



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

*FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS*

T E S I S

*Valores Extremos usando L-Moments
Aplicado al Análisis de Ozono en Puebla.*

que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

presenta:

JUAN ANTONIO CRUZ JUÁREZ

Directores de tesis:

DRA. HORTENSIA REYES CERVANTES

DR. HUMBERTO VAQUERA HUERTA

PUEBLA, PUE.

FEBRERO 2013

Dedico esta tesis con todo mi cariño a:

Toda mi familia y amigos.

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios por darme la oportunidad de llegar a este momento tan importante de mi vida, por darme la dicha de tener una familia maravillosa y por brindarme buenos amigos y profesores.

Le agradezco a mis padres, Antonio Cruz y María Juárez, porque siempre me han apoyado en todas mis decisiones, han estado conmigo en los momentos más felices y tristes de mi vida, día a día me han llenado de su amor, alegría, felicidad y por que sin su apoyo esto no sería posible.

Le agradezco a mis hermanos porque siempre han estado conmigo, por su confianza, por su cariño y su alegría, que han sido parte importante de mi vida.

Le agradezco a la Dra. Hortensia Reyes Cervantes por aceptar dirigir esta tesis, por el tiempo que le dedico, por sus observaciones, pero muy especialmente por su amistad y sus consejos.

Le agradezco a mis amigos Ruby, Alicia, Gelacio, Mike, Casas, Ana Luisa, Loenardo, Emmanuel, Claudia,..., que siempre me apo-

II

yaron y ayudaron a seguir adelante, que me brindaron su amistad, cariño y compañía.

Le agradezco al Dr. Apolonio Juárez Núñez que desde el momento en que ingrese a colaborar en su equipo de trabajo he aprendido nuevas cosas y trabajar en un equipo en el cual no solo existe una sola carrera.

Le agradezco Erika, Deisy, Araceli, Angeles, Raúl, Diego y Andrés, que son los que me han apoyado a trabajar en un equipo multidisciplinario además de su convivencia en diferentes eventos científicos y académicos.

Se agradece a la VIEP-BUAP con número del Proyecto RECH-EXC12-1, por haber tenido la oportunidad de colaborar y apoyarme económicamente para la elaboración de esta tesis.

Le agradezco al Dr. Hugo, al Dr. Tajonar y al Dr. Apolonio, por aceptar revisar este trabajo de Tesis y de esta forma mejorarlo con sus consejos y correcciones.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.2. Contenido	3
2. Conceptos básicos de estadística	5
2.1. Función de Distribución	7
2.2. Tipos y Propiedades de Variables Aleatorias	10
2.3. Convergencia en Distribución y Probabilidad	11
2.4. Cuantiles	14
2.4.1. Función Cuantil	14
2.4.2. Periodo de Retorno	15
3. Distribución de Valores Extremos	16
3.1. Introducción	16
3.2. Distribución de Valores Extremos	19

3.3. Distribución de Valores Extremos	
Generalizada	21
3.3.1. Distribución Max-Estable	24
3.3.2. Función Cuantil de la Distribución VEG . .	26
3.3.3. Media y Varianza de la Distribución VEG .	27
3.3.4. Estimadores de Máxima Verosimilitud(EVM)	28
3.3.5. Estimadores de Máxima Verosimilitud para la Distribución VEG	28
3.3.6. Estimadores de Momentos	29
4. Estimadores de L-Moments	34
4.1. Introducción	34
4.2. Estimadores	35
4.3. Momentos de una Distribución	37
4.4. Distribuciones de Probabilidad de los L-Moments .	42
4.5. L-Moments y Estadísticos de Orden	45
4.6. Propiedades de los L-Moments	48
4.7. Estimadores de L-Moments y la Distribución de VEG	51
4.8. Diagramas de Radio de L-Moments	53
4.8.1. Construcción de los Diagramas de Radio de los L-Moments	54

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
4.8.2. Puebas de Hipótesis	55
5. Contaminación por Ozono (O_3)	57
5.1. Introducción	57
5.2. Contaminación Atmosférica	59
5.3. Contaminación por Ozono	62
5.4. Ozono y otros Contaminantes en Puebla	63
5.4.1. Extensión Geográfica del Estado de Puebla	63
5.4.2. Calidad del Aire en Puebla	64
5.5. Tratamiento de la Información	67
5.5.1. Matrices de Correlación	74
5.6. L-Moments y el Ozono en Puebla	77
5.6.1. Diagramas de Radio para los L-Moments .	80
5.7. Coeficientes de Gini	82
6. Conclusiones	83
A. Teorema del Límite Central	91
B. L-Moments y Otras Distribuciones	92
B.0.1. Distribución Logística Generalizada	92
B.0.2. Distribución Normal Generalizada	94
B.0.3. Distribución Pareto Generalizada	95

B.0.4. Distribución Pearson tipo III	97
C. Estimadores de Máxima Verosimilitud para la Dis- tribución VEG	100

Índice de cuadros

4.1. Valores de los Coeficientes del Polinomio de Aproximación por Hosking y Wallis (1997) del Estimador L-kurtosis como Función de L-asimetría	55
5.1. Contaminates Atmosféricos. Fuente: Proaire 2012-2020	61
5.2. Variables Ambientales.	61
5.3. Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Ninfas	69
5.4. Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Sérдан	70
5.5. Resumen estadístico de los Contaminantes de la Estación Tecnológico	71
5.6. Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Agua Santa	72
5.7. Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Tecnológico	75

5.8. Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Agua Santa	75
5.9. Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Ninfas	75
5.10. Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Serdán	76
5.11. Descripción del O_3 en las Cuatro Estaciones de la REMA	78
5.12. L-Moments del O_3 en las Cuatro Estaciones de la REMA.	78
5.13. Parámetros de la Distribución VEG por el Método de L-Moments para los datos de O_3 en las Cuatro Estaciones de Monitoreo.	79
5.14. Coeficientes de Gini para las Cuatro Estaciones de Monitoreo.	82
C.1. Parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud para la estación Agua Santa.	101

Índice de figuras

3.1. Familias de la Distribución de Valores Extremos. . .	20
4.1. Medidas de forma: Asimetría.	39
4.2. Medidas de forma: Curtosis.	40
5.1. Estaciones de Monitoreo Atmosférico de Puebla, 1.- Tecnológico, 2.- Serdán, 3.-Ninfas y 4.- Agua Santa	66
5.2. Dispersión de O_3 en las Estaciones Agua Santa, Tec- nológico, Serdán y Ninfas	73
5.3. Comportamiento de la Temperatura en las Cuatro Estaciones de la REMA.	74
5.4. Gráficos de Cajas de Bigotes para los Contaminates O_3 , NO_2 , CO y PM10	77
5.5. Gráfico Cuantil-Cuatil de O_3 para las Estaciones Agua Santa, Ninfas, Tecnológico y Serdán.	80

5.6. Diagrama de Radio de O_3 en las Estaciones Agua Santa, Ninfas, Serdán y Ninfas	81
C.1. Prueba gráfica para la estación Agua Santa por el método de máxima verosimilitud.	101

Capítulo 1

Introducción

Dentro de la estadística inferencial destacan áreas como la estimación de parámetros, estimación de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis.

Los estimadores son una parte medular en la construcción de un modelo que se acople a la descripción de nuestros datos, en este trabajo haremos referencia a los estimadores de L-momentos que tienen la característica de ser más robustos que cualquier otro tipo de estadísticos en la distribución que se supondrá como válida (Distribución de Valores Extremos Generalizada). El problema real que se manejará es de tipo físico-ambiental, como lo es la contaminación por ozono en la ciudad de Puebla.

El análisis de datos en la vida cotidiana es una tarea difícil, porque hay grandes cantidades de información y los fenómenos

ambientales son inestables debido al calentamiento global, actualmente existen diversas técnicas variadas que ayudan a los investigadores para interpretar o predecir los fenómenos que estamos estudiando.

Los fenómenos ambientales son de gran estudio actualmente dado que proveen al investigador de herramientas para toma de decisiones ante los gobiernos y la sociedad. La Distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG), será la que se manejará debido a que es la que mejor representa la información en este tipo de problemas. Esta función es usada en diversos campos del conocimiento, como son:

- Finanzas, Riesgos.
- Problemas ambientales: Nivel del mar, Velocidad del Viento, Nivel de un Río o Presa, Concentración de Contaminantes, Lluvias, Oleaje, Etc.
- Geografía.

Los L-Moments son una herramienta en el análisis de los datos, dado que son menos sensibles a tamaños de muestras pequeñas, a diferencia de otras técnicas estadísticas comúnmente conocidas, como los estimadores ponderados o de máxima verosimilitud o de momentos. El método que se presenta cuenta con varios análisis, como el diagrama de radio de L-Moments, en donde se maneja el concepto de los estadísticos de orden y de momentos de orden

mayor que tres; como la curtosis y asimetría.

El principal artículo usado en el presente trabajo es: "L-Moments: Analysis and Estimation of Distribution using Linear Combinations of Order Statistics ", este método es descrito por J. R. M. Hosking.

1.1. Objetivos

Objetivo general:

- Analizar estadísticamente los estimadores L-Moments y aplicarlo a un conjunto de datos reales.

Objetivos específicos:

- Realizar el análisis correspondiente al ozono con respecto a sus covariables mediante una distribución de Valores Extremos Generalizada, mediante el uso de estimadores de L-Moments.
- Aplicación de la teoría de Momentos en un trabajo de investigación.

1.2. Contenido

El presente trabajo se divide en 6 Capítulos y 3 Apéndices , en los cuales, los primeros 3 capítulos tratan la teoría corres-

pondiente al estudio y aplicación del método de L-Moments con la distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG), los capítulos consiguientes hablan de generalidades del Estado de Puebla y conceptos sobre el caso de estudio, que en particular es el Ozono en la ciudad de Puebla; finalmente se termina con un capítulo de conclusiones de toda la interpretación de la teoría y de lo observado en la estadística descriptiva.

En el Apéndice A se presenta el teorema del Límite central, en el Apéndice B se realiza una pequeña revisión de teoría correspondiente a otras distribuciones y los estimadores de L-Moments, finalmente el Apéndice C se dan los estimadores de máxima verosimilitud para la estación Agua Santa.

Capítulo 2

Conceptos básicos de estadística

Consideremos las siguientes definiciones [18]:

Definición 2.1 (Espacio de Probabilidad). *Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) , en donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} .*

Definición 2.2 (σ -álgebra, espacio medible, evento). *Una colección \mathcal{F} de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra si cumple las siguientes condiciones:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

6CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

3. Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in F$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

A la pareja (Ω, F) se le llama espacio medible y a los elementos de F se les llama eventos o conjuntos medibles.

Definición 2.3 (Medida de probabilidad). Sea (Ω, F) un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P : F \rightarrow [0, 1]$ que cumple:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in F$.
3. Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in F$ son ajenos dos a dos, esto es, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para valores de i y j distintos, entonces
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Cuando estamos con los conceptos básicos de la probabilidad, un término fundamental es el concepto de variable aleatoria (v.a.) y del conjunto de Borel.

Definición 2.4 (Conjunto de Borel). Considere la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) de \mathbb{R} , en donde $a \leq b$. A la mínima σ -álgebra generada por esta colección se le llama σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} ($B(\mathbb{R})$), y se denota por: $B(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}$.

Definición 2.5 (Variable Aleatoria). *Una Variable aleatoria real es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B , se cumple que el conjunto $X^{-1}B$ es un elemento de F .*

A los elementos de $B(\mathbb{R})$ se les llama conjuntos de Borel, Borelianos o conjuntos Borel medibles.

2.1. Función de Distribución

La función de distribución es de suma importancia dado que además de relacionar variables aleatorias, contiene la información de todas ellas y la correspondiente medida de probabilidad.

Definición 2.6 (Función de Distribución). *La función de distribución de una variable aleatoria X es la función $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida como sigue:*

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (2.1)$$

Veamos ahora algunas propiedades básicas de esta función. El límite por la derecha de la función F en el punto x , se denota por $F(x+)$, de manera análoga el límite por la izquierda de la función F en el punto x , se denota por $F(x-)$.

Proposición 2.1 *Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria. Entonces*

8CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
3. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
4. $F(x)$ es continua por la derecha, es decir, $F(x+) = F(x)$.

Demostración 2.1 1. Sea x_1, x_2, \dots una sucesión cualquiera de números reales creciente a infinito, y sean los eventos $A_n = (X \leq x_n)$. Entonces $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de eventos creciente cuyo límite es Ω . Por la propiedad de continuidad,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1. \quad (2.2)$$

Dado que \mathbb{R} es un espacio métrico, lo anterior implica que $F(x)$ converge a uno cuando x tiende a infinito.

2. Sea ahora $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión cualquiera de números reales decreciente a menos infinito, y sean los eventos $A_n = (X \leq x_n)$. Entonces $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de eventos decrecientes al conjunto vacío. Nuevamente por la propiedad de continuidad,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\emptyset) = 0. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, $F(x)$ converge a cero cuando x tiende a menos infinito.

3. Para $x_1 \leq x_2$,

$$\begin{aligned}
 F(x_1) &\leq F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) \\
 &= P[(X \leq x_1) \cup (x_1 < X \leq x_2)] \\
 &= P(X \leq x_2) \\
 &= F(x_2).
 \end{aligned}$$

4. Sea x_1, x_2, \dots una sucesión cualquiera de números reales no negativos y decreciente a cero. Entonces,

$$F(x + x_n) = F(x) + P(x < X \leq x + x_n), \quad (2.4)$$

en donde $A_n = (x < X \leq x + x_n)$ es una sucesión de eventos decreciente al conjunto vacío.

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x + x_n) = F(x),$$

es decir, $F(x+) = F(x)$.

Otro concepto que se utiliza en el análisis de datos es la covarianza sobre dos variables, que se define por:

$$Cov(X, Y) = E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}]. \quad (2.5)$$

Y la correlación entre X y Y se define por:

$$corr(X, Y) = cov(X, Y) / \{var(X)var(Y)\}^{\frac{1}{2}}.$$

La dimensión de la matriz de correlación es análoga a la matriz de covarianza, toma valores entre -1 y $+1$.

2.2. Tipos y Propiedades de Variables Aleatorias

En general existen tres tipos de variables aleatorias que dependen de las características a asignar: discretas, continuas, mezcla de las dos anteriores. Veamos su definición, para mayor información ver [18]:

Definición 2.7 (variable aleatoria discreta). *La variable aleatoria se llama discreta si su correspondiente función de distribución $F(x)$ es una función constante por pedazos. Sea x_1, x_2, \dots los puntos de discontinuidad de $F(x)$. En cada uno de estos puntos el tamaño de la discontinuidad es $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-) > 0$. A la función $f(x)$ que indica estos incrementos se le llama función de probabilidad de X , y se define como:*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{si } x = x_1, x_2, \dots, \\ 0 & \text{, en otro caso .} \end{cases} \quad (2.6)$$

La función de distribución se reconstruye de la forma siguiente,

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u).$$

Definición 2.8 (variable aleatoria continua). *La variable aleatoria X se llama continua si su correspondiente función de distribución es una función continua.*

Definición 2.9 (Variable aleatoria mixta). *Una variable aleatoria que no es discreta ni continua se llama variable aleatoria mixta.*

2.3. Convergencia en Distribución y Probabilidad

Definición 2.10 (Convergencia en Distribución). *Sea $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria. Sean F_{X_n} y F_X las respectivas funciones de distribución de acumulación de X_n y X . Sea $C(F_X)$ el conjunto de todos los puntos donde F_X es continua. Decimos que X_n converge en distribución a X si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \text{ para todo } x \in C(F_X), \quad (2.7)$$

esta convergencia se denota por $X_n \xrightarrow{D} X$, [9].

Definición 2.11 (Convergencia en Probabilidad). *Sea $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio métrico. Tenemos que X_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ converge en probabilidad a x si para todo $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| \geq \epsilon] = 0, \quad (2.8)$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| < \epsilon] = 1, \quad (2.9)$$

12CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

y suele denotarse como $X_n \xrightarrow{P} X$.

Proposición 2.2 *Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.*

Demostración 2.2 *Supongamos que $X_n \xrightarrow{P} X$, y sea x un punto de continuidad de $F_{X_n}(x)$. Para cualquier $\epsilon > 0$,*

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq x, |X_n - X| \leq \epsilon) + P(X_n \leq x, |X_n - X| > \epsilon) \\ &\leq P(X \leq x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon). \end{aligned}$$

Por hipótesis el segundo término de la suma del lado derecho tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \epsilon).$$

Por la continuidad lateral,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n} \leq F_X(x).$$

Ahora se demuestra la desigualdad inversa. Para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x - \epsilon) &= P(X \leq x - \epsilon) \\ &= P(X \leq x - \epsilon, |X_n - X| \leq \epsilon) + P(X \leq x - \epsilon, |X_n - X| > \epsilon) \\ &\leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| > \epsilon). \end{aligned}$$

2.3. CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN Y PROBABILIDAD 13

Nuevamente el segundo sumando tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces,

$$F_X(x - \epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x).$$

Por la continuidad de x ,

$$F_X(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x).$$

En resumen,

$$F_X(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x).$$

El recíproco de la proposición anterior no siempre es válido.

A continuación se presentan algunos resultados de convergencia de v.a.'s

Para una sucesión de v.a. ξ_n , $n \geq 1$ y constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, se demuestra que:

$$\frac{\xi - b_n}{a_n} \approx Y, \quad (2.10)$$

donde Y es una v.a. no-degenerada.

Usando esto tenemos que

$$P\left(\frac{\xi - b_n}{a_n} \leq x\right) \approx P(Y \leq x) = G(x), \quad (2.11)$$

sustituyendo, $y = a_n x + b_n$,

$$P(\xi \leq y) \approx G\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right), \quad (2.12)$$

esto permite aproximar la distribución de ξ_n por una familia de distribuciones con parámetros de localización y escala.

14CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

Definición 2.12 *Dos distribuciones F y G son del mismo tipo o pertenecen a la misma familia, si para algunas constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, se cumple que:*

$$G(x) = F(ax + b), x \in \mathbb{R}.$$

En términos de v.a's. tenemos; si $X \sim F$ y $Y \sim G$, entonces

$$Y \xrightarrow{D} \frac{x - b}{a}.$$

2.4. Cuantiles

Definición 2.13 (Cuantil). *Sea p un número real cualquiera en el intervalo $(0, 1)$. Se llama cuantil de orden p de una variable aleatoria X o de su distribución, a cualquier número x_p que cumpla las condiciones,*

$$P(X \leq x_p) \geq p,$$

y

$$P(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$

2.4.1. Función Cuantil

Definición 2.14 *Supongamos que X_1, X_2, X_3, \dots son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de distribución F continua. La función cuantil $Q(u)$ (también $x(F)$), $0 \leq u \leq 1$, está definida por:*

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}. \quad (2.13)$$

2.4.2. Periodo de Retorno

Definición 2.15 *El Periodo de Retorno de cualquier evento extremo T (lluvias torrenciales, temperaturas extremas, huracanes, etc.), se define como el lapso o número de años que en promedio, se cree que será igualado o excedido, es decir, es la frecuencia con la que se presenta tal evento [4].*

Para un evento extremo máximo, el límite superior de la distribución de frecuencias, Q_T , viene dado por:

$$Q_T = x(1 - 1/T)$$

o

$$F(Q_T) = 1 - 1/T.$$

Mientras que para un extremo mínimo, el límite inferior de la distribución de frecuencias, viene dado por:

$$Q_T = x(1/T)$$

y

$$F(Q_T) = 1 - 1/T.$$

Capítulo 3

Distribución de Valores Extremos

3.1. Introducción

El análisis del comportamiento de una distribución de probabilidad o el manejo de un conjunto de datos observados no se puede realizar en forma completa sólo con el uso de estadística estándar, es por ello que acudimos al uso de técnicas como la inferencia estadística, en la cual proponemos un modelo y verificamos las suposiciones que se deben cumplir, para que tengan validez los pronósticos o explicaciones encontradas, un procedimiento útil y sencillo es hacer uso de los estimadores de momentos. El manejo de los dos primeros momentos son conocidos e implementados por los investigadores, como la media y a la varianza, mientras que

los siguientes dos momentos, la asimetría y la curtosis, no son tan usados o conocidos por todos.

Desde el punto de vista estadístico, si X_1, X_2, \dots, X_n es una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de densidad común F y denotamos:

$$M_n = \max\{X_i; i = 1, \dots, n\},$$

los extremos de las observaciones de las sucesiones, son definidos como el máximo y el mínimo de las n variables aleatorias. En este contexto, sólo se hará referencia a los máximos (el otro caso es, $-\min = \max$).

En las aplicaciones, normalmente las X_i representan valores de un proceso medido en un tiempo regular, así que M_n representa el máximo de las observaciones del proceso en n unidades de tiempo.

Por ejemplo, si n es el número de observaciones tomadas durante un año, entonces M_n corresponde al máximo anual o, para nuestros fines, si n es el número de observaciones tomadas durante un día, M_n representa el máximo diario. La distribución del máximo M_n puede calcularse:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq z) &= P(x_1 \leq z, \dots, x_n \leq z) \\ &= P(x_1 \leq z) \cdot P(x_2 \leq z) \cdot \dots \cdot P(x_n \leq z) \\ &= (P(x_i \leq z))^n \\ &= F^n(z). \end{aligned}$$

18CAPÍTULO 3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS

Si conocemos a F , conocemos la distribución del máximo pero las expresiones analíticas para F^n pueden ser complicadas y frecuentemente F es desconocida.

Aún en este caso deseamos tener una idea de la distribución de M_n , es decir, buscamos una distribución límite que sirva de aproximación a F^n , así como la distribución normal sirve de aproximación a la distribución de una suma de v.a.i.i.d.

La manera de proceder es, observar el comportamiento de F^n cuando $n \rightarrow \infty$. Pero esto en sí no es suficiente, puesto que para cualquier $z < z_+$, donde z_+ es el punto extremo superior de F , es decir, z_+ es el valor más pequeño de z tal que $F(z) = 1$, se tiene que $F^n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que la distribución de M_n degenera a un punto de z_+ .

Para evitar este problema, se normaliza la variable M_n como [4]:

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n},$$

usando secuencias de constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que,

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(M_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x).$$

La elección apropiada de $\{a_n\}$, representa el parámetro de localización, es una medida de tendencia central de la distribución de los valores extremos que no es la media de la distribución, de la

misma manera $\{b_n\}$ representa el parámetro de escala que es una medida de dispersión pero no es la desviación estandar, de M_n^* , evitando así las complicaciones que surgen con la variable original M_n . Por lo tanto, se buscan las distribuciones del límite para M_n^* cuando n aumenta, con las elecciones apropiadas de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, en lugar de M_n .

3.2. Distribución de Valores Extremos

El rango completo de posibles distribuciones límites para M_n^* está dado por el siguiente teorema [4].

Teorema 3.1 *Supongamos que existen $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ tales que*

$$P(M_n - b_n/a_n \leq x) = F^n(a_n + b_n) \rightarrow G(x), \quad (3.1)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y donde G es una función no degenerada, entonces G pertenece a alguna de las siguientes tres familias de distribuciones:

$$I : G_0(x) = \exp(-\exp\left[-\frac{x-b}{a}\right]), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.2)$$

$$II : G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(\frac{x-b}{a})^{-\alpha}) & , si \quad x \geq 0, \\ 0 & , si \quad x < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$III : G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-(\frac{x-b}{a})^{-\alpha})) & , si \quad x \leq 0, \\ 1 & , si \quad x > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

20CAPÍTULO 3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS

Por el contrario, cada una de estas familias de distribución pueden aparecer como límite de la distribución de $\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z$ y en particular, esto sucede cuando G es la función de distribución de X .

Observación 3.1 *Este teorema fue inicialmente propuesto por Fisher-Tippett, 1982 y demostrado rigurosamente por Gnedenko en 1943.*

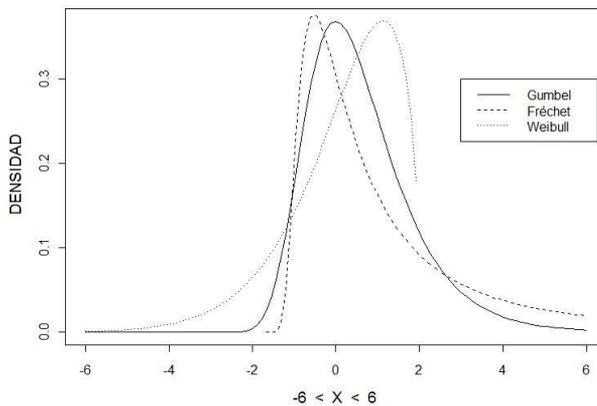


Figura 3.1: Familias de la Distribución de Valores Extremos.

El teorema anterior se le conoce como el nombre de **distribuciones de valores extremos**, y las familias correspondientes son, **Gumbel, Fréchet y Weibull**. Cada familia tiene parámetros de localización y de escala (b y a , respectivamente); adicionalmente las familias Fréchet y Weibull tienen un parámetro de forma α .

Lo que nos dice este teorema es que cuando M_n puede ser normalizada a través de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que corresponde a la nueva variable estandarizada M_n^* , tal variable M_n^* tiene una distribución límite y esta pertenece a una de los tres tipos de familia de valores extremos.

3.3. Distribución de Valores Extremos Generalizada

En 1954 y 1955 Von Mises y Jenkinson respectivamente, derivaron cada uno por su lado, la distribución generalizada de valores extremos que llegó a unificar las tres distribuciones límites de valores extremos establecidos por el Teorema 3.1. De acuerdo a [4] al igual que [?] las distribuciones límite presentan comportamientos diferentes que están relacionados con las distintas formas de la cola que presenta la distribución de F en los X_j . Considerando el comportamiento de la distribución límite G en el punto final z_+ se observa lo siguiente: para la distribución Weibull, z_+ es finito, mientras que para las distribuciones Fréchet y Gumbel, $z_+ = \infty^+$. Sin embargo, la función de densidad para G decae exponencialmente para el caso de la distribución Gumbel y en forma polinomial para la distribución Fréchet.

Antes, el método inicial para aplicar esta teoría, era adoptar una de estas tres familias y luego estimar los parámetros relevantes de la distribución elegida, pero esto tiene dos debilidades, primero

se necesita una técnica adecuada para seleccionar la distribución apropiada que represente los datos; y la segunda es, una vez tomada la decisión, la inferencia asume que no existe problemas en la selección de la familia de distribución apropiada, es decir, sólo se aplica inferencia sin determinar si se cumplen o no las condiciones que se suponen en nuestro modelo.

Los tres tipos de distribución del Teorema 3.1 se pueden combinar en una sola distribución con parametrización común que se conoce como la Distribución de Valores Extremos Generalizada (VEG). La forma de esta distribución es:

$$G_{\xi}(x) = \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\}, \quad (3.5)$$

o incluyendo los parámetros de localización y escala:

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \exp\{-(1 + \xi(\frac{x - \mu}{\sigma}))^{-1/\xi}\}, \quad (3.6)$$

definida sobre el conjunto

$$\{x : 1 + \xi(\frac{x - \mu}{\sigma}) > 0\}, \quad (3.7)$$

dado.

De lo contrario, G adoptaría el valor de 0 o 1. Los parámetros satisfacen las siguientes condiciones:

- $-\infty < \mu < \infty$,
- $\sigma > 0$ y
- $-\infty < \xi < \infty$.

3.3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA 23

Para $\xi > 0$ tenemos la distribución de Fréchet con $\alpha = 1/\xi$. Para $\xi < 0$ es la distribución Weibull con $\xi = -1/\xi$, mientras que la distribución Gumbel aparece como límite cuando $\xi \rightarrow 0$.

Teorema 3.2 *Supongamos que existen una serie de constantes $\{a_n | a_n > 0\}$ y $\{b_n\}$ tal que:*

$$Pr\{M_n/a_n \leq z\} \rightarrow G(z) \quad (3.8)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ para una función de distribución no degenerada G , entonces G es miembro de la familia VEG [4].

Una dificultad que surge al aplicar este resultado, es que las constantes normalizadoras son desconocidas en la práctica; este inconveniente se puede solucionar fácilmente tomando en cuenta (3.8) como:

$$P((M_n - b_n)/a_n \leq x) \approx G(x), \quad (3.9)$$

para un n suficientemente grande. De manera equivalente

$$P(M_n) \approx G(x - b_n/a_n) = G^*, \quad (3.10)$$

donde G^* pertenece a la familia VEG, es decir, si el Teorema 3.2 establece la distribución aproximada de M^* para un miembro de la familia VEG, la distribución de M_n se puede aproximar a un miembro diferente de la misma familia.

3.3.1. Distribución Max-Estable

Definición 3.1 *Una función de distribución es max-estable si para cada $n = 2, 3, \dots$, existen constantes b_n y $a_n > 0$ tales que:*

$$F^n(a_n x + b_n) = F(x). \quad (3.11)$$

En [4] se dice que si F^n es la función de distribución de $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, donde los X_i son independientes con función de distribución F , entonces la propiedad de max-estabilidad garantiza que la distribución del máximo muestral es idéntica a la distribución de las observaciones a partir de un cambio en el parámetro de escala y de localización.

Por lo tanto, una transformación lineal hace que el máximo tenga la misma distribución de F . El teorema anterior es relacionado con el teorema de Valores extremos por medio del siguiente teorema:

Teorema 3.3 *Una distribución es max-estable si y sólo si, es una distribución de valores extremos.*

Este resultado muestra que la distribución del máximo de muestras independientes será del mismo tipo de la distribución F de la población, siempre y cuando, la población tenga una de las distribuciones de valores extremos. La caracterización anterior es usada para explicar que las distribuciones de valores extremos son una familia límite apropiada.

3.3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA 25

Supongamos que la distribución límite de $(M_n - b_n)/a_n$ es G , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = G(x),$$

por lo que, para algún entero k tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_{nk} - b_{nk}}{a_{nk}} \leq x\right) = G(x), \quad (3.12)$$

y en consecuencia para un nk grande.

Pero como M_{nk} es el máximo de k variables que tienen la misma distribución M_n , entonces

$$P\left(\frac{M_{nk} - b_{nk}}{a_{nk}} \leq x\right) = \left[P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)\right]^k, \quad (3.13)$$

en consecuencia de (3.12) y (3.13) tenemos que:

$$P(M_{nk} \leq x) \approx G\left(\frac{x - b_{nk}}{a_{nk}}\right),$$

y

$$P(M_{nk} \leq x) \approx G\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right).$$

Por lo tanto,

$$G(x) = G^k(a_k z + b_k),$$

de manera que G es max-estable y es una de las distribuciones de valores extremos.

La aplicación del Teorema 2.1, viene de asumir que n , ahora considerado fijo, es lo suficientemente grande para que la ley límite se pueda usar como una aproximación, es decir,

$$P\left(\frac{M_n - b}{a} \leq x\right) \approx G(z), \quad (3.14)$$

para alguna $a > 0$ y b . Equivalentemente tenemos:

$$P(M_n \leq x) \approx G\left(\frac{x - b}{a}\right) = G^*(x), \quad (3.15)$$

en donde G^* es del mismo tipo que G .

3.3.2. Función Cuantil de la Distribución VEG

Una caracterización apropiada para mencionar a la Distribución de Valores Extremos Generalizada, es la estimación de los cuantiles, la cual se pueden obtener invirtiendo la ecuación (3.6) [4]:

$$G_\alpha(p) = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \{-\log(1 - p)\}^\xi], & \xi \neq 0; \\ \mu - \sigma \log\{-\log(1 - p)\}, & \xi = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

donde $G(x_p) = 1 - p$, con $0 < p < 1$.

En algunas áreas de aplicación como ingeniería a, x_p se le conoce como el nivel de retorno asociado al periodo $1/p$, es decir, es el nivel x_p que se espera sea excedido en promedio cada $1/p$ años. Si en particular definimos $y_p = -\log(1 - p)$, tenemos:

$$G_\alpha(p) = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi}[(1 - y_p)^\xi], & \xi \neq 0; \\ \mu - \sigma \log y_p, & \xi = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

por lo que al graficar x_p contra $\log(y_p)$ resulta una línea recta, nos indica que $\xi = 0$. Pero si $\xi < 0$, el gráfico resultante es convexo con límite asintótico cuando $p \rightarrow 0$ en $\mu - \sigma/\xi$, y si $\xi > 0$, el gráfico será cóncavo y no tiene cota finita. A este gráfico se le conoce como *Gráfico de Nivel de Retorno* y es útil tanto en la presentación del modelo como en la validación del mismo [4].

3.3.3. Media y Varianza de la Distribución VEG

La distribución VEG tiene propiedades muy particulares que la caracterizan, la media existe si $\xi < 1$, mientras que la varianza existe si $\xi < 1/2$; es decir, el k -ésimo momento existe si $\xi < 1/k$. Así, la media y la varianza de la distribución VEG están dadas por:

$$\mu_1 = E(Z) = \mu + \frac{\sigma}{\xi}(\sigma(1 - \xi) - 1), \quad (3.18)$$

con $\xi \neq 0$, y

$$\mu_2 = E(Z - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{\xi^2}(\Gamma(1 - 2\xi) - \Gamma(1 - \xi)). \quad (3.19)$$

Para el caso en el que el límite $\xi \rightarrow 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a,

$$\mu_1 = \mu + \sigma\gamma, \quad (3.20)$$

$$\mu_2 = \frac{\sigma^2\pi^2}{6}, \quad (3.21)$$

en donde $\gamma = 0.5772$ es la constante de Euler.

3.3.4. Estimadores de Máxima Verosimilitud(EVM)

El metodo más general de estimación de parámetros desconocidos es el método de Máxima Verosimilitud.

Sean X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. con función de densidad de probabilidad $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ donde θ es un parámetro desconocido.

La función de verosimilitud, es la función de densidad conjunta de la muestra definida por:

$$L(\theta) = \prod_i^n f(x_i; \theta), \theta \in \Omega. \quad (3.22)$$

En muchos de los casos es conveniente trabajar con el logaritmo de esta función denominada función log.verosímil, así tenemos que:

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_i^n \log f(x_i; \theta). \quad (3.23)$$

3.3.5. Estimadores de Máxima Verosimilitud para la Distribución VEG

Supongamos que Z_1, Z_2, \dots, Z_m son variables aleatorias independientes que tienen la distribución VEG, la función log-verosímil para los parámetros de la función VEG cuando $\xi \neq 0$ se obtiene por definición como [4]:

$$l(\mu, \sigma, \xi) = \log L(\mu, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^m \log f(Z_i; \mu, \sigma, \xi). \quad (3.24)$$

Smith, prueba que los estimadores de máxima verosimilitud existen siempre que: $\xi > -1$ y son regulares siempre que $\xi > -0.5$, pues tiene propiedades asintóticas usuales, cuando $-1 < \xi < -0.5$, los estimadores son fácilmente encontrados aunque no cuentan con las propiedades asintóticas y finalmente, si $\xi < -1$ los estimadores de máximo verosimilitud no existen [4].

De esta forma tenemos que:

$$l(\mu, \sigma, \xi) = -m \log \sigma - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^m \log \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi},$$

dado que $1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) > 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Cuando $\xi = 0$ se usa el límite Gumbel de la distribución VEG. Esto lleva al logaritmo de la verosimilitud

$$l(\mu, \sigma) = -m \log \sigma - \sum_i^m \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_i^m \exp \left\{ \frac{-(z_i - \mu)}{\sigma} \right\}, \quad (3.25)$$

la maximización de las ecuaciones (3.22) y (3.24) con respecto al vector paramétrico (μ, σ, ξ) nos lleva a obtener los estimadores de máximo verosimilitud con respecto a la familia VEG. La solución no es analítica, aunque para algunos conjuntos de datos la maximización es directa.

3.3.6. Estimadores de Momentos

En la presente sección obtendremos los estimadores de momentos para los parámetros de localización y de escala para las

30CAPÍTULO 3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS

distribuciones Gumbel, Fréchet y Weibull, para el caso de las dos últimas distribuciones supondremos que el parámetro de forma es conocido.

1. La función de distribución Gumbel tiene dos parámetros, donde:

$$E(X) = \mu + \sigma\gamma,$$

y

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2\pi^2}{6} + (\mu + \sigma\gamma)^2,$$

con $\gamma = 0.57722$.

Igualando los momentos muestrales con los poblacionales, se tiene

$$\bar{X} = \mu + \sigma\gamma$$

y

$$\frac{\sum_i X_i^2}{n} = \frac{\sigma^2\pi^2}{6} + (\mu + \sigma\gamma)^2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$\tilde{\mu}_{m0} = \bar{X} - \sqrt{\frac{\sum_i 6(X_i^2 - n\bar{X}^2)}{n\pi^2}}\gamma$$

y

$$\tilde{\sigma}_{m0} = \sqrt{\frac{\sum_i 6(X_i^2 - n\bar{X}^2)}{n\pi^2}}\gamma.$$

2. La función de la distribución Weibull tiene dos parámetros,

$$E(X) = -\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

3.3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA 31

y

$$V(X) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

si $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$.

Por lo cual, el segundo momento poblacional, es $E(X^2) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$.

Igualando los momentos muestrales con los poblacionales, se tiene que:

$$\bar{X} = -\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

y

$$\frac{\sum_i X_i^2}{n} = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right).$$

Sea Z una variable aleatoria que se distribuye como VEG en la forma (3.4) con $\alpha < 0$, y que cumple la siguiente relación entre variables aleatorias:

$$-X = 1 + \frac{\xi}{\sigma}(Z - \mu) \text{ y } \xi = \frac{1}{\alpha},$$

equivalentemente,

$$Z = (-X - 1)\frac{\sigma}{\xi} + \mu \text{ y } \xi = \frac{1}{\alpha}.$$

De donde

$$E(Z) = \frac{\sigma}{\xi} \left(-1 + \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right) + \mu$$

y

$$V(Z) = \frac{\sigma^2}{\xi^2} \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

32CAPÍTULO 3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS

Por lo cual, finalmente se tiene

$$E(Z^2) = \frac{\sigma^2}{\xi^2} \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right] + \left[\frac{\sigma}{\xi} \left(-1 + \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \mu \right) \right]^2.$$

Para hallar los estimadores por el método de momentos se igualan los momentos muestrales y los poblacionales.

$$\bar{X} = \frac{\sigma}{\xi} \left(-1 + \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right) + \mu,$$

$$\frac{\sum_i X_i^2}{n} = \frac{\sigma^2}{\xi^2} \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right] + \left[-1 + \frac{\sigma}{\xi} \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \mu \right) \right]^2,$$

donde la solución es:

$$\tilde{\sigma}_{m0} = \sqrt[n]{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{|\xi|}{\sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}}$$

y

$$\tilde{\mu}_{m0} = \bar{X} - \sqrt[n]{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{(-1 + \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right))}{\sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}}.$$

Para la Distribución Weibull, con $\xi > 0$, se obtienen los estimadores de momentos:

$$\tilde{\sigma}_{m0} = \sqrt[n]{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{(-\xi)}{\sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}}$$

3.3. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA 33

y

$$\tilde{\mu}_{m0} = \bar{X} - \sqrt{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{(-1 + \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}))}{\sqrt{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha})}}.$$

3. Para el caso de la función Fréchet, con $\xi > 0$ y $\alpha > 0$, se tiene que:

$$E(X) = \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}),$$

con $\alpha > 1$, y

$$V(X) = \Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha}),$$

si $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$.

Realizando el mismo procedimiento que el punto anterior, se llegan a obtener los mismos estimadores de momentos para la variable Z,

$$\tilde{\sigma}_{m0} = \sqrt[n]{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{|\xi|}{\sqrt{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha})}}$$

y

$$\tilde{\mu}_{m0} = \bar{X} - \sqrt{\frac{\sum_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \frac{(-1 + \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}))}{\sqrt{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha})}}.$$

Capítulo 4

Estimadores de L-Moments

4.1. Introducción

Los estimadores cumplen una función muy importante en cuanto al diagnóstico de un modelo, para ello debemos tener en cuenta que cumplan con las hipótesis que nos plantea el modelo, elegir el que mejor se acople a la descripción de nuestros datos.

Como se ha presentado la inferencia estadística se ocupa para estimar los valores de parámetros desconocidos o funciones de éstos. Es por ello que debemos mencionar el concepto de estimación de parámetros mediante las propiedades deseables de los estimadores.

La estimación de un parámetro involucra técnicas apropiadas para implementar el proceso de estimación. Existen dos formas para llevar a cabo lo anterior: *la estimación puntual y la estimación por intervalos*. En la primera se busca un estimador que, con base en los datos muestrales, dé origen a una estimación univaluada del valor del parámetro, mientras que para la segunda se determina un intervalo en el que, en forma probable, se encuentre el valor del parámetro, dicho intervalo recibe el nombre de *intervalo de confianza estimado* [2].

En este capítulo haremos énfasis en un tipo de estimadores que tienen gran uso en el estudio de fenómenos extremos (finanzas, ambientales, industria, etc.) en nuestro caso el estudio del Ozono, por medio de los estimadores de L-moments.

4.2. Estimadores

Para el estudio del comportamiento de las funciones de distribución, se les asigna un conjunto de parámetros $\theta_0, \dots, \theta_p$. Estos los podemos reescribir en términos de la función cuantil con p parámetros desconocidos como $x(u; \theta_1, \dots, \theta_p)$. En muchas aplicaciones los parámetros desconocidos incluyen a los parámetros de localización y escala.

Definición 4.1 *Un parámetro ζ se dice que es un parámetro de*

localización si la función cuantil de la distribución satisface:

$$x(u; \zeta, \theta_1, \dots, \theta_p) = \zeta + x(u; 0, \theta_2, \dots, \theta_p). \quad (4.1)$$

Mientras que el parámetro de escala, α , de una distribución es aquel que satisface [10]:

$$x(u; \alpha, \theta_2, \dots, \theta_p) = \alpha \times x(u; 1, \theta_2, \dots, \theta_p). \quad (4.2)$$

Esta definición se puede unificar en términos del parámetro de localización:

$$x(u; \zeta, \alpha, \theta_3, \dots, \theta_p) = \zeta + \alpha \times x(u; 0, 1, \theta_3, \dots, \theta_p). \quad (4.3)$$

Los parámetros desconocidos son estimados a través de datos observados. Dado un conjunto de datos, una función $\hat{\theta}$ de los datos puede ser seleccionado como un estimador de θ . La desviación que existe entre $\hat{\theta}$ y θ se puede observar mediante el *sesgo*- que se define como la diferencia que se da entre el valor estimado y el valor real; y *la variabilidad*- que se define como la desviación aleatoria del estimador frente al valor real que ocurre, para cada estimador que no es sesgado.

Usualmente hay medidas comunes que se toman en un estimador $\hat{\theta}$, que se da en el sesgo y en el error cuadrado medio (ECM), que se definen a continuación [13].

$$\text{sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta), \quad (4.4)$$

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2. \quad (4.5)$$

Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado si el *sesgo*($\hat{\theta}$) = 0, es decir, que $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Diferentes estimadores insesgados de un mismo parámetro pueden ser comparados en términos de su varianza y usando el concepto de radio [13].

Definición 4.2 *El radio $\frac{\text{var}(\hat{\theta}^{(1)})}{\text{var}(\hat{\theta}^{(2)})}$ es la eficiencia del estimador $\hat{\theta}^{(2)}$ relativa del estimador $\hat{\theta}^{(1)}$.*

4.3. Momentos de una Distribución

La forma de la distribución de probabilidad tradicionalmente es descrita por los momentos de la distribución. A pesar de que los momentos de X pueden definirse alrededor de cualquier punto de referencia, generalmente se definen alrededor de cero o del valor esperado de X [2].

Definición 4.3 *Sea X una v. a. discreta (continua) y sea $f(x)$ la función de probabilidad de X , definimos el r -ésimo momento de la variable aleatoria X alrededor del cero como:*

$$E[X^r] = \sum_x x^r f(x), \text{ en el caso de v.a. discreta.} \quad (4.6)$$

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \text{ en el caso de v.a. continua,} \quad (4.7)$$

esto es válido cuando, $|x| < \infty$.

El primer momento alrededor del cero es la *media*, que se define como: $\mu = E[X]$.

Mientras que el r-ésimo momento central de X se define por:

$$E[(X - \mu)^r] = \sum_x (x - \mu)^r f(x), \quad (4.8)$$

esto es para el caso de v.a.'s discretas, mientras que para v.a.'s continuas se define como:

$$E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx. \quad (4.9)$$

El primer momento central es cero:

$$E[(X - \mu)] = E[X] - \mu = \mu - \mu = 0. \quad (4.10)$$

El segundo momento central es la varianza:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2,$$

pero $E[X] = \mu$, entonces

$$\sigma^2 = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2, \quad (4.11)$$

de donde, σ se le conoce como la desviación estándar.

El tercer momento central (asimetría) es cero si la distribución es simétrica respecto a la media (μ), en otro caso se define como:

$$\mu_3 = E(X - \mu)^3. \quad (4.12)$$

Se puede observar en la figura 4.1, si $\mu_3 > 0$, se dice que la distribución es asimétrica positivamente, por otro lado, si $\mu_3 < 0$ la distribución es asimétrica negativamente y en el caso en el que $\mu_3 = 0$, se dice que la distribución es simétrica.

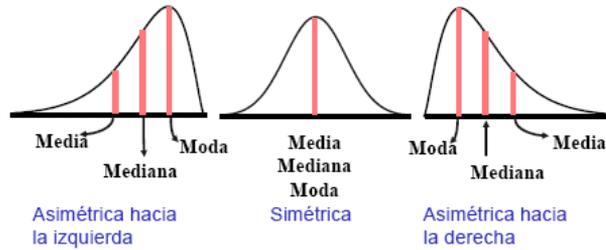


Figura 4.1: Medidas de forma: Asimetría.

Una medida apropiada para evitar que la asimetría pueda dar resultados erróneos, dado que dependen de las unidades con la que es medida la variable aleatoria X , es el tercer momento estandarizado, que es dado por:

$$\mu_3^* = \frac{\mu^3}{\mu^{3/2}}.$$

A esta medida estandarizada se lo conoce con el nombre de coeficiente de asimetría [2].

El cuarto momento central:

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4,$$

es una medida de que tan puntiaguda es la distribución de probabilidad y recibe el nombre de curtosis.

Se puede observar que en la figura 4.2, si $\mu_4 > 3$, la distribución de probabilidad presenta un pico relativamente alto y recibe el nombre de leptocúrtica; si $\mu_4 < 3$, la distribución es relativamente plana y recibe el nombre de platicúrtica; si $\mu_4 = 3$, la distribución

no presenta ningún pico y se dice que la distribución es mesocúrtica [2].

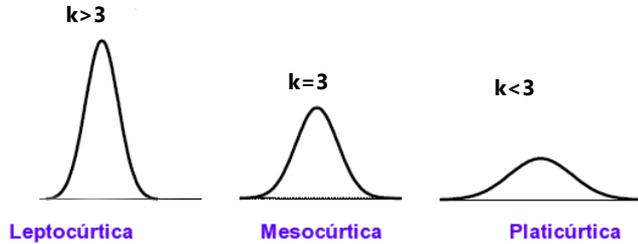


Figura 4.2: Medidas de forma: Curtosis.

De la misma manera que el tercer momento central es conveniente utilizar el cuarto momento estandarizado:

$$\gamma^* = \frac{1}{\sigma^4} E[(X - \mu)^4]. \quad (4.13)$$

El coeficiente de variación (CV), $CV = \sigma/\mu$, expresa la magnitud de la dispersión de una variable aleatoria con respecto de la media, esto con el fin de comparar la dispersión relativa de dos distribuciones de probabilidad [2].

Análogamente, los cuantiles correspondientes pueden ser calculados de una muestra de datos x_1, x_2, \dots, x_n [13]. La media de la muestra es,

$$\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}), \quad (4.14)$$

que es un estimador natural de μ .

Los siguientes momentos de la muestra son:

$$m_r = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r \text{ con } r = 2, 3, 4, \dots \quad (4.15)$$

Son estimadores razonables para μ_r , pero no son insesgados. Estimadores insesgados también son usados para σ^2 , μ_3 y $k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$ los cuales tienen como estimadores insesgados a,

$$s^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (4.16)$$

$$\tilde{m}_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3, \quad (4.17)$$

$$\tilde{k}_4 = \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left[\left(\frac{n+1}{n-1} \right) m_4 - 3m_2^2 \right], \quad (4.18)$$

respectivamente.

La desviación estándar de la muestra, $s = \sqrt{s^2}$, es un estimador de σ pero no es insesgado ver ([6]). Los estimadores del coeficiente de variación de la muestra, asimetría y curtosis son: Coeficiente de Variación,

$$\widehat{CV} = s/\bar{x}, \quad (4.19)$$

Asimetría,

$$g = \tilde{m}_3/s^3, \quad (4.20)$$

Curtosis,

$$k = \tilde{k}_4/s^4 + 3. \quad (4.21)$$

Los estimadores de momentos tienen algunas propiedades indeseables, ya que los estimadores g y k pueden ser demasiado sesgados

[13], en efecto g y k tienen limitaciones algebraicas que dependen del tamaño de la muestra.

Para una muestra de tamaño n las limitaciones son:

$$|g| \leq n^{1/2} \text{ y } k \leq n + 3. \quad (4.22)$$

4.4. Distribuciones de Probabilidad de los L-Moments

Los L- momentos son un sistema alternativo para describir la forma de la distribución de probabilidad. Históricamente surgieron a partir de una modificación de los "momentos de probabilidad ponderada" de [8]. Los momentos de probabilidad ponderada de una variable aleatoria X con función de distribución acumulada $F(\cdot)$ son:

$$M_{p,r,s} = E[X^p \{F(X)\}^r \{1 - F(X)\}^s]. \quad (4.23)$$

Los casos útiles son los momentos de probabilidad ponderada $\alpha_r = M_{1,0,r}$ y $\beta_r = M_{1,r,0}$, para una distribución con función cuantil $x(u)$, tenemos por (4.23):

$$\alpha_r = \int_0^1 x(u)(1-u)^r du, \quad \beta_r = \int_0^1 x(u)u^r du. \quad (4.24)$$

Estas ecuaciones pueden ser comparadas con la definición de los momentos ordinarios, en cuyo caso puede escribirse como

$$E(X^r) = \int_0^1 \{x(u)\}^r du. \quad (4.25)$$

Los momentos convencionales involucran a la función cuantil $x(u)$, mientras los momentos de probabilidad ponderada utilizan una regla de u o $1 - u$ y puede ser considerada como una integral de $x(u)$ ponderada por el polinomio u^r o $(1 - u)^r$.

Los momentos de probabilidad ponderada α_r y β_r se han utilizado como la base de métodos para estimar los parámetros de distribución de probabilidad por [12]. Sin embargo, existen dificultades para interpretar las medidas de los parámetros de forma y escala de la distribución de probabilidad.

Esta información es usada como combinación lineal de los momentos de probabilidad ponderada, por ejemplo, estimaciones de los parámetros de escala son múltiplos de $\alpha_0 - 2\alpha_1$ o $2\beta_1 - \beta_0$. La asimetría de la distribución se puede calcular por $6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$. Estas combinaciones lineales surgen de manera natural de integrar a $x(u)$.

Definimos los polinomios $P_r^*(u)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, con las siguientes características

1. $P_r^*(u)$ es un polinomio de grado r evaluado en u .
2. $P_r^* = 1$.
3. $\int_0^1 P_r^*(u)P_s^*(u)du = 0$ si $r \neq s$.

La condición (iii) se le conoce como condición de ortogonalidad,

el polinomio tiene una forma explícita:

$$P_r^*(u) = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* u^k. \quad (4.26)$$

Donde

$$p_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} = \frac{(-1)^{r-k} (r+k)!}{(k!)^2 (r-k)!}. \quad (4.27)$$

Para una variable aleatoria X con función cuantil $x(u)$, definimos los L-momentos de X como:

$$\lambda_r = \int_0^1 x(u) P_{r-1}^*(u) du. \quad (4.28)$$

En términos de los momentos de probabilidad ponderada, los L-momentos se dan por:

$$\lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0 \quad (4.29)$$

$$\lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0 \quad (4.30)$$

$$\lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0 \quad (4.31)$$

$$\lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_2 - 30\beta_1 + 12\beta_0 - \beta_0 \quad (4.32)$$

y en general tenemos,

$$\lambda_{r+1} = (-1)^r \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* \alpha_k = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* \beta_k. \quad (4.33)$$

De manera análoga se definen el radio de L-moments

$$\tau_r = \lambda_r / \lambda_2, \quad r = 3, 4, \dots \quad (4.34)$$

El radio de L-Moments nos sirve para medir la forma de una distribución independiente de su escala de medición. También se define el coeficiente de L-variación (L-CV),

$$\tau = \lambda_2/\lambda_1. \quad (4.35)$$

Esta cantidad es análoga al coeficiente de variación ordinaria, CV (L-CV no es una abreviación de "L-coeficiente de variación", es el coeficiente de L-variación).

4.5. L-Moments y Estadísticos de Orden

Una justificación intuitiva de porqué los estimadores de L-Moments pueden ser obtenidos como una combinación lineal de una muestra de datos observados que son ordenados de forma ascendente se da a continuación (ver [1]).

Consideremos la medida de la forma de la distribución, denotamos por $X_{k:n}$ la k -ésima observación más pequeña de una muestra de tamaño n , de tal forma que ordenamos la muestra por $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$.

Una muestra de tamaño 1 es una observación simple $X_{1:1}$ que contiene información acerca de la localización de la distribución. Si la distribución es desplazada hacia los valores más grandes, entonces se esperaría observar valores altos de $X_{1:1}$.

Para una muestra de tamaño $n = 2$, los estadísticos de orden son $X_{1:2}$ (mínimo), y $X_{2:2}$ (máximo). Para una distribución altamente dispersa, la diferencia de esperanzas entre $X_{2:2} - X_{1:2}$ podría ser grande, mientras que para una distribución fuertemente dispersa, la diferencia podría ser más pequeña. La diferencia de esperanzas entre los estadísticos de orden de tamaño $n = 2$, entonces pueden ser usados para expresar la variabilidad o escala de una distribución.

Para una muestra de tamaño $n = 3$, los estadísticos de orden son $X_{1:3}$ (mínimo), $X_{2:3}$ (mediana) y $X_{3:3}$ (máximo). Para una distribución negativamente sesgada, la diferencia entre $X_{2:3} - X_{1:3}$ podría ser demasiado grande (más datos hacia la izquierda) que $X_{3:3} - X_{2:3}$. Lo opuesto (menos datos hacia la izquierda) puede suceder si una distribución esta sesgada positivamente.

Esta interpretación esta basada sobre la distribución geométrica. Como podemos ver, las combinaciones lineales de estadísticos de orden contienen información acerca de los estimadores de localización, de escala y de forma, de la distribución para cuya muestra es graficada.

La letra 'L' en L-Moments hace énfasis a la construcción de los estimadores a partir de una combinación lineal de los estadísticos de orden. Los L-Moments de la función de distribución F , se definen por

$$\lambda_1 = E(X_{1:1}) = \int_0^1 x(F)dF, \quad (4.36)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2}) = \int_0^1 x(F)(2F - 1)dF, \quad (4.37)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}) = \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1)dF \quad (4.38)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) = \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1)dF. \quad (4.39)$$

y en general tenemos,

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} E(X_{r-j:r}), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.40)$$

La definición en (4.28) y (4.40) son consistentes estadísticamente y la esperanza de un estadístico de orden puede ser escrito:

$$E(X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x(u)u^{r-1}(1-u)^{n-r} du. \quad (4.41)$$

Donde la ecuación (4.40), λ_r puede ser escrita como una integral de $x(u)$ multiplicado por un polinomio en u . El uso de los L-Moments para describir la distribución de probabilidad es justificado por el siguiente teorema [11].

Teorema 4.1 (a) *Los L-Moments λ_r , $r = 1, 2, 3, \dots$, de variables aleatorias de valor real X existen si y sólo si X tiene media finita.*
 (b) *Una distribución cuya media existe es caracterizada por estos L-Moments $\{\lambda_r : r = 1, 2, 3, \dots\}$.*

Demostración 4.1 *Una media finita implica esperanzas finitas de todos los estadísticos de orden [5], entonces la parte (a) se sigue inmediatamente. Para la parte (b), sea*

$$\xi_r = E(X_{r:r}) = r \int x(F(x))^{r-1} dF(x), \quad (4.42)$$

Ahora bien, de la ecuación (3.40),

$$\lambda_r = \sum_{k=1}^r p_{r-1,k-1}^* k^{-1} \xi_k, \quad (4.43)$$

$$\xi_r = \sum_{k=1}^r \frac{(2k-1)r!(r-1)!}{(r-k)!(r-1+k)!} \lambda_k. \quad (4.44)$$

[3] y [15] prueban que la distribución con media finita es caracterizada por el conjunto $\{\xi_r : r = 1, 2, 3, \dots\}$. Por la ecuación (4.44), un conjunto dado por λ_r determina un único conjunto de ξ_r .

Por lo tanto, una distribución puede ser especificada por los L-Moments, incluso si algunos de sus momentos convencionales no existen. Además, dicha especificación es siempre única: esto, por supuesto, no es cierto para los momentos convencionales.

4.6. Propiedades de los L-Moments

Los L-Moments λ_1 y λ_2 , el $L - CV(\tau)$ y los radios de L-Moments τ_3 y τ_4 son los cuantiles más usados para resumir una distribución de probabilidad. Estos muestran propiedades importantes que son las siguientes, además del **Teorema 3.1** se resumen otras propiedades (las pruebas son dadas en [11]).

Existencia. Si la media de la distribución existe, entonces todos los L-Moments existen.

Unicidad. Si la media de la distribución existe, entonces los L-Moments son únicos para definir una distribución, esto es, dos distribuciones no pueden tener los mismos L-Moments.

Notación

λ_1 , es el L-localización o media de la distribución.

λ_2 , es el L-escala.

τ , es el L-CV.

τ_3 , es la L-asimetría.

τ_4 , es el L-curtosis.

Valores Numéricos.

λ_1 puede tomar cualquier valor.

$\lambda_2 \geq 0$.

Para una distribución que toma valores positivos, τ toma los siguientes valores, $0 \leq \tau < 1$.

Los radios de L-Moments satisfacen $|\tau_r| < 1$ para todo $r \geq 3$.

Considerando límites más estrictos podemos hallar las cantidades de los estimadores de forma individual τ_r . Por ejemplo, el límite para τ_4 dado τ_3 es

$$\frac{1}{4}(5\tau_3^2 - 1) \leq \tau_4 < 1. \quad (4.45)$$

Para una distribución que toma solamente valores positivos, el límite para τ_3 dado τ es $2\tau - 1 \leq \tau_3 < 1$.

Transformación lineal. Sean X y Y variables aleatorias con L-Moments λ_r y λ_r^* , respectivamente, si suponemos que $Y = aX + b$.

Entonces

$$\lambda_1^* = a\lambda_1 + b; \quad (4.46)$$

$$\lambda_2^* = |a|\lambda_2; \quad (4.47)$$

$$\tau_r^* = (\text{sing } a)^r \tau_r, r \geq 3. \quad (4.48)$$

Simetría. Sea X una variable aleatoria simétrica con media μ , tal que, $Pr[X \geq \mu + x] = Pr[X \leq \mu - x]$ para toda x . Entonces todos los radios de L-Moments de orden impar de X son cero, es decir, $\tau_r = 0$, $r = 3, 5, \dots$

Las propiedades anteriormente mencionadas sobre las cuatro medidas, básicamente ayudan a resumir una distribución de probabilidad.

Podemos comparar el L-escala con medidas familiares, como lo es σ , la desviación estándar, que se escribe

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2}), \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2})^2.$$

Ambas cantidades consideran una diferencia entre dos elementos aleatorios de una distribución, pero σ^2 da relativamente más peso para diferencias más grandes.

Cuando $\tau_3 = 0$ significa que la distribución es simétrica. Se ha encontrado en la literatura que τ_3 no se considera, sin embargo, usando a [23], τ_3 puede ser escrita de la siguiente manera

$$\tau_3 = \frac{E(X_{3:3}) - 2E(X_{2:3}) + E(X_{1:3})}{E(X_{3:3}) - E(X_{1:3})}.$$

4.7. ESTIMADORES DE L-MOMENTS Y LA DISTRIBUCIÓN DE VEG51

Mostrando que τ_3 es similar a la medida de asimetría propuesta por [?]:

$$B = \frac{Q_3 - 2Q_2 - Q_1}{Q_3 - Q_1},$$

donde, $Q_r = x(r/4)$, con $r = 1, 2, 3, \dots$, son los cuantiles de X .

4.7. Estimadores de L-Moments y la Distribución de VEG

La Distribución de Valores Extremos Generalizada tiene tres parámetros: escala (σ), localización (μ), y forma (ξ).

En esta sección nos encargaremos de mostrar la relación de L-Moments con la distribución de valores extremos, se describen las expresiones para los primeros cuatro L-Moments y los parámetros estimados.

Como se ha comentado en capítulos anteriores la distribución VEG es de utilidad para describir fenómenos en donde haya observaciones extremas, que comúnmente se presenta en fenómenos naturales.

De igual manera se describen tres familias de distribuciones que son: Weibul ($\xi < 0$), Frechet ($\xi > 0$), Gumbel ($\xi = 0$).

La función de distribución de Valores Extremos Generalizada

se define como,

$$f(x) = \alpha^{-1} \exp[-(1 - \xi)Y - \exp(Y)], \quad (4.49)$$

$$F(x) = \exp[-\exp(Y)], \quad (4.50)$$

donde,

$$Y = \begin{cases} -\xi^{-1} \log[1 - \xi(x - \mu)/\sigma] & , \text{ si } \xi \neq 0, \\ (x - \mu)/\sigma & , \text{ si } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

y

$$x(F) = \begin{cases} \mu + \sigma(1 - [-\log(F)]^\xi)/\xi & , \text{ si } \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log[\log(F)] & , \text{ si } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.52)$$

Los rangos de la v.a. son,

$$-\infty < x < \mu + \sigma/\xi \text{ si } \xi > 0, \quad (4.53)$$

$$-\infty < x < \infty \text{ si } \xi = 0, \quad (4.54)$$

$$\mu + \sigma/\xi \leq x < \infty < 0 \text{ si } \xi < 0. \quad (4.55)$$

Los L-Moments son,

$$\lambda_1 = \mu + \sigma[1 - \Gamma(1 + \xi)]/\xi, \quad (4.56)$$

$$\lambda_2 = \sigma(1 - 2^{-\xi})\Gamma(1 - \xi)/\xi, \quad (4.57)$$

$$\tau_3 = 2(1 - 3^{-\xi})/(1 - 2^{-\xi}) - 3, \quad (4.58)$$

$$\tau_4 = \frac{5(1 - 4^{-\xi}) - 10(1 - 3^{-\xi}) + 6(1 - 2^{-\xi})}{(1 - 2^{-\xi})}, \quad (4.59)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma completa

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4.60)$$

De las ecuaciones anteriores y con un poco de álgebra se obtienen los parámetros de escala, localización y forma.

$$\sigma = \frac{\lambda_2 \xi}{(1 - 2^{-\xi}) \Gamma(1 + \xi)}, \quad (4.61)$$

$$\mu = \lambda_1 - \sigma[1 - \Gamma(1 + \xi)]/\xi. \quad (4.62)$$

No existe una solución explícita para el parámetro ξ en términos de los L-Moments y sólo se realizan métodos numéricos para su hallazgo. Aunque Hosking [12] da una aproximación:

$$\xi \approx 7.8590c + 2.9554c^2,$$

donde,

$$c = \frac{2}{3 + \tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3}.$$

4.8. Diagramas de Radio de L-Moments

Una herramienta fuerte con la que cuenta el análisis de datos a través de los L-Moments se presenta en el estudio de los diagramas de radio de los L-Moments.

Los diagramas de radio basan su estudio principalmente en dos de los cuatro estimadores de L-moments (τ_3, τ_4) , dado que es común analizar los dos primeros $(\lambda_1$ y $\lambda_2)$ en cualquier distribución, ya sea de un modelo lineal o lineal generalizado.

Tal vez una de las formas más adecuadas de visualizar cómo los L-Moments contribuyen a definir un tipo de distribución es a través del denominado Diagrama de radio de L-Moments [?].

4.8.1. Construcción de los Diagramas de Radio de los L-Moments

Hosking and Wallis (1997, p.208) reportan aproximaciones polinómicas para la caracterización de $\{\tau_3, \tau_4\}$ relacionando estas aproximaciones mediante la construcción de los diagramas de radio de L-Moments.

La aproximación polinomial presenta la siguiente forma

$$\tau_4 = \sum_{j=0}^8 A_j \tau_3^j, \quad j > 0; \quad (4.63)$$

donde, los coeficientes A_j son seleccionados para tres parámetros de las distribuciones, (cuadro 4.1).

En el cuadro 4.1 se presentan las siguientes distribuciones: GEV, distribución de valores extremos generalizada; GLO, distribución logística generalizada; GNO, distribución normal generalizada; PE3, distribución Pearson tipo III; – implica que los coeficientes son cero.

	GEV	GLO	GNO	GPA	PE3
A_0	0.10701	0.16667	0.12282	0.	0.12240
A_1	.11090	–	–	.20196	–
A_2	.848338	.83333	.77518	.95924	.30115
A_3	-.06669	–	–	-.20096	–
A_4	.00567	–	.12279	.04061	.95812
A_5	-.04208	–	–	–	–
A_6	.03763	–	-.13638	–	-.57488
A_7	–	–	–	–	–
A_8	–	–	.11368	–	.19383

Cuadro 4.1: Valores de los Coeficientes del Polinomio de Aproximación por Hosking y Wallis (1997) del Estimador L-kurtosis como Función de L-asimetría

4.8.2. Puebas de Hipótesis

El uso de los L-Moments para describir características de los parámetros estimados para una distribución de probabilidad se requiere de pruebas de hipótesis. Por ejemplo, para la distribución exponencial [7], muestra que el '*índice de Gini*' es similar al estimador L-CV, con media $\frac{1}{2}$, y varianza $1/12(n-1)$, con distribución normal asintótica.

Por lo tanto, el estadístico:

$$G_n = \{12(n-1)\}^{1/2}(l_2/l_1 - 1/2), \quad (4.64)$$

puede ser usado como una prueba de exponencialidad, con valores críticos obtenidos a partir de una distribución normal estándar.

La diferencia de medias de Gini es un estadístico robusto del estimador de escala y es cerrado bajo la relación del segundo L-Moments, $\tau_2 = G/2$.

En [10] propone el siguiente estimador:

$$N_n = v_n^{1/2} t_3, \quad (4.65)$$

donde, $v_n = 0.1866n^{-1} + 0.8n^{-2}$. N_n se considera como un estimador para la prueba de hipótesis de normalidad contra alternativas de sesgo.

Capítulo 5

Contaminación por Ozono (O_3)

5.1. Introducción

A lo largo de la historia de nuestro planeta se han producido diversos Cambios Climáticos, sin embargo, en las últimas décadas se gesta un nuevo cambio a consecuencia directa de factores humanos, teniendo como punto de partida la revolución industrial de finales del siglo XIX, donde se observa que el consumo de combustibles fósiles, la degradación de los recursos naturales, la descomposición de residuos orgánicos, los cambios de uso de suelo; vienen contribuyendo y alterando significativamente las propiedades del clima.

Uno de los principales problemas que se tiene como consecuencia de los factores humanos se encuentra en el aire que respiramos, esto aunado al aumento en el consumo de combustibles fósiles que incrementan la expulsión de sustancias tóxicas, como lo son, dióxido de nitrógeno (NO_2), Dióxido de carbono (CO_2), Partículas suspendidas (PM y PM2.5), Ozono (O_3), entre otras.

Este fenómeno ambiental en muchas ciudades es estudiado dado la importancia que tiene en efectos a la salud, en particular el estudio del ozono se realiza en zonas urbanas dado las grandes cantidades de emisiones que se realizan al aire.

A una altura de 20 km sobre la superficie se encuentra la llamada capa de ozono (O_3) u ozono estratosférico. Esta capa de ozono esta de forma natural y actúa de forma benéfica absorbiendo radiación UV proveniente del Sol y evitando así que llegue a la superficie de la Tierra.

Sobre la Troposfera (capa de la atmósfera situada sobre la superficie de la Tierra, hasta una distancia de unos 10 Km) se sitúa el ozono denominado ozono troposférico, que es consecuencia de la acción del hombre. Este ozono se puede encontrar en concentraciones superiores a las naturales, actuando entonces como un contaminante atmosférico por sus efectos nocivos sobre el medio [16].

5.2. Contaminación Atmosférica

Nuestro planeta tiene dos "escudos" protectores para la vida en su superficie: la atmósfera, y el campo magnético terrestre. Uno de los principales procesos de la atmósfera es el filtrar la radiación electromagnética de alto nivel proveniente del sol, como son, los rayos gamma, rayos X, rayos ultravioleta. Dado que estos rayos no son benéficos para la salud humana y de los organismos vivientes es necesario tener en cuenta el cuidado de la atmósfera.

Por otra parte, la atmósfera también permite el paso parcial de la radiación infrarroja, que originalmente es causante del efecto invernadero, que trae como consecuencia que la temperatura promedio de la superficie sea de 15 C°.

Nuestra atmósfera esta compuesta principalmente por tres gases (Nitrógeno 78 %, Oxígeno 21 %, y casi 1 % de Argón), sin embargo, existen otros gases como son Vapor de Agua, Bióxido de Carbono, Metano, Óxidos de Nitrógeno, Ozono y gases inertes (Helio y Neón) que se encuentran en menor cantidad y es por ello que se cuantifican con unidades de partes por millón (ppm). Una parte por millón de un gas dado (unidad ppm), indica que de un millón de moléculas de los gases que constituyen el aire, solo existe una molécula del gas en cuestión, [14].

Cuando algunos de los gases que componen el aire, tales como, Monóxido de Carbono (CO), Metano (CH_4), Ozono (O_3),

entre otros, presentan un aumento anormal en sus concentraciones naturales, se inicia el fenómeno denominado *contaminación atmosférica*.

Definición 5.1 *Diremos que la contaminación atmosférica consiste en la presencia en la atmósfera de diversos compuestos químicos, que no estarían presentes de forma natural y/o sus concentraciones se han incrementado de manera anormal.*

La contaminación atmosférica ha sido producto del proceso de la industrialización, así como de las grandes concentraciones urbanas, primordialmente por la emisión de humos, polvos y gases, provenientes de fuentes móviles y fijas.

Los principales contaminantes atmosféricos emitidos por las actividades humanas se listan a continuación:

1. Partículas Suspendidas (PM10, PM2.5, PM).
2. Bióxido de Azufre (SO_2).
3. Óxidos de Carbono (CO_X).
4. Hidrocarburos (HC's).
5. Óxidos de Nitrógeno (NO_X).
6. Ozono Troposférico (producido a través de precursores como NO_X).

Cada uno de los contaminantes listados anteriormente tiene efectos nocivos y diversos para la salud. En la siguiente tabla se presenta los valores límites de exposición recomendados por Normas Oficiales Mexicanas de ciertos contaminantes.

<i>contaminante</i>	<i>símbolo</i>	<i>valor límite</i>
Ozono	O_3	0.11ppm
Partículas menores a 10 micrómetros	PM_{10}	$210 \mu g/m^3$
Bióxido de azufre	SO_2	0.11ppm
Monóxido de carbono	CO	0.11ppm
Bióxido de nitrógeno	NO_2	0.21ppm

Cuadro 5.1: Contaminates Atmosféricos. Fuente: Proaire 2012-2020

Las variables ambientales a considerar:

<i>contaminante</i>	<i>símbolo</i>	Unidad
Presión Barométrica	BPR	mmHg
Humedad Relativa	HR	%
Temperatura	TEMP	C°
UV-A	UV.A	W/m^2
UV-B	UV.B	W/m^2
Dirección del viento	WD	Grados sexagesimales (360°)
Velocidad del Viento	WS	m/s

Cuadro 5.2: Variables Ambientales.

Los contaminantes que más se relacionan con efectos nocivos en la salud son el O_3 , NO_x , SO_2 , CO , PM2.5 y PM10.

Estudios nacionales e internacionales señalan la importancia

de llevar a cabo un control de los contaminantes anteriormente mencionados, dado que los efectos a la salud se ve mayoritariamente en niños y personas adultas en los lugares donde se presenta este problema, por ejemplo, el Ozono agrava el sistema respiratorio; trae problemas cardíacos, asma, bronquitis y enfisema, es por ello que estudiaremos el Ozono.

5.3. Contaminación por Ozono

El ozono, a una altura de entre 20 y 30 kilómetros, forma un escudo protector para la vida denominado *capa de ozono terrestre*, que impide el paso de la radiación ultravioleta e infrarroja. Además, es un gas altamente reactivo y tóxico, contribuyendo al efecto invernadero cuando no se forma de manera natural.

El ozono troposférico (no se produce de manera natural) es uno de los contaminantes ambientales que aunque no se emite de manera directa a la atmósfera, es formado por una variedad de reacciones químicas donde participan compuestos orgánicos volátiles (VOC's), óxidos de nitrógeno (NO_x) y luz solar.

La toxicidad del O_3 ha sido investigada extensamente. Es un oxidante potente que puede reaccionar con biomoléculas extra e intracelulares; además de causar efectos agudos en vías respiratorias en toda la sociedad. Se presenta mayoritariamente en centros urbanizados, lugares donde el parque vehicular es obsoleto, zonas industriales donde la tecnología no favorece a la disminución de este contaminante, entre otras.

5.4. Ozono y otros Contaminantes en Puebla

Las múltiples actividades que se desarrollan en las zonas urbanas tienen la finalidad de proveer bienes y servicios a la sociedad. Sin embargo, esto conlleva un costo ecológico, el cual se ve reflejado en la degradación de los recursos naturales y en la generación de residuos y contaminantes.

La calidad de aire en las zonas urbanas se mide con base a la concentración de contaminantes atmosféricos presentes, de esta manera, mientras más grande sea la generación, emisión y residencia de los mismos, menor será la calidad del aire, y en consecuencia, mayor será el impacto sobre los diferentes escenarios naturales y humanos.

Por lo que respecta a la Ciudad de Puebla las emisiones de contaminantes atmosféricos empiezan a tener presencia significativa a partir de los años 60's y 70's, reflejándose en paralelo con su incremento demográfico, industrial y comercial, que en consecuencia demandan un mayor suministro de bienes y servicios, así como de transporte [21].

5.4.1. Extensión Geográfica del Estado de Puebla

El Estado de Puebla es una de las 31 entidades que conforman la República Mexicana, e integrado por 217 municipios, se ubica

en la zona centro-oriental del país, colinda al este con el Estado de Veracruz; al poniente con el Estado de México, Hidalgo, Tlaxcala y Morelos, al sur con los Estados de Oaxaca y Guerrero. Su superficie es de 34, 251 kilómetros cuadrados.

Su población tenía 5, 799, 829 habitantes, en el 2010, conformada en un 47 % por hombres y en un 52 % por mujeres. El 72 % de la cual reside en áreas urbanas. Alberga un parque Vehicular de 1, 138, 697 unidades, conglomerado en la Ciudad de Puebla [22].

La Zona Metropolitana se ubica en el Centro del Valle Puebla-Tlaxcala que forma parte de la cuenca hidrológica del río Balsas, se localiza al oriente de la sierra Nevada, hacia el este se extiende hasta el piemonte de la sierra Madre Oriental, al norte, la sierra de Tlaxcala (o volcán La Malinztin) lo separa de los llanos de Ápan, en el Estado de Hidalgo y al sur limita con las serranías que forman parte del nudo Mixteco [21].

5.4.2. Calidad del Aire en Puebla

Una buena calidad del aire puede definirse como la suma de concentraciones de componentes presentes en la atmósfera en un periodo de tiempo dado, que satisfacen la salud, el bienestar de la población, el equilibrio ecológico, y los materiales con valor económico [22].

El monitoreo atmosférico proporciona información que sirve

para determinar la calidad del aire en una zona determinada, a partir de su comparación contra los niveles permisibles establecidos para proteger la salud y bienestar de la población.

La distribución espacial de los contaminantes depende de varios factores ambientales, ya que gracias a ellos se cuenta con datos que nos muestran con que rapidez, dispersión, transporte, reacción y acumulación, se presentan los contaminantes en una cuenca atmosférica.

Las principales variables meteorológicas a considerar por su influencia sobre la calidad del aire, son el transporte conectivo horizontal y vertical; el primero depende básicamente de las velocidades y direcciones del viento y el segundo depende de la estabilidad atmosférica y del fenómeno de la inversión térmica de las capas de la atmósfera [25].

En este capítulo se establece el diagnóstico de la calidad del aire para el periodo 2001-2009, utilizando datos generados por la Red Estatal de Monitoreo Ambiental (REMA), que está conformada por cuatro estaciones de monitoreo: Tecnológico, Ninfas, Serdán y Agua Santa (fig 4.1).

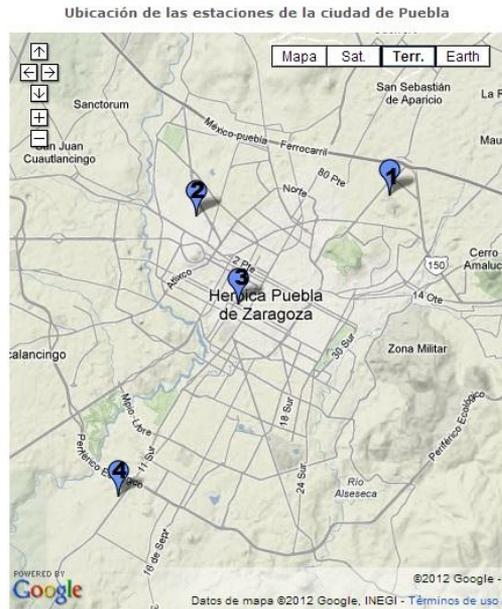


Figura 5.1: Estaciones de Monitoreo Atmosférico de Puebla, 1.- Tecnológico, 2.- Serdán, 3.-Ninfas y 4.- Agua Santa

fuelle: http://sinaica.ine.gob.mx/rama_puebla.html

En la figura 5.1 se presentan las estaciones existentes hasta el año 2011 de la REMA:

1. Estación Tecnológico:

Ubicación Zona Norte de la Cd. de Puebla.

Dirección: Av. Tecnológico no. 420, esquina calle Cordillera Sept.

Localidad: Maravillas.

2. Estación Ninfas:

Ubicación: Zona Centro poniente

Dirección: 23 ponente y 15 sur

Localidad: Santiago

3. Estación Serdán:

Ubicación: Zona Noreste de la Cd. de Puebla

Dirección: Blvd. Hermanos Serdán y Blvd. San Felipe Hueyotlipan

Localidad: Aquiles Serdán

4. Estación Agua Santa:

Ubicación: Zona Sur de la Cd. de Puebla

Dirección: Prol. 11 sur y periférico

Localidad: Agua Santa

5.5. Tratamiento de la Información

Para iniciar con el análisis se realiza la limpieza de nuestros datos. La captación de los datos se realiza a través de un sistema dinámico (data logger) en las estaciones de monitoreo atmosférico en la cual se registran mediciones promedio en cada hora, es muy cierto que las estaciones dependen de algunos analizadores para las medidas de contaminantes primarios y secundarios, pero es frecuente que algunos de ellos se mantenga en reparación o estén descompuestos, es de esta manera por la que la falta de datos se hace presente en la mayoría de las muestras.

Se supone que las observaciones de Ozono pueden aproximarse con la distribución de Valores Extremos Generalizada. En la teoría de VEG se contemplan observaciones aleatorias e independientes, puesto que las observaciones que se analizan no cumplen con este requisito debido a que los datos son consecutivos y están bajo las mismas condiciones ambientales, se procede a realizar bloques de los datos obtenidos y de esta manera disminuir la correlación entre las observaciones de O_3 , [4].

Terminada la limpieza de nuestra base de datos iniciamos con la el análisis tanto descriptivo como inferencial de los datos.

<i>Contaminante</i>	<i>Media</i>	<i>sd</i>	<i>25 %</i>	<i>50 %</i>	<i>75 %</i>	<i>n</i>
BPR	592.42	1.46	592	592	593	310
CO	0.94	0.44	0.6425	0.855	1.1375	310
HR	40.95	13.57	32	41.45	50.425	310
NO ₂	15.48	9.61	10.30	13.30	18	310
O ₃	58.57	20.07	41.70	56.70	73.075	310
PM ₁₀	31.30	24.60	13.225	25.05	45.925	310
SO ₂	4.38	2.52	2.60	3.80	5.375	310
TEMP	21.48	2.70	19.90	21.50	23.10	310
UV.A	403.99	183.85	212.50	459.50	554.50	310
UV.B	122.55	102.10	60	88	133.50	310
WD	177.25	65.22	138.125	168.70	213.125	310
WS	4.10	2.37	2.70	3.30	4.675	310

Cuadro 5.3: Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Ninfas

Como podemos observar en el Cuadro 5.3 se presenta el análisis descriptivo correspondiente a la Estación Ninfas que en la mayoría de las observaciones en los contaminantes criterios y normados, más del 75 % de los datos no sobrepasan las normas oficiales mexicanas.

Este resumen se realiza para cada una de las 4 estaciones que conforman la REMA (ver Cuadros 5.4, 5.5, 5.8)

<i>Contaminante</i>	<i>Media</i>	<i>sd</i>	<i>25 %</i>	<i>50 %</i>	<i>75 %</i>	<i>n</i>
BPR	590.29	1.50	589.0	590.0	591.0	248
CO	1.97	0.82	1.4175	1.975	2.440	248
HR	38.05	12.88	29.05	37.850	47.025	248
NO ₂	33.03	16.09	22.95	30.950	41.775	248
O ₃	47.28	18.35	35.15	44.850	57.625	248
PM ₁₀	50.39	26.61	31.475	48.100	64.2	248
SO ₂	7.86	6.35	5.50	7.2	8.9	248
TEMP	20.71	2.76	19.40	21.0	22.5	248
UV.A	412.26	210.50	224.75	436.0	589.25	248
UV.B	99.67	70.46	48.00	75.0	142.500	248
WD	172.48	101.81	86.6750	164.65	258.250	248
WS	4.22	1.90	3.0000	3.8	4.900	248

Cuadro 5.4: Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Sérđan

<i>Contaminante</i>	<i>Media</i>	<i>sd</i>	<i>25 %</i>	<i>50 %</i>	<i>75 %</i>	<i>n</i>
BPR	588.76	1.27	588.0	589.0	590.0	410
CO	0.91	0.48	0.59	0.83	1.070	410
HR	39.63	15.21	29.5	39.30	49.575	410
NO_2	14.24	8.87	7.825	12.30	18.25	410
O_3	65.05	26.25	47.55	62.70	80.20	410
PM_{10}	36.03	22.59	19.4	31.60	48.275	410
SO_2	6.47	4.33	3.425	5.60	8.300	410
TEMP	20.31	2.99	19.1	20.50	22.0	410
UV.A	508.17	212.28	423.750	532.50	628.750	410
UV.B	96.18	44.12	70.0	98.0	128.0	410
WD	200.09	120.84	65.475	248.80	305.5	410
WS	5.42	2.64	3.7	5.10	6.4	410

Cuadro 5.5: Resumen estadístico de los Contaminantes de la Estación Tecnológico

La estación Tecnológico en cuanto a O_3 se trata, el 25 % de los datos se encuentran por arriba del 0.8 ppm, que a diferencia de la Estación Serdán, el 25 % de los datos se encuentran por encima del 0.57 ppm.

<i>Contaminante</i>	<i>Media</i>	<i>sd</i>	<i>25 %</i>	<i>50 %</i>	<i>75 %</i>	<i>n</i>
BPR	596.39	1.54	595.615	596.09	597.00	487
CO	0.61	0.38	0.370	0.57	0.79	487
HR	40.49	15.93	30.050	40.10	50.90	487
NO_2	10.42	6.46	5.950	9.10	13.10	487
O_3	60.19	23.57	42.850	57.10	72.95	487
PM_{10}	42.57	31.09	19.700	36.50	57.50	487
SO_2	3.49	1.85	2.100	3.10	4.60	487
TEMP	21.84	2.52	620.400	21.70	23.15	487
UV.A	435.35	174.09	341.500	471.00	571.00	487
UV.B	52.64	38.21	32.500	47.00	63.00	487
WD	172.64	80.41	120.800	172.50	216.70	487
WS	5.04	3.71	2.800	3.70	6.10	487

Cuadro 5.6: Resumen Estadístico de los Contaminantes de la Estación Agua Santa

En los gráficos de dispersión (ver Figura 5.2) podemos observar una disminución en los niveles máximos del contaminante Ozono en las Estaciones Tecnológico y Serdán, mientras que para la Estación Ninfas y Agua Santa, no es muy notable este cambio.

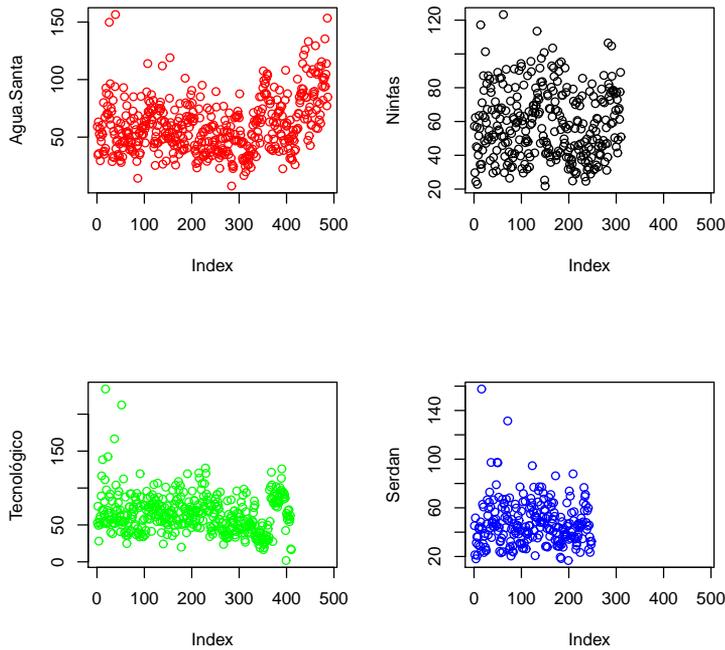


Figura 5.2: Dispersión de O_3 en las Estaciones Agua Santa, Tecnológico, Serdán y Ninfas

En la Figura 5.3 se muestra el comportamiento de la temperatura que reportan las estaciones de monitoreo, en lo que respecta a la estación Agua Santa se puede observar que la temperatura ha aumentado, en tanto que la estación Tecnológico, Serdán y Ninfas

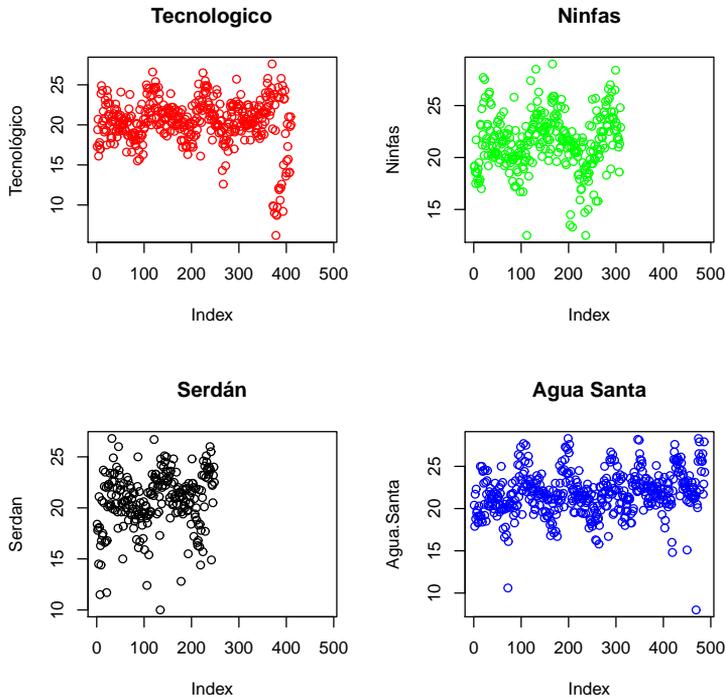


Figura 5.3: Comportamiento de la Temperatura en las Cuatro Estaciones de la REMA.

no es muy notable este cambio, sin embargo, se nota una sucesión estacionaria.

5.5.1. Matrices de Correlación

La matriz de correlación de la estación Agua Santa (ver Cuadro 5.8), es la única que muestra un cambio en cuanto la relación de Ozono y Partículas suspendidas menores a $10 \mu m$ (PM10).

	CO	NO ₂	OZONO	PM10	SO ₂
CO	1.00	0.54	0.32	0.44	0.43
NO ₂	0.54	1.00	0.42	0.54	0.68
OZONO	0.32	0.42	1.00	0.43	0.24
PM10	0.44	0.54	0.43	1.00	0.57
SO ₂	0.43	0.68	0.24	0.57	1.00

Cuadro 5.7: Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Tecnológico

	CO	NO ₂	OZONO	PM10	SO ₂
CO	1.00	0.356	0.027	0.259	0.367
NO ₂	0.356	1.000	0.171	0.218	0.464
OZONO	0.027	0.171	1.000	-0.082	0.138
PM10	0.259	0.218	-0.082	1.000	0.251
SO ₂	0.367	0.464	0.1382	0.251	1.000

Cuadro 5.8: Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Agua Santa

	CO	NO ₂	OZONO	PM10	SO ₂
CO	1.000	0.545	0.228	0.523	0.539
NO ₂	0.545	1.000	0.296	0.369	0.550
OZONO	0.228	0.296	1.000	0.338	0.285
PM10	0.523	0.369	0.338	1.000	0.343
SO ₂	0.539	0.550	0.285	0.343	1.000

Cuadro 5.9: Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Ninfas

	CO	NO_2	OZONO	PM10	SO_2
CO	1.000	0.492	0.100	0.361	0.508
NO_2	0.492	1.000	0.292	0.566	0.245
OZONO	0.100	0.292	1.000	0.275	0.355
PM10	0.361	0.566	0.275	1.000	0.228
SO_2	0.508	0.245	0.355	0.228	1.000

Cuadro 5.10: Matriz de Correlación de los Contaminantes de la Estación Serdán

En la siguiente Figura 5.4 se presenta un gráfico de caja de bigotes de los contaminantes Ozono, PM10, NO_2 y CO, donde podemos observar que para el contaminantes PM10, la estación que presenta los niveles más altos es la estación Agua Santa, mientras que para el contaminante Ozono, la estación que presenta los niveles más altos es la estación Tecnológico y para los contaminantes NO_2 y CO, la estación Serdán es la que presenta niveles muy altos.

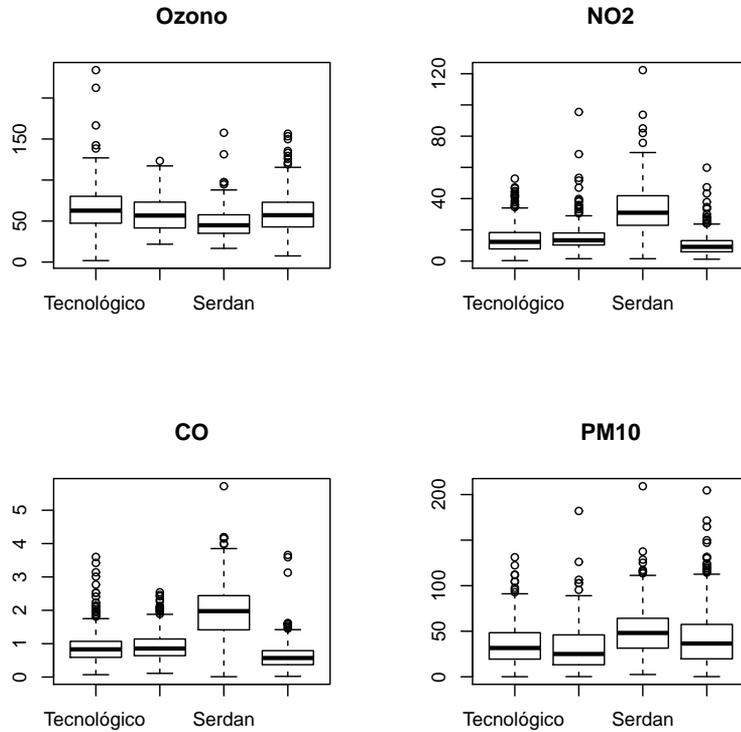


Figura 5.4: Gráficos de Cajas de Bigotes para los Contaminantes O_3 , NO_2 , CO y PM₁₀

5.6. L-Moments y el Ozono en Puebla

En esta sección se presenta los resultados concernientes al análisis de los datos recabados por las estaciones que componen la RE-MA utilizando la teoría de L-Moments aplicados en la distribución VEG.

En el Cuadro 5.11 se presenta la media y la varianza para el

Estación	Media	Sd	25 %	50 %	75 %	N
Tecnológico	53.94	25.94	35.7	50.5	69.3	990
Serdán	41.59	18.81	28.6	40.6	53	723
Ninfas	56.95	20.42	41	55.7	70.9	697
Agua Santa	56.90	24.34	38	54.2	72.1	871

Cuadro 5.11: Descripción del O_3 en las Cuatro Estaciones de la REMA

contaminante Ozono para las 4 estaciones de monitoreo.

Estación	λ_1	λ_2	τ_3	τ_4
Tecnológico	53.94	14.17	0.133	0.127
Serdán	41.59	10.383	0.0590995	0.136
Ninfas	56.95	11.513	0.082	0.096
Agua Santa	56.90	13.615	0.115	0.101

Cuadro 5.12: L-Moments del O_3 en las Cuatro Estaciones de la REMA.

A partir de los estimadores de L-Moments podemos construir los parámetros para la distribución deseada, que en nuestro caso es la Distribución de Valores Extremos Generalizada, (ver Cuadro 5.13).

Aplicando la teoría de valores extremos a cada uno de los parámetros de las cuatro estaciones, nos damos cuenta que para cada estación el parámetro de forma $\xi > 0$, por lo tanto, podríamos estar hablando que la distribución que mejor se ajustan a nuestras observaciones de Ozono es la Distribución de Fréchet para las 4 estaciones de la REMA.

Estación	μ	σ	ξ
Tecnológico	54.25	21.81	0.09
Serdán	39.31	14.10	0.012
Ninfas	50.11	18.34	0.130
Agua Santa	49.71	19.41	0.039

Cuadro 5.13: Parámetros de la Distribución VEG por el Método de L-Moments para los datos de O_3 en las Cuatro Estaciones de Monitoreo.

Se presentan los gráficos cuantil-cuantil en el que, el eje horizontal es el cuantil de una distribución de valor extremo tipo I (Gumbel).

En los gráficos cuantil-cuantil (ver Figura 5.5) observamos que para las estaciones Tecnológico y Serdán los periodos de retorno son más cortos que en las estaciones Agua Santa y Ninfas.

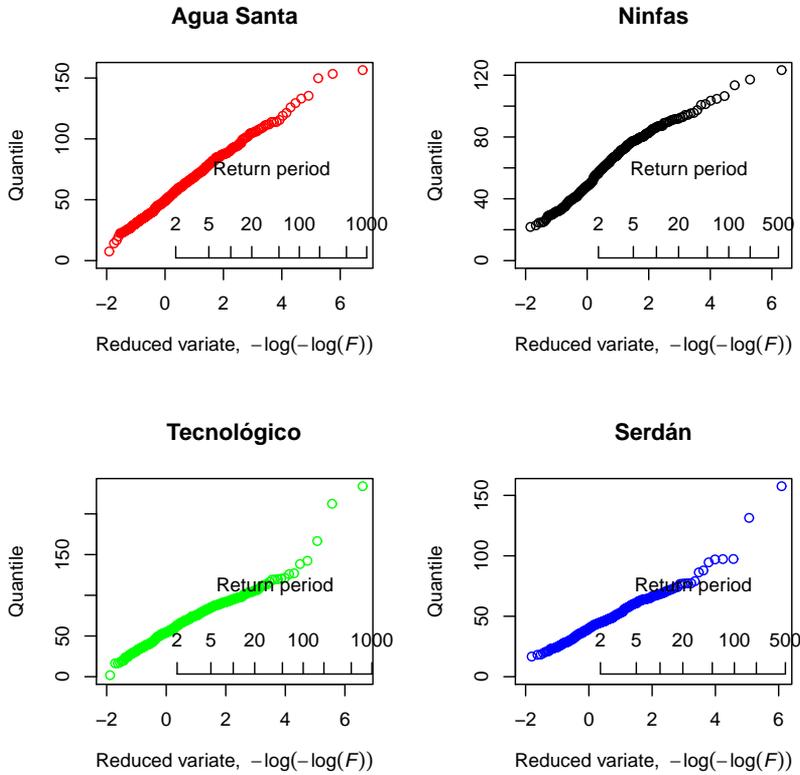


Figura 5.5: Gráfico Cuantil-Cuatil de O_3 para las Estaciones Agua Santa, Ninfas, Tecnológico y Serdán.

5.6.1. Diagramas de Radio para los L-Moments

En la Figura 5.5 se muestran los diagramas de radio para las 4 estaciones de la REMA en la cual se observa que la estación Agua Santa, Tecnológico y Serdán, la distribución que mejor aproxima las observaciones es la Distribución de Valores Extremo Generalizada, mientras que para la estación Ninfas la que mejor aproxima

nuestros datos es la Distribución Pareto Generalizada.

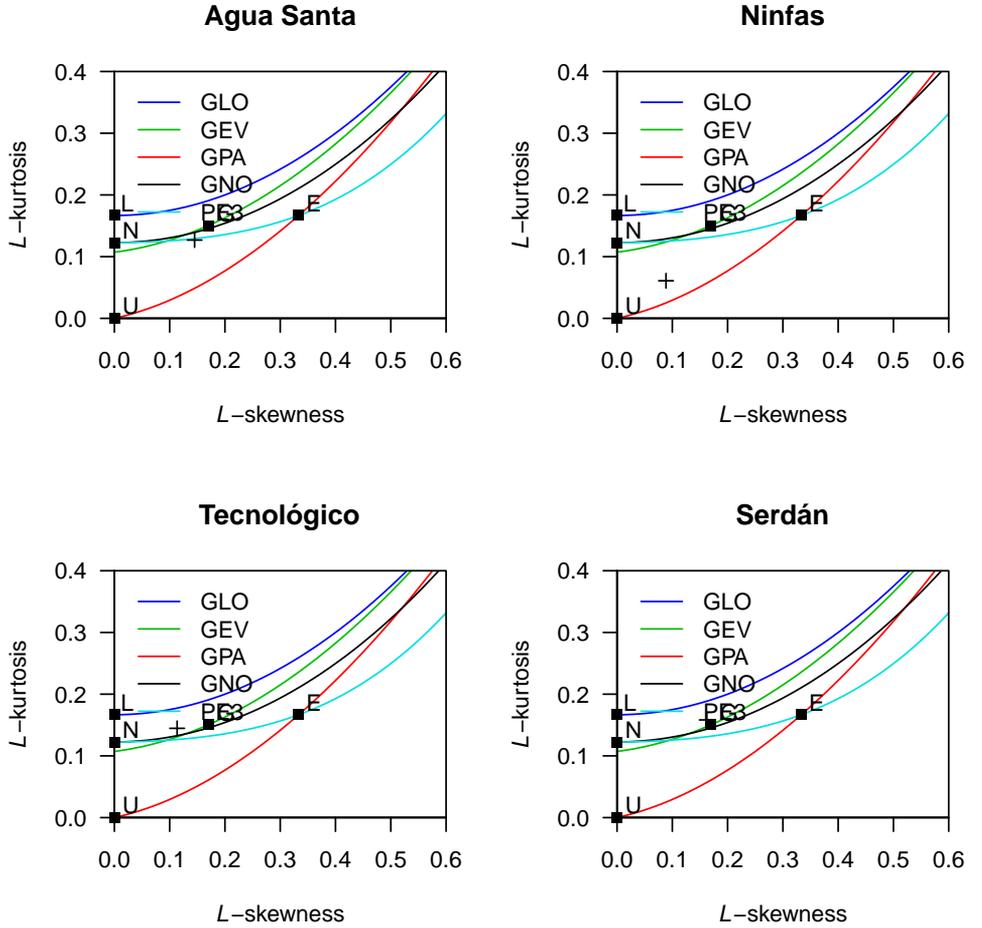


Figura 5.6: Diagrama de Radio de O_3 en las Estaciones Agua Santa, Ninfas, Serdán y Ninfas

5.7. Coeficientes de Gini

Estación	Coeficiente de Gini	λ_2
Tecnológico	28.02	14.008
Serdán	19.34	9.669
Ninfas	22.84	11.418
Agua Santa	25.99	12.994

Cuadro 5.14: Coeficientes de Gini para las Cuatro Estaciones de Monitoreo.

Los coeficientes de Gini muestran la relación entre el valor de este coeficiente y el L-Moments de segundo orden (λ_2).

Capítulo 6

Conclusiones

En la Figura 5.2 se observa el comportamiento del contaminante Ozono en las estaciones de la REMA, donde destaca el comportamiento en la estación Agua Santa que en principio se ve una disminución en el contaminante, pero en la parte final se observa un repunte, algo similar se está presentando en la estación Ninfas, caso contrario se presenta en la estación Tecnológico y Serdán.

En los Cuadros 5.3, 5.4, 5.5 y 5.8 se presenta el resumen estadístico correspondiente a las estaciones de monitoreo atmosférico, y se observa que las cuatro estaciones tiene un número pequeño de datos, por lo cual el método propuesto soporta ésta información y realiza sus estimaciones.

Algo interesante pasa en la estación Agua Santa, dado que al revisar la matriz de correlación correspondiente a los contaminan-

tes Monóxido de Carbono (CO), Dióxido de Nitrógeno (NO_2), Ozono (O_3), Partículas suspendidas menores a $10 \mu m$ (PM10), y Dióxido de Azufre (SO_2), se nota que existe una relación inversamente proporcional de PM10 respecto al del Ozono, y en la demás estaciones de monitoreo no pasa esto. Las estaciones que presentan los niveles máximos de contaminantes se presentan en Agua Santa y Tecnológico.

Aplicando la teoría de la Distribución de Valores Extremo Generalizada se observa que los parámetros de forma $\xi > 0$, para cada una de las estaciones, por lo tanto, estaríamos hablando que los datos pertenecen a la familia de la distribución Fréchet.

Sin embargo, dado que la teoría de L-Moments cuenta con una herramienta gráfica, podemos verificar si la Distribución VEG es la que mejor describe nuestros datos de Ozono para las 4 estaciones de monitoreo que componen la REMA.

Veamos la Figura 5.5, observamos que para la estación Agua Santa las Distribuciones posibles que mejor se acoplan a nuestros datos son la Pearson tipo III, VEG y Normal Generalizada; para la distribución Ninfas, la mejor aproximación está bajo la distribución Pareto Generalizada; para la estación Tecnológico nuevamente tenemos las posibles distribuciones que mejor se acoplan a nuestras observación y estas son: Pearson tipo III, VEG y Normal Generalizada; y finalmente para la estación Serdán las posibles distribuciones son: VEG, Normal Generalizada y Pearson tipo III.

De esta manera estaríamos descartando la posibilidad de que, para la estación Ninfas, la distribución que mejor se aproxima a las observaciones de Ozono pertenezca a la familia VEG.

Para finalizar podemos ir a los gráficos cuantil-cuantil donde observamos también los periodos de retorno de los niveles máximos de ozono, se puede destacar que en las estaciones ninfas y Agua Santa los periodos de retorno son más cortos que en las estaciones Tecnológico y Serdán, además que el ajuste a la distribución VEG se presenta en un grado mayor en las estaciones donde el periodo de retorno es más corto.

Analizando lo anterior contamos con bases sólidas para decidir que distribución me daría mejores resultados de estudio en cada una de las estaciones de monitoreo atmosférico que componen la REMA Puebla.

De la misma forma, decir que podría estar pasando con el comportamiento de los contaminantes, si la disminución del O_3 se debe a que la velocidad del viento ha aumentado o incluso que la dirección del mismo, ha cambiado drásticamente, que esto permite una mejor dispersión de los contaminantes en la ciudad de Puebla o que los programas que se han implementado en los últimos años (Proaire 2006-2011, Proaire 20012-2020, Verificación vehicular, entre otros), están dando frutos.

Esta técnica abarca un sin fin de aplicaciones, por lo cual se deben de considerar posibles estudios a futuro:

- Simulación de datos faltantes.
- Comparación con otra técnica, para hallar parámetros desconocidos de la distribución supuesta.
- Acoplar covariables, tanto físicas como ambientales, en un modelo de Regresión.

Bibliografía

- [1] Asquith, William H., *Distributional Analysis with L-moments Statistics using the R Environment fo Statistical Computing*, primera edición (2011).
- [2] Canavos, George C., *Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y métodos*, (1998).
- [3] Chan, L. K., *On a characterization of distributions by expected values of extreme order statistics*, Am. Math. Mthly, 74,950-951, (1967).
- [4] Coles, A. *An introduccion to statistical modeling of extreme values*, tercera edición, editorial Springer Verlag, ISBN 1852334592, (2004).
- [5] David, H. A., *Order Statistics*, 2nd. End. New York: Wiley, (1981).
- [6] Devore, Jay L., *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, sexta edición.

- [7] Gail, D. A. S. and Gastwirth, J. L., *A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic*, J. R. Statist. Soc. B, 40, 350-257, (1957).
- [8] Greenwood, J.A., *Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressible in Inverse Form*, Wat. Res. Res., 15 (5), pp 1049-1054, (1979).
- [9] Hogg & Tanis, *Probability & Statistical Inference*.
- [10] Hosking, J. R. M. ,*Some theoretical results concerning L-moments*, IBM Research Division, T. J. Watson Research Center Yorktown Heights, NY 10598.
- [11] Hosking, J. R. M., *L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 52, 105-124, (1990).
- [12] Hosking, J. R. M., *Moments or L-moments? An example comparing two measures of distributional shape*, The American Statistician, 46, 186-189, (1992).
- [13] Hosking, J.R.M. and Wallis, J.R., *Regional Frequency Analysis*, (1997).
- [14] Juárez Núñez, Apolonio, Ozono, Laboratorio de Ciencias Aplicadas, UAP,

<http://www.cienciasaplicadas.buap.mx/Divulgacion/ArticulosDivulgacion/MedioAmbiente/ozono.htm>.

- [15] Konheim, A. G., *A note on order statistics*, Am. Math. Mthly, 78, 524, (1971). bibitempanaretos y tsourtiPanaretos J. y Tsourti Z., *Extreme Values Index Estimators and Smoothing alternatives: A criticak review. Stochastic Musings Perspective from the Pioneers of the late 20th century*, (2003).
- [16] Secretaria de Sustentabilidada Ambiental y Ordenamiento Territorial (SSAOT), *Red de Monitoreo Atmférico de Puebla (REMA)*, www.remapuebla.gob.mx
- [17] Reyes,Hortensia J., Vaquera, Humberto y Villaseñor, José A., *Estimation of trends in high urban ozone levels using the quantiles of (GEV)*, (2010).
- [18] Rincón, Luis, *Curso Intermedio de Probabilidad*, Departamento de Matemáticas, Facultad de ciencias, UNAM, Circuito exterior de CU, 04510 México, DF, (2007).
- [19] R, *Paquete lmom en R*, <http://cran.r-project.org/web/packages/lmom/lmom.pdf>
- [20] R, *Paquete lmomco en R*, <http://cran.r-project.org/web/packages/lmomco/lmomco.pdf>
- [21] Semarnat, SSAOT, Puebla, *Programa de Gestión de calidad de la zona Metropolitana del Valle de Puebla 2006-2011*, (2006).

- [22] Semarnat, SSAOT, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, *Programa de Destión de Calidad del aire del estado de Puebla 2012-2020*, (2012).
- [23] Sillitto, G. P., *Interrelations between certain linear systematic statistics of sample from any continuous population*, *Biometrika*, 38, 377-382 (1951).
- [24] Spiegel, Murray R., *Teoría y problemas de Probabilidad y Estadística*.
- [25] Wark, K. y Warner, C.F. *Contaminación del aire, origen y control*, Limusa Noriega (1990).

Apéndice A

Teorema del Límite Central

Abordaremos conceptos básicos de la estadística que son usados para la demostración y aplicación de diversos teoremas. Presentamos el teorema del límite central para la media, en la cual se afirma que si una muestra es lo bastante grande (generalmente cuando el tamaño muestral (n) supera las 30 observaciones), sea cual sea la distribución de la media muestral, seguirá aproximadamente una distribución normal.

Teorema A.1 (Teorema del Límite Central) *Sea $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza finita $\sigma^2 \neq 0$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi(z) \quad (\text{A.1})$$

Apéndice B

L-Moments y Otras Distribuciones

B.0.1. Distribución Logística Generalizada

La distribución Logística Generalizada tiene tres parámetros ξ (Localización), α (escala $\alpha > 0$), y κ (forma, $-1 < \kappa < 1$) y su función de distribución está dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha^{-1} \exp[-(1 - \kappa)]}{[1 + \exp(-Y)]^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$F(x) = 1/[1 + \exp(-Y)], \quad (\text{B.2})$$

donde,

$$Y = \begin{cases} -\kappa^{-1} \log[1 - \kappa(x - \xi)/\alpha] & , \text{ si } \kappa \neq 0, \\ (x - \xi)/\alpha & , \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

La función cuantil está dada por:

$$x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha(1 - [(1 - F)/F]^\kappa)/\kappa & , \text{ si } \kappa \neq 0, \\ \xi - \alpha[(1 - F)/F] & , \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

El rango de la v.a. es:

$$-\infty < x < \xi + \alpha/\kappa \text{ si } \kappa > 0,$$

$$-\infty < x < \infty \text{ si } \kappa = 0,$$

$$\xi + \alpha/\kappa \leq x < \infty \text{ si } \kappa < 0.$$

Los L-Momentos son:

$$\lambda_1 = \xi + \alpha[1/\kappa - \pi/\sin(\kappa\pi)],$$

$$\lambda_2 = \alpha\kappa\pi/\sin(\kappa\pi),$$

$$\tau_3 = -\kappa,$$

$$\tau_4 = (1 + 5\kappa^2)/6,$$

y la relación entre τ_3 y τ_4 es:

$$\tau_4 = \frac{1 + 5(\tau_3)^2}{6}.$$

De acuerdo a los L-moments se describen los parámetros por:

$$\kappa = -\tau_3. \quad (\text{B.5})$$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 \sin(\kappa\pi)}{\kappa\pi}. \quad (\text{B.6})$$

$$\xi = -\lambda_1 - \alpha \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{\pi}{\sin(\kappa\pi)} \right). \quad (\text{B.7})$$

B.0.2. Distribución Normal Generalizada

La Distribución Normal Generalizada tiene tres parámetros ξ (Localización), α (escala, $\alpha > 0$), y κ (forma) y su función de distribución está dada por:

$$f(x) = \frac{\exp(\kappa Y - Y^2/2)}{\alpha\sqrt{(2\pi)}}, \quad (\text{B.8})$$

$$F(x) = \Phi(Y), \quad (\text{B.9})$$

La Función cuantil de la Distribución Normal Generalizada ($x(F)$) no tiene una forma analítica explícita. $\Phi(Y)$, es la función de distribución acumulada de una Distribución Normal Estándar y Y es:

$$Y = \begin{cases} -\kappa^{-1} \log[1 - \kappa(x - \xi)/\alpha] & , \text{ si } \kappa \neq 0, \\ (x - \xi)/\alpha & , \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

El rango de la v.a. es:

$$-\infty < x < \xi + \alpha/\kappa \text{ si } \kappa > 0,$$

$$-\infty < x < \infty \text{ si } \kappa = 0,$$

$$\xi + \alpha/\kappa \leq x < \infty \text{ si } \kappa < 0.$$

Los primeros 2 L-Momentos son:

$$\lambda_1 = \xi + \frac{\alpha}{\kappa} [1 - \exp(\kappa^2/2)],$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{\kappa} [\exp(\kappa^2/2)] [1 - 2\phi(-\kappa/\sqrt{(2)})].$$

Para el resto de los L-Moments no existen expresiones simples, es por ello que se utilizan métodos numéricos.

Los parámetros son dados por:

$$\xi = \zeta + \eta, \quad (\text{B.11})$$

$$\alpha = \eta\sigma_{log}, \quad (\text{B.12})$$

$$\kappa = \sigma_{log}, \quad (\text{B.13})$$

donde, ζ es una cota inferior en el espacio real para el caso en el que $\zeta < \lambda_1 - \lambda_2$; $\sigma_{log} > 0$, es la desviación estándar de la distribución log-Normal, y $\eta = \exp(\mu_{log})$, con μ_{log} la media de la distribución log-Normal.

B.0.3. Distribución Pareto Generalizada

La distribución Pareto Generalizada tiene parámetros ξ (Localización), α (escala $\alpha > 0$), y κ (forma, $-1 < \kappa < 1$) y su función de distribución está dada por:

$$f(x) = \alpha^{-1} \exp[-(1 - \kappa)Y], \quad (\text{B.14})$$

$$F(x) = 1 - \exp(-Y), \quad (\text{B.15})$$

donde,

$$Y = \begin{cases} -\kappa^{-1} \log[1 - \kappa(x - \xi)/\alpha] & , \text{ si } \kappa \neq 0, \\ (x - \xi)/\alpha & , \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

La función cuantil está dada por:

$$x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha[1 - (1 - F)^\kappa]/\kappa & , \text{ si } \kappa \neq 0, \\ \xi - \alpha(1 - F) & , \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

El rango de la v.a. es:

$$\xi < x \leq \xi + \alpha/\kappa \text{ si } \kappa > 0,$$

$$\xi \leq x < \infty \text{ si } \kappa \leq 0.$$

Los L-Momentos son:

$$\lambda_1 = \xi + \alpha/(1 + \kappa),$$

$$\lambda_2 = \alpha/[(1 + \kappa)(2 + \kappa)],$$

$$\tau_3 = (1 - \kappa)/(3 + \kappa),$$

$$\tau_4 = (1 - \kappa)(2 - \kappa)/[(3 + \kappa)(4 + \kappa)].$$

Los parámetros dado un ξ conocido son:

$$\kappa = [(\lambda_1 - \xi)/\lambda_2] - 2, \quad (\text{B.18})$$

$$\alpha = (1 + \kappa)(\lambda_1 - \xi), \quad (\text{B.19})$$

y la relación entre τ_3 y τ_4 es:

$$\tau_4 = \frac{\tau_3(1 + 5\tau_3)}{5 + \tau_3}.$$

Los parámetros cuando ξ es desconocido, están dados por:

$$\kappa = (1 - 3\tau_3)/(1 + \tau_3), \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha = (1 + \kappa)(2 + \kappa)\lambda_2, \quad (\text{B.21})$$

$$\xi = \lambda_1 - (2 + \kappa)\lambda_2, \quad (\text{B.22})$$

B.0.4. Distribución Pearson tipo III

La función de Distribución Pearson tipo III, tiene parámetros μ (media, Localización), σ (desviación estándar, escala), y γ (asimetría, forma), pero expresada con parámetros alternativos ξ (Localización), β (escala, $\beta > 0$), y α (forma, $\alpha > 0$) y su función de distribución está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \beta^{-\alpha}(x - \xi)^{\alpha-1} \exp(-Y_1)/\Gamma(\alpha) & , \text{ si } \gamma > 0, \\ \beta^{-\alpha}(\xi - x)^{\alpha-1} \exp(-Y_2)/\Gamma(\alpha) & , \text{ si } \gamma < 0, \\ \varphi((x - \mu)/\sigma) & , \text{ si } \gamma = 0. \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

$$F(x) = \begin{cases} G(\alpha, Y_1)/\Gamma(\alpha) & , \text{ si } \gamma > 0, \\ 1 - G(\alpha, Y_2)/\Gamma(\alpha) & , \text{ si } \gamma < 0, \\ \Phi((x - \mu)/\sigma) & \text{ si } \gamma = 0. \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

La función cuantil $x(F)$, no tiene una forma analítica explícita.

Donde,

$$Y_1 = (x - \xi)/\beta, \quad (\text{B.25})$$

y

$$Y_2 = (\xi - x)/\beta, \quad (\text{B.26})$$

y donde $G(a, b)$ es la función gamma incompleta, $\Gamma(a)$ es la función gamma completa, $\varphi(a)$ es la función de distribución de probabilidad de la distribución Normal. La relación entre el producto de

98APÉNDICE B. L-MOMENTS Y OTRAS DISTRIBUCIONES

momentos y los tres parámetros alternativos para $\gamma \neq 0$ es:

$$\alpha = 4/\gamma^2,$$

$$\beta = \sigma|\gamma|/2,$$

$$\xi = \mu - 2\sigma/\gamma.$$

La función gamma incompleta $G(a, b)$ está dada por la siguiente expresión:

$$G(a, b) = \int_0^b t^{a-1} \exp(-t) dt, \quad (\text{B.27})$$

y la función gamma completa $\Gamma(a)$ esta dada por:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt. \quad (\text{B.28})$$

La parametrización particular de la distribución Pearson tipo III es de gran uso en datos hidrológicos, más común en situaciones donde la asimetría es positiva, los rangos de la v.a. es:

$$\xi < x \leq \infty \text{ si } \gamma > 0,$$

$$\infty < x < \infty \text{ si } \gamma = 0,$$

$$\infty < x \leq \xi \text{ si } \kappa < 0.$$

Los L-Momentos son:

$$\lambda_1 = \xi + \alpha\beta,$$

$$\lambda_2 = \pi^{-1/2}\beta\Gamma(\alpha + 1/2)/\Gamma(\alpha),$$

$$\tau_3 = 6I_{1/3}(\alpha, 2\alpha) - 3,$$

donde, $I_x(p, q)$, denota la función de radio de Beta incompleta, función Beta incompleta regularizada, función Beta corta regularizada:

$$I_x(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt. \quad (\text{B.29})$$

Los parámetros tienen soluciones cuasi-analíticas. Las siguientes aproximaciones son la mejores, menor a 5×10^{-5} para cualquier valor de α . Si $0 < |\tau_3| < 1/3$, sea $z = \pi\tau_3^2$ y usando la aproximación minimax por [12] para α ,

$$\alpha \approx \frac{1 + 0.2906z}{z + 0.1882z^2 + 0.0442z^3}, \quad (\text{B.30})$$

si $1/3 \leq |\tau_3| < 1$, sea $z = 1 - |\tau_3|$ y usando:

$$\alpha \approx \frac{0.36067z - 0.59567z^2 - 0.25361z^3}{1 - 2.78862z + 2.56096z^2 - 0.77045z^3}. \quad (\text{B.31})$$

Los parámetros en términos de α y los L-Moments están dados por:

$$\gamma = \text{sign}(\tau_3) \frac{2}{\sqrt{(\alpha)}}, \quad (\text{B.32})$$

$$\sigma = \frac{\lambda_2 \Gamma(\alpha) \sqrt{(\alpha\pi)}}{\Gamma(\alpha + 0.5)}, \quad (\text{B.33})$$

$$\mu = \lambda_1. \quad (\text{B.34})$$

Apéndice C

Estimadores de Máxima Verosimilitud para la Distribución VEG

Obteniendo los estimadores de máxima verosimilitud para comparar nuestros resultados se tiene que solo salen para la estación Agua Santa C.1, para las otras tres no corre el programa y sale esto:

Error en optim(imit, gev.lik, hessian = TRUE, method = method, control = list(maxit = maxit, : valor no finito provisto por optim

Para la estación Agua Santa tenemos los parámetros: También se obtienen las gráficas que verifican las suposiciones del modelo C.1:

Estación	μ	σ	ξ
Agua Santa	49.730	19.237	-0.0368

Cuadro C.1: Parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud para la estación Agua Santa.

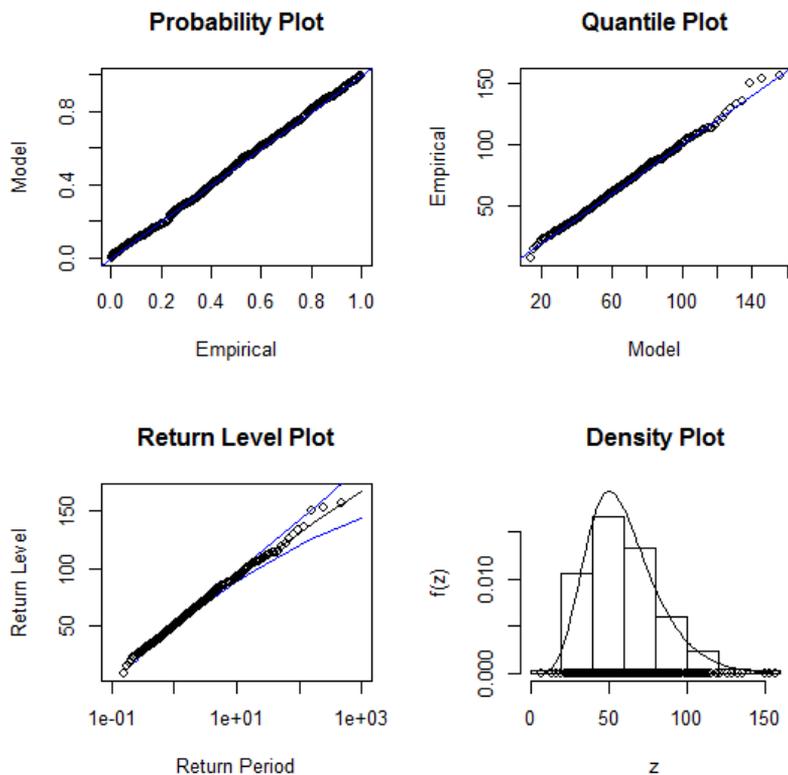


Figura C.1: Prueba gráfica para la estación Agua Santa por el método de máxima verosimilitud.