Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ULTRAPRODUCTOS EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JUAN ARMANDO REYES FLORES

DIRECTOR DE TESIS
IVÁN MARTÍNEZ RUIZ

H. PUEBLA DE ZARAGOZA, PUE. DICIEMBRE DE 2019.

A mis padres
y hermanos.

Agradecimientos

A mis padres Laura e Isidro, que siempre me apoyaron incondicionalmente en esta etapa muy larga de mi vida.

Al Dr. Iván Martínez Ruiz por dirigir este trabajo de tesis, que de no ser por su gran apoyo, guía y enseñanzas no habría podido finalizar.

A mis sinodales, Dr. Agustín Contreras Carreto, Dr. Alejandro Ramírez Parámo y Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo, por haber revisado este trabajo pese al poco tiempo que tuvieron.

A mis amigos de La LEJ: Josué (y su esposa Victoria), Julieta, Iván, Rafael, José Luis y Emanuel, en ustedes hallé una familia tanto matemática, como personal.

Introducción

El tema de esta tesis pertenece a la teoría de modelos, que es la rama de la lógica matemática que se ocupa de la relación entre un lenguaje formal y sus interpretaciones o modelos. Nos concentraremos en la teoría de modelos de la lógica de predicados de primer orden, que puede llamarse "teoría modelos clásica".

Los pioneros en el desarrollo de la teoría de modelos fueron Lowenheim (1915), Skolem (1920), Gödel (1930), Tarski (1931) y Malcev (1936). El tema se convirtió en una rama separada de la lógica matemática con el trabajo de Henkin, Robinson y Tarski a fines de la década de 1940 y principios de la decada de 1950. Desde entonces ha sido un área activa de investigación.

Los métodos básicos para construir modelos son: constantes, cadenas elementales, funciones de Skolem, indiscernibles, ultraproductos y modelos especiales. Como el título de esta tesis lo sugiere, nos enfocaremos en los ultraproductos.

La construcción de un ultraproducto es un método uniforme para construir modelos de teorías de primer orden que tiene aplicaciones en muchas áreas de las matemáticas. Es atractiva tal construcción porque es de naturaleza algebraica, pero conserva todas las propiedades expresables en la lógica de primer orden. La idea se remonta a la construcción de modelos no estándar de aritmética dada por Skolem en 1934. En 1948, Hewitt estudió ultraproductos de campos. Para las estructuras de primer orden en general, la construcción de ultraproductos fue definida por Jerzy Łoś en 1955. El tema se desarrolló rápidamente a partir de 1958 con una serie de extractos de Frayne, Morel, Scott y Tarski.

En el artículo de Scott de 1961, *Measurable cardinals and constructible sets*, demuestra que *si existe un cardinal medible entonces* $V \neq L$ haciendo uso de una ultrapotencia del universo V. Este resultado fue el que dio inicio a los trabajos en modelos internos de cardinales grandes.

Kenneth Kunen mediante la técnica de ultrapotencias iteradas, que fue desarrollada por Haim Gaifman, aplicó el método para obtener los principales resultados del modelo $L[D]$ en su artículo *Some applications of iterated ultrapowers in set theory* de 1970. La teoría del modelos internos se desarrollaría a partir del trabajo de Kunen que con el tiempo se convertiría en una corriente principal de la teoría de conjuntos moderna.

El objetivo de este trabajo de tesis es proporcionar una exposición elemental de algunos de los conceptos básicos de la teoría de modelos, en particular, el concepto de ultraproducto, así como presentar un par de aplicaciones de este concepto en la teoría de conjuntos, específicamente, en cardinales medibles. Para la lectura de esta tesis se supondrá que se conocen las nociones básicas de lógica de primer orden y teoría de conjuntos. La tesis está estructurada en tres capítulos que describimos a continuación.

En el Capítulo 1 se comenzará exponiendo los conceptos básicos de modelos y teorías, también se retomarán algunas nociones especificas de modelos de la teoría de conjuntos. Se presenta el *Teorema de Mostowski* el cual nos dice, a grandes rasgos, que si tenemos una relación bien fundada y extensional entonces existe un modelo transitivo con la relación de pertenencia usual. También veremos como se define el universo construible L de Gödel y una generalización de este debida a Azriel Levy, $L[A]$.

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos de filtro y ultrafiltro, ya que estos están muy relacionados con la construcción de ultraproductos que también se hará en este capítulo. Sin embargo, este modelo se sirve del Teorema de Łoś que es la pieza clave para que sea un método eficaz de construcción. Este nos dice de manera general que si una fórmula se satisface en casi todos los modelos entonces también se cumple en el ultraproducto.

En el Capítulo 3 se da la motivación del concepto de cardinal medible, se construye la ultrapotencia del universo V y se presenta la prueba del Teorema de Scott. También se hace la construccíon de las ultrapotencias iteradas que nos ayudarán a probar un Teorema de Kennet Kunen sobre un modelo interno $L[D]$ para cardinales medibles.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de modelos

Comenzaremos este capítulo dando un breve repaso de algunos conceptos de la teoría de modelos que nos serán útiles más adelante.

Definición 1.1. *Un lenguaje $\mathcal{L}$ es un conjunto de símbolos de cantidad numerable formado por la unión de los siguientes conjuntos:*

(i) Un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos funcionales y enteros positivos n_f para cada $f \in \mathcal{F}$,

(ii) un conjunto $\mathcal{R}$ de símbolos relacionales y enteros positivos n_R para cada $R \in \mathcal{R}$, y

(iii) un conjunto $\mathcal{C}$ un conjunto de símbolos constantes.

Los conjuntos $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C}$ pueden ser vacíos. Para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que f es una función n-aria, y para cada $R \in \mathcal{R}$ existe una $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que R es una relación m-aria.

Ejemplo 1.2. *El lenguaje de anillos $\mathcal{L}_r = \{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$, donde +, - y $\cdot$ son símbolos funcionales binarios (de 2 variables) y, 0 y 1 son constantes.*

Ejemplo 1.3. *El lenguaje de los anillos ordenados $\mathcal{L}_{OR} = \mathcal{L}_r \cup \{<\}$.*

Definición 1.4. *La potencia, o cardinal del lenguaje $\mathcal{L}$, denotado por $||\mathcal{L}||$, se define como*

$$||\mathcal{L}|| = \omega \cup |\mathcal{L}|.$$

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}$ es numerable o no numerable si $||\mathcal{L}||$ es numerable o no numerable, respectivamente.

Definición 1.5. *Sean un lenguaje $\mathcal{L}'$ que contiene todos los símbolos de $\mathcal{L}$ y quizás algunos símbolos adicionales, llamamos $\mathcal{L}'$ una expansión de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ una reducción de $\mathcal{L}'$.*

Definición 1.6. *Sean un lenguaje $\mathcal{L}$ y un conjunto M no vacío, decimos que $\mathcal{I}$ es una función de interpretación si a cada símbolo relacional n-ario le asigna una relación $R \subset M^n$ sobre M, a cada símbolo funcional m-ario le asigna una función m-aria $G : M^m \to M$ y a cada símbolo constante c le asigna una constante $x \in M$. A M le llamaremos conjunto universo.*

Definición 1.7. *Una modelo para un lenguaje $\mathcal{L}$ es un par $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde M es un conjunto universo e $\mathcal{I}$ es una función interpretación.*

Las funciones, relaciones y constantes de $\mathfrak{M}$ son, respectivamente, las imagenes bajo $\mathcal{I}$ de símbolos funcionales, símbolos relacionales y símbolos constantes de $\mathcal{L}$.

Observemos que dado un conjunto universo A existen diferentes interpretaciones permisibles de los símbolos de $\mathcal{L}$. Supongamos que $\mathfrak{U} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ y $\mathfrak{U}' = \langle A', \mathcal{I}' \rangle$ son modelos para $\mathcal{L}$ y R, R' son relaciones de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$, respectivamente.

Definición 1.8. *R' es la relación correspondiente a R si $\mathcal{I}(P) = R$ y $\mathcal{I}'(P) = R'$ para algún símbolo relacional $P \in \mathcal{L}$.*

Similarmente introducimos convenciones similares en cuanto a las funciones y constantes.

Cuando un lenguaje es de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \{P_0, \ldots, P_n, F_0, \ldots F_m, c_0, \ldots, c_q\}$$

escribimos los modelos para $\mathcal{L}$ haciendo uso de las funciones correspondientes, relaciones correspondientes y constantes correspondientes como

$$\mathfrak{U} = \langle A, R_0, \ldots, R_n, G_0, \ldots, G_m, x_0, \ldots, x_q \rangle$$

Definición 1.9. *El cardinal, o potencia, de un modelo $\mathfrak{U} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ es el cardinal $|A|$.*

Decimos que $\mathfrak{U}$ es finito, numerable o no numerable si $|A|$ es finito, numerable o no numerable, respectivamente.

Ahora introduciremos algunas nociones y operaciones en modelos.

Definición 1.10. *Sean dos modelos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$ para $\mathcal{L}$, $\mathfrak{U}$ es isomorfo a $\mathfrak{U}'$ si y sólo si existe una función $f : A \to A'$ biyectiva que satisface:*

(i) Para cada relación n-aria R de $\mathfrak{U}$ y la relación correspondiente R' de $\mathfrak{U}'$,

$$R(x_1, \ldots, x_n) \text{ si y sólo si } R(f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

para toda $x_1, \ldots, x_n$ en A.

(ii) Para cada función m-aria G de $\mathfrak{U}$ y la función correspondiente G' de $\mathfrak{U}'$,

$$f(G(x_1, \ldots, x_m)) = G'(f(x_1), \ldots, f(x_m))$$

para toda $x_1, \ldots, x_n$ en A.

(iii) Para cada constante x de $\mathfrak{U}$ y la constante correspondiente x' de $\mathfrak{U}'$,

$$f(x) = x'.$$

Una función f que satisface lo anterior es llamada un isomorfismo de $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{U}'$, o un isomorfismo entre $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$. Usamos la notación $f : \mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ para denotar que f es un isomorfismo entre $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$, y usamos $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ para decir que $\mathfrak{U}$ es isomorfo a $\mathfrak{U}'$.

Definición 1.11. *Un modelo $\mathfrak{U}'$ es llamado un submodelo de $\mathfrak{U}$ si $A' \subset A$ y*

(i) Cada relación n-aria R' de $\mathfrak{U}'$ es la restricción a A' de la relación correspondiente R de $\mathfrak{U}$, es decir, $R' = R \cap (A')^n$.

(ii) Cada función m-aria G' de $\mathfrak{U}'$ es la restricción a A' de la función correspondiente G de $\mathfrak{U}$, es decir, $G' = G|_{(A')^m}$.

(iii) Cada constante de $\mathfrak{U}'$ es la constante correspondiente de $\mathfrak{U}$.

Usaremos $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ para denotar que $\mathfrak{U}'$ es un submodelo de $\mathfrak{U}$.

Definición 1.12. *$\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{U}$ si $\mathfrak{U}$ es un submodelo de $\mathfrak{B}$.*

Definición 1.13. *$\mathfrak{U}$ está un encajado isomorfamente en $\mathfrak{B}$ si existe un modelo $\mathfrak{C}$ y un isomorfismo f tal que $f : \mathfrak{U} \cong \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{C}$. Llamaremos a f un encaje de $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{B}$.*

Definición 1.14. *Un encaje de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y un submodelo $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{A}$.*

Hasta el momento, los lenguajes que hemos mencionado no son formales. Para formalizar un lenguaje $\mathcal{L}$ necesitaremos los siguientes símbolos lógicos:

1. paréntesis:), (;
2. variables: $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$;
3. conectivos: $\wedge$, $\neg$;
4. cuantificador: $\forall$

y un símbolo relacional binario $\equiv$.

Asumimos, por supuesto, que ningún símbolo de $\mathcal{L}$ aparece en la lista anterior.

El concepto de una fórmula de $\mathcal{L}$ se define inductivamente usando los siguientes conceptos:

Definición 1.15. *Los términos de $\mathcal{L}$ son cadenas de símbolos de $\mathcal{L}$ que se producen mediante aplicaciones finitas de las siguientes reglas:*

(i) Una variable es un término.

(ii) *Un símbolo constante es un término.*

(iii) *Sean una función f m-aria y términos $t_1, t_2, \ldots, t_m$, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ es un término.*

Definición 1.16. *Las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$ son cadenas de la siguiente forma:*

(i) *$t_1 \equiv t_2$ es una fómula atómica, donde t_1 y t_2 son términos de $\mathcal{L}$*

(ii) *$R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica, donde R es un símbolo relacional de n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos.*

Definición 1.17. *Las fórmulas de $\mathcal{L}$ se definen como sigue:*

(i) *Una fórmula atómica es una fórmula.*

(ii) *Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\varphi \wedge \psi)$ es una fórmula.*

(iii) *Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.*

(iv) *Si v es una variable y φ una fórmula, entonces $(\forall v)\varphi$ es una fórmula.*

Como hemos notado nos faltan ciertos conectivos lógicos y un cuantificador, pero estos se pueden definir como abreviaciones de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi \vee \psi) & \text{para} & (\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))) \\
(\varphi \to \psi) & \text{para} & ((\neg\varphi) \vee \psi) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) & \text{para} & ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
(\exists v)\varphi & \text{para} & \neg(\forall v)\neg\varphi
\end{array}$$

Definición 1.18. *Las variables de una fórmula que no tengan cuantificador son llamadas variables libres. Las fórmulas que no tienen variables libres se llaman sentencias.*

Ahora llegamos a una convención de notación muy importante: usamos $t(v_0...v_n)$ para denotar un término t cuyas variables forman un subconjunto de $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Similarmente, usamos $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ para denotar una fórmula φ cuyas variables libres forman un subconjunto de $\{v_0, \ldots, v_n\}$.

Notemos que no requerimos que todas las variables $v_0, \ldots, v_n$ sean variables libres de $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$. En efecto, $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ puede no tener variables libres. También, no hacemos restricción en las variables acotadas. Por ejemplo, cada una de las siguientres fórmulas es de la forma $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$: $R(v1)$, $(\exists v_0)S(v_4, v_0)$.

Para hacer todo sobre nociones sintácticas en un sistema formal necesitamos axiomas lógicos y reglas de inferencia.

Definición 1.19. *Los axiomas lógicos se dividen en tres tipos:*

1. *Axiomas sentenciales: cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ que puede ser obtenida de una tautología ψ de $\mathcal{L}$ sustituyendo fórmulas de $\mathcal{L}$ por los símbolos sentenciales de ψ es una axioma lógico para $\mathcal{L}$. Ahora podemos llamarle a cada fórmula φ una tautología de $\mathcal{L}$.*

2. *Axiomas de cuantificación:*

   (i) *Si φ y ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$ y v es una variable no libre en φ, entonces la fórmula,*
   $$(\forall v)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall v)\psi)$$
   es un axioma lógico.

   (ii) *Si φ y ψ es obtenido de φ por sustituir libremente cada ocurrencia libre de v en φ por el término t (es decir, no se producirá ninguna variable x en t vinculada en ψ en el lugar donde se introduce), entonces la fórmula*
   $$(\forall v)\varphi \to \psi$$
   es un axioma lógico.

3. *Axiomas de identidad: Supongamos que x y y son variables, $t(v_0, \ldots, v_n)$ es un término y $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ es una fórmula atómica. Entonces las fórmulas:*

   (i) $x \equiv x$

   (ii) $x \equiv y \to t(v_0, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \equiv$
   $t(v_0, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

   (iii) $x \equiv y \to \varphi(v_0, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \to$
   $\varphi(v_0, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

   son axiomas lógicos.

Las reglas de inferencia son las siguientes:

Definición 1.20. *La regla de separación o Modus Ponens se define como: de φ y $\varphi \to \psi$ se infiere ψ.*

Definición 1.21. *La regla de generalización se define como: de φ se infiere $(\forall x)\varphi$.*

Dados los axiomas y las reglas de inferencia, asumimos que las nociones resultantes de prueba, duración de la prueba, teorema ya son familiares para el lector. Como estamos tratando con la lógica de primer orden habitual con la identidad, asumiremos que se conoce y haremos un uso libre de todos los teoremas básicos y meta-teoremas de tales sistemas formales.

$\vdash \varphi$ significa que φ es un teorema de $\mathcal{L}$.

Si Σ es un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$, entonces $\Sigma \vdash \varphi$ significa que existe una prueba de φ de los axiomas lógicos y Σ. Si $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ es finito, escribimos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \varphi$.

Como los axiomas lógicos son siempre asumidos, nosotros decimos que existe una prueba de φ de Σ, o φ es deducible de Σ, cuando $\Sigma \vdash \varphi$.

Definición 1.22. *Σ es inconsistente si y sólo si cada fórmula de $\mathcal{L}$ puede ser deducida de Σ. En caso contrario decimos que Σ es consistente.*

Definición 1.23. *Una sentencia σ es consistente en $\mathcal{L}$ si y sólo si $\{\sigma\}$ lo es.*

Definición 1.24. *Σ es maximalmente consistente en $\mathcal{L}$ si y sólo si Σ es consistente y ningún conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ propiamente contenido en Σ es consistente.*

1.1.1. Satisfacción en un modelo.

Ahora llegamos a la definición clave de esta sección. La siguiente definición de satisfacción es la piedra angular de la teoría de modelos. Antes de dar la definición formal daremos una breve idea intuitiva. Para definir:

La sentencia σ es verdadera en el modelo $\mathfrak{U}$.

Primero debemos dividir en partes más pequeñas a σ y examinar cada una de ellas. Si σ es $\neg\varphi$ o si σ es $\varphi \wedge \psi$, entonces la verdad o falsedad de σ en $\mathfrak{U}$ se sigue de saber la verdad o falsedad de φ y ψ. Por otra parte, si σ es $(\forall x)\varphi$, entonces el mismo método para decidir la verdad de σ se descompone ya que φ puede no ser una sentencia y no tendría sentido preguntar si φ es verdadero o falso en $\mathfrak{U}$.

La variable libre x en φ tiene rango sobre los elementos de A. Para cada a particular en A es significativo preguntar si

la fórmula φ es verdadera en $\mathfrak{U}$ si φ está hablando de a.

Si para cada a en A la respuesta a esta pregunta es sí, entonces podemos decir que σ es verdad en $\mathfrak{U}$. Si existe un a en A tal que la respuesta es no, entonces decimos que σ es falsa en $\mathfrak{U}$. Pero para responder a la pregunta anterior, incluso para un elemento fijo de A, nos encontraremos con la misma dificultad si φ es $(\forall y)\psi$. Entonces es natural preguntar si:

ψ es verdad en $\mathfrak{U}$ si ψ dice algo sobre un par de elementos a y b en A.

Antes de responder la pregunta anterior, nos preguntamos lo siguiente: dada una fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ y una sucesión $x_0, \ldots, x_p$ en A, ¿Qué significa decir que φ es verdadero en $\mathfrak{U}$ si las variables $v_0, \ldots, v_p$ se consideran $x_0, \ldots, x_p$?

Nuestro plan es dar una respuesta a esta pregunta primero para cada fórmula atómica $\varphi(v_1, \ldots, v_p)$ y todos los elementos $x_0, \ldots, x_p$. Entonces, por un procedimiento inductivo basado en nuestra definición inductiva de fórmula, daremos una respuesta para todas las fórmulas $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ y elementos $x_0, \ldots, x_p$.

Todavía hay una dificultad con nuestro plan: si todas las variables libres de una fórmula φ están entre $v_0, \ldots, v_p$, no se sigue que todas las variables libres de cada subfórmula de φ estén entre $v_0, \ldots, v_p$. Para el caso de un cuantificador una variable libre es ligada. Esto provocará problemas en la parte de inducción de nuestro plan. Para superar esta dificultad, observamos que lo siguiente es cierto. Si todas las variables, libres o ligadas, de una fórmula φ están entre $v_0, \ldots, v_q$, entonces todas las variables de cada subformula de φ también están entre $v_0, ..., v_p$. Entonces modificaremos nuestro plan así: Primero, contestamos la pregunta para todas las fórmulas atómicas $\phi(v_0, \ldots, v_q)$ y todos los elementos $x_0, \ldots, x_q$. Luego, mediante un procedimiento inductivo, respondemos la pregunta para todas las fórmulas φ, de modo que todas sus variables libres y ligadas se encuentren entre $v_0, \ldots, v_q$ y todos los elementos $x_0, \ldots, x_q$.

Finalmente, demostramos que la respuesta a la pregunta para una fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ y elementos $x_0, \ldots, x_q$, $p \leq q$, depende solo de los elementos $x_0, \ldots, x_p$ correspondientes a variables libres de φ, de modo que los valores de $x_{p+i}, \ldots, x_q$ son irrelevantes.

Ahora estamos listos para la definición formal. La noción crucial que debe definirse es la siguiente: Sea φ cualquier fórmula de $\mathcal{L}$, todas cuyas variables libres y limitadas se encuentran entre $v_0, \ldots, v_q$, y sea $x_0, \ldots, x_q$ cualquier sucesión de elementos de A.

Definición 1.25. *φ es satisfecha por la sucesión $x_0, \ldots, x_q$ en $\mathfrak{A}$, o $x_0, \ldots, x_q$ satisface φ en $\mathfrak{A}$. La definición procede en tres etapas, es decir, se hará de forma inductiva, mediante las siguientes definiciones.*

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo fijo para $\mathcal{L}$.

Definición 1.26. *El valor de un término $t(v_0, \ldots, v_q)$ en $x_0, \ldots, x_q$ se define de la siguiente manera (dejamos que $t[x_0, \ldots, x_q]$ denote este valor):*

(i) *Si $t = v_i$, entonces $t[x_0, \ldots, x_q] = x_i$.*

(ii) *Si t es un símbolo constante c, entonces $t[x_0, \ldots, x_q]$ es la interpretacción de c en $\mathfrak{A}$.*

(iii) *Si $t = F(t_1, \ldots, t_m)$, donde F es un símbolo funcional m-ario, entonces*

$$t[x_0, \ldots, x_q] = G(t_1[x_0, \ldots, x_q], \ldots, t_m[x_0, \ldots, x_q])$$

donde G es la interpretación de F en $\mathfrak{A}$.

Definición 1.27. .

(i) *Supongamos que $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ es la fórmula atómica $t_1 \equiv t_2$, donde $t_1(v_0, \ldots, v_p)$ y $t_2(v_0, \ldots, v_p)$ son términos. Entonces $x_0, \ldots, x_q$ satisfacen a φ si y solo si*

$$t_1[x_0, \ldots, x_q] = t_2[x_0, \ldots, x_q]$$

(ii) Supongamos que $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ *es la fórmula atómica* $P(t_1, \ldots, t_n)$*, donde* P *es un símbolo relacional* n*-ario y* $t_1(v_0, \ldots, v_p), \ldots, t_n(v_0, \ldots, v_p)$ *son términos. Entonces* $x_0, \ldots, x_q$ *satisfacen a* φ *si y solo si*

$$R(t_1[x_0, \ldots, x_q], \ldots, t_n[x_0, \ldots, x_q])$$

donde R *es la interpretación de* P *en* $\mathfrak{A}$*.*

Para abreviar tenemos la siguiente convención:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ \ldots, x_q] \text{ para } : x_0, \ldots x_q \text{ satisface } \varphi \text{ en } \mathfrak{A}.$$

Así la Definición 1.27 puede ser formulada como:

(i) $\mathfrak{A} \models (t_1 \equiv t_2)[x_0, \ldots, x_q]$ si y solo si $t_1[x_0, \ldots, x_q] = t_2[x_0, \ldots, x_q]$.

(ii) $\mathfrak{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[x_0, \ldots, x_q]$ si y solo si $R(t_1[x_0, \ldots, x_q], \ldots, t_n[x_0, \ldots, x_q])$.

Definición 1.28. *Supongamos que* φ *es una fórmula de* $\mathcal{L}$ *y todas variables libres y ligadas de* φ *se encuentran entre* $v_0, \ldots, v_q$*.*

(i) Si φ *es* $\theta_1 \wedge \theta_2$*, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q] \textit{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \theta_1[x_0, \ldots, x_q] \textit{ y } \mathfrak{A} \models \theta_2[x_0, \ldots, x_q].$$

(ii) Si φ *es* $\neg\theta$*, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q] \textit{si y solo si no se cumple que } \mathfrak{A} \models \theta[x_0, \ldots, x_q]$$

(iii) Si φ *es* $(\forall v_i)\psi$*, donde* $i \leq q$*, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q] \textit{ si y solo si para cada } a \in A,$$
$$\mathfrak{A} \models \psi[x_0, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_q].$$

Así nuestra Definición 1.25 está completa.

Una vez terminada nuestra definición, nuestra primera tarea es probar la proposición de que la relación

$$\mathfrak{A} \models \varphi(v_0, \ldots, v_p)[x_0, \ldots, x_q]$$

depende solo de $x_0, \ldots, x_p$ donde $p < q$. Esta es la última parte del plan que hemos esbozado.

Proposición 1.29. .

(i) Sea $t(v_0, \ldots, v_p)$ *un término y sean* $x_0, \ldots, x_q$ *y* $y_0, \ldots, y_r$ *dos sucesiones tal que* $p \leq q$*,* $p \leq r$ *y* $x_i = y_i$ *siempre que* v_i *sea una variable de* t*. Entonces*

$$t[x_0, \ldots, x_q] = t[y_0, \ldots, y_r]$$

(ii) Sea φ es una fórmula cuyas variables libres y limitadas están entre $v_0, ..., v_p$ y que $x_0, ..., x_q$ y $y_0, ..., y_r$, son dos sucesiones tales que $p \leq q$, $p \leq r$, y $x_i = y_i$ siempre que v_i es una variable libre de φ. Entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, ..., x_q] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r].$$

Observación 1.30. *La Proposición 1.29 muestra que el valor de un término t en $x_0, \ldots, x_q$ y si una fórmula φ es satisfecha o no por una sucesión $x_0, ..., x_q$ depende solo de aquellos valores de x_i para los cuales v_i es una variable libre, y son independientes de los otros valores de la sucesión, así como de la longitud de la sucesión. La longitud q de la sucesión debe ser lo suficientemente alta como para cubrir todas las variables libres y limitadas de t y φ para que se definan las expresiones $t[x_0, \ldots, x_q]$, $\mathfrak{A} = \varphi[x_0, \ldots, x_q]$ en absoluto. Ahora podemos inferir inmediatamente que si σ es una sentencia, entonces $\mathfrak{A} = \sigma[x_0, \ldots, x_q]$ es completamente independiente de la sucesión $x_0, \ldots, x_q$.*

Definición 1.31. *Sea $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ una fórmula cuyas variables libres y limitadas están entre $v_0, \ldots, v_q$, $p \leq q$. Sea $x_0, \ldots, x_p$ sea una sucesión de elementos de A. Decimos que φ está satisfecho en φ por $x_0, \ldots, x_p$,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_p],$$

si y solo si φ es satisfecho en $\mathfrak{A}$ por $x_0, \ldots, x_p, \ldots, x_q$ para algunos (o, equivalentemente, todos) $x_{p+1}, \ldots, x_q$.

Sea φ una sentencia cuyas variables limitadas están entre $v_0, \ldots, v_q$. Decimos que $\mathfrak{A}$ satisface φ, en símbolos $\mathfrak{A} \models \varphi$, si y solo si φ está satisfecho en $\mathfrak{A}$ por algunas (o, equivalentemente, todas) sucesiones $x_0, \ldots, x_q$.

La prueba de la Proposición 1.29 es sencilla pero tediosa. La bosquejaremos aquí como primer ejemplo de una prueba inductiva sobre la “complejidad” de fórmulas.

Demostración. (De la Proposición 1.29)

(i) Si $t(v_0, \ldots, v_p)$ es una variable v_i, entonces

$$t[x_0, \ldots, x_q] = x_i = y_i = t[y_0, \ldots, y_r].$$

Si $t(v_0, \ldots, v_p)$ es un símbolo constante c, y x es la interpretación de c en $\mathfrak{A}$, entonces

$$t[x_0, \ldots, x_q] = x = t[y_0, \ldots, y_r].$$

Supongamos que $t(v_0, \ldots, v_p)$ es $F(t_1, \ldots, t_m)$, donde F es un símbolo constante función y la proposición es válida para cada uno de los términos $t_1, \ldots, t_m$. Esto significa que

$$t_i[x_0 \ldots x_q] = t_i[y_0 \ldots y_r] \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Por lo tanto, si G es la interpretación de F en $\mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned} t\,[x_0 \ldots x_q] &= G\,(t_1\,[x_0, \ldots, x_q]\,, \ldots, t_m\,[x_0, \ldots, x_q]) \\ &= G\,(t_1\,[y_0, \ldots, y_r]\,, \ldots, t_m\,[y_0, \ldots, y_r]) \\ &= t\,[y_0, \ldots, y_r] \end{aligned}$$

Esto verifica (i) para todo término t.

(ii) Si φ es una fórmula $t_1 \equiv t_2$, entonces usando (i) vemos que

$$\begin{aligned} t_1\,[x_0, \ldots, x_q] &= t_1\,[y_0, \ldots, y_r] \\ t_2\,[x_0, \ldots, x_q] &= t_2\,[y_0, \ldots, y_r] \end{aligned}$$

Por lo tanto, los siguientes son equivalentes:

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q] \\ t_1\,[x_0, \ldots, x_q] = t_2\,[x_0, \ldots, x_q] \\ t_1\,[y_0, \ldots, y_r] = t_2\,[y_0, \ldots, y_r] \\ \mathfrak{A} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r] \end{gathered}$$

Sea φ una fórmula atómica $P(t_1, \ldots, t_n)$, donde P es un símbolo relacional y $t_1, \ldots, t_n$ son términos. Entonces, usando (i, vemos que lo siguiente es equivalente (donde R es la interpretación de P en $\mathfrak{A}$):

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q], \\ R(t_1\,[x_0, \ldots, x_q]\,, \ldots, t_n\,[x_0, \ldots, x_q]), \\ R(t_1\,[y_0, \ldots, y_r]\,, \ldots, t_n\,[y_0, \ldots, y_r]), \\ \mathfrak{A} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r] \end{gathered}$$

Supongamos ahora que ψ, θ son fórmulas, cuyas variables libres y limitadas están entre $v_0, ..., v_p$, que satisfacen la parte (ii) de la proposición.

Si φ es $\psi \wedge \theta$, los siguientes son equivalentes:

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q], \\ \mathfrak{A} = \psi\,[x_0, \ldots, x_q] \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \theta\,[x_0, \ldots, x_q]\,, \\ \mathfrak{U} \vDash \psi\,[y_0, \ldots, y_r] \text{ y } \mathfrak{A} \vDash \theta\,[y_0, \ldots, y_r]\,, \\ \mathfrak{A} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r]. \end{gathered}$$

Si φ es $\neg\psi$, entonces lo siguiente es equivalente

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q], \\ \text{no se cumple } \mathfrak{A} \models \psi[x_0, \ldots, x_q], \\ \text{no se cumple } \mathfrak{A} \models \psi[y_0, \ldots, y_q], \\ \mathfrak{A} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r]. \end{gathered}$$

Finalmente, sea φ, $(\forall v_i)\psi$, donde $i \leq p$. Entonces lo siguiente es equivalente.

En esta última parte de la prueba utilizamos el hecho de que las variables libres de ψ son solo las variables libres de ψ y, tal vez, v_i. Nuestra prueba ahora está completa.

$\square$

Ahora hemos completado el plan que comenzó varios párrafos atrás. A saber, decimos que una sentencia

$$\sigma \text{ es verdad en } \mathfrak{A}$$

si y solo si

$$\mathfrak{A} = \varphi[x_0, \ldots, x_q] \text{ para alguna (o para cada) sucesión } x_0, \ldots, x_q \text{ de } A.$$

Usamos la notación especial $\mathfrak{A} \models \sigma$ para denotar que σ es verdadero en $\mathfrak{A}$. Esta última frase es equivalente a cada una de las siguientes frases:

σ se cumple en $\mathfrak{A}$;
$\mathfrak{A}$ satisface σ;
σ está satisfecho en $\mathfrak{A}$;
$\mathfrak{A}$ es un modelo de σ.

Cuando no sea el caso de que σ se cumpla en $\mathfrak{A}$, decimos que σ es falso en $\mathfrak{A}$, o que σ falla en $\mathfrak{A}$, o $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\neg\sigma$.

Ahora que hemos definido $\models$, damos las siguientes definiciones.

Definición 1.32. *Un submodelo $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ es un submodelo elemental*

$$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$$

si para cada fórmula φ, y cada $a_1, \ldots, a_n \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \textit{si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]. \tag{1.1}$$

Definición 1.33. *Dos modelos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{B}$ para $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si y sólo si cada sentencia que es verdad en $\mathfrak{U}$ es verdadera en $\mathfrak{B}$ y viceversa. Lo cual denotaremos por $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{B}$.*

Definición 1.34. *Un encaje elemental es un encaje que tiene como rango un submodelo elemental.*

1.1.2. Teorías.

Definición 1.35. *Una teoría (de primer orden) T de $\mathcal{L}$ es una colección de sentencias de $\mathcal{L}$. Decimos que T es cerrada si y solo si está es cerrada bajo la relación $\models$. Como las teorás son conjuntos de sentencias de $\mathcal{L}$, podemos aplicar las expresiones*

un modelo de una teoría,
teoría consistente,
teoría satisfactible.

Definición 1.36. *Una teoría T se llama completa (en $\mathcal{L}$) si y solo si su conjunto de consecuencias es máximo consistente.*

Definición 1.37. *Un conjunto de axiomas de una teoría T es un conjunto de oraciones con las mismas consecuencias que T. Claramente, T es un conjunto de axiomas de T, y el conjunto vacío es un conjunto de axiomas de T si y solo si T es un conjunto de oraciones válidas de $\mathcal{L}$.*

Definición 1.38. *Cada conjunto de oraciones $\mathcal{L}$ es un conjunto de axiomas para la teoría cerrada $T = \{\varphi : \Sigma \models \varphi\}$. Una teoría T es finitamente axiomatizable si tiene un conjunto finito de axiomas.*

La forma más conveniente y estándar de dar una teoría T es enumerando un conjunto finito o infinito de axiomas para ella. Otra forma de dar una teoría es la siguiente: Sea $\mathfrak{A}$ un modelo para $\mathcal{L}$; entonces la teoría de $\mathfrak{A}$ es el conjunto de todas las sentencias que se cumplen en $\mathfrak{A}$. La teoría de cualquier modelo $\mathfrak{A}$ obviamente es una teoría completa.

1.1.3. Límites directos de modelos.

En la teoría de modelos una construcción de uso frecuente es el límite directo de un sistema dirigido de modelos.

Definición 1.39. *Un conjunto dirigido es un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$ tal que para cada $x, y \in X$ existe un $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.*

Definición 1.40. *Un sistema dirigido de modelos $\{\mathfrak{A}_i, e_{i,j} : i, j \in D\}$ consiste de modelos $\{\mathfrak{A}_i : i \in D\}$ junto con encajes elementales $e_{i,j} : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$ tal que $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$ para toda $i < j < k$.*

Lema 1.41. *Si $\{\mathfrak{A}_i, e_{i,j} : i, j \in D\}$ es un sistema dirigido de modelos, entonces existe un modelo $\mathfrak{A}$, único salvo isomorfismo, y encajes elementales $e_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in D} e_i(\mathfrak{A}_i)$ y que $e_i = e_j \circ e_{i,j}$*

Demostración. Sea $X = \{(i, a) \ : \ i \in D \wedge a \in A_i\}$ y definimos una relación sobre X como

$$(i, a) \simeq (j, b) \quad \text{si y solo si} \quad \exists k \in D(i, j \leq k \quad \wedge \quad e_{i,k}(a) = e_{j,k}(b))$$

Ahora veamos que $\simeq$ es una relación de equivalencia; $\simeq$ es reflexiva ya que $(i,a) \simeq (i,a)$ porque $i \leq i$ y $e_{i,i}(a) = e_{i,i}(a)$. También $\simeq$ es simétrica ya que $(i,a) \simeq (j,b)$ si y solo si $\exists k(i,j \leq k \ \wedge \ e_{i,k}(a) = e_{j,k}(b))$ si y solo si $\exists k(i,j \leq k \ \wedge \ e_{j,k}(b) = e_{i,k}(a))$ si y solo si $(j,b) \simeq (i,a)$. Por último, $\simeq$ es transitiva ya que si $(i,a),(j,b),(k,c) \in X$, tal que $(i,a) \simeq (j,b)$ y $(j,b) \simeq (k,c)$ entonces, por definición, existen r,s con $i,j \leq s$ y $j,k \leq r$ tal que $e_{i,s}(a) = e_{j,s}(b)$ y $e_{j,r}(b) = e_{k,r}(c)$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $s \leq r$, por hipótesis sabemos que $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$ para cada $i < j < k$. En particular se obtiene que

$$e_{i,r}(a) = e_{s,r} \circ e_{i,s}(a) = e_{s,r}(e_{i,s}(a)) = e_{s,r}(e_{j,s}(b)) = e_{j,r}(b) = e_{k,r}(b)$$

por consiguiente $(i,a) \simeq (k,c)$. Por lo tanto $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Ahora consideremos $A = X/\simeq$ el conjunto de todas las clases de equivalencia y para cada $i \in D$ definimos el encaje elemental $e_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$ mediante $e_i(a) = [(i,a)]$ para toda $i \in D$ y $a \in A_i$. Notemos que como $e_{i,j}(a) = b$, donde $a \in A_i$ y $b \in A_j$, se tiene que $e_i(a) = e_j(b)$, entonces $e_i = e_j \circ e_{i,j}$.

$\square$

Definición 1.42. *El modelo $\mathfrak{A}$ del Lema 1.41 es llamado el límite directo de $\{\mathfrak{A}_i, e_{i,j}\}_{i,j\in D}$.*

1.2. Modelos de la teoría de conjuntos.

El lenguaje de la teoría de conjuntos consiste de un símbolo relacional binario $\in$, y entonces los modelos de la teoría de conjuntos están dados por su universo M y una relación binaria E en M que interpreta a $\in$.

También consideraremos modelos de la teoría de conjuntos que son clases propias. Sin embargo, debido al Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, debemos tener cuidado de cómo se formula la generalización.

Definición 1.43. *Sean M una clase, E una relación binaria en M y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. La relativización de φ a M, E es la fórmula*

$$\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$

que se define inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned}
(x \in y)^{M,E} &\leftrightarrow xEy \\
(x = y)^{M,E} &\leftrightarrow x = y \\
(\neg\varphi)^{M,E} &\leftrightarrow \neg\varphi^{M,E} \\
(\varphi \wedge \psi)^{M,E} &\leftrightarrow \varphi^{M,E} \wedge \psi^{M,E} \\
(\exists x\varphi)^{M,E} &\leftrightarrow (\exists x \in M)\varphi^{M,E}
\end{aligned}$$

y similarmente para los otros conectivos y $\forall$.

Cuando E es $\in$, escribimos φ^M en lugar de $\varphi^{M,\in}$. Cuando usamos relativización $\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$ está implicito que las variables $x_1, \ldots, x_n$ tienen rango sobre M.

1.2.1. Δ_0-fórmulas

Definición 1.44. *Una fórmula φ de la teoría de conjuntos es una Δ_0-fórmula si*

(i) *no tiene cuantificadores, o*

(ii) *es $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ o $\varphi \leftrightarrow \psi$, donde φ, ψ son Δ_0-fórmulas, o*

(iii) *es $(\forall x \in y)\varphi$ o $(\exists x \in y)\varphi$ donde φ es una Δ_0-fórmula.*

Ejemplo 1.45. *"$x \in y$" es una Δ_0-fórmula, ya que es una fórmula de teoría de conjuntos y no tiene cuantificadores.*

Definición 1.46. *Si M es una clase transitiva, entonces el modelo $(M, \in)$ es llamado un modelo transitivo.*

Lema 1.47. *Sea M una clase transitiva y φ una Δ_0-fórmula, entonces para toda $x_1, \ldots, x_n$,*

$$\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.3}$$

Demostración. Si φ es una fórmula atómica, entonces (1.3) se cumple. Si (1.3) se cumple para φ y ψ, entonces se cumple para $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$.
Sea φ la fórmula $(\exists a \in x)\psi(a, x, \dots)$ y asumimos que (1.3) es verdad para ψ. Mostraremos que (1.3) es verdad para φ.

Si φ^M se cumple, entonces tenemos que $(\exists a(a \in x \wedge \psi))^M$, es decir, $(\exists a \in M)(a \in x \wedge \psi^M)$.Como $\psi^M \leftrightarrow \psi$, se sigue que $(\exists a \in x)$. Recíprocamente, si $(\exists a \in x)$, entonces ya que M es transitiva, $a \in M$, y como $\psi(a, x, \dots) \leftrightarrow \psi^M(a, x, \dots)$, tenemos que $\exists a(a \in M \wedge u \in x \wedge \psi^M)$ y por lo tanto $((\exists a \in x)\psi)^M$. La prueba para $\forall a \in x$ es similar.

□

Definición 1.48. *Una fórmula φ es absoluta para el modelo transitivo M si (1.3) se cumple.*

Proposición 1.49. *Las siguientes expresiones puden ser escritas como Δ_0-fómulas y así son absolutas para todo modelo transitivo.*

(i) $x = \{a, b\}$, $x = (a, b)$, *x es vacía,* $x \subset y$, *x es transitiva, x es un ordinal, x es un ordinal limite.*

(ii) *X es una relación, f es una función.*

Demostración. .

(i) $x = \{a, b\} \leftrightarrow a \in x \wedge b \in x \wedge (\forall c \in x)(c = a \vee c = b)$.

$x = (a, b) \leftrightarrow (\exists c \in x)(\exists d \in x)(c = \{a\} \wedge d = \{a, b\}) \wedge (\forall c \in x)(c = \{a\} \vee c = \{a, b\})$.

x es vacía $\leftrightarrow (\forall a \in x) a \neq a$.

$x \subset y \leftrightarrow (\forall a \in x) a \in y$.

x es transitiva $\leftrightarrow (\forall a \in x) a \subset x$.

x es un ordinal $\leftrightarrow$ x es transitiva$\wedge(\forall a \in x)(\forall b \in x)(a \in b \vee b \in ax \vee a = b) \wedge (\forall a \in x)(\forall b \in x)(\forall c \in x)(a \in b \in c \to a \in c)$.

x es un ordinal límite $\leftrightarrow$ x es un ordinal$\wedge(\forall a \in x)(\exists b \in x) a \in b$.

(ii) X es una relación $\leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists a \in \operatorname{dom} X)(\exists b \in \operatorname{ran} X) x = (a, b)$.

f es una función $\leftrightarrow$ f es una relación $\wedge(\forall x \in \operatorname{dom} f)(\forall y, z \in \operatorname{ran} f)$ $((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \to y = z)$, donde $(x, y) \in f \leftrightarrow (\exists a \in f) a = (x, y)$.

□

Por lo general los conceptos cardinales no son absolutos. Se sabe que las siguientes expresiones no son absolutas:

$$X = P(Y), \quad |X| = |Y|, \quad \alpha \text{ es un cardinal.}$$

1.2.2. Consistencia Relativa

Por el segundo teorema de incompletitud de Gödel es imposible demostrar la consistencia de ZF (o teorías relacionadas) por medios limitados solo a ZF.

Una vez que suponemos que ZF (o ZFC) es consistente, podemos preguntarnos si la teoría sigue siendo consistente si agregamos un axioma adicional A.

Definición 1.50. *Sea T una teoría matemática, y sea A un axioma adicional. Decimos que $T + A$ es consistentemente relativo a T (o que A es consistente con T) si la siguiente implicación se cumple:*

Si T es consistente, entonces también lo es $T + A$

Si A y $\neg A$ son consistentes con T, decimos que A es independiente de T.

La pregunta de si A es consistente con T es equivalente a la pregunta de si la negación de A es demostrable en T (siempre que T sea consistente); Esto se debe a que $T + A$ es consistente si y solo si $\neg A$ no es demostrable en T.

La forma de demostrar que un axioma es consistente con ZF (ZFC). es usando modelos. Supongamos que tenemos un modelo M (posiblemente una clase apropiada) de ZF tal que $M \models A$. (Más precisamente, las relativizaciones σ^M se mantienen para todos los axiomas σ de ZF, así como A^M). Entonces A es consistente con ZF : Si no fuera así, entonces $\neg A$ sería demostrable en ZF, y dado que M es un modelo de ZF, M satisface $\neg A$. Sin embargo, $(\neg A)^M$ contradice A^M.

1.3. El axioma de fundación.

En varios libros de teoría de conjuntos mencionan que el axioma de fundación (o también conocido como axioma de regularidad) no es primordial para la construcción de los naturales, ordinales o cardinales, sin embargo, será muy importante para los intereses de este trabajo. Si bien este axioma pertenece a la lista de axiomas de Zermelo-Frankel (ZF), haremos un breve repaso de algunas implicaciones que tiene.

El axioma de fundación nos dice que la relación $\in$ en una familia de conjuntos es bien fundada.

Axioma de fundación. Todo conjunto no vacío tiene un elemento $\in$-minimal:

$$\forall x(x \neq \emptyset \to (\exists y \in x)x \cap y = \emptyset).$$

Como una consecuencia de este axioma, no existen sucesiones infinitas de la siguiente forma:

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

considerando el conjunto $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. En particular, no existe un conjunto x tal que $x \in x$, ni tampoco los "ciclos"

$$x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$$

Definición 1.51. *Un conjunto T es transitivo si $x \in T$ implica que $x \subset T$.*

Lema 1.52. *Para cada conjunto X, existe un conjunto transitivo $T \supset X$*

Demostración. Definimos por inducción los siguientes conjuntos

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = \bigcup X_n$$

y

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n. \tag{1.4}$$

Claramente, T es transitivo y $T \supset X$ $\square$

Ya que cada conjunto transitivo satisface $\bigcup T \subset T$, se sigue que el conjunto en (1.4) es el transitivo más pequeño $T \supset X$; se llama la clausura transitiva de X:

$$\mathrm{CT}(X) = \bigcap\{T : T \supset X \text{ y } T \text{es transitivo}\}.$$

Lema 1.53. *Toda clase C no vacía tiene un elemento $\in$-minimal.*

Demostración. Sea $X \in C$ un elemento arbitrario. Si $X \cap C = \emptyset$, entonces X es un elemento $\in$-minimal, por el Axioma de Fundación. Si $X \cap C \neq \emptyset$, tenemos $Y = T \cap C$ donde $T =\mathrm{CT}(X)$. Y es un conjunto no vacío y por el Axioma de Fundación, existe $y \in Y$ tal que $y \cap Y = \emptyset$. Se sigue que $y \cap C = \emptyset$; en otro caso, si $x \in y$ y $x \in C$, entonces $x \in T$ ya que T es transitivo, y entonces $x \in y \cap T \cap C = y \cap Y$. Así y es un elemento minimal de C. $\square$

1.3.1. La jerarquía acumulativa de conjuntos.

Definición 1.54. *Definimos, por inducción transfinita,*

$$\begin{array}{lcll} V_0 & = & \emptyset, & \\ V_{\alpha+1} & = & P(V_\alpha), & \\ V_\alpha & = & \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta, & \text{si } \alpha \text{ es un ordinal limite.} \end{array}$$

El axioma de fundación implica que todo conjunto está en algún V_α

Lema 1.55. *Para cada x, existe un α tal que $x \in V_\alpha$:*

$$\bigcup_{a \in Ord} V_\alpha = V \tag{1.5}$$

Demostración. Sea C la clase de todas las x que no están en ninguna V_α. Si C es vacía entonces no hay nada que probar. Si C es no vacía, por el Lema 1.53, C tiene un elemento $\in$-minimal x. Es decir, $x \in C$, y $z \in \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ para cada $z \in x$. Por consiguiente $x \subset \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$. Por remplazamiento, existe un ordinal γ tal que $x \subset \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha$. Por lo tanto, $x \subset V_\gamma$ y entonces $x \in V_{\gamma+1}$. Así C es vacío y tenemos (1.5) $\square$

Ya que cada x está en algún V_α, tenemos la siguiente definición,

Definición 1.56. *Sea x un conjunto, definimos el rango de x, como*

$$ran(x) = \text{al menor } \alpha \text{ tal que } x \in V_{\alpha+1}.$$

El método de inducción transfinita se puede extender a una clase transitiva arbitraria (en lugar de Ord), tanto para la prueba como para la definición por inducción:

Lema 1.57 ($\in$-inducción)**.** *Sea T una clase transitiva y Φ una propiedad. Asumamos que*

(i) $\Phi(\emptyset)$

(ii) Si $x \in T$ y $\Phi(z)$ se cumple para cada $z \in x$, entonces $\Phi(x)$.

Entonces cada $x \in T$ tiene la propiedad Φ.

Demostración. Sea C la clase de todas las $x \in T$ que no tienen la propiedad Φ. Si C es vacía, entonces todas las x tiene la propiedad ϕ. Si C es no vacía, entonces tiene un elemento $\in$-minimal, por el Lema 1.53; y podemos aplicar (i) o (ii).

$\square$

Teorema 1.58. *Sea T una clase transitiva y sea G por una función. Entonces existe una función F en T tal que*

$$F(x) = G(F \restriction x) \tag{1.6}$$

para cada $x \in T$.

Demostración. Tenemos que para cada $x \in T$, $F(x) = y$ si y solo si existe una función tal que su dominio es un subconjunto de T y: (i) $(\forall z \in dom(f))f(z) = G(f \restriction z)$, (ii)$f(x) = y$. Que F es una función sobre T que cumpla (1.6) se prueba por $\in$-inducción.

$\square$

Teorema 1.59. *Sean T_1, T_2 clases transitivas y π un $\in$-isomorfismo de T_1 en T_2, es decir, π es inyectivo y*

$$u \in v \leftrightarrow \pi(u) \in \pi(v)$$

entonces $\pi(x) = x$ para cada $x \in T_1$, con lo cual $T_1 = T_2$.

Demostración. Probaremos, por $\in$-inducción , que $\pi(x) = x$ para cada $x \in T_1$. Notemos que $\pi(\emptyset) = \emptyset$, ya que de lo contrario existiría un $\pi(x) \in \pi(\emptyset)$ tal que $x \in \emptyset$, lo cual no puede ocurrir porque $\emptyset$ no tiene elementos.

Supongamos que $\pi(z) = z$ para cada $z \in x$ y $y = \pi(x)$. Tenemos que $x \subset y$ porque si $z \in X$, entonces $z = \pi(z) \in \pi(x) = y$. También tenemos que $y \subset x$, ya que sea $t \in y$, como $y \subset T_2$, existe $z \in T_1$ talque $\pi(z) = t$. Ya que $\pi(z) \in y$ y $y = \pi(x)$, se cumple $z \in x$, entonces $t = \pi(z) = z$. Así $t \in x$.

Por lo tanto, $\pi(x) = x$ para toda $x \in T_1$ y $T_2 = T_1$.

□

1.3.2. Relaciones bien fundadas.

El concepto de relación bien fundada que vemos en un curso de teoría de conjuntos se puede generalizar a relaciones en clases propias, y se puede extender el método de inducción a relaciones bien fundadas.

Definición 1.60. *Sea una relación binaria E en una clase P. Para cada $x \in P$, tenemos que*

$$ext_E(x) = \{z \in P : z \; E \; x\}$$

es la extensión de x.

Definición 1.61. *Una relación E en una clase P es bien fundada, si:*

(i) Cada conjunto $x \subset P$ no vacío tiene un elemento E-minimal;

(ii) $ext_E(x)$ es un conjunto, para cada $x \in P$.

Lema 1.62. *Si E es una relación bien fundada en una clase P, entonces cada clase $C \subset P$ no vacía tiene un elemento E-minimal.*

Demostración. Vamos a buscar un $x \in C$ tal que $ext_E(x) \cap C = \emptyset$. Sea $X \in C$ y supongamos que $ext_E(X) \cap C \neq \emptyset$. Sea $A = T \cap C$ donde

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

y

$$X_0 = ext_E X, \qquad X_{n+1} \bigcup \{ext_E(z) : z \in X_n\}.$$

Como en el Lema 1.53, se sigue que un elemento E-minimal x de A es E-minimal en C. □

Teorema 1.63 (Inducción bien fundada)**.** *Sean una relación bien fundada E en una clase P y una propiedad Φ. Asumimos que:*

(i) Cada elemento E-minimal x tiene la propiedad Φ;

(ii) Si $x \in P$ y $\Phi(z)$ se cumple para cada z tal que $z \; E \; x$, entonces $\Phi(x)$.

Entonces todo $x \in P$ tiene la propiedad Φ.

Demostración. Sea Q la clase de todas las $x \in P$ tal que x no tiene la propiedad Φ. Si Q es vacía, no hay nada que probar. Si Q es no vacía y como $Q \subset P$, por como construimos a Q, entonces por el Lema 1.62, Q tiene un elemento E-minimal x, con lo cual podemos aplicar (i) y (ii). Así todo $x \in P$ tiene la propiedad Φ. $\square$

Teorema 1.64 (Recursión bien fundada)**.** *Sea una relación bien fundada E en una clase P y una función G (en $V \times V$). Entonces existe una única función F en P tal que*

$$F(x) = G(x, F \restriction ext_E(x))$$

para cada $x \in P$.

Demostración. La prueba es análoga a la prueba del Teorema 1.58. $\square$

Ejemplo 1.65 (La función rango)**.** *Definimos, por inducción, para toda $x \in P$:*

$$\rho(x) = \sup\{\rho(z) + 1 \ : \ zEx\}$$

El rango de ρ es un ordinal o la clase Ord. Para toda $x, y \in P$,

$$xEy \to \rho(x) < \rho(y).$$

Ejemplo 1.66 (El colapso transitivo)**.** *Por inducción, sea*

$$\pi(x) = \{\pi(z) \ : \ z \ E \ x\}$$

para cada $x \in P$. El rango de π es una clase transitiva, y para toda $x, y \in P$,

$$x \ E \ y \to \phi(x) \in \pi(y).$$

Definición 1.67. *Una relación bien fundada E en una clase P es extensional si*

$$ext_E(X) \neq ext_E(Y)$$

cuando X y Y son distintos elementos de P.

Definición 1.68. *Una clase M es extensional si la relación $\in$ en M es extensional, es decir, si para cualquier $X, Y \in M$ distintos, $X \cap M \neq Y \cap M$.*

Teorema 1.69 (Teorema del colapso de Mostowski)**.** .

(i) Si E es una relación bien fundada y una relación extensional en una clase P, entonces existe una clase transitiva M y un isomorfismo π entre (P, E) y $(M, \in)$. La clase transitiva M y el isomorfismo π son únicos.

(ii) En particular, cada clase extensional P es isomorfa a una clase transitiva M. La clase transitiva M y el isomorfismo π son únicos.

(iii) En el caso (ii), Si $T \subset P$ es transitivo, entonces $\pi x = x$ para cada $x \in T$.

Demostración. Como (ii) es un caso especial de (i) (cuando $E = \in$), probaremos la existencia de un isomorfismo en lo general.

Como E es una relación bien fundada, podemos definir a π por indución bien fundada, es decir, en términos de los $\pi(z)$'s donde zEx. Sea $x \in P$,

$$\pi(x) = \{\pi(z) : zEx\}.$$

En particular, si $E = \in$,

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \in x \cap P\}.$$

La función π mapea P en una clase $M = \pi(P)$ y es transitiva ya que por definición de π se cumple que si $\pi(x) \in M$, entonces $\pi(x) \subset M$ pues $\pi(x) = \{\pi(z) : zEx\}$.
Ahora probemos que π es isomorfismo:

(a) $\pi(x)$ es inyectiva. Supongamos que π no es inyectiva, sea $z \in M$ un elemento de menor rango para algún $x \neq y$. Entonces $ext_E(x) \neq ext_E(y)$ (por la extensionalidad de E), de esto que existe algún $u \in ext_E(x)$ tal que $u \notin ext_E(y)$ o viceversa. Sea $t = \pi(u)$ ya que $t \in z = \pi(y)$, existe $v \in ext_E(y)$ tal que $t = \pi(v)$. Así tenemos que $t = \pi(u) = \pi(v)$ con $v \neq u$ y t tiene rango mayor que z (ya que $t \in z$) lo cual contradice que z tenga el menor rango en M.

(b) Ahora veamos que $xEy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$. Si xEy, entonces $\pi(x) \in \pi(y)$, por la definición de π. Por otro lado, si $\pi(x) \in \pi(y)$, entonces por la definición de π, $\pi(x) = \pi(z)$ para alguna zEy, ya que π es inyectiva tenemos que $x = z$ y por lo tanto xEy.

La unicidad del isomorfismo π y la clase transitiva $M = \pi(P)$ se sigue del Teorema 1.59. Si π_1 y π_2 son dos isomorfismos entre M_1 y M_2, respectivamente entonces $\pi_2\pi_1^{-1}$ es un isomorfismo entre M_1 y M_2 y por lo tanto la función identidad. Así $\pi_1 = \pi_2$.

Por último, probemos (iii). Si $T \subset P$ es transitivo, entonces observemos que $x \subset P$ para cada $x \in T$, con lo cual $x \cap P = x$ y tenemos

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \in x\} \tag{1.7}$$

para toda $x \in T$. La cual se cumple por el Teorema 1.59, ya que por (1.7), π es un $\in$-isomorfismo y tanto T como M son transitivos. □

1.4. El universo construible L

La clase L es la clase de conjuntos construibles. La afirmación "V=L", es decir, "todo conjunto es construible", es el **axioma de constructibilidad**. El axioma de constructibilidad fue introducido por Gödel en 1938 para probar que la hipótesis del continuo generalizada y el axioma de elección son consistentes con ZF siempre que ZF sea consistente. Gödel demostró primero que si ZF es consistente, también lo es ZF más el axioma de constructibilidad. En segundo lugar, el axioma de constructibilidad implica el axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada.

Definición 1.70. *Un conjunto $X \subset M$ es definible sobre un modelo $\mathfrak{M}$ si existe una fórmula φ y algunas $m_1, \ldots, m_n \in M$ tal que*

$$X = \{x \in M \ : \ \mathfrak{M} \models \varphi(x, m_1, \ldots, m_n)\}$$

Decimos que X es definible sobre $\mathfrak{M}$ de $m_1, \ldots, m_n$. Si φ es una fórmula de x, sin parámetros $m_1, \ldots, m_n$, entonces X es definible sobre $\mathfrak{M}$. Un elemento $x \in M$ es definible sobre $\mathfrak{M}$ (de $m_1, \ldots, m_n$), si el conjunto $\{x\}$ es definible sobre $\mathfrak{M}$ (de $m_1, \ldots, m_n$).

Definimos a

$$\mathrm{def}(M) = \{X \subset M \ : \ X \text{ es definible sobre } \mathfrak{M}\}$$

Definición 1.71. *Definimos por inducción transfinita:*

(i) $L_0 = \emptyset$,

(ii) $L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha)$

(iii) $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, *si α es un ordinal limite, y*

(iv) $L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$.

Teorema 1.72. *L es un modelo interno de ZF.*

Demostración. Verifiquemos que L cumple la definición modelo interno:

Comencemos mostrando que L es una clase transitiva: Sea $x \in L$. Por definición de L existe un ordinal α tal que

$$x \in L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}\,(L_\alpha) = \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible sobre } L_\alpha\}$$

lo que implica que $x \subseteq L_\alpha$; de lo cual se concluye que $x \subseteq L$. Por lo tanto L es transitiva.

Ahora comprobemos que L contiene a todos los ordinales. De hecho, afirmamos que para todo ordinal α se satisface que $\alpha \in L_{\alpha+1}$, lo cual demostraremos por inducción sobre α . Supongamos que para toda $\beta < \alpha$ se cumple que $\beta \in L_{\beta+1}$. Notemos que si $\beta < \alpha$ entonces $\beta + 1 \leq \alpha$, y dado que la familia $\{L_\alpha \ : \ \alpha \text{ es ordinal}\}$ es una jerarquía acumulativa (por construcción), se sigue que si $\beta < \alpha$ entonces $\beta \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha$. Por consiguiente $\alpha = \{\beta \in L_\alpha : V \models \beta \text{ es ordinal }\}$; y dado que "ser ordinal" es absoluto para clases transitivas se sigue que $\alpha = \{\beta \in L_\alpha : L_\alpha \models \beta \text{ es ordinal}\}$. Por consiguiente, $\alpha \in def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.

En seguida mostramos que se satisfacen los axiomas de ZF:

(i) L satisface el axioma de extencionalidad ya que la clase L es transitiva.

(ii) L satisface el axioma del par: dados $a, b \in L$ y $c = \{a, b\}$. Sea α tal que $a \in L_\alpha$ y $b \in_\alpha$. Ya que $\{a, b\}$ es definible sobre L_α, tenemos $c \in L_{\alpha+1}$, y como "$c = \{a, b\}$" es Δ_0.

(iii) L satisface el axioma de separación: sea φ una fórmula, $X, p \in L$. Veamos que $Y = \{u \in X : L \models \varphi(u, p)\} \in L$. Como $X, p \in L$ existe α un ordinal tal que $X, p \in L_\alpha$. Por el principio de reflexión existe $\beta > \alpha$ un ordinal tal que

$$\begin{aligned} Y &= \{u \in X : L_\beta \models \varphi(u, p)\} \\ &= \{u \in L_\beta : u \in X \wedge L_\beta \models \varphi(u, p)\} \in L_{\beta+1}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $Y \in L$.

(iv) L satisface el axioma de unión: sea $X \in L$ y $Y = \bigcup X$. Por definición de L existe un ordinal α tal que $X \in L_\alpha$. Como L_α es transitivo se sigue que $X \subseteq L_\alpha$. Así $Y = \{x \in L_\alpha : V \models \exists x(x \in X \wedge zEx))\}$ pero como "$\exists x(xEX \wedge zEx))$" es una fórmula Δ_0 entonces es absoluta; por lo tanto, $Y = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \exists x(xEX \wedge zEx))\} \in L_{\alpha+1}$. Así $Y \in L$.

(v) L satisface el axioma de potencia: sean $X \in L$, $Y = P(X) \cap L$ y α un ordinal tal que $Y \subseteq L_\alpha$. Así $Y = \{x \in L_\alpha : V \models \forall u(uEX \mapsto uEy)\}$ pero como "$\forall u(uEX \mapsto uEy)$" es una fórmula Δ_0 entonces es absoluta; por lo tanto,

$$Y = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \forall u(uEX \mapsto uEy)\} \in L_{\alpha+1},$$

así $Y \in L$.

(vi) L satisface el axioma de infinito: como "$x = \omega$" es una fórmula absoluta para clases transitivas se sigue que $L \models x = \omega$, lo que implica que $\omega \in L$ Por lo tanto, L satisface el axioma de infinito.

(vii) L satisface el axioma de reemplazo: sea F un funcional sobre L y $X \in L$ un conjunto. Como F es un funcional sobre L existe α un ordinal tal que $F[X] \subseteq L_\alpha$ (pues de lo contrario $F[X]$ sería una clase). Así $F[X] = \{y \in L_\alpha : \exists x(y = F(x) \wedge x \in X)\} \in L_\alpha$. Por lo tanto, $F[X] \in L$.

(viii) L satisface el axioma de fundación: Sea $S \in L$ no vacío y $x \in S$ tal que $x \cap S = \emptyset$. Como L es una clase transitiva, entonces $S \subset L$, y dado que $x \in S$ se sigue que $x \in L$. Además como "$x \cap S = \emptyset$" es una fórmula δ_0 , y por tanto absoluta para clases transitivas, se sigue que $L \models x \cap S = \emptyset$. Así L satisface el axioma de fundación.

De todo lo anterior se concluye que L es un modelo interno de ZF $\square$

Ahora probaremos que L es el mínimo modelo interno de ZF:

Proposición 1.73. *Si M es un modelo interno de ZF entonces $L \subseteq M$.*

Demostración. Sea M un modelo interno de ZF. Observemos que (x es construible $)^M$ si y solo si existe un ordinal $\alpha \in M$ tal que $x \in L_\alpha^M$ $(*)$. Como la función L_α es absoluta[1] para modelos internos de ZF , entonces $L_\alpha^M = L_\alpha$. Además como M contiene a todos los ordinales se tiene que $\alpha \in M$ si y solo si $\alpha \in V$. Por consiguiente, $(*)$ es equivalente a que existe un ordinal α tal que $x \in L_\alpha$. Por lo tanto (x es construible$)^M$ si y solo si x es construible; es decir, $L^M = L$. De ahí que $L \subseteq M$. □

1.4.1. Constructibilidad relativa.

Andras Hajnal y Azriel Levy en sus disertaciones doctorales en Hungría e Israel, respectivamente, desarrollaron generalizaciones básicas de L. Para los fines de este trabajo nos enfocaremos solo en la generalización de Levy. Él generalizó la constructibilidad considerando conjuntos construibles a partir de un conjunto A, dando como resultado un modelo interno $L[A]$, es decir, el modelo interno más pequeño M tal que para cada $x \in M$, $A \cap x \in M$.

La idea es relativizar la jerarquía L_α usando la siguiente generalización

$$\operatorname{def}_A(M) = \{X \subset M : X \text{ es definible sobre } (M, \in, A \cap M)\} \tag{1.8}$$

donde $A \cap M$ es una relación unaria para las definiciones.

Definición 1.74. *La clase de todos los conjuntos construibles relativos a A se define como sigue:*

(i) $L_0[A] = \emptyset$,

(ii) $L_{\alpha+1}[A] = \operatorname{def}_A(L_\alpha[A])$

(iii) $L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta[A]$, *si α es un ordinal límite.*

(iv) $L[A] = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha[A]$.

Proposición 1.75. *Si A es un conjunto $L[A]$ es un modelo interno de ZF .*

Demostración. La demostración es análoga a la Proposición 1.72. □

Teorema 1.76. *Tanto L como $L[A]$ son clases bien ordenadas. Esto implica que L y $L[A]$ son modelos del axioma de elección.*

Demostración. La prueba se puede consultar en [4], pág. 190. □

Proposición 1.77. *Si M es un modelo interno de ZF tal que $A \cap M \in M$, entonces $L[A] \subseteq M$*

Demostración. La prueba es análoga a la Proposión 1.73 □

Lema 1.78. *Sea $\overline{A} = A \cap L[A]$. Entonces $L[\overline{A}] = L[A]$ y además $\overline{A} \in L[\overline{A}]$.*

[1] Esto se prueba en [4], pág. 187.

Demostración. Procederemos por inducción sobre α que $L_\alpha[\overline{A}] = L_\alpha[A]$. El paso de inducción es obvio si α es un ordinal límite; así supongamos que $L_\alpha[\overline{A}] = L_\alpha[A]$ y demostremos que $L_{\alpha+1}[\overline{A}] = L_{\alpha+1}[A]$.

Si denotamos $U = L_\alpha[A]$, entonces tenemos

$$A \cap U = A \cap U \cap L[A] = \overline{A} \cap U,$$

y dado que $def_A(U) = def_{A\cap U}(U)$, tenemos

$$L_{\alpha+1}[A] = def_A(U) = def_{A\cap U}(U) = def_{\overline{A}}(U) = L_{\alpha+1}[\overline{A}].$$

Así, $L[\overline{A}] = L[A]$. Además, hay α tal que $A \cap L[A] = A \cap L_\alpha[A]$ y, por lo tanto, $\overline{A} \in L_{\alpha+1}[A]$.

□

Capítulo 2

Ultraproductos.

2.1. Filtros y ultrafiltros.

La noción de filtro fue introducida por F. Riesz en su artículo [8] de 1908 en un contexto topológico, sin embargo, fue hasta 1937 que H. Cartan presentó este concepto con mayor claridad en sus artículos [1] y [2]. En esta sección introduciremos el concepto de filtro en un conjunto dado.

Definición 2.1. *Un filtro sobre un conjunto X no vacío es un conjunto F de subconjuntos de X tal que:*

(i) $X \in F$ *y* $\emptyset \notin F$,

(ii) Si $A \in F$ *y* $B \in F$, *entonces* $A \cap B \in F$

(iii) Si $A, B \subset X$, $A \in F$ *y* $A \subset B$, *entonces* $B \in F$

Observación 2.2. *La Definición 2.1 fue enunciada así para fines prácticos en este trabajo, ya que en la literatura matemática esta definición corresponde a la de filtro propio sobre un conjunto, ya que se pide que* $\emptyset \notin F$.

Ejemplo 2.3. *Sea X un conjunto no vacío y $F = \{X\}$, entonces F es un filtro sobre X, ya que por definición de F se cumple (i) de la definición de filtro; dado que $X \cap X = X$ se cumple (ii); por último, si $A, B \subset X$ y $A \subset B$, entonces , $A = X$ y $B = X$, con lo cual $B \in F$ cumpliéndose (iii). F es llamado un filtro trivial.*

Ejemplo 2.4. *Sea A_0 un subconjunto no vacío de X y $F = \{B \subset X : A_0 \subset B\}$, entonces F es un filtro sobre X, ya que $A_0 \subset X$ y $X \subset X$, entonces $X \in F$, además como $A_0 \not\subset \emptyset$, tenemos que $\emptyset \notin F$. Ahora, si $C, D \in F$, entonces $A_0 \subset C$ y $A_0 \subset D$, considerando $C \cap D$ tenemos que $A_0 \subset C \cap D$, así $C \cap D \in F$. Por último, si $A \in F$ y $A \subset B$, entonces $A_0 \subset A \subset B$ y $A_0 \subset B$, por lo tanto $B \in F$. A este filtro se le llama un filtro principal.*

Ejemplo 2.5. *Sea X un conjunto infinito y $F = \{A \subset X : X - A$ es finito$\}$, entonces F es un filtro sobre X, ya que $X - X = \emptyset$ y como $\emptyset$ es finito, tenemos que $X \in F$, además como $X - \emptyset = X$ y X es infinito, se sigue que $\emptyset \notin X$. Ahora, si $A, B \in F$, entonces $X - A$ y $X - B$ es finito, considerando $A \cap B$ tenemos que $X - (A \cap B) = X - A \cup X - B$ lo cual es finito, por ser unión de conjuntos finitos, por lo tanto $A \cap B \in F$. Por último, si $A \subset B$ y $A \in F$ entonces $X - B \subset X - A$ y dado $X - A$ es finito, $X - B$ tiene que ser finito, por lo tanto $B \in F$. A F se le llama el filtro de Fréchet.*

Definición 2.6. *Una familia de conjuntos X tiene la propiedad de intesección finita (PIF) si toda $Y = \{A_1, \dots, A_n\} \subset X$ finita tiene una intersección no vacía $A_1 \cap, \dots, \cap A_n \neq \emptyset$.*

Proposición 2.7. *Todo filtro tiene la propiedad de intersección finita.*

Demostración. Sea F un filtro sobre X y sea $Y = \{A_1, \dots, A_n\} \subset F$, por la propiedad (ii) de la definición de filtro, $A_1 \cap, \dots, \cap A_n \in F$. Además, como $\emptyset \notin F$, por ser F un filtro, se sigue que $A_1 \cap, \dots, \cap A_n \neq \emptyset$. □

Lema 2.8. *(i) Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de filtros sobre X, entonces $\cap\mathcal{F}$ es un filtro sobre X.*

(ii) Si $\mathcal{C}$ es una $\subset$ −cadena de filtros sobre X, entonces $\cup\mathcal{C}$ es un filtro sobre X.

(iii) Si $G \subset P(X)$ tiene la PIF, entonces existe un filtro F sobre X tal que $G \subset F$.

Demostración. (i) Veamos primero que $X \in \cap\mathcal{F}$, ya que para toda $F \in \mathcal{F}$, $X \in F$, por ser F un filtro; similarmente, $\emptyset \notin \cap\mathcal{F}$, porque $\emptyset \notin F$, para toda $F \in \mathcal{F}$, por ser F un filtro. Ahora, si $A, B \in \cap\mathcal{F}$, entonces $A, B \in F$, para toda $F \in \mathcal{F}$, como F es filtro, entonces $A \cap B \in F$, para toda $F \in \mathcal{F}$, por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}$. Por último, si $A \in \cap\mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces para toda $F \in \mathcal{F}$, $A \in F$, como F es filtro y $A \subset B$, $B \in F$, para toda $F \in \mathcal{F}$, por lo tanto $B \in \cap\mathcal{F}$.

(ii) Notemos primero que $X \in \cup\mathcal{C}$, ya que existe una F tal que $X \in F$, por ser F un filtro; $\emptyset \notin \cup\mathcal{C}$, ya que $\emptyset \notin F$ para toda $F \in \mathcal{C}$, por ser F un filtro. Ahora, si $A, B \in \cup\mathcal{C}$, entonces tenemos que $A \in F_1$ y $B \in F_2$, donde F_1 y F_2 son filtros, pero como $\mathcal{C}$ es una $\subset$-cadena tenemos que $F_1 \subset F_2$ o $F_2 \subset F_1$, es decir, $A \in F_1 \subset F_2$ o $B \in F_2 \subset F_1$, por lo tanto $A \cap B \in \cup\mathcal{C}$. Por último, si $A \in \cup\mathcal{C}$ y $A \subset B$, entonces existe una $F \in \mathcal{C}$ tal que $A \in F$, como F es un filtro y $A \subset B$, entonces $B \in F$, por lo tanto $B \in \cup\mathcal{C}$.

(iii) Sea F el conjunto de todas las $A \subset X$ tal que existe un conjunto finito $H = \{X_1, \dots, X_n\} \subset G$ con $X_1 \cap \dots \cap X_n \subset A$, entonces F es un filtro, ya que $X \in F$, porque $X \subset X$, $H = \{X_1, \dots, X_n\} \subset G$ y como G tiene la PIF, $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$ es igual a alguna $A \subset X$. También tenemos que $\emptyset \notin F$, por definición de F. Ahora, sea $A \in F$ y $B \in F$, entonces existe $H_1 = \{X_1, \ldots X_n\} \subset G$ tal que $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subset A$ y exite $H_2 = \{Y_1, \ldots Y_n\} \subset G$ tal que $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subset B$, entonces al considerar $A \cap B$ tenemos que $X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subset A \cap B$ para $H_3\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\}$, por lo tanto $A \cap B \in F$. Por último, si $A \in F$ y $A \subset B$, entonces existe $T = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset G$ tal que $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subset A$, además como $A \subset B$ tenemos que $X_1 \cap \cdots \cap X_n \subset B$ y así $B \in F$. Por lo tanto F es filtro y $G \subset F$ por la definición de F.

□

Dado que cada filtro $F \subset G$ debe contener todas las intersecciones finitas de conjuntos en G, se deduce que el filtro F construido en la prueba del Lemma 2.8 (iii) es el filtro más pequeño en X que extiende a G:

Definición 2.9. *Decimos que el filtro F es generado por G,*

$$F = \cap\{D : D \text{ es un filtro sobre } X \text{ y } G \subset D\}.$$

Definición 2.10. *Un filtro U sobre un conjunto X es un ultrafiltro si para cada $A \subset X$, $A \in U$ o $X - A \in U$*

Definición 2.11. *Un filtro F sobre X es maximal si no existe un filtro F' sobre X tal que $F \subset F'$.*

Lema 2.12. *Un filtro F sobre X es un ultrafiltro si y sólo si este es maximal.*

Demostración. Primero probemos que si F es un ultrafiltro sobre X entonces F es maximal. Supongamos que existe un filtro F' tal que $F \subset F'$ y que para algún $A \subset X$ tenemos que $A \in F - F'$, entonces $X - A \in F$ y $X - A \in F'$, lo cual contradice el hecho de que F es un ultrafiltro sobre X. Por lo tanto no existe un filtro F' tal que $F \subset F'$ y con ello F es maximal.

Ahora probaremos el contrarrecíproco de si F es un filtro maximal sobre X, entonces F es un ultrafiltro sobre X, es decir, si F no es un ultrafiltro sobre X, entonces F no es un filtro maximal. Sea $Y \subset X$ tal que $Y \notin F$ y $X - Y \notin F$, consideremos a la familia $G = F \cup \{Y\}$; afirmamos que G tiene la PIF, si $A \in F$, entonces $A \cap Y \neq \emptyset$, para otro caso tenemos que $X - Y \supset A$ y $X - Y \in F$. Así, si $A_1, \ldots, A_n \in F$, tenemos que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in F$ y entonces $Y \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$. Por lo tanto G tiene la PIF y por el Lema 2.8 (iii) existe un filtro F' tal que $F' \supset G$. Ya que $Y \in F' - F$, F no es maximal. □

El siguiente teorema fue demostrado por Tarski en 1930.

Teorema 2.13. *Todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea F_0 un filtro sobre X, sea P el conjunto de todos los filtros sobre X tal que $F \supset F_0$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(P, \subset)$. Si C es una cadena en P, entonces por el Lema 2.8(ii), $\cup C$ es un filtro y una cota superior de C en P. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal U en P. Así U es un ultrafiltro por el Lema 2.12. □

Proposición 2.14. *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto X y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in U$, entonces $A \in U$ o $B \in U$.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$, haremos la prueba por contraposición, supongamos que $A \notin U$ y $B \notin U$. Entonces, por la definición de ultrafiltro, tenemos que $X - A \in U$ y $X - B \in U$. Así, por la definición de filtro tenemos que $(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) \in U$, por lo tanto $(A \cup B) \notin U$. □

La siguiente proposición nos dice cuando un ultraproducto es un filtro principal.

Proposición 2.15. *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto X, entonces U es un filtro principal si y solo si existe $a \in X$ tal que $\{a\} \in U$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que U es un filtro principal, entonces existe un $A \subseteq X$, tal que

$$U = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}.$$

Como $A \in U$ y U es un filtro, tenemos que $A \neq \emptyset$, entonces podemos tomar una $a \in A$. Notemos que

$$U = \{B \subseteq X : A \subseteq B\} \subseteq \{B \subseteq X : a \in B\}.$$

Como $\{B \subseteq X : a \in B\}$ es un filtro sobre X y U es un filtro maximal, entonces $U = \{B \subseteq X : a \in B\}$.

Recíprocamente, si existe $a \in X$ tal que $\{a\} \in U$, como U es un filtro, sabemos que para toda A tal que $\{a\} \subseteq A$ tendremos que $A \in U$, así que $\{A \subseteq X : a \in A\} \subseteq U$. Por otro lado, si B es un conjunto arbitrario en U, como $\{a\} \in U$ y U es filtro, entonces $B \cap \{a\} \neq \emptyset$, es decir, $a \in B$. De aquí se sigue que $U \subseteq \{A \subseteq X : a \in A\}$, por lo tanto U es un filtro principal, como queríamos probar. □

Si X es un conjunto infinito de cardinalidad κ, entonces existen a lo más 2^{2^κ} ultrafiltros sobre X porque cada ultrafiltro sobre X es un subconjunto de $P(X)$. El siguiente teorema muestra que el número de ultrafiltros sobre κ es exactamente 2^{2^κ}. Para obtener un resultado más fuerte definimos lo siguiente

Definición 2.16. *Un ultrafitlro D sobre κ es uniforme si $|A| = \kappa$, para toda $A \in D$.*

Definición 2.17. *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de κ es independiente si para cualquiera conjuntos distintos $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ en $\mathcal{A}$, la interseccón*

$$X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap (\kappa - Y_1) \cap \cdots \cap (\kappa - Y_m) \tag{2.1}$$

tiene cardinalidad κ.

Lema 2.18. *Existe una familia independiente de subconjuntos de κ de cardinalidad 2^κ.*

Demostración. Consideremos el conjunto H de todos los pares (A, B) donde A es un subconjunto finito de κ y $\mathcal{B}$ es un conjunto finito de subconjuntos finitos de κ. Como $|P| = \kappa$, es suficiente encontrar una familia independiente $\mathcal{A}$ de subconjuntos de P, de tamaño 2^κ.

Para cada $u \in \kappa$, sea

$$X_u = \{(A, \mathcal{B}) \in P : A \cap u \in P\}$$

y sea $\mathcal{A} = \{X_u : u \subset \kappa\}$. Si u y v son distintos subconjuntos de κ, entonces $X_n \neq X_v$: por ejemplo, si $\alpha \in u$ pero $\alpha \notin v$, entonces $A = \{\alpha\}$, $\mathcal{B} = \{A\}$; y $(A, \mathcal{B}) \in X_u$ mientras que $(A, \mathcal{B}) \notin X_v$. Así $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$.

Para probar que $\mathcal{A}$ es independiente, se $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ distintos subconjuntos de κ. Para cada $i \leq n$ y cada $j \leq m$, sea $\alpha_{i,j}$ algún elemento de κ tal que $\alpha_{i,j} \in u_i - v_j$ o $\alpha_{i,j} \in v_j - u_i$. Ahora sea A cualquier subconjunto finito de κ tal que $A \supset \{\alpha_{i,j} : i \leq n, j \leq m\}$ (tenga en cuenta que hay κ de estos conjuntos finitos). Claramente, tenemos $A \cap u_i = F \cap v_j$ para cualquier $i \leq n$ y $j \leq m$. Por lo tanto, si $\mathcal{B} = \{F \cap u_i : i \leq n\}$, tenemos $(A, \mathcal{B}) \in X_{u_i}$ para todo $i \leq n$ y $(A, \mathcal{B}) \notin X_{v_j}$ para todo $j \leq m$. En consecuencia, la intersección

$$X_{u_1} \cap \cdots \cap X_{u_n} \cap (P - X_{v_i}) \cap \cdots \cap (P - X_{v_m})$$

tiene cardinalidad κ. $\square$

Teorema 2.19. *Para cada cardinal infinito κ, existen 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes sobre κ.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia independiente de subconjuntos de κ. Para cada función $f : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$, consideremos esta familia de subconjuntos de κ:

$$G_f = \{X : |\kappa - X| < \kappa\} \cup \{X : f(X) = 1\} \cup \{\kappa - X : f(X) = 0\} \qquad (2.2)$$

Por (2.1), la familia G_f tiene la propiedad de intersección finita, y entonces existe un ultrafiltro D_f tal que $D_f \supset G_f$. Se sigue de (2.2) que D_f es uniforme. Si $f \neq g$, entonces para algun $X \in \mathcal{A}$, $f(X) \neq g(X)$; por ejemplo, $f(X) = 1$ y $g(X) = 0$ y entonces $X \in D_f$, mientras $\kappa - X \in D_g$. Así obtenemos 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes distintos sobre κ. $\square$

Definición 2.20. *Un filtro F sobre X es un filtro numerablemente completo o σ-completo si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de subconjuntos de X y $A_n \in F$ para cada n, entonces*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in F.$$

El concepto de filtro σ-completo puede considerarse de una forma más general con la siguiente definición,

Definición 2.21. *Si κ es un cardinal regular no numerable, y F es un filtro sobre X, entonces F es llamado κ-completo si F es cerrado bajo intersección de menos de κ conjuntos, es decir, si $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una familia de subconjuntos de X, $\gamma < \kappa$, y $A_\alpha \in F$ para cada $\alpha < \gamma$, entonces*

$$\bigcap_{\gamma<\kappa} A_\alpha \in F.$$

La pregunta de si un ultrafiltro no principal en un conjunto puede ser σ-completo da lugar a investigaciones profundas de los fundamentos de la teoría de conjuntos. En particular, si existen tales ultrafiltros, entonces existen algunos grandes cardinales, como veremos más adelante.

Proposición 2.22. *Si U es un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ, entonces para todo $X \in U$ se cumple que $|X| = \kappa$.*

Demostración. Supongamos que existe que $X \in U$ tal que $|X| < \kappa$ y sea $|X| = \lambda$, entonces $X = \{x_\gamma : \gamma < \kappa\}$. Como U es no principal se tiene que para todo $\gamma < \lambda$ se cumple que $\{x_\lambda\} \notin U$. Ya que U es un ultrafiltro, entonces $\kappa \backslash \{x_\gamma\} \in U$; por consiguiente $X \cap \bigcap_{\gamma<\lambda}(\kappa \backslash \{x_\gamma\}) \in U$ pues U es κ-completo. Sin embargo,

$$X \cap \bigcap_{\gamma<\lambda} (\kappa \backslash \{x_\gamma\}) = X \cap (\kappa \backslash \bigcup_{\gamma<\lambda} \{x_\gamma\}) = X \cap (\kappa \backslash X) = \emptyset$$

y entonces $\emptyset \in U$ lo cual es una contradición. □

La siguiente proposición nos da el significado de la κ-completitud en ultrafiltros y nos será de mucha utilidad más adelante.

Proposición 2.23. *Sea U un ultrafiltro sobre un conjunto X, entonces U es κ-completo si y solo si para toda $\beta < \kappa$ y para toda partición $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ de X, existe $\alpha < \beta$ tal que $X_\alpha \in U$.*

Demostración. Comencemos probando por contradicción, supongamos que U es un ultraproducto κ-completo sobre X y que exiten $\beta < \kappa$ y $\beta < \kappa$ y $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ una partición de X tales que para todo $\alpha < \beta$, se tiene que $X_\alpha \notin U$. Como U es ultrafiltro, por la definición de ultrafiltro tenemos que para todo $\alpha < \beta$, $X - A_\alpha \in U$ y, como U es κ-completo,

$$\emptyset = X - \left(\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha<\beta} (X - A_\alpha) \in U,$$

pero esto contradice a la definición de filtro.

Demostraremos la otra implicación por contrapositiva. Supongamos que existen $\beta < \kappa$ y $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ y una familia de conjuntos tales que para toda $\alpha < \beta$, $A_\alpha \in U$ y, sin embargo, $\bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha \notin U$. Observemos que, por la definición de ultrafiltro,

$$\bigcap_{\alpha<\beta}(X - A_\alpha) = X - \left(\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) \in U.$$

Construiremos una partición de X de cardinalidad menor o igual a β cuyos elementos no estén en U, con lo que habremos concluido la prueba. Para ello, definamos:

$$\begin{aligned} Y_0 &:= X - A_0 \\ Y_\alpha &:= (X - A_\alpha) - \bigcup_{\delta<\alpha}(X - A_\delta),\ \text{para cada } 0 < \alpha < \beta. \end{aligned}$$

Para construir la partición de X, eliminaremos a aquellos $X - A_\alpha$ que sean vacíos y tomaremos el complemento de su unión, es decir, consideraremos al conjunto $\Big(\{Y_\alpha : \alpha < \beta\} \cup \{X - \bigcup_{\alpha<\beta}(X - A_\alpha)\}\Big) - \{\emptyset\}$. De este modo, podemos tomar un cadinal $\delta \leq \beta$ tal que $\{Z_\alpha : \alpha < \delta\}$ es una enumeración de la colección anterior de subconjuntos de X en la que claramente todos sus elementos son no vacíos y además

$$X = \bigcup_{\alpha<\delta} Z_\alpha.$$

Por otra parte, la manera en la que construimos a cada Y_α nos permite asegurar que para cualesquiera $\alpha < \beta < \delta$ se tiene que $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$, de modo que esta colección es efectivamente una partición de X. Finalmente, nótese que para cada $\alpha < \delta$, si Z_α es de la forma $X - A_\alpha - \bigcup_{\delta<\alpha}(X - A_\delta)$, entonces $Z_\alpha \subseteq X - A_\alpha \notin U$, así que $Z_\alpha \notin U$, de modo que para todo $\alpha < \delta$ tenemos que $Z_\alpha \notin U$. Así, hemos construido la partición de X que necesitabamos. □

Proposición 2.24. *Si U es un ultrafiltro no principal y κ-completo sobre κ, entonces para todo $\lambda < \kappa$ se tiene que $\{\alpha \in \kappa \,:\, \lambda < \alpha\} \in U$.*

Demostración. Si U es un ultrafiltro no principal y κ-completo sobre κ. Por un lado, como U es ultrafiltro se tiene que

$$\{\alpha \in \kappa \,:\, \lambda < \alpha\} \in U \text{ o bien } \{\alpha < \kappa \,:\, \alpha \leq \lambda\} \in U.$$

Supongamos que $A = \{\alpha < \kappa \,:\, \alpha \leq \lambda\} \in U$. Como U es no principal, para todo $\alpha \in A$ se tiene que $\{\alpha\} \notin U$, entonces $\kappa - \{\alpha\} \in U$, entonces $A \cap (\kappa - \{\alpha\}) = A - \{\alpha\} \in U$. Además, como U es κ-completo se tiene que

$$\emptyset = \bigcap_{\alpha<\lambda} A - \{\alpha\} \in U$$

que es una contradicción, ya que $\emptyset \notin U$. Por consiguiente $\{\alpha < \kappa \,:\, \alpha \leq \lambda\} \notin U$, con lo cual $\{\alpha \in \kappa \,:\, \lambda < \alpha\} \in U$. □

Teorema 2.25. *Sea $F : I \to S$ una función suprayectiva. Si U es un filtro sobre I, entonces*

$$H = \{A \subseteq S : F^{-1}[A] \in U\}$$

es un filtro sobre S. Además, si U es un ultrafiltro se tiene que también es un ultrafiltro. De igual forma, si U es κ-completo, entonces H es κ-completo. Y en caso de que U sea no principal y F sea una función inyectiva se sigue que H también es no principal.

Demostración. Sea U un filtro sobre I. Veamos que $H = \{A \subseteq S : F^{-1}[A] \in U\}$ es un filtro sobre S.

- $S \in H$. Como F es suprayectiva entonces $F^{-1}[S] = I \in U$; por lo que $S \in H$.

- $\emptyset \notin H$. ya que $F^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin U$ se tiene que $\emptyset \notin H$.

- Si $A, B \in H$ entonces $A \cap B \in H$. Sean $A, B \in H$, entonces $F^{-1}[A] \in U$ y $F^{-1}[B] \in U$ y como U es filtro se tiene que

  $$F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B] \in U$$

  por lo que $A \cap B \in H$.

- Para cualquier $A \subseteq S$ y $C \in H$ tal que $C \subseteq A$ se cumple que $A \in H$. Sean $A \subseteq S$ y $C \in H$ tal que $C \subseteq A$, entonces $F^{-1}[C] \in U$ y además $F^{-1}[C] \subseteq F^{-1}[A]$. Como U es filtro y $F^{-1}[C] \subseteq F^{-1}[A]$ se tiene que $F^{-1}[A] \in U$.

Si U es un ultrafiltro, entonces H es un ultrafiltro. Tenemos que probar que para cualquier $A \subseteq S$ se cumple que $A \in H$ o $A \backslash S \in H$. Sea $A \subseteq S$, observemos que $F^{-1}[A] \subseteq I$ y dado que U es ultrafiltro, por definición de ultrafiltro, se tiene que $F^{-1}[A] \in U$ o $I \backslash F^{-1}[A] \in U$. Así, dado que F es suprayectiva, se sigue que $F^{-1}[A] \in U$ o $F^{-1}[S \backslash A] \in U$; lo que implica por definición de H que $A \in H$ o bien $S \backslash A \in H$.

Si U es κ-completo, entonces H es κ-completo. Sea $\{A_\gamma : \gamma < \lambda\} \subseteq H$ con $\lambda < \kappa$, entonces $\{F^{-1}[A_\gamma] : \gamma < \lambda\} \subseteq U$. Dado que el filtro U es κ-completo, entonces $F^{-1}[\cap_{\gamma<\lambda} A_\gamma] = \cap_{\gamma<\lambda} F^{-1}[A_\gamma] \in U$; por consiguiente $\cap_{\gamma<\lambda} A_\gamma \in U$.

Si U es un filtro no principal, entonces H es un filtro no principal. Si H es un filtro principal, entonces existe $B \in H$ tal que para todo $C \in H$ se tiene que $B \subset C$. Afirmamos que $F^{-1}[B] \subseteq J$ para cualquier $J \in U$, lo que implicaría que U es principal. Dado $J \in U$, entonces $F^{-1}[J] \subseteq S$ y como la función es inyectiva se tiene que $F^{-1}[F[J]] = J$.

$\square$

2.2. Productos reducidos y ultraproductos.

Ahora introduciremos una herramienta de teoría de modelos que será la principal en este trabajo, los ultraproductos. Primero aplicamos la construcción a los conjuntos, y luego a los modelos.

Definición 2.26. *Sea F un filtro sobre X y $f, g \in \prod_{x \in X} A_x$, la relación $=_F$ se define como*

$$f =_F g \text{ si y sólo si } \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in F, \tag{2.3}$$

y se lee como f es F-equivalente a g.

Proposición 2.27. *$=_F$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Primero veamos que es $=_F$ es una relación reflexiva, ya que $\{x \in X : f(x) = f(x)\} = X$ y como F es un ultrafiltro sobre X, $X \in F$.

También tenemos que $=_F$ es una relación simétrica, ya que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in F$ y $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : g(x) = f(x)\}$, entonces $\{x \in X : g(x) = f(x)\} \in F$.

Por último, $=_F$ es una relación transitiva, ya que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in F$ y $\{x \in X : g(x) = h(x)\} \in F$, entonces $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) = h(x)\} \in F$, por ser F ultrafiltro; al considerar $\{x \in X : f(x) = h(x)\}$, tenemos que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) = h(x)\} \subset \{x \in X : f(x) = h(x)\}$ y como F es ultrafiltro, entonces $\{x \in X : f(x) = h(x)\} \in F$. Por lo tanto $=_F$ es una relación de equivalencia. □

Definición 2.28. *Definimos a $[f]$ como la clase de equivalencia de f de la siguiente forma:*

$$[f] = \{g \in \prod_{x \in X} A_x : f =_F g\}.$$

Definición 2.29. *Sea X un conjunto no vacío, un filtro F sobre X y para cada $x \in X$, A_x es un conjunto no vacío, definimos el producto reducido de A_x módulo F como el conjunto de todas las clases de equivalencia de $=_F$, el cual denotaremos por $\prod_F A_x$. Así*

$$\prod_F A_x = \{[f] : f \in \prod_{x \in X} A_x\}.$$

Llamaremos al conjunto X el conjunto de índices para $\prod_F A_x$.

Definición 2.30. *Sean $A = \prod_F A_x$, $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ un sistema de modelos, el modelo $\mathfrak{A}$ con el universo A se obtiene interpretando el lenguaje de la siguiente manera:*

(i) Si $R(x_1, \ldots, x_n)$ es una relación,

$$R^{\mathfrak{A}}([f_1], \ldots, [f_n]) \Leftrightarrow \{x \in X \ : \ R^{\mathfrak{A}_x}(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in F. \tag{2.4}$$

(ii) Si $F(x_1, \ldots x_n)$ es una función,

$$F^{\mathfrak{A}}([f_1], \ldots [f_n]) = [f] \text{ donde } f(x) = F_{\mathfrak{A}_x}(f_1(x), \ldots, f_n(x)), \forall x \in X. \tag{2.5}$$

(iii) Si c es una constante,

$$c^{\mathfrak{A}} = [f] \text{ donde } f(x) = c^{\mathfrak{A}_x}, \forall x \in X. \tag{2.6}$$

(Notemos que en 2.4 y 2.5 no depende de la elección de los representantes de las clases de equivalencia $[f_1], \ldots, [fn]$).

El modelo $\mathfrak{A}$ es llamado un producto reducido de $\{\mathfrak{A}_x : x \in X\}$ módulo F. En el caso especial cuando F sea un ultrafiltro sobre X, el producto reducido es llamado ultraproducto. Cuando en el ultraproducto las A_x son las mismas, es decir, $A_x = A$ el ultraproducto se llama ultrapotencia de A módulo F.

El siguiente teorema es de suma importancia, ya que en él reside la gran utilidad de los ultraproductos.

Teorema 2.31 (Teorema de Łoś)**.** *Sea U un ultrafiltro sobre S y sea $\mathfrak{A}$ el ultraproducto de $\{\mathfrak{A}_x : x \in S\}$ módulo U.*

(i) Si φ es una fórmula, entonces para cada $f_1, \ldots, f_n \in \Pi_{x \in S} A_x$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi([f_1], [f_2], \ldots, [f_n]) \Leftrightarrow \{x \in S \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U$$

(ii) Si σ es una sentencia, entonces

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ si y solo si } \{x \in S \ : \ \mathfrak{A}_x \models \sigma\} \in U$$

Demostración. La parte (ii) es una consecuencia de (i). Tengamos en cuenta que según el teorema, la satisfacción de φ en $[f_1], \ldots, [f_n]$ no depende de la elección de los representantes $f_1, \ldots, f_n$ para las clases de equivalencia $[f_1], \ldots, [f_n]$. Por lo tanto, podemos abusar aún más de la notación y escribir

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[f_1, \ldots, f_n]\,.$$

También será conveniente adoptar una terminología de teoría de la medida. Si

$$\{x \in S : \mathfrak{A}_x \vDash \varphi\,[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U,$$

decimos que $\mathfrak{A}_x$ satisface $\varphi\,(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ para casi toda x, o que $\mathfrak{A} \models \varphi\,(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ se cumple en casi todas partes. En esta terminología, el Teorema de Łoś establece que $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ se mantiene en el ultraproducto si y solo si para toda x, $\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ se cumple en $\mathfrak{A}_x$.

Probemos (i) por inducción sobre la complejidad de las fórmulas. Demostraremos que (i) se cumple para las fórmulas atómicas, y luego demostraremos el paso de inducción para $\neg$, $\wedge$ y $\exists$.

Fórmulas atómicas. Primero consideramos la fórmula $u = v$, y tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models [f] = [g] \quad &\leftrightarrow \quad [f] = [g] \\ &\leftrightarrow \quad f =_U g \\ &\leftrightarrow \quad \{x : f(x) = g(x)\} \in U \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models f(x) = g(x)\} \in U \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para una relación $P(v_1, \ldots v_n)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models P\left([f_1], \ldots, [f_n]\right) \quad &\leftrightarrow \quad P^{\mathfrak{A}}\left([f_1], \ldots, [f_n]\right) \\ &\leftrightarrow \quad \left\{x : P^{\mathfrak{A}_x}\left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right)\right\} \in U \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models P\left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right)\} \in U. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tanto (2.7) como (2.8) permanecen verdaderos si las variables se reemplazan por términos, y (i) se cumple para todas las fórmulas atómicas.

Conectivos lógicos. Primero suponemos que (i) se cumple para φ y demostramos que también se cumple para $\neg\varphi$ (aquí usamos que $X \in U$ si y solo si $S - X \notin U$).

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \neg\varphi[f] \quad &\leftrightarrow \quad \text{no se cumple que } \mathfrak{A} \models \varphi[f] \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models \varphi[f(x)]\} \notin U \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \neq \varphi[f(x)]\} \in U \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models \neg\varphi[f(x)]\} \in U. \end{aligned}$$

Similarmente, si(i) es verdad para φ y ψ, tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi \quad &\leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi \text{ y } \mathfrak{A} \models \psi \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models \varphi\} \in U \text{ y } \{x : \mathfrak{A}_x \models \psi\} \in U \\ &\leftrightarrow \quad \{x : \mathfrak{A}_x \models \varphi \wedge \psi\} \in U. \end{aligned}$$

(En la última equivalencia se usa que: $X \in U$ y $Y \in U$ si y solo si $X \cap Y \in U$).

Cuantificador existencial. Suponemos que (i) es verdadero para $\varphi(u, v_1, ..., v_n)$ y mostramos que sigue siendo cierto para la fórmula $\exists u\varphi$. Supongamos primero que

$$\mathfrak{A} \models \exists u\varphi\left[f_1, \ldots, f_n\right]. \tag{2.9}$$

Entonces existe $g \in \prod_{x \in S} A_x$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi\left[g, f_1, \ldots, f_n\right]$, y por lo tanto

$$\{x : \mathfrak{A}_x \models \varphi\left[g(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)\right]\} \in U, \tag{2.10}$$

y claramente se sigue que

$$\{x : \mathfrak{A}_x \vDash \exists u\varphi\,[u, f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U. \tag{2.11}$$

Ahora supongamos que (2.11) se cumple. Para cada $x \in S$, sea $u_x \in A_x$ tal que $\mathfrak{A}_x \vDash [u_x, f_1(x), \ldots, f_n(x)]$ si cada u_x existe, y arbitrario de lo contrario. Si definimos $g \in \prod_{x\in S} A_x$ por $g(x) = u_x$, entonces tenemos (2.10), y por lo tanto

$$\mathfrak{A} \models \varphi[g, f_1, \ldots, f_n].$$

Y por último (2.9) sigue.

□

Corolario 2.32. *Una ultrapotencia de un modelo $\mathfrak{M}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{M}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.31 (ii) tenemos que $Ult_U\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $x : \mathfrak{A} \models \sigma$ es ya sea S o vacío, según si $\mathfrak{A} \models \sigma$ o no.

□

Ahora mostraremos que un modelo $\mathfrak{M}$ se puede encajar elementalmente en su ultrapotencia.

Definición 2.33. *Sea U un ultrafiltro sobre X, $j : \mathfrak{M} \to Ult_U\mathfrak{M}$ es el encaje canónico si para cada $m \in M$ (donde M es el universo de $\mathfrak{M}$), sea c_m la función constante con valor m:*

$$c_m(x) = m \;\; (\textit{para cada } x \in X) \tag{2.12}$$

y sea

$$j(m) = [c_m].$$

Corolario 2.34. *El encaje canónico $j : \mathfrak{M} \to Ult_U\mathfrak{M}$ es un encaje elemental.*

Demostración. Sea $a \in A$. Por el Teorema 2.31, $\mathrm{Ult}_U\mathfrak{A} \models \varphi[j(a)]$ si y solo si $\mathrm{Ult}_U\mathfrak{A} \models \varphi[c_a]$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ para casi toda x si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$.

□

Capítulo 3

Ultraproductos en la teoría de conjuntos.

Una de las aplicaciónes más importantes de ultrapotencias en la teoría de conjuntos es aquella en la que el modelo $(Ult, \in^*)$ es bien fundado, el cual es un modelo interno de ZF. Como mostraremos a continuación, las ultrapotencias bien fundadas están estrechamente relacionadas con los cardinales medibles. Pero antes veremos como la teoría de la medida está relacionada con cardinales motivando la definición de cardinal medible.

3.1. Cardinales medibles.

Los cardinales medibles fueron los primeros cardinales considerados grandes, los cuales surgen del Problema de la Medida de H. Lebesgue.

En 1905, Vitali en [10] probó que: *el axioma de elección implica que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles según Lebesgue.* Sin embargo, casi 25 años después, Banach propuso una generalización del Problema de la Medida en la que la invariancia bajo translaciónes pedida por Lebesgue fue reemplazada por la condición de que para cualquier número real a se tuviera que $m(\{a\}) = 0$.

El objetivo de replantear de esta forma el problema radicaba en investigar si bajo estas nuevas condiciones era posible extender la Medida de Lebesgue a una función definida en todo el conjunto $P(\mathbb{R})$. Banach trató de definir una medida sobre el conjunto $P([0,1])$ en vez de sobre todo $P(\mathbb{R})$, buscando después utilizar la σ-aditividad para extender dicha medida a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Por lo que la definición de medida quedó de la siguiente manera

Definición 3.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una medida sobre X es una función $\mu : P(X) \to [0,1]$ tal que:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$;

(b) *si* $A \subseteq B$, *entonces* $\mu(A) \le \mu(B)$;

(c) $\mu(\{x\}) = 0$, *para toda* $x \in X$*;*

(d) si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una familia de subconjuntos de* X *ajenos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bajo la Definición 3.1 el Problema de la Medida de Lebesgue significa preguntarnos si existe un conjunto X que admita una medida como la definida anteriormente.

Una propiedad inmediata que surge a partir de la Definición 3.1 es la siguiente,

Proposición 3.2. *Si* X *es un conjunto y* m *es una medida para* X*, entonces cualquier subconjunto de* X *de cardinalidad a lo más numerable tiene medida cero.*

Demostración. Sea $A \subset X$ a lo más numerable, entonces existe una enumeración (no necesariamente inyectiva) $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ para los elementos de A de manera que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$, por la defición de medida sabemos que para cada a_n, $\mu(\{a_n\}) = 0$; más aún, también por la misma definición de medida

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{a_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

□

La Proposición 3.2, junto con el inciso (a) de la Definición 3.1, tienen como consecuencia que para poder hablar de una medida para un conjunto X, éste tiene que ser no numerable. Esto es una restricción respecto a la cardinalidad de los conjuntos para los que podemos definir una medida, pues nos indica que éstos tienen que ser suficientemente “grandes”. Así, podemos rescatar que el Problema de la Medida planteado por Banach radica en preguntarse si existirá un conjunto no numerable $X \neq \emptyset$ para el cual exista una medida como la de la definición 3.1.

El estudio de cardinales medibles se originó aproximadamente en 1930 con el trabajo de Banach, Kuratowski, Tarski y Ulam. Ulam demostró en [9] que los cardinales medibles son grandes, que el cardinal menos medible es al menos tan grande como el cardinal menos inaccesible.

Definición 3.3. *Sea* X *un conjunto y sea* μ *una medida* σ*-aditiva sobre* X*. Decimos que* μ *es una medida 2-valuada si* $\mu(A)$ *es 0 o 1 para cualquier* $A \subseteq X$*.*

Las medidas 2-valuadas adquieren importancia debido a que permitieron atacar al Problema de la Medida desde un enfoque nuevo dentro de la Teoría de Conjuntos considerando familias de conjuntos tales como los ultrafiltros.

El motivo por el que resulta tan importante hablar de ultrafiltros para investigar las propiedades de las medidas radica en que es equivalente la existencia de una medida 2-valuada para un conjunto X a la existencia de un ultrafiltro no principal σ-completo sobre dicho conjunto.

Lema 3.4. *Si μ es una medida 2-valuada sobre X, entonces*

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq X \ : \ \mu(A) = 1\}$$

es un ultrafiltro no principal σ-completo sobre X.

Demostración. Primero probemos que U es un filtro sobre X. Observemos que $X \in \mathcal{U}$ y $\emptyset \notin \mathcal{U}$, ya que por la definición de medida $\mu(X) = 1$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces $\mu(A) = \mu(B) = 1$, con lo cual $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ y $B = (B - A) \cup (A \cap B)$. Si $\mu(A \cap B)$ no fuera 1, entonces $\mu(A - B) = \mu(B - A) = 1$ y tendríamos que $\mu(A \cup B) = 2$, lo cual contradice que el rango de μ está contenido en $\{0, 1\}$, por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subset B$, entonces, por la definición de medida $\mu(A) \leq \mu(B)$, pero como $\mu(A) = 1$, μ es una medida 2-valuda y 1 no es menor que 0, entonces $m(B) = 1$, por lo tanto $B \in \mathcal{U}$.

Ahora veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, dado $A \subset X$, si $A \notin \mathcal{U}$, entonces $\mu(A) = 0$ y, por tanto, $1 = \mu(X) = \mu((X - A) \cup A) = \mu(X - A) + \mu(A) = \mu(X - A)$, con lo cual $(X - A) \in \mathcal{U}$.

Notemos también que $\mathcal{U}$ es no principal, ya que como μ es una medida, para toda $a \in X$, $\mu(\{a\}) = 0$, entonces $\{a\} \notin \mathcal{U}$, y por la Proposición 2.15, $\mathcal{U}$ es no principal.
Por último, tenemos que $\mathcal{U}$ es σ-completo, ya que por la propiedad σ-aditiva de μ y $\mu(X) = 1$, no existe una partición de X en una sucesión $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tal que $\gamma < \kappa$ y $A_\alpha \notin \mathcal{U}$ para todo $\alpha < \gamma$, con lo cual se sigue la afirmación de la Proposición 2.23. □

Como podemos ver en el Lema 3.4, la existencia de una medida 2-valuada induce un ultrafiltro no principal σ-completo. Sin embargo, el recíproco también se cumple como podemos ver a continuación.

Lema 3.5. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro σ-completo no principal entonces la función $\mu : P(X) \to \{0, 1\}$ definida por*

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & si \quad A \in \mathcal{U} \\ \\ 0 & si \quad A \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

es una medida 2-valuada sobre X.

Demostración. Verifiquemos que la función μ es una medida 2-valuada. Primero, como $\mathcal{U}$ es un filtro, $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{U}$, así que $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$. También notemos que $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$, se deduce de que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal por la Proposición 2.15. Por último, si $\gamma < \kappa$ y $\{A_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una sucesión de subconjuntos de X ajenos dos a dos, tendremos los siguientes casos:

(i) Si existe $\alpha < \gamma$ tal que $A_\alpha \in \mathcal{U}$, como para todo $\beta \neq \alpha$ se tiene que $A_{\alpha \cap A_\beta = \emptyset}$, para todo $\beta \neq \alpha$ se cumple que $A_\beta \subseteq X - A_\alpha$. Dado que $\mathcal{U}$ es un filtro, esto implica que para todo $\beta \neq \alpha$, $A_\beta \notin \mathcal{U}$. Así, en este caso, $\mu(A_\alpha) = 1$ y $\mu(A_\beta) = 0$ para todo $\beta \neq \alpha$. Por otro lado, como $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta$ y $\mathcal{U}$ es un filtro, $\bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta \in \mathcal{U}$, así que

$$\mu\left(\bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta\right) = 1 = \sum_{\beta<\gamma} \mu(A_\beta).$$

(ii) Si para todo $\alpha < \gamma$ se tiene que $A_\alpha \notin \mathcal{U}$, afirmamos que $\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha \notin \mathcal{U}$. De lo contrario, como $\mathcal{U}$ es filtro, tendríamos que $X - \left(\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\right) \notin \mathcal{U}$ y, por lo tanto, aquellos conjuntos en el colección:

$$\{A_\alpha : \alpha < \gamma \ \wedge \ A_\alpha \neq \emptyset\} \cup \{X - \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\}$$

que no sean vacíos, formarían una partición de X en a lo más γ subconjuntos tal que ninguno de sus elementos está en $\mathcal{U}$, pero por la Proposición 2.23, esto contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es κ-completo. De lo anterior se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\beta\right) = 0 = \sum_{\alpha<\kappa} \mu(A_\alpha).$$

Con lo anterior se demuestra que μ es una medida para X, y por la manera en la que está definida también es 2-valuada.

□

Definición 3.6. *Un cardinal no numerable κ es medible, si existe un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.*

La existencia de cardinales medibles es equivalente a la existencia de una medida 2-valuada. Ulam y Tarski descubrieron que los cardinales medibles deben ser fuertemente inaccesibles. Antes daremos unas definiciones y un resultado preliminar sobre cardinales.

Definición 3.7. *Si α es un ordinal límite, la cofinalidad de α es el mínimo ordinal β tal que existe una función creciente $f : \beta \to \alpha$ y cumple que $\cup\{f(\gamma) : \gamma < \beta\} = \alpha$ a la que llamaremos función cofinal. Denotaremos por $cf(\alpha)$ a la cofinalidad de α.*

Proposición 3.8. *Si κ es un cardinal, entonces existe una partición $\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ tal que para cualquiera $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ se tiene que $A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset$, $A_\gamma = \emptyset$ y $\kappa = \cup_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma$.*

Demostración. Sea $f : cf(\kappa) \to \kappa$ una función cofinal, entonces $\bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$. Para cada $\gamma < cf(\kappa)$ definimos

$$A = f[\gamma + 1] \backslash \bigcup_{\theta<\lambda} F[\theta]$$

por construcción se cumple que $A_\gamma \subseteq \kappa$ y para cualquiera $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ se tiene que $A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset$, $A_\gamma = \emptyset$. Además como κ es cardinal y $f(\gamma) < \kappa$, $|A_\gamma| < \kappa$. Y dado que $\cup_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma = \bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$ se tiene el resultado.

□

Definición 3.9. *Decimos que κ es un cardinal fuertemente inaccesible si y solo si es no numerable, regular ($cf(\kappa) = \kappa$) y es fuerte (para todo $\lambda < \kappa$ se cumple que $2^\lambda < \kappa$).*

Teorema 3.10. *Si κ es un cardinal medible, entonces también es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible, entonces existe un ultrafiltro no principal κ-completo U sobre κ. Comencemos probando que κ es regular. Si κ es singular, por la Proposición 3.8, existe $\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ tal que si $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ entonces $(A_\gamma) \cap A_\theta = \emptyset)$ y $\kappa = \bigcap_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma$ con $cf(\kappa) < \kappa$. Por la Proposición 2.22, se tiene que $A_\gamma \notin U$ para cualquier $\gamma < cf(\kappa)$, entonces $\kappa \backslash A_\gamma \in U$ pues U es un filtro . De esta manera, tomando en cuenta que el ultrafiltro es κ-completo, implica que $\bigcap_{\gamma<cf(\kappa)} (\kappa \backslash A_\gamma) \in U$. No obstante,

$$\bigcap_{\gamma<cf(\kappa)} (\kappa \backslash A_\gamma) = \kappa \backslash \bigcup_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma = \kappa \backslash \kappa = \emptyset$$

y se tendría que $\emptyset \in U$ lo que es una contradicción, por ser U filtro.

Por último probemos que κ es fuerte. Supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$ y consideremos $S \subseteq {}^\lambda 2$ tal que $|S| = \kappa$. Por el Teorema 2.25, el ultrafiltro U κ-completo no principal sobre κ induce un ultrafiltro H κ-completo no principal sobre S. Para cada $\alpha < \lambda$ definimos el conjunto X_α como unos de los siguientes conjuntos $\{f \in S : f(\alpha) = 0\}$ o $\{f \in S : f(\alpha) = 1\}$ dependiendo de cual pertenece al ultrafiltro H y denotaremos por ϵ_α al valor 0 o 1 con respecto al conjunto X_α. Puesto que H es κ-completo entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in H$; sin embargo, dicha intersección tiene un único elemento a saber $f : \lambda \to 2$ definida como $f(\alpha) = \epsilon_\alpha$. Esto implica que H es principal, lo que es una contradicción. □

Ahora consideremos las siguientes definiciones sobre medidas normales.

Definición 3.11. *Sea* $\langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ *una sucesión de subconjuntos de* κ*. La intersección diagonal de* X_α*,* $\alpha < \kappa$*, es definida como sigue:*

$$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \cap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}.$$

Definición 3.12. *Sea* F *un filtro sobre un cardinal* κ*;* F *es normal si este es cerrado bajo intersecciones diagonales, es decir,*

$$\textit{Si } X_\alpha \in F \textit{ para toda } \alpha < \kappa, \textit{ entonces } \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in F.$$

Definición 3.13. *Una medida normal sobre* κ *es un ultrafiltro no principal* κ*-completo normal sobre* κ*.*

3.2. Ultraproducto del universo V.

Un gran resultado de Dana Scott estimuló la investigación de encajes elementales de modelos internos. La construcción de un ultraproducto de la teoría de modelos fue una ganancia cuando Scott consideró una ultrapotencia de V en sí mismo para establecer que: *si existe un cardinal medible, entonces* $V \neq L$*.*

Las ultrapotencias se introdujeron en el Capítulo 2. Ahora generalizamos esa técnica para construir ultrapotencias del universo V. Sea U un ultrafiltro en un conjunto X y considere la clase de todas las funciones con dominio X. Siguiendo (2.3) y (2.4) definimos

$$f =^* g \text{ si y sólo si } \{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\} \in U$$

$$f \in^* g \text{ si y sólo si } \{x \in X \ : \ f(x) \in g(x)\} \in U$$

Para cada f, denotamos $[f]$ a la clase de equivalencia de $[f]$ en $=^*$:

$$[f] = \{g \ : \ (f =^* g) \ \wedge \ (\forall h (h =^* f \rightarrow rank(g) \leq rank(h))\}$$

También usamos la notación $[f] \in^* [g]$ cuando $f \in^* g$.

Sea Ult $=$ $\mathrm{Ult}_U(V)$ la clase de todas las $[f]$, donde f es una función en X y consideremos el modelo Ult $=$ $\mathrm{Ult}_U(V)$. El Teorema 2.31 (de Łoś) se cumple en este contexto: Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos, entonces

$$\mathrm{Ult} \vDash \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \text{ si y solo si } \{x \in S : \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U.$$

Si σ es una sentencia, entonces Ult $\models \sigma$ si y solo si σ se cumple; la ultrapotencia es elementalmente equivalente al universo $(V, \in)$. La función constante c_a está definida, para cada conjunto a, por (2.12), y la función $e : V \to$ Ult definida por $e(a) = [c_a]$ es un encaje elemental (por el corolario 2.34) de V en Ult:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y solo si Ult} \vDash \varphi\,(ea_1, \ldots, ea_n) \tag{3.1}$$

siempre que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos.

Lema 3.14. *Si U es un ultrafiltro σ-completo, entonces $(Ult, \in^*)$ es un modelo bien fundado.*

Demostración. Primero veamos que $ext(f)$ es un conjunto para f, donde

$$ext(f) = \{[g] : g \in^* f\},$$

ya que para cualquier ultrafiltro U y cada $g \in^* f$ existe algún $h =^* g$ tal que $rank(h) \leq rank(f)$.

Por último, supongamos que $f_0, \ldots, f_n, \ldots$ es una sucesión decreciente. Así para cada n el conjunto

$$Y_n = \{x \in X \ : \ f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

está en el ultrafiltro U por ser U σ-completo, la intersección $Y = \cap_{n=0}^{\infty} Y_n$ también está en U y por lo tanto es no vacía. Sea y un elemento arbitrario de Y. Entonces tenemos

$$f_0(y) \ni f_1(y) \ni, \ldots,$$

una $\ni$-sucesión decreciente infinita, lo cual contradice al axioma de fundación. □

Por el Lema 3.14, podemos aplicar al modelo $(Ult, \in^*)$ el Teorema 1.69, (del colapso de Mostowski). Por lo tanto existe una función π de $(Ult, \in^*)$ a una clase transitiva $(M, \in)$ que es un isomorfismo tal que

$$f \in^* g \ \text{ si y sólo si } \ \pi([f]) \in \pi([g]).$$

Hasta este punto tenemos establecido el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "e"'] & M \\
Ult \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, sea $j : (V, \in) \to (M, \in)$ la función definida como $j = \pi \circ e$, de modo que para cualquier conjunto $x \in V$:

$$j(x) = \pi(e(x)) = \pi([c_x]). \tag{3.2}$$

Como j es la composición de dos encajes elementales, entonces j es un encaje elemental. Con lo cual tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "e"'] & M \\ Ult \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 3.15. *Si C es una clase transitiva y bien fundada con $\in$, $h : V \to C$ es un encaje elemental, entonces*

(i) Si α es un ordinal, entonces $h(\alpha)$ es un ordinal.

(ii) si α es un ordinal, entonces $\alpha \leq h(\alpha)$

Demostración. .

(i) Sea $\varphi(x)$ la fórmula que expresa "*x es un ordinal*". Como h es un encaje elemental, si α es un ordinal, entonces $V \models \varphi(\alpha)$ si y solo si $M \models \varphi(h(\alpha))$. Por otro lado, por la Proposición 1.49, "x es un ordinal" es una Δ_0-fórmula y por ser C transitivo, $\varphi(x)$ es absoluta, $M \models \varphi(h(\alpha))$ si y solo si $V \models \varphi(h(\alpha))$, es decir, α es un ordinal si y solo si $h(\alpha)$ es un ordinal.

(ii) Sea $h(\alpha)$ un ordinal, por (i) de este lema, entonces por tricotomía se tiene que $\alpha \leq h(\alpha)$ o $h(\alpha) < \alpha$. Sin embargo, Si $h(\alpha) < \alpha$ se sigue que $h(h(\alpha)) < h(\alpha)$ porque h preserva el orden ya que es un encaje elemental y el orden está dado por la pertenencia, y si denotamos por $h^n(\alpha)$ al resultado de aplicar n-veces el encaje elemental h se tiene que $\{h^n(\alpha) : n \in \omega\}$ es una familia decreciente lo que contradice el hecho de que C es bien fundada. Por lo tanto $\alpha \leq h(\alpha)$.

□

Proposición 3.16. *Sean $M = \pi[Ult]$ y $j : V \to M$ entonces M es un modelo interno de ZF.*

Demostración. Como V es modelo de ZF y $j : V \to M$ es un encaje elemental, entonces M es modelo de ZF. Por otra parte, por la Proposición 3.15, se tiene que si α es ordinal entonces $\alpha \leq j(\alpha)$. Como $j(\alpha) \in M$ y M es una clase transitiva se tiene que $\alpha \in M$, por ello M contiene a todos los ordinales. Por lo tanto M es un modelo inteno. □

Proposición 3.17. *Sea κ un cardinal medible, U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ, $M = \pi[Ult]$ y $j : V \to M$, entonces para todo $\alpha < \kappa$, $j(\alpha) = \alpha$*

Demostración. Antes de comenzar con la demostración de la proposición, probaremos la siguiente afirmación:

Afirmación 1: para toda $[f] \in^* [c_\alpha]$ donde $c_\alpha = \alpha$ y $\alpha < \kappa$ se satisface que existe $t < \alpha$ tal que $e(t) = [f]$.
Sea $[f] \in^* [c_\alpha]$, por definición se sigue $\{i \in \kappa : f(i) \in c_\alpha(i)\} \in U$, es decir, $\{i \in \kappa : f(i) \in \alpha\} \in U$. Afirmamos que existe $t \in \alpha$ tal que $\{i \in \kappa : f(i) = t\} \in U$. Si este no fuera el caso, para toda $t < \alpha$ se cumpliría que $\{i \in \kappa : f(i) = t\} \notin U$ entonces $\{i \in \kappa : f(i) \neq t\} \in U$. Como U es κ-completo se sigue que

$$\{i \in \kappa : f(i) \in \alpha\} \cap \bigcap_{t<\alpha} \{i \in \kappa : f(i) \neq t\} \in U$$

lo cual es una contradicción, puesto que

$$\{i \in \kappa : f(i) \in \alpha\} \cap \bigcap_{t<\alpha} \{i \in \kappa : f(i) \neq t\} = \emptyset,$$

por tanto, existe $t \in \alpha$ tal que $\{i \in \kappa : f(i) = t\} \in U$; lo que implica que $f = c_t$ donde $c_t = t$. Por lo tanto, $[f] = [c_t]$, por lo cual $e(t) = [f]$.

Ahora comencemos a probar la proposición, probemos que $j \restriction_\alpha : \alpha \to j(\alpha)$ es un isomorfismo. Si $\beta < \alpha$ entonces $j(\beta) \in j(\alpha)$ pues j es un encaje elemental, lo que implica que $j[\alpha] \subseteq j(\alpha)$. Por otro lado, si $p \in j(\alpha)$, como $j(\alpha) \in M$ y M es transitiva, se tiene que $p \in M$. Dado que π es sobreyectiva existe $[f] \in Ult_U(V)$ tal que $\pi([f]) = p$ entonces $\pi[f] < j(\alpha) = \pi[c_\alpha]$. Como π respeta el orden, se sigue que $[f] \in^* [c_\alpha]$ y por la afirmación 1, existe $t < \alpha$ tal que $e(t) = [g]$. Por lo tanto, existe $t < \alpha$ tal que $j(t) = \pi(e(t)) = \pi([g]) = p$, es decir, $j(\alpha) \subseteq j[\alpha]$. De ambas contenciones tenemos que $j[\alpha] = j(\alpha)$. Se sigue, $j \restriction_\alpha : \alpha \to j(\alpha)$ es una función suprayectiva y como j es un encaje elemental en particular preserva el orden. Por tanto, $j \restriction_\alpha : \alpha \to j(\alpha)$ es un isomorfismo. Así α y $j(\alpha)$ son ordinales, por la Proposición 3.15, isomorfos, entonces $\alpha = j(\alpha)$. $\square$

Proposición 3.18. *Sea κ un cardinal medible, U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ y $j : V \to M$, entonces $j(\kappa) > \kappa$*

Demostración. Sea $d : \kappa \to V$ la función diagonal definida por

$$d(\alpha) = \alpha \quad (\alpha < \kappa)$$

Por la Proposición 2.24, para toda $\beta < \kappa$ se tiene que $\{\alpha \in \kappa : \beta < \alpha\} \in U$, entonces $\{\alpha \in \kappa : \beta < d(\alpha)\} = \{\alpha \in \kappa : \beta < \alpha\} \in U$. Esto implica, $[c_\beta] \in^* [d]$ donde $c_\beta = \beta$, en consecuencia

$$j(\beta) = \pi([c_\beta]) \in \pi([d])$$

por la Proposición 3.17, sabemos que para todo $\beta < \kappa$ se cumple que $j(\beta) = \beta$, por lo cual $\beta = j(\beta) \in \pi([d])$. Así para todo $\beta < \kappa$ se satisface que $\beta \in \pi([d])$, en consecuencia $\kappa \subseteq \pi([d])$. Por otro lado, notemos que $\{\alpha \in \kappa : d(\alpha) < \kappa\} \in U$ pues d toma valores menores que κ, por lo que $[d] \in^* [c_\kappa]$ lo que implica que $\pi([d]) \in \pi([c_\kappa]) = j(\kappa)$. Por lo cual, $\kappa \subseteq \pi([d]) \in j(\kappa)$ de ahí que $\kappa < j(k)$. □

Así, hemos demostrado que si hay un cardinal medible, entonces hay un encaje elemental j del universo en un modelo transitivo M tal que j no es la función de identidad; j es un encaje elemental no trivial del universo.

Teorema 3.19 (Scott)**.** *Si existe un cardinal medible, entonces $V \neq L$.*

Demostración. Supongamos que $V = L$ y que existe existen los cardinales medibles; sea κ el menor cardinal medible. Sea U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ y sea $j : V \to M$ el correspondiente encaje elemental.

Ya que $V = L$, el único modelo transitivo que contiene todos los ordinales es el universo mismo: $V = M = L$. Dado que j es un encaje elemental y κ es el menor cardinal medible, tenemos

$$M \models j(\kappa) \text{ es el menor cardinal medible;}$$

y por lo tanto, $j(\kappa)$ es el menor cardinal medible pero esto es una contradicción ya que por la Proposición 3.18, $\kappa < j(\kappa)$. □

Corolario 3.20 (Scott)**.** *En L no existen cardinales medibles.*

Demostración. Como L es modelo de ZF entonces L hace verdadero que si "si existe un cardinal medible, entonces $V \neq L$ ". De ahí que si existen cardinales medibles en L, entonces L debe hacer verdadero que $V = L$, lo cual es una contradicción , pues L es modelo de $V = L$. □

3.3. Ultrapotencias iteradas

Haim Gaifman en 1964 inventó las ultrapotencias iteradas y estableció resultados seminales alrededor de esta técnica, los cuales estimularon de manera casi inmediata el trabajo definitivo en las tesis formativas de Silver y Kunen. Kunen aplicó la técnica de Gaifman de las ultrapotencias iteradas teoría de los modelos internos de cardinales.

Sea κ un cardinal medible y sea U un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ. Usando U, la ultrapotencia de V módulo U es bien fundada, identificamos la ultrapotencia con su colapso transitivo, un modelo transitivo $M = \mathrm{Ult}_U(V)$. Denotamos esta ultrapotencia por $Ult_U^{(1)}(V)$ o solamente $\mathrm{Ult}^{(1)}$. Sea $j^{(0)} = j_U$ el encaje canónico de V en $\mathrm{Ult}^{(1)}$ y sea $\kappa^{(1)} = j^{(0)}(\kappa)$ y $U^{(1)} = j^{(0)}(U)$.

En el modelo $\mathrm{Ult}^{(1)}$, el ordinal $\kappa^{(1)}$ es un cardinal medible y $U^{(1)}$ un ultrafiltro $\kappa^{(1)}$-completo no principal sobre $\kappa^{(1)}$. Así trabajando dentro $\mathrm{Ult}^{(1)}$, podemos construir una ultrapotencia módulo $U^{(1)}$, es decir, $\mathrm{Ult}_{U^{(1)}}(\mathrm{Ult}^{(1)})$. Denotamos esta ultrapotencia por $\mathrm{Ult}^{(2)}$, y sea $j^{(1)}$ el encaje canónico de $\mathrm{Ult}^{(1)}$ en $\mathrm{Ult}^{(2)}$ dado por esta ultrapotencia. Sea $\kappa^{(2)} = j^{(1)}(\kappa^1)$ y $U^{(2)} = j^{(1)}(U^{(1)})$.

Podemos continuar con este proceso y obtener los siguientes modelos transitivos.

$$\mathrm{Ult}^{(1)}, \quad \mathrm{Ult}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \mathrm{Ult}^{(n)}, \quad \ldots \quad (n < \omega)$$

Observación 3.21. *El hecho de que podamos construir tal secuencia de clases se deduce de la observación de que para cada α, el segmento inicial $V_\alpha \cap \mathrm{Ult}^{(n)}$ de cada ultrapotencia en la secuencia se define a partir de un segmento inicial V_β del universo (donde β es algo así como $\kappa + \alpha + 1$).*

Así obtenemos una sucesión de modelos $\mathrm{Ult}^{(n)}$, $n < \omega$ (donde $\mathrm{Ult}^{(0)} = V$). Para cualquier $n < m$, tenemos un encaje elemental $i_{n,m} : \mathrm{Ult}^{(n)} \to \mathrm{Ult}^{(m)}$ que es la composición de los encajes $j^{(n)}, j^{(n+1)}, \ldots, j^{(m-1)}$:

$$i_{n,m}(x) = j^{(m-1)} j^{(m-2)} \ldots j^{(n)}(x) \qquad \left(x \in \mathrm{Ult}^{(n)}\right).$$

Para $n = m$, el encaje elemental $i_{n,m}$ es la función identidad en $\mathrm{Ult}^{(n)}$.

Estos encajes forman un sistema conmutativo; es decir,

$$i_{m,k} \circ i_{n,m} = i_{n,k} \qquad (m < n < k)$$

También dejamos $\kappa^{(n)} = i_{0,n}(\kappa)$, y $U^{(n)} = i_{0,n}(U)$. Note que $\kappa^{(0)} < \kappa^{(1)} < \ldots < \kappa^{(n)} < \ldots$ y $\mathrm{Ult}^{\,(0)} \supset \mathrm{Ult}^{\,(1)} \supset \ldots \supset \mathrm{Ult}^{\,(n)} \supset \ldots$.

Así tenemos un sistema de modelos dirigidos y encajes elementales.

$$\left\{\mathrm{Ult}^{(n)}, i_{m,n} : m, n \in \omega\right\} \tag{3.3}$$

Aunque los modelos son clases propias, la técnica del Lema 1.41 sigue siendo aplicable y podemos considerar el límite directo

$$(M, E) = \operatorname{lím\,dir}_{n\to\omega}\left\{\mathrm{Ult}^{(n)}, i_{n,m}\right\} \tag{3.4}$$

junto con encajes elementales $i_{n,\omega} : \mathrm{Ult}^{(n)} \to (M, E)$. El límite directo es un modelo de ZFC y probaremos a continuación que está bien fundado. Así lo identificamos con un modelo transitivo $\mathrm{Ult}^{(\omega)}$.

Sea $\kappa^{(\omega)} = i_{0,\omega}(\kappa)$ y $U^{(\omega)} = i_{0,\omega}(U)$. Ya que $\mathrm{Ult}^{(\omega)}$ satisface que $U^{(\omega)}$ es un ultrafiltro $\kappa^{(\omega)}$-completo no principal sobre $\kappa^{(\omega)}$, podemos construir, trabajando dentro del modelo $\mathrm{Ult}^{(\omega)}$, la ultrapotencia de $\mathrm{Ult}^{(\omega)}$ módulo $U^{(\omega)}$ y el correspondiente encaje canónico $j^{(\omega)}$.

Denotamos por $\mathrm{Ult}^{(\omega+1)}$ a la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^{(\omega)}$ módulo $U^{(\omega)}$ y sea $i_{\omega,\omega+1}$ el correspondiente encaje elemental canónico. Para $n < \omega$, sea $i_{n,\omega+1} = i_{\omega,\omega+1} \circ i_{n,\omega}$.

Este procedimiento puede continuar, el cual nos lleva a la siguiente definición;

Definición 3.22. *Definimos la ultrapotencia iterada como sigue:*

(i) $(\mathrm{Ult}^{(0)}, E^{(0)}) = (V, \in)$

(ii) $(\mathrm{Ult}^{(\alpha+1)}, E^{(\alpha+1)}) = \mathrm{Ult}_{U(\alpha)}(\mathrm{Ult}^{(\alpha)}, E^{(\alpha)})$

(iii) $(\mathrm{Ult}^{(\lambda)}, E^{(\lambda)}) = \operatorname{lím\,dir}_{\alpha\to\lambda}\left\{\left(\mathrm{Ult}^{(\alpha)}, E^{(\alpha)}\right), i_{\alpha,\beta}\right\}$ (*si* λ *es límite*)

donde $U^{(\alpha)} = i_{0,\alpha}(U)$ *, para cada* α.

Aún no sabemos que todos los modelos $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ estén bien fundados; pero hacemos una convención de que si $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ está bien fundado, entonces lo identificamos con su colapso transitivo.

Si M es un modelo transitivo de la teoría de conjuntos y U es (en M) un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ, podemos construir, dentro de M, las ultrapotencias iteradas. Denotamos por $\mathrm{Ult}_U^{(\alpha)}(M)$ la α-ésima ultrapotencia iterada, construida en M.

Lema 3.23 (El lema factor). *Supongamos que* $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ *es bien fundada. Entonces para cada* β*, la ultrapotencia iterada* $\mathrm{Ult}_{U^{(\alpha)}}^{(\beta)}(\mathrm{Ult}^{(\alpha)})$ *tomada en* $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ *es isomorfa a la ultrapotencia iterada* $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta)}$.

Además, para cada β *existe un isomorfismo* $e_\beta^{(\alpha)}$ *tal que si para toda* ξ *y* η, $i_{\xi,\eta}^{(\alpha)}$ *denota el encaje elemental de* $\mathrm{Ult}_{U(\alpha)}^{(\xi)}(\mathrm{Ult}^{(\alpha)})$ *a* $\mathrm{Ult}_{U(\alpha)}^{(\eta)}(\mathrm{Ult}^{(\alpha)})$*, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ult}^{(\xi)}_{U^{(\alpha)}}(Ult^{(\alpha)}) & \xrightarrow{i^{(\alpha)}_{\xi,\eta}} & \mathrm{Ult}^{(\eta)}_{U^{(\alpha)}}\left(\mathrm{Ult}^{(\alpha)}\right) \\
\Big\downarrow e^{(\alpha)}_{\xi} & & \Big\downarrow e^{(\alpha)}_{\eta} \\
\mathrm{Ult}^{(\alpha+\xi)}_{U} & \xrightarrow{i^{(\alpha)}_{\alpha+\xi,\alpha+\eta}} & \mathrm{Ult}^{(\alpha+\eta)}_{U}
\end{array}$$

Demostración. Probemos por inducción transfinita sobre β. Si $\beta = 0$, entonces la 0-ésima ultrapotencia iterada en $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ es $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$; y $e^{(\alpha)}_0$ es la función identidad.

Si $\mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta)}_U$ son isomorfos y $e^{(\alpha)}_\beta$ es el isomorfismo, entonces $\mathrm{Ult}^{(\beta+1)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta+1)}_U$ son ultrapotencias de $\mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta)}_U$, respectivamente, y ya que $i_{0,\alpha+\beta}(U) = e^{(\alpha)}_\beta(i^{(\alpha)}_{0,\beta}(U^{(\alpha)}))$, el isomorfismo $e^{(\alpha)}_\beta$ induce un isomorfismo $e^{(\alpha)}_{\beta+1}$ entre $\mathrm{Ult}^{(\beta+1)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta+1)}_U$.

Si λ es un ordinal límite, entonces $\mathrm{Ult}^{(\lambda)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\lambda)}_{U)}$ son (en $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$) los límites directos de $\{\mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}}, i^{(\alpha)}_{\beta,\gamma} : \beta,\gamma < \lambda\}$ y $\{\mathrm{Ult}^{(\alpha+\beta)}_U, i_{\alpha+\beta,\alpha+\gamma} : \beta,\gamma < \lambda\}$, respectivamente. Es claro que los isomorfismos $e^{(\alpha)}_\beta$,$\beta < \lambda$, induce un isomorfismo $e^{(\alpha)}_\lambda$ entre $\mathrm{Ult}^{(\lambda)}_{U^{(\alpha)}}$ y $\mathrm{Ult}^{(\alpha+\lambda)}_U$.

□

Corolario 3.24. *Para cada ordinal límite λ, si* $\mathrm{Ult}^{(\lambda)}$ *es bien fundada, entonces* $\mathrm{Ult}^{(\lambda)} \subset \mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ *para toda $\alpha < \lambda$.*

Demostración. $\mathrm{Ult}^{(\lambda)}$ es un clase en $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$, es la ultrapotencia iterada $\mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}}$ $(\mathrm{Ult}^{(\alpha)})$ donde $\alpha + \beta = \lambda$ □

El siguiente teorema fue probado por Gaifman, nos dice que las ultrapotencias iteradas $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}_U$ son bien fundadas.

Teorema 3.25. *Sea U un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ, entonces para cada α, la α-ésima ultrapotencia iterada* $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ *es bien fundada.*

Demostración. Si $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ es bien fundado, entonces $\mathrm{Ult}^{(\alpha+1)}$ es bien fundado. Por lo tanto, si γ es el mínimo γ tal que $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ no es bien fundado, entonces γ es un ordinal límite . Los ordinales del modelo $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ no están bien ordenados; sea ξ el menor ordinal de manera que los ordinales de $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ por debajo de $i_{0,\gamma}(\xi)$ no estén bien ordenados.

Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una sucesión descendente de ordinales en el modelo $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ tal que x_0 es menor que $i_{0,\gamma}(\xi)$. Como $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ es el límite directo de $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$, $\alpha < \gamma$ existe un $\alpha < \gamma$ y un ordinal ν (menor que $i_{0,\alpha}(\xi)$) tal que $x_0 = i_{\alpha,\gamma}(\nu)$. Sea β

tal que $\alpha+\beta=\gamma$. Así, según las suposiciones iniciales, lo siguiente es cierto (en V):

$$(\forall\gamma' \leq \gamma)(\forall\xi' < \xi) \text{ los ordinales debajo de } i_{0,\gamma'}(\xi') \text{ en } \mathrm{Ult}^{(\gamma')} \text{ son bien ordenados.} \tag{3.5}$$

Cuando aplicamos el encaje elemental $i_{0,\alpha}$ a (3.5), tenemos:

$$\mathrm{Ult}^{(\alpha)} \models (\forall\gamma' \leq i_{0,\alpha}(\gamma))(\forall\xi' < i_{0,\alpha}(\xi)) \text{ los ordinales debajo de } i^{(\alpha)}_{0,\gamma'}(\xi') \text{ en } \mathrm{Ult}^{(\gamma')}{}_{U^{(\alpha)}} \text{ son bien ordenados.} \tag{3.6}$$

Ahora $\beta \leq \gamma \leq i_{0,\alpha}(\gamma)$, y $\nu < i_{0,\alpha}(\xi)$. Por lo tanto si sustituimos $\gamma'=\beta$ y $\xi=\nu$ en (3.6), tenemos que

$$\mathrm{Ult}^{(\alpha)} \models \text{ los ordinales por debajo de } i^{(\alpha)}_{0,\beta}(\nu) \text{ en } \mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}} \text{ son bien ordenados.}$$

Por el Lema 3.23, $\mathrm{Ult}^{(\beta)}_{U^{(\alpha)}}$ es isomorfo a $\mathrm{Ult}^{\alpha+\beta}$, y $i^{(\alpha)}_{0,\beta}(\nu)$ es $i_{\alpha,\alpha+\beta}(\nu)$. Ya que $\alpha+\beta=\gamma$ y $i_{\alpha,\gamma}(\nu)=x_0$, y como estar bien ordenado es absoluto (para el modelo transitivo $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$), tenemos:

$$\text{Los ordinales por debajo de } x_0 \text{ en } \mathrm{Ult}^{(\gamma)} \text{ son bien ordenados.}$$

Pero esto es una contradicción ya que $x_1, x_2, \ldots$ es una sucesión decreciente de ordinales por debajo de x_0 en $\mathrm{Ult}^{(\gamma)}$ □

Así dado cualquier ultrafiltro no principal κ-completo U sobre κ tenemos una sucesión transfinita de modelos transitivos, las ultrapotencias iteradas $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}_U(V)$ y los encajes elementales $i_{\alpha,\beta} : \mathrm{Ult}^{(\alpha)} \to \mathrm{Ult}^{(\beta)}$. Sea $\kappa^{(\alpha)} = i_{0,\alpha}(\kappa)$ para cada α.

Proposición 3.26. .

(i) Si $\gamma < \kappa^{(\alpha)}$, entonces $i_{\alpha,\beta}(\gamma)=\gamma$ para toda $\beta \geq \alpha$.

(ii) Si $X \subseteq \kappa^{(\alpha)}$ y $X \in \mathrm{Ult}^{(\alpha)}$, entonces $X \subset i_{\alpha,\beta}(X)$ para toda $\beta \geq \alpha$.

Demostración. Por el Lema 3.23, es suficiente dar una prueba para $\alpha = 0$.

(i) Como sabemos, $i_{0,1}(\gamma)=\gamma$ para toda $\gamma<\kappa$. Por inducción sobre β, si $i_{0,\beta}(\gamma)=\gamma$, entonces $i_{0,\beta+1}(\gamma)=i_{\beta,\beta+1}(\gamma)=\gamma$ porque $\gamma<\kappa^{(\beta)}$; si λ es un ordinal límite y $i_{0,\beta}(\xi)=\xi$ para todo $\xi \leq \gamma$ y $\beta<\lambda$, entonces $i_{0,\lambda}(\gamma)=\gamma$.

(ii) Se sigue de (i).

□

Lema 3.27. *La sucesión $\langle \kappa^{(\alpha)} : \alpha \in Ord \rangle$ es normal, es decir, creciente y continua.*

Demostración. Para cada α, $\kappa^{(\alpha+1)} = i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa^{(\alpha)}) > \kappa^{(\alpha)}$. Para probar que la sucesión es continua, sea λ un ordinal límite; queremos probar que $\kappa^{(\lambda)} = \text{lím}_{\alpha\to\lambda}\,\kappa^{(\alpha)}$. Si $\gamma < \kappa^{(\lambda)}$, entonces $\gamma = i_{\alpha,\lambda}(\delta)$ para algun $\alpha < \kappa^{(\alpha)}$. Por está razón $\gamma = \delta$ y entonces $\gamma < \kappa^{(\alpha)}$. □

Proposición 3.28. *Sea C una medida normal sobre κ, y para cada α,* $\text{Ult}^{(\alpha)}$ *la α-ésima ultrapotencia iterada módulo C, $\kappa^{(\alpha)} = i_{0,\alpha}(\kappa)$, y $C^{(\alpha)} = i_{0,\alpha}(C)$. Sea λ un ordinal límite infinito. Entonces para cada $X \in \text{Ult}^{(\lambda)}$, $X \subset \kappa^{(\lambda)}$,*

$$X \in C^{(\lambda)} \textit{ si y solo si } (\exists\alpha < \lambda)X \supset \{\kappa^{(\gamma)} : \alpha \leq \gamma < \lambda\} \tag{3.7}$$

Demostración. Ya que X, tanto X como su complemento contienen un segmento final de la sucesión $\langle\kappa^{(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle$, es suficiente demostrar que si $X \in C^{(\lambda)}$, entonces existe un α tal que $\kappa^{(\gamma)} \in X$ para toda $\gamma \geq \alpha$.

Existe un $\alpha < \lambda$ tal que $X = \imath_{\alpha,\lambda}(Y)$ para alguna $Y \in C^{(\alpha)}$. Demostremos que $\kappa^{(\gamma)} \in X$ para toda γ, $\alpha \leq \gamma < \lambda$. Sea $\gamma \geq \alpha$ y sea $A = i_{\alpha,\gamma}(Y)$. Entonces $A = C^{(\gamma)}$ y dado $C^{(\gamma)}$ es una medida normal sobre $\kappa^{(\gamma)}$ en $\text{Ult}^{(\gamma)}$, tenemos $\kappa^{(\gamma)} \in i_{\gamma,\gamma+1}(A)$. Sin embargo, $i_{\gamma,\gamma+1}(A) \subset i_{\gamma+1,\lambda}(i_{\gamma,\gamma+1}(A)) = X$ y por lo tanto $\kappa^{(\gamma)} \in X$. □

3.3.1. Representación de ultrapotencia iteradas.

Ahora daremos una descripción alternativa de cada uno de los modelos $Ult^{(\alpha)}$ por medio de una única ultrapotencia del universo, utilizando un ultrafiltro en una determinada álgebra booleana de subconjuntos de κ^α. Esto nos permitirá obtener información más precisa sobre los encajes $i_{0,\alpha} : V \to \text{Ult}^{(\alpha)}$. Trataremos primero las iteraciones finitas.

Definición 3.29. *Sea U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ. Definimos el símbolo $\forall^*\alpha$ para decir " casi todas $\alpha < \kappa$" cuando:*

$$\forall^*\alpha\varphi(\alpha) \textit{ si y solo si } \{\alpha < \kappa \;:\; \varphi(\alpha)\} \in U$$

Si $X \subset \kappa^n$ y $\alpha < \kappa$,

$$X_{(\alpha)} = \{\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-}\rangle : \langle\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\rangle \in X\}$$

Definición 3.30. *Definimos los ultrfiltros U_n sobre κ^n, por indución sobre n:*

$$\begin{aligned} U_1 &= U, \\ U_{n+1} &= \{X \subset \kappa^{n+1} \;:\; \forall^*\alpha X_{(\alpha)} \in U_n\}. \end{aligned}$$

Cada U_n es un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ^n, y si $Z \in U$, entonces $Z^n \in U_n$.

Para toda $X \subset \kappa^n$,

Observemos que U_n se concentra en aumentar n-sucesiones:

$$\{\langle\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\rangle \in \kappa^n : \alpha_0 < \ldots < \alpha_{n-1}\} \in U_n$$

porque $\forall\alpha_0\,(\forall\alpha_1 > \alpha_0)\ldots(\forall\alpha_{n-1} > \alpha_{n-2})\,\alpha_0 < \ldots < \alpha_{n-1}$

Lema 3.31. *Para cada n,*

$$\mathrm{Ult}_{U_n}(V) = \mathrm{Ult}^{(n)}(V)$$

y $j_{U_n} = i_{0,n}$, donde j_{U_n} es el encaje canónico $j : V \to \mathrm{Ut}_{U_n}(V)$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que el lema es verdad para n y consideremos $\mathrm{Ult}_{U_{n+1}}$. Sea f una función sobre κ^{n+1}. Para cada $t = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle \in \kappa^n$, sea $f_{(t)}$ la función sobre κ definida por $f_{(t)}(\xi) = f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \xi)$ y sea F una función en κ^n tal que $F(t) = f_{(t)}$ para toda $t \in \kappa^n$: sea $\hat{f} = [F]_{U_n}$. De esta forma asignamos a cada función f en κ^{n+1} una función $\hat{f} \in \mathrm{Ult}^{(n)}$ en $\kappa^{(n)}$.

Recíprocamente, si $h \in \mathrm{Ult}^{(n)}$ es un función en $\kappa^{(n)}$, existe una función en κ^{n+i} tal que $h = \hat{f}$: existe alguna F sobre κ^n tal que $h = [F]_{U_n}$ y que para cada $t \in \kappa^n$, $F(t)$ es una función en κ; así $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ es el valor de $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ en α_n.

Mostraremos que la correspondencia $[f]_{U_{n+1}} \mapsto [\hat{f}]_{U^{(n)}}$ es un isomorfismo entre $\mathrm{Ult}_{U_{n+1}}$ y $\mathrm{Ult}^{(n+1)} = \mathrm{Ult}_{U^{(n)}}(\mathrm{Ult}^{(n)})$ Tenemos

$$\begin{aligned}
[f]_{U_{n+1}} = [g]_{U_{n+1}} \quad &\leftrightarrow \quad \forall^* \alpha_0 \ldots \forall^* \alpha_{n-1} \forall^* \xi f(\alpha_0, \ldots . \alpha_{n-1}, \xi) = \\
&\qquad g(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \xi) \\
&\leftrightarrow \quad \forall^* t \{\xi < \kappa : f_{(t)}(\xi) = g_{(t)}(\xi)\} \in U \\
&\leftrightarrow \quad \mathrm{Ult}_{U_n} \models \{\xi < j_{U_n}(\kappa) : \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\} \in j_{U_n}(U) \\
&\leftrightarrow \quad \mathrm{Ult}^{(n)} \models \{\xi < \kappa^{(n)} : \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\} \in U^{(n)} \\
&\leftrightarrow \quad [\hat{f}]_{U^{(n)}} = [\hat{g}]_{U^{(n)}}
\end{aligned}$$

y similarmente para $\in$ en lugar de $=$.

Así $\mathrm{Ult}_{U_{n+1}} = \mathrm{Ult}^{(n+1)}$. Para probar que $j_{U_{n+1}} = i_{0,n+1}$, sea $f = c_x$ la función constante sobre κ^{n+1} con valor x. Se sigue que $\hat{f}$ es la función constante sobre $\kappa^{(n)}$ con el valor $i_{0,n}(x)$, y por lo tanto

$$j_{U_{n+1}}(x) = [c_x]_{U_{n+1}} = i_{n,n+1}(i_{0,n}(x)) = i_{0,n+1}(x).$$

□

Las iteraciones infinitas son descritas con la ayuda de los ultrafiltros U_E sobre κ^E, donde E se extiende sobre conjuntos finitos de números ordinales. Si E es un conjunto finito de ordinales, entonces el isomorfismo de orden π entre $n = |E|$ y E induce, de forma natural, un ultrafiltro U_E correspondiente a U_n:

$$U_E = \{\pi(X) : X \subset \kappa^n\}$$

donde $\pi(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle) = t \in \kappa^E$ con $t(\pi(k)) = \alpha_k$ para toda $k = 0, \ldots, n-1$.

Definición 3.32. *Si S es un conjuntos de ordinales y $E \subset S$ es un conjunto finito, definimos una función* $\mathrm{in}_{E,S}$ *(una función inclusión) de $P(\kappa^E)$ en $P(\kappa^S)$ como sigue:*

$$\mathrm{in}_{E,S}(X) = \{t \in \kappa^S : t \restriction E \in X\} \qquad (\textit{ para toda } X \subset \kappa^E)$$

Lema 3.33. *Si $E \subset F$ son conjuntos finitos de ordinales, entonces para cada $X \subset \kappa^E$,*

$$X \in U_E \quad \textit{si y solo si} \quad \mathrm{in}_{E,F}(X) \in U_F.$$

Demostración. Por inducción sobre (m, n) donde $m = |E|$ y $n = |F|$. Sea $E \subset F$ conjuntos finitos de ordinales. Supongamos que a es el elemento mínimo de F, y supongamos que$a \in E$ (si $a \notin E$, entonces la prueba es similar). Sea $E' = E - \{a\}$ y $F' = F - \{a\}$.

Si $X \subset \kappa^E$, definamos para cada $\alpha < \kappa$, el conjunto $X_{(\alpha)} \subset \kappa^E$ de la siguiente manera: $X_{(\alpha)} = \{t \restriction E' : t \in X \wedge t(a) = \alpha\}$; para $Z \subset \kappa^F$, definamos $Z_{(\alpha)} \subset \kappa^F$ de manera similar (para todos los $\alpha < \kappa$). Debe quedar claro que

$$X \in U_E \leftrightarrow \forall^* \alpha X_{(\alpha)} \in U_{E'} \quad \text{y} \quad Z \in U_F \leftrightarrow \forall^* \alpha Z_{(\alpha)} \in U_{F'} \tag{3.8}$$

Por último observamos que si $Z = in_{E,F}(X)$, entonces $Z_{(\alpha)} = in_{E',F'}(X_{(\alpha)})$, y el lema para E y F se deduce de (3.8) y la hipótesis de inducción. □

Definición 3.34. *Sea un número ordinal α. Si $E \subset \alpha$ es un conjunto finito, decimos que un conjunto $Z \subset \kappa^\alpha$ tiene soporte E si $Z = \mathrm{in}_{E,\alpha}(X)$ para alguna $X \subset \kappa^E$.*

Notemos que si Z tiene soporte E y $E \subset F$, entonces Z también tiene soporte F. Denotemos por B_α a la colección de todos los subconjuntos de κ^α que tienen soporte finito. $(B_\alpha, \subset)$ es una álgebra booleana.

Sea U_α el siguiente ultrafiltro sobre B_α: Para cada $Z \in B_\alpha$, si $Z = \mathrm{in}_{E,\alpha}(X)$ donde $X \subset \kappa^E$, sea

$$Z \in U_\alpha \quad \text{si y solo si } X \in U_E.$$

Por el Lema 3.33, la definición de U_α no depende de la elección del soporte E de Z.

Ahora construiremos una ultrapotencia módulo U_α.

Definición 3.35. *Si F es una función sobre κ^α, decimos que f tiene soporte finito $E \subset \alpha$ si $f(t) = f(s)$ cuando $t, s \in \kappa^\alpha$ son tales que $t \restriction E = s \restriction E$*

En otras palabras, existe g sobre κ^E tal que $f(t) = g(t \restriction E)$ para toda $t \in \kappa^\alpha$. Consideremos solo las funciones f sobre κ^α con soporte finito y definamos

$$\begin{aligned} f =_\alpha g &\quad \text{si y solo si} \quad \{t : f(t) = g(t)\} \in U_\alpha, \\ f E_\alpha\, g &\quad \text{si y solo si} \quad \{t : f(t) \in g(t)\} \in U_\alpha. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Los conjuntos del lado derecho de (3.9) tienen soporte finito, llamémosle $E \cup F$ donde E y F son, respectivamente, soportes de f y g.

Sea el modelo $(\mathrm{Ult}_{U_\alpha}(V), E_\alpha)$ cuyos elementos son clases de equivalencia módulo $=_\alpha$ de funciones sobre κ^α con soporte finito.

Con lo anterior estamos listos para probar el lema principal de esta sección,

Lema 3.36 (El lema de reperesentación.)**.** *Para cada α, el modelo* $(\mathrm{Ult}(V), E_\alpha)$ *es (isomorfo a) la α-ésima ultrapotencia iterada* $\mathrm{Ult}_U^{(\alpha)}(V)$ *y el encaje canónico* $j_{U_\alpha} : V \to \mathrm{Ult}_{U_\alpha}$ *es igual a* $i_{0,\alpha}$. *Además, si $\alpha \leq \beta$ y $[f]_{U_\alpha} \in \mathrm{Ult}^{(\alpha)}$, entonces $i_{\alpha,\beta}([f]_{U_\alpha}) = [g]_{U_\beta}$ donde g es definida por $g(t) = f(t \restriction \alpha)$ para toda $t \in \kappa^\beta$.*

Demostración. Por inducción en α. El paso de inducción de α a $\alpha + 1$ sigue de cerca la prueba del Lema 3.31; así, describamos solo cómo asignar a $[f]_{U_{\alpha+1}}$ la correspondiente $[\hat{f}]_{U_{(\alpha)}}$ en $\mathrm{Ult}^{(\alpha+1)}$. Sea f una función en $\kappa^{\alpha+1}$ con soporte $E \cup \{\alpha\}$ donde $E \subset \alpha$. Para cada $t \in \kappa^\alpha$, sea $f_{(t)}(\xi) = f(t\xi)$ para todo $\xi < \kappa$, y sea F una función en κ^α (con soporte E) tal que $F(t) = f_{(t)}$ para todos $t \in \kappa^\alpha$. Se $\hat{f} = [F]_{U_\alpha}$; f está en $\mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ y es una función en $\kappa^{(\alpha)}$.

Cuando λ es un ordinal límite, una verificación de rutina muestra que Ult_{U_λ} es el límite directo de $\{\mathrm{Ult}_{U_\alpha}, i_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta < \lambda\}$ y que los encajes $i_{\alpha,\lambda}$ conmutan con $i_{\alpha,\beta}$. □

3.4. El modelo $L[U]$

En esta sección investigaremos los modelos internos para cardinales medibles. Los principales resultados de cardinales grandes de Kunen que emanan de su tesis de Stanford en 1968 serían los resultados de la estructura definitiva para los modelos internos de cardinales medibles.

Los resultados de las sección anteriores muestran que los cardinales medibles son inconsistentes con el axioma de la constructibilidad y, de hecho, la existencia de cardinales medibles implica que muy pocos conjuntos son construibles. Esto elimina el universo construible L con sus buenas propiedades estructurales como herramienta para obtener resultados consistentes. Así, si queremos mostrar consistencia de, por ejemplo, la hipótesis del continuo en relación con la existencia de cardinales medibles, tenemos que buscar modelos con conjuntos no construibles.

Resulta que la teoría $ZFC+$ "existe un cardinal medible" tiene un modelo canónico que comparte con L muchas de sus propiedades útiles. Si κ es un cardinal medible, supongamos que U sea cualquier ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ y consideremos el modelo $L[U]$ de todos los conjuntos construibles a partir de U. Demostraremos que el modelo $L[U]$ es único; es el mismo modelo independientemente de nuestra elección de U. Además, en $L[U]$, κ es el único cardinal medible y κ tiene solo una medida normal; y $L[U]$ es el modelo más pequeño en el que κ es medible. Cada conjunto en $L[U]$ es el menor modelo en el que κ es medible. Cada conjunto en $L[U]$ es construible a partir de la medida normal única .

Sea κ un cardinal medible y sea U un ultrafiltro no principal de κ-completo sobre κ. Consideremos el modelo $L[U]$.

Lema 3.37. *En $L[U]$, $\bar{U}$ es un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ. Además, si $\bar{U}$ es normal, entonces $L[U] \vDash (\bar{U}$ es normal).*

Demostración. Si U es normal y $f \in L[U]$ es una función regresiva en κ, entonces para algunos $\gamma < \kappa$, el conjunto $X = \{\alpha : f(\alpha) = \gamma\}$ está en U; dado que $X \in L[U]$, $L[U] \models f$ es constante en algún $X \in \overline{U}$. □

Un gran resultado de Silver fue que el modelo L [U] satisface el GCH, como se expresa en el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [4], pág. 339.

Teorema 3.38 (Silver)**.** *Si $V = L[D]$ donde D es una media normal sobre un cardinal medible κ, entonces la Hipotesis del Continuo Generalizada se cumple.*

Uno prueba con facilidad que el modelo $L[D]$ tiene solo un cardinal medible:

Lema 3.39. *Si $V = L[D]$ y D es una medida normal sobre κ entonces κ es el único cardinal medible.*

Demostración. Supongamos que existe un cardinal medible $\lambda \neq \kappa$ consideremos el encaje elemental $j_U : V \to M$ donde U es un ultrafiltro no principal λ-completo sobre λ. Demostraremos que $M = L[D] = V$ obteniendo así una contradicción ya que $U \notin M$.

Como j es elemental, está claro que $M = L[j(D)]$. Si $\lambda > \kappa$, entonces $j(D) = D$ y entonces $M = L[D]$. Por lo tanto, suponga que $\lambda < \kappa$.

Como κ es medible, el conjunto $Z = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es inaccesible } \wedge \alpha > \lambda\}$ pertenece a D. $j(\kappa) = \kappa$ y $j(\alpha) = \alpha$ para todos los $\alpha \in Z$. Mostraremos que $j(D) = D \cap M$. Es suficiente mostrar que $j(D) \subset D \cap M$ ya que $j(D)$ es (en M) un ultrafiltro. Sea $X \in j(D)$ representado por $f : \lambda \to D$. Sea $Y = \cap_{\xi<\lambda} f(\xi)$; tenemos $Y \in D$, y claramente $j(Y) \subset X$. Ahora si $\alpha \in Y \cap Z$, entonces $j(\alpha) = \alpha$ y entonces $X \supset j(Y) \supset j(Y \cap Z) = Y \cap Z \in D$ y, por tanto, $X \in D$. Así, $j(D) = D \cap M$, y tenemos $M = L[j(D)] = L[D \cap M] = L[D]$.

□

3.5. Unicidad del Modelo $L[D]$.

El siguiente teorema de Kunen es el resultado principal de esta sección, y su prueba se dará por medio de otros lemas. A continuación enunciamos dicho teorema.

Teorema 3.40 (Kunen)**.** *.*

(i) Si $V = L[D]$ y D es una medida normal sobre κ, entonces κ es el único cardinal medible y D es la única medida normal sobre κ.

(ii) Para cada ordinal κ, existe a lo más un $D \subset P(\kappa)$ tal que $D \in L[D]$ y

$$L[D] \models D \text{ es una medida normal sobre } \kappa.$$

(iii) Si $\kappa_1 < \kappa_2$ son ordinales y D_1, D_2 tales que

$$L[D_i] \models D_i \text{ es una medida normal sobre } \kappa_i \qquad (i = 1, 2),$$

entonces $L[D_2]$ es una ultrapotencia iterada de $L[D_1]$; es decir, existe α tal que $L[D_2] = Ult^{(\alpha)}_{D_1}(L[D_1])$, y $D_2 = i_{0,\alpha}(D_1)$.

La prueba de este teorema se dará mediante los siguientes lemas, estos lemas usan la representanción de ultrapotencias iteradas.

Lema 3.41. *Sea U un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ y sea, para cada α, $i_{0,\alpha} : V \to \mathrm{Ult}^{(\alpha)}$ el encaje de V en su α-ésima ultrapotencia iterada.*

(i) Si α es un cardinal y $\alpha > 2^\kappa$, entonces $i_{0,\alpha}(\kappa) = \alpha$.

(ii) Si λ es un cardinal límite fuerte, $\lambda > \alpha$, y si $cf(\lambda) > \kappa$, entonces $i_{0,\alpha}(\lambda) = \lambda$

Demostración. Se sigue del lema de representación que para todo ξ, ν, los ordinales debajo de $i_{0,\xi}(\nu)$ son representados por funciones con soporte finito de κ^ξ a ν y por lo tanto $|i_{0,\xi}| \leq |\xi| \cdot |\nu|^\kappa$.

(i) Tenemos que $i_{0,\alpha}(\kappa) = \lim_{\xi\to\alpha} i_{0,\xi}(\kappa)$ y para cada $\xi < \alpha$ $i_{0,\xi}(\kappa) \leq |\xi| \cdot 2^\kappa < \alpha$. Por lo tanto $i_{0,\kappa}(\kappa) = \alpha$

(ii) Como cf $> \kappa$, cada función $f : \kappa^\alpha \to \lambda$ con soporte finito es acotada por debajo de λ: existe $\gamma < \lambda$ tal que $f(t) < \gamma$ para toda $t \in \kappa^\alpha$. Por lo tanto $i_{0,\alpha}(\lambda) = \lim_{\gamma\to\lambda} i_{0,\alpha}(\gamma)$. Dado que λ es un limite fuerte, tenemos que $|i_{0,\alpha}(\gamma)| < \lambda$ para toda $\gamma < \lambda$ y por lo tanto $i_{0,\lambda} = \lambda$.

□

Observación 3.42. *De la prueba se desprende que en (ii) es suficiente suponer que $\gamma^\kappa < \lambda$ para todos los cardinales $\gamma < \lambda$, en lugar de que λ es un cardinal límite fuerte.*

El siguiente lema nos habla una medida normal y la contención de todos los subconjuntos de κ en $L[D]$. Su demostración puede consultarse en [4].

Lema 3.43. *Supongamos que en $L[D]$, D es una media normal sobre κ. Sea A un conjunto de ordinales de tamaño al menos κ^+ y sea θ un cardinal tal que $D \in L_\theta[D]$ y $A \subset L_\theta[D]$. Sea $M \prec (L_\theta[D], \in, D)$ el casco de Skolem*[1] *de $\kappa \cup A$. Entonces M contiene todos los subconjuntos de κ en $L[D]$.*

El siguiente lema es clave en la prueba de unicidad de $L[D]$:

Lema 3.44. *Sea $D \subset P(\kappa)$ tal que $D \in L[D]$ y*

$$L[D] \models D \text{ es un medida normal sobre } \kappa.$$

Para cada α, sea $\mathrm{Ult}_D^{(\alpha)}(L(D))$ denota la α-ésima ultrapotencia iterada, construida dentro $L[D]$. Sea $i_{0,\alpha}$ el correspondiente encaje elemental. Sea λ un cardinal regular más grande que κ^+, y sea F el filtro no acotado cerrado sobre λ. Entonces

(i) $i_{0,\lambda}(D) = F \cap \mathrm{Ult}_D^{(\lambda)}(L[D])$;

(ii) $\mathrm{Ult}_D^{(\lambda)}(L[D]) = L[F]$.

Demostración. Primero, tenemos que $i_{0,\lambda}(\kappa) = \lambda$ por el Lema 3.41(i), porque $\lambda > \kappa^+ \geq (\kappa^+)^{L[D]} = (2^\kappa)^{L[D]}$. Sea $D^{(\lambda)} = i_{0,\lambda}(D)$ y sea $M = \mathrm{Ult}_D^{(\lambda)}(L[D])$. Si $X \in D^{(\lambda)}$, entonces por (3.7), X contiene un subconjunto no acotado cerrado y por lo tanto $X \in F$. Como $D^{(\lambda)}$ es un ultrafiltro en M y F es un filtro, se sigue que $D^{(\lambda)} = F \cap M$.

En cuanto a (ii) tenemos

$$M = \mathrm{Ult}^{(\lambda)}(L[D]) = L[D^{(\lambda)}] = L[F \cap M] = L[F].$$

$\square$

Ahora probaremos las partes (i) y (ii) del Teorema de Kunen. Ya sabemos por Lema 3.39, que en $L[D]$, κ es el único cardinal medible. Así (i) y (ii) se siguen del próximo lema.

Lema 3.45. *Sean D_1, $D_2 \subset P(\kappa)$ tal que $D_1 \in L[D_1]$, $D_2 \in L[D_2]$ y*

$$L[D_i] \models D_i \text{ es una medida normal sobre } \kappa \qquad (i = 1, 2).$$

Entonces $D_1 = D_2$.

[1]Dado un conjunto de funciones Skolem, una para cada fórmula de un lenguaje $\mathcal{L}$, la clausura de un conjunto $X \subset A$ es un casco Skolem de X. Donde una función $h : A^n \to A$ es una función de Skolem para φ si

$$(\exists a \in A)\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n] \text{ implica } \mathfrak{A} \models \varphi[h(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n]$$

para cada $a_1, \ldots, a_n$.

Demostración. Sea D_1, $D_2 \subset P(\kappa)$ tales que $L[D_i] \models D_i$ es una medida normal sobre κ, para $i = 1, 2$; demostraremos que $D_1 = D_2$. Por simetría, es suficiente demostrar que si $X \subset \kappa$ está en D_1, entonces $X \in D_2$.

Sea λ un cardinal regular mayor que κ^+ y sea F el filtro cerrado no acotado sobre λ. Consideremos la λ-ésima potencia iterada $M_i = \mathrm{Ult}^{(\lambda)}_{D_i}(L[D_i])$, para $i = 1, 2$, y los correspondientes encajes $i^1_{0,\lambda}, i^2_{0,\lambda}$.

Por Lema 3.44, se cumple que $M_1 = M_2 = L[F]$ y que $i^1_{0,\lambda}(D_1) = i^2_{0,\lambda}(D_2) = F \cap L[F]$. Sea $G = F \cap L[F]$.

Sea A un conjunto de ordinales, con $|A| = \kappa^+$, tal que para cada $\gamma \in A$ son mayores que λ y que $i^1_{0,\lambda}(\gamma) = i^2_{0,\lambda}(\gamma)$ para cada $\gamma \in A$, la existencia de tal conjunto está dada por el Lema 3.41(ii). Sea θ un ordinal mayor que cada $\gamma \in A$ tal que $i^1_{0,\lambda}(\theta) = i^2_{0,\lambda}(\theta) = \theta$.

Ahora, sea X un subconjunto de κ tal que $X \in D_1$. Por el Lema 3.43, X pertenece al casco de Skolem de $\kappa \cup A$ en $(L_\theta[D_1], \in, D_1)$. Así, existe un término de Skolem, digamos t, tal que para algún $\alpha_1, ..., \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, ..., \gamma_m \in A$,

$$L_\theta[D_1] \models X = t[\alpha_1, ..., \alpha_n, \gamma_1, ..., \gamma_m, D_1]. \tag{3.10}$$

Sea $Y \in L_\theta[D_2]$ tal que

$$L_\theta[D_2] \models Y = t[\alpha_1, ..., \alpha_n, \gamma_1, ..., \gamma_m, D_2]. \tag{3.11}$$

Demostraremos que $Y \in D_2$ y que $Y = X$, y así $X \in D_2$.

Primero, observemos que $i^1_{0,\lambda}(X) = i^2_{0,\lambda}(Y)$. De hecho, sea $Z_1 = i^1_{0,\lambda}(X)$ y $Z_2 = i^2_{0,\lambda}(Y)$. Tenemos que $i^1_{0,\lambda}(\alpha) = \alpha$, $i^1_{0,\lambda}(\gamma) = \gamma$, $i^1_{0,\lambda}(D_1) = G$; y por lo tanto cuando aplicamos $i^1_{0,\lambda}$ a (3.10), obtenemos que:

$$L_\theta[G] \models Z_1 = t[\alpha_1, ..., \alpha_n, \gamma_1, \gamma_m, G]. \tag{3.12}$$

Similarmente, cuando aplicamos $i^2_{0,\lambda}$ a (3.10), obtenemos (3.12) con Z_2 en lugar de Z_1. Por lo tanto $Z_2 = Z_1$.

Ahora, por el Lema 3.26(ii), tenemos que $X = Z_1 \cap \kappa$ y $Y = Z_2 \cap \kappa$. De aquí que $X = Y$.

Finalmente, dado que $i^2_{0,\lambda}(Y) \in F$, se sigue $i^2_{0,\lambda}(Y) \in i^2_{0,\lambda}(D_2)$ y de aquí que $Y \in D_2$. Por lo tanto, $X \in D_2$ completando así la demostración que $D_1 = D_2$.

□

El lema clave en la prueba del teorema de Kunen (iii) es el siguiente:

Lema 3.46. *Sean κ, D tales que $L[D] \models D$ es una medida normal sobre κ y sea γ un ordinal tal que $\kappa < \gamma < i_{0,1}(\kappa)$, donde $i_{0,1}$ es el encaje de $L[D]$*

en $Ult_D(L[D])$. Entonces no existe $U \subset P(\gamma)$ tal que $L[U] \models U$ es una media normal sobre γ.

Demostración. Supongamos que, por el contrario, existe tal U. Sea j el encaje canónico de $L[U]$ en $\text{Ult}_U(L[U])$. Sea $\lambda = |\gamma|^{++}$, y sea F sea el filtro no acotado cerrado en λ. Sea $G = F \cap L[F]$.

Dado que $L[U] \models GCH$, tenemos $j(\lambda) = \lambda$, véase la Observación 3.42. En $L[U]$, G es la λ-ésima iteración de U, y en $L[j(U)]$, G es la $j(\lambda)$-ésima iteración de $j(U)$; por lo tanto $j(G) = G$.

Sea $f : \kappa \to \kappa$ una función en $L[D]$ tal que f representa γ en $\text{Ult}_D(L[D])$. Como D es normal, la diagonal $d(\alpha) = \alpha$ representa κ, y así tenemos que $(i_{0,1}(f))(\kappa) = \gamma$. Sea $i_{0,\lambda}$ el encaje de $L[D]$ en $\text{Ult}_D^{(\lambda)}(L[D]) = L[G]$. Es claro que $(i_{0,\lambda}(f))(\kappa) = \lambda$.

Ahora sea A un conjunto de ordinales tales que $|A| = \kappa^+$, que todos $\xi \in A$ son mayores que λ, y que $i_{0,\lambda}(\xi) = \xi$ y $j(\xi) = \xi$ para todos $\xi \in A$. Sea θ un cardinal mayor que todos $\xi \in A$, tal que $i_{0,\lambda}(\theta) = \theta$ y $j(\theta) = \theta$.

Por el Lema 3.43, la función f es definible en $L_\theta[D]$ a partir de $A \cup \kappa \cup \{D\}$; así $i_{0,\lambda}(f)$ es definible en $L_\theta[G]$ a partir de $A \cup \kappa \cup \{D\}$. Por lo tanto, γ se puede definir en $L_\theta[G]$ a partir de $A \cup \kappa \cup \{D\} \cup \{\kappa\}$, por lo que existe un término de Skolem t tal que

$$L_\theta[G] \models \gamma = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \xi_1, \cdots \xi_m, G, \kappa]. \tag{3.13}$$

para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$ y $\xi_1, ..., \xi_m \in A$.

Ahora aplicamos el encaje elemental j a (3.13); y dado que $j(\theta) = \theta$, $j(G) = G$, $j(\xi) = \xi$ para $\xi \in A$, y $j(\alpha) = \alpha$ para todos los $\alpha < \gamma$ (de ahí $j(\kappa) = \kappa$), tenemos que

$$L_\theta[G] \models j(\gamma) = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \xi_1, \cdots \xi_m, G, \kappa].$$

lo cual es una contradicción porque $j(\gamma) > \gamma$.

□

Por último demostraremos el último inciso del teorema de Kunen:

PRUEBA DEL TEOREMA 3.40(iii). Sea $\kappa_1 < \kappa_2$ y sean D_1, D_2 tal que $L[D_i] \models D$ es una medida normal sobre κ_1 $(i = 1, 2)$. Sea $i_{0,\alpha}$ denota el encaje de $L[D_1]$ en $\text{Ult}_{D_1}^{(\alpha)}(L[D_1])$ y sea α el único α tal que $i_{0,\alpha}(\kappa_1) \leq \kappa_2 < i_{0,\alpha+1}(\kappa_1)$. Por el lema 3.46 (si $\kappa = i_{0,\alpha}(\kappa_1)$, $D = i_{0,\alpha}(D_1)$ y $\gamma = \kappa_2$), es necesario que $\kappa_2 = i_{0,\alpha}(\kappa_1)$. Ahora la proposición se sigue de la unicidad de $i_{0,\alpha}(D_1)$.

Hemos demostrado que el modelo $V = L[D]$ (donde D es una medida normal en κ) es único, tiene solo un cardinal medible y solo una medida normal en κ, y satisface la Hipótesis del Continuo Generalizada.

Bibliografía

[1] Cartan, H., *Théories des filters*, Compt. Rend. 250 (1937), 595-598

[2] Cartan, H., *Filters e ultrafilters*, Compt. Rend. 250 (1937), 777-779.

[3] Chang, C. y Keisler, H. J., *Model theory.* Third edition. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1990).

[4] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, Germany, (2006).

[5] Kanamori, A., *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings.*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[6] Kunen, K. *Set Theory, an Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland, Amsterdam, (1983).

[7] Mitchell, W. J., *Beginning inner model theory.* Handbook of Set Theory, 3:1449-1495, (2010).

[8] Riesz, F., *Stetigkeitsberg und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Intern. dei Matem. Vol. II, Roma, (1908), 18-24.

[9] Ulam, S., *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 16: 140-150,(1930).

[10] Vitali, G., *Sul problema della misura del gruppi di punti di una retta*, Bologna, (1905).