Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRODUCTO DE ESPACIOS DE LINDELÖF

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JUAN ALBERTO MARTÍNEZ CADENA

DIRECTOR DE TESIS
OLEG OKUNEV

PUEBLA, PUE. OCTUBRE, 2011

A mis padres,
Juan Martínez Martínez
y Lucia Cadena Matamoros.

Agradecimientos

A mis padres,
por su apoyo, comprensión
y por inculcarme la importancia de la educación.

Al M.C. Manuel Ibarra Contreras,
por despertar en mi un gusto enorme por la topología
y ayudarme a mejorar como estudiante.

A mi asesor, el Dr. Oleg Okunev,
por su paciencia, y dedicación al compartirme
parte de sus conocimientos y experiencias.

A mis amigos,
Jose A. Chavez Castillo, Jose A. Cariño Ortega,
Jaime Sánchez Maldonado, Prihel Cavildo Sánchez,
Rafael A. Nava Manzo y Evelyn Flores Flores,
por su ayuda y convivencia fraternal .

Al M.C. Pedro García Ángeles,
por su motivación y consejos
al inicio de mi carrera.

Introducción

La noción de los espacios de Lindelöf, fue introducida por Alexandroff y Urysohn en 1929, desde entonces ha sido un tema muy importante en la topología y relacionado con distintas otras propiedades topológicas.

La propiedad de Lindelöf es más general que la propiedad de ser compacto. Como el Teorema de Tychonoff establece que el producto de cualquier colección de espacios topológicos compactos es compacto, es natural preguntarnos si esta propiedad se conserva en los espacios de Lindelöf.

Es bien sabido que muchos de los resultados de la invariancia de las propiedades de cubiertas en producto son negativas, es decir, las propiedades de cubiertas simplemente no son conservadas por el producto a menos que uno o más de los factores cumplan condiciones adicionales.

En esta Tesis se estudiará la propiedad productiva de los espacios de Lindelöf, mostrando ejemplos donde esta no se cumple, así como condiciones bajo las cuales esta propiedad se preserva.

Además abarcamos otros conceptos topológicos importantes como lo son los mapeos compacto valuados superiormente semicontinuos, espacios Lindelöf Σ, P-espacios, conjuntos de Bernstein, espacios paracompactos y los conjuntos de Sierpiński, además de algunas de sus propiedades.

Índice general

Producto de espacios de Lindelöf

Juan Alberto Martínez Cadena

Octubre, 2011

Capítulo 1

Preliminares

El único requisito para la lectura de esta tesis es el conocimiento de algunos hechos básicos de topología general. Este capítulo está diseñado con la idea de que el lector pueda revisar en él, resultados básicos de la teoría de espacios de Lindelöf. Sin embargo, debemos de señalar que en este apartado no se hallará un desarrollo detallado de los distintos temas que se tocan en el mismo.

1.1. Notación y Terminología

En esta tesis usamos la terminología y notación como en el libro [3].

El siguiente concepto fue introducido por L. Vietoris en 1921 y es una propiedad fundamental en los espacios de Lindelöf como se estudiará más adelante.

Definición 1.1. *Un espacio topológico X es* ***regular*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) X es un espacio T_1;

(2) para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

Dado A subconjunto de un espacio topológico, denotaremos $\overline{A}$ como la cerradura de A, a menos que se especifique de otra forma.

Proposición 1.2. *Si X es un espacio regular, entonces para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Definición 1.3. *Un espacio topológico X es* ***completamente regular*** *(o de Tychonoff) si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) X es un espacio T_1;

(2) para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una funcion continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$.

El axioma de normalidad fue introducido por Heinrich Tietze en el primero de una serie de tres artículos que aparecieron en 1923. Este axioma de separación también fue introducido y estudiado independientemente por P. Alexandroff y P. Uryshon en 1924.

Definición 1.4. *Un espacio topológico X es* ***normal*** *si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) X es un espacio T_1;

(2) para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

Definición 1.5. *Una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos en un espacio topológico X es una* ***base*** *de X si para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de x existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

Definición 1.6. *Un espacio topológico X es* ***segundo numerable*** *si X tiene una base numerable.*

Un primer hecho importante relacionado a la propiedad de ser segundo numerable, es que cualquier base de una topología segundo numerable contiene una base numerable.

Definición 1.7. *Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos en un espacio topológico X es una* ***red*** *de X si para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de x existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subset U$.*

Un subconjunto de un espacio topológico que es a la vez abierto y cerrado en él, recibirá el nombre de subconjunto cerrabierto.

Definición 1.8. *Un espacio topológico X es* ***0-dimensional*** *si X es T_1 y posee una base formada por conjuntos cerrabiertos.*

Definición 1.9. *Una* ***compactación*** *de un espacio X es un espacio de Hausdorff y compacto Z, el cual contiene un espacio denso homeomorfo a X.*

Es decir, Z es una compactación de X si existe $Y \subset Z$ tal que $\overline{Y} = Z$ y existe un homeomorfismo $h : X \to Y \subset Z$; tal homemorfismo se llama **encaje** de X en Z. Con el símbolo βX denotamos la compactación de Stone-$\hat{C}$ech.([3]).

El símbolo ω denota el conjunto de todos los números naturales (incluyendo al cero). El símbolo $\mathfrak{c}$ denota la cardinalidad de continuo. El símbolo $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto X.

1.2. Propiedades Básicas de Espacios de Lindelöf

Definición 1.10. *Un espacio topológico X es un* ***espacio de Lindelöf*** *si es regular y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta a lo más numerable.*

En el curso básico de Topología General se demuestra que todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es un espacio de Lindelöf y que toda imagen continua de un espacio de Lindelöf es un espacio de Lindelöf.

Proposición 1.11. *Un espacio discreto X es de Lindelöf si y sólo si X es a lo más numerable.*

Demostración. La cubierta de X por singuletes es una cubierta abierta que no tiene subcubiertas propias. Entonces X es de Lindelöf si y sólo si ésta cubierta es a lo más numerable si y sólo si X es a lo más numerable. $\square$

Como una consecuencia de la Proposición 1.11 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.12. *Si X es un espacio de Lindelöf, entonces todo conjunto cerrado y discreto en X es a lo más numerable.*

Definición 1.13. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de X. $\mathcal{U}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{V}$ si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset V$.*

Lema 1.14. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un conjunto X. Si $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento a lo más numerable, entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta a lo más numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento a lo más numerable de $\mathcal{U}$, entonces para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U_V$. Sea

$$\mathcal{U}' = \{U_V : V \in \mathcal{V}\},$$

como $\mathcal{V}$ es a lo más numerable, $\mathcal{U}'$ es a lo más numerable. Ahora, sea $x \in X$, como $\mathcal{V}$ es una cubierta de X, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$, entonces $x \in U_V$, es decir, $\mathcal{U}'$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ a lo más numerable. $\square$

Es claro que toda cubierta abierta de un espacio topológico tiene un refinamiento que consiste de elementos de cualquier base dada del espacio.

Corolario 1.15. *Todo espacio regular y segundo numerable es un espacio de Lindelöf.*

Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X **tiene la propiedad de intersecciones numerables** si toda subfamilia a lo más numerable de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

Proposición 1.16. *Un espacio regular X es de Lindelöf si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersecciones numerables tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sea X de Lindelöf, y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersecciones numerables. Supongamos que la intersección de $\mathcal{F}$ es vacía. Entonces la familia $\mathcal{U}$ de los complementos de elementos de $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta a lo más numerable de $\mathcal{U}$. Entonces la familia $\mathcal{F}'$ de los complementos de elementos de $\mathcal{U}'$ es una subfamilia a lo más numerable de $\mathcal{F}$, y $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$. Esto contradice a la suposición de que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersecciones numerables.

Ahora supongamos que toda familia con la propiedad de intersecciones numerables de conjuntos cerrados en X tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X; sea $\mathcal{F}$ la familia de los complementos de elementos de $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos cerrados en X, y del hecho que $\mathcal{U}$ es una cubierta de X se sigue que la intersección de $\mathcal{F}$ es vacía. Entonces, $\mathcal{F}$ tiene una subfamilia a lo más numerable $\mathcal{F}'$ tal que $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$, y

$$\mathcal{U}' = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}'\}$$

es una subcubierta a lo más numerable de la cubierta $\mathcal{U}$. □

Un espacio es **hereditariamente de Lindelöf** si todos sus subespacios son de Lindelöf. Observese que todos los espacios regulares y segundo numerables son espacios hereditariamente de Lindelöf, ya que son espacios de Lindelöf y el segundo axioma de numerabilidad se hereda a cualquier subespacio.

Definición 1.17. *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{C}$ de conjuntos en X es* ***localmente finita*** *si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad V tal que el conjunto $\{A \in \mathcal{C} : A \cap V \neq \emptyset\}$ es finito.*

El siguiente concepto fue introducido por Jean Dieudonné en 1944 y ha demostrado su importancia en varias ramas de la matemática.

Definición 1.18. *Un espacio topológico X es* ***paracompacto*** *si X es de Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Teorema 1.19. ([3], Teorema 5.1.5) *Todo espacio paracompacto es normal.*

Teorema 1.20. ([3], Teorema 5.1.2) *Todo espacio de Lindelöf es paracompacto.*

Demostración. Sea X un espacio de Lindelöf. Como X es regular entonces es Hausdorff. Ahora, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y para todo $x \in X$ sea $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Como X es regular, por el Teorema 1.2, existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$, entonces $\{V_x : x \in X\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Como X es de Lindelöf, existe una subcubierta a lo más numerable $\{V_n : n \in \omega\}$ de esta cubierta. Sean $U_i \in \mathcal{U}$, $i \in \omega$ tales que $\overline{V}_i \subset U_i$. Definimos:

$$W_n = U_n \setminus \bigcup_{k<n} \overline{V_k}.$$

Entonces $\{W_n : n \in \omega\}$ es una cubierta abierta, ya que para cada $x \in X$, sea $m_x = \text{mín}\{l \in \omega : x \in \overline{V_l}\}$, entonces

$$x \in U_{m_x} \setminus \bigcup_{k<m_x} \overline{V_k},$$

por lo que $x \in W_{m_x}$. Ademas, $\{W_n : n \in \omega\}$ es una familia localmente finita, ya que $V_j \cap W_i = \emptyset$, para $i > j$. □

Corolario 1.21. *Todo espacio de Lindelöf es normal.*

En general, espacios paracompactos no necesariamente son de Lindelöf. Por ejemplo, todo espacio discreto es paracompacto, pero sólo espacios discretos a lo más numerables son de Lindelöf. Sin embargo, en algunos casos la paracompacidad implica la propiedad de Lindelöf.

Teorema 1.22. *Si X es paracompacto y separable, entonces X es de Lindelöf.*

Demostración. Como X es paracompacto entonces es normal y en particular regular. Ahora, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, y $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Como X es separable, existe un conjunto $D = \{x_n \in$

$X : n \in \omega\}$ denso en X. Para todo $n \in \omega$ sea W_n una vecindad de x_n tal que el conjunto

$$\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{V} : V \cap W_n \neq \emptyset\} \text{ es finito.}$$

Denotamos $\mathcal{V}_n = \{V_1^n, V_2^n, ..., V_{k_n}^n\}$. Ahora, para todo $n \in \omega$ y para todo $i \in \{1, 2, ..., k_n\}$ fijamos $U_i{}^n \in \mathcal{U}$ tal que $V_i^n \subset U_i{}^n$. Sea

$$\mathcal{U}' = \{U_i{}^n \in \mathcal{U} : n \in \omega, \quad i \in \{1, 2, ..., k_n\}\}.$$

Ahora, dado $x \in X$, fijamos $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Como D es denso, existe un $m \in \omega$ tal que $x_m \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}_m$ (pues $W_m \cap V \neq \emptyset$), es decir, existe $j \in \{1, 2, ..., k_n\}$ tal que $V = V_j{}^m$. Entonces $U_j{}^m \in \mathcal{U}$ está determinado de tal modo que $V_j{}^m \subset U_j{}^m$, así $x \in V = V_j{}^m \subset U_j{}^m \in \mathcal{U}'$. Como $\mathcal{U}'$ es a lo más numerable, hemos encontramos una subcubierta a lo más numerable de $\mathcal{U}$.

□

1.3. Topología Producto

El producto cartesiano de una colección de conjuntos es uno de los conceptos más importantes y ampliamente utilizado en ideas matemáticas. La teoría de los espacios producto constituye una parte muy interesante y compleja de la topología de conjuntos.

Observe que si $f : X \to Y$ es una función donde $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico, siempre es posible considerar una topología en X que haga de f una función continua.

Proposición 1.23. *El conjunto* ${}_f\mathcal{T}=\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}_Y\}$ *es una topología en* X.

A la topología ${}_f\mathcal{T}$ le llamamos **topología débil** en X definida por f y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ (o topología inicial en X inducida por f).

Como los elementos de ${}_f\mathcal{T}$ son precisamente las imágenes inversas de los subconjuntos abiertos de Y, resulta que si dotamos a X con la topología ${}_f\mathcal{T}$, la función f es continua.

Proposición 1.24. *La topología* ${}_f\mathcal{T}$ *es la menor (o más débil) de las topologías para* X *que hacen continua a la función* f.

Ejemplo 1.25. *Consideremos un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$*, y sea* E *un subconjunto de* X*. Sea* $j : E \to X$ *la función inclusión* ($j(x) = x$ *para todo* $x \in E$)*. Entonces la topología* ${}_j\mathcal{T}$ *es igual a* $\{j^{-1}[A] : A \in \mathcal{T}\} = \{E \cap A : A \in \mathcal{T}\}$*; es decir,* ${}_j\mathcal{T}$ *coincide con la topología* $\mathcal{T}_E$ *que transforma a* E *en subespacio de* $(X, \mathcal{T})$*.*

Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones definidas sobre un conjunto X. Denotemos por ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ (o ${}_f\mathcal{T}$ si f es el único elemento de $\mathcal{F}$) a la menor de las topologías en X que convierten a cada función $f \in \mathcal{F}$ en una función continua.

Teorema 1.26. *La familia* $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{-1}(A) : \alpha \in I \;\; y \;\; A \in \mathcal{T}_\alpha\}$ *es una subbase para la topología* ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$*.*

Para cada pareja de conjuntos X y Y podemos considerar al conjunto $X \times Y$. En el caso en que tanto en X como en Y estén definidas estructuras topológicas, es natural intentar construir alguna topología en $X \times Y$ que se encuentre convenientemente relacionada con las topologías de cada factor. Un modo natural de hacer esto es usando las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ($\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in X \times Y$) son funciones que relacionan naturalmente a $X \times Y$ con los espacios topológicos X y Y.

Definición 1.27. *Dados dos espacios topológicos* $(X, \mathcal{T}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*, llamaremos* ***topología producto*** $\mathcal{P}$*, o topología de Tychonoff, en* $X \times Y$ *, a la topología* ${}_{\{\pi_X, \pi_Y\}}\mathcal{T}$*; es decir,* $\mathcal{P}$ *es la menor de las topologías en* $X \times Y$ *que convierte a* π_X *y* π_Y *en funciones continuas.*

Observe que si alguno de los espacios X ó Y es vacío, entonces $X \times Y$ y $\mathcal{P}$ son vacíos.

Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{D}$ es una base de $\mathcal{T}_Y$, entonces

$$\{\pi_X^{-1}(B) \cap \pi_Y^{-1}(D) : B \in \mathcal{B} \;\; y \;\; D \in \mathcal{D}\}$$

es una base para $\mathcal{P}$. Ahora bien, $\pi_X^{-1}(B) \cap \pi_Y^{-1}(D) = B \times C$. Concluimos así que la colección $\{B \times C : B \in \mathcal{B} \ \ y \ \ D \in \mathcal{D}\}$ es una base para $\mathcal{P}$.

Proposición 1.28. *Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son funciones continuas y abiertas cuando consideramos en $X \times Y$ la topología producto.*

Cuando una propiedad topológica P que comparten dos espacios X y Y, se conserva cuando consideramos la topología producto en $X \times Y$, diremos que P es una propiedad finitamente productiva.

Proposición 1.29. *Si X y Y son dos espacios topológicos segundo numerables (respectivamente, primero numerables, separables), entonces $X \times Y$ también es un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable, separable).*

Las afirmaciones y resultados anteriormente mostrados en esta sección pueden consultarse con más detalle en [2].

1.4. Producto de una familia arbitraria de espacios Topológicos

Construiremos una topología producto también para el caso en que la colección de espacios topológicos dados es infinita.

Consideremos una familia $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ de espacios topológicos no vacíos, en donde I es un conjunto no vacío finito o infinito. Sea $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ el conjunto de todas las posibles funciones de elección definidas sobre la colección $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$. Es decir,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha : \text{para cada } \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha \right\}.$$

Para cada $\beta \in I$, podemos definir la función

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$$

como $\pi_\beta(f) = f(\beta)$ para cada $f \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. A π_β le llamaremos proyección sobre el β-ésimo factor. Agrupamos a todas estas funciones en una colección $P = \{\pi_\beta : \beta \in I\}$.

Podemos ahora considerar en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ la topología débil ${}_P\mathcal{T}$ inducida por P. A la pareja $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha, {}_P\mathcal{T})$ le llamaremos **producto topológico o producto Tychonoff** de los espacios X_α, y a ${}_P\mathcal{T}$ le llamamos **topología producto o topología Tychonoff** en el producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

El producto arbitrario de espacios topológicos fue definido por Tychonoff en 1930.

El siguiente Teorema es conocido como la propiedad universal de la topología producto.

Teorema 1.30. *Sea X un espacio topológico y $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $f : X \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para todo $\alpha \in I$.*

Ejemplo 1.31. *Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos no vacíos, por la definición general del producto cartesiano, el producto de la familia $\{A_n : n \in \omega\}$ es*

$$\prod_{n\in\omega} A_n = \left\{ f : \omega \to \bigcup_{n\in\omega} A_n : \textit{para cada } n \in \omega, f(n) \in A_n \right\}.$$

Entonces los elementos de $\prod\limits_{n\in\omega} A_n$ son sucesiones $(x_n)_{n\in\omega}$ de elementos en $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ cuyo i-ésimo término, $x_i = f(i)$, pertenece a A_i.

Note que no se requiere que los conjuntos A_i sean diferentes uno del otro. De hecho, ellos pueden ser todos iguales a un mismo conjunto A. En este caso, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ es justamente el conjunto A^n de n-adas de elementos en A, y el producto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ...$ es justamente el conjunto A^ω de todas las sucesiones de elementos en A. En particular, el conjunto ω^ω es el conjunto de todas las funciones $f : \omega \to \omega$.

En otras palabras, ω^ω es el conjunto de todas las sucesiones de los números naturales. De la descripción de la topología producto de Tychonoff se sigue que la familia de todos los conjuntos de la forma

$$W_s = \{f \in \omega^\omega : f|n = s\},$$

donde n es un número natural y s es una sucesión de naturales de longitud n, es una base de la topología de ω^ω, pues

$$W_s = \pi_0^{-1}(s_0) \cap \cdots \cap \pi_{n-1}^{-1}(s_{n-1}), \text{ donde } s = (s_0, \ldots, s_{n-1}).$$

Los conjuntos W_s se llaman los conjuntos **abiertos canónicos** en ω^ω. Es fácil ver que los conjuntos abiertos canónicos son también cerrados, y entonces el espacio ω^ω es cero dimensional.

Es claro que el espacio topológico discreto ω es **completamente metrizable**, es decir, existe una métrica completa en este espacio que genera la topología. Se sigue que el producto ω^ω es completamente metrizable (Teorema 4.3.12 en [3]).

Como el conjunto de todas las sucesiones finitas de los números naturales es numerable, la familia de todos los conjuntos abiertos canónicos es numerable. Se sigue que el espacio ω^ω es un espacio métrico separable. Los espacios segundo numerables completamente metrizables se llaman **espacios polacos**; entonces ω^ω es un espacio polaco.

Teorema 1.32. ([4], Teorema 1.25) *Todo espacio polaco no vacío es una imagen continua de ω^ω.*

El espacio ω^ω se puede representar como un subespacio de la línea real.

Teorema 1.33. ([4], Teorema 1.29) *El espacio ω^ω es homeomorfo al conjunto de todos los números irracionales en $\mathbb{R}$.*

Sea X un espacio topológico, $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones. Bajo estas condiciones podemos definir la función $f : X \to \prod\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ cuya regla de asociación está dada por: $f(x)$ es el único elemento de $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ cuya β-ésima coordenada es $f_\beta(x)$ (para toda $\beta \in I$). Por el Teorema 1.30 tenemos que en el caso en que cada una de las funciones f_α es continua, se tiene que la función f también es una función continua, ya que, $(\pi_\alpha \circ f)(x) = \pi_\alpha(f(x)) = f_\alpha(x)$ (para toda $\alpha \in I$). La función f es llamada el **producto diagonal de las funciones** f_α y es comúnmente denotada con el símbolo Δf_α.

1.5. Mapeos cvss

Definición 1.34. *Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es* ***perfecta*** *si f es cerrada, sobreyectiva y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto en X.*

Observación 1.35. ([3])

(1) Cualquier función perfecta inyectiva es un homeomorfismo.

(2) Cualquier función continua y sobreyectiva entre dos espacios compactos y T_2 es perfecta.

(3) Sea $f : X \to Y$ una función perfecta, y sea C un subespacio compacto de Y entonces $f^{-1}[C]$ es un subespacio compacto de X.

Definición 1.36. *Un* ***mapeo multivaluado*** *de X a Y es una función de X a $\mathcal{P}(Y)$.*

Definición 1.37. *Sean $f : X \to Y$ un mapeo multivaluado y $A \subset X$. La* ***imagen de*** *A* ***bajo*** *f es el conjunto*

$$f(A) = \bigcup \{f(x) : x \in A\}.$$

La función f es ***sobre*** *Y, o sobreyectiva si $f(X) = Y$.*

De aquí en adelante se especificará cuando se tome un mapeo multivaluado.

Definición 1.38. *Un mapeo multivaluado $f : X \to Y$ es* ***superiormente semicontinuo*** *si para todo $V \subset Y$ abierto, el conjunto $\{x \in X : f(x) \subset V\}$ es abierto en X.*

Definición 1.39. *Sean X y Y unos espacios topológicos. Un mapeo multivaluado $f : X \to Y$ es* ***compacto valuado*** *si para todo $x \in X$, el conjunto $f(x)$ es compacto en Y.*

Nosotros abreviamos como "cvss" la expresión "compacto valuado superiormente semicontinuo".

Los mapeos usuales se pueden considerar como mapeos multivaluados cuyas imagenes de puntos son singuletes. Es obvio que un mapeo uno valuado es cvss si, y sólo si es continuo.

Proposición 1.40. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces el mapeo multivaluado $f^{-1} : Y \to X$ es cvss si y sólo si f es perfecta.*

Demostración. Como f^{-1} es compacto valuada, f tiene fibras compactas. Para demostrar que f es perfecta sólo queda probar que f es cerrada. Sea $F \subset Y$ cerrado, entonces el conjunto $\{y \in Y : f^{-1}(y) \subset X \setminus F\}$ es abierto en Y. Por lo que $\{y \in Y : f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset\} = \{y \in Y : y \in f(F)\} = f(F)$ es cerrado en Y. Por lo tanto f es cerrada.

Ahora supongamos que f es perfecta, entonces las imágenes de puntos bajo $p = f^{-1}$ son compactos por que ellas coinciden con las fibras de f. Para demostrar que p es superiormente semicontinua, sean y_0 un punto de Y, $F_0 = p(y_0)$ y U una vecindad abierta de F_0 en X. Entonces el conjunto $V = \{y \in Y : p(y) \subset U\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap (X \setminus U) = \emptyset\} = Y \setminus f(X \setminus U)$ es abierto por que $X \setminus U$ es cerrado y f es una función cerrada. Es claro que $y_0 \in V$. □

Para demostraciones de la semicontinuidad superior de varios mapeos concretos, es útil el concepto de la semicontinuidad superior en un punto.

Definición 1.41. *Sean $p : X \to Y$ un mapeo multivaluado y x_0 un punto de X. Se dice que p es superiormente semicontinuo en el punto x_0 si para toda vecindad V de $p(x_0)$ en Y el conjunto $\{x \in X : p(x) \subset V\}$ es una vecindad de x_0.*

También se tiene que p es superiormente semicontinuo en x_0 si y sólo si para toda vecindad V de $p(x_0)$ en Y existe una vecindad U de x_0 en X tal que $p(U) \subset V$, y que p es superiormente semicontinuo (en todo X) si y sólo si p es superiormente semicontinuo en todo punto de X.

Teorema 1.42. *Sea X un espacio de Lindelöf. Si existe un mapeo cvss de X sobre Y, entonces Y es de Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Y, y sea $\mathcal{V}'$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{V}$. Es claro que $\mathcal{V}$ tiene una subcubierta numerable si $\mathcal{V}'$ tiene una subcubierta numerable.

Como f es compacto valuado, para todo $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{V}'$ tal que $f(x) \subset V_x$. El conjunto $U_x = \{z \in X : f(z) \subset V_x\}$ es abierto en X, pues f es superiormente semicontinua, entonces $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es de Lindelöf, existe una subcubierta $\{U_x^n : n \in \omega\}$ a lo más numerable de esta, por lo que $\{V_x^n : n \in \omega\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{V}'$. Esto es, para cada $y \in Y$ existe $x_0 \in X$ tal que $y \in f(x_0)$, entonces existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_0) \subset V_{x_1}$ y $x_1 \in U_{x_1} = U_{x_1}^m$ para algún $m \in \omega$, es decir, $y \in f(x_0) \subset V_{x_1}^m$. Por lo tanto Y es de Lindelöf.

□

Un argumento similar demuestra la siguiente afirmación.

Teorema 1.43. *Sea X un espacio compacto. Si existe un mapeo cvss de X sobre Y, entonces Y es compacto.*

Definición 1.44. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ mapeos multivaluados. La **composición de** f **y** g es el mapeo multivaluado $g \circ f : X \to Z$ definido por la regla: $g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Proposición 1.45. *Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son mapeos cvss, entonces la composición $g \circ f$ es cvss.*

Demostración. Sea $V \subset Z$ abierto, entonces el conjunto

$$\begin{aligned}
\{x \in X : g(f(x)) \subset V\} &= \{x \in X : \bigcup\{g(y) : y \in f(x)\} \subset V\} \\
&= \{x \in X : \text{ para todo } y \in f(x), \quad g(y) \subset V\} \\
&= \{x \in X : f(x) \subset \{y \in Y : g(y) \subset V\}\}
\end{aligned}$$

es abierto en X, ya que el conjunto $\{y \in Y : g(y) \subset V\}$ es abierto en Y y f es superiormente semicontinuo.

El mapeo $g \circ f$ es compacto valuado por el Teorema 1.43. $\square$

Capítulo 2

Clases productivas de espacios de Lindelöf

2.1. Lindelöf Σ-espacios

En 1969 Nagami publicó su trabajo [7] acerca de los Σ-espacios, el cual, sigue siendo una referencia clásica. Pronto se hizo evidente que la clase de los Σ-espacios con la propiedad de Lindelöf (es decir, la clase de los Lindelöf Σ-espacios) merece una atención especial. Desde entonces, los Lindelöf Σ-espacios ocupan un lugar importante en la topología, así como en el análisis funcional, álgebra topológica y la teoría descriptiva de conjuntos.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X es una* ***red módulo*** *$\mathcal{C}$ si para todo $K \in \mathcal{C}$ y para todo U abierto en X tal que $K \subset U$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $K \subset N \subset U$.*

Definición 2.2. (K. Nagami, [7]) *Un espacio topológico X es un* ***Σ-espacio*** *si existe una cubierta $\mathcal{C}$ de X de conjuntos cerrados numerablemente compactos y una red σ-discreta módulo $\mathcal{C}$.*

Diremos que una cubierta $\mathcal{C}$ de un espacio topológico X es compacta si esta formada por subconjuntos compactos de X.

Teorema 2.3. ([8]) Un espacio topológico X es un Lindelöf Σ-espacio si y sólo si existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable módulo $\mathcal{C}$.

Teorema 2.4. *Un espacio topológico X es un Lindelöf Σ-espacio si y sólo si existen un espacio segundo numerable M y un mapeo cvss, $P : M \to X$ tal que $X = P(M)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{N} = \{N_k : k \in \omega\}$ una red numerable módulo $\mathcal{C}$. Para todo $C \in \mathcal{C}$ elegimos un punto $s_C \in \omega^\omega$ tal que $\{s_C(n) : n \in \omega\} = \{k \in \omega : C \subset N_k\}$. Sea $M = \{s_C : C \in \mathcal{C}\}$. Entonces M es segundo numerable, ya que ω^ω es segundo numerable. Sea $P : M \to X$ definida por la regla

$$P(s) = \bigcap_{n \in \omega} N_{s(n)}.$$

Entonces P es compacto valuado ya que $P(s_C) = C$.

Verifiquemos que P es superiormente semicontinuo. Sean $s \in M$ y $C = P(s)$. Entonces, C es un elemento de la cubierta $\mathcal{C}$. Si U es una vecindad de C, entonces existe un elemento N_k de $\mathcal{N}$ tal que $C \subset N_k \subset U$. Por la construcción del conjunto M, existe $m \in \omega$ tal que $s_m = k$. Sea W el conjunto de todos los elementos de M cuya m-ésima coordenada es igual a k. Entonces el conjunto W es abierto en M, contiene s, y para todo $t \in W$, $P(t) \subset N_k \subset U$, así que $P(W) \subset U$. Hemos demostrado que P es superiormente semicontinuo en el punto s.

Ahora, sea $P : M \to X$ mapeo cvss y $\mathcal{B}$ una base numerable de M. Sea $\mathcal{C} = \{p(m) : m \in M\}$ y $\mathcal{N} = \{p(B) : B \in \mathcal{B}\}$, sea V una vecindad de $c_0 \in \mathcal{C}$, por lo que $c_0 = p(m_0)$ para algún $m_0 \in M$, es decir, $U = \{m \in M : p(m) \subset V\}$ es abierto en M, como $\mathcal{B}$ es una base, entonces existe $B_{m_0} \in \mathcal{B}$ tal que $m_0 \in B_{m_0} \subset V$, por lo tanto $c_0 = p(m_0) \subset p(B_{m_0}) \subset V$.

□

También se denotará $P : M \twoheadrightarrow X$ para decir que P es un mapeo sobreyectivo.

Teorema 2.5. ([8]) La clase de todos los espacios Lindelöf Σ es cerrada respecto a subespacios cerrados, preimágenes perfectas, uniones numerables e imágenes continuas.

Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$, familias de espacios topológicos, y sean

$$f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$$

mapeos multivaluados para todo $\alpha \in I$. El **producto** de los f_α se define como el mapeo multivaluado

$$F : \prod\{X_\alpha : \alpha \in I\} \to \prod\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$$

tal que

$$F(x) = \prod\{f_\alpha(x_\alpha) : \alpha \in I\} \text{ para todo } x \in \prod\{X_\alpha : \alpha \in I\},$$

donde x_α son las coordenadas de x.

Teorema 2.6. *Si para todo $\alpha \in I$, $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ es cvss entonces $\prod\{f_\alpha : \alpha \in I\}$ es cvss.*

Demostración. F es compacto valuado por que las imágenes de puntos bajo F son productos de imágenes de puntos bajo f_α, entonces son compactos como productos de espacios compactos. Nos queda demostrar que F es superiormente semicontinua. Denotemos $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in I\}$.

Sea $x_0 \in X$ y sea $K = F(x_0)$. Entonces $K = \prod\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ donde $K_\alpha = f_\alpha(x_{0\alpha})$. Sea W una vecindad de K en $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$. Por el Teorema de Wallace (3.2.10 en [3]), existen un conjunto finito $J \subset I$ y un conjunto abierto $W_\alpha \subset Y_\alpha$, para cada $\alpha \in J$, tales que

$$K \subset \prod\{W_\alpha : \alpha \in J\} \times \prod\{Y_\alpha : \alpha \in I \setminus J\}.$$

Sea U_α vecindad de $x_{0\alpha}$ para cada $\alpha \in J$, tal que $f_\alpha(U_\alpha) \subset W_\alpha$. Como $U_\alpha \subset \{z : f_\alpha(z) \subset W_\alpha\}$ para todo $\alpha \in J$, entonces

$$U = \prod\{U_\alpha : \alpha \in J\} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \in I \setminus J\}$$

es una vecindad de x_0 en X tal que $F(U) \subset W$.

□

Corolario 2.7. *Producto numerable de espacios Lindelöf Σ es Lindelöf Σ.*

Demostración. Sean $\{X_n\}_{n\in\omega}$, espacios Lindelöf Σ. Por el Teorema 2.4 para cada $n \in \omega$ existen un espacio segundo numerable M_n y un mapeo cvss $P_n : M_n \to X_n$ tales que $P_n(M_n) = X_n$. Como la propiedad de ser segundo numerable es una propiedad numerablemente productiva, entonces el producto $\prod\{M_n : n \in \omega\}$ es un espacio segundo numerable, y por el teorema anterior tenemos que el producto

$$P : \prod\{M_n : n \in \omega\} \twoheadrightarrow \prod\{X_n : n \in \omega\}$$

de los mapeos P_n es un mapeo cvss. Por el Teorema 2.4 concluimos que $\prod\{X_n : n \in \omega\}$ es un espacio Lindelöf Σ.

□

Definición 2.8. *Un espacio X es **σ-compacto** si X es unión numerable de subespacios compactos.*

Proposición 2.9. *Todo espacio σ-compacto es un espacio Lindelöf Σ.*

Demostración. Sea $X = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$ donde cada X_n es compacto. Definimos el mapeo multivaluado $f : \omega \to X$ por $f(n) = X_n$; consideramos ω con la topología discreta. Entonces f es un mapeo cvss del espacio segundo numerable ω sobre X. □

Corolario 2.10. *Producto numerable de espacios σ-compactos es de Lindelöf.*

Definición 2.11. *Un espacio X es un espacio $K_{\sigma\delta}$ si X se representa como intersección de una familia numerable de subespacios σ-compactos de algún espacio ambiente.*

Proposición 2.12. *Para cada* $n \in \omega$*, sea* X_n *un subespacio de un espacio* Z*. Si* $X = \bigcap\{X_n : n \in \omega\}$*, entonces* X *es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto* $\prod\{X_n : n \in \omega\}$*.*

Demostración. Sea $F = \{x \in \prod_{n\in\omega} X_n : \pi_n(x) = \pi_m(x)$ para todo $n, m \in \omega\}$. Entonces, un punto x está en F si y sólo si todas sus coordenadas son iguales y pertenecen a la intersección de los conjuntos X_n. Se sigue que la proyección π_0 del producto mapea F de manera biyectiva y continua sobre la intersección de los conjuntos X_n.

Ahora, para todo $n \in \omega$ sea $i_n : X \to X_n$ la inclusión de X en X_n. Sea Δi_n el producto diagonal de las funciones i_n. Entonces el valor de Δi_n en un punto z de X es el punto del producto $\prod_{n\in\omega} X_n$ cuyas coordenadas son todas iguales a z. El mapeo Δi_n es continuo como el producto diagonal de los mapeos continuos i_n. Y también, Δi_n es el mapeo inverso de $\pi_0|F$. Se sigue que Δi_n es un homeomorfismo de X sobre F.

Para demostrar que F es cerrado en $\prod_{n\in\omega} X_n$, notemos que F es el conjunto de coincidencia de las proyecciones π_n, $n \in \omega$, consideradas como funciones al espacio Z. □

Definición 2.13. X *es un espacio* ***Čech completo*** *si es un conjunto* G_δ *en* βX*.*

Dado un espacio topológico X y $A \subset \beta X$, denotaremos con el símbolo $[A]_{\beta X}$ a la cerradura de A en βX.

Teorema 2.14. *Si* X *es un espacio Čech completo y de Lindelöf, entonces* X *es* $K_{\sigma\delta}$*.*

Demostración. Sean U_n abiertos en βX tal que $X = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Sea $n \in \omega$ y para todo $x \in X$ sea V_{x_n} abierto en βX tal que $x \in V_{x_n} \subset [V_{x_n}]_{\beta X} \subset U_n$. Como X es de Lindelöf, tomamos una subfamilia numerable $\{V_{nm} : m \in \omega\}$ de $\{V_{x_n} : x \in X\}$, tal que $X \subset \bigcup_{m\in\omega} V_{nm}$. Sea $K_{nm} = [V_{nm}]_{\beta X}$; entonces para todo n, $m \in \omega$, K_{nm} es compacto, ya que es cerrado en βX. Para todo $n \in \omega$,

$$X \subset \bigcup_{m\in\omega} K_{nm}, \text{ de donde } X \subset \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} K_{nm}.$$

Por otra parte, para todo $n \in \omega$, $\bigcup_{m\in\omega} K_{nm} \subset U_n$, entonces

$$\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} K_{nm} \subset \bigcap_{n\in\omega} U_n = X.$$

Por lo tanto, X es un es espacio $K_{\sigma\delta}$. □

Corolario 2.15. *Todo espacio Čech completo de Lindelöf es un Lindelöf Σ-espacio.*

Corolario 2.16. *El producto de una familia a lo más numerable de espacios Čech completos de Lindelöf es de Lindelöf.*

2.2. P-Espacios

Definición 2.17. *Un espacio topológico X es un **P-espacio** si todo conjunto G_δ en X es abierto.*

Proposición 2.18. *Si X es un P-espacio regular, entonces X es cero-dimensional.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y U una vecindad de x_0. Como X es regular, por la Proposición 1.2 existe U_1 abierto en X, tal que $x_0 \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$, por recursión construimos para todo $n \in \omega$ los conjuntos abiertos U_n tales que $U = U_0$, $x_0 \in U_n$ y $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$ para todo $n \in \omega$. Sea

$$V = \bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n}.$$

Como V es intersección de conjuntos cerrados, entonces es cerrado, y además es abierto por ser G_δ. Hemos encontrado para una vecindad arbitraria U de x_0 una vecindad cerrabierta de x_0 contenida en U. Por lo tanto, la familia de todos los conjuntos cerrabiertos es una base de X, y X es cero-dimensional.
□

Proposición 2.19. *Si X y Y son P-espacios entonces $X \times Y$ es un P-espacio.*

Demostración. Sean $\{U_n \times V_n\}_{n\in\omega}$ abiertos básicos en $X \times Y$, donde U_n y V_n son abiertos en X y en Y respectivamente. Entonces el conjunto

$$\bigcap_{n\in\omega}(U_n \times V_n) = \left(\bigcap_{n\in\omega} U_n\right) \times \left(\bigcap_{n\in\omega} V_n\right)$$

es abierto en $X \times Y$, ya que es producto de conjuntos G_δ, y por lo tanto abiertos en X y en Y.

□

En 1972, A. K. Misra [6] demostró que el producto finito de P-espacios es un P-espacio, pero que el producto infinito de P-espacios con más de un punto no es un P-espacio.

Proposición 2.20. *Sean X un espacio de Lindelöf y Y un P-espacio. Entonces la proyección $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.*

Demostración. Sean $F \subset X \times Y$ cerrado y $B = \pi_Y(F)$. Sea $y_0 \in Y \setminus B$. Entonces $X \times \{y_0\}$ es ajeno de F, y para todo $x \in X$ existen $U_x \subset X$, $V_x \subset Y$ abiertos tales que

$$(x, y_0) \in U_x \times V_x \subset (X \times Y) \setminus F.$$

La familia $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es de Lindelöf, existe una subcubierta a lo más numerable $\{U_{x_i} : i \in \omega\}$ de esta cubierta. Sea $V = \bigcap\{V_{x_i} : i \in \omega\}$, como Y es P-espacio, entonces V es abierto y $y_0 \in V$. Si $y \in V$, entonces

$$X \times \{y\} \subset \bigcup\{U_{x_i} \times V_{x_i} : i \in \omega\} \subset (X \times Y) \setminus F$$

por lo cual $(X \times \{y\}) \cap F = \emptyset$, y $y \notin \pi_Y(F)$; entonces, $V \cap \pi_y(F) = \emptyset$. Por lo tanto $B = \pi_Y(F)$ es cerrado.

□

Misra [6] también demostró que el producto de dos Lindelöf P-espacios es un Lindelöf P-espacio. La siguiente proposición muestra que es suficiente que uno de los dos espacios es un P-espacio, para asegurar que su producto es Lindelöf.

Teorema 2.21. *Si X y Y son de Lindelöf, y Y es un P-espacio, entonces $X \times Y$ es de Lindelöf.*

Demostración. Por la Proposición 1.16, basta demostrar que toda familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados en $X \times Y$ con la propiedad de intersecciones numerables tiene intersección no vacía.

Sea $\mathcal{F}'$ la familia de todas las intersecciones numerables de los elementos de $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{F}'$ es una familia de conjuntos cerrados no vacíos en $X \times Y$, y $\bigcap \mathcal{F}' = \bigcap \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{C} = \{\pi_Y(F) : F \in \mathcal{F}'\}$. Entonces, por la proposición anterior, $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos cerrados en Y. Puesto que siempre la imagen de una intersección bajo una función está contenida en la intersección de las imágenes, esto es, si $H \in \mathcal{F}'$ tal que $H = \bigcap_{n \in \omega} F_n$, entonces

$$\pi_Y(H) = \pi_Y\left(\bigcap_{n \in \omega} F_n\right) \subset \bigcap_{n \in \omega} \pi_Y(F_n),$$

es decir, la familia $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersecciones numerables. Por la Proposición 1.16 se tiene que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ya que Y es de Lindelöf. Sea $y_0 \in \bigcap \mathcal{C}$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}'$, $F \cap (X \times \{y_0\}) \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{D} = \{F \cap (X \times \{y_0\}) : F \in \mathcal{F}'\}$. Entonces, $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos cerrados no vacíos en $X \times \{y_0\}$. Además, $\mathcal{D}$ es cerrada respecto a intersecciones numerables, por que $\mathcal{F}'$ lo es. El espacio $X \times \{y_0\}$ es homeomorfo a X y por lo tanto es de Lindelöf. Por la Proposición 1.16. $\bigcap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Sea $(x_0, y_0) \in \bigcap \mathcal{D}$. Entonces, $(x_0, y_0) \in \bigcap \mathcal{F}'$, y $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$. $\square$

Combinando los resultados expuestos anteriormente, llegamos a la siguiente afirmación.

Teorema 2.22. *El producto de una familia a lo más numerable de espacios Lindelöf Σ y una familia finita de P-espacios de Lindelöf es de Lindelöf.*

Capítulo 3

Productos con un factor segundo numerable

Teorema 3.1. *Sea X un espacio hereditariamente de Lindelöf. Entonces para todo espacio segundo numerable Y, $X \times Y$ es de Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de la topología de Y. Por el Lema 1.14, basta demostrar que toda cubierta $\mathcal{U}$ de $X \times Y$ cuyos elementos son de la forma $U \times B$ donde U es abierto en X y $B \in \mathcal{B}$, tiene una subcubierta numerable.

Para todo $B \in \mathcal{B}$, sea $\mathcal{U}_B$ la subfamilia de $\mathcal{U}$ que consiste de los conjuntos de la forma $U \times B$. Entonces, $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}_B : B \in \mathcal{B}\}$. Además, $\bigcup \mathcal{U}_B = X_B \times B$ para algún subespacio X_B de X ($X_B = \bigcup\{U : U \times B \in \mathcal{U}_B\}$). Se sigue que $X \times Y = \bigcup\{X_B \times B : B \in \mathcal{B}\}$. Como X_B es de Lindelöf, existen U_{Bn}, $n \in \omega$ abiertos en X tales que

$$X_B = \bigcup_{n \in \omega}\{U_{Bn} : U_{Bn} \times B \in \mathcal{U}_B\}.$$

Entonces

$$X \times Y = \bigcup\{X_B \times B : B \in \mathcal{B}\} = \bigcup\{U_{Bn} \times B : B \in \mathcal{B}, n \in \omega\},$$

y entonces la familia $\mathcal{V} = \{U_{Bn} \times B : B \in \mathcal{B}, n \in \omega\}$ es una subcubierta a lo más numerable de la cubierta $\mathcal{U}$. □

No es cierto que todo espacio cuyo producto con todo espacio segundo numerable es de Lindelöf, es hereditariamente de Lindelöf. Por ejemplo, si X

es un Lindelöf P-espacio, entonces el producto de X con cualquier espacio segundo numerable es de Lindelöf; es fácil demostrar que un P-espacio es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si es a lo más numerable y discreto. Sin embargo, en un caso importante las dos propiedades coinciden.

Definición 3.2. *Un espacio X tiene **i-peso numerable** si existe una biyección continua de X sobre un espacio métrico separable.*

Teorema 3.3. *Sea X un espacio de i-peso numerable. Entonces X es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si para todo espacio segundo numerable Y, el producto $X \times Y$ es de Lindelöf.*

Demostración. Por el teorema anterior, sólo la suficiencia requiere demostración. Supongamos que X tiene una función biyectiva continua f sobre un espacio métrico separable Z. Por contradicción, si X no es hereditariamente de Lindelöf, entonces existe un subespacio X_0 de X que no es de Lindelöf. Denotemos $Y = f(X_0) \subset Z$. Notemos que Y es un subespacio del espacio métrico separable Z y por lo tanto es métrico separable. Probemos que el producto $X \times Y$ no es de Lindelöf.

Sea $F = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$. El conjunto F es cerrado en $X \times Y$ porque F es el conjunto de coincidencia de las funciones continuas π_Y y $f \circ \pi_X : X \times Y \to Z$ donde $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y \subset Z$ son las proyecciones (Teorema 1.5.4 en [3]). La proyección π_X mapea F sobre el conjunto X_0, y X_0 no es de Lindelöf, entonces F no es de Lindelöf. Como F es cerrado en $X \times Y$, se sigue que $X \times Y$ no es de Lindelöf. □

3.1. Conjuntos de Bernstein

Para construir un espacio de Lindelöf X y un espacio métrico separable Y tales que el producto $X \times Y$ no es de Lindelöf, nos falta tener un ejemplo de un espacio de Lindelöf de i-peso numerable que no sea hereditariamente de Lindelöf. Una manera de alcanzar esto es usar la siguiente construcción introducida por R. H. Bing en [1].

Definición 3.4. *Sean X un espacio, y M un subespacio de X. El espacio X_M es el espacio cuyo conjunto de puntos es X, con la topología en que todos los puntos de M son aislados, y para todo punto x de $X \setminus M$, un conjunto U es una vecindad de x en X_M si y sólo si U es una vecindad de x en la topología original de X.*

Se tiene que la topología de X_M es más fuerte que la topología de X. En particular, si el espacio X es de Hausdorff, X_M también lo es. R. H. Bing demostró en [1] que para todo espacio hereditariamente paracompacto X, el espacio X_M es hereditariamente paracompacto. En particular, si X es métrico separable, entonces X_M es paracompacto, y por lo tanto es de Tychonoff.

Definición 3.5. *Sean X un espacio métrico separable, y M un conjunto en X. El conjunto M es un* ***conjunto de Bernstein*** *si M es no numerable y todo subconjunto de M cerrado en X es a lo más numerable.*

Proposición 3.6. *Sean X un espacio métrico separable y M un conjunto no numerable en X. Entonces el espacio X_M es de Lindelöf si y sólo si M es un conjunto de Bernstein.*

Demostración. Supongamos que M no es conjunto de Bernstein. Entonces existe un conjunto F cerrado en X, contenido en M y no numerable. Como la topología de X_M es más fuerte que la topología original de X, el conjunto F es cerrado en X_M. Todos los puntos del conjunto M son aislados en X_M, entonces F es un subespacio discreto de X_M. Resulta que el espacio X_M tiene un subespacio cerrado discreto no numerable, y entonces no es de Lindelöf.

Ahora supongamos que M es un conjunto de Bernstein; demostremos que X_M es de Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X_M, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento que consiste de conjuntos abiertos básicos. Por Lema 1.14, sin pérdida de generalidad podemos suponer entonces que $\mathcal{U}$ consiste de conjuntos abiertos en X y de singuletes de elementos de M.

Sea $\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : U \text{ es abierto en } X\}$. Entonces, por la definición de la topología de X_M, $X \setminus M$ está contenido en la unión de la familia $\mathcal{U}_0$. El conjunto $X \setminus M$ tiene la misma topología como subespacio de X y como subespacio de X_M, por lo que es de Lindelöf, pues es métrico separable. Entonces existe una subfamilia a lo más numerable $\mathcal{U}_0'$ de $\mathcal{U}_0$ tal que $X \setminus M \subset$

$\bigcup \mathcal{U}_0'$. Sea $W = \bigcup \mathcal{U}_0'$. Entonces W es un conjunto abierto en la topología original de X, y $F = X \setminus W$ es un subconjunto de M cerrado en X. Como M es un conjunto de Bernstein se sigue que F es a lo más numerable. Sea $\mathcal{U}_1$ una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$ que cubre F. Entonces $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_0' \cup \mathcal{U}_1$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. $\square$

Para construir un conjunto de Bernstein en el intervalo cerrado $[0, 1]$, usamos la siguiente afirmación (Teorema 3.16 en [5]).

Teorema 3.7. *Todo conjunto cerrado en* $[0, 1]$ *es finito o numerable o tiene cardinalidad* $\mathfrak{c}$.

Proposición 3.8. *La familia de todos los conjuntos cerrados no numerables en* $[0, 1]$ *tiene cardinalidad* $\mathfrak{c}$.

Teorema 3.9. *Existe un conjunto de Bernstein* M *en* $[0, 1]$ *tal que* $[0, 1] \setminus M$ *también es un conjunto de Bernstein.*

Demostración. Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ una enumeración de todos los conjuntos cerrados no numerables en $[0, 1]$. Construimos por recursión una sucesión doble de puntos x_α, y_α, con $\alpha \in \mathfrak{c}$. Para todo $\alpha \in \mathfrak{c}$, suponiendo que tenemos definidos los puntos x_β y y_β para todo $\beta < \alpha$, sean x_α, y_α dos puntos distintos de $F_\alpha \setminus \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$. La elección de x_α y y_α es posible porque el conjunto cerrado no numerable F_α tiene cardinalidad continuo, y la cardinalidad del conjunto $\{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$ tiene cardinalidad $2|\alpha| < \mathfrak{c}$. Se sigue que el conjunto $F_\alpha \setminus \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$ es infinito.

Sea $M = \{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Entonces M tiene la cardinalidad $\mathfrak{c}$ pues por la construcción todos los puntos x_α son distintos. Si F es un conjunto cerrado no numerable en $[0, 1]$, entonces $F = F_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathfrak{c}$. Entonces $y_\alpha \in F$ y $y_\alpha \notin M$. Se sigue que $F \not\subset M$. Hemos demostrado que M es un conjunto de Bernstein. Con un argumento simétrico se prueba que $[0, 1] \setminus M$ es un conjunto de Bernstein. $\square$

Corolario 3.10. *Existen un espacio de Lindelöf* X *y un espacio segundo numerable* Y *tales que* $X \times Y$ *no es de Lindelöf.*

Demostración. Sea M un conjunto de Bernstein en $[0,1]$. Entonces el espacio $[0,1]_M$ es de Lindelöf por la Proposición 3.6. Es obvio que el mapeo idéntico $[0,1]_M \to [0,1]$ es biyectivo y continuo, entonces $[0,1]_M$ tiene i-peso numerable. El espacio $[0,1]_M$ no es hereditariamente de Lindelöf, pues M es un subespacio discreto no numerable de $[0,1]_M$. Por el Teorema 3.3, existe un espacio segundo numerable Y tal que $[0,1]_M \times Y$ no es de Lindelöf.

□

3.2. Conjunto de Sierpiński

En la sección anterior hemos demostrado la existencia de un espacio segundo numerable Y y de un espacio de Lindelöf X tales que $X \times Y$ no es de Lindelöf (se puede ver que como el espacio Y se puede tomar el conjunto de Bernstein con la topología original del subespacio de $[0,1]$). Por la construcción, el espacio Y no tiene buenas propiedades descriptivas. Naturalmente aparece la cuestión si se puede encontrar un ejemplo en el cual el espacio Y es un espacio polaco, en particular en el cual $Y = \omega^\omega$. Resulta ser que la existencia de un ejemplo de este tipo depende de axiomas adicionales de Teoría de Conjuntos: se puede construir un ejemplo suponiendo que se cumple la Hipótesis de Continuo (CH). Aparentemente, la cuestión si se puede construir un ejemplo de este tipo sin axiomas adicionales queda abierta.

Definición 3.11. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es* ***concentrado en*** $\mathbb{Q}$ *si $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ y para todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} \subset U$, el conjunto $A \setminus U$ es a lo más numerable.*

Proposición 3.12. *Sea A un conjunto no numerable en $\mathbb{R}$ concentrado en $\mathbb{Q}$. Entonces el espacio $(A \cup \mathbb{Q})_A$ es de Lindelöf.*

Demostración. Bastará demostrar que A es un conjunto de Bernstein en $A \cup \mathbb{Q}$. Si no lo es, entonces existe un conjunto no numerable $F \subset A$ cerrado en $A \cup \mathbb{Q}$. Sea $U = (A \cup \mathbb{Q}) \setminus F$, entonces U es una vecindad de $\mathbb{Q}$ tal que $A \setminus U$ contiene F y por lo tanto no es numerable. □

Proposición 3.13. *Si A es un conjunto no numerable en $\mathbb{R}$ concentrado en $\mathbb{Q}$, entonces el producto $(A \cup \mathbb{Q})_A \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ no es de Lindelöf.*

Demostración. Sea $F = \{(x, y) \in (A \cup \mathbb{Q})_A \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : x = y \in A\}$. Entonces el conjunto F es cerrado en el producto $(A \cup \mathbb{Q})_A \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ por que es un conjunto de coincidencia de las funciones continuas $\pi_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ y $i \circ \pi_{(A \cup \mathbb{Q})_A}$ donde $i : (A \cup \mathbb{Q})_A \to \mathbb{R}$ es el mapeo idéntico. Además, F es discreto porque su imagen bajo la proyección $\pi_{(A \cup \mathbb{Q})_A}$ es el subespacio discreto A del espacio $(A \cup \mathbb{Q})_A$. Así F es un subespacio discreto no numerable de $(A \cup \mathbb{Q})_A \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, y el producto no es de Lindelöf. $\square$

Corolario 3.14. *Si A es un conjunto no numerable en $\mathbb{R}$ concentrado en $\mathbb{Q}$, entonces el producto $(A \cup \mathbb{Q})_A \times \omega^\omega$ no es de Lindelöf.*

Para construir un conjunto no numerable en $\mathbb{R}$ concentrado en $\mathbb{Q}$ usamos una idea de W. Sierpiński.

Definición 3.15. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un* ***conjunto de Sierpinśki*** *si $|A| > \omega$ y $|A \cap F| \leq \omega$ para todo $F \subset \mathbb{R}$ denso en ninguna parte.*

Teorema 3.16. *Si se cumple CH, entonces existe un conjunto de Sierpiński.*

Demostración. Supongamos que $2^\omega = \omega_1$ y sea $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una enumeración de todos los conjuntos cerrados densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Construimos por recursión una sucesión de puntos x_α, $\alpha < \omega_1$ tales que para todo $\alpha < \omega_1$, $x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\})$. Para todo $\alpha < \omega_1$ la elección del punto x_α es posible porque el conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\}$ es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$ y por el Teorema de Baire, la diferencia $\mathbb{R} \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\})$ no es vacía.

Sea $A = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Entonces A no es numerable porque los puntos x_α son todos distintos. Si C es un conjunto denso en ninguna parte, entonces la cerradura $\overline{C}$ de C es densa en ninguna parte, y existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\overline{C} = F_\alpha$. Por la construcción de los puntos del conjunto A, $F_\alpha \cap A \subset \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es numerable. Se sigue que $A \cap C$ es a lo más numerable. Hemos verificado que A es un conjunto de Sierpiński. $\square$

Corolario 3.17. *Si se cumple CH, entonces existe un espacio de Lindelöf cuyo producto con ω^ω no es de Lindelöf.*

Conclusión

La presente tesis está desarrollada en el área de Topología general de conjuntos y está basada principalmente en el estudio del producto de un espacio de Lindelöf con otro espacio topológico que tiene a su vez condiciones adicionales para que el producto de ambos no cumpla con la propiedad de Lindelöf.

Fueron de nuestro especial interés una clase de espacios con la propiedad de Lindelöf de gran importancia en la topología general, como lo son los Lindelöf-Σ espacios, mostrando algunas de sus propiedades más interesantes, en particular, que la productividad de esta clase de espacios no se pierde al hacer un producto numerable de estos.

También, hemos mostrado un ejemplo donde se prueba la existencia de un espacio de Lindelöf cuyo producto con un espacio segundo numerable no es de Lindelöf, como lo es el espacio $[0,1]_M$, donde M es un conjunto de Bernstein, así como la existencia de un espacio de Lindelöf cuyo producto con ω^ω no es de Lindelöf, como lo es un conjunto de Sierpiśki bajo la suposición de la hipótesis del continuo.

Además, mencionamos que una de las condiciones suficientes para que el producto de dos espacios de Lindelöf sea de Lindelöf es que al menos uno de ellos sea un P-espacio. Y también, si tomamos un espacio hereditariamente de Lindelöf, el producto con cualquier espacio segundo numerable sigue siendo un espacio de Lindelöf.

Por último, hemos de recalcar la importancia de la propiedad de Lindelöf en el producto de espacios topológicos, ya que es un concepto más general que el de compacidad que es el más utilizado en más áreas de la matemática.

Bibliografía

[1] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), pp. 175–186.

[2] F. Casarrubias, *Elementos de Topología de Conjuntos*, 2011.

[3] R. Engelking, *General Topology* (PWN, Warszawa), 1976.

[4] C. Ivorra, *Teoría Descriptiva de Conjuntos*, 2011.

[5] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995.

[6] A.K. Misra, *A topological view of P-spaces*, General Topology and Its Applications, vol. 2, pp. 349–362, 1972.

[7] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. **65** (1969), no. 2, pp. 169–192.

[8] V.V. Tkachuc, *Lindelöf Σ-spaces: an omnipresent class*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, no. **2** (2010), pp. 221–244.

Índice alfabético