que teselan el plano monoedralmente.

Supongamos que P no es ninguno de estos polígonos regulares.

De aquí, P es un polígono con al menos 7 lados.

Como, P no es un triángulo equilátero, un cuadrado ó un hexágono.

Se sigue que, $n \geq 7$.

Por el Teorema 4.1.2, $\beta \geq \frac{900}{7}$ y $\frac{900}{7} > 120$.

En consecuencia, β no divide a 360.

Nota 4.1.5. El caso cuando P tiene cinco lados, ya fue hecho [Ver Teorema 4.1.2].

Así, los únicos polígonos regulares que teselan el plano son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. \square

A continuación mostraremos algunos motivos que se pueden encontrar en los teselados formados por los polígonos regulares del Teorema 4.1.3 (Fig. 4.10).

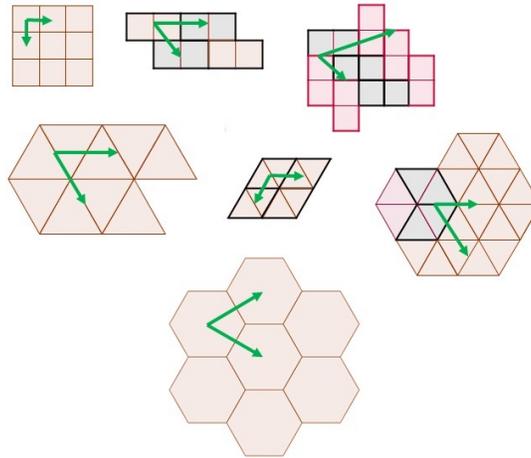


Fig. 4.10

Los ejemplos anteriores son sólo unas maneras de teselar el plano; es evidente, que podrían existir muchas maneras de hacerlo. Sólo basta encontrar uno o más motivos y usar las transformaciones isométricas.

Definición 4.1.11. Un teselado se llama *regular* si es monoedrales y el motivo que lo forma es un polígono regular.

Observación 4.1.12. Un teselado regular es independiente de los motivos que puedan formarse con el polígono regular.

Observación 4.1.13. Por el Teorema 4.1.3, existen sólo tres teselados regulares.

4.2. *El teselado del Cairo*

Dado un segmento con extremos A y B , de su punto medio O tracemos las circunferencias C_1 y C_2 de radio AB con centros en A y B respectivamente, para formar la mediatriz M , y llamemos E al punto de intersección de C_1 , C_2 y M (Fig. 4.11).

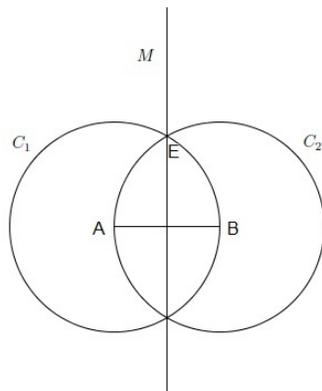


Fig. 4.11

Ahora, tracemos la bisectriz del ángulo AOE , y llamemos C al punto de intersección de dicha bisectriz con la circunferencia C_1 . Análogamente, tracemos la bisectriz del ángulo EOB , y llamemos F al punto de intersección de dicha bisectriz con la circunferencia C_2 . Luego, tracemos las rectas CA y FB . Finalmente, tracemos la perpendicular de dichas rectas, y llamemos D al punto de intersección de dichas perpendiculares con la mediatriz M (Fig. 4.12).

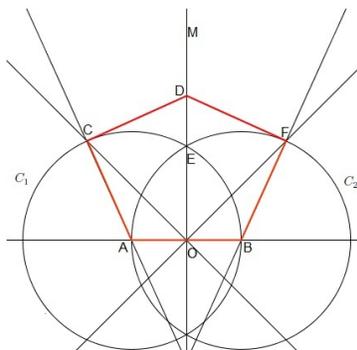


Fig. 4.12

Hemos formado, un pentágono el cual no es regular (*por la construcción*) pero todos sus lados son iguales.

Notemos que por la construcción, $\overline{AB} = \overline{CA} = \overline{FB}$.

Para mostrar que los lados del pentágono son iguales sólo queda demostrar que, $\overline{CA} = \overline{CD}$ y $\overline{CD} = \overline{DF}$.

Antes, recordemos las siguientes propiedades:

Propiedad 4.2.1. Sea C una circunferencia con centro en O y radios r . Si damos puntos A, B en C , entonces la cuerda que une A y B formara un arco de circunferencia β tal que, para cualquier punto P en β , se tiene que el ángulo APB es constante (Fig. 4.13).

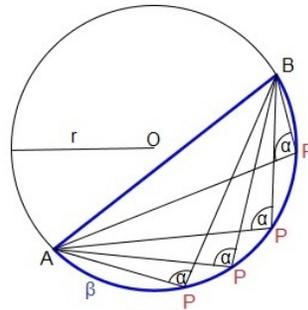


Fig. 4.13

Propiedad 4.2.2. Dado T un cuadrilátero con vértices A, B, C, D y ángulos interiores $\theta, \varphi, \phi, \omega$. T está inscrito en una circunferencia si y sólo si $\theta + \varphi = \phi + \omega = 180^\circ$; es decir, los ángulos opuestos de T son suplementarios (Fig. 4.14).

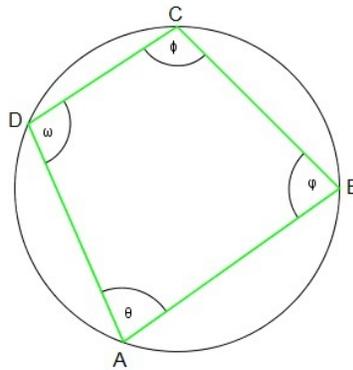


Fig. 4.14

Por otro lado, notemos que por construcción en él cuadrilátero $CDOA$, los ángulos ACD y AOD son rectos. Luego, llamemos a al ángulo CDO y c al ángulo OAC (Fig. 4.15).

Por la Propiedad 4.1.5, tenemos que $a + c + 90 + 90 = 360$.

De aquí, $a + c = 180$.

Así; por la Propiedad 4.2.2, se sigue que el cuadrilátero $CDOA$ se puede inscribir en una circunferencia (Fig. 4.16).

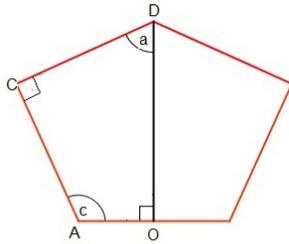


Fig. 4.15

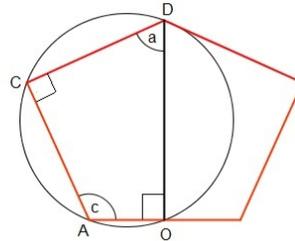


Fig. 4.16

Ahora, llamemos β al arco de circunferencia formado por el segmento CD . Posteriormente, Notemos que A y O están en β . Aplicando la propiedad 4.2.1 decimos que, los ángulos EAD y EOD son iguales, y además son de 45° (Ver Fig. 4.17).

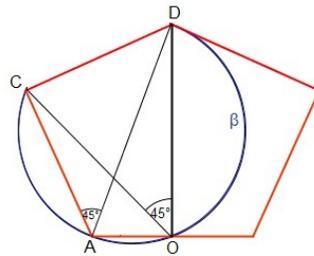


Fig. 4.17

En consecuencia, el triángulo ACD es rectángulo isósceles.

Por lo tanto, $\overline{CA} = \overline{CD}$.

Análogamente, podemos hacer lo mismo para el cuadrilátero $OBFD$ para mostrar que $\overline{CD} = \overline{DF}$.

Finalmente, se ha construido un pentágono con lados iguales pero ángulos interiores diferentes.

Observación 4.2.3. Los ángulos CAO y OBF son iguales, así como los ángulos CDO y ODF también lo son (Fig. 4.18).

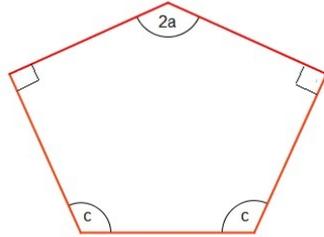


Fig. 4.18

Por la Observación , se tiene que $2a + c + c = 360^\circ$.

De tal manera, que hemos encontrado una manera de teselar el plano con el pentágono $ABFDC$ (Fig. 4.19).

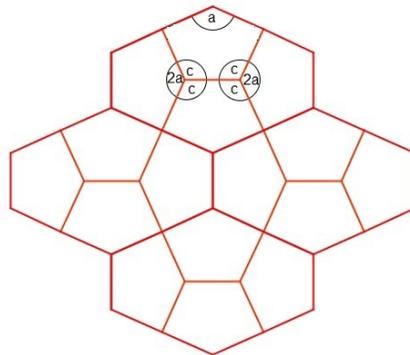


Fig. 4.19

Este teselado, es llamado *el teselado del Cairo* .

4.3. Los teselados semirregulares

Pregunta 4.3.1. ¿Podemos teselar monoedralmente el plano con cualquier polígono irregular convexo?

La respuesta es no.

Justifiquemos esta respuesta mediante un ejemplo. Pero antes la siguiente propiedad:

Propiedad 4.3.1. Dado P un polígono de n lados, y β_i ángulos interiores correspondientes al lado i , con i en $\{1, \dots, n\}$, tenemos que $\sum_{i=1}^n \beta_i = 180^\circ(n - 2)$.

Ejemplo 4.3.2. Sea P un pentágono con vértices A, B, C, D, E , y ángulos α, β y θ donde α es la medida de los ángulos EAB , y BCD ; β es la medida de los ángulos ABC , y CDE y θ es la medida del ángulo AED tal que, $\alpha = 108^\circ, 43'$, $\beta = 116^\circ, 57'$ y $\theta = 90^\circ$ (Fig. 4.20).

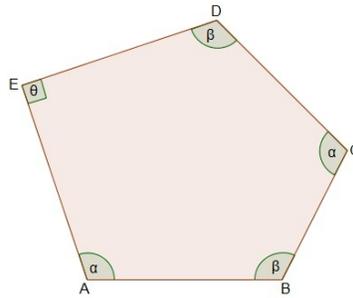


Fig. 4.20

Por la Propiedad 4.3.1, se tiene que

$$2\alpha + 2\beta + \theta = 540^\circ.$$

De aquí, $2\alpha + 2\beta = 450^\circ$.

Esto quiere decir que, si colocamos dos veces los ángulos α y β ya estaríamos traslapando pentágonos. De tal manera que sólo nos bastaría fijarnos que pasa cuando colocamos dos ángulos. En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

Caso 1: cuando colocamos α y β .

Si colocamos α y β , tenemos que $\alpha + \beta = 225^\circ$, de tal modo que necesitamos un ángulo de 135° para poder teselar monoedralmente el plano. Pero no tenemos un ángulo de esa medida. De esta manera no podemos teselar el plano.

Caso 2: cuando colocamos α y α .

Si colocamos α y α , tenemos que $\alpha + \alpha = 216^\circ, 86'$, de tal modo que necesitamos un ángulo de $143^\circ, 14'$ para poder teselar monoedralmente el plano. Pero no tenemos un ángulo de esa medida. De esta manera no podemos teselar el plano.

Caso 3: cuando colocamos β y β .

Si colocamos β y β , tenemos que $\beta + \beta = 233^\circ, 14'$, de tal modo que necesitamos un ángulo de $126^\circ, 86'$ para poder teselar monoedralmente el plano. Pero no tenemos un ángulo de esa medida. De esta manera no podemos teselar el plano.

Caso 4: cuando colocamos θ y θ .

Si colocamos θ y θ , tenemos que $\theta + \theta = 180^\circ$, de tal modo que necesitamos un ángulo de 180° para poder teselar monoedralmente el plano. Pero si podemos

formar un ángulo de esa medida; a saber, colocando otros dos ángulos θ .

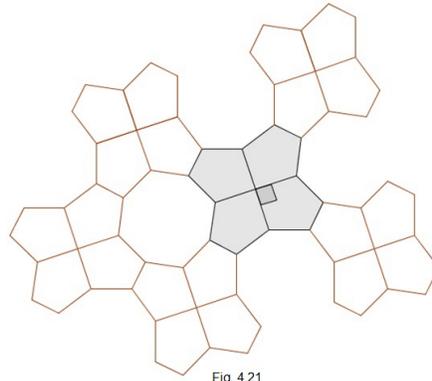


Fig. 4.21

El problema es que a pesar de que de esta manera se puede formar un ángulo de 360° , habría partes del plano en las cuales no podríamos cubrir con el pentágono P (Fig. 4.21).

Notemos que podríamos tener un teselado del plano si pensáramos que tenemos un pentágono y un octágono como lo muestra la Figura 4.21.

Con esto nos damos cuenta que los polígonos regulares, los cuadriláteros convexos y los polígonos irregulares convexos están lejos de agotar las posibilidades de teselar el plano. A continuación mostraremos unos ejemplos de teselados del plano con figuras convexas o no convexas (Fig. 4.22-4.25).

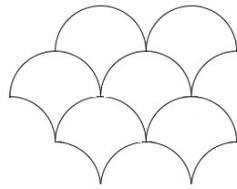


Fig. 4.22

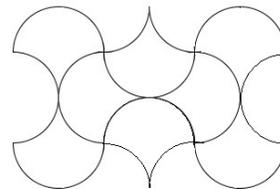


Fig. 4.23

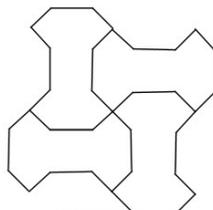


Fig. 4.24

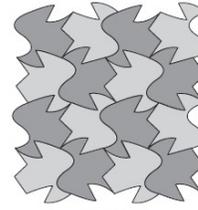


Fig. 4.25

En el caso 4 del ejemplo 4.3.2, hemos obtenido que podríamos teselar el plano

con dos polígonos que no son regulares, esto nos permite pensar que pasaría si combinamos polígonos regulares. De esto formulamos la siguiente pregunta:

Pregunta 4.3.2. ¿Podemos teselar el plano utilizando dos o más polígonos regulares?

La respuesta es si.

Justifiquemos la respuesta de la siguiente manera.

Recordemos que para teselar el plano, la suma de los ángulos interiores que concurren en un vértice debe ser igual a 360° , y ya sabemos que el mínimo polígono regular que lo hace es el triángulo equilátero; además el máximo polígono regular que lo hace es el hexágono. De tal manera que el número mínimo de polígonos regulares que concurren en un vértice es 3, y el número máximo de polígonos regulares que concurren en un vértice es 6.

En consecuencia, definimos k como el número de polígonos regulares que concurren en un vértice; es decir, $k = 3, 4, 5, 6$.

Bajo estas condiciones y como el ángulo interior β de un polígono regular de n lados está dado por $\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$, se sigue que la suma en uno de los vértices de los ángulos interiores de estos k polígonos regulares que concurren es,

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \dots + \frac{180^\circ(n_k - 2)}{n_k} = 360^\circ.$$

donde n_k denota el número de lados del k -ésimo polígono regular que concurre en ese vértice.

De aquí,

$$\frac{(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)}{n_2} + \dots + \frac{(n_k - 2)}{n_k} = 2.$$

Factorizando,

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + \dots + 1 - \frac{2}{n_k} = 2.$$

Así,

$$k - \frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \dots - \frac{2}{n_k} = 2.$$

Luego,

$$k = 2 + \frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \dots + \frac{2}{n_k}.$$

De esto,

$$k - 2 = 2 \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \right].$$

Finalmente:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = \frac{k-2}{2}.$$

donde los n_k son números naturales tales que $n_k \geq 3$, por ser el número de lados del k -ésimo polígono regular que concurre en ese vértice.

Ahora, como $K = 3, 4, 5, 6$ supongamos que $K = 3$.

En consecuencia,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

De aquí, $n_3 = \frac{2n_1n_2}{n_1n_2 - 2n_2 - 2n_1}$ y dando valores para n_1 , se tiene que

Si $n_1 = 3$, entonces $n_3 = \frac{6n_2}{n_2 - 6}$ y las soluciones enteras posibles son:

$$n_2 = \{7, 8, 9, 10, 12\} \text{ y } n_3 = \{42, 24, 18, 15, 12\}.$$

Si $n_1 = 4$, entonces $n_3 = \frac{4n_2}{n_2 - 4}$ y las soluciones enteras posibles son:

$$n_2 = \{5, 6, 8\} \text{ y } n_3 = \{20, 12, 8\}.$$

Si $n_1 = 5$, entonces $n_3 = \frac{10n_2}{3n_2 - 10}$, y la única solución entera posible es: $n_2 = 5$ y $n_3 = 10$.

Si $n_1 = 6$, entonces $n_3 = \frac{3n_2}{n_2 - 3}$, y por tanto: $n_2 = n_3 = 6$.

Realizando un procedimiento análogo cuando $K = 4, K = 5$ y $K = 6$ podremos hallar todas las combinaciones posibles, para saber cuantos polígonos regulares concurren en un vértice.

Nota 4.3.1. Hasta el momento no hemos dicho nada de cómo están definidos los teselados semirregulares.

Nota 4.3.2. De todas las combinaciones posibles, hay once que presentan en su configuración una particularidad; esta es, que en cada vértice concurren el mismo tipo y número de polígonos regulares, así como concurren en el mismo orden y sobre todo no dejan huecos ni se traslapan entre ellos. De tal manera que estos teselan el plano.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4.3.3. Un teselado se dice semirregular si está formado por polígonos regulares dispuestos en tal forma que en todos los vértices se tiene el mismo tipo de configuración; es decir, concurren en el mismo orden, el mismo tipo y número de polígonos regulares, sin que haya huecos ni se traslapan [15, p. 16].

Observación 4.3.4. De la nota 4.3.2, podemos decir que existen únicamente once teselados semirregulares.

De la definición 4.3.4, podemos decir que ya conocemos tres de los once teselados semirregulares; a saber, son los teselados formados por los únicos polígonos regulares que teselan el plano monoedralmente.

Notemos que en cada vértice de los tres teselados semirregulares que ya conocemos, concurren los mismos polígonos; es decir, encontramos el mismo ciclo: $t/t/t/t/t:=\text{triángulo}$, $c/c/c/c:=\text{cuadrado}$ y $h/h/h:=\text{hexágono}$. Luego; por convención, a estos ciclos los denominamos de la siguiente manera, **3.3.3.3.3.3**, **4.4.4.4.4** y **6.6.6**.

Así que, los otros ocho teselados semirregulares son los dados por los ciclos: **3.3.3.3.6**, **3.3.3.4.4**, **3.3.4.3.4**, **3.4.6.4**, **3.6.3.6**, **3.12.12**, **4.6.12** y **4.8.8**.

Para ilustrar lo que estamos diciendo tomemos el ciclo **3.4.6.4**, es decir, cuando tomamos $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 6$, $n_4 = 4$ (estos valores son tomados de los resultados obtenidos cuando $K = 4$).

Lo que este ciclo nos dice, es que cuando $K = 4$ en un vértice concurren cuatro polígonos regulares, uno de tres lados, uno de cuatro lados, uno de seis lados y uno de 4 lados (Fig. 4.26).

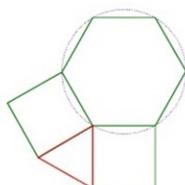


Fig. 4.26

Con esto podemos, general el teselado semirregular correspondiente al ciclo **3.4.6.4**, el cual es llamado *Teselado de Diana en Nimes* (Fig. 4.27).

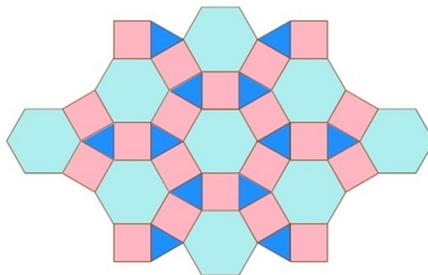
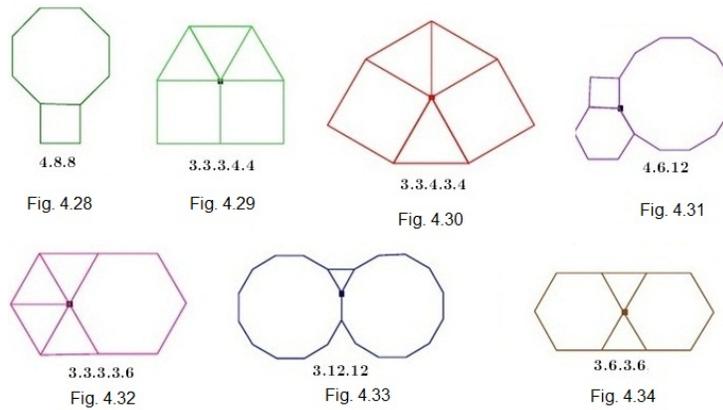
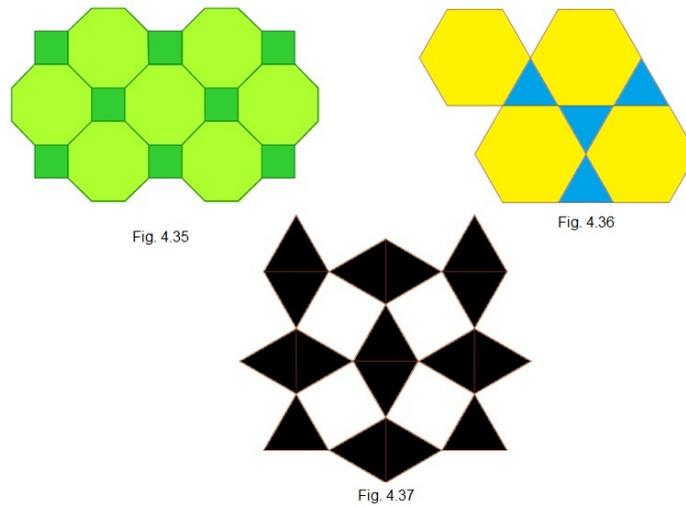


Fig. 4.27

Finalmente, en las siguientes figuras (Fig. 4.28-4.34) mostramos los ciclos faltantes que sirven como motivos para generar los faltantes teselados semirregulares.



A continuación, mostraremos los teselados semirregulares formados por los ciclos **4.8.8**, **3.6.3.6** y **3.3.4.3.4** respectivamente (Fig. 4.35-4.37).



Los teselados semirregulares formados por los ciclos faltantes pueden obtenerse de manera análoga.

Finalmente, a los once teselados semirregulares también se les conoce como *teselados Arquimedianos*.

4.4. *Teselados periódicos y aperiódicos*

Es importante notar que a lo largo de éste capítulo, en todos los teselados que hemos presentado, tenemos un patrón de comportamiento que se repite

regularmente en distintas direcciones; es decir, en los teselados las teselas se repiten de una manera regular en direcciones que no son paralelas y opuestas.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.4.1. Un teselado T del plano es *periódico* si las teselas se repiten de manera regular en dos direcciones independientes.

De manera inmediata surge la siguiente pregunta.

Pregunta 4.4.1. ¿Cómo podemos verificar si un teselado es periódico?

Construyamos la respuesta de la siguiente manera,

Recordemos que una aplicación del plano, que denotaremos por φ , asocia cada punto p del plano un punto imagen, p' , que denotamos $p' = \varphi(p)$.

Definición 4.4.2. Llamaremos *transformaciones* a las aplicaciones que son inyectivas; es decir, si A y B son subconjuntos del plano, una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ se denomina una transformación de A en B si φ manda puntos distintos de A en puntos distintos de B .

Definición 4.4.3. Las transformaciones $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preservan distancias, para cada par de puntos p, q en \mathbb{R}^2 , las denominamos isometrías en el plano.

Definición 4.4.4. Una *traslación* es la transformación que mueve cada punto del plano la misma distancia y en la misma dirección.

Como consecuencia de la definición, tenemos que una traslación es una isometría.

De tal manera que, dados dos puntos p y q del plano, hay una única traslación τ que lleva al punto p en el punto q . Porque si $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$, existe una única pareja de números (e, f) tal que, $c = a + e$ y $d = b + f$. Así que la única traslación que envía al punto p en el punto q esta dada por las ecuaciones:

$$x' = x + (c - a)$$

y

$$y' = y + (d - b)$$

A esta traslación la denotaremos τ_{pq} .

Una traslación τ_{pq} mueve cada punto la misma distancia en la misma dirección, dicha distancia esta dada por la distancia que hay entre p y q , mientras que la dirección, es la del vector \vec{pq} que inicia en p y termina en q , por lo que si \vec{u} denota el vector que va de p a q , escribiremos τ_u en vez de τ_{pq} .

Además, si A, B, C y D son puntos no colineales, entonces la traslación que lleva A en B coincide con la traslación que lleva C en D si y sólo $CABD$ es un paralelogramo.

Definición 4.4.5. Dado un conjunto S de puntos del plano, una *simetría* para este conjunto es una isometría, que transforma al conjunto S en sí mismo.

Esto es, si S denota dicho conjunto, una simetría es una transformación $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, φ preserva distancias, para todo par de puntos p, q en \mathbb{R}^2 .

Cabe notar que la composición de dos simetrías de un conjunto es nuevamente una simetría para dicho conjunto [Cap. 2, Sec. 2.2.1].

Definición 4.4.6. Una simetría σ es una *simetría para un teselado* T , si cada tesela t de T se transforma sobre otra tesela del teselado T ; esto es:

$$t \in T \text{ implica } \sigma(t) \in T$$

De tal manera que podemos formar un teselado de paralelogramos sólo por traslación (Fig. 4.38).

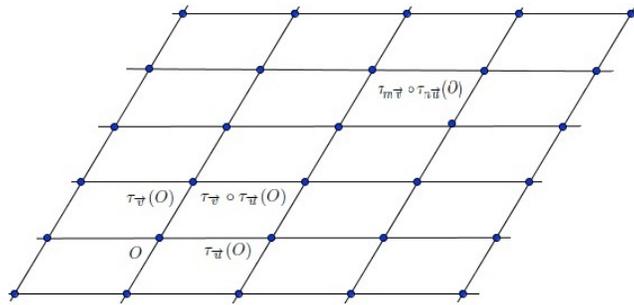


Fig. 4.38

Llamemos P al paralelogramo que está determinado por los puntos $O, \tau_{\vec{u}}, \tau_{\vec{v}}, \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$ en la Figura 4.38, donde la traslación $\tau := \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$ transforma al paralelogramo P que tiene como 'primera esquina' el punto $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}(O)$.

Finalmente, a este teselado de paralelogramos le llamaremos *retícula de paralelogramos periódicos*.

De tal manera, un teselado es *periódico* cuando podamos encontrar una retícula de paralelogramos periódicos que contengan piezas idénticas del teselado. Cuando estos paralelogramos sean mínimos, llamaremos a estos paralelogramos *dominios fundamentales del teselado* [15, p. 115].

Para explicar la forma en que esto funciona, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.7. Notemos que sobre el teselado (Fig. 4.39) hemos formado una retícula de paralelogramos periódicos, y la figura de la izquierda muestra el dominio fundamental del teselado.

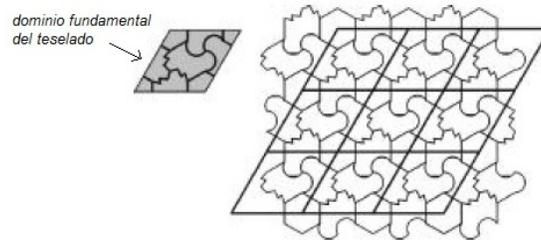


Fig. 4.39

Nota 4.4.1. Hay que notar que las retículas de los paralelogramos periódicos no son únicas (*forma de los paralelogramos*). Más aun los paralelogramos que conforman la retícula, no siempre son dominios fundamentales.

Hasta ahora, los teselados que hemos mostrado son periódicos. Pero existen teselados los cuales no son periódicos.

A continuación daremos dos ejemplos muy famosos:

Ejemplo 4.4.8. Recordando que el pentágono regular no permite teselar el plano; sin embargo, permite formar un teselado muy particular (Fig. 4.40).

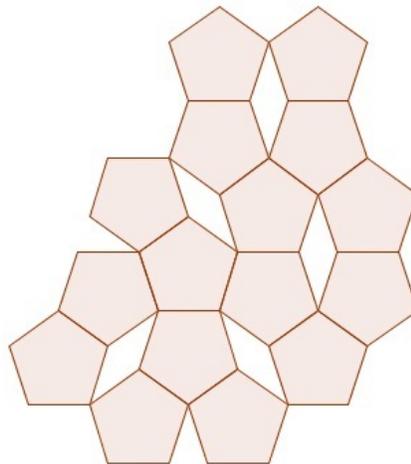


Fig. 4.40

Notemos que, es imposible teselar el plano de manera periódica, puesto que no podemos genera una retícula de paralelogramos periódicos. Este teselado es llamado *El primer teselado pentágono no periódico* ó *Teselado de Penrose*.

Ejemplo 4.4.9. Se trata de un embaldosado hallado en una casa de Dijon que había pertenecido al escultor Rignault. Este está compuesto de tres tipos de piezas, entre las cuales hay una en forma de tulipa (Fig. 4.41), la cual esta formada de circunferencias de igual radio.

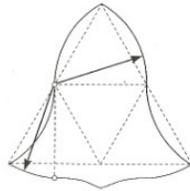


Fig. 4.41

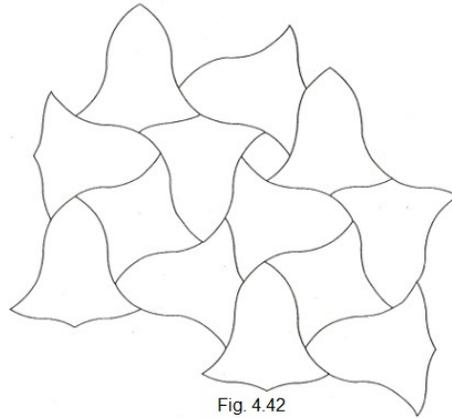


Fig. 4.42

Esta tulipa nos genera el teselado siguiente: (Fig. 4.42) el cual es llamado ***Teselado de Rignault***.

Definición 4.4.10. Un teselado es *aperiódico* sino es periódico.

4.5. *Los teselados y los 17 grupos de simetría*

Por la Definición 4.4.5, la simetría de una figura se caracteriza por el grupo de transformaciones del plano que transforman la figura en si misma.

En 1890, el eminente cristalógrafo y geómetra ruso E. S. Fedorov resolvió por métodos de la teoría de grupos uno de los problemas fundamentales de la cristalografía: clasificar los sistemas regulares de puntos en el espacio. Este fue el primer ejemplo de aplicación directa de la teoría de grupos a la solución de un problema importante en las ciencias naturales, causando un impacto sustancial en el desarrollo de la teoría de grupos [15, p. 118].

Así, Fedorov demostró que sólo existen 17 grupos infinitos de dimensión dos, los cuales comúnmente son llamados ***grupos planos de Fedorov***.

Con esto surge la siguiente pregunta:

Pregunta 4.5.1. ¿Como podemos clasificar estos grupos?

La respuesta la diremos de la siguiente manera.

Consideremos una figura F y una transformación τ que transforma F en si misma, es decir, τ es una isometría. Ahora, como es posible descomponer una traslación en dos simetrías axiales (ó *reflexiones*) cuyos ejes sean perpendiculares a la dirección de la traslación, y como es posible descomponer una rotación en dos simetrías axiales (ó *reflexiones*) cuyos ejes pasen por el centro de rotación [Cap. 2, Sec. 2.2.1]. Así, el grupo de simetría de una figura plana sólo puede constar de giros al rededor del centro de gravedad de la figura, y de simetrías respecto a ejes que pasan por dicho centro.

De tal manera, que los 17 grupos planos de Fedorov se pueden clasificar según la naturaleza de sus giros.

Los 17 grupos, se pueden agrupar en cinco apartados, según el orden máximo de sus giros:

1. **Grupos de simetría sin giros: 4 grupos de simetrías.**
2. **Grupos de simetría con giros de 180° : 5 grupos de simetrías.**
3. **Grupos de simetría con giros de 120° : 3 grupos de simetrías.**
4. **Grupos de simetría con giros 90° : 3 grupos de simetrías.**
5. **Grupos de simetría con giros de 60° : 2 grupos de simetrías.**

4.5.1. *Nomenclatura de los grupos cristalográficos*

La notación establecida por la Unión Internacional de Cristalografía (Comité Español), también conocida como notación de Hermann-Mauguin, consta de cuatro símbolos ordenados:

- Símbolo 1. Una letra p ó c .
- Símbolo 2. Un número 1, 2, 3, 4 ó 6.
- Símbolo 3. Una letra o número: m , g ó 1.
- Símbolo 4. Una letra o número: m , g ó 1.
- Símbolo 1: denota si el dominio fundamental del teselado es *centrado* ó no.
 1. Es c (*centrado*) cuando el paralelogramo fundamental es un rombo que se puede enmarcar centrándolo en un rectángulo [15, p. 121].
 2. Es p (*primitivo*) en cualquier otro caso [15, p. 121].
- Símbolo 2. Representa el mayor orden de rotación que podamos encontrar (número máximo de giros) puede ser:

1. 1 (ángulo de 360°).
 2. 2 (ángulo de 180°).
 3. 3 (ángulo de 120°).
 4. 4 (ángulo de 90°).
 5. 6 (ángulo de 60°).
- Símbolo 3. Corresponde al tipo de simetría y puede tener tres símbolos:
 1. m (*mirror = espejo*) simetría axial [15, p. 121].
 2. g (*glide = deslizamiento*) cuando tiene simetría con deslizamiento [15, p. 121].
 3. 1 indica que no existe ninguno de los dos tipos de simetría.
 - Símbolo 4. La misma clasificación anterior, respecto a la presencia o no de un segundo tipo de ejes de simetría (m, g ó 1).

1. Grupos de simetría sin giros: 4 grupos de simetrías.

- $p1$: Dos traslaciones.
- cm : Una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular.
- pg : Dos simetrías con deslizamiento paralelas.
- pm : Dos simetrías axiales y una traslación.

2. Grupos de simetría con giros de 180° : 5 grupos de simetrías.

- $P2$: Tres simetrías centrales (o giros de 180°).
- cmm : Dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central.
- pmm : Cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (p.e. 2 horizontales y 2 verticales).
- pmg : Una simetría axial y dos simetrías centrales.
- pgg : Dos simetrías con deslizamiento perpendiculares.

3. Grupos de simetría con giros de 120° : 3 grupos de simetrías.

- $p3$: Dos giros de 120° .
- $P31m$: Una simetría axial y un giro de 120° .
- $P3m1$: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero (ángulos 60-60-60).

4. Grupos de simetría con giros 90° : 3 grupos de simetrías.

- $P4$: Una simetría central (o giro de 180°) y un giro de 90° .

- $P4m$: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 45-45-90.
- $P4g$: Una simetría axial y un giro de 90° .

5. **Grupos de simetría con giros de 60° : 2 grupos de simetrías.**

- $P6$: Una simetría central y un giro de 120° .
- $P6m$: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30-60-90.

El análisis detallado de los teselados sobrepasa ampliamente el marco presente de este trabajo, sin embargo, hemos hecho el esfuerzo de dar una noción amplia del tema. Para un análisis más detallado consultar [15].

4.6. *Frisos*

Actualmente, en la arquitectura, el arte, la decoración, etcétera. Es frecuente encontrar el uso de bandas donde cierto motivo se repite determinadas veces (Fig. 4.43). A estos diseños se les conoce con el nombre de *Frisos*.



Fig. 4.43

En primer lugar, sepamos lo que el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española dice de la definición de un Friso: faja más o menos ancha que suele pintarse de diversos colores en la parte inferior de las paredes. También puede ser de seda, estera de junco, papel pintado, azulejos, mármol, etcétera.

Ahora, Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996) dicen en su libro el grupo de las isometrías del plano [18], lo siguiente: se llama friso a un cubrimiento de la región del espacio limitada por dos rectas paralelas. Los frisos son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero de anchura finita.

Nosotros daremos la siguiente definición:

Definición 4.6.1. Diremos que T es un *friso* si T es un teselado que está contenido en una banda.

Supongamos que ya hemos decidido el motivo de nuestro friso. Luego, la pregunta inmediata que surge es la siguiente:

Pregunta 4.6.1. ¿De qué manera puedo formar mi friso?

Para nuestra fortuna, ya está demostrado que hay exactamente 7 maneras de formar un friso.

A continuación veremos cuáles son estas 7 maneras, mediante el algoritmo de Rose-Strafford (Fig. 4.44).

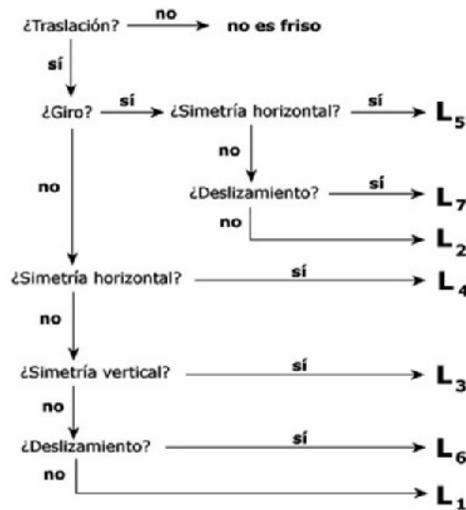
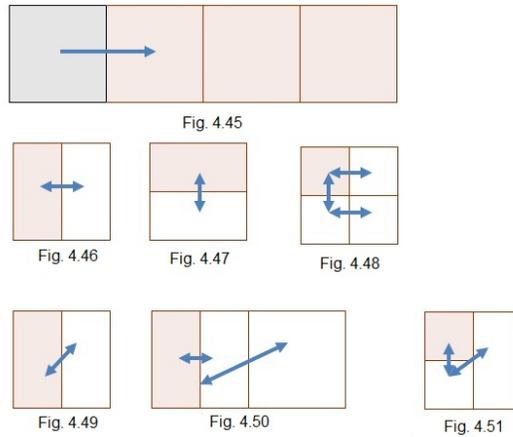


Fig. 4.44

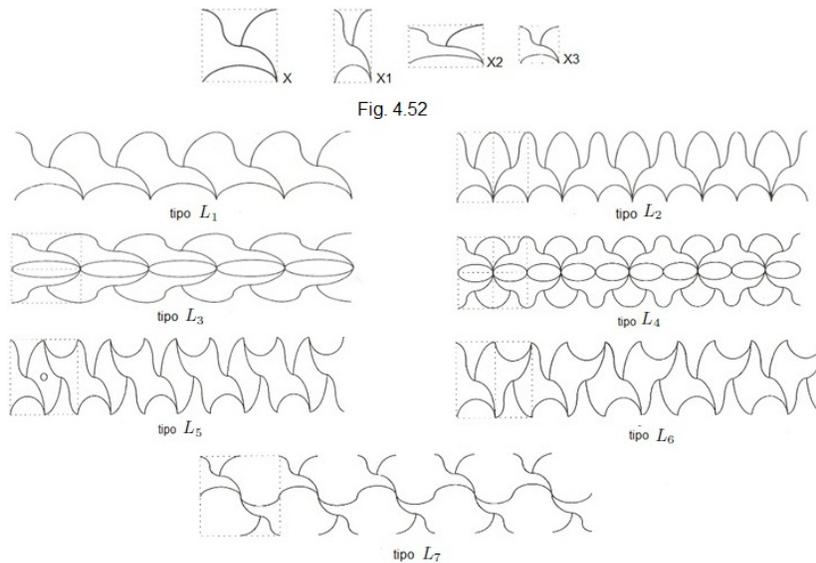
1. El tipo L_1 está formado sólo por traslaciones (Fig. 4.45).
2. El tipo L_2 está formado por una traslación y una simetría vertical (Fig. 4.46).
3. El tipo L_3 está formado por una traslación y una simetría horizontal (Fig. 4.47).
4. El tipo L_4 está formado por una traslación y un deslizamiento (Fig. 4.48).
5. El tipo L_5 está formado por una traslación y un giro de 180° (Fig. 4.49).
6. El tipo L_6 está formado por una traslación, una simetría vertical y un deslizamiento (Fig. 4.50).
7. El tipo L_7 está formado por una traslación, un giro de 180° y una simetría horizontal (Fig. 4.51).



Estos tipos de frisos, nos dicen que eventualmente, el motivo mismo puede ser reducido por elementos de simetría en base a los tipos L_2, \dots, L_7 .

Nota 4.6.1. Por comodidad el motivo esta representado por un cuadrado.

A continuación, daremos una ilustración de cada uno de estos 7 tipos de frisos, a partir de un mismo tema X . El tema será eventualmente modificado según las variantes que aparecen a continuación (Fig. 4.52), de tal manera que el motivo conserve el formato de cuadrado.



4.7. Dualidad

La existencia de un centro de simetría o de repetición nos permite definir relaciones entre los teselados.

Definición 4.7.1. Dados P, Q teselados, diremos que P y Q son *teselados duales* si y sólo si los centros de simetría de P son vértices de Q , y viceversa.

Esta definición nos permite construir los teselados duales.

Primero, hacemos aparecer de un teselado P los centros de los motivos y los unimos.

He aquí algunos ejemplos: (Fig. 4.53-4.55).

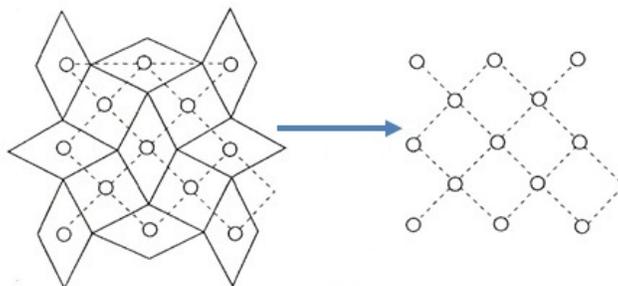


Fig. 4.53

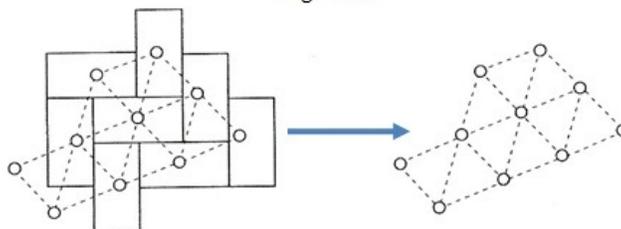


Fig. 4.54

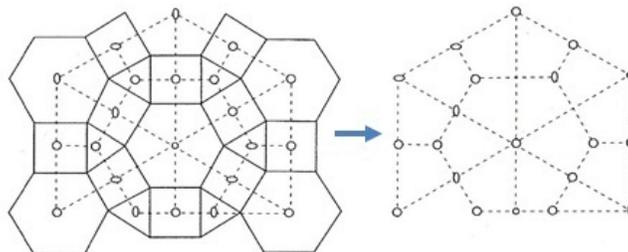


Fig. 4.55

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

El tema “teselados” es aceptable en todos los niveles, desde el jardín de niños hasta el bachillerato.

Proponer realizar **teselados** con ayuda de piezas recortadas de cartón o de madera, o proseguir un teselado ya iniciado es una actividad lógica: descubrir una ley de construcción. Es el caso de piezas de forma simples (cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros, hexágonos) puede hacerse reproducir el teselado realizando sobre una cuadrícula preparada (casillas cuadradas o triangulares) y continuar con una actividad de colorear (¿Cuántos colores como mínimo?).

Esta primera aproximación permite observar más de cerca las **propiedades geométricas** que se ponen en juego en estos teselados (ejemplo: teselado uniforme con cuadriláteros o teselado del templo de Diana en Nimes). El análisis de frisos o de teselados (búsqueda del motivo, de las traslaciones, reducción del motivo) puede plantearse de manera natural.

La continuación de frisos o de teselados puede abordarse desde el inicio del bachillerato a condición de empezar por el análisis de un modelo simple y hacer que se busquen sus variantes. El método por deformación [15, p. 132-135] o el del sobre [3, p. 134], dan pie a actividades de investigación.

El análisis de teselados complejos (el teselado del Cairo, teselado de Rignault) ponen en juego cálculos de longitud y ángulos: puede sacarse mucho provecho de ello.

Estas indicaciones son generales. La elección de los trabajos dependerá del tiempo que el profesor desee consagrar a estas actividades y del tiempo que los estudiantes le hayan consagrado anteriormente.

Capítulo 5

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5.1. Aproximación a π (π)

Muchas veces hemos escuchado hablar sobre el famoso problema de construir sólo con regla y compás un cuadrado que posea igual área a la de un círculo dado. Este problema es conocido como *la cuadratura del círculo*.

Es bien sabido que en la antigüedad este problema trató de resolverse en repetidas ocasiones sin éxito alguno. Desafortunadamente tuvieron que pasar muchos años para que este problema fuera respondido. Fue hasta 1882 que el matemático Ferdinand Lindemann (1852-1939) en una memoria publicada en *mathematische Annalen* bajo el título de: *Über die Zahl* (sobre el número), probó que π es un número *trascendente*; es decir, que no existe ningún polinomio con coeficientes racionales del cual π sea raíz [23, p. 8, 9].

Nota 5.1.1. Toda raíz de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales es llamada: *número algebraico*.

Lindemann, sigue un método semejante al realizado por Charles Hermite (1822-1901) en una memoria sobre la función exponencial, publicada en *Comptes rendues* en 1873. Lindemann demuestra que el número e no puede satisfacer idénticamente la ecuación:

$$C_1e^{x_1} + C_2e^{x_2} + \dots + C_ne^{x_n} = 0$$

donde los x_i son números algebraicos distintos, reales o complejos, y los C_i son número algebraicos que no son todos nulos.

Primero, demuestra que la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$ no tiene solución para un x algebraico. Así, sabiendo que $e^{i\pi} + 1 = 0$ para $x = \pi$, el número $i\pi$ no puede ser algebraico. Pero i es un número algebraico, por lo que π ha de ser un número trascendente, ya que el producto de dos números algebraicos es algebraico.

Esta demostración de la trascendencia de π representó la respuesta definitiva al célebre problema de la cuadratura del círculo, puesto que, al buscar un cuadrado con área igual al área de un círculo dado, tendríamos que π es el factor de proporción entre el área del cuadrado y el radio del círculo al cuadrado; es decir, que mediante regla y compás tendríamos que construir a π , lo cual sería imposible.

Notemos que hablamos de π con tanta naturaleza, que olvidamos su historia, e incluso nos limitamos a decir que su valor es aproximadamente 3.1416, para resolver problemas en la escuela o en el trabajo ó simplemente para resolver las dudas de quien nos pregunta sobre este maravilloso número; tal vez, esto sea ocasionado porque es tan grande su complejidad que en la escuela primaria no somos capaces de comprender todo lo que π implica; es más, se podría decir que sólo se nos enseña para tener una idea intuitiva de él, para que más adelante (*si es que así se desea*) podamos tratar de entender su importancia.

Es evidente que la humanidad a lo largo de su historia ha pasado por muchísimas facetas, una de ellas es que en la antigüedad se le trataba de encontrar una relación matemática a todo con lo que se vivía constantemente, pero siempre teniendo en cuenta que lo que se encontrara no causara problemas. Tal es así, que los calculistas de esas épocas, se dieron cuenta que existía en cada círculo una estrecha relación entre su perímetro y su radio, de tal manera que comenzaron a dar valores a esa relación existente. Pero fue hasta el siglo XVII que se le dio un nombre a esta relación, ese nombre es *pi* (π); este nombre es en base a que los griegos llamaban **periferia** al perímetro de un círculo. Pero eso no es todo, largo fue el camino para aceptar que π es un número irracional; tal vez, por el pavor que existía en esa época al surgimientos de las magnitudes inconmensurables [1, p. 44].

De tal manera que podemos decir que,

$$\pi := \frac{L}{D} \tag{5.1}$$

donde L y D son la longitud y el diámetro, respectivamente de una circunferencia dada.

En consecuencia, podemos formular la siguiente pregunta:

Pregunta 5.1.1. ¿Qué se ha hecho a lo largo de la historia para obtener una aproximación a π ?

La respuesta es muy variada, y daremos unos ejemplos para ilustrar qué es lo que se ha hecho a lo largo de la historia para conocer su aproximación.

5.1.1. *La aproximación egipcia*

Egipto fue considerado durante mucho tiempo, debido al clima muy seco de la región y al culto que los egipcios profesaban por los muertos, como el campo por excelencia de las excavaciones históricas. Pero fue la expedición de Napoleón a Egipto la que confirió el impulso suficiente al estudio científico de la civilización egipcia; ya que fueron soldados franceses los que llevaron a cabo el más importante de los descubrimientos; excavaron cerca de Rosetta, al este de Alejandría, extrayendo una piedra en la que había una inscripción en tres lenguas: griega, demótico (*escritura popular egipcia*) y jeroglífico. Así, se consiguió la llave para descifrar los jeroglíficos egipcios [8, p. 39-42].

Afortunadamente, gracias a este descubrimiento podemos descifrar los principales papiros que el clima seco de Egipto favoreció a conservar en la actualidad y de tal manera, podamos saber sobre los conocimientos matemáticos que tenían los pueblos del valle del Nilo.

Los principales papiros con los que se cuenta en la actualidad son:

1. *El papiro de Rhind.*
2. *El papiro de Moscú.*
3. *El rollo de cuero de las matemáticas egipcias.*
4. *Los papiros de Kahun, Berlín, Reinsner, Akhmin y algunos otros.*

Probablemente, el más importante es el papiro de Rhind el cual fue escrito por el escriba Ahmes hacia el año 1650 a.c. y actualmente se encuentra conservado en su mayor parte en el British Museum. Este papiro contiene 85 problemas matemáticos y sólo en éste papiro se habla del cálculo de áreas y se da una aproximación al valor de π . En específico, se habla del cálculo de áreas de círculos en los problemas 48 y 50.

El problema 48 dice:

Comparar el área de un círculo con la del cuadrado circunscrito.

En este problema, Ahmes considera un círculo de diámetro 9. Por lo tanto, el cuadrado circunscrito tiene lado 9 (Fig. 5.1).

Luego, podemos dividir cada lado del cuadrado en tres partes iguales formando un octágono inscrito en el cuadrado de lado 9 (Fig. 5.2). Ahmes no tomó en cuenta los triángulos sombreados de la Figura 5.2. Así, el octágono quedó compuesto de 5 cuadrados de lado 3 y 4 medios cuadrados; de tal modo que el área del octágono es de 63, lo cual es muy próximo a 8^2 ; es decir, que Ahmes calculó el área de un círculo de diámetro 9 aproximando al área de un cuadrado

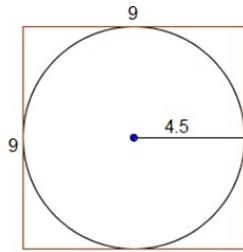


Fig. 5.1

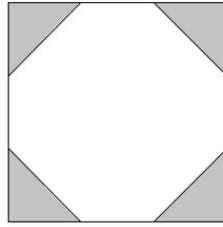


Fig. 5.2

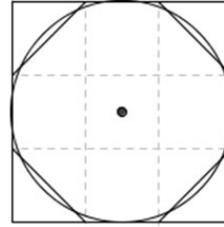


Fig. 5.3

de lado 8 (Fig. 5.3).

Notemos que el área de el círculo de diámetro 9 es $\pi \times (\frac{9}{2})^2$, y que comparándolo con lo que obtuvo Ahmes, nos damos cuenta que lo que hizo es muy meritorio, porque sólo hay $\frac{6}{1000}$ de diferencia.

El problema 50 dice:

Calcular el área de un campo circular de diámetro 9.

En este problema, Ahmes se limita a calcular el área del círculo considerándola igual a la de un cuadrado de lado igual al diámetro disminuido $\frac{1}{9}$; es decir, si denotamos A_c al área de dicho cuadrado, D al diámetro y r al radio se tendrá que,

$$A_c = \left(D - \frac{1}{9}D \right)^2.$$

De tal manera,

$$A_c = \left(\frac{8}{9} \right)^2 \times 4r^2.$$

Por lo tanto, $\pi = \left(\frac{8}{9} \right)^2 = 3.1604$.

Es importante notar que no se sabe a ciencia cierta como Ahmes llega a esta aproximación, se ha especulado que tal vez fue en base al problema 48 [4, p. 18].

5.1.2. π en el teselado del templo de Diana en Nimes

Observando el teselado del templo de Diana en Nimes [Cap. 4, Fig. 4.27] nos damos cuenta que podemos ver un dodecágono, el cual está formado por un hexágono regular, seis cuadrados situados de uno en uno en cada lado del hexágono, y seis triángulos equiláteros dispuesto de tal manera que entre cada dos cuadrados hay un triángulo (Fig. 5.4).

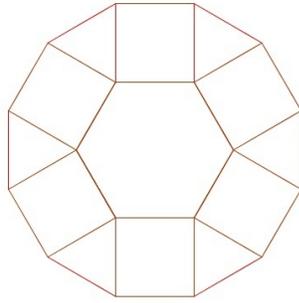


Fig. 5.4

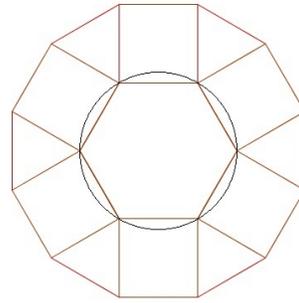


Fig. 5.5

Así, los lados del dodecágono son iguales, y como los ángulos interiores del cuadrado son de 90° y los de el triángulo equilátero son de 60° , tenemos que los ángulos interiores del octágono son de 150° . Luego, el dodecágono es regular.

Por otro lado, como el hexágono es regular por la Propiedad 4.1.8, podemos trazar una circunferencia de radio r circunscrita al hexágono (Fig. 5.5).

Llamemos O al centro del dodecágono; A, B, A', B' a los vértices de un cuadrado y llamemos H, H' a los puntos medios de los segmentos AB y $A'B'$, respectivamente (Fig. 5.6).

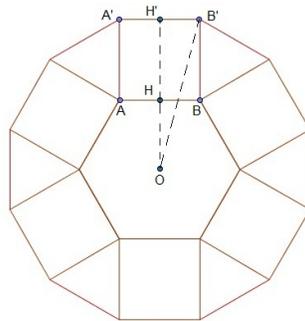


Fig. 5.6

Nota 5.1.2. El punto O también es el centro del hexágono; A, B también son vértices del hexágono, además A, B son un vértice de dos triángulos situados en dos posiciones diferentes.

De tal manera, que el apotema del hexágono es el segmento OH el cual coincide con $r \frac{\sqrt{3}}{2}$ [Cap. 3, Sec 3.3]. Por otra parte, $\overline{HH'} = \overline{AB} = \overline{AA'}$ y esta medida coincide con el radio r de la circunferencia circunscrita al hexágono; es decir, $\overline{HH'} = r$.

En consecuencia,

$$\overline{OH'} = r \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Ahora, tracemos una circunferencia que sea tangente a todos los lados del dodecágono; es decir, que tenga radio $\overline{OH'}$, y tracemos otra circunferencia que circunscriba al dodecágono; es decir, que tenga radio $\overline{OB'}$ (Fig. 5.7).

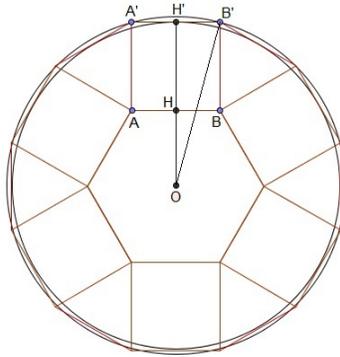


Fig. 5.7

Obtenemos que, *el perímetro del dodecágono queda comprendido entre los perímetros de las dos circunferencias.*

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $H'OB'$, tenemos que

$$(\overline{OB'})^2 = \left(r \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2.$$

De esto,

$$\overline{OB'} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Por otro lado, sabemos que el perímetro del dodecágono es igual a $12r$; de tal modo, que la razón entre el perímetro del dodecágono y los diámetros de las circunferencias, esta dado por,

$$\frac{12r}{2r(\sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

y

$$\frac{12r}{2r\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{6}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Ahora, por (5.1), se sigue que

$$\frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} < \pi < \frac{6}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Por lo tanto, sacando un valor promedio de π , se obtiene que, $\pi \approx 3.15$. Lo cual fue un valor muy aceptable.

La precisión es aún mayor si extendemos el teselado y retomamos el cálculo sobre un polígono más grande (Fig.5.8).

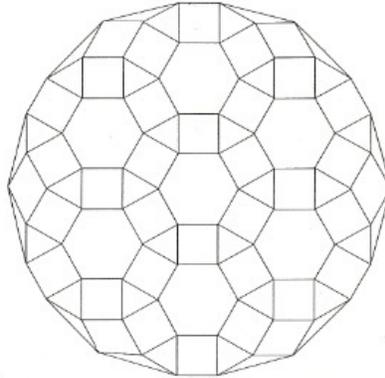


Fig. 5.8

Nota 5.1.3. Este polígono formado no es regular.

De manera análoga, se toma O como el centro de este polígono de 18 lados. Luego, llamemos K, L, M, J a los vértices de un cuadrado; I, Q a los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrado situado a un lado del cuadrado $KLMJ$, y llamemos P, N a dos vértices del polígono de 18 lados (Fig. 5.9).

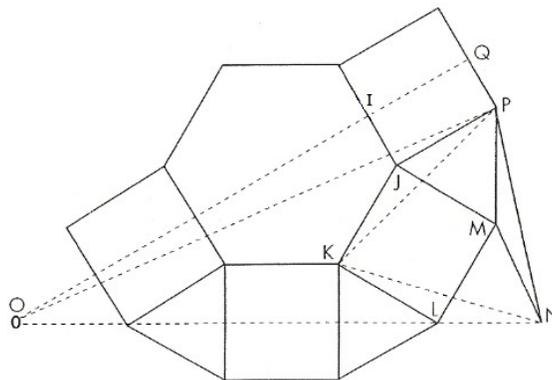


Fig. 5.9

Nota 5.1.4. Notar que O sigue siendo el centro del hexágono regular y que la Figura 5.9, esta extraída de una parte del teselado de la Figura 5.8, donde el cuadrado que contiene al punto Q es un lado del polígono de 18 lados.

Notemos que,

$$\overline{OQ} = \frac{r\sqrt{3}}{2} + r + r\sqrt{3} + r$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular.

De aquí,

$$\overline{OQ} = r \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

Ahora, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OQP , tenemos que

$$\overline{OP} = r\sqrt{11 + 6\sqrt{3}}.$$

Por otro lado, como $\overline{JP} = \overline{KJ} = r$, se sigue que el triángulo KJP es isósceles. Luego, el ángulo KJP es de 150° , el ángulo JKP es igual al ángulo JKP y son de medida 15° .

En consecuencia, aplicando el Teorema 3.2.1, al triángulo KJP se tiene:

$$\overline{KP} = \frac{r \operatorname{sen} 150}{\operatorname{sen} 15} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Por otra parte, el triángulo KPN es equilátero. La razón es porque los triángulos KJP , KLN y NMP son iguales.

Así,

$$\overline{PN} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, podemos calcular el perímetro del polígono de 18 lados. Llamamos P' a dicho perímetro de tal manera que,

$$P' = r \left(6 + 12\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right).$$

Finalmente, los cocientes $\frac{P'}{2r\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ y $\frac{P'}{2r\sqrt{11+6\sqrt{3}}}$, dan dos nuevos valores de π ,

$$\pi \approx 3.154$$

y

$$\pi \approx 3.173.$$

Nota 5.1.5. Notemos que a diferencia del procedimiento realizado en el dodecágono, aquí las circunferencias no comprenden el perímetro, la razón es porque el polígono de 18 lados no es regular. Por eso tenemos dos aproximaciones de π .

5.1.3. Método de los polígonos regulares inscritos

Observemos que en los ejemplos anteriores hemos hablado como si se conociera desde siempre, que el área del círculo es $\pi \times r^2$. A continuación mostraremos porqué conocemos hoy en día que el área de cualquier círculo esta dada por esta expresión.

Comencemos por una definición.

Definición 5.1.1. Diremos que dos polígonos son *semejantes* cuando sus ángulos son iguales respectivamente, y cuyos lados respectivos son proporcionales.

Ejemplo 5.1.2. Sean $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ dos polígonos, diremos que son semejantes si $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$; $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$ y $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \frac{\overline{DE}}{D'E'} = \frac{\overline{EA}}{E'A'}$ (Fig. 5.10).

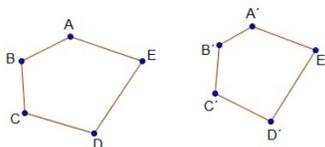


Fig. 5.10

Teorema 5.1.1. La proporción entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la proporción de dos lados homólogos cualesquiera.

Demostración. Sean $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ dos polígonos semejantes; P y P' los perímetros de los polígonos semejantes, respectivamente.

Veamos que, $\frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \frac{\overline{DE}}{D'E'} = \frac{\overline{EA}}{E'A'}$.

Por ser $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ dos polígonos semejantes, se tiene que

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \frac{\overline{DE}}{D'E'} = \frac{\overline{EA}}{E'A'}.$$

De modo que, definimos:

$$r := \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \frac{\overline{DE}}{D'E'} = \frac{\overline{EA}}{E'A'}.$$

En consecuencia,

$$r(\overline{A'B'}) = \overline{AB}; r(\overline{B'C'}) = \overline{BC}; r(\overline{C'D'}) = \overline{CD}; r(\overline{D'E'}) = \overline{DE}; r(\overline{E'A'}) = \overline{EA}.$$

De manera que,

$$r(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'}) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}.$$

Así,

$$r = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'}}.$$

Finalmente, por ser P y P' los perímetros, se obtiene que,

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

y

$$P' = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'A'}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}. \quad \square$$

Teorema 5.1.2. Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.

Demostración. Sean $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ dos polígonos regulares con el mismo número de lados.

De esto, $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$; $\angle D = \angle D'$; $\angle E = \angle E'$.

Además, por ser los polígonos regulares, tenemos que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$$

y

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'A'}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}.$$

Por lo tanto, los polígonos regulares son semejantes. \square

Teorema 5.1.3. La proporción entre los perímetros de dos polígonos regulares con el mismo número de lados es igual a la proporción entre los radios de las circunferencias circunscritas a los polígonos regulares e igual a la proporción de los apotemas respectivos de los polígonos regulares.

Demostración. Sean $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ dos polígonos regulares con el mismo número de lados; O y O' los centros de los polígonos respectivamente; P y P' los perímetros de los polígonos respectivamente; a y a' los apotemas respectivamente, y r y r' los radios de las circunferencias circunscritas a cada polígono (Fig. 5.11).

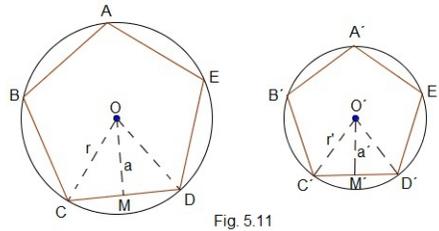


Fig. 5.11

Veamos que, $\frac{P}{P'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}$.

Por el Teorema 5.1.2, los polígonos son semejantes, y por el Teorema 5.1.1, se tiene que

$$\frac{P}{P'} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}.$$

Por otro lado, como $(ABCDE)$ y $(A'B'C'D'E')$ son polígonos regulares se dice que, $\angle COD = \angle C'O'D'$ y $\angle BCD = \angle B'C'D'$.

Además, por la Propiedad 4.1.9, se sigue que los triángulos BOC y COD son congruentes, de tal manera que el segmento CO es bisectriz del ángulo BCD . Análogamente, $C'O'$ es bisectriz del ángulo $B'C'D'$.

En consecuencia, $\angle OCD = \angle O'C'D'$ y $\angle CDO = \angle C'D'O'$.

Así, los triángulos COD y $C'O'D'$ son semejantes. Luego, $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{r}{r'}$. Entonces:

$$\frac{P}{P'} = \frac{r}{r'}.$$

Por otra parte, los triángulos COM y $C'O'M'$ son semejantes.

Por lo tanto, $\frac{P}{P'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}$. □

Teorema 5.1.4. Si el número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia se aumenta indefinidamente, entonces el apotema tiende hacia el radio de la circunferencia como límite.

Demostración. Sea $(ABCDEF)$ un polígono regular de n lados, O el centro del polígono, l la longitud de los lados del polígono, r el radio de la circunferencia y a el apotema del polígono (Fig. 5.12).

Sabemos que $a < r$, y por la *desigualdad triangular* [16, p. 92, T. 4.17], tenemos que

$$r - a < \overline{AM}.$$

donde M es el punto medio del segmento AB .

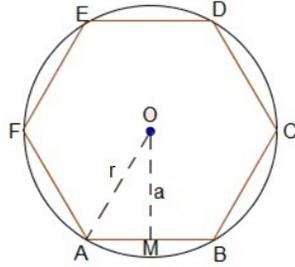


Fig. 5.12

Por otro lado, puesto que M es punto medio del segmento \overline{AB} , se sigue que

$$\overline{AM} < l.$$

Así,

$$r - a < l. \quad (5.2)$$

Ahora, si tomamos n lo suficientemente grande, tenemos que la longitud l disminuye. Luego, por (5.2) se puede decir que $r - a$ también disminuirá; es decir, que se puede hacer $r - a$ tan pequeño como queramos.

Por lo tanto, a medida que n va creciendo, se tiene que el apotema a va tendiendo a r como límite. \square

Teorema 5.1.5. La proporción de la longitud de dos circunferencias cualesquiera, es igual a la proporción de sus radios.

Demostración. Sean C_1 y C_2 las longitudes de dos circunferencias de radios r_1 y r_2 respectivamente. Luego, inscribanse en las circunferencias dos polígonos regulares de perímetro P y P' , respectivamente (Fig. 5.13).

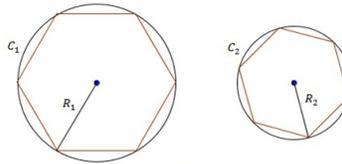


Fig. 5.13

Por el Teorema 5.1.3 tendremos que,

$$\frac{P}{P'} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Ahora, supongamos que el número de lados de los polígonos aumenta indefinidamente.

En consecuencia, podremos pensar que P y P' tenderán hacia C_1 y C_2 como límite, respectivamente.

Por lo tanto,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}. \quad \square$$

Corolario 5.1.3. La proporción entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es constante.

Notemos que, como $\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$, se sigue que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{2} \times \frac{r_1}{r_2}.$$

De tal manera que,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2r_1}{2r_2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{C_1}{2r_1} = \frac{C_2}{2r_2}.$$

Finalmente, con esto ya podemos decir que a esa constante le llamamos π y notemos que la ecuación (5.1) la hemos justificado.

Corolario 5.1.4. La longitud de una circunferencia esta dada por la expresión $C_1 = \pi \times 2r_1$.

Teorema 5.1.6. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema.

Demostración. Sea P el perímetro de un polígono regular, a el apotema del polígono y A el área del polígono.

Ahora, tomemos O el centro del polígono regular y si pensamos que lo unimos a cada vértice del polígono, obtendremos tantos triángulos como lados tiene el polígono, los cuales tienen todos altura igual al apotema a .

De tal manera, que el área de cada triángulo es $\frac{a \times l}{2}$, donde l es la medida de los lados del polígono regular.

Por otro lado, sabemos que el área de los rompecabezas no se altera [Cap. 1].

Así, tendremos que la suma de todas las áreas de los triángulos será igual al área del polígono regular, pero la suma de todos los lados de longitud l , es el perímetro P del polígono.

Por lo tanto,

$$A = \frac{P \times a}{2}. \quad \square$$

Teorema 5.1.7. El área de un círculo es $\pi \times r^2$, donde r es el radio del círculo.

Demostración. Sea C un círculo; P un polígono regular inscrito en C ; p el perímetro de P ; a el apotema de P ; n el número de lados de P y llamemos A_C al área del círculo.

Por el Teorema , se tiene que $A_P = \frac{P \times a}{2}$, donde A_P es el área del polígono P .

Ahora, por el Teorema 5.1.4, si n aumenta indefinidamente a tiende como límite a r , donde r es el radio del círculo. Luego, podemos pensar que P tiende hacia la longitud de la circunferencia del círculo C como límite.

Finalmente por el Corolario 5.1.4, se obtiene que,

$$A_C = \pi \times r^2. \quad \square$$

En resumen,

1. Se puede tratar de medir la relación del perímetro de la circunferencia con respecto a su diámetro; es decir,

$$\pi = \frac{C_1}{2r_1}.$$

2. Se puede tratar de examinar la relación del área con el radio al cuadrado; es decir,

$$\pi = \frac{A_C}{r^2}.$$

Parece un poco confuso, pero estas dos afirmaciones de π , se hacen más evidentes por el siguiente argumento que utilizó Arquímedes.

“Si cortamos el círculo en sectores y los ubicamos como lo indica la Figura 5.14, obtenemos una figura casi rectangular, porque cuando mayor sea la cantidad de sectores circulares, más rectangular será la superficie, podemos entonces comparar el área de un círculo con la de una rectángulo con altura r y largo $r\pi$, donde obtenemos que el área del círculo es $\pi \times r^2$ ” [3, p. 196].

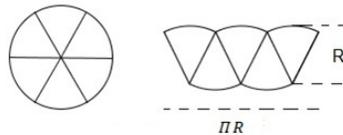


Fig. 5.14

Ahora, continuemos con el método de aproximación de π por los polígonos regulares.

El problema que tenemos es que necesitamos calcular la medida de lado L_n del polígono regular de n lados, que está inscrito en una circunferencia de radio r y también necesitamos calcular la medida del lado L_{2n} del polígono regular de lados $2n$, que está inscrito en la circunferencia de radio r .

Fijemonos en la Figura 5.15, y notemos que $\overline{AB} = L_n$; $\overline{AC} = L_{2n}$ y $\overline{OH} = a$; donde a es el apotema del polígono de n lados.

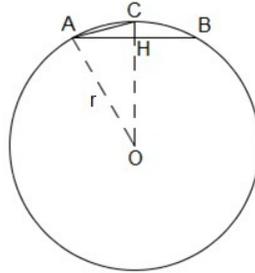


Fig. 5.15

Así, $\overline{HC} = r - a$.

Por otro lado, \overline{OH} es perpendicular a \overline{AB} en su punto medio H , de aquí

$$\overline{AH} = \frac{L_n}{2}.$$

Además, por el teorema de Pitágoras en el triángulo AHO , se tiene que

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{L_n^2}{4}}.$$

De tal manera que,

$$\overline{HC} = r - \sqrt{r^2 - \frac{L_n^2}{4}}.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ACH , se obtiene que,

$$L_{2n} = \sqrt{r^2 + r - r\sqrt{4r - L_n^2}}.$$

Haciendo $r = 1$, obtenemos que

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}}.$$

De tal modo que el diámetro será 2, y usando la relación $\pi = \frac{P}{D}$, donde P es el perímetro del polígono regular de lado L_{2n} , y D el diámetro 2. Podemos hallar una aproximación de π .

Si $n = 6$, entonces $L_6 = 1$.

De aquí,

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = 0.51763809$$

En consecuencia, el perímetro de polígono de 12 lados es 6.21165708.

$$L_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,51763809)^2}} = 0.26105238.$$

Luego, el perímetro de polígono de 24 lados es 6.26525722.

$$L_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,26105238)^2}} = 0.13080636.$$

Así, el perímetro de polígono de 48 lados es 6.27870041.

⋮

$$L_{768} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,01636228)^2}} = 0.00818121.$$

sucesivamente, el perímetro de polígono de 768 lados es 6.28316841.

Ahora, pensemos que aproximadamente P coincide con la longitud de la circunferencia de radio 1, y aplicando que $\pi = \frac{P}{D}$, tendríamos que $\pi = 3.141584705$.

Y este es el método de los polígonos regulares inscritos, el cual fue empleado por Arquímedes para llegar a la aproximación $\frac{22}{7}$.

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

El objetivo de este capítulo no es tanto aportar elementos pedagógicos sino dar una idea (muy somera) de los ecos históricos extraordinariamente numerosos provocados por el número π .

Case señalar que el estudio de las propiedades características de la circunferencia se establece desde la primaria. De manera que, consideramos que sobre este punto, es deseable y necesario proponer **situaciones de medición** ligadas a los objetos redondos, y suscitar **la intuición de esa relación constante**. Ninguna demostración puede ser aportada, pero sería lamentable dejar de lado la “aproximación egipcia”.

Por el contrario, en el bachillerato podemos ya disponer de herramientas útiles para un acercamiento metódico inspirado por el de Arquímedes (polígonos regulares). Es el momento de retomar los métodos recientemente adquiridos.

Capítulo 6

CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIDA

¿Porqué en temas de Geometría tocamos el tema de la medida? La respuesta es muy simple, porque existen muchos ejemplos en la vida cotidiana, en los cuales podemos ver lo mucho que están vinculados ambos temas; por ejemplo, cuando llega la noche y es momento de ir a descansar, para poder hacerlo de forma adecuada se necesita una cama que cumpla ciertos requisitos geométricos y de medida que haran posible el mejor descanso, otro ejemplo son las botellas en las cuales existe una geometría y una medida (*volumen*), y así podemos seguir dando ejemplos donde la relación de la geometría y la medida sea evidente. De manera que podemos considerar a la medida como parte común entre los campos geométrico y numérico porque la interrelación de las teorías matemáticas conduce a avances de la matemática en sí, y también descubre un río de relaciones mutuas en el mundo real que reflejan esta teorías.

No es de extrañarnos, que la aritmética y la geometría son las dos raíces sobre las cuales ha crecido la matemática. Además, su influencia se hace sentir desde su nacimiento. Incluso la simple medición de un segmento de recta representa una fusión de la geometría y la aritmética. De modo que para medir la longitud de un objeto se le aplica a éste una cierta unidad de longitud y se calcula cuántas veces es posible repetir esa operación. Notemos que, el primer paso es de carácter geométrico y el segundo paso es de caracter aritmético.

Entendemos como *Magnitud* a la propiedad que poseen los objetos en las relaciones entre sí, que permiten ser medidos, y que *Medir* es comparar una magnitud con otra, tomando primero a una como patrón (*unidad*) con la cual comparar la siguiente, atribuyendo un número a la cantidad de la comparación.

Así, en general la medición de cualquier magnitud combina el cálculo con alguna operación específica que es característica de esa magnitud, por ejemplo, podemos decir cuándo un peso es el doble del otro, pero no podemos decir cuándo un objeto está dos veces más caliente que otro, o cuándo un sonido es dos

veces más agudo que otro.

Por supuesto que en bachillerato no pueden encararse los temas de esta forma. Pero el concepto de magnitud funciona de manera contundente con las longitudes. Desafortunadamente, en el proceso de convenir todas las comparaciones al número de unidades que equivalen a la magnitud que se mide ocurre que la unidad elegida no está contenida un número entero de veces en la magnitud, por lo que el simple cálculo del número de unidades no es suficiente. Surge entonces la necesidad de fraccionar la unidad de medida para poder expresar la magnitud con mayor precisión. Por lo que, esta interacción conduce a la aparición del concepto importante de las *fracciones*, como extensión del concepto de número entero [1, p. 44].

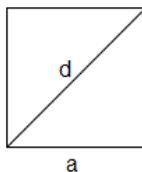
6.1. Aritmética y Geometría

Al principio de la aparición de las fracciones, la gente no pensó en la cuestión de que si al medir dos longitudes, la medida podía expresarse con una fracción. La razón es porque si al medir dos longitudes se llegaba a partes muy pequeñas, éstas se desechaban sin más. Pero esta práctica entra en contradicción con el teorema de Pitágoras, toda vez que de este teorema se sigue la existencia de dos longitudes con las cuales su cociente no puede expresarse por un cociente de número enteros. De esto surge la siguiente noción.

Definición 6.1.1. Diremos que dos segmentos se llaman *inconmensurables* si el cociente de sus medidas no puede expresarse por un cociente de número enteros.

Por ejemplo, la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado.

Sea C un cuadrado de lado a y de diagonal d .



Por el teorema de Pitágoras ,

$$a^2 + a^2 = d^2.$$

Luego,

$$2a^2 = d^2.$$

Así,

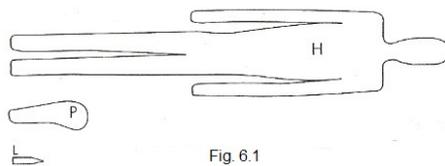
$$\sqrt{2}a = d.$$

Note que, d no es un número entero. De esta forma, el cociente de sus medidas es $\frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$ y no puede expresarse como el cociente de dos números enteros.

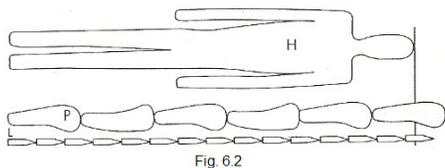
Por desgracia, la forma simplificada en que hoy explican los cursos de geometría en el bachillerato, ocasiona que no estemos tan acostumbrados a los números *irracionales* y no operemos comodamente con las raíces cuadradas por lo que la existencia de las magnitudes incommensurables no nos preocupe mientras no tengamos que trabajar con ellas.

La medida en su sentido original no es otra cosa que el cociente de una magnitud con otra tomada como unidad, estableciendo entonces un *sistema*. La medida también puede ser cociente de áreas, pesos, etcétera.

Ejemplo 6.1.2. Medir la longitud de la silueta H ya sea con la unidad “ P = pie” o con la unidad “ L = lápiz” (Fig. 6.1).



Obtendremos los siguientes resultados: (Fig. 6.2).



H es más grande que 5 pies, pero más pequeño que 6 pies; H es más grande que 14 lápices pero más pequeño que 15.

Anotando, se tendría que,

$$5P < H < 6P$$

y

$$14L < H < 15L$$

Con mucha suerte, podremos encontrar una combinación de P y L que parezca “dar justo” con la longitud de H (Fig. 6.3).

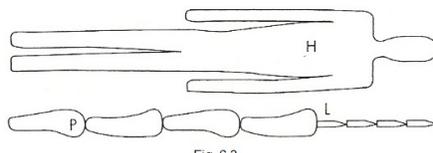


Fig. 6.3

En consecuencia, es necesario disponer de una forma de comparar P con L . Para ello, confrontemos las series formadas por P y L (Fig. 6.4).

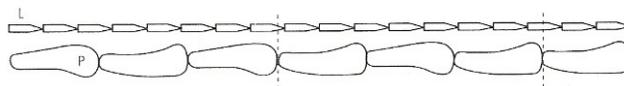


Fig. 6.4

Ambas series “parecen” coincidir en $3P$ y $8L$. Pero ello no se confirma al comparar $6P$ y $16L$. Sin embargo, $7P$ y $18L$ parece una coincidencia aceptable; de otra forma deberíamos seguir buscando. Vemos que la coincidencia no es segura y que la relación entre las unidades, en general, es una fracción. De manera que la conversión entre unidades no siempre es sencilla.

Supongamos que deseamos dividir el segmento AB por medio del segmento CD tomado como unidad (Fig. 6.5).



Fig. 6.5

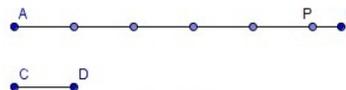


Fig. 6.6

Ahora, apliquemos el segmento CD al segmento AB tantas veces como el segmento CD este contenido en el segmento AB (Fig. 6.6). Supongamos que esto ocurre n_0 veces. Si todavía queda de resto el segmento PB del segmento AB , entonces dividimos el segmento CD en 10 partes y medimos el segmento PB con estas *décimas*. Supongamos que son n_1 *décimas* las que caben en el segmento PB . Si después de ello queda todavía de resto un nuevo segmento, dividimos de nuevo la medida en 10 partes; es decir, dividimos el segmento CD en cien partes (*centésimas*), y repetimos la misma operación; y así sucesivamente. De manera que, el proceso de medida termina o continúa. Pero en cualquiera de los dos casos, tenemos que el segmento CD esta contenido n_0 veces, las *décimas* n_1 veces, las *centésimas* n_2 veces, etcétera.

Así, el cociente podrá representarse por una fracción decimal con n_0 unidades, n_1 decimas, etcétera.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots .$$

Esto muestra la forma en que opera el sistema decimal.

6.2. *Estimación*

La estimación de una medida puede ser interpretada en función de tres componentes:

1. El primero es **perceptivo**. Se puede tratar de interiorizar las unidades habituales. En cuanto a las longitudes, las unidades habituales son kilómetros, metros y, según el oficio, centímetros o milímetros.
2. El segundo es **cultural**. Se trata de adquirir puntos de referencia normalmente utilizados en la vida cotidiana. Por ejemplo, sabemos que una caja de leche tiene un litro.
3. El último componente es de **procedimiento** y consiste en utilizar estos elementos para obtener estimaciones más complejas. Por ejemplo ¿Cuál es la altura del techo?

Esta capacidad se emplea en la vida diaria, y sólo se obtiene ejercitandola, en secuencias breves y frecuentes. Disponer de numerosos puntos de referencia no es útil, a menos que estén bien integrados. Lamentablemente, en la escuela se descuida este objetivo.

La experiencia muestra que la longitud es la medida que mejor se estima. El peso y el tiempo son difíciles de estimar mediante la percepción. Por ello resulta muy útil multiplicar los puntos de referencia habituales. La experiencia muestra fácilmente que en un grupo de veinte adultos, la estimación de longitudes del orden de los diez centímetros o de un metro tiene un margen de incertidumbre de aproximadamente el 50 %.

6.3. *Las áreas*

Siempre es posible comparar la longitud de dos objetos rectilíneos. Pero no siempre se puede comparar dos superficies. Si una puede cubrir a la otra, es porque es más grande. Pero cuando sus formas y tamaños hacen imposible que una cubra a la otra, es necesario recurrir a otros medios.

6.3.1. Geoplano

El Geoplano es un cuadrado (*generalmente de madera*) donde hay clavos distribuidos de manera regular, y sobre los cuales se ponen ligas las cuales se extienden para formar o construir contornos poligonales (Fig. 6.7).

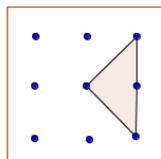


Fig. 6.7

Definición 6.3.1. Diremos que dos figuras en el Geoplano son *diferentes* si no podemos superponer su reproducción; es decir, que la disposición de la figura no sea tomada en cuenta con aproximación de un desplazamiento o una rotación.

En base a esta definición podemos obtener en el geoplano de nueve clavos, ocho triángulos diferentes (Fig. 6.8). Este proceso consiste en formar un triángulo y luego de alguna manera reproducirlo (*por ejemplo en una hoja de papel*), y compararlo en superposición con los que ya hayamos obtenido y si es diferente en base a la definición 6.3.1, conservarlo.

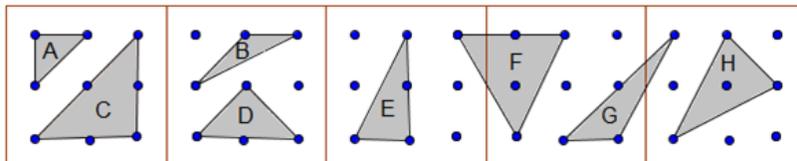


Fig. 6.8

Ahora, si tratamos de medir los triángulos notamos que podemos lograr unas comparaciones evidentes, por ejemplo:

$$A < C, B < C$$

$$A < D, A < E$$

$$B < E, A < F$$

$$A < G, A < H$$

$$B < F, B < G$$

$$B < H, D < C$$

y

$$E < C, D < F$$

Por otro lado, la superposición no permite que podamos decir como son A con B , B con D , B con E , C con F , C con G , C con H , E con H , D con E , D con G , F con H , F con G y G con H .

Ahora, con los triángulos A y B notemos que podemos formar paralelogramos (Fig. 6.9), los cuales nos muestran que los triángulos A y B tienen la misma área, de modo que podemos descomponer todos los triángulos en elementos de A o elementos de B (Fig. 6.10).

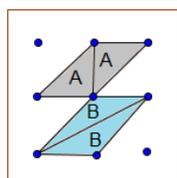


Fig. 6.9

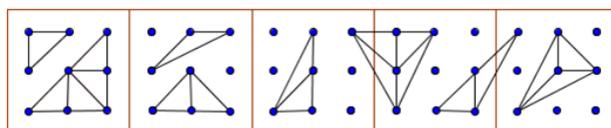


Fig. 6.10

Si elegimos estos elementos A o B como unidad de área, todos los triángulos relevados y cualquier figura que se construya tomando los clavos como vértices, se pueden medir en números enteros de unidades A o B (Fig. 6.11).

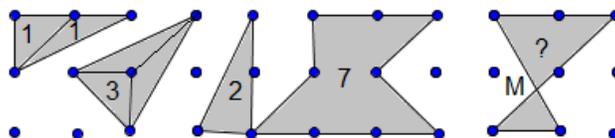


Fig. 6.11

Esta última restricción es importante: la última figura representada de la Figura 6.11, se obtiene sobre el geoplano cruzando la liga. El vértice M no está sobre un clavo del geoplano, por lo tanto resulta imposible medir el área de dicha figura con el método anteriormente citado. Su medida exacta es una consecuencia del teorema de Tales.

6.4. *Perímetro y área*

El cálculo de perímetro y de área de las figuras geométricas, así como el estudio de las fórmulas usuales, siempre están incluidos en todos los niveles de estudio, pero los resultados de la evaluaciones nacionales [24], muestran cada año que los conocimientos no se dominan y se presentan a confusión: confusión sobre las unidades, sobre las medidas y sobre las nociones de área y perímetro.

Probablemente, esto sea el resultado de una práctica insuficiente y sobre todo, del hecho de abordar, por lo general, los cálculos relativos de manera conjunta, por eso es necesario organizar trabajos prácticos, lo que permite establecer y justificar las fórmulas (*al menos de los polígonos*) haciendo necesario desglosar en el proceso de enseñanza los cálculos de área y perímetro. Incrementar la atención dedicada a las variaciones de *perímetro con área constante* y variaciones de *área con perímetro constante* contribuye a evitar la confusión de nociones y la creencia de su dependencia.

En las secciones 6.4.1 y 6.4.2, damos un ejemplo de estas variaciones.

6.4.1. *Perímetro con área constante*

¿Existen figuras que tengan diferente perímetro pero que tengan la misma área? La respuesta es si. Por ejemplo, empecemos con un cuadrado como superficie inicial. Ahora, aplicamos una transformación, la cual consiste en dividir al cuadrado inicial por la mediana y yuxtaponer las partes según el ancho (Fig. 6.12). De esta manera formamos un rectángulo más alargado. Luego, volvemos a aplicar la transformación a este rectángulo, y así sucesivamente. Finalmente, formamos una serie de rectángulos de los cuales medimos su perímetro.

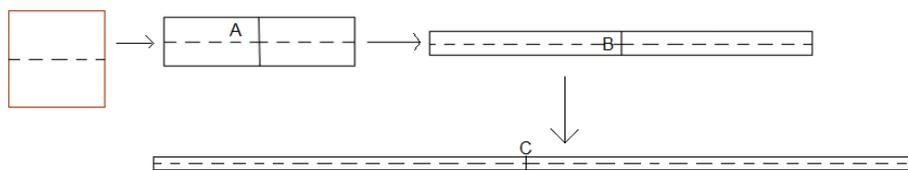


Fig. 6.12

Por ejemplo, supongamos que el cuadrado inicial tiene como medida de un lado 8, en consecuencia su área es 64. Ahora, apliquemos la transformación mencionada y observemos que es lo que pasa. Luego, consignemos las medidas a la tabla siguiente:

Movimiento	inicial	A	B	C
Altura	8	4	2	1
Ancho	8	16	32	64
Área	64	64	64	64
Perímetro	32	40	68	130

Las medidas se muestran en base a los movimientos *A*, *B* y *C*. Además la observación de este cuadro permite que para un área constante, la repetición de esta transformación proporcione un perímetro cada vez más grande. Y surgen otras preguntas como la siguiente: ¿Podemos encontrar un rectángulo de igual área a la del cuadrado de lado 8 y de un perímetro dado, por ejemplo 50 o 100

de perímetro?

Supongamos que queremos un rectángulo de perímetro 100. De tal modo deseamos encontrar un rectángulo que tenga ancho x y altura y tal que,

$$x \times y = 64 \tag{6.1}$$

y

$$2(x + y) = 100. \tag{6.2}$$

Por (6.2), se tiene que

$$y = 50 - x. \tag{6.3}$$

Sustituyendo (6.3) en (6.1), se sigue que

$$x(50 - x) = 64.$$

Tenemos que

$$x^2 - 50x + 64 = 0.$$

De aquí, las raíces de este polinomio son:

$$x = 25 \pm \sqrt{561}.$$

Por lo tanto, el rectángulo solicitado es el que tiene $25 \pm \sqrt{561}$ de ancho y $\frac{64}{25 \pm \sqrt{561}}$ de altura .

6.4.2. Área con perímetro constante

En seguida analizaremos cómo varía el área de figuras que tienen un perímetro constante.

Comencemos por un cuadrado de lado n , después a dos de los lados del cuadrado (*paralelos*) les disminuimos una unidad y se la aumentamos a los lados del cuadrado para formar un rectángulo que tenga $n-1$ de *altura* y $n+1$ de *base*, y luego volvemos a repetir para formar un nuevo rectángulo y así sucesivamente: (Fig. 6.13).

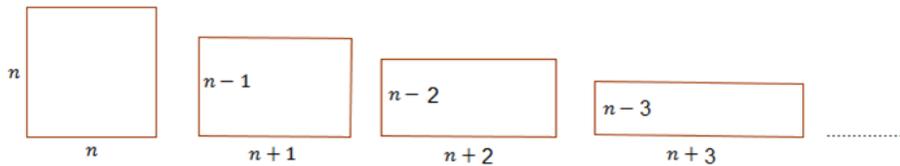


Fig. 6.13

Notemos que el perímetro del cuadrado en la Figura 6,13, es $4n$. Ahora, veamos como es el perímetro de todos los demás rectángulos.

Sabemos que la altura de cada rectángulo es $n - j$, y además cada base es $n + j$ con $j < n$. De aquí, el perímetro de cada rectángulo es:

$$2(n - j + n + j) = 4n$$

Por lo tanto, tenemos una serie de rectángulos con perímetro constante. Pero ¿Como varía el área de cada rectángulo?

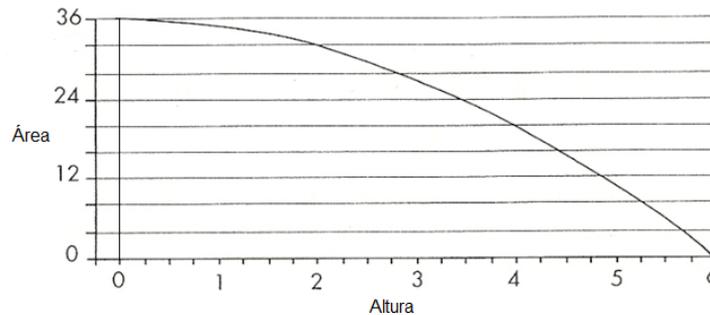
La respuesta nos la da la siguiente tabla:

Altura = h	n	$n - 1$	$n - 2$	$n - (n - 2)$	$n - (n - 1)$
Base = b	n	$n + 1$	$n + 2$	$n + (n - 2)$	$n + (n - 1)$
Area = $b \times h$	n^2	$n^2 - 1$	$n^2 - 4$	$2(2n - 2)$	$(2n - 1)$

Veamos un ejemplo. Si $n = 6$ tendremos la siguiente tabla, realizando una variación por unidad (*centímetro*).

Altura = h	6	5	4	3	2	1
Base = b	6	7	8	9	10	11
Area = $b \times h$	36	35	32	27	20	11

Ahora, de esta variación en función de la altura resulta la siguiente gráfica.



Nota 6.4.1. En la gráfica anterior, si la variación de la altura es 4 entonces el área del rectángulo es 20. En consecuencia, la altura del rectángulo es 2. Esta gráfica nos muestra como varía el área de los rectángulos, al ir realizando a la altura una variación por unidad.

6.5. Una curiosidad

Aquí, mostramos un ejemplo no trivial de la construcción de figuras cuya área está acotada pero cuyo perímetro puede crecer indefinidamente [5, p. 110].

Examinaremos el perímetro y área de figuras obtenidas a partir de un cuadrado (*Generación 1*) a través de la siguiente transformación: pasamos de una generación a la siguiente reemplazando cada lado del cuadrado por una línea quebrada compuesta por 5 segmentos iguales, según el siguiente esquema [20, p. 139]



Más específicamente, si el cuadrado mide de lado a , entonces cada lado del cuadrado será reemplazado por una línea quebrada como la siguiente: (Fig. 6.14).



Fig. 6.14

donde, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

La medida de cada segmento $a_j = \frac{a}{3}$, para todo $j = 1, \dots, 5$.

Observe que, $a_1 + a_3 + a_5 = a$.

De esta forma, obtenemos la *Generación 2* (Fig. 6.15), al aplicarle a la *Generación 1* la transformación mencionada.

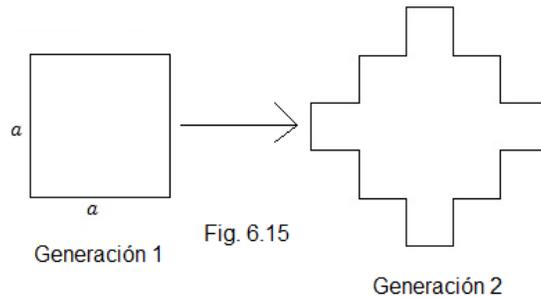


Fig. 6.15

Denotemos P_n al perímetro y A_n al área de la *Generación n*.

Por ejemplo: $P_1 = 4a$ y $A_1 = a^2$.

En la *Generación 2*, su contorno consta de 20 segmentos, donde cada uno de ellos tiene medida $\frac{a}{3}$.

Así,

$$P_2 = 20 \left(\frac{a}{3} \right).$$

Simplificando,

$$P_2 = 4a \left(\frac{5}{3} \right).$$

Ahora, calculemos A_2 . Para esto, observe que la *Generación 2* tiene la misma área que la siguiente figura,

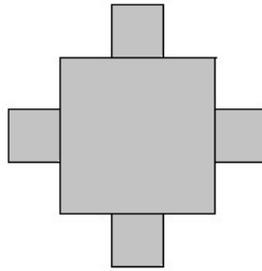


Fig. 6.16

La cual esta formada por la *Generación 1* junto con cuatro cuadrados de área $\frac{a^2}{9}$.

Luego,

$$A_2 = A_1 + 4 \left(\frac{a^2}{9} \right).$$

Como $a^2 = A_1$, tenemos que

$$A_2 = A_1 + 4 \left(\frac{A_1}{9} \right).$$

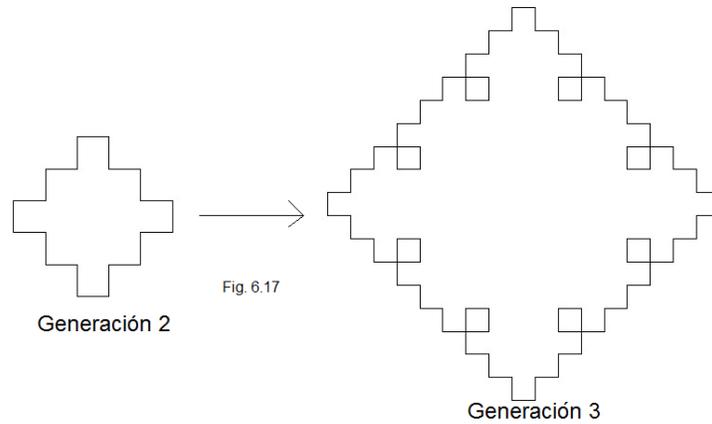
Es decir,

$$A_2 = A_1 + A_1 \left(\frac{4 \times 1}{9} \right).$$

De otra forma,

$$A_2 = A_1 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^0}{3^2} \right). \quad (6.4)$$

Si aplicamos la transformación a cada uno de los segmentos de la *Generación 2*, obtenemos la *Generación 3* (Fig. 6.17). Calculemos su perímetro y área.



Notar que al aplicar la transformación a la *Generación 2*, a cada segmento de longitud $\frac{a}{3}$, lo debemos reemplazar por cinco segmentos de igual longitud, de esta manera, se tiene que cada segmento de la *Generación 2*, lo debemos reemplazar por cinco segmentos de longitud $\frac{a}{9}$.

Así, observamos que la *Generación 3*, tiene 100 segmentos, cada uno de longitud $\frac{a}{9}$, de esto

$$P_3 = 100 \left(\frac{a}{9} \right) = 4a \left(\frac{25}{9} \right).$$

Ahora, calculemos A_3 . Para esto, observe que la *Generación 3* tiene la misma área que la siguiente figura,

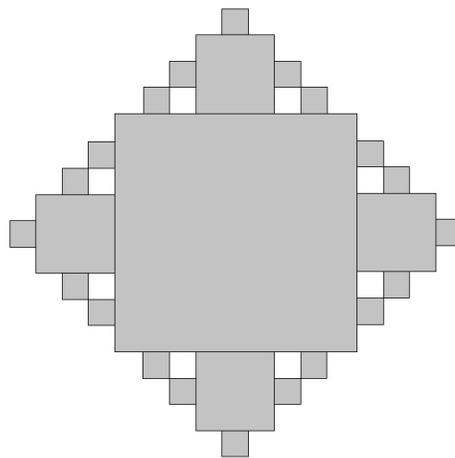


Fig. 6.18

Nota 6.5.1. Los cuadros en blanco no son considerados para calcular el área de acuerdo, a la construcción de la figura.

La cual esta formada por la *Generación 2* junto con veinte cuadrados de área $\frac{a^2}{81}$.

Luego,

$$A_3 = A_2 + 20 \left(\frac{a^2}{81} \right).$$

Como $a^2 = A_1$, tenemos que

$$A_3 = A_2 + 20 \left(\frac{A_1}{9} \right).$$

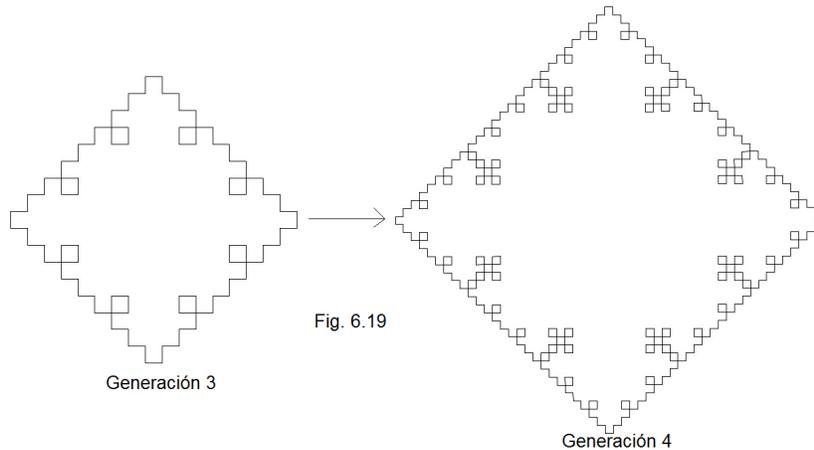
Es decir,

$$A_3 = A_2 + A_1 \left(\frac{4 \times 5}{81} \right).$$

De otra forma,

$$A_3 = A_2 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^1}{3^4} \right). \quad (6.5)$$

Si aplicamos la transformación a cada uno de los segmentos de la *Generación 3*, obtenemos la *Generación 4* (Fig. 6.19). Calculemos su perímetro y área.



Notemos que al aplicar la transformación a la *Generación 3*, a cada segmento de longitud $\frac{a}{9}$, lo debemos reemplazar por cinco segmentos de igual longitud, de esta manera, se tiene que cada segmento de la *Generación 3*, lo debemos

reemplazar por cinco segmentos de longitud $\frac{a}{27}$.

Así, la generación 4, tiene 500 segmentos, cada uno de longitud $\frac{a}{27}$, de esto que

$$P_4 = 500 \left(\frac{a}{27} \right).$$

Simplificando,

$$P_4 = 4a \left(\frac{125}{27} \right).$$

Ahora, calculemos A_4 . Para esto, observe que la *Generación 4* tiene la misma área que la siguiente figura,

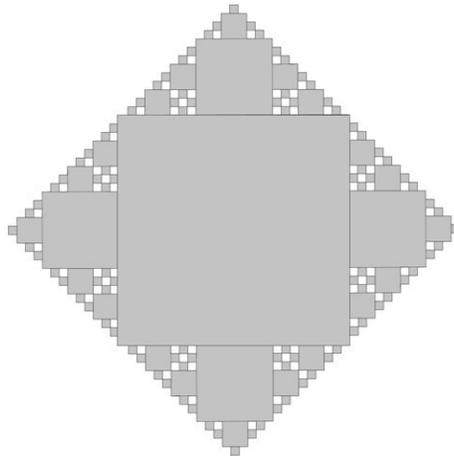


Fig. 6.20

La cual esta formada por la *Generación 3* junto con cien cuadrados de área $\frac{a^2}{729}$.

Luego,

$$A_4 = A_3 + 100 \left(\frac{a^2}{729} \right).$$

Como $a^2 = A_1$, tenemos que

$$A_4 = A_3 + 100 \left(\frac{A_1}{729} \right).$$

Es decir,

$$A_4 = A_3 + A_1 \left(\frac{4 \times 25}{729} \right).$$

De otra forma,

$$A_4 = A_3 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^2}{3^6} \right). \quad (6.6)$$

Ahora, generalizando podemos decir que para la *Generación n*, el perímetro es,

$$P_n = 4a \left(\frac{5^n}{3^n} \right).$$

Es fácil ver que,

$$P_n < P_{n+1}.$$

Así, si suponemos que n tiende a ser cada vez más grande, podremos darnos cuenta que P_n va a aumentar indefinidamente.

Por otra parte, el área para la *Generación n* la podemos deducir de manera recursiva, como sigue:

Sabemos por (6.4), (6.5) y (6.6) que,

$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = A_1 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^0}{3^2} \right)$$

$$A_3 = A_2 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^1}{3^4} \right)$$

$$A_4 = A_3 + A_1 \left(\frac{4 \times 5^2}{3^6} \right).$$

Entonces, para $n \geq 2$, tenemos que

$$A_n = A_{n-1} + A_1 \left(\frac{4 \times 5^{n-2}}{3^{2n-2}} \right).$$

Note que,

$$\frac{4 \times 5^{n-2}}{3^{2n-2}} = \left(\frac{4 \times 3^2}{5^2} \right) \left(\frac{5^n}{3^{2n}} \right).$$

Así,

$$A_n = A_{n-1} + A_1 \left(\frac{4 \times 3^2}{5^2} \right) \left(\frac{5^n}{3^{2n}} \right).$$

Ahora, observe que el segundo sumando de A_n ,

$$A_1 \left(\frac{4 \times 3^2}{5^2} \right) \left(\frac{5^n}{3^{2n}} \right)$$

tenderá a cero para n lo suficientemente grande.

Por lo que, a diferencia de P_n , A_n crece muy poco cada vez que n aumenta. De hecho, en algún momento A_n coincidirá con A_{n-1} .

En otras palabras, tenemos un ejemplo donde el área no puede exceder un determinado límite y donde el perímetro puede sobrepasar cualquier límite establecido. Este tipo de objeto geométrico se le denomina “*Fractal*”.

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

La noción de área, con o sin el empleo de fórmulas usuales, ofrece una herramienta accesible y conveniente para probar, a lo largo del bachillerato.

Las medidas de perímetro y de área, para las cuales hemos señalado el riesgo de confusión, abren una basta de posibilidad de problemas concretos. Un problema concreto es una situación que permite pasos empíricos, validaciones diversas así como la intervención de modelos variados (geométricos y algebraicos), como lo muestran los estudios a perímetro constante o a área constante. Es un dominio propicio para abordar la noción de función, el uso de cuadros y de graficos y no solamente en el caso de funciones lineales o afines. Tales situaciones pueden ser abordadas, según su complejidad, durante todo el bachillerato.

Actividad

Comencemos por pedir un cuadrado de 3×3 (Fig. 6.21).

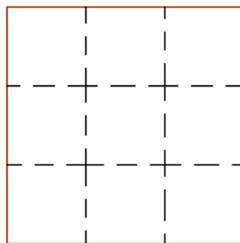
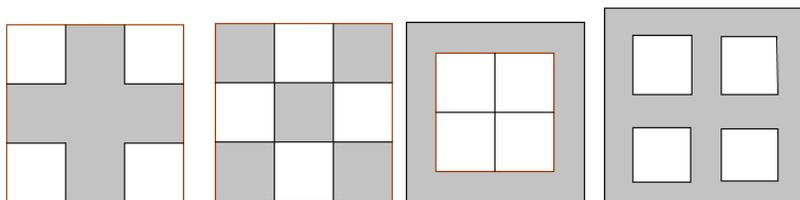


Fig.21

Notemos que es un cuadrado que inicialmente tiene 9 cuadros y se les pedirá a los estudiantes que le quiten 4 cuadritos de tal manera que el área siempre sea 5.

Así, los alumnos podrán descubrir que hay varias maneras de quitar cuatro cuadros, manteniendo siempre un área de 5. Aquí unos ejemplos:



Y una vez que los alumnos muestren su forma de quitar los 4 cuadritos de tal manera que se conserve el área podemos preguntar: ¿Qué sucede con el perímetro? Y entre todos hacer conjeturas sobre lo que éste pasando con el fin de reforzar la independencia del perímetro y área.

Capítulo 7

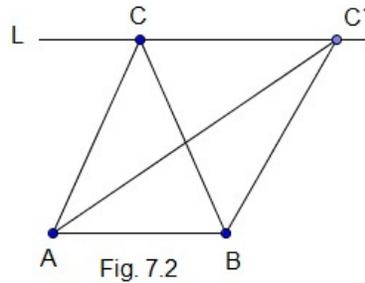
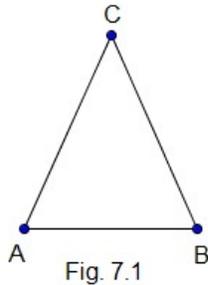
ÁREAS

Este capítulo profundiza sobre la noción de área con la finalidad de establecer numerosas propiedades geométricas. El principio de multiplicidad de enfoques permanece, pero la noción de área es un buen ejemplo de continuidad pedagógica en el bachillerato.

He aquí el primer resultado que sin duda es uno de los más importantes de este capítulo.

Teorema 7.0.1. Si desplazamos un vértice de un triángulo sobre una paralela al lado opuesto, su área no varía.

Demostración. Sea T un triángulo con vértices A , B , C (Fig. 7.1).



Tracemos la paralela L al segmento AB que pasa por C , y desplacemos el vértice C sobre L para formar el triángulo ABC' (Fig. 7.2).

Veamos que, $a[\Delta ABC] = a[\Delta ABC']$.

Puesto que $L \parallel \overline{AB}$, tenemos que la altura de los triángulos ABC y ABC' son iguales, y claramente tienen la misma base.

Por lo tanto,

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta ABC']. \quad \square$$

Recordemos que $a[\Delta ABC]$ denota el área del triángulo ABC .

Corolario 7.0.1. $a[\Delta AEC] = a[\Delta EBC']$ si y sólo si $\overline{CC'} \parallel \overline{AB}$ (Fig. 7.3).

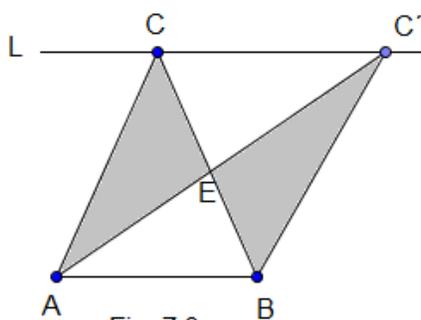


Fig. 7.3

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $a[\Delta AEC] = a[\Delta EBC']$.

Note que $a[\Delta ABC] = a[\Delta ABC']$ por el Teorema 7.0.1, y que tienen la misma base, a saber el segmento AB . Luego, tienen la misma altura, $\overline{CH} = \overline{CH'}$ (Fig. 7.4).

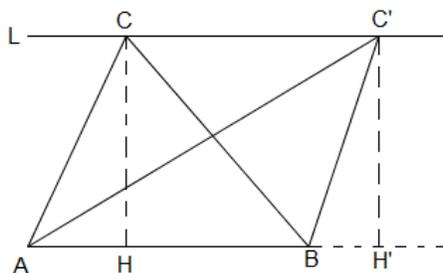


Fig. 7.4

Así,

$$\overline{CC'} \perp \overline{CH}$$

y

$$\overline{CC'} \perp \overline{CH'}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{CC'} \parallel \overline{AB}.$$

(\Leftarrow) Supongamos que $\overline{CC'} \parallel \overline{AB}$.

Por el Teorema 7.0.1, $a[\Delta ABC] = a[\Delta ABC']$.

Por otro lado,

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta AEB] + a[\Delta AEC]$$

y

$$a[\Delta ABC'] = a[\Delta AEB] + a[\Delta C'EB].$$

Así,

$$a[\Delta AEC] = a[\Delta EBC']. \quad \square$$

Teorema 7.0.2. Dado un paralelogramo, al deslizar uno de sus lados a lo largo de la recta que lo soporta, su área no varía.

Demostración. Sea P un paralelogramo con vértices A, B, C, D , y desplazemos el segmento CD sobre el segmento AB (Fig. 7.5).

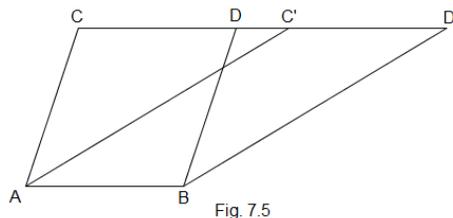


Fig. 7.5

Así, formamos el paralelogramo P' con vértices A, B, C', D' como en la figura.

Veamos que, $a[P] = a[P']$.

Notemos que por el Teorema 7.0.1, $a[\Delta ABD] = a[\Delta ABC']$ (Fig. 7.6).

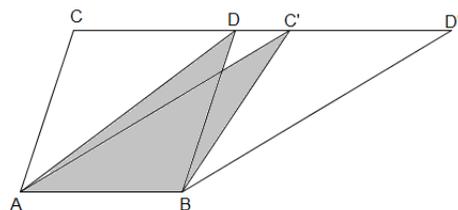


Fig. 7.6

Por otro lado, $\overline{CD} = \overline{AB}$ y los triángulos ACD y ABD tienen la misma altura,

$$\overline{AH} = \overline{DH'}$$

Luego, $a[\Delta ACD] = a[\Delta ABD]$ (Fig. 7.7).

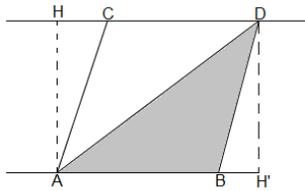


Fig. 7.7

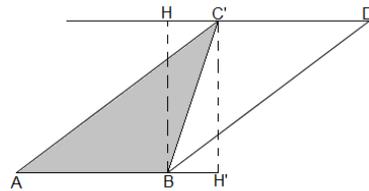


Fig. 7.8

Análogamente, $a[\Delta ABC'] = a[\Delta ABD']$ (Fig. 7.8).

Así,

$$a[P] = 2(a[\Delta ABD])$$

y

$$a[P'] = 2(a[\Delta ABC']).$$

Por lo tanto,

$$a[P] = a[P']. \quad \square$$

Se pueden establecer fórmulas de cálculo del área de un paralelogramo o de un triángulo a partir del área de un rectángulo. Obtenemos el área de un rectángulo, una vez elegida una unidad, haciendo el producto del largo por ancho (Fig. 7.9).

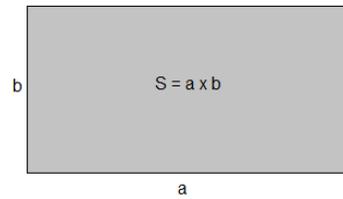
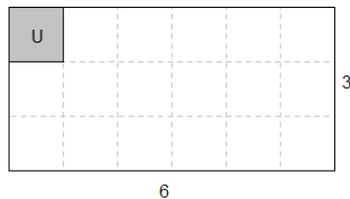


Fig. 7.9

1. Triángulo rectángulo.

Para obtener la fórmula para el área de un triángulo rectángulo, se trata del medio rectángulo (Fig. 7.10).

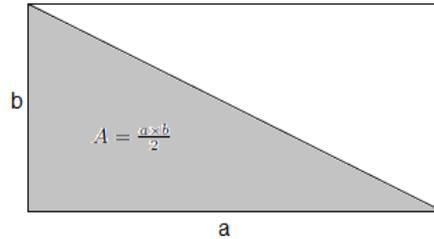


Fig. 7.10

2. Triángulo no rectángulo [6, p. 156].

Sea S un triángulo no rectángulo con vértices A , B , C (Fig. 7.11).

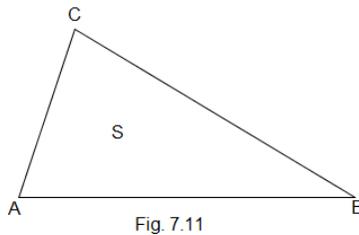


Fig. 7.11

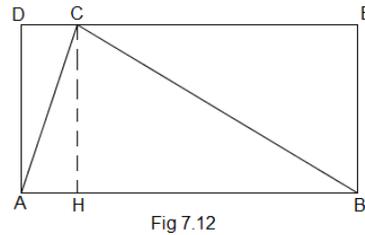


Fig. 7.12

Tracemos la paralela al segmento AB que pasa por C , y las perpendiculares a dicha paralela (Fig. 7.12). Hemos formado el rectángulo R con vértices A , B , D , E como en la Figura 7.12.

De aquí,

$$a[R] = \overline{AB} \times \overline{EB}. \quad (7.1)$$

Note que,

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} \quad (7.2)$$

y

$$\overline{DA} = \overline{CH} = \overline{EB}. \quad (7.3)$$

Por otro lado, $a[R] = a[\Delta ACD] + a[S] + a[\Delta CBE]$.

Notemos que,

$$a[\Delta ACD] = \frac{\overline{DC} \times \overline{DA}}{2}$$

y

$$a[\Delta CBE] = \frac{\overline{CE} \times \overline{EB}}{2}.$$

Así,

$$a[R] = \frac{\overline{DC} \times \overline{DA}}{2} + a[S] + \frac{\overline{CE} \times \overline{EB}}{2}. \quad (7.4)$$

Igualando (7.1) y (7.4), se obtiene que,

$$\overline{AB} \times \overline{EB} = \frac{\overline{DC} \times \overline{DA}}{2} + a[S] + \frac{\overline{CE} \times \overline{EB}}{2}.$$

Por (7.3), tenemos que

$$\overline{AB} \times \overline{EB} = \frac{(\overline{DC} + \overline{CE}) \times \overline{CH}}{2} + a[S].$$

De esta manera,

$$a[S] = \frac{\overline{AB} \times \overline{CH}}{2}.$$

Por lo tanto, podemos inscribir un triángulo no rectángulo en un rectángulo de largo \overline{AB} y de ancho \overline{CH} (altura del triángulo ABC).

3. Paralelogramo [6, p. 155].

Sea P un paralelogramo con vértices A, B, C, D (Fig. 7.13).

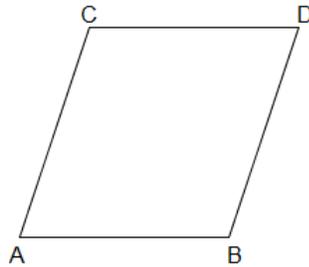


Fig. 7.13

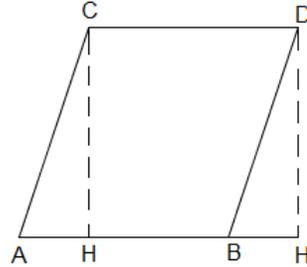


Fig. 7.14

Tracemos la perpendicular \overline{CH} al segmento AB (Fig. 7.14). Ahora, tracemos la paralela $\overline{DH'}$ al segmento CH como en la figura.

Note que,

$$\overline{CD} = \overline{HB} + \overline{HB'} \quad (7.5)$$

,

$$\overline{CD} = \overline{AH} + \overline{HB} \quad (7.6)$$

y

$$\overline{CH} = \overline{DH'}. \quad (7.7)$$

Por (7.5) y (7.6),

$$\overline{BH'} = \overline{AH}.$$

Por (7.7), se sigue que

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta BH'D].$$

Así,

$$a[P] = a[HH'CD].$$

Notemos que,

$$a[HH'CD] = \overline{HH'} \times \overline{CD}.$$

De aquí,

$$a[P] = \overline{HH'} \times \overline{CD}.$$

Por lo tanto, el área de un paralelogramo permite remitirse al área de un rectángulo de ancho \overline{CH} y largo \overline{AB} .

4. Trapecio [6, p. 157].

Dado un trapecio, un pliegue lo suficientemente simple permite remitirse a calcular el área del trapecio con un rectángulo: Pleguemos la base menor sobre la base mayor (Fig. 7.15). Luego, los vértices de la base mayor sobre los extremos de la base menor antes plegada, formando el rectángulo S (Fig. 7.16).

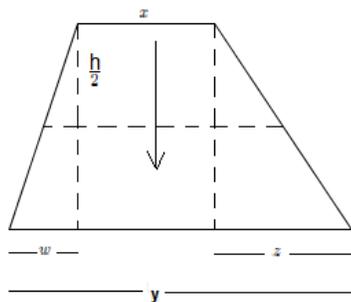


Fig. 7.15

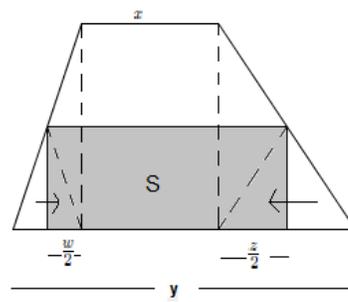


Fig. 7.16

Note que,

$$a[S] = \left(\frac{w}{2} + x + \frac{z}{2}\right) \times \left(\frac{x}{2}\right)$$

y

$$y = x + w + z. \tag{7.8}$$

De aquí,

$$z + w = y - x.$$

Así,

$$a[S] = \left(\frac{2x + y - x}{2} \right) \times \left(\frac{x}{2} \right).$$

Luego,

$$a[S] = \left(\frac{y + x}{2} \right) \times \left(\frac{x}{2} \right).$$

Se sigue que,

$$a[\text{Trapezio}] = 2(a[S]).$$

De modo que,

$$a[\text{Trapezio}] = (y + x) \times \left(\frac{x}{2} \right).$$

Por lo tanto, el área de un trapezio se puede calcular como el doble de un rectángulo de largo $\frac{x+y}{2}$ y altura $\frac{h}{2}$.

Teorema 7.0.3. Dados A , B , C y M cuatro puntos tales que, los puntos B , C y M son colineales. M es punto medio del segmento BC si y sólo si los triángulos AMB y AMC tiene la misma área (Fig. 7.17).

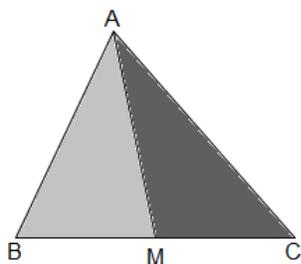


Fig. 7.17

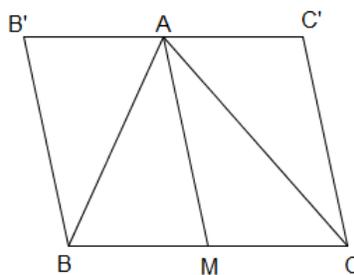


Fig. 7.18

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que M es punto medio del segmento BC .

Construyamos los paralelogramos $MCC'A$ y $BMAB'$ como en la Figura 7.18.

Note que,

$$\overline{B'A} = \overline{BM}$$

y los triángulos $B'AB$ y AMB tienen las mismas alturas. Luego,

$$a[\Delta B'AB] = a[\Delta AMB].$$

Así,

$$a[BMB'A] = 2(a[\Delta AMB]).$$

Análogamente,

$$a[MCAC'] = 2(a[\Delta AMC]).$$

Por otra parte, como $\overline{CM} = \overline{MC}$ y $\overline{BB'} = \overline{AM} = \overline{CC'}$, se sigue que

$$a[BMB'A] = a[MCAC'].$$

De aquí,

$$2(a[\Delta AMC]) = 2(a[\Delta AMB]).$$

Por lo tanto,

$$a[\Delta AMC] = a[\Delta AMB].$$

(\Leftrightarrow) Supongamos que $a[\Delta AMC] = a[\Delta AMB]$.

Sea \overline{AE} la perpendicular al segmento BC (Fig. 7.19).

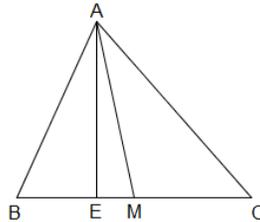


Fig. 7.19

Note que, \overline{CE} es altura de los triángulos AMB y AMC ; es decir, los triángulos AMB y AMC tiene la misma altura.

Ahora, como $a[\Delta AMC] = a[\Delta AMB]$, se tiene que sus bases son iguales.

Por lo tanto, M es punto medio del segmento BC . □

Teorema 7.0.4. Dados el triángulo ABC y sobre la base AB los puntos $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ repartidos regularmente; es decir, $\overline{AB_0} = \overline{B_0B_1} = \dots = \overline{B_{n-1}B_n} = \dots$, se tiene que

1. $\Delta AB_0C, \dots, \Delta B_{n-1}B_nC, \dots$ tienen la misma área.
2. $a[\Delta AB_nC] = n(a[\Delta AB_0C])$
3. Dados B_P y B_Q en \overline{AB} , se tiene que $a[\Delta AB_PC] = \frac{P}{Q}a[\Delta AB_QC]$ (Fig. 7.20).

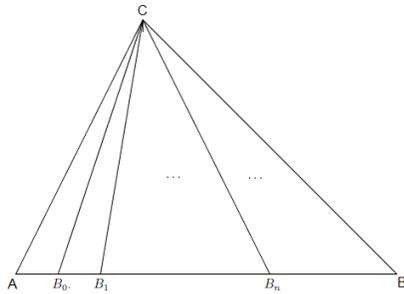


Fig. 7.20

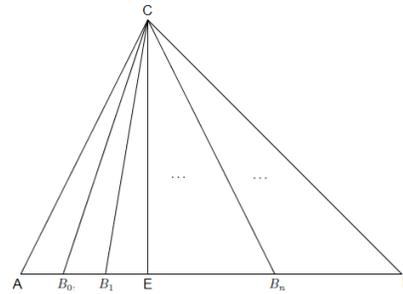


Fig. 7.21

Demostración. 1. Tracemos la perpendicular \overline{CE} al segmento AB (Fig. 7.21).

Notemos que,

$$\overline{CE}$$

es altura de los triángulos $\Delta AB_0C, \dots, \Delta B_{n-1}B_nC, \dots$

Ahora, como $\overline{AB_0} = \overline{B_0B_1} = \dots = \overline{B_{n-1}B_n} = \dots$.

Por lo tanto,

$$a[\Delta AB_0C] = \dots = a[\Delta B_{n-1}B_nC] = \dots$$

2. Tomemos $a[\Delta AB_0C]$ como unidad. Luego, por el inciso (1), se sigue que

$$a[\Delta AB_nC] = n(a[\Delta AB_0C]).$$

3. Sean B_P y B_Q en \overline{AB} .

Por el inciso (2), se sigue que

$$a[\Delta AB_PC] = P(a[\Delta AB_0C])$$

y

$$a[\Delta AB_QC] = Q(a[\Delta AB_0C]).$$

De aquí,

$$\frac{a[\Delta AB_PC]}{P} = \frac{a[\Delta AB_QC]}{Q}.$$

Por lo tanto,

$$a[\Delta AB_PC] = \frac{P}{Q}a[\Delta AB_QC].$$

□

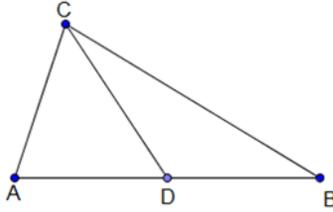


Fig. 7.22

En particular, se tiene que si B, D, C son colineales (Fig. 7.22), entonces

$$\frac{a[\Delta ADC]}{a[\Delta DBC]} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

Note que, $a[\Delta ADC] = t(a[\Delta ABC])$ y $a[\Delta DBC] = s(a[\Delta ABC])$ con t, s en \mathbb{R} .

Llamando $t = \overline{AD}$ y $s = \overline{DB}$, tenemos que

$$\frac{a[\Delta ADC]}{a[\Delta DBC]} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

Teorema 7.0.5. En cualquier triángulo ABC , el segmento AD es bisectriz interior si y sólo si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ (Fig. 7.23).

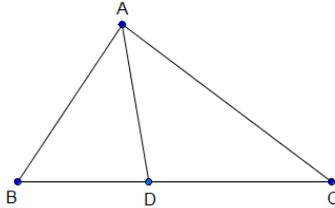


Fig. 7.23

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que el segmento AD es bisectriz del triángulo ABC .

Por el Teorema 7.0.4, tenemos que

$$\frac{a[\Delta BDA]}{a[\Delta DCA]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}. \quad (7.9)$$

Por otro lado, como \overline{AD} es bisectriz del triángulo ABC , se sigue que el punto D es equidistante de los lados \overline{AB} y \overline{AC} . Luego, las alturas de los triángulos BDA y DCA ; es decir, $\overline{DF} = \overline{DG}$ (Fig. 7.24).

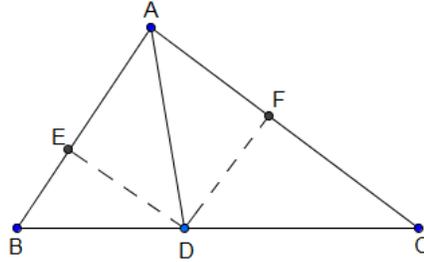


Fig. 7.24

Note que,

$$a[\Delta BDA] = \frac{\overline{AB} \times \overline{DF}}{2} \quad (7.10)$$

y

$$a[\Delta DCA] = \frac{\overline{AC} \times \overline{DG}}{2}. \quad (7.11)$$

Por (7.10) y (7.11), tenemos que

$$\frac{\overline{AC} \times \overline{DG}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{DF}}{2}.$$

Así,

$$\frac{a[\Delta BDA]}{a[\Delta DCA]} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Por (7.9), se sigue que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

(\Leftarrow) Supongamos que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Por el Teorema 7.0.4, se sigue que

$$\frac{a[\Delta BDA]}{a[\Delta DCA]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Por otro lado,

$$\frac{a[\Delta BDA]}{a[\Delta DCA]} = \frac{\frac{\overline{AB} \times \overline{DF}}{2}}{\frac{\overline{AC} \times \overline{DG}}{2}}.$$

Así,

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{DF}}{\overline{AC} \times \overline{DG}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Luego,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DG}} = 1.$$

De aquí, el punto D está a la misma distancia del segmento AB como lo está del segmento AC .

Por lo tanto, el segmento AD es bisectriz del triángulo ABC . \square

Se llama circunferencia inscrita en un triángulo, a la circunferencia que tiene su centro dentro del triángulo y es tangente a sus lados. Luego, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo se halla en el cruce de sus bisectrices [22, p. 81] (Fig. 7.25).

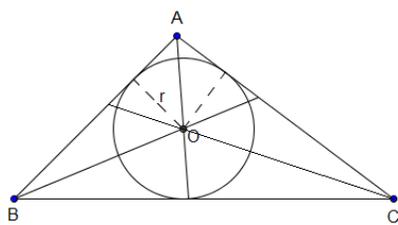


Fig. 7.25

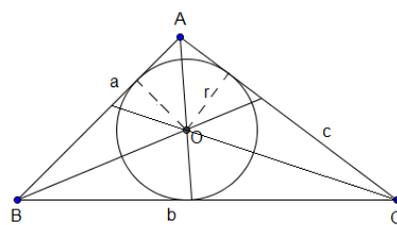


Fig. 7.26

Así, podemos descomponer al triángulo ABC en otros tres: $\triangle BCO$, $\triangle BOA$, $\triangle OCA$ los cuales tiene altura r (r es el radio de la circunferencia inscrita). Definimos $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ y $c = \overline{CA}$ (Fig. 7.26).

De aquí,

$$a[\triangle ABC] = a[\triangle BCO] + a[\triangle BOA] + a[\triangle OCA].$$

Luego,

$$a[\triangle ABC] = \frac{b \times r}{2} + \frac{a \times r}{2} + \frac{c \times r}{2}.$$

Así,

$$a[\triangle ABC] = \left(\frac{a + b + c}{2} \right) r.$$

Note que, $\frac{a+b+c}{2}$ es el medio perímetro del triángulo ABC .

De manera que, si llamamos P al perímetro del triángulo ABC , entonces

$$a[\triangle ABC] = \left(\frac{P}{2} \right) r.$$

Teorema 7.0.6. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de éste.

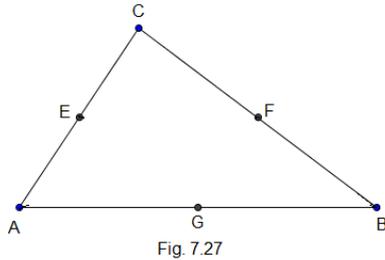


Fig. 7.27

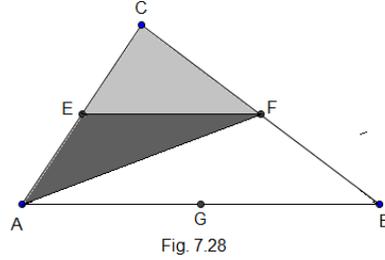


Fig. 7.28

Demostración. Sea T el triángulo con vértices A, B, C y E, F, G los puntos medios de cada lado de T (Fig. 7.27)

Por el Teorema 7.0.3 resulta que $a[\triangle EGA] = a[\triangle BGE]$ (Fig. 7.28).

Análogamente, $a[\triangle EGA] = a[\triangle ECG]$ (Fig. 7.29).

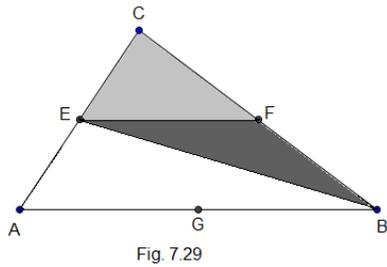


Fig. 7.29

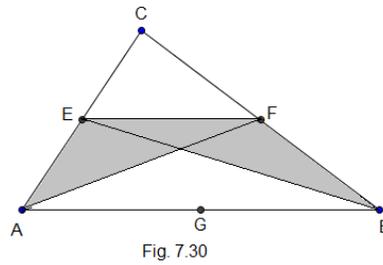


Fig. 7.30

Así, $a[\triangle BGE] = a[\triangle ECG]$ (Fig. 7.30). Luego, por el corolario (7.0.1), tenemos que

$$\overline{EG} \parallel \overline{BC}.$$

Un razonamiento análogo conduce a $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$. Así, $BFGE$ es un paralelogramo.

De aquí,

$$\overline{EG} = \overline{BF}.$$

Ahora, como F es punto medio del segmento BC , se sigue que

$$\overline{BC} = 2(\overline{EG}). \quad \square$$

Definición 7.0.2. Llamamos *centro de gravedad* de un triángulo, al punto G donde las medianas del triángulo se cruzan.

Teorema 7.0.7. El centro de gravedad de un triángulo está situado a dos tercios de cada mediana a partir del vértice.

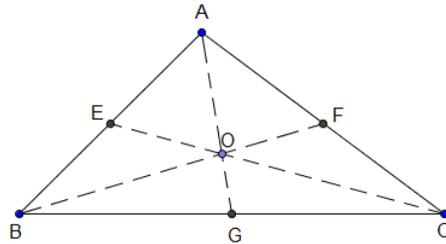


Fig. 7.31

Demostración. Sea T un triángulo con vértices A, B, C y E, F, G los puntos medios de cada lado de T . Llamemos O al centro de gravedad de T (Fig. 7.31).

Por el Teorema 7.0.3, se tiene que

$$a[\Delta BFA] = a[\Delta BCF] \quad (7.12)$$

$$a[\Delta ECA] = a[\Delta BCE] \quad (7.13)$$

$$a[\Delta OFA] = a[\Delta OCF] \quad (7.14)$$

$$a[\Delta EOA] = a[\Delta BOE] \quad (7.15)$$

$$a[\Delta BGO] = a[\Delta GCO]. \quad (7.16)$$

Por (7.12) tenemos:

$$a[\Delta BOE] + a[\Delta EOA] + a[\Delta OFA] = a[\Delta BGO] + a[\Delta GCO] + a[\Delta OCF].$$

Por (7.14), (7.15) y (7.16),

$$2(a[\Delta BOE]) + 2(a[\Delta BGO]).$$

Así,

$$a[\Delta BOE] = a[\Delta BGO]. \quad (7.17)$$

Análogamente, por (7.13), (7.15) y (7.14) se tiene:

$$a[\Delta OFA] = a[\Delta BGO]. \quad (7.18)$$

Igualando (7.17) y (7.18),

$$a[\Delta OFA] = a[\Delta BOE].$$

En consecuencia,

$$a[\Delta BOA] = 2(a[\Delta OFA]).$$

Note que, ΔBOA y ΔBFA tiene una misma altura.

Luego,

$$\overline{BO} = 2(\overline{OF}).$$

Por lo tanto, O esta situado a dos tercios de la mediana partiendo del vértice B . De manera análoga, mediante un razonamiento similar al anterior, podremos llegar a que O está situado a dos tercios de las medianas que parten de los vértices A y C . \square

7.1. Partición del rectángulo

Sea M un punto situado sobre una diagonal de un rectángulo (Fig. 7.32).

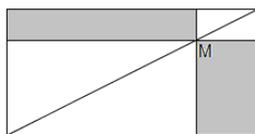


Fig. 7.32

Las paralelas a los lados dibujan cuatro rectángulos. Cada mitad del rectángulo, de una parte y de otra de la diagonal, está compuesta por dos triángulos rectángulos y por un rectángulo.

Los triángulos rectángulos son iguales por pares, los rectángulos sombreados tienen igual área: $a \times c = b \times d$.

Podemos escribir esta igualdad en forma de una proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Esto provee una construcción simple de la “cuarta proporcional” con la regla y escuadra. Las longitudes a , b , c están dispuestas como lo indica la Figura 7.33. Prolongamos el segmento OM hasta P . La paralela establecida a partir de P permite determinar la longitud d .

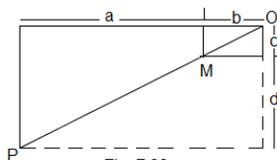


Fig. 7.33

Esto no permite obtener la cuadratura de un rectángulo. Dicha construcción requiere del siguiente teorema.

Teorema 7.1.1. Si por un punto P se traza una secante de la circunferencia y una tangente siendo A y B los puntos de intersección de la circunferencia con la secante y C el punto de tangencia de la tangente, se tiene que

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = (\overline{CS})^2.$$

La demostración de este teorema, puede ser consultada en [22, p. 90].

Este resultado provee un medio para construir el cuadrado de igual área que un rectángulo dado, de la siguiente manera,

Sea el rectángulo con vértices A, B, C, D (Fig. 7.34).

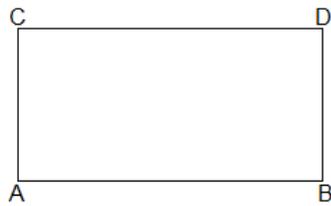


Fig. 7.34

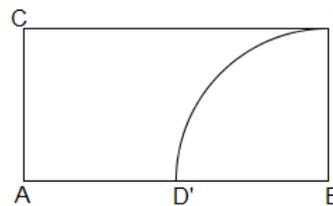


Fig. 7.35

Llevemos la distancia del lado menor sobre el lado mayor (Fig. 7.35). Luego, tracemos la circunferencia de diámetro $\overline{AD'}$ (Fig. 7.36).

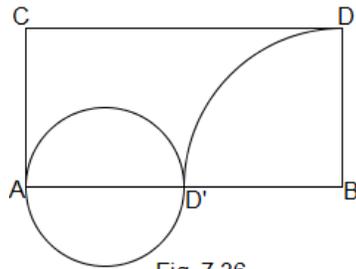


Fig. 7.36

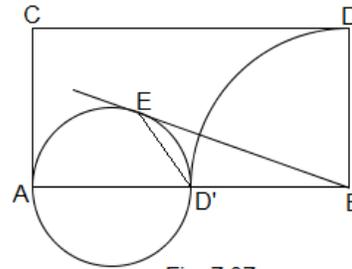


Fig. 7.37

A partir de ahí tracemos la recta tangente que va de B a la circunferencia. Finalmente, del punto de tangencia E , tracemos el segmento ED' (Fig. 7.37).

Aplicando el Teorema 7.1.1, obtenemos el lado del cuadrado buscado, a saber \overline{EB} (Fig. 7.38).

En contraposición, la igualdad en forma de proporción conduce directamente al teorema de Tales [Cap. 1, Teo. 1.1.2].

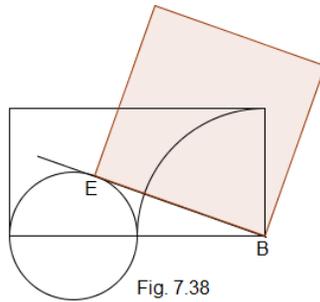


Fig. 7.38

7.2. *Partición de un paralelogramo*

Sea M un punto situado en el interior de un paralelogramo (Fig. 7.39).

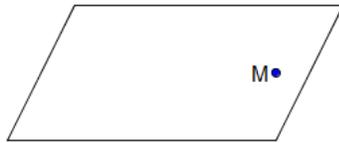


Fig. 7.39

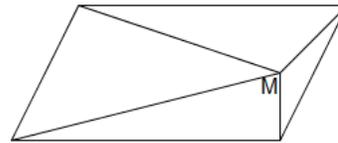


Fig. 7.40

Uniendo M a los vértices (Fig. 7.40), determinamos cuatro triángulos.

La unión de los triángulos sombreados tienen un área que es la mitad del área del paralelogramo (Fig. 7.41).

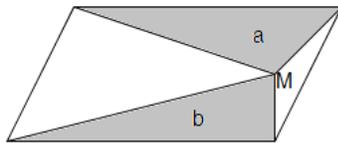


Fig. 7.41

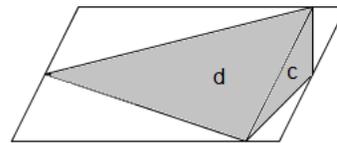


Fig. 7.42

En efecto, reorganizando esos dos triángulos, aparecen en el interior del paralelogramo, triángulos idénticos 2 a 2, dividiendo el paralelogramo en dos áreas iguales: $a + b = c + d$ (Fig. 7.42).

7.3. *Ejemplos*

1. Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 cuatro círculos de radio $\frac{r}{2}$, dentro de un círculo C de radio r (Fig. 7.43).

Note que,

$$a[C_1] + a[C_2] + a[C_3] + a[C_4] = a[C].$$

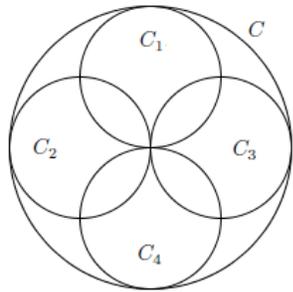


Fig. 7.43

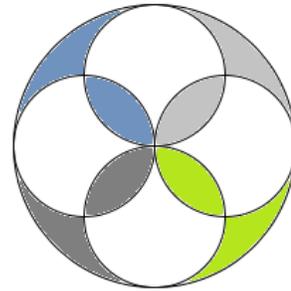


Fig. 7.44

En consecuencia, las partes sombreadas de la Figura 7.44, tienen la misma área. ¿Cómo podríamos calcular esta áreas?

Tracemos un segmento de recta que pasa por el centro de C y por el punto de intersección de dos circunferencias (fig.45).

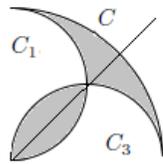


Fig. 7.45

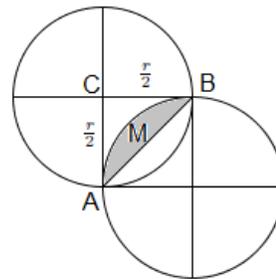


Fig. 7.46

Posteriormente, llamemos M al área de la mitad de cada ojiva (Fig. 7.46), y sean A , B , C como en la figura.

Notemos que,

$$a[M] = \frac{1}{4} (a[C_1]) - a[\Delta ABC].$$

De aquí,

$$a[M] = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi \times r^2}{4} \right) - \frac{r^2}{8}.$$

Luego,

$$a[M] = r^2 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right).$$

De manera que,

$$2(a[M]) = r^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right)$$

donde $2(a[M])$ es el área de la ojiva completa.

2. Observemos la Figura 7.47.

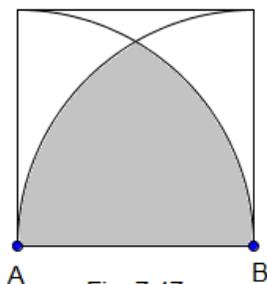


Fig. 7.47

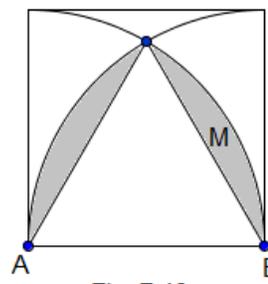


Fig. 7.48

Los puntos A y B son centros de circunferencias de radio 1. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

Como A y B son centros de circunferencias de radio 1, podemos trazar un triángulo equilátero de área $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (Fig. 7.48). Sólo falta calcular cual es el valor de M de dicha figura.

Note que la circunferencia de centro en A , la hemos dividido en 6 partes iguales (suponer la Figura 7.47 completa). De manera que,

$$a[M] = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

De aquí,

$$2(a[M]) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Así,

$$a[\text{parte sombreada}] = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Por lo tanto,

$$a[\text{parte sombreada}] = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

3. Pensemos en un cuadrado de lado 1, y tracemos arcos de circunferencia de cada vértice a su vértice opuesto (Fig. 7.49).

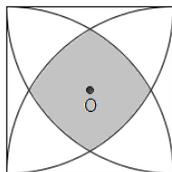


Fig. 7.49

¿Cuál será el valor del área sombreada, si O es el centro de simetría del cuadrado?

Trazando a partir de O triángulos con cada dos puntos consecutivos de la intersección de los arcos de circunferencia (Fig. 7.50), nos damos cuenta que el cuadrado curvilíneo está compuesto por el triángulo OBA y por un segmento circular d .

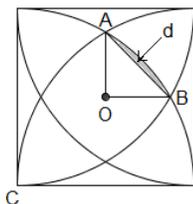


Fig. 7.50

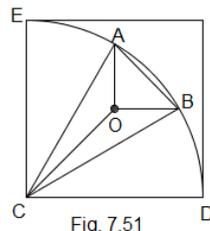


Fig. 7.51

Ahora, tracemos de cada vértice del triángulo OBA el segmento que lo une con C (Fig. 7.51).

Como O es el centro de simetría del cuadrado, se sigue que

$$\angle ECA + \angle ACO = 45^\circ \quad (7.19)$$

y

$$\angle OCB + \angle BCD = 45^\circ. \quad (7.20)$$

Por otro lado, por el ejemplo 2, se obtiene que,

$$\angle ACO + \angle OCB + \angle BCD = 60^\circ. \quad (7.21)$$

Por el criterio LLL de congruencia de triángulos [16, T. 1.36],

$$\triangle COA \cong \triangle CBO.$$

De esto,

$$\angle ACO = \angle OCB \quad (7.22)$$

Igualando (7.19) y (7.20),

$$\angle ECA + \angle ACO = \angle OCB + \angle BCD.$$

Sustituyendo (7.22),

$$\angle BCD = \angle ECA.$$

De aquí,

$$\angle ACO = 45^\circ - \angle BCD. \quad (7.23)$$

Por otra parte, por (7.22) en (7.21),

$$2(\angle ACO) + \angle BCD = 60^\circ. \quad (7.24)$$

Sustituyendo (7.23) en (7.24),

$$\angle BCD = 30^\circ.$$

Así,

$$\angle ACO = 15^\circ.$$

Luego,

$$\angle ACB = 30^\circ.$$

De modo que hemos dividido la circunferencia de centro C y radio 1, en 12 partes iguales.

Notemos que,

$$\frac{\pi}{12} - 2(a[\Delta CBO]) = a[\Delta OBA] + a[d]. \quad (7.25)$$

Por otra parte:

$$\overline{CO} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\angle COB = 135^\circ.$$

$$\angle OBC = 30^\circ.$$

$$\overline{AC} = \overline{CB} = 1.$$

Por el Teorema 3.2.1,

$$\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Dos consecuencias del Teorema del Seno son [11, p. 2],

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = 2r$$

donde r es el radio de la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C

y

$$a[\Delta ABC] = \frac{a \times b \times c}{4r}$$

donde a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo ABC y r el radio de la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C .

Así,

$$\frac{1}{\text{Sen } 135^\circ} = 2r$$

donde r es el radio de la circunferencia que pasa por los vértices C, B, O .

Se sigue que,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En consecuencia,

$$a[\Delta CBO] = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{2}}}.$$

Simplificando,

$$a[\Delta CBO] = \frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

De esta manera,

$$2(a[\Delta CBO]) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \quad (7.26)$$

Sustituyendo (7.26) en (7.25),

$$a[\Delta OBA] + a[d] = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

Por lo tanto,

$$a[\text{cuadrado curvilneo}] = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1.$$

4. Un punto M esta situado en un triángulo, trazando las rectas que pasan por ese punto y por los vértices, determinamos 6 triángulos. Tres de ellos tienen por área 60, 30 y 50 (Fig. 7.52). ¿Cuál es el área del triángulo inicial?

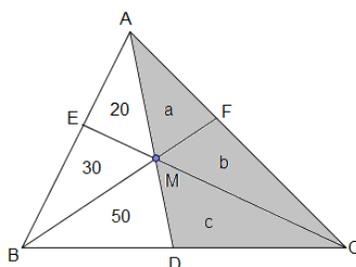


Fig. 7.52

Note que,

$$a[\Delta BMA] = a[\Delta BDM].$$

Por Teorema 7.0.3, M es punto medio del segmento AD .

En consecuencia,

$$a[\Delta MCA] = a[\Delta DCM].$$

Así,

$$a + b = c.$$

Por otro lado, por el Teorema 7.0.4, se sigue que

$$\frac{a[\Delta ECA]}{a[\Delta BCE]} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{2}{3}.$$

Como:

$$a[\Delta ECA] = a + b + 20$$

y

$$a[\Delta BCE] = c + 80.$$

Se sigue que,

$$\frac{2}{3} = \frac{a + b + 20}{c + 80}.$$

Luego,

$$c = 100.$$

Por lo tanto, $a[\Delta BCA] = 300$.

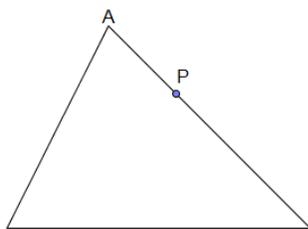


Fig. 7.53

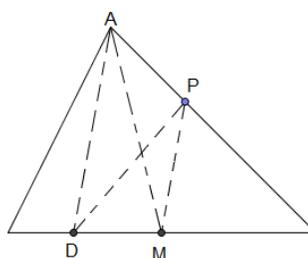


Fig. 7.54

5. Un campo triangular tiene un pozo P (Fig. 7.53). ¿Cómo dividir el campo en dos parcelas de igual área, de tal manera que el pozo sea común en ambas parcelas?

Tracemos la mediana que parte de A encontrando el punto M y tracemos el segmento PM , después tracemos la paralela a \overline{PM} que pasa por A , esto nos provee del punto D (Fig. 7.54).

Ahora, como \overline{AM} es mediana, por el Teorema 7.0.3, el campo quedo dividido en 2 parcelas de igual área.

Por otro lado, $\overline{AD} \parallel \overline{PM}$. Luego, por el Corolario 7.0.1, se sigue que las áreas sombreadas son iguales (Fig. 7.55).

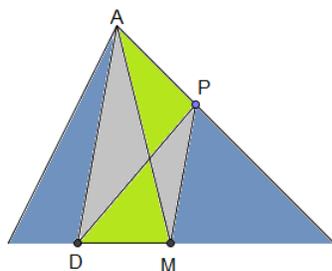


Fig. 7.55

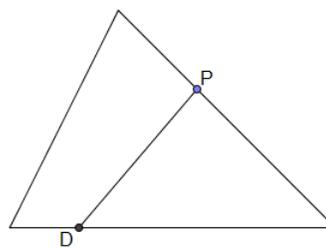


Fig. 7.56

Por lo tanto, \overline{PD} divide al campo en dos parcelas de igual área (Fig. 7.56).

6. Llamamos *Trapezio completo* al triángulo constituido por un trapezio y la prolongación de sus lados. Los lados oblicuos se cortan en O , las diagonales en K ; I , J son los puntos medios de los lados paralelos (Fig. 7.57). Mostrar que O , I , J , K son colineales [21, p. 76].

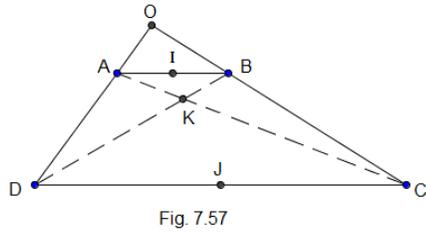


Fig. 7.57

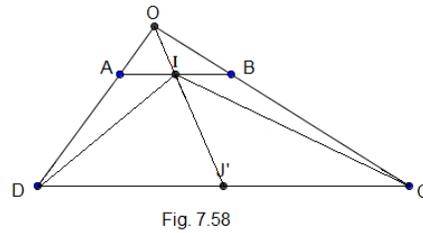


Fig. 7.58

Primero mostraremos que O, I, J son colineales.

La prolongación del segmento OI corta al segmento DC en J' (Fig. 7.58).

Por el Teorema 7.0.3, tenemos que

$$a[\Delta OAI] = a[\Delta OIB] \quad (7.27)$$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AI} = \overline{IB}$, se sigue que

$$a[\Delta DAI] = a[\Delta ICB]. \quad (7.28)$$

Por (7.27) y (7.28),

$$a[\Delta ODI] = a[\Delta OIC].$$

Así,

$$\frac{\overline{OI} \times h_d}{2} = \frac{\overline{OI} \times h_c}{2}$$

donde h_d y h_c son las alturas que nacen de D y C respectivamente, a la prolongación del segmento OI (Fig. 7.59).

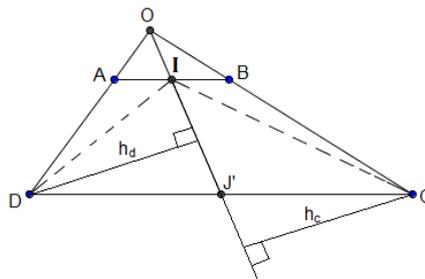


Fig. 7.59

Luego,

$$h_d = h_c.$$

Por otro lado, los triángulos DIJ' y $IJ'C$ tienen la misma base, a saber $\overline{IJ'}$.

De aquí,

$$a[\Delta DIJ'] = a[\Delta IJ'C].$$

Se sigue que,

$$\overline{DJ'} = \overline{J'C}.$$

Así, J' es punto medio del segmento DC ; es decir, $J = J'$.

Por lo tanto, O, I, J son colineales.

Análogamente, I, K, J son colineales.

Una demostración bastante más rápida consiste en considerar las homotecias de centros O o K que transforman AB en CD o DC [Cap. 9, Sec. 9.4].

7. Construir un triángulo isósceles de igual área que un triángulo dado.

Dado el triángulo ABC (Fig. 7.60).

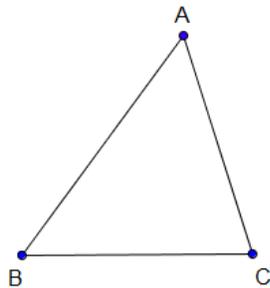


Fig. 7.60

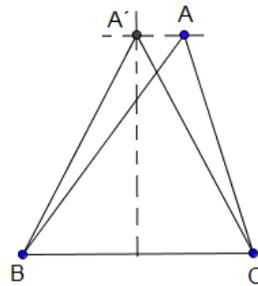


Fig. 7.61

Tracemos la mediatriz del segmento BC , luego la paralela al segmento BC que pasa por A (Fig. 7.61). Así, encontramos el punto A' . Note que el triángulo $A'BC$ es isósceles, y por el Teorema 7.0.1,

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta A'BC].$$

8. Construir un rectángulo de igual área que un triángulo dado.
 Caso 1: si el triángulo contiene un ángulo obtuso.

Sea el triángulo ABC con un ángulo obtuso (Fig. 7.62).

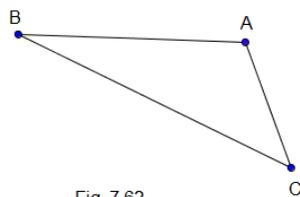


Fig. 7.62

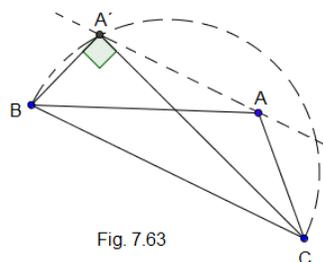


Fig. 7.63

Tracemos la semicircunferencia de diámetro \overline{BC} , la paralela a \overline{BC} que pasa por A (Fig. 7.63). Así, encontramos el punto A' . Note que el triángulo $BA'C$ es rectángulo y por el Teorema 7.0.1,

$$a[\Delta BA'C] = a[\Delta ABC].$$

Caso 2: cuando el triángulo no contiene un ángulo obtuso.

Sea el triángulo ABC sin un ángulo obtuso (Fig. 7.64).

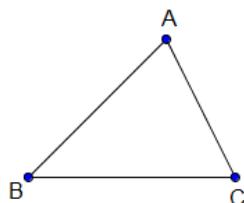


Fig. 7.64

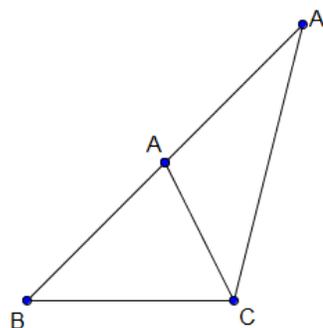


Fig. 7.65

La idea es construir un triángulo $A'AC$ que tenga un ángulo obtuso y posteriormente aplicar el caso 1. Dicho triángulo, lo obtenemos duplicando el segmento BA sobre su prolongación (Fig. 7.65). Luego, unir A' con C y así formar el triángulo $A'AC$.

Sólo falta mostrar que $\Delta A'AC$ tiene un ángulo obtuso.

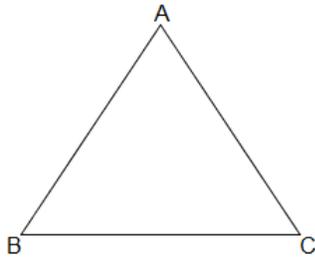


Fig. 7.66

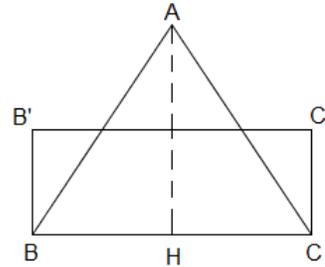


Fig. 7.67

Por el Teorema 7.0.3,

$$a[\Delta ABC] = a[\Delta A'AC].$$

Por el Teorema del ángulo exterior, el triángulo $A'AC$ ya tiene un ángulo obtuso. Finalmente aplicamos el caso 1.

9. Construir un cuadrado de igual área que un triángulo dado.

Sea el triángulo ABC (Fig. 7.66).

Tracemos la altura que corresponde al vértice A y formemos el rectángulo $BB'C'C$ de largo \overline{BC} y ancho $\frac{\overline{AH}}{2}$ como en la Figura 7.67.

Posteriormente, llevemos B' sobre el segmento BC y tracemos una circunferencia que pase por B'' y C (Fig. 7.68).

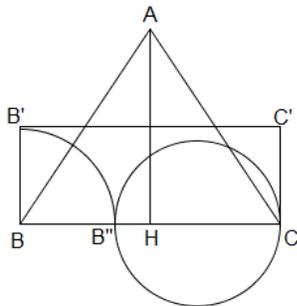


Fig. 7.68

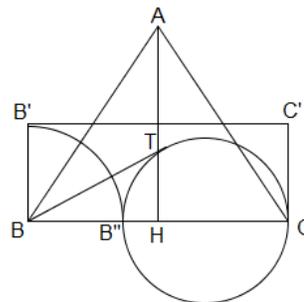


Fig. 7.69

Finalmente, trazamos la tangente \overline{BT} (Fig. 7.69). Por el Teorema 7.1.1, se sigue que

$$(\overline{BT})^2 = \overline{BC} \times \overline{BB''}.$$

Cómo

$$\overline{BB''} = \overline{BB'} = \frac{\overline{AH}}{2}.$$

Se sigue que,

$$(\overline{BT})^2 = \overline{BC} \times \frac{\overline{AH}}{2}.$$

El cuadrado de lado \overline{BT} proporciona la solución.

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

Como lo muestran los primeros capítulos, el uso de rompecabezas y teselados conduce a razonar sobre las áreas. Si bien las pruebas formales no se han abordado hasta ahora en el bachillerato, no debería descartarse una justificación simple de ciertos resultados. Por ejemplo, la que conduce a las fórmulas usuales de área, así como la que conduce a los mecanismos de conversión.

Las manipulaciones contribuyen a favorecer la memorización.

En el bachillerato, los resultados clásicos (**teorema de los puntos medios, teorema del centro de gravedad, teorema de Pitágoras y de Tales**) también ganan al ser abordados desde diversos ángulos.

Es aconsejable trabajar con los estudiantes cuestiones como la **partición del rectángulo o del paralelogramo** [Sec. 7.1, 7.2], los otros cálculos de área [Sec. 7.3], así como considerar que los docentes deberían retomar puntos relacionados con las áreas como lo proponemos, para que los estudiantes tengan otra perspectiva de la geometría.

Capítulo 8

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras es uno de los más conocidos de la geometría plana. Históricamente, encontramos algunas formas de este resultado en todos los continentes, algunas de ellas desde hace más de veinte siglos. Las diversas demostraciones difundidas, las cuales podrían ocupar un volumen entero, son testimonio de su valor emblemático.

El teorema de Pitágoras se estudia desde la secundaria, y la mayor parte de los textos escolares creen que demostrarlo es superfluo o inaccesible. Si los “aligeramientos” del programa continúan en esta línea no enseñaremos más matemática, lo que implica subestimar la curiosidad de los alumnos, y a fin de cuentas estimular la falta de interés.

Es importante afirmar que no se trata aquí de discutir la verdadera paternidad del resultado ni de exhibir una “nueva” colección de demostraciones que; por otra parte, tomarían prestado mucho de las precedentes. De modo que hemos elegido algunas demostraciones por su elegancia o su accesibilidad.

Ahora bien, las pruebas no sólo son accesibles sino que se presentan como un juego de rompecabezas mostrando que el resultado es una herramienta muy buena para que los estudiantes se motiven a saber más, y sobre todo a poder analizar y comprender conceptos a través de él. Pero ¿Se trata de una “verdadera demostración”? Sin duda alguna, mediante algunas precauciones. En consecuencia, este resultado es por mucho la primera relación matemática que cualquier persona que haya pasado por alguna etapa escolar recordará, con esto se convierte en una de la más importantes, una de las más útiles y la de mayor atención por haber recibido muchas pruebas formales. Además es base de una multitud de teoremas geométricos.

De esta manera, el discurso constante de las páginas siguientes es que el teorema de Pitágoras puede demostrarse fácilmente en la secundaria. Luego, poco

a poco la manipulación se completa con la observación y más adelante con la formulación. Es entonces que la prueba toma su forma completa.

Una de las formas más conocidas del teorema es algebraica.

Teorema 8.0.1. En todo triángulo rectángulo cuyos lados tienen por medidas a (en hipotenusa), b y c (en catetos), tenemos que el cuadrado de la primera es la suma de los cuadrados de las otras dos (Fig. 8.1), es decir,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

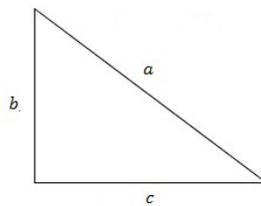


Fig. 8.1

Asimismo, es tan variada la utilización de este teorema que, por ejemplo sirve para ofrecer una respuesta a la siguiente pregunta.

Pregunta 8.0.1. Dados dos cuadrados C_1 y C_2 de lados c y b respectivamente (Fig. 8.2). ¿Podemos encontrar un tercer cuadrado cuya área sea la suma de las otras dos?

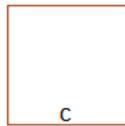


Fig. 8.2

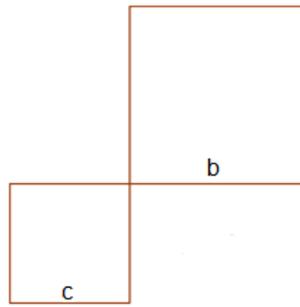
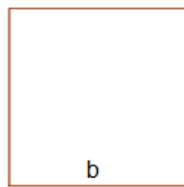


Fig. 8.3

Si acomodamos los cuadrados C_1 y C_2 de tal manera que dos ángulos de dichos cuadrados, queden opuestos por el vértice (Fig. 8.3).

Aplicando el teorema de Pitágoras podremos obtener un tercer cuadrado C_3 de lado a , tal que su área es la suma de las áreas de los cuadrados C_1 y C_2 (Ver Fig. 8.4).

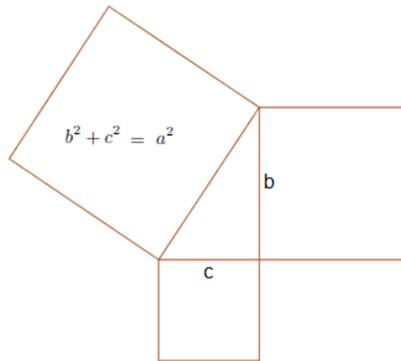


Fig. 8.4

Con esto nos damos cuenta que el teorema de Pitágoras ofrece una respuesta afirmativa a la pregunta 8.0.1, además esta formulación tiene la ventaja de ser geométrica; es decir, de evitar en su enunciado, hacer alusión a un cálculo. Cualquier método de rompecabezas justificado es una demostración. Mostraremos un ejemplo de rompecabezas antes de evocar la clásica demostración propuesta por Euclides.

Ejemplo 8.0.1. Notemos que la cuestión principal se trata de recubrir el cuadrado C_3 con partes que provienen de los cuadrados C_1 y C_2 .

Comencemos llamando A, B, C, D a los vértices del cuadrado C_3 ; D, E, F, G a los vértices del cuadrado C_1 y G, H, L, C a los vértices del cuadrado C_2 (Vea Fig. 8.5).

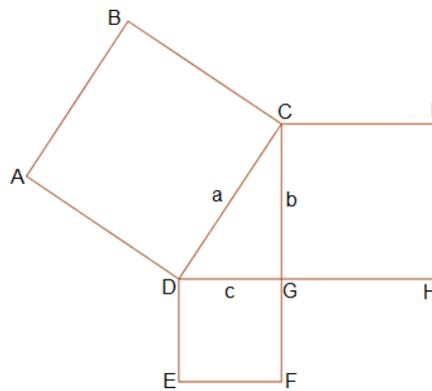


Fig. 8.5

Recordemos que C_2 es un paralelogramo [Cap. 3, Teo. 3.1.9]. De aquí C_2 posee un centro de simetría [Cap. 3, Teo. 3.1.10], el cual llamaremos O . Luego en C_2 tracemos una paralela al segmento DC que pase por O , y llamemos M y N a los puntos de intersección de dicha paralela con C_2 . Posteriormente, en C_2

tracemos la perpendicular al segmento MN y llamemos P y Q a los puntos de intersección de dicha perpendicular con C_2 (Fig. 8.6).

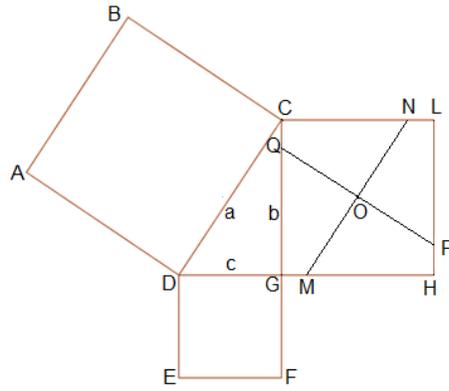


Fig. 8.6

Así, hemos formado el paralelogramo $DMNC$, de aquí

$$\overline{MO} + \overline{ON} = a \tag{8.1}$$

y

$$\overline{CN} - \overline{NL} = c. \tag{8.2}$$

Por otro lado, por ser O centro de simetría de C_2 , tenemos que los cuadriláteros $QONC$, $QGMO$, $NHPO$ y $PLNO$ pueden superponerse.

De tal modo que por (8.1), se obtiene que podemos acomodar los cuadriláteros de tal manera que llenemos los lados del cuadrado C_3 (Fig. 8.7).

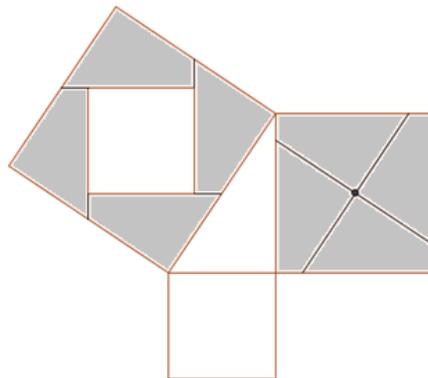


Fig. 8.7

Ahora, tracemos la perpendicular al segmento LH que pasa por el vértice D , obteniendo los puntos J y K (Fig. 8.9).

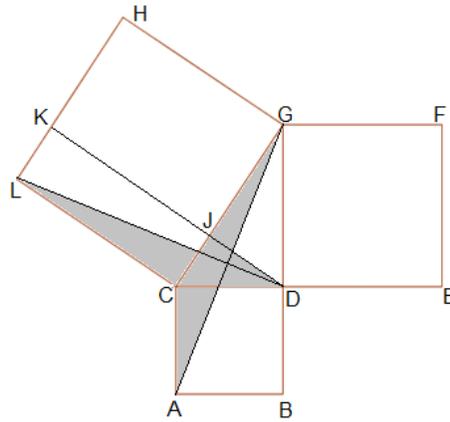


Fig. 8.9

Nota 8.1.2. Los triángulos sombreados en la Figura 8.9, tienen la misma área.

Ahora, por el Teorema 7.0.1, se sigue que

$$a[\triangle LCD] = a[\triangle LKC].$$

De aquí,

$$a[\triangle LCK] = a[\triangle ACD].$$

Por lo tanto,

$$a[ABCD] = a[LCKJ].$$

Un razonamiento análogo sobre los triángulos GFD , FCG , HGD y HKG implicara que,

$$a[GDEF] = a[HJKG].$$

Es decir, tenemos que

$$a[\triangle GFD] = a[\triangle FGC].$$

Luego,

$$\triangle FGC \cong \triangle HGD.$$

En consecuencia,

$$a[\triangle FGC] = a[\triangle HGD].$$

Posteriormente:

$$a[\triangle HKG] = a[\triangle FGC].$$

Por lo tanto,

$$a[GDEF] = a[HJKG].$$

Así, la suma de las áreas de ambos cuadrados es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo CDG (Fig. 8.10).

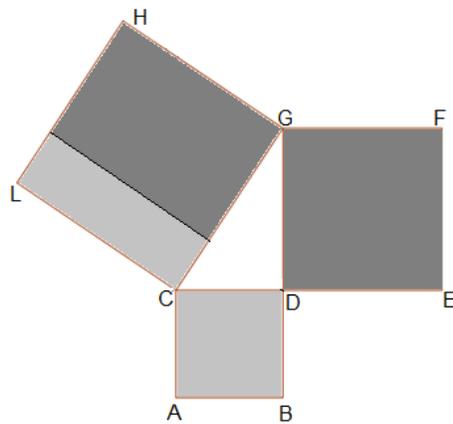


Fig. 8.10

8.2. Demostración de Pappus

Pappus, sigue la senda de Euclides y realiza una demostración un poco variada. La diferencia está en que Pappus utiliza la propiedad 1.36, de los elementos de Euclides, en lugar del Teorema 7.0.1. La propiedad dice: *los paralelogramos que tienen bases iguales y que están contenidos entre las mismas paralelas, tienen áreas iguales.*

Además, Pappus basa su demostración en la Figura 8.11.

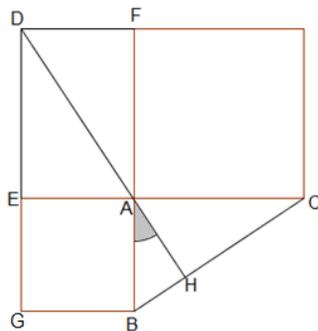


Fig. 8.11

De la Figura 8.11, notemos que $EAFD$ es un rectángulo, de aquí el segmento DF divide al dicho rectángulo en dos triángulos DEA y DAF , los cuales son congruentes.

En consecuencia,

$$\angle DAF + \angle EAD = 90^\circ.$$

Por otro lado, $\overline{FA} = \overline{AC}$, $\angle DAF = \angle BAC$ y $\overline{AB} = \overline{AE}$. Luego, aplicando el criterio LAL de congruencia de triángulos, tenemos que

$$\triangle DFA \cong \triangle ABC.$$

De manera que,

$$\angle ABC = \angle EAD.$$

Así,

$$\angle DAF + \angle ABC = 90^\circ.$$

Por otra parte, como los ángulos DAF y BAH son puestos por el vértice, tenemos que

$$\angle BAH + \angle ABC = 90^\circ.$$

De tal manera que,

$$\angle BHA = 90^\circ.$$

De esto,

$$\overline{DH} \perp \overline{BC}.$$

Posteriormente, trazando la paralela al segmento DH que pase por el vértice E y aplicando la proposición 1.36, de los elementos de Euclides (Fig. 8.12), obtenemos que

$$a[GBAE] = a[LBAD].$$

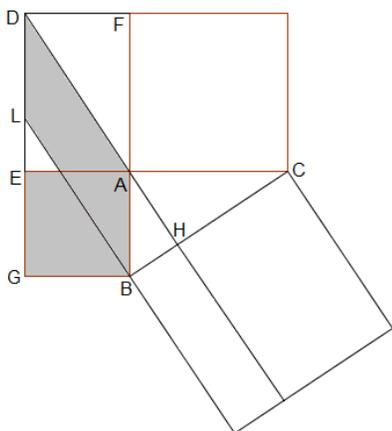


Fig. 8.12

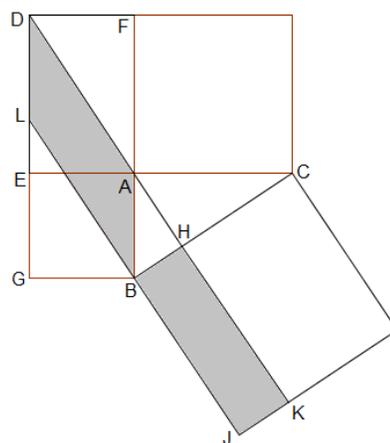


Fig. 8.13

Ahora, como los segmentos DA y BC son iguales y aplicando nuevamente la proposición 1.36 (Fig. 8.13) decimos que,

$$a[LBAD] = a[BJKH]$$

Por lo tanto,

$$a[GBAE] = a[BJKH].$$

Finalmente, aplicamos el mismo razonamiento con el cuadrado mediano, es entonces que se prueba el teorema de Pitágoras .

8.3. *Consecuencias y aplicaciones variadas*

El ejemplo más antiguo que conocemos es el triángulo con medidas (3,4,5) que permite, gracias a la “cuerda de los doce nudos”, disponer de una escuadra fácil de transportar. Dicha cuerda, es cerrada y en forma de triángulo, además consta de doce nudos distribuidos regularmente de manera de obtener lados de un largo de 3 y 4 unidades, el tercer lado medirá 5 unidades, garantizando un ángulo recto en el lado opuesto.

Es natural preguntarse si otros números enteros poseen la misma propiedad: $x^2 + y^2 = z^2$.

En el siglo III, Diofanto trató, en su Aritmética, el problema de encontrar ternas de números naturales no nulos x , y , z tales que $x^2 + y^2 = z^2$. Estas ternas se llaman *ternas Pitagóricas*, porque según el teorema de Pitágoras permiten construir triángulos rectángulos con lados enteros. Entre los ejemplos más conocidos están: (3,4,5), (5,12,13) y (7,24,25). ¿Cómo encontrarlas todas?

La respuesta nos la da Diofanto, mediante el siguiente metodo,

$$(x, y, z) = (2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2).$$

donde p , q son números naturales primos entre sí, $q < p$ y de paridad opuesta [17, p. 1-3].

La siguiente tabla contiene las correspondientes ternas Pitagóricas a los valores de $p \leq 7$.

p	q	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85

A parte de los triángulos rectángulos formados por las ternas Pitagóricas, existen otros tres, que merecen una mención particular.

1. El primero es el medio cuadrado (Fig. 8.14) del cual ya conocemos que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado [Cap. 6, Ejemplo de la Def. 6.1.1]. El problema no es saber que el cuadrado construido sobre la diagonal es dos veces más grande que el cuadrado inicial, sino el hecho de no poder expresar esa diagonal por un número racional. Esta medida es un número irracional, $\sqrt{2}$ [1, p. 45].

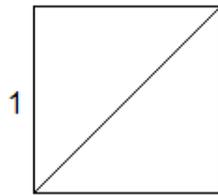


Fig. 8.14

2. El segundo es el medio triángulo equilátero (Fig. 8.15) el cual permite obtener como área el número irracional, $\sqrt{3}$

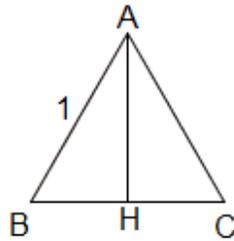


Fig. 8.15

Si los lados del triángulo ABC de la Figura 8.15, son de medida 1, como el segmento AH es altura, se tiene que el segmento BH es de medida $\frac{1}{2}$. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras, se sigue que

$$(\overline{AH})^2 = \frac{3}{4}.$$

En consecuencia,

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

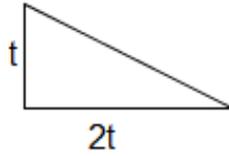


Fig. 8.16

3. El tercero es el medio “cuadrado largo” (rectángulo de altura la unidad y base 2) cuya diagonal tiene por medida $\sqrt{5}$ (Fig. 8.16), y que ya hemos abordado a propósito en el capítulo 1.

De una manera más general, el teorema de Pitágoras confirma un resultado que no se deduce de una igualdad de cuadrados.

Definición 8.3.1. Diremos que dos figuras son *semejantes* si son deducidas una de la otra mediante una reducción o aumento, y eventualmente un desplazamiento.

Así todos los cuadrados son semejantes entre sí. El teorema de Pitágoras puede generalizarse.

Si se construyen tres figuras semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, entonces el área de la figura más grande será igual a la suma de las áreas de las otras dos.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.3.2. Utilizando triángulos equiláteros (Fig. 8.17).

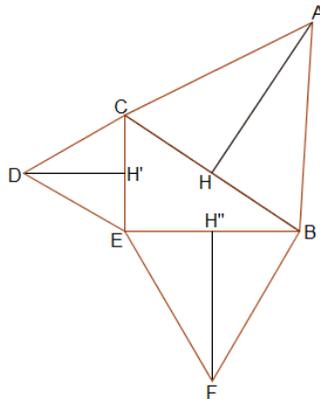


Fig. 8.17

Como el triángulo EBC es rectángulo, se tiene que

$$(\overline{CE})^2 + (\overline{EB})^2 = (\overline{CB})^2. \quad (8.3)$$

Ahora, por el medio triángulo equilátero [Vea Fig. 8.15] sabemos que,

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\overline{CB})$$

$$\overline{DH'} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\overline{EC})$$

y

$$\overline{FH''} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\overline{EB}).$$

En consecuencia,

$$a[\Delta CAB] = \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{CB})^2) \quad (8.4)$$

$$a[\Delta EBF] = \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EC})^2) \quad (8.5)$$

y

$$a[\Delta CED] = \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EB})^2). \quad (8.6)$$

Sumando (8.5) y (8.6), obtenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EC})^2) + \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EB})^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EB})^2 + (\overline{EC})^2). \quad (8.7)$$

Sustituyendo (8.3) en (8.7), tenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{EB})^2 + (\overline{EC})^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} ((\overline{CB})^2).$$

Por lo tanto,

$$a[\Delta CED] + a[\Delta EBF] = a[\Delta CAB].$$

Ejemplo 8.3.3. Utilizando tres semicírculos C_1, C_2, C_3 construidos sobre los catetos, y de diámetro la longitud de los lados del triángulo rectángulo (Fig. 8.18).

Como el triángulo ABC es rectángulo, se tiene que

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{CA})^2 = (\overline{CB})^2. \quad (8.8)$$

Ahora, calculado las áreas de los semicírculos C_1, C_2, C_3 , tenemos que

$$a[C_1] = \frac{\pi (\overline{AB})^2}{8} \quad (8.9)$$

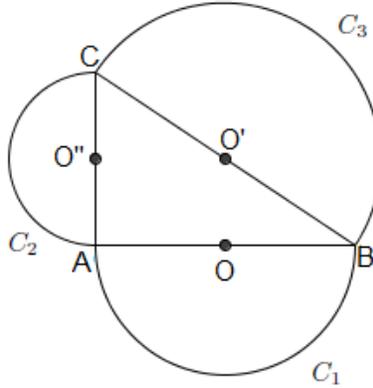


Fig. 8.18

$$a[C_2] = \frac{\pi (\overline{CA})^2}{8} \quad (8.10)$$

y

$$a[C_3] = \frac{\pi (\overline{CB})^2}{8}. \quad (8.11)$$

Sumando (8.9) y (8.10), obtenemos que

$$\frac{\pi (\overline{AB})^2}{8} + \frac{\pi (\overline{CA})^2}{8} = \frac{\pi ((\overline{AB})^2 + (\overline{CA})^2)}{8}. \quad (8.12)$$

Sustituyendo (8.8) en (8.12), tenemos que

$$\frac{\pi ((\overline{CA})^2 + (\overline{AB})^2)}{8} = \frac{\pi (\overline{CB})^2}{8}.$$

Por lo tanto,

$$a[C_1] + a[C_2] = a[C_3].$$

Una consecuencia del ejemplo 8.3.3, es: *el área del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de las "lúnulas"*(parte sobreada de la Figura 8.19).

Notemos en la Figura 8.19, que el semicírculo con centro en O'' tiene como área $S_1 + a$; el semicírculo con centro en O tiene como área $S_2 + b$ y el semicírculo con centro en O' tiene como área c .

Observe que, $c = a + b + S_3$. Luego, por el ejemplo 8.3.3 se sabe que, $(S_1 + a) + (S_2 + b) = c$.

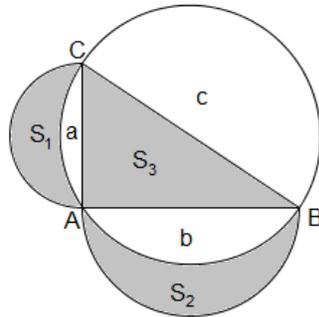


Fig. 8.19

En consecuencia,

$$(S_1 + a) + (S_2 + b) = a + b + S_3.$$

Así,

$$S_3 = S_1 + S_2.$$

Por lo tanto, el área del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de las lúnulas.

8.3.1. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

La relación de Pitágoras tiene varias consecuencias, tanto en el triángulo rectángulo como para el triángulo cualquiera. Éstas ya no se enseñan en el bachillerato, no obstante tienen un gran interés práctico e histórico.

Tracemos un triángulo rectángulo con vértices A , B , C tal que, la medida del segmento AC es a , la medida del segmento CB es b , la medida del segmento BA es c (Fig. 8.20).

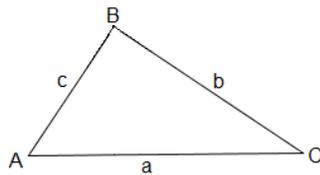


Fig. 8.20

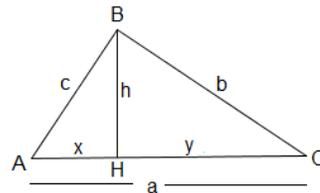


Fig. 8.21

Llamemos h a la altura que parte del vértice B , y H al punto de intersección de h con el segmento AC (Fig. 8.21).

En consecuencia,

$$a[\Delta ABC] = \frac{a \times h}{2}.$$

Como el segmento CB también es altura del triángulo rectángulo ABC , tenemos que

$$a[\Delta ABC] = \frac{c \times b}{2}.$$

De aquí,

$$\frac{a \times h}{2} = \frac{c \times b}{2}.$$

Así,

$$\frac{a \times h}{c \times b} = 1.$$

De esta manera,

$$\frac{a}{c \times b} = \frac{1}{h}. \quad (8.13)$$

Ahora, elevando (8.13) al cuadrado, obtenemos que

$$\frac{a^2}{(c \times b)^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, de modo que

$$\frac{a^2}{(c \times b)^2} = \frac{b^2 + c^2}{c^2 \times b^2}.$$

De este modo:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}. \quad (8.14)$$

Sean x , y como en la Figura 8.21, de modo que

$$x + y = a. \quad (8.15)$$

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ABH y BHC se tendrá que,

$$h^2 + y^2 = b^2 \quad (8.16)$$

$$h^2 + x^2 = c^2. \quad (8.17)$$

Despejando h e igualando (8.16) y (8.17), se tiene:

$$b^2 - c^2 = y^2 - x^2.$$

Como $y^2 - x^2$ es una diferencia de cuadrados y sustituyendo (8.15) obtendremos que,

$$b^2 - c^2 = a \times (y - x). \quad (8.18)$$

De aquí,

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = y - x.$$

Por (8.15) se obtendrá que,

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = 2y - a.$$

Así,

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = y. \quad (8.19)$$

Sustituyendo (8.19) en (8.16), se sigue que

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}. \quad (8.20)$$

Por otro lado, $(a[\Delta ABC])^2 = \frac{a^2 \times h^2}{2}$. Luego, al sustituir (8.20) se tendrá que,

$$(a[\Delta ABC])^2 = \frac{a^2}{4} \times \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Así,

$$(a[\Delta ABC])^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}. \quad (8.21)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} &= \frac{-a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}{16} \\ \frac{-a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}{16} &= \frac{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{16} \\ \frac{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{16} &= \frac{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)}{16} \\ \frac{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)}{16} &= \frac{(c - a + b)(c + a + b)(a + b - c)(a + b + c)}{16}. \end{aligned}$$

Si llamamos P al medio perímetro del triángulo rectángulo ABC , entonces $2P = a + b + c$. De esta manera,

$$\frac{(c - a + b)(c + a + b)(a + b - c)(a + b + c)}{16} = \frac{16(P(P - a)(P - b)(P - c))}{16}.$$

Finalmente, sustituyendo en (8.21), tenemos que

$$(a[\Delta ABC])^2 = (P(P - a)(P - b)(P - c)).$$

Por lo tanto, de un triángulo cualquiera podemos calcular su área conociendo solamente las medidas de sus lados. Esta relación es atribuida a Herón de Alejandría (siglo I después de nuestra era).

8.4. Algunos problemas de aplicación

Los dos primeros provienen de una obra china *Kin Tschang*, veinticinco siglos antes de la era cristiana.

1. Un nenúfar O está enraizando en el fondo de un estanque (Fig. 8.22). Si tiramos verticalmente, sobresale 1 pie del agua. Si tiramos lateralmente quedando la flor en el agua (el punto C), se aleja 5 pies. ¿Cual es la profundidad del estanque?

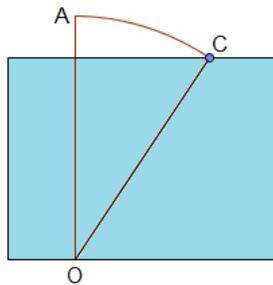


Fig. 8.22

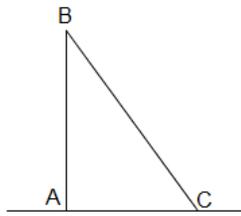


Fig. 8.23

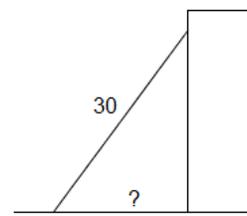


Fig. 8.24

2. Un bambú cuya altura total es de 10 pies, está quebrado (Fig. 8.23). Su punta toca el suelo a 3 pies del pie del bambú. ¿A qué altura está quebrado el bambú?
3. Una escalera de 30 pies está ubicada contra un muro vertical. Se desliza y su extremo desciende 6 pies (Fig. 8.24). ¿Cuánto avanza el pie de la escalera?
4. En una habitación cuyo techo esta a 2.20m de alto, ¿Podemos hacer balancear un armario cuya altura es de 2.10m y espesor de 64cm (Fig. 8.25)?

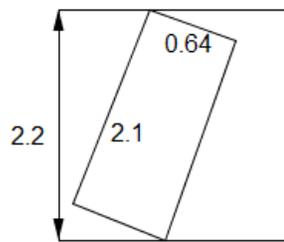


Fig. 8.25

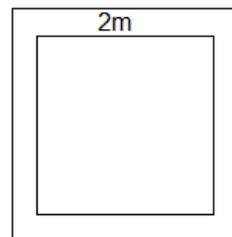


Fig. 8.26

5. Un terreno cuadrado está rodeado de una fosa de 2m de ancho (fig. 8.26). Disponemos solamente de dos tablas de 1.90m de largo. ¿Podríamos colocarlas para atravesar la fosa?

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

En la primaria, no se trata, creemos, de probar ni de enunciar el teorema de Pitágoras. Sin embargo, actividades sencillas pueden preparar su comprensión, especialmente los rompecabezas específicos. Ya que intervienen las comparaciones de áreas, podemos comenzar a sacarles provecho en la secundaria. Para el bachillerato, además de los que proponemos en este capítulo, damos aquí los siguientes ejemplos para su trabajo en el aula:

1. Proponemos dos cuadrados de igual dimensión, recortados en papel. ¿Podemos realizar un cuadrado único con estos dos cuadrados? ¿Qué podemos decir de ese cuadrado grande?
2. Ahora proponemos cinco cuadrados idénticos, cada uno recortado previamente como se indica la Figura 1.23. con esos diez trozos, ¿Podemos componer un cuadrado grande?
3. Finalmente, proponemos dos cuadrados de lados 3 y 4. Si pudiéramos construir un cuadrado único con estos dos, ¿Podríamos prever su dimensión?

Más adelante, estas observaciones pueden retomarse con la finalidad de precisar aún más la configuración conformada por los tres lados de esos cuadrados.

Capítulo 9

EL TEOREMA DE TALES Y SUS APLICACIONES

El enunciado que asociamos desde hace alrededor de un siglo y medio al nombre de Tales es probablemente uno de los resultados más importantes que se debería estudiar en el bachillerato.

El enunciado afirma: Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales.

Generalmente, traduce la propiedad que permite establecer una “ampliación” o una “reducción” de una figura. Más generalmente aún, esta propiedad se pone en marcha en la transformación geométrica “Homotecia” [22, p. 92], la cual está asociada a la proporcionalidad, luego a la función lineal, lo cual debería pertenecer a la enseñanza de la matemática desde la primaria hasta el bachillerato.

Antes de examinar una demostración del teorema y sus consecuencias, es útil preguntarse, a propósito de este ejemplo, sobre lo que se demuestra o se admite en el bachillerato.

El teorema de Tales requiere, para su demostración, un paso al límite (pasaje de los racionales a los reales [1, p. 43-52]). Probablemente por esta razón, el resultado se admite en el bachillerato, mientras que la idea del pasaje al límite se sugería antiguamente.

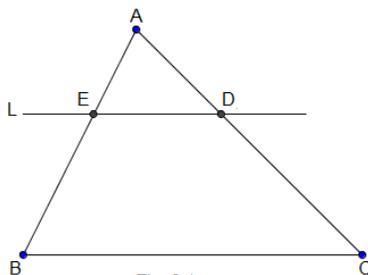
El problema que aquí se discute, no es saber si en el bachillerato hay que admitir o no los resultados. Es necesario dar algunos por adquiridos. Se plantean tres preguntas:

1. ¿Es conveniente distinguir claramente lo que podemos demostrar de lo que es necesario aceptar provisionalmente? Esto se hace con la finalidad de distinguir los axiomas o los postulados de los enunciados que pueden demostrarse pero cuya demostración se traslada más adelante.
2. ¿Qué utilidad tiene imponer varios resultados que podemos mostrar que son equivalentes? Así, en la secundaria se habla de ampliación, reducción y del coseno de un ángulo, generalmente antes de enunciar la “propiedad de Tales” en la cual es necesario basarse. Esto tiene como lamentables consecuencias:
 - Admitir varias veces el mismo resultado bajo diferentes apariencias.
 - Establecer el teorema de Tales sin haber demostrado los otros explícitamente.
 - Lo que es peor, pretender demostrar el teorema de Tales utilizando la invariabilidad de la relación de proyección (coseno).
3. ¿Qué elección tomar en cuanto a los resultados que deben admitirse, y por qué razones (matemáticas, históricas, pedagógicas)? No es raro pensar que la ampliación o la reducción de una figura no modifica sus ángulos.

Howard Eves en su libro “Estudio de las Geometrías” [12, p. 218, tomo II], menciona: la omisión de conceptos puede ser inconveniente, porque hay mucho a favor de su inclusión. Admite que son conceptos que necesitan un cierto tiempo para su asimilación, pero cuanto más pronto y con mayor frecuencia el estudiante vea estos conceptos en casos importantes, mejor será para él. Además de que son conceptos esenciales en todo estudio geométrico y finalmente beneficiará al estudiante en su formación universitaria.

Teorema 9.0.1 (Tales). Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales.

Demostración. Dado el triángulo ABC , sea L una recta paralela a uno de sus lados. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $L \parallel \overline{BC}$ (fig. 9.1), y E, D son puntos como en la figura.



Veamos que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

Esto nos lleva a comparar como son los cocientes entre longitudes. En consecuencia, la demostración consiste en dos casos, uno cuando las longitudes son conmensurables y otro cuando no lo son [Cap. 6, Def. 6.1.1].

Tomemos el segmento AP_1 como unidad en el segmento AB , de modo que si consideramos los puntos $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$ en el segmento AB , entonces $\overline{AP_k} = k(\overline{AP_1})$ (Fig. 9.2).

Caso 1: cuando las longitudes son conmensurables.

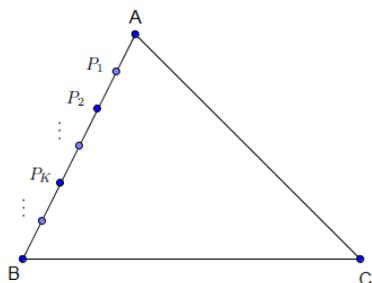


Fig. 9.2

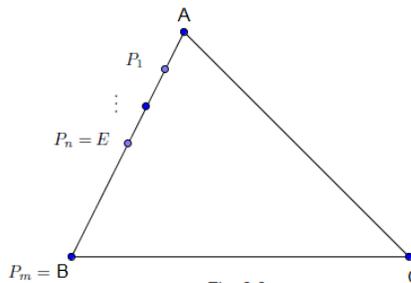


Fig. 9.3

Como las longitudes son conmensurables, existen P_n y P_m en $\{P_1, P_2, \dots, P_k, \dots\}$ tales que $P_n = E$ y $P_m = B$ (Fig. 9.3).

Así,

$$\overline{AB} = m(\overline{AP_1})$$

y

$$\overline{AE} = n(\overline{AP_1}).$$

De aquí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{m}{n}.$$

Ahora, tracemos por los puntos P_1, P_2, \dots las rectas paralelas al segmento BC . Estas rectas cortan al segmento AC en los puntos Q_1, Q_2, \dots . Siendo los segmentos AQ_1, Q_1Q_2, \dots iguales (Fig. 9.4).

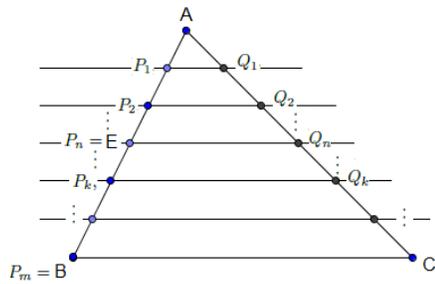


Fig. 9.4

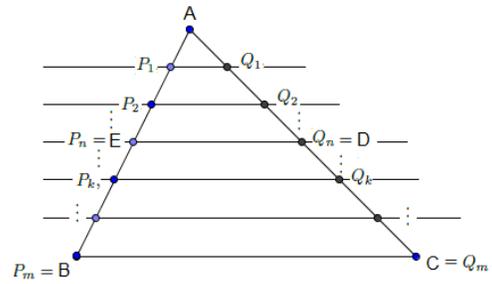


Fig. 9.5

De modo que,

$$\overline{AQ_k} = k (\overline{AQ_1}) .$$

Como E, D se encuentran en L (Fig. 9.5), se tiene que

$$\overline{AD} = n (\overline{AQ_1}) .$$

Análogamente:

$$\overline{AC} = m (\overline{AQ_1}) .$$

Luego,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{m}{n} .$$

Por lo tanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} .$$

Caso 2: cuando las longitudes son inconmensurables.

Como las longitudes son inconmensurables, no existen P_i y P_j en $\{P_1, P_2, \dots, P_k, \dots\}$ tales que $P_i = E$ y $P_j = B$. Pero podemos encontrar a los puntos E y B entre los puntos P_n, P_{n+1} y P_m, P_{m+1} respectivamente (Fig. 9.6).

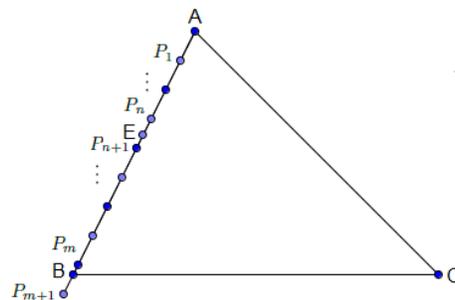


Fig. 9.6

Por ello,

$$n(\overline{AP_1}) < \overline{AE} < n+1(\overline{AP_1})$$

y

$$m(\overline{AP_1}) < \overline{AB} < m+1(\overline{AP_1}).$$

Así,

$$\frac{n}{m} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} < \frac{n+1}{m+1}.$$

Por otra parte:

$$\frac{n}{m+1} < \frac{n}{m}$$

y

$$\frac{n+1}{m+1} < \frac{n+1}{m}.$$

De aquí,

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} < \frac{n+1}{m}. \quad (9.1)$$

Ahora, tracemos por los puntos P_1, P_2, \dots las rectas paralelas al segmento BC . Estas rectas cortan al segmento AC en los puntos Q_1, Q_2, \dots . Siendo los segmentos AQ_1, Q_1Q_2, \dots iguales (Fig. 9.7).

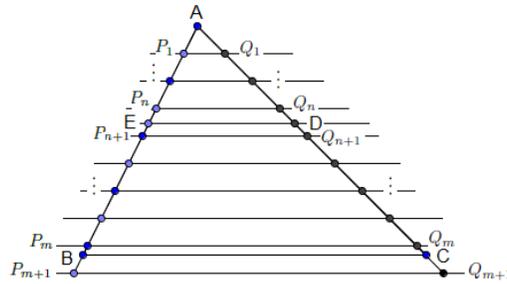


Fig. 9.7

El punto D se halla entre los puntos Q_n y Q_{n+1} y el punto C entre los puntos Q_m y Q_{m+1} . Por tanto:

$$n(\overline{AQ_1}) < \overline{AD} < n+1(\overline{AQ_1})$$

y

$$m(\overline{AQ_1}) < \overline{AC} < m+1(\overline{AQ_1}).$$

De aquí,

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} < \frac{n+1}{m}. \quad (9.2)$$

Note que (9.1) y (9.2) se encuentran entre los mismos valores (Fig. 9.8).

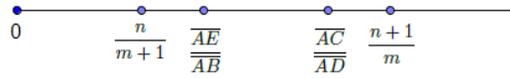


Fig. 9.8

Esto permite ver que las razones $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ y $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ difieren no más que en $\frac{n}{m+1} - \frac{n+1}{m}$.

Por otra parte:

$$\frac{n}{m+1} - \frac{n+1}{m} = \frac{m+n+1}{m(m+1)}.$$

Como $n \leq m$, se sigue que

$$\frac{m+n+1}{m(m+1)} \leq \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m}.$$

Si tomamos el segmento AP_1 suficientemente pequeño, el número m será tan grande como se quiera y $\frac{2}{m}$ será tan pequeño como se quiera [22, p. 84-86].

Por lo tanto,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}. \quad \square$$

9.1. Otra demostración del teorema

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales.

Admitimos que el área de un rectángulo de dimensiones a y b es $a[R] = a \times b$.

De ello se deduce la invariabilidad del área de un triángulo cuando un vértice se desplaza paralelamente al lado opuesto [Cap.7, Teorema 7.0.1].

Además, el área de los triángulos de igual altura es proporcional a su base (Fig. 9.9); es decir:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{a[\Delta AOB]}{a[\Delta AOB']}.$$

En la Figura 9.10, tenemos que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$.

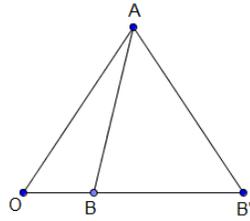


Fig. 9.9

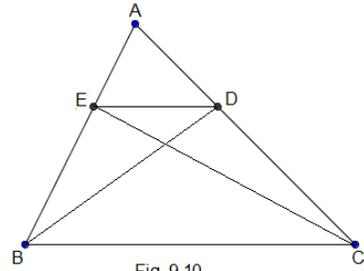


Fig. 9.10

Por el Teorema 7.0.1,

$$a[\Delta BDE] = a[\Delta ECD].$$

Luego,

$$a[\Delta BDA] = a[\Delta ECA]. \quad (9.3)$$

De aquí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{a[\Delta BCA]}{a[\Delta ECA]}$$

y

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{a[\Delta BCA]}{a[\Delta BDA]}.$$

Por (9.3),

$$\frac{a[\Delta BCA]}{a[\Delta BDA]} = \frac{a[\Delta BCA]}{a[\Delta ECA]}.$$

Así,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

Como $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}$ y $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$.

Se sigue que,

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}. \quad (9.4)$$

Esta demostración es realizada por Euclides en sus elementos.

Una Tercera demostración del teorema de Tales , se da en el capítulo 1, Teorema 1.1.2.

9.2. Consecuencias variadas

1. División de un segmento en partes iguales [19, p. 44].



Fig. 9.11

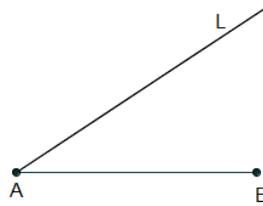


Fig. 9.12

Dado el segmento AB (Fig. 9.11), tracemos una semirrecta L que pase por A (Fig. 9.12).

Luego, dividimos L en segmentos de igual longitud (tantos como partes iguales queramos del segmento AB) (Fig. 9.13).

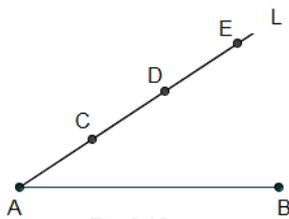


Fig. 9.13

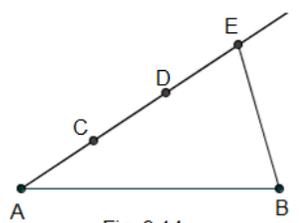


Fig. 9.14

Posteriormente, formamos el segmento EB (Fig. 9.14). Finalmente, tracemos las paralelas a este último segmento que pasan por C y D , formando los puntos C' y D' en el segmento AB (Fig. 9.15).

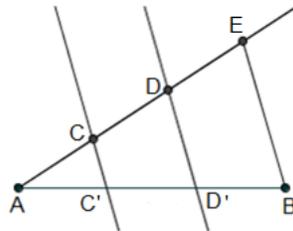


Fig. 9.15

Así, el segmento AB queda dividido en partes iguales (en este caso 3 partes iguales).

Por (9.4),

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}.$$

Como $\overline{AC} = \overline{CD}$, tenemos que

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'D'}} = 1.$$

De aquí,

$$\overline{AC'} = \overline{C'D'}. \quad (9.5)$$

Por otro lado, por (9.4),

$$\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}.$$

Como $\overline{AD} = 2(\overline{DE})$, se sigue que

$$\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'B}} = 2.$$

Luego,

$$\overline{AD'} = 2(\overline{D'B}).$$

Notemos que,

$$\overline{AD'} = \overline{AC'} + \overline{C'D'}.$$

Por (9.5),

$$2(\overline{AC'}) = 2(\overline{D'B}).$$

De aquí,

$$\overline{AC'} = \overline{C'B}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{AC'} = \overline{C'B} = \overline{C'D'}.$$

2. Dado el segmento AB , se puede trasladar un segmento de longitud L que pase por B en un segmento de longitud $2L$ sobre una paralela pasando por A (Fig. 9.16).

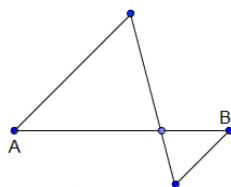


Fig. 9.16

Para verificar esta afirmación, dado el segmento que pasa por B de longitud L necesitamos construir un segmento que tenga de longitud $2L$ y que sea paralelo a este. Para esto, sea \overline{BC} el segmento de longitud L que pasa por B (Fig. 9.17).



Fig. 9.17

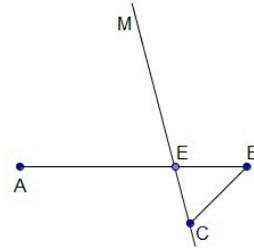


Fig. 9.18

Posteriormente, por $\frac{2}{3}$ del segmento AB tracemos la recta M que pase por C (Fig. 9.18). Finalmente, tracemos la paralela al segmento BC que pase por A y corta a M en D (Fig. 9.19).

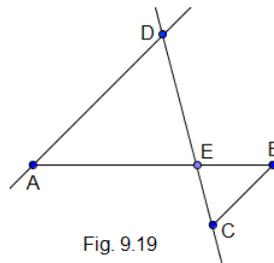


Fig. 9.19

Aplicando el teorema de Tales, tenemos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}.$$

Note que,

$$\overline{AE} = \frac{2}{3}(\overline{AB})$$

y

$$\overline{EB} = \frac{1}{3}(\overline{AB}).$$

De aquí,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = 2.$$

Por lo tanto,

$$\overline{AD} = 2(\overline{BC}).$$

Este resultado, permite resolver la siguiente pregunta de una forma en particular.

¿Cómo plegar una hoja de papel en su tercio?

La respuesta es la siguiente: sea A , B , C , D los vértices de una hoja. Luego, tracemos una diagonal, digamos \overline{CB} (Fig. 9.20).

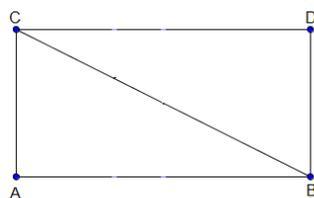


Fig. 9.20

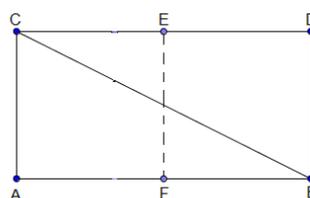


Fig. 9.21

Después, pleguemos por la mitad de la hoja (respecto del largo), obteniendo los puntos E y F (Fig. 9.21). Posteriormente, tracemos el segmento \overline{AE} y los segmentos \overline{CB} y \overline{AE} se cortan en P (Fig. 9.22).

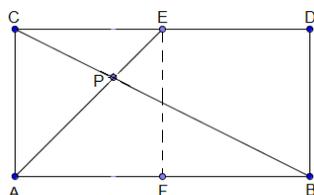


Fig. 9.22

Note que,

$$2(\overline{CE}) = \overline{AB}.$$

Tomando como el segmento \overline{CB} como segmento inicial, tenemos que P esta a un tercio respecto del largo (Fig. 9.23).

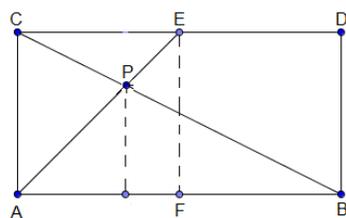


Fig. 9.23

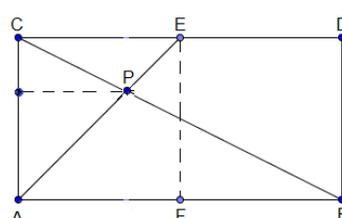


Fig. 9.24

Tomando como el segmento AE como segmento inicial, tenemos que P esta a un tercio respecto del ancho (Fig. 9.24).

Por lo tanto, las rectas que pasan por P y que son paralelas al largo y ancho de la hoja, son la base para plegar una hoja en su tercio (fig.9.25).

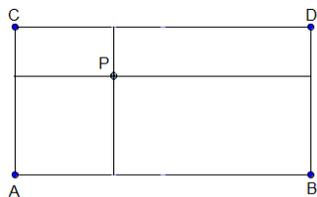


Fig. 9.25

Otro resultado que resuelve es el planteado en el capítulo 5. Sobre el geoplano, calcular el área de la disposición de la Figura 9.26, que se obtiene al cruzar la liga.

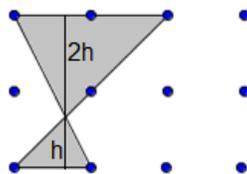


Fig. 9.26

Como la disposición de los clavos en el geoplano es regular, tenemos que la relación de los lados paralelos es 2. Luego, por el teorema de Tales, se sigue que las alturas matienen esta misma relación.

De aquí, el punto donde parece cruzarse la liga, ésta situado a dos tercios, es decir,

$$h = \frac{2}{3}.$$

Así el área del triángulo pequeño es $\frac{1}{3}$ y el área del triángulo grande es $\frac{4}{3}$.

Por lo tanto, el área de cuadrilatero es $\frac{5}{3}$.

3. Teorema de la bisectriz interna y externa.

Teorema 9.2.1. En cualquier triángulo ABC , si el segmento AD es bisectriz interior, entonces $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (Fig. 9.27) [Ver Teorema 7.0.5].

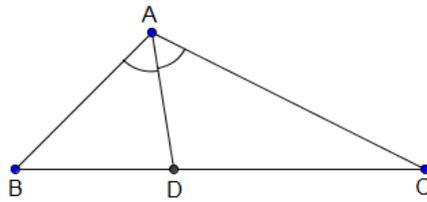


Fig. 9.27

Demostración. Tracemos la paralela al segmento AD que pasa por C y que corta a la recta que contiene a los puntos B y A en E (Fig. 9.28).

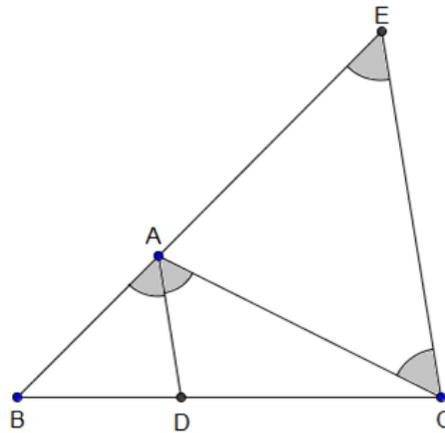


Fig. 9.28

Como \overline{AD} es bisectriz, se sigue que

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

Por otro lado, como $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, tenemos que

$$\angle DAC = \angle ACE$$

y

$$\angle BAD = \angle AEC.$$

De esto,

$$\angle AEC = \angle ACE.$$

De aquí,

$$\overline{AE} = \overline{AC}. \tag{9.6}$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Tales al triángulo BCE se tiene:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BE}}.$$

Como $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$ y $\overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE}$.

Se sigue que,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}}.$$

Por (9.6),

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}. \quad \square$$

Teorema 9.2.2. En cualquier triángulo ABC , si el segmento AD es bisectriz exterior del ángulo en A , entonces $\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}}$ (Fig. 9.29).

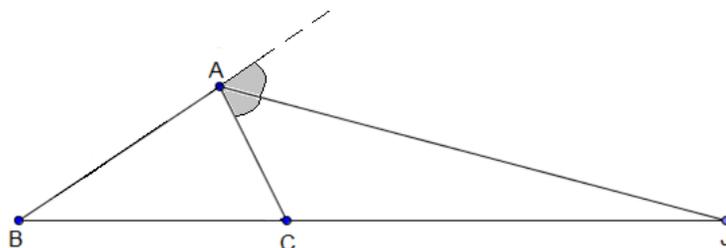


Fig. 9.29

Demostración. Tracemos la paralela al segmento BA que pasa por C y que corta al segmento AJ en D (Fig. 9.30).

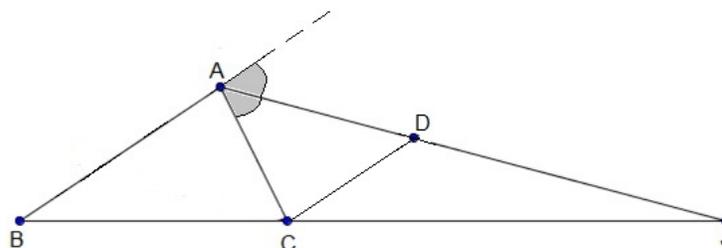


Fig. 9.30

Como $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, se sigue que

$$\angle CAD = \angle ADC.$$

De aquí,

$$\overline{CD} = \overline{AC}. \quad (9.7)$$

Aplicando el teorema de Tales al triángulo BJA tenemos:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}}.$$

Por (9.7),

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}}. \quad \square$$

9.3. *Circunferencia de Apolonio*

Los teoremas 9.2.1 y 9.2.2, ayudan a resolver el siguiente problema planteado por Apolonio de Perga (260–190 antes de nuestra era) [10, p. 117].

Encontrar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que sus distancias a dos puntos fijos, A , B , tiene una razón constante μ ; es decir:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \mu.$$

Caso 1: cuando $\mu = 1$.

Si $\mu = 1$, entonces:

$$\overline{PA} = \overline{PB}.$$

De aquí, P es punto medio del segmento AB y esta sobre su mediatriz (Fig. 9.31).

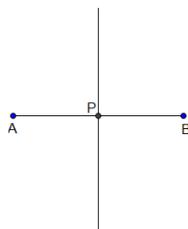


Fig. 9.31

Por lo tanto, el único punto de la mediatriz del segmento AB cumplen que sus distancias a A y B tienen razón constante es su punto medio.

Caso 2: cuando $\mu \neq 1$.

Sea P un punto del plano que no este en el segmento AB . Luego, tomemos el triángulo ABP y tracemos la bisectriz interior y exterior del ángulo en P (Fig. 9.32).

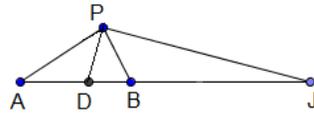


Fig. 9.32

Por los teoremas 9.2.1 y 9.2.2, se tiene que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

y

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{BJ}}.$$

De aquí,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{BJ}}.$$

De esto, $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ es constante.

Definimos $\mu := \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$.

Por otro lado,

$$2(\angle DPB) + 2(\angle BPJ) = 180^\circ.$$

Se sigue que,

$$\angle DPB + \angle BPJ = 90^\circ.$$

En consecuencia, P está en la circunferencia cuyo diámetro es el segmento DJ (Fig. 9.33).

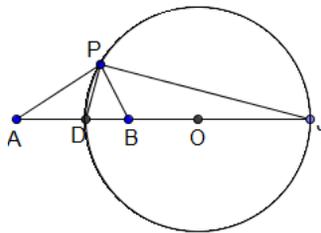


Fig. 9.33

A dicha circunferencia se le llama: la circunferencia de Apolonio del segmento DJ y razón μ .

Sólo falta mostrar que para todo punto $Q \neq P$ en dicha circunferencia, se tiene que

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \mu.$$

Sea $Q \neq P$ en dicha circunferencia (Fig. 9.34).

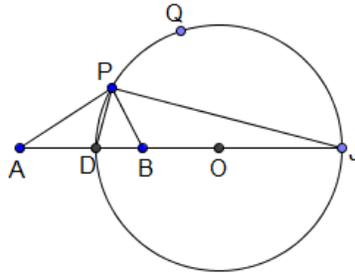


Fig. 9.34

Tracemos el triángulo AQJ (Fig. 9.35).

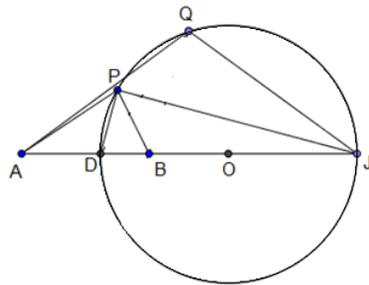


Fig. 9.35

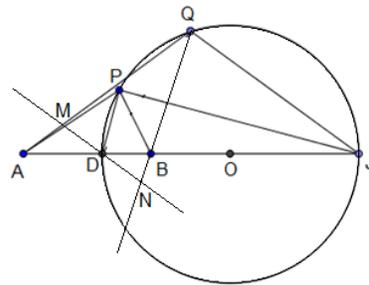


Fig. 9.36

Luego, tracemos la paralela al segmento QJ que pasa por D . Sean M y N los puntos de intersección de dicha paralela con los segmentos AQ y BQ respectivamente (Fig. 9.36).

Por ser ángulos opuestos por el vértice, se sigue que

$$\angle QBJ = \angle DBN.$$

Como $\overline{QJ} \parallel \overline{MN}$, tenemos que

$$\angle BQJ = \angle BND.$$

Aplicando el teorema de Tales resulta,

$$\frac{\overline{QJ}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{DB}}. \quad (9.8)$$

Ahora, aplicando el teorema de Tales al triángulo AJQ , se tiene que

$$\frac{\overline{QJ}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AD}}. \quad (9.9)$$

Por otra parte, por los teoremas 9.2.1 y 9.2.2, se obtiene que,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{BJ}}.$$

De aquí,

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AD}}. \quad (9.10)$$

Por (9.10), (9.9) = (9.8)

Así,

$$\overline{DN} = \overline{DM}. \quad (9.11)$$

Note que $\angle DQJ = 90^\circ$. Posteriormente, por ser $\overline{QJ} \parallel \overline{MN}$, obtenemos que $\angle NDQ = 90^\circ$.

En consecuencia, el segmento DQ es altura del triángulo MNQ .

Por (9.11) el segmento DQ es mediatriz del segmento MN .

De aquí, el segmento DQ es bisectriz interna del triángulo MNQ (Fig. 9.37).

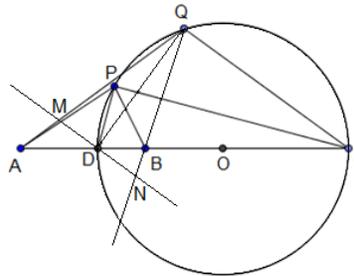


Fig. 9.37

De este modo, el segmento DQ también es bisectriz interna del triángulo ABQ .

De esta manera,

$$90^\circ = \angle DQB + \angle BQJ.$$

Se obtiene que, $\angle BQJ$ es bisectriz exterior del triángulo ABQ .

Por los teoremas 9.2.1 y 9.2.2 se obtiene,

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \mu.$$

Por lo tanto, Q está en la circunferencia de Apolonio del segmento DJ y razón μ .

9.4. Homotecias

Sea O un punto cualquiera del plano:

Pongamos en correspondencia a todo punto A del plano con el punto A' de acuerdo a la siguiente regla:

i) Si el punto A coincide con O , entonces el punto A es el punto O .

ii) Si A es diferente de O , entonces el punto A' se halla en la semirrecta OA a una distancia $K \times OA$ del punto O ; es decir:

$$OA' = K \times OA$$

La aplicación del plano sobre si mismo que hace corresponder, de esta forma el punto A' con el punto A se llama *Homotecia*. El punto O se llama *Centro de homotecia* y el número K se llama *Coficiente de homotecia* (Fig. 9.38).

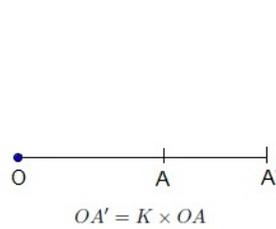


Fig. 9.38

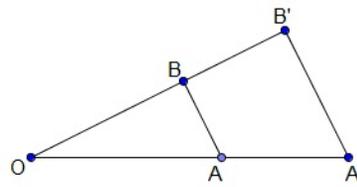


Fig. 9.39

Resulta del teorema de Tales que la imagen del segmento AB es paralela y ampliada (o reducida) con respecto a éste en la misma relación K (fig.9.39).

La homotecia es un medio a la vez económico y muy fecundo de descripción y demostración. En seguida dos ejemplos.

1. Construir una circunferencia tangente a dos rectas concurrentes dadas l_1, l_2 y pasando por un punto dado M (Fig. 9.40) [26, p. 18].

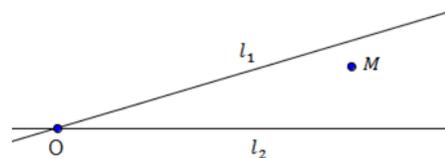


Fig. 9.40

Tracemos la bisectriz del ángulo en O . Luego, sobre dicha bisectriz tomemos el punto O' , y tracemos las perpendiculares correspondientes a las rectas l_1 y l_2 . Posteriormente, tracemos una circunferencia C_1 la cual es tangente a las rectas l_1 y l_2 (Fig. 9.41).

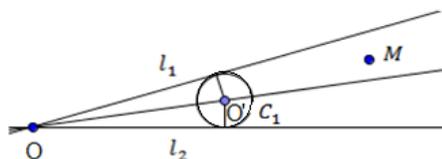


Fig. 9.41

Después, tracemos la recta que une M con O y llamemos A al punto de intersección de C_1 con dicha recta (Fig. 9.42).

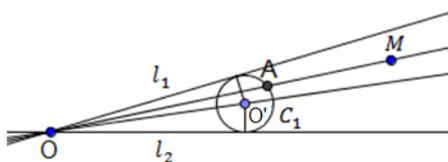


Fig. 9.42

Tomando la imagen de C_1 mediante la homotecia con centro en O y coeficiente $\frac{MO}{AO}$, se obtiene la circunferencia tangente a l_1 y l_2 que pasa por M (Fig. 9.43).

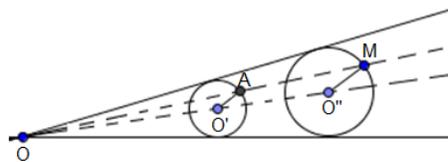


Fig. 9.43

2. En un trapecio completo $ABCD$ (Fig. 9.44), los puntos I y J (puntos medios de las bases) están alineados con O y K [Cap. 7, Ejm. 6].

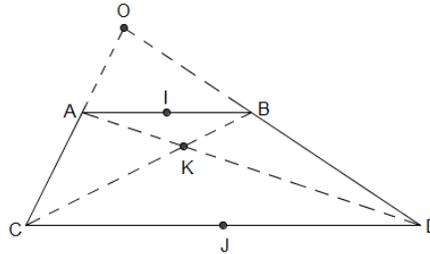


Fig. 9.44

Con la ayuda de una homotecia, podemos llegar a una conclusión.

Existe una homotecia positiva ($K > 0$) tal que el segmento AB tiene por imagen el segmento CD , tiene centro en O y traslada I sobre J al ser puntos medios.

Así, O, I, J están alineados.

Por otro lado, existe una homotecia negativa ($K < 0$) tal que la imagen del segmento AB es el segmento CD , tiene centro K y también traslada I sobre J .

En consecuencia, I, J, K están alineados.

Por lo tanto, O, I, J, K están alineados.

9.4.1. Ampliación y reducción

Una consecuencia sumamente importante reside en la recíproca: si ampliamos (o reducimos) una figura en relación a otra, sin cambiar de orientación, las rectas que contienen dos puntos correspondientes a una y a otra son todas concurrentes (al centro de homotecia) (Fig. 9.45).

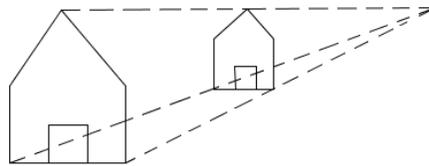


Fig. 9.45

La importancia central de la propiedad de Tales es ser una expresión del concepto de linealidad. El siguiente cuadro intenta representar las diferentes expresiones de este concepto.

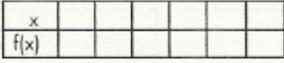
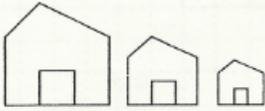
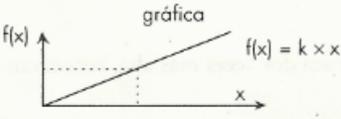
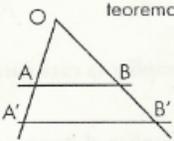
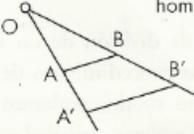
algebraica	geométrica
 <p>cuadro de proporcionalidad</p>	<p>ampliación/reducción a escala</p> 
<p>gráfica</p>  <p>$f(x) = k \times x$</p>	<p>teorema de Tales</p>  $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$
<p>linealidad</p> <p>$x \rightarrow f(x)$ tal que:</p> $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $f(ka) = k f(a)$	<p>homotecia</p>  <p>$f: A \rightarrow A'$ tal que $\vec{OA'} = k \vec{OA}$</p>

Fig. 9.46

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

La proporcionalidad es una noción abordada desde la primaria hasta el bachillerato.

La reconocida dificultad de puesta en marcha es en primer lugar, una dificultad de identificación. La proporcionalidad, por lo general, se reconoce localmente en una situación numéricamente simple (doble, mitad), pero el modelo general de operador multiplicativo, es decir el modelo lineal, se construye lentamente [3, p. 230].

Por esta razón es necesario trabajar en diferentes campos paralelamente: manipulación sobre cuadros numéricos, aproximación de función (en particular de función lineal), ampliación/reducción de una figura (primero sobre papel cuadrículado), realización de maquetas, cambio de escala. El grado de dificultad depende por un lado de la riqueza de la situación, por otro de la complejidad numérica.

El método de división de un segmento (Fig. 9.15) se presenta primero como un procedimiento de construcción; posteriormente se justifica. Del mismo modo, podemos utilizar un compas de proporción (Fig. 9.47) constituido por regletas articuladas por un perno, de manera que las ramas OA y OB por una parte, y OA' y OB' por otra sean iguales. Así, podemos efectuar un cambio de escala.

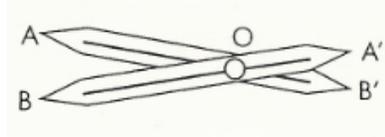


Fig. 9.47

Una vez establecida la posición del perno, identificamos una longitud AB sobre el modelo, y lo transponemos de $A'B'$ sobre la ampliación.

Los problemas de escala, ampliación/reducción son buenas ocasiones para hacer admitir el “principio de ampliación”, no solamente para los números enteros o fraccionarios, sino para todos los números.

Capítulo 10

LOS OBJETOS EN EL ESPACIO

10.1. Los poliedros regulares y los otros

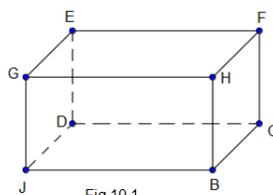
El estudio de los diversos objetos (cajas, envases, pelotas) permite separar algunos elementos descriptivos. Este estudio hace referencia, en primer lugar, a la observación de objetos reales y familiares. De este análisis, se desprenden algunas nociones que permiten describir, y luego construir y representar esos objetos. Comenzaremos por los objetos cuyas caras son planas y cuya forma es poligonal.

Definición 10.1.1. Un *poliedro* es un sólido limitado por planos.

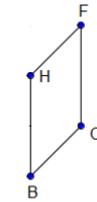
Decimos sólido, en el sentido de ser un espacio limitado cualquiera, puesto que la geometría sólo se ocupa de la forma y el tamaño, más no de la sustancia que compone a éstos. Los planos que limitan dichos poliedros se llaman *caras*, las intersecciones de estos se llaman *aristas* y las intersecciones de las aristas se llaman *vértices* *vértices* del poliedro. Esto permite despejar varios elementos de descripción de un sólido.

Teorema 10.1.1. En todo poliedro, si llamamos C al número de caras, A al número de aristas y V al número de vértices, entonces $C + V - A = 2$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideremos al siguiente poliedro (Fig. 10.1) con C caras, A aristas y V vértices.



Fijemonos en una cara del poliedro, por ejemplo la cara $C_1 := BHFC$ (Ver Fig. 10.2).

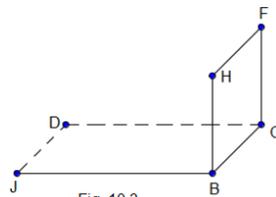


Como los vértices son las intersecciones de las aristas, tenemos que

$$A_{C_1} = V_{C_1}.$$

Nota 10.1.1. A_{C_1} y V_{C_1} denotan el número de aristas y vértices de la cara $BHFC$, respectivamente.

Luego, agregando la cara $C_2 := JBCD$ a la cara C_1 (Fig. 10.3), hacemos coincidir una de sus aristas, a saber la arista BC , de aquí las dos caras C_1 y C_2 tiene en común los vértices B, C .



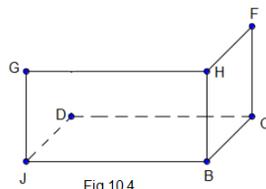
En consecuencia,

$$A_{C_2} + 1 = V_{C_2} + 2.$$

De esto,

$$A_{C_2} = V_{C_2} + 1.$$

Posteriormente, agregando una cara contigua $C_3 := JBHG$ a las caras C_1 y C_2 (Fig. 10.4), C_3 tendrá en común dos aristas y tres vértices con respecto a C_1 y C_2 .



Luego,

$$A_{C_3} + 2 = V_{C_3} + 3.$$

De ello,

$$A_{C_3} = V_{C_3} + 1.$$

Mediante un razonamiento inductivo, se tendrá que para $C - 1$ caras contiguas:

$$A_{C-1} = V_{C-1} + 1.$$

Sumando miembro a miembro, resulta:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{C-1} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{C-1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{C-1 \text{ veces}}. \quad (10.1)$$

Note que, $C - 1$ es el número total de caras que podemos elegir. A través de este procedimiento recorreremos todo el poliedro. De este modo:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{C-1} \quad (10.2)$$

Y

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{C-1}. \quad (10.3)$$

Sustituyendo (10.1) y (10.2) en (10.3),

$$A = V + C - 1.$$

De otra forma:

$$V + C - A = 1.$$

Como habíamos suprimido una cara, si la agregamos, la igualdad se convierte en la que queremos probar,

$$V + C - A = 1 + 1.$$

Por lo tanto,

$$V + C - A = 2. \quad \square$$

A continuación unos ejemplos de poliedros (Fig. 10.5-10.10), los cuales verifican la relación de Euler.

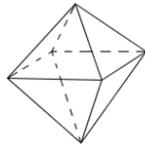


Fig. 10.5

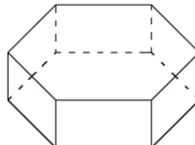


Fig. 10.6

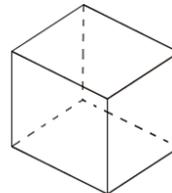


Fig. 10.7

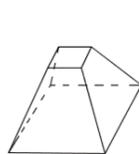


Fig. 10.8

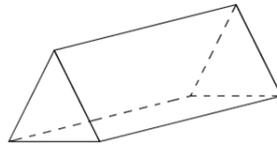


Fig. 10.9

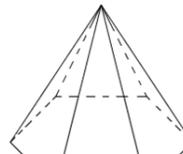


Fig. 10.10

Otros elementos de descripción se refieren a la naturaleza de las caras (¿son regulares o no?) y también a la de los vértices (¿Cuántas aristas parten de cada vértice?). En los ejemplos anteriores, con excepción de la pirámide porque tiene un vértice del cual parten 6 aristas (Fig. 10.10), este número es constante en cada figura; de hecho es igual a 4 en el caso del octaedro (Fig. 10.5), e igual a 3 en el resto de los casos.

El siguiente cuadro permite verificar esta relación.

Elementos	Fig.10.5	Fig.10.6	Fig.10.7	Fig.10.8	Fig.10.9	Fig.10.10
Caras	8	8	6	6	5	7
Vértices	6	12	8	8	6	7
Aristas	12	18	12	12	9	12

Definición 10.1.2. Llamamos *ángulo diedro* o *diedro* a la abertura o inclinación de dos planos que se cortan en una recta en común llamada *arista del diedro* y llamamos *caras del diedro* a los planos que lo determinan (Fig. 10.11).

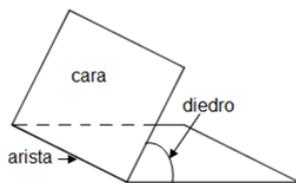


Fig. 10.11

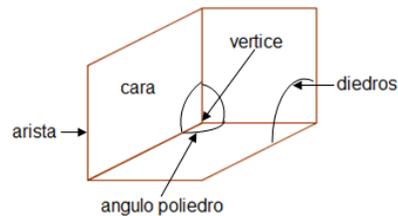


Fig. 10.12

Definición 10.1.3. Llamamos *ángulo poliedro* a la abertura de tres o más planos que se encuentran en un punto llamado *vértice del ángulo*, las intersecciones de los planos se llaman *aristas*, y las aristas forman las caras del ángulo (Ver Fig. 10.12).

Podemos clasificar a los ángulos poliedros en base al número de planos que se cortan en un punto. Por ejemplo, un ángulo poliedro de cuatro planos se llama *ángulo tetraedro*, *ángulo pentaedro* al ángulo poliedro de 5 planos, etcétera.

Note que, el ángulo poliedro más sencillo es el ángulo donde tres planos se cortan en un punto y es llamado *ángulo triedro* y está formado por tres ángulos diedros como lo muestra la Figura 10.12.

En particular los ángulos triedros cumplen el siguiente teorema.

Teorema 10.1.2. La suma de los ángulos de dos caras cualesquiera en un ángulo triedro es mayor que el ángulo de la cara restante.

Demostración. Sea $O - ABC$ un ángulo triedro cuya cara mayor es AOC (Fig. 10.13).

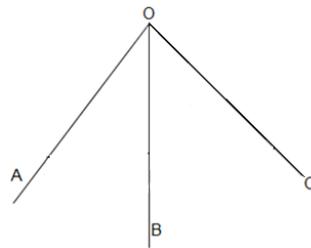


Fig. 10.13

Nota 10.1.2. $O - ABC$ denota el ángulo triedro formado por las aristas A, B, C en el vértice O .

Consideremos sobre las aristas A y C , los puntos X, Z , respectivamente. Luego, tracemos el segmento OD de tal suerte que el ángulo XOD sea igual ángulo AOB y D se encuentre en el segmento XZ (Fig. 10.14).

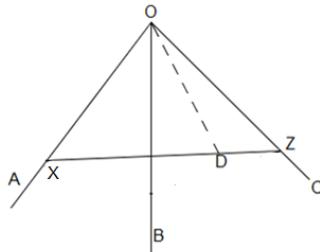


Fig. 10.14

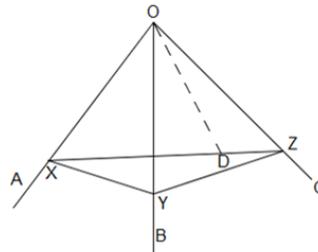


Fig. 10.15

Posteriormente, sea Y el punto en la arista B tal que los segmentos OD y OY son iguales. A continuación se unen X y Z con Y (Fig. 10.15).

Por el criterio LAL de congruencia de triángulos, se sigue que

$$\overline{XY} = \overline{XD}. \quad (10.4)$$

En el triángulo XYZ se cumple,

$$\overline{XY} + \overline{YZ} > \overline{XZ}.$$

Como $\overline{XZ} = \overline{XD} + \overline{DZ}$, tenemos que

$$\overline{XY} + \overline{YZ} > \overline{XD} + \overline{DZ}.$$

Por (10.4),

$$\overline{YZ} > \overline{DZ}.$$

Consecuentemente, como los segmentos OD y OZ del triángulo OZD son respectivamente iguales a los segmentos OY y OZ del triángulo OCB , resulta que $\angle YOZ > \angle ZOD$.

En consecuencia,

$$\angle XOY + \angle YOZ > \angle XOZ.$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos de dos caras cualesquiera en un ángulo triedro es mayor que el ángulo de la cara restante. \square

Teorema 10.1.3. La suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliedro es menor que 360° .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea $O - VWXYZ$ un ángulo poliedro, $ABCDE$ un polígono determinado por un plano que corta a las aristas V, W, X, Y, Z (Fig. 10.16).

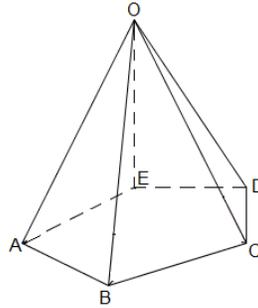


Fig. 10.16

Se observa que existen cinco triángulos con vértice en O y que la suma de los ángulos de estos triángulos es 900° , es decir,

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA + \angle OAB + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB + \angle OCD + \angle ODC + \angle ODE + \angle OED + \angle OEA + \angle OAE = 900^\circ.$$

Por el Teorema 10.1.2, tenemos que

$$\angle OAE + \angle OAB > \angle EAB$$

$$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC$$

$$\angle OCB + \angle OCD > \angle BCD$$

$$\angle ODC + \angle ODE > \angle CDE$$

$$\angle OED + \angle OEA > \angle DEA.$$

De aquí,

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA + \angle EAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA < 900^\circ.$$

Por otra parte, por la Propiedad 4.3.1, se sigue que

$$\angle EAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA = 540^\circ.$$

De esto,

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA < 360^\circ.$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliedro es menor que 360° . \square

Definición 10.1.4. Cuando en un poliedro las caras son polígonos regulares idénticos decimos que el poliedro es *regular*.

Observación 10.1.5. Puesto que todas las caras son polígonos regulares iguales, entonces los ángulos poliedros son iguales.

Platón había señalado que no podían existir más que cinco y los describe en el *Timeo*. En lo sucesivo los llamaremos *sólidos de Platón*.

La prueba es simple y permite asociar la fórmula de Euler y el número de aristas que inciden en cada vértice.

Una consecuencia de la fórmula de Euler es: si suponemos que los poliedros formados tienen C caras, V vértices y A aristas, en la que cada cara tienen n lados de polígonos regulares y en cada vértice concurren m aristas. Como en cada cara hay n aristas asociadas de a pares porque cada arista pertenece a dos caras entonces

$$A = \frac{n \times C}{2}. \quad (10.5)$$

Además, como en cada vértice concurren m aristas y cada arista tiene 2 vértices, tenemos que

$$A = \frac{m \times V}{2}. \quad (10.6)$$

Por los teoremas 10.1.2 y 10.1.3, para un triángulo equilátero pueden formarse ángulos poliedros con 3, 4 y 5 triángulos equiláteros (Fig. 10.17-10.19).



Fig. 10.17

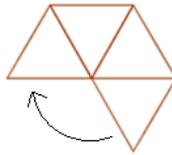


Fig. 10.18

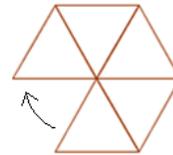


Fig. 10.19

Nota 10.1.3. Los ángulos poliedros formados por caras triangulares se forman como lo indica la flecha marcada en las figuras.

En consecuencia, sólo puede haber tres poliedros regulares de caras triangulares.

En la Figura 10.17, al ser regulares los triángulos, cada cara tendrá 3 lados; es decir, $n = 3$.

Sustituyendo en (10.5) tendremos que,

$$A = \frac{3C}{2}.$$

Por otro lado, en cada vértice concurren 3 aristas, es decir $m = 3$, de aquí al sustituir en (10.6) obtendremos que,

$$A = \frac{3V}{2}$$

De aquí,

$$C = V.$$

Aplicando fórmula de Euler, tenemos que

$$C + C + \frac{3C}{2} = 2.$$

Por lo tanto, el poliedro formado por la Figura 10.17, será un poliedro de 4 caras (todas triángulos equiláteros) y 4 vértices; es decir, un **Tetraedro** (Ver Fig. 10.20).

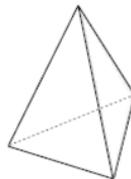


Fig. 10.20

Un razonamiento análogo en la Figura 10.13 nos lleva a,

$$A = \frac{3C}{2}$$

y

$$A = \frac{4V}{2}.$$

Consecuentemente,

$$V = \frac{3C}{4}.$$

Por la fórmula de Euler $C = 8$ y $V = 6$; es decir, el poliedro formado por la Figura 10.18, será un poliedro de 8 caras (todas triángulos equiláteros) y 6 vértices; es decir, un **Octaedro** (Fig. 10.21).

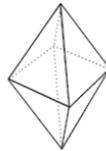


Fig. 10.21

De la misma manera, tendremos en la Figura 10.19: $C = 20$ y $V = 12$; es decir, el poliedro formado en la figura será un poliedro de 20 caras (todas triángulos equiláteros) y 12 vértices. Se trata de un **Icosaedro** (Fig. 10.22).

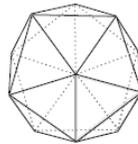


Fig. 10.22

Por los teoremas 10.1.2 y 10.1.3, para un cuadrado puede formarse con 3 cuadrados un ángulo poliedro y solamente con estos se podrá formar un ángulo poliedro. Obtenemos sin sorpresa un poliedro de 6 caras y 8 vértices; es decir, un **Cubo** (Fig. 10.23).

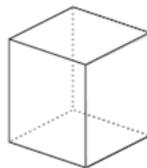


Fig. 10.23

Análogamente, para un pentágono, tenemos que no podemos asociar más de 3 pentágonos regulares en cada vértice. De aquí, $C = 12$ y $V = 20$; es

decir, el poliedro formado un poliedro de 12 caras y 12 vértices. Se trata de un **Dodecaedo** (Fig. 10.24).

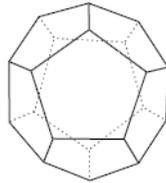


Fig. 10.24

Finalmente, notemos que la suma de tres ángulos de un hexágono regular es 360° , en consecuencia la suma de tres ángulos de cualquier polígono regular con más de 6 lados es mayor que 360° [Cap. 3, Obs. 3.1.6]. Luego, no puede haber más de cinco poliedros regulares.

Por otro lado, decimos *poliedro semirregular* a un poliedro que utiliza dos tipos de caras regulares. Por ejemplo,

cuadrados/triángulos, cuadrados/hexágonos ó pentágonos/hexágonos, etcétera.

En este caso, podemos proceder por tanteo, intentando establecer una regla de construcción del tipo:

todo cuadrado está rodeado por triángulos y todo triángulo por cuadrados.

Esta regla da lugar a un **Cuboctaedro** (Fig. 10.25), 6 caras cuadradas, 6 caras triangulares, 12 vértices.

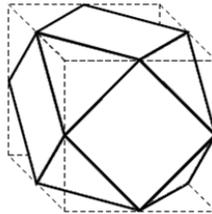


Fig. 10.25

Limitándonos solamente a los poliedros semirregulares, asociando tipos de caras regulares, he aquí lo que podemos obtener.

1. Tres aristas por cada vértice.

a) 4 hexágonos, 4 triángulos (**Tetraedro trunco**) (Fig. 10.26).

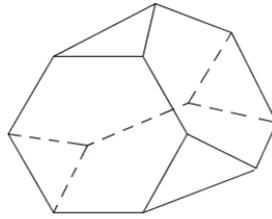


Fig. 10.26

Todo triángulo está rodeado por hexágonos, todo hexágono está rodeado por tres secuencias “hexágono, triángulo”.

b) 8 hexágonos, 6 cuadrados.

Todo cuadrado está rodeado por 4 hexágonos y todo hexágono por tres secuencias “cuadrado, hexágono”.

c) 12 pentágonos, 20 hexágonos (Fig. 10.27).



Fig. 10.27

Todo pentágono está rodeado por hexágonos, todo hexágono rodeado por tres secuencias “pentágono, hexágono”.

d) 12 decágonos, 20 triángulos.

Todo triángulo está rodeado por decágonos, todo decágono por cinco secuencias “triángulo, decágono”.

e) 6 octágonos, 8 triángulos .

Todo triángulo está rodeado por octágonos, todo octágono rodeado por cuatro secuencias “octágono, triángulo”.

2. Cuatro aristas por cada vértice.

a) 8 triángulos, 18 cuadrados.

Todo triángulo está rodeado por cuadrados

b) 8 triángulos, 6 cuadrados.

Todo triángulo está rodeado por cuadrados, todo cuadrado por triángulos.

c) 20 triángulos, 12 pentágonos.

Todo triángulo está rodeado por pentágonos, todo pentágono por triángulos.

3. Cinco aristas por cada vértice

a) 6 cuadrados, 32 triángulos.

Todo cuadrado está rodeado por triángulos

b) 80 triángulos, 12 pentágonos.

Todo pentágono está rodeado por triángulos.

Aquí no se trata de multiplicar los ejemplos, sino únicamente de indicar algunos procedimientos que permitan construir una gran cantidad de sólidos nuevos a partir de objetos simples. De la misma manera, es posible adjuntar unos sólidos a otros según las reglas precisas. He aquí un ejemplo simple. Consideremos seis pirámides de base cuadrada cuya altura es la mitad del lado de la base. Uniendo sus vértices de manera que el vértice del ángulo poliedro de cada pirámide coincida con el ángulo poliedro de las demás, obtenemos un cubo completo (Fig. 10.28).

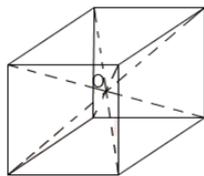


Fig. 10.28

Es un cubo, porque al ser las bases de las pirámides cuadrados de la misma medida, tenemos que 3 de ellos pueden formar un ángulo poliedro, además al ser iguales las pirámides sus ángulos poliedros son iguales. *Decimos que es un cubo completo en el sentido que está bien formado por las pirámides.*

Luego, unimos los vértices de las bases de tal manera que pareciera que giramos las pirámides hacia el exterior (con respecto a la unión anterior), obtenemos un poliedro **romboédrico** (las caras son rombos) de 12 caras (Fig. 10.29) y su volumen es dos veces el volumen del cubo.



Fig. 10.29

Veamos que el volumen de la Figura 10.29 es dos veces el volumen del cubo.

Supongamos que una arista del cubo mide b , de aquí que su volumen será,

$$b^3.$$

En consecuencia, el área de cada pirámide es:

$$b^3/6.$$

puesto que el cubo está formado por seis pirámides iguales.

Como la altura de cada pirámide es $\frac{b}{2}$ y la altura es perpendicular a la base, si llamamos OH (Fig. 10.30) a la altura de cada pirámide, entonces

$$OH = AM = \frac{b}{2}$$

donde M es el punto medio de lado AB .

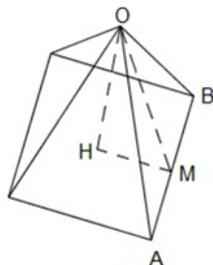


Fig. 10.30

De aquí,

$$HM = \frac{b}{2}.$$

Por otra parte, al ser OH altura, tenemos que

$$\angle OHM = 90^\circ.$$

De este modo, el triángulo OHM es rectángulo isósceles.

Así,

$$\angle OMH = 45^\circ.$$

Aplicando el mismo razonamiento a cada pirámide (Fig. 10.31) tendremos que,

$$\angle O'MH' = 45^\circ.$$

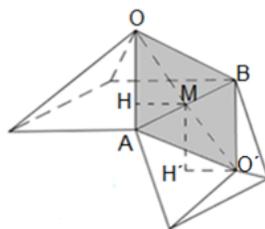


Fig. 10.31

De esta manera,

$$\angle OMO' = 180^\circ.$$

Por lo tanto las caras OAB y $O'AB$ son coplanares (están en el mismo plano).

El sólido obtenido es un poliedro de 12 caras las cuales son rombos y el número de aristas que inciden en un vértice es 3 o 4. Y su volumen es $2b^3$.

Todas estas construcciones tienen por único objetivo hacer que se descubran y se exploren nuevas formas, a las cuales podemos darles un mayor interés estético variando acertadamente los colores. Pero en términos de geometría se trata únicamente de observar y de encontrar algunas situaciones para la utilización de la fórmula de Euler - Poincaré.

INDICACIONES PEDAGÓGICAS

Los conocimientos geométricos que se ponen en juego en este capítulo son relativamente poco numerosos. En primer lugar, se trata de organizar el espacio y la orientación en tres dimensiones, y luego, de ejercitar la observación. Esta observación es primero empírica, luego estructurada por nociones de caras, vértices, aristas.

Estos trabajos de aproximación, se continúan por construcciones más sistemáticas y elaboradas, usando las relaciones de insidencia y el resultado de Euler-Poincaré. En primer lugar se trata de enriquecer la experiencia, de favorecer la "visión en el espacio"; es decir, de emprender la construcción de representaciones mentales sobre las cuales se establecerán, a continuación, las nociones de paralelismo, de ortogonalidad y las transformaciones espaciales. La recolección de objetos variados en el entorno y su observación es el mejor punto de partida, seguido de la construcción más cuidadosa mediante el uso de cartón liviano o cartulina. Así, disponemos de materiales para la resolución de problemas de bachillerato que traten de objetos en el espacio.

CONCLUSIONES

La geometría tiene y seguirá teniendo un gran impacto en la matemática, puesto que es una de las causantes de su desarrollo hoy en día. Por ello la enseñanza de la geometría se debe volver a convertir en una herramienta muy importante de la enseñanza de las matemáticas. Sólo basta notar, la cantidad de representaciones geométricas (en este trabajo) para el desarrollo de los conceptos.

Somos conscientes de que a lo largo de este trabajo, se plantean una gran cantidad de conceptos abstractos que exceden las cuestiones didácticas y sobre todo la enseñanza de la geometría. Pero, también sabemos que era necesario un trabajo en el cual el docente se pudiera apoyar, mediante conceptos que reafirmarán sus conocimientos, incluso para motivarlos a saber más mediante la explicación detallada de los conceptos aquí tratados. Sabemos que en muchos de estos conceptos se les exige revisar sus propios conocimientos geométricos, construir nuevas ideas sobre qué es un problema geométrico, y sobre todo poder desarrollar actividades e intervenciones en ciertos aspectos geométricos a diferentes prácticas habituales en los salones de clase. Pero, estamos entusiastas que con lo tratado en cada capítulo ésto que se les exige se podrá realizar.

Concluimos que es positivo que el docente, conozca de geometría para no quedar atado a discutir qué es o qué no es en una demostración o simplemente sepa qué contestar cuando un alumno tenga una duda. Esto permitirá que el alumno haga un tránsito desde una construcción elemental hasta entender qué es lo que sucede allí, llegado a la abstracción lógica que le permitirá clasificar, razonar, etcétera.

Claramente, hay necesidad de una acción pedagógica. Este trabajo está montado sobre esta base, “este punto puede estar en discusión”. Pero, que el maestro tenga conciencia de las distintas etapas por las que va transitando el alumno y adecue los recursos, discursos, etcétera. Depende totalmente de su formación académica. Es bien sabido que en México la mayoría de los profesores que enseñan matemáticas no tienen la formación de matemáticos por lo que cada uno de ellos tiene su propia concepción de la enseñanza de la geometría, por esto es importante un trabajo como éste.

Consideramos que este trabajo también es importante porque reúne en un

sólo documento temas interesantes de geometría. El tratado de cada tema lo puede adecuar cada docente y utilizar a su gusto, por esto considero que la selección del título *Una propuesta didáctica sobre la enseñanza de la geometría en el nivel medio superior* ha sido un gran acierto para este trabajo y para mi formación profesional también.

Queda, en manos de quienes corresponda hacer uso de este trabajo lo que ha sido para mí una vivencia llena de esfuerzos pero al final muy gratificante por los resultados matemáticos (en mí persona) obtenidos. Siempre pienso positivamente, y se que este trabajo podrá tener una mejora en un futuro de aquellos aspectos que no pudieron atenderse por la diversidad de conceptos que se conjugan en el acto didáctico y que es muy difícil cubrir en una sola investigación. En otras palabras, acá no acaba, es el principio de un camino que apenas comienza una tarea que puede seguir dando frutos muy halagadores para nuestros docentes.

Bibliografía

- [1] Aleksandrov A. D., Kolmogorov A. N., Laurentiev M. A., *La matemática, su contenido, método y significado*, Alianza Editorial, S. A., España, 1973, Tomo I y III.
- [2] Bkouche R., *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, in bulletin APMEP n°430, Francia, 2000.
- [3] Boule F., *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*, La vasija, 2005.
- [4] Boyer C. B., *A history of mathematics*, John Wiley and Sons, United States of America, 1968.
- [5] Braun E., *Caos, fractales y cosas raras*, Fondo de cultura económica, México, 1996.
- [6] Bruño G. M., *Elementos de la geometría para la enseñanza secundaria y escuelas preparatorias*, Librería de la V^{DA} de C. Bouret, México, 1921.
- [7] Clairaut A. C., *Éléments de Géométrie*, David fils, Francia, 1741.
- [8] Collete J. P., *Historia de las matemáticas I*, Editorial Siglo XXI, México, 1986.
- [9] Cordona S. C. A., Cubillos V. S. I., Dussan R. N. J., Ocaña G. A., Ocaña G. J. C., *La geometría de Alberto Durer. Estudio y modelación de sus construcciones*, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Colombia, 2006.
- [10] Coxeter H. S. M., *Elementos de la geometría*, Editorial Limusa-Wiley, México, 1971.
- [11] Coxeter H. S. M., Greitzer S. L., *Geometry Revisited*, Random House, United States of America, 1967.
- [12] Eves H., *Estudio de las geometrías*, Hispano-Americana y el centro regional de ayuda técnica, México, 1969, Tomo I y II.
- [13] Golovina L. I., Yaglom I. M., *Inducción en geometría*, Editorial Mir, URSS, 1976.

- [14] Gonzáles C. S., Gonzáles J. R. M, Espino F. G. A, *La enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias de México durante el porfiriato: programas de estudio, docentes y prácticas escolares*, Educación matemática–Santillana, México, 2006.
- [15] Hidalgo S. L., *Mosaicos. Temas de matemáticas para el bachillerato*, Instituto de matemáticas UNAM, México, 2007.
- [16] Iborra C., *Geometría*, Universidad de Valencia, España, 2010.
- [17] Iborra C., *Teoría de números*, Universidad de Valencia, España, 2004.
- [18] Jaime A., Gutiérrez A., *El grupo de las isometrías del plano*, Editorial Síntesis, España, 1996.
- [19] Kinsey L. C., Moore T. E., *Symmetry, shape, and space an introduction to mathematics, through geometry*, Key college publishing, United States of America, 2002.
- [20] Mandelbrot B. B., *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and company, United States of America, 1982.
- [21] Martin G. E., *Geometric constructions*, Board Editorial, United States of America, 1998.
- [22] Pogórelov A. V. *Geometría elemental*, Editorial Mir, URSS, 1974.
- [23] Rosales G. A., *Números trascendentes: desarrollo histórico*, Revista digital matemática, Educación e Internet, 2010, Vol. 10, No 2.
- [24] SEP, *Resultados prueba enlace 2011 básica y media superior*, SEP, México, 2011.
www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2011/ENLACE2011.pdf
- [25] Smith E. D., Wentworth J., *Geometría plana y del espacio*, Editorial Porrúa, México, 1978.
- [26] Yaglom I. M, *Geometric transformations II*, Random House, United States of America, 1962.

Índice alfabético

- ángulo
 - poliedro, 198
 - triedro, 199
- área
 - circunferencia, 102
- algoritmo
 - Rose-Strafford, 85
- aperiódico, 81
- apotema, 58
- arista
 - del diedro, 198
- aristas, 195
- caras, 195
 - del diedro, 198
- centrado, 82
- Centro
 - de homotecia, 190
- centro, 58
 - de gravedad, 137
- circunferencia
 - de Apolonio, 188
 - inscrita, 136
- Coefficiente de homotecia, 190
- conservación
 - del área, 2, 6, 14
- convexo, 25, 61
- cuadrado, 35
- cuadratura
 - círculo, 89
- Cuboctaedro, 204
- desigualdad
 - triangular, 99
- deslizamiento, 83
- diagonal, 23
- diedral, 62
- diedro, 198
- diferentes, 111
- dominio
 - fundamental del teselado, 79
- espejo, 83
- figuras
 - semejantes, 164
- Fractal, 122
- Friso, 84, 85
- Frisos, 84
- Geoplano, 111
- grupos
 - planos de Fedorov, 81
- homólogos, 42
- Homotecia, 172, 190
- Inducción, 6
- isósceles, 24
- isometrías
 - del plano, 78
- lúnulas, 166
- Magnitud, 106
- Medir, 106
- monoedro, 62
- motivo, 61
- motivos, 61
- número

- algebraico, 89
- paralelas, 37
- paralelogramo, 35
- pentágono
 - regular, 23
- perímetro
 - circunferencia, 102
- periódico, 79
- periferia, 90
- pi, 90
- polígono, 63
 - regular, 63
- polígonos
 - semejantes, 97
- poliedro, 195
 - regular, 201
 - romboédrico, 206
 - semirregular, 204
- primitivo, 82
- radio, 58
- rectángulo, 35
- reflexión, 42
- retícula
 - de paralelogramos periódicos, 79
- rombo, 35
- segmentos
 - incommensurables, 107
- simétrico, 42
- simetría, 79
 - axial, 26, 43
 - central, 41
 - de un teselado, 79
- sistema, 108
- solidos
 - de Platón, 201
- tangram, 1
- teorema
 - de Pitágoras, 14, 41, 50–52, 57, 94, 96, 103, 107, 154–156, 162–164, 168, 171
 - de Tales, 5, 6, 112, 140, 172, 173, 178, 181, 183, 185, 186, 189, 190
 - del Seno, 54
- ternas Pitagóricas, 162
- tesela, 60
- teselado, 60
 - del Cairo, 71
 - regular, 67
 - Diana en Nimes, 76
 - dual, 87
 - periódico, 78
 - Perusa, 80
 - Rignault, 81
 - semirregular, 75
- teselados
 - Arquimedianos, 77
- teselas
 - congruentes, 60
- Tetraedro
 - trunco, 204
- transformación
 - isométrica, 42, 60
- transformaciones, 78
- trapecio
 - completo, 148
 - vea isósceles, 35
- trascendente, 89
- traslación, 78
- unidad, 106