Benemerita Universidad
Autonoma de Puebla

Facultad de Ciencias
Fisico Matematicas

Un estudio algebraico de la teoria de conjuntos

Tesis

que para

Obtener el grado

de

Licenciado en Matematicas

presenta

Jose Luis Leon Medina

bajo la direccion de

Dr. Juan Martinez Ruiz

julio de 2015

Agradecimientos

En este breve espacio deseo agradecer a las personas que hicieron posible esto: A mi mamá *María Elena* por apoyarme siempre, desde el inicio de mis estudios y guiarme con su paciencia y dedicación. A mi novia *Lucero* por estar siempre a mi lado, brindarme tanto amor y sacar lo mejor de mi, así como a sus papás *Paula* y *Ezequiel* por apoyarme y hacerme sentir parte de la familia. Al *Dr. Alejandro Ramírez* por ayudarme a definir mi vocación hacia las matemáticas, apoyarme en varios momentos de la carrera y por revisar esta tesis. Al *Dr. Fernando Macías* por su amistad y permitirme participar en varios proyectos que contribuyeron a mi formación personal y académica. Al *M. en C. Manuel Ibarra* por sus enseñanzas y por cultivar disciplina en mis estudios. A mis sinodales, *Dr. Agustin Contreras* y *Dr. David Villa*, por aceptar tan amablemente y con mucha disposición revisar esta tesis, sus sugerencias ayudaron a mejorar la presentación final de esta tesis. A mi asesor, *Dr. Iván Martínez Ruíz*, por confiar en mí y apoyarme en la realización de esta tesis.
Y a los profesores que dieron lo mejor de sí para contribuir a mi formación a lo largo de mis estudios y a mis amigos con los que compartí buenas vivencias e hicieron aún más agradable el tránsito por esta licenciatura.

A todos ustedes

¡Muchas gracias!

José Luis

Tesis apoyada por el proyecto VIEP: *Teoría de modelos y sus aplicaciones en lógicas no clásicas, topología y teoría de conjuntos.*

Índice general

Introducción

En el capítulo 1 se presentan las nociones básicas de categorías, se establece la notación que se usará a lo largo de la tesis y se enuncian las propiedades que definen a un topos. En el capítulo 2 se desarrollan los lenguajes de tipos dependientes que darán origen a teorías de conjuntos (locales) y más aún a categorías de conjuntos locales que cumplen propiedades similares a la categoría de conjuntos Set, en específico estas categorías resultan ser topos llamados topos lingüísticos (por su origen a partir de un lenguaje de tipos), posteriormente se presenta el teorema de equivalencia que asegura que todo topos es un topos lingüístico y que demostar proposiciones por medios catégoricos en topos es equivalente a demostrarlas usando la "lógica interna" que possen. Es de notar que las teorías de conjuntos locales tienen ciertas desventajas comparadas con las teorías de conjuntos clásicas (ZFC y NBG); por tal razón se inició el estudio de equivalencias entre teorías de conjuntos y topos que poseían cierta estructura adicional, en particular con el objetivo de eliminar las restricciones de las operaciones relativas a la igualdad de tipos de los operandos. Recientemente en [3] se demostró que con sólo pedir un sistema de inclusiones dirigido y estructurado es posible obtener una teoría de conjuntos más natural y semejante a la teoría constructiva de Aczel [2], siendo ésta una teoría de conjuntos constructiva ampliamente aceptada. La teoría de conjuntos que desarrollaron fue nombrada "teoría intuicionista de conjuntos básica" (BIST por sus siglas en inglés) y esta teoría y su interpretación en topos con inclusiones son presentados en el capítulo 3.

Capítulo

1 Teoría básica de Categorías

A fin de establecer los conceptos básicos y las notaciones que se usarán a lo largo de la tesis se presenta en este capítulo un desarrollo rápido de los conceptos necesarios para llegar a la definición de un topos; categorías con limites finitos y objetos potencia. También se introduce la noción de familias conjuntamente epimorfas que serán de gran utilidad en el capítulo 3. Es importante señalar que en este capítulo y en el siguiente se presentarán las propiedades necesarias para el Capítulo 3, siguiendose el desarrollo natural que hace Bell en su libro *Toposes and Local Set Theories* [4]. Para una exposición más detallada de estos temas se recomiendan el libro de Herrlich y Strecker [6] y el libro clásico de Mac Lane [8].

1.1 Categorías y subcategorías

Una **categoría** es una quíntupla $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathscr{M}, dom, cod, \circ)$ donde

- $\mathscr{O}$ es una clase, cuyos elementos se llamarán **$\mathscr{C}$-objetos**.
- $\mathscr{M}$ es una clase, cuyos elementos se llamarán **$\mathscr{C}$-morfismos**.
- dom y cod son funciones de $\mathscr{M}$ en $\mathscr{O}$, a $dom(f)$ se le llamará **dominio** de f y a $cod(f)$ se le llamará **codominio** de f.
- $\circ$ es una función que va de la clase

  $$D = \{(g, f) \mid f, g \in \mathscr{M} \text{ y } dom(g) = cod(f)\}$$

  a la clase $\mathscr{M}$, llamada **ley de composición** de $\mathscr{C}$. $\circ(g, f)$ se abreviará por $g \circ f$. Además diremos que $g \circ f$ está definida si y sólo si $(g, f) \in D$.

y se cumplen las siguientes condiciones:

i. **Condición de coincidencia:** Si $g \circ f$ está definida, entonces $dom(g \circ f) = dom(f)$ y $cod(g \circ f) = cod(g)$.

ii. **Condición de asociatividad:** Si $g \circ f$ y $h \circ g$ están definidas, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

iii. **Condición de existencia de identidades:** Para cada $\mathscr{C}$-objeto A existe un $\mathscr{C}$-morfismo e tal que $dom(e) = cod(e) = A$ y

- Si $g \circ e$ está definida, entonces $g \circ e = g$ y
- Si $e \circ f$ está definida, entonces $e \circ f = f$

iv. **Condición de pequeñez de la clase de morfismos:** Para todo par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos, la clase

$$\hom_{\mathscr{C}}(A, B) = \{f \mid f \in \mathscr{M}, dom(f) = A \text{ y } cod(f) = B\}$$

es un conjunto.

Dada una categoría $\mathscr{C}$, la clase de $\mathscr{C}$-objetos se denotará por $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, mientras que $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ denotará la clase de $\mathscr{C}$-morfismos. Cuando no haya lugar a dudas prescindiremos del uso de la letra que denota la categoría y se hablará de la clase de objetos y la clase de morfismos. También se usará $\hom(A, B)$ en vez de $\hom_{\mathscr{C}}(A, B)$. Aunque los $\mathscr{C}$-morfismos no necesariamente serán funciones usaremos la notación

$$f : A \to B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B$$

cuando $f \in \hom_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Una consecuencia inmediata de la definición es que el elemento unidad en (iii) es único y por tanto para cada $\mathscr{C}$-objeto A, se le denotará por 1_A.

Ejemplos.

- La categoría **Set** de conjuntos, cuya clase de objetos es la clase V de todos los conjuntos y para $X, Y \in V$, $\hom(X, Y)$ es el conjunto de todas las funciones de X a Y. La composición es la composición usual de funciones.

- La categoría **Grp** de grupos, cuya clase de objetos es la clase de todos los grupos y, para los grupos G, H, $\hom(G,H)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grupo de G a H. La composición es la composición usual de funciones.
- La categoría **Esp** de espacios topológicos, cuya clase de objetos es la clase de todos los espacios topológicos y, para los espacios X, Y, $\hom(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X a Y. Nuevamente, la composición es la composición usual de funciones.
- De manera similar a las anteriores se tienen las siguientes categorías:

Finset	Conjuntos finitos y funciones.
Ab	Grupos abelianos y homomorfismos de grupos.
(C)Rng	Anillos (conmutativos) con unidad y homomorfismos de anillos.
Field	Campos con $0 \neq 1$ y homomorfismos de campos.
Pos	Conjuntos parcialmente ordenados y funciones preservadoras de orden.
Lat	Retículas y homomorfismos de retículas.
Bool	Álgebras booleanas y homomorfismos booleanos.
Haus	Espacios Hausdorff y funciones continuas.

- Una clase preordenada es una clase P junto con una relación $\leq$ reflexiva y transitiva llamada preorden sobre P. Si además $\leq$ es antisimétrica se dirá que es un orden parcial sobre P. Cada clase preordenada $(P, \leq)$ da lugar a una categoría **P** cuyos objetos son los elementos de P y $\hom(p,q)$ tiene a lo más un elemento, y lo tiene si y sólo si $p \leq q$.

  De forma recíproca, cualquier categoría $\mathscr{C}$ con la propiedad de que para cada par de objetos X, Y, el conjunto $\hom(X,Y)$ tiene a lo más un elemento puede considerarse como una categoría inducida por un preorden. De tal forma, los preordenes y los ordenes parciales pueden ser considerados categorías.

Un **diagrama** en una categoría $\mathscr{C}$ es un conjunto (posiblemente vacío) de objetos de $\mathscr{C}$ junto con un conjunto (posiblemente vacío) de morfismos entre estos objetos. Los objetos del diagrama se llamarán vértices. Una **trayectoría** en un diagrama $\mathbf{D}$ es una sucesión finita $(f_1, \ldots, f_n)$ de morfismos de $\mathbf{D}$ tal que $\operatorname{cod}(f_i) = \operatorname{dom}(f_{i+1})$ para $i = 1, \ldots, n-1$. El número natural n es la **longitud** de la trayectoría. Finalmente, diremos que un diagrama $\mathbf{D}$ conmuta o es conmutativo si para cualquier trayectoria de longitud mayor o igual a 2, los morfismos obtenidos mediante composición sobre los morfismos de la trayectoría depende únicamente de los puntos finales de la trayectoría; formalmente, si para cada par de trayectorías $(f_1, \ldots, f_m), (g_1, \ldots, g_k)$ tal que $m \geq 2$ o $k \geq 2$, $\operatorname{dom}(f_1) = \operatorname{dom}(g_1)$ y $\operatorname{cod}(f_m) = \operatorname{cod}(g_k)$, se tiene que $f_m \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_1 = g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1$.

Por ejemplo, consideremos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\beta"] & \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"] & & C \end{tikzcd}$$

(a) Triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "\delta"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

(b) Cuadrado conmutativo

El diagrama (a) es conmutativo si $\beta \circ \alpha = \gamma$, a los diagramas conmutativos de esa forma se les llamará triángulos conmutativos. Por otra parte el diagrama (b) es conmutativo si $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$ y a los diagramas conmutativos de esta forma se les llamará cuadrados conmutativos.

En la situación del diagrama (a) diremos también que el morfismo γ se **factoriza a través de** B.

$\mathscr{A}$ es una **subcategoría** de la categoría $\mathscr{C}$ si $\mathscr{A}$ cumple las siguientes condiciones

- $\operatorname{Ob}(\mathscr{A}) \subset \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$.
- $\hom_{\mathscr{A}}(X, Y) \subset \hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ para cada par de elementos $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{A})$.

- La composición de cada par de morfismos en $\mathscr{A}$ es igual a su composición en $\mathscr{C}$.
- 1_A es el mismo morfismo, tanto en $\mathscr{A}$ como en $\mathscr{C}$, para cada $\mathscr{A}$-objeto A.

Si además $hom_{\mathscr{A}}(X,Y) = \hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ para cada par de $\mathscr{A}$-objetos, se dirá que $\mathscr{A}$ es una **subcategoría completa** de $\mathscr{C}$.

Ejemplos.

- Toda categoría es una subcategoría completa de sí misma.
- **Finset** es una subcategoría completa de **Set**.
- **Bool** es una subcategoría de **Lat** y **Lat** de **Pos**. Ninguna de ellas es completa.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría y $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, se define la **categoría coma de** A **sobre** $\mathscr{C}$, $(A, \mathscr{C})$, como la categoría que tiene como objetos a los $\mathscr{C}$-morfismos que tienen dominio A, y como morfismos de $f : A \to B$ a $f' : A \to B'$ aquellos $\mathscr{C}$-morfismos $g : B \to B'$ tales que el siguiente triángulo conmuta.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
B \arrow[rr, "g"] & & B'
\end{tikzcd}$$

La composición en $(A, \mathscr{C})$ se define de manera acorde a la composición en $\mathscr{C}$.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría y $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, se define la **categoría coma de** $\mathscr{C}$ **sobre** A, $(\mathscr{C}, A)$ a la categoría que tiene como objetos a los $\mathscr{C}$-morfismos que tienen codominio A, y como morfismos de $f : B \to A$ a $f' : B' \to A$ aquellos $\mathscr{C}$-morfismos $g : B \to B'$ tales que el siguiente triángulo conmuta.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B' \arrow[dl, "f'"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

La composición en $(\mathscr{C}, A)$ se define de manera acorde a la composición en $\mathscr{C}$.

Para toda categoría $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, \mathscr{M}, dom, cod, \circ)$, la **categoría opuesta** o **dual** de $\mathscr{C}$ es la categoría $\mathscr{C}^{\text{op}} = (\mathscr{O}, \mathscr{M}, cod, dom, *)$, donde $*$ está definido por $f * g = g \circ f$.

1.2 Principio de dualidad

Sea E un enunciado sobre los objetos y morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. El dual E^{op} de E, es el enunciado correspondiente sobre $\mathscr{C}^{\text{op}}$ formulado como enunciado sobre $\mathscr{C}$. Es decir, E^{op} es el enunciado obtenido de E al invertir la dirección de todos los morfismos. Como E se cumple en $\mathscr{C}^{\text{op}}$ si y sólo si E^{op} se cumple en $\mathscr{C}$, y $(\mathscr{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathscr{C}$ se tiene lo siguiente:

Principio de dualidad para categorías. Si E es un enunciado que es verdadero para todas las categorías, entonces E^{op} es también verdadero para todas las categorías.

También se tiene el concepto de dualidad para estructuras en categorías. Si W es una construcción definida para todas las categorías, entonces el dual W^{op} o co-W de W es la construcción definida para toda categoría $\mathscr{C}$ formulando W en $\mathscr{C}^{\text{op}}$ e interpretando el resultado en $\mathscr{C}$.

1.3 Morfismos especiales

Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un $\mathscr{C}$-morfismo. Diremos que

- f es una **sección en** $\mathscr{C}$ (o $\mathscr{C}$**-sección**) si y sólo si existe un $\mathscr{C}$-morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$.
- f es una **retracción en** $\mathscr{C}$ (o $\mathscr{C}$**-retracción**) si existe un $\mathscr{C}$-morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$.
- f es un **isomorfismo en** $\mathscr{C}$ (o $\mathscr{C}$**-isomorfismo**) si y sólo si f es una $\mathscr{C}$-sección y una $\mathscr{C}$-retracción.

- f es un **monomorfismo en $\mathscr{C}$** (o **$\mathscr{C}$-monomorfismo**) si y sólo si $\forall\, h, k \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) : f \circ h = f \circ k$, implica que $h = k$.
- f es un **epimorfismo en $\mathscr{C}$** (o **$\mathscr{C}$-epimorfismo**) si y sólo si $\forall\, h, k \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) : h \circ f = k \circ f$, implica que $h = k$.
- f es un **bimorfismo en $\mathscr{C}$** (o **$\mathscr{C}$-bimorfismo**) si y sólo si es un $\mathscr{C}$-monomorfismo y $\mathscr{C}$-epimorfismo.
- $\mathscr{C}$ es una categoría **balanceada** si y sólo si todo bimorfismo es un isomorfismo.

Si $f : A \to B$ es un isomorfismo, diremos que A y B son $\mathscr{C}$-objetos isomorfos. Es claro que la relación de objetos isomorfos es una relación de equivalencia sobre los objetos de una categoría. También es posible definir un orden parcial sobre la clase de monomorfismos de la categoría $\mathscr{C}$, con codominio común, de la siguiente forma:
Sean $f : A \rightarrowtail D$ y $g : B \rightarrowtail D$ dos $\mathscr{C}$-monomorfismos, entonces

$$f \leq g \text{ si y sólo si existe un morfismo } h : A \to B \text{ tal que } f = g \circ h.$$

Lo anterior da lugar a una relación de equivalencia dada por

$$f \sim g \text{ si y sólo si } f \leq g \text{ y } g \leq f$$

Así diremos que $\mathscr{O}$ es un **subobjeto de** D si y sólo si $\mathscr{O}$ es una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio D.

Un objeto A es **inicial** (**terminal**) si para cada objeto X existe un único morfismo $A \to X$ $(X \to A)$.

Proposición 1.1. Todos los objetos iniciales de una categoría son isomorfos.

Demostración. Sean A y A' objetos iniciales, entonces existen morfismos $f : A \to A'$ y $g : A' \to A$. Pero entonces $g \circ f : A \to A$ es el único morfismo de $\hom(A,A)$. Entonces $g \circ f = 1_A$ y por un argumento similar $f \circ g = 1_{A'}$. Mostrando que A y A' son isomorfos. $\square$

Como los objetos terminales son duales de los objetos iniciales se sigue el siguiente corolario inmediatamente.

Corolario 1.2. *Todos los objetos terminales en una categoría son isomorfos.*

Por tanto convendremos en denotar por 0 a los objetos iniciales y por 1 a los terminales.

1.4 Productos y coproductos

Sean A_1 y A_2 dos objetos de la categoría $\mathscr{C}$. Un **producto** de A_1 y A_2 es un objeto P junto con morfismos $\pi_1 : P \to A_1$ y $\pi_2 : P \to A_2$, llamados **proyecciones canónicas**, tales que para cada objeto B y cada para de morfismos $f_1 : B \to A_1$, $f_2 : B \to A_2$ existe un único morfismo $g : B \to P$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 & P \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A_2 \end{tikzcd}$$

Proposición 1.3. Los productos son únicos salvo isomofismos.

Demostración. Sean A_1 y A_2 dos $\mathscr{C}$-objetos, definamos una nueva categoría $\mathscr{C}|A_1,A_2$ cuyos objetos son todos los pares de $\mathscr{C}$-morfismos de la forma $f_1 : B \to A_1$, $f_2 : B \to A_2$, y como morfismos entre dos $\mathscr{C}|A_1,A_2$-objetos $f_1 : B \to A_1$, $f_2 : B \to A_2$ y $g_1 : C \to A_1$, $g_2 : C \to A_2$, los $\mathscr{C}$-morfismos $h : B \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 & C \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] & A_2 \end{tikzcd}$$

La composición es la misma que en $\mathscr{C}$. Entonces es evidente que P con los morfismos $\pi_1 : P \to A_1$ y $\pi_2 : P \to A_2$ es un producto de A_1 y A_2 si y sólo si el par de morfismos es un objeto terminal en $\mathscr{C}|A_1, A_2$. Y como los objetos terminales son únicos salvo isomorfismos se sigue que también lo son los productos de A_1 y A_2 en $\mathscr{C}$. $\square$

Como los productos son únicos salvo isomorfismos adoptaremos la convención de denotar por $A_1 \times A_2$ al producto de A_1 y A_2 y para cada par de morfismos $f_1 : B \to A_1$, $f_2 : B \to A_2$ denotaremos por $\langle f_1, f_2 \rangle$ al único morfismo de B en $A_1 \times A_2$. También para cada objeto A, se denotará por δ_A al morfismo $\langle 1_A, 1_A \rangle : A \to A \times A$ y se llamará **morfismo diagonal**.

Dualmente, un coproducto de A_1 y A_2 es un objeto Q junto con morfismos $\sigma_1 : A_1 \to Q$ y $\sigma_2 : A_2 \to Q$, llamados inyecciones (canónicas), tales que para cada objeto B y cada par de morfismos $f_1 : A_1 \to B$ y $f_2 : A_2 \to B$ existe un único morfismo $h : Q \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & Q \arrow[d, dashed, "h"] & A_2 \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

De forma análoga a la propiedad relativa a productos, se comprueba la únicidad de los coproductos y se conviene en denotar por $A_1 + A_2$ al coproducto de A_1 y A_2. Y por $[f_1, f_2]$ al único morfismo (h del diagrama) de Q en $A_1 + A_2$.

Finalmente, diremos que $\mathscr{C}$ tiene productos (coproductos) binarios, si $A \times B$ $(A + B)$ existe para cada par de $\mathscr{C}$-objetos A, B.

La siguiente observación es fácil de ver, al mostrar que A es el producto tanto de $A \times 1$ como de $1 \times A$ y también es el coproducto de $A + 0$ y $0 + A$.

Observación 1.4. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y A un $\mathscr{C}$-objeto, entonces

- $1 \times A \cong A \cong A \times 1$.
- $0 + A \cong A \cong A + 0$.

Ejemplos.

- En **Set** el producto de dos conjuntos es el producto cartesiano y el coproducto la unión ajena.
- En **Grp** el producto de dos grupos es su producto cartesiano y su coproducto es el producto libre.
- En **Esp** el producto de dos espacios es el producto topológico y el coproducto es la suma topológica ajena.
- En una clase preordenada, el producto de dos objetos es el ínfimo y el coproducto el supremo.

Dados dos morfismos $f_1 : A_1 \to B_1$ y $f_2 : A_2 \to B_2$, definiremos su producto $f_1 \times f_2$ como el morfismo $\langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$. Entonces $f_1 \times f_2$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \times A_2 \arrow[dl, "f_1 \circ \pi_1"'] \arrow[d, "f_1 \times f_2"] \arrow[dr, "f_2 \circ \pi_2"] & \\
B_1 & B_1 \times B_2 \arrow[l, "\pi_1'"'] \arrow[r, "\pi_2'"] & B_2
\end{tikzcd}$$

Por tanto, es posible demostrar que la operación producto (y por dualidad coproducto) es conmutativa en toda categoría

Proposición 1.5. En toda categoría con productos binarios, $A_1 \times A_2 \cong A_2 \times A_1$.

Demostración. Por ser productos existen morfismos únicos h y h' que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \times A_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A_1 & A_2 \times A_1 \arrow[l, "\pi_2'"'] \arrow[r, "\pi_1'"] & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A_2 \times A_1 \arrow[dl, "\pi_2'"'] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, "\pi_1'"] & \\
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A_2
\end{tikzcd}$$

Entonces juntando los diagramas en ambos ordenes, se obtienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \times A_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h' \circ h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A_2 \times A_1 \arrow[dl, "\pi_2'"'] \arrow[d, "h \circ h'"] \arrow[dr, "\pi_1'"] & \\
A_1 & A_2 \times A_1 \arrow[l, "\pi_2'"'] \arrow[r, "\pi_1'"] & A_2
\end{tikzcd}$$

Pero reemplazando $h' \circ h$ por $1_{A_1 \times A_2}$ y $h \circ h'$ por $1_{A_2 \times A_1}$ se preserva la conmutatividad del diagrama. Por unicidad se tiene entonces que $h' \circ h = 1_{A_1 \times A_2}$ y $h \circ h' = 1_{A_2 \times A_1}$. Por tanto h es isomorfismo y $A_1 \times A_2 \cong A_2 \times A_1$. $\square$

De forma similar, el resultado se puede extender a una cantidad finita de factores y la construcción misma puede generalizarse a un conjunto arbitrario de objetos: Si $\{A_i : i \in I\}$ es un conjunto de objetos de la categoría $\mathscr{C}$, un **producto** del conjunto es un objeto, usualmente denotado por $\prod_{i \in I} A_i$ o $\prod A_i$, junto con un conjunto de morfismos $\pi_i : \prod A_i \to A_i$ para cada $i \in I$, llamadas proyecciones (canónicas) tales que, para cada objeto B y cada conjunto de morfismos $f_i : B \to A_i$ para cada $i \in I$, existe un único morfismo $h : B \to \prod A_i$ tal que, para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod A_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
& A_i
\end{tikzcd}$$

Generalizando el producto de morfismos al caso finito; dados $f_1 : B \to A_1, \ldots, f_n : B \to A_n$, denotaremos por $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ al único morfismo $h : B \to A_1 \times \cdots \times A_n$ tal que el diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
A_1 \times \cdots \times A_n \arrow[r, "\pi_i"] & A_i
\end{tikzcd}$$

para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dualmente, el **coproducto** de una colección de objetos $\{A_i : i \in I\}$ es un objeto, comúnmente denotado por $\coprod_{i\in I} A_i$ o $\coprod A_i$, o simplemente por $A_1 + \cdots + A_n$ en el caso finito, junto con una colección de morfismos, llamados inyecciones (canónicas) $\sigma_i : A_i \to \coprod A_i$ para cada $i \in I$, tal que, para cada objeto B y cada colección de morfismos $f_i : A_i \to B$ para cada $i \in I$, existe un único morfismo $h : \coprod A_i \to B$, tal que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod A_i \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Al morfismo h conmunmente se le denota por $\coprod f_i$ o $f_1 + \cdots + f_n$ en el caso finito. Diremos entonces que una categoría $\mathscr{C}$ posee productos (coproductos) [finitos] si existe el producto (coproducto) de cualquier colección [finita] de objetos en $\mathscr{C}$.

Familias conjuntamente epimorfas

Dada $\{f_i : X_i \to Y | i \in I\}$ una familia de morfismos en una categoría $\mathscr{C}$, diremos que es **conjuntamente epimorfa** (o un $\mathscr{C}$-pozo) si y sólo si para cada par de morfismos $g, h : Y \to Z$

$$g \circ f_i = h \circ f_i \quad \forall\, i \in I \text{ implica } g = h.$$

La siguiente proposición es una caracterización útil de las familias conjuntamente epimorfas y será utilizada en el Capítulo 3.

Proposición 1.6. $\{f_i : X_i \to Y | i \in I\}$ es una familia conjuntamente epimorfa si y sólo si el morfismo inducido $\coprod f_i : \coprod X_i \to Y$ es un epimorfismo.

Demostración. Para la necesidad, supongamos que $\{f_i : X_i \to Y \,|\, i \in I\}$ es una familia conjuntamente epimorfa, entonces si $g, h : Y \to Z$ son morfismos tales que $g \circ \coprod f_i = h \circ \coprod f_i$, se tiene que:

$$g \circ \coprod f_i \circ \sigma_i = h \circ \coprod f_i \circ \sigma_i \quad \forall\, i \in I$$

donde $\sigma_i : X_i \to \coprod X_i$ son las inyecciones canónicas que cumplen $\coprod f_i \circ \sigma_i = f_i$. Así

$$g \circ f_i = h \circ f_i \qquad \forall\, i \in I$$

Como la familia es conjuntamente epimorfa se sigue que $g = h$ y por tanto $\coprod f_i$ es un epimorfismo.

Para la suficiencia, si $\coprod f_i$ es un epimorfismo y $g, h : Y \to Z$ son morfismos tales que

$$g \circ f_i = h \circ f_i \qquad \forall\, i \in I$$

se sigue

$$g \circ \coprod f_i \circ \sigma_i = h \circ \coprod f_i \circ \sigma_i \quad \forall\, i \in I$$

y por la unicidad del morfismo inducido $\coprod (g \circ f_i) : \coprod X_i \to Z$ se sigue que

$$g \circ \coprod f_i = h \circ \coprod f_i$$

y por tanto $g = h$ porque $\coprod f_i$ es epimorfismo. Así la familia $\{f_i : X_i \to Y \mid i \in I\}$ es conjuntamente epimorfa. □

1.5 Límites y Colímites

Sea **D** un diagrama con vértices $\{D_i : i \in I\}$ en una categoría $\mathscr{C}$. Un **cono** sobre **D** es una familia de morfismos $\{f_i : A \to D : i \in I\}$ de un mismo dominio A a los objetos en D de tal forma que, para cada morfismo $d : D_i \to D_j$ en **D**, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "d"] & & D_j \end{tikzcd}$$

conmuta. El objeto A es llamado **vértice** del cono.

Un morfismo de un cono sobre **D**, $\{f_i : A \to D_i : i \in I\}$, a un cono sobre **D**, $\{g_i : B \to D_i : i \in I\}$, es un $\mathscr{C}$-morfismo $h : A \to B$ tal que el diagrama conmuta para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_i"'] & B \arrow[d, "g_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

Si tal morfismo $h : A \to B$ existe, diremos que el cono $\{f_i : A \to D_i : i \in I\}$ **se factoriza a través del cono** $\{g_i : B \to D_i : i \in I\}$.

Los conos sobre **D** forman entonces una categoría de la forma descrita. Definimos un **límite para el diagrama D** a un objeto terminal en tal categoría. Nuevamente, como los objetos terminales son únicos salvo isomorfismos, también los límites, así escribiremos lím **D** para el límite de **D**, cuando este exista. Entonces el límite satisface la siguiente propiedad universal: *Cada cono sobre **D** se factoriza de forma única a través de un límite para **D**.*

Dualmente, definimos un cono bajo **D** como un cono sobre **D** considerado como diagrama en $\mathscr{C}^{op}$, y un **colímite** para **D** será un límite para **D** considerado como diagrama en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Por simplicidad, a menudo identificaremos a los conos con su vértice.

Ejemplos.

(i) *Productos y Coproductos.* Dada una familia $\{A_i : i \in I\}$ de $\mathscr{C}$-objetos, sea **D** el diagrama sin morfismos $\{A_i : i \in I\}$. Un cono sobre **D** es un objeto C junto con morfismos $f_i : C \to A_i$. Además lím **D** es $\prod A_i$ y colím **D** es $\coprod A_i$.

(ii) *Igualadores y Coigualadores.* Sea **D** el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Un cono sobre **D** es un par de morfismos $h : C \to A$ y $k : C \to B$ que hacen conmutar los diagramas:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "k"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "k"] & \\ A \arrow[rr, "g"] & & B \end{tikzcd}$$

Entonces $k = f \circ h = g \circ h$. Entonces los conos sobre **D** son, en esencia, morfismos $h : C \to A$ tales que

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

conmuta, es decir, $f \circ h = g \circ h$. Lo cual interpretaremos diciendo que h iguala a f y g. Un límite para **D** es un morfismo $e : C \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y para cada morfismo $u : D \to A$ tal que $f \circ u = g \circ u$, existe un único morfismo $k : D \to C$ que hace conmutar al diagrama.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "u"'] & C \arrow[d, "e"] \\ & A \end{tikzcd}$$

A tal morfismo $e : C \to A$ lo llamaremos **igualador** de f y g y diremos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene igualadores si el igualador de cada par de $\mathscr{C}$-morfismos existe en $\mathscr{C}$.

Dualmente, un colímite para el diagrama $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ es llamado un **coigualador** de f y g y diremos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene coigualadores si el coigualador de cada par de $\mathscr{C}$-morfismos existe.

(iii) *Productos y coproductos fibrados.* Un **producto fibrado** de un par de morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to C$ con codominio común, es un límite para el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Un cono para este diagrama consiste de tres morfismos i, j, k tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "k"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

conmuta. De donde se obtiene que $k = g \circ i = f \circ j$, así que un cono se puede ver como un par de morfismos $i : D \to B$ y $j : D \to A$ tales que el cuadrado es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Entonces un producto fibrado del par $f : A \to C$ y $g : B \to C$ es un par de morfismos $i : D \to B$, $j : D \to A$ tales que

- $f \circ j = g \circ i$ y
- Si $h : E \to A$ y $k : E \to B$ son tales que $f \circ h = g \circ k$, entonces existe un único morfismo $u : E \to D$ tal que $h = j \circ u$ y $k = i \circ u$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Dualmente, un **coproducto** es el colímite del diagrama.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Proposición 1.7. Todo igualador es monomorfismo y, dualmente, todo coigualador es epimorfismo.

Demostración. Sea

$$C \xrightarrow{h} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

un diagrama igualador y supongamos que $j : D \to C$, $k : D \to C$ satisfacen $h \circ j = h \circ k$, entonces $f \circ (h \circ j) = g \circ (h \circ k)$ y entonces existe un único morfismo $u : D \to C$ tal que $h \circ j = h \circ u$, pero también $h \circ k = h \circ u$ y por tanto $u = j = k$. $\square$

Proposición 1.8. En el siguiente producto fibrado, si f es un monomorfismo, también lo es i.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que f es monomorfismo, sean $p, q : D' \to D$ tales que $i \circ p = i \circ q$. Entonces $g \circ i \circ p = g \circ i \circ q$, de forma que

$$f \circ j \circ p = g \circ i \circ p = g \circ i \circ q = f \circ j \circ q$$

y como f es monomorfismo se obtiene $j \circ p = j \circ q$. Ahora, como el cuadrado es un producto fibrado, existe un único morfismo $h : D' \to D$ tal que $i \circ h = i \circ p$ y $j \circ h = j \circ q$. Pero tanto p como q cumplen estas condiciones, así que $p = q$ e i es un monomorfismo. $\square$

Proposición 1.9. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}$$

1. Si los cuadrados (I) y (II) son productos fibrados, también lo es el cuadrado exterior.
2. Si el cuadrado exterior y (II) son productos fibrados, también lo es (I).

Demostración. Para 1. Sean (I) y (II) productos fibrados. Si K es un objeto y $x : K \to D$ y $y : K \to C$ son morfismos tales que $g \circ f \circ x = e \circ y$, por ser (II) producto fibrado, existe un único morfismo z tal que $b \circ z = y$ y $d \circ z = f \circ x$. También, como (I) es producto fibrado, existe un único morfismo $w : K \to A$ tal que $a \circ w = z$ y $c \circ w = x$, así se tiene que $b \circ a \circ w = b \circ z = y$. Luego, si $w' : K \to A$ es otro morfismo tal que $b \circ a \circ w' = y$ y $c \circ w' = x$, se tiene que $b \circ (a \circ w') = b \circ (a \circ w)$ y $d \circ (a \circ w') = f \circ c \circ w' = f \circ x = f \circ c \circ w = d \circ (a \circ w)$. Como (II) es un producto fibrado, $a \circ w' = a \circ w$. Por otra parte $c \circ w' = x = c \circ w$. Entonces $w = w'$ porque (I) es producto fibrado.

Bajo las hipotesis de 2. sean $a' : A' \to B$ y $c' : A' \to D$ tal que $d \circ a' = f \circ c'$. Entonces $b \circ a'$ y c' cumplen $e \circ (b \circ a') = (g \circ f) \circ c'$. Dado que el cuadrado exterior es producto fibrado, existe un morfismo $q : A' \to A$ tal que $b \circ a' = (b \circ a) \circ q$ y $c' = c \circ q$, pero entonces $b \circ (a \circ q) = b \circ a'$ y $d \circ (a \circ q) = f \circ c'$ y como (II) es un producto fibrado y existe un único morfismo $A' \to B$ que cumple esa propiedad se sigue que $a' = a \circ q$. Para comprobar la unicidad, basta ver que si $r : A' \to A$ es otro morfismo tal que $a' = r \circ a$ y $c' = r \circ c$, entonces $b \circ a \circ r = b \circ a \circ q$ y $c' = c \circ r$ implica que $r = q$ por la unicidad del morfismo en el producto fibrado exterior. $\square$

1.6 Existencia de límites y colímites

Se dirá que una categoría $\mathscr{C}$ es (finitamente) completa o cocompleta si el límite o colímite de cualquier diagrama (finito) en $\mathscr{C}$ existe en $\mathscr{C}$. El siguiente criterio es de gran utilidad para probar la existencia de límites en toda categoría.

Teorema 1.10. *$\mathscr{C}$ es (finitamente) completa si y sólo si $\mathscr{C}$ tiene productos (finitos) e igualadores. Dualmente, $\mathscr{C}$ es (finitamente) cocompleta si y sólo $\mathscr{C}$ tiene coproductos (finitos) y coigualadores.*

Demostración. Como los productos e igualadores son límites la necesidad es inmediata.

Entonces supongamos que $\mathscr{C}$ tiene productos (finitos) e igualadores. Sea $\mathscr{D}$ un diagrama (finito) en $\mathscr{C}$ con vértices $\{D_i : i \in I\}$. Sea $D = \prod D_i$ y para cada $i \in I$ sea $\pi_i : D \to D_i$ la proyección canónica. Para cada morfismo $d : D_i \to D_j$ de $\mathbf{D}$ escribamos $i = i(d)$ y $j = j(d)$. Sea $D' = \prod_{d \in D} D_{j(d)}$, y para cada $d \in \mathbf{D}$ sea $\sigma_{j(d)} : D' \to D_{j(d)}$ la proyección canónica para D'. Sea f el único morfismo que hace conmutar al siguiente triángulo para cada $d \in \mathbf{D}$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_{j(d)}"'] & D' \arrow[d, "\sigma_{j(d)}"] \\ & D_{j(d)} \end{tikzcd}$$

Mientras que g es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama para cada $d \in \mathbf{D}$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "d \circ \pi_{i(d)}"'] & D' \arrow[d, "\sigma_{j(d)}"] \\ & D_{j(d)} \end{tikzcd}$$

Entonces sea $h : A \to D$ el igualador de $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D'$. Afirmamos que $F = \{\pi_i \circ h : A \to D_i : i \in I\}$ es un límite para $\mathbf{D}$ en $\mathscr{C}$.

Veamos que es un cono sobre **D**. Para cada d en **D** se tiene que

$$d \circ \pi_{i(d)} \circ h = \sigma_{j(d)} \circ g \circ h = \sigma_{j(d)} \circ f \circ h = \pi_{j(d)} \circ h$$

donde la penúltima igualdad se da porque h es igualador de f y g. Entonces, si $\{k_i : A' \to D_i : i \in I\}$ es otro cono sobre **D**, sea k el único morfismo que hace conmutar el diagrama para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "k_i"'] & D \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & D_i
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi_{i(d)} \circ h"] & \prod_{i \in I} D_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\pi_{d(i)}"] \arrow[dr, "\pi_{j(d)}"] & \prod_{d \in \mathbf{D}} D_{j(d)} \arrow[d, "\sigma_{j(d)}"] \\
A' \arrow[u, "l"] \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "k_i"] \arrow[rr, bend right, "k_{j(d)}"'] & D_{i(d)} \arrow[r, "d"] & D_{j(d)}
\end{tikzcd}$$

Para ver que en efecto $f \circ k = g \circ k$ se comprueba que $\sigma_{j(d)} \circ f \circ k = \sigma_{j(d)} \circ g \circ k$ para cada $d \in \mathbf{D}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\sigma_{j(d)} \circ f \circ k &= \pi_{j(d)} \circ k \\
&= k_{j(d)} \\
&= d \circ k_{i(d)} \\
&= d \circ \pi_{i(d)} \circ k \\
&= \sigma_{j(d)} \circ g \circ k
\end{aligned}$$

Como h es el igualador de f y g, existe un único $l : A' \to A$ que factoriza al morfismo k. Y entonces se tiene que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "k_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i \circ h"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para cada $i \in I$. Y por tanto el morfismo l es único. Entonces como cada cono sobre **D** se factoriza a través de F el último es un límite para D. Por tanto $\mathscr{C}$ es (finitamente) completa. □

1.7 Funtores y transformaciones naturales

Definición 1.11. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un **funtor** covariante de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ es un triple o tercia $(\mathscr{C}, F, \mathscr{D})$ donde F es una función de la clase de morfismos de $\mathscr{C}$ a la clase de morfismos de $\mathscr{D}$ que satisface las siguientes condiciones:

- F preserva identidades; es decir, si e es una $\mathscr{C}$-identidad, entonces $F(e)$ es una $\mathscr{D}$-identidad.
- F preserva composiciones; Si $dom(g) = cod(f)$, entonces: $dom(F(g)) = cod(F(g))$ y $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Como notación en vez de escribir $(\mathscr{C}, F, \mathscr{D})$, escribiremos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ para referirnos al funtor F de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$.

Definición 1.12. $(\mathscr{C}, F, \mathscr{D})$ es un **funtor contravariante** de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ si y sólo si $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, F, \mathscr{D})$ es un funtor.

Dado que en toda categoría existe una correspondencia biyectiva entre los objetos de la categoría y los morfismos identidad, y los funtores preservan identidades, cada funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce una única función (que denotaremos también por F) de la clase de $\mathscr{C}$-objetos a la clase de $\mathscr{D}$-objetos de tal forma que para cada $\mathscr{C}$-objeto A :

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Y como consecuencia inmediata de este hecho se tiene que para cada par de $\mathscr{C}$-objetos A y B se tiene que

$$F[\hom_{\mathscr{C}}(A,B)] \subset \hom_{\mathscr{D}}(F(A),F(B)]$$

De esta forma cada funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ puede ser recuperado desde su "función de objetos" $F : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ y las restricciones

$$F\Big|_{\hom(A,B)}^{\hom(F(A),F(B))}$$

Por tanto, a menudo describiremos a los funtores declarando su función sobre objetos y sus restricciones respectivas.

Ejemplos.

- El *funtor identidad* $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ y el *funtor encaje* de cualquier subcategoría $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}$ son funtores covariantes de toda categoría.
- El *funtor potencia* P : **Set** $\to$ **Set**. Donde P asigna a cada objeto X su potencia $P(X)$ y a cada función $f : X \to Y$ la función $P(f) : P(X) \to P(Y)$ y envía a cada subconjunto $A \subset X$ su imagen $f[A] \subset Y$. Es un funtor covariante.
- Los *funtores hom*. Para cada categoría $\mathscr{C}$ y cada $\mathscr{C}$-objeto A, se tiene el funtor $H_A : \mathscr{C} \to$ **Set** definido en objetos por $H_A(X) = \hom_{\mathscr{C}}(A,X)$ y en morfismos $f : X \to Y$ como $H_A(f) : \hom_{\mathscr{C}}(A,X) \to \hom_{\mathscr{C}}(A,Y)$ dado por $H_A(f)(g) = f \circ g$. Es un funtor covariante.
- Un funtor covariante entre dos conjuntos (pre)ordenados es una función preservadora de orden.
- El *funtor contravariante potencia* $\hat{P}$: **Set** $\to$ **Set**. Donde a cada conjunto X le asigna su conjunto potencia $P(X)$ y a cada función $f : X \to Y$ la función $\hat{P} : P(Y) \to P(X)$ definida por $\hat{P}(f)(B) = f^{-1}[B]$.
- El funtor **Bool** $\to$ **Esp**$^{\mathrm{op}}$ que asigna a cada álgebra booleana su espacio de Stone y el funtor **Esp** $\to$ **Bool**$^{\mathrm{op}}$ que asigna a cada espacio topológico su álgebra de conjuntos cerrado-abiertos son funtores contravariantes de **Bool** a **Esp** y de **Esp** a **Bool** respectivamente.
- Para cada objeto A de una categoría $\mathscr{C}$ se tiene el *funtor hom contravariante*, $H^A : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to$ **Set** definido por $H^A(X) = \hom_{\mathscr{C}}(X,A)$ y en

morfismos $f : X \to Y$ por $H^A(f) : \hom_{\mathscr{C}}(Y,A) \to \hom_{\mathscr{C}}(X,A)$ donde $H^A(f)(g) = g \circ f$.

Diremos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es:

- **Pleno** si para cada par de $\mathscr{C}$-objetos A y B, F es sobreyectiva en $\hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, es decir, F transforma $\hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ sobreyectivamente en $\hom_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$.
- **Fiel** si F es inyectiva en $\hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ para cada par $A,B \in \mathscr{O}(\mathscr{C})$.
- **Denso** si para cada $\mathscr{D}$-objeto B existe un $\mathscr{C}$-objeto A tal que $F(A) \cong B$.
- **Un encaje** si es fiel e inyectivo en objetos, es decir, $F(A) = F(B)$ implica que $A = B$.

Definición 1.13. Sean $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtores.

(1) Una **transformación natural** de F a G es un triple (F,η,G) donde $\eta : \mathrm{Ob}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

- Para todo $\mathscr{A}$-objeto A, $\eta(A)$ (usualmente denotado por η_A) es un $\mathscr{B}$-morfismo $\eta_A : F(A) \to G(A)$.
- Para todo $\mathscr{A}$-morfismo $f : A \to A'$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] & & A \arrow[d, "f"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A') & & A' \end{tikzcd}$$

conmuta.

(2) Una transformación natural (F,η,G) es un **isomorfismo natural** si para cada $\mathscr{A}$-objeto A, η_A es un $\mathscr{B}$-isomorfismo.

(3) F y G son **naturalmente isomorfos** (denotado por $F \cong G$) si y sólo si existe un isomorfismo natural de F a G.

Si (F,η,G) es una transformación natural, entonces es común referirse a F como el dominio y a G como el codominio de la transformación natural. Análogamente a la notación de funtor, usaremos intercambiablemente la notación $\eta : F \to G$ para indicar que η es una transformación natural de F a G.

Si $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ es un funtor covariante, diremos que F es **representable** si existe un $\mathscr{C}$-objeto A tal que $F \cong H_A$. Dualmente diremos que un funtor $F : \mathscr{C} \to$ **Set** contravariante es representable si existe un $\mathscr{C}$-objeto A tal que $G \cong H^A$. El objeto A que satisface esta condición es el **objeto representativo** para F.

Nótese que si F, G y H son funtores de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ y $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$ son transformaciones naturales, entonces la ecuación

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$$

define una nueva transformación natural $\beta \circ \alpha : F \to H$.

Si $F, G : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ son funtores, escribiremos $\mathrm{Nat}(F, G)$ por la colección de transformaciones naturales de F a G.

Teorema 1.14 (Lema de Yoneda)**.** *Sean $\mathscr{A}$ una categoría, F un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathrm{Set}$ y consideremos un objeto $A \in \mathscr{A}$. Existe una correspondencía biyectiva*

$$\theta_{F,A} : \mathrm{Nat}(H_A, F) \to FA$$

entre la clase de transformaciones naturales de H_A a F y los elementos del conjunto FA; en particular la clase de transformaciones naturales es un conjunto. Las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable A. Cuando $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña las biyecciones $\theta_{F,A}$ también constituyen una transformación natural en la variable F.

Demostración. Dada una transformación natural $\alpha : H_A \to F$, definimos $\theta_{F,A}(\alpha) = \alpha_A(1_A)$. Para demostrar que $\theta_{F,A}$ es biyectiva encontraremos su inversa $\tau : FA \to \mathrm{Nat}(H_A, F)$.
Para cada $a \in FA$, definimos la transformación natural $\tau(a) : H_A \to F$ donde para cada $\mathscr{A}$-objeto B y $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A, B)$ se tiene la función $\tau(a)_B : \hom_{\mathscr{A}}(A, B) \to FB$ definida por $\tau(a)_B(f) = F(f)(a)$.
Para ver en efecto que $\tau(a)$ es una transformación natural, verifiquemos

que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathscr{A}}(A,B) \arrow[r, "\tau(a)_B"] \arrow[d, "\hom_{\mathscr{A}}(A,g)"'] & FB \arrow[d, "F(g)"] & B \arrow[d, "g"] \\
\hom_{\mathscr{A}}(A,C) \arrow[r, "\tau(a)_C"'] & FC & C
\end{tikzcd}$$

Si $g : B \to C$ es una función y $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A,B)$, se tiene que

$$\left(F(g)\circ\tau(a)_B\right)(f) = F(g)\left(F(f)(a)\right) = \left(F(g)\circ F(f)\right)(a) = F(g\circ f)(a)$$

$$\text{y} \qquad \left(\tau(a)_C \circ \hom_{\mathscr{A}}(A,g)\right)(f) = \tau(a)_C\left(g\circ f\right) = F(g\circ f)(a)$$

Por tanto, el diagrama es conmutativo y $\tau(a)$ es transformación natural. Comprobemos entonces que $\theta_{F,A}$ y τ son inversos uno del otro.
Para cada $a \in FA$:

$$\left(\theta_{F,A}\circ\tau\right)(a) = \theta_{F,A}(\tau(a)) = \tau(a)_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{FA}(a) = a$$

y para cada $\alpha : H_A \to F$ transformación natural se tiene que

$$\left(\tau\circ\theta_{F,A}\right)(\alpha) = \tau\left(\theta_{F,A}(\alpha)\right) = \tau(\alpha(1_A)) : \hom_{\mathscr{A}}(A,\_) \to F$$

es una transformación natural, donde para cada $\mathscr{A}$-objeto B y $f \in \hom_{\mathscr{A}}(A,B)$ se tiene

$$\tau(\alpha(1_A))_B(f) = F(f)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(\hom_{\mathscr{A}}(A,f)(1_A)) = \alpha_B(f\circ 1_A) = \alpha_B(f)$$

donde la segunda igualdad se cumple porque α es transformación natural. Por tanto $\theta_{F,A}$ constituye una correspondencia biyectiva demostrando la primera parte del teorema.

Para demostrar que $\theta_{F,A}$ es también una transformación natural sobre la variable A consideremos el funtor $N : \mathscr{A} \to Set$ definido en objetos por $N(A) = \mathrm{Nat}(H_A, F)$ y para $f : A \to B$ $\mathscr{A}$-morfismo por $N(f) : \mathrm{Nat}(H_A,F)\mathrm{Nat}(\hom_{\mathscr{A}}(B,\_),F)$ dado por $N(f)(\alpha) = \alpha\circ\hom_{\mathscr{A}}(f,\_)$. Entonces si $\eta_A = \theta_{F,A}$ veremos que η es transformación natural.
Si $\alpha : H_A \to F$ es una transformación natural, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(F(f)\circ\eta_A\right)(\alpha) &= F(f)\left(\eta_A(\alpha)\right) = F(f)\left(\theta_{F,A}(\alpha)\right) = F(f)\left(\alpha_A(1_A)\right) \\
&= \alpha_B\left(\hom_{\mathscr{A}}(A,f)(1_A)\right) = \alpha_B(f\circ 1_A) = \alpha_B(f)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left(\eta_B \circ N(f)\right)(\alpha) &= \eta_B\left(N(f)(\alpha)\right) = \eta_B(\alpha \circ \hom_{\mathscr{A}}(f,_)) \\
&= \theta_{F,A}(\alpha \circ \hom_{\mathscr{A}}(f,_)) = (\alpha \circ \hom_{\mathscr{A}}(f,_))_B(1_B) \\
&= \left(\alpha_B \circ \hom_{\mathscr{A}}(f,B)\right)(1_B) = \alpha_B(1_B \circ f) = \alpha_B(f)
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\left(F(f) \circ \eta_A\right)(\alpha) = \left(\eta_B \circ N(f)\right)(\alpha).$$

Esto permite concluir que $\eta : N \to F$ es transformación natural y por lo tanto lo es $\theta_{F,A}$ en la variable A.

Más aún, si $\mathscr{A}$ es una categoría pequeña, existe la categoría $\mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathrm{Set})$ cuyos objetos son los funtores de $\mathscr{A}$ a Set y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Tomemos un $\mathscr{A}$-objeto A y consideremos el funtor $M : \mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathrm{Set}) \to \mathrm{Set}$ definido por $M(F) = \mathrm{Nat}(H_A, F)$ en objetos y si $\gamma : F \to G$ es un morfismo en $\mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathrm{Set})$ definido por $M(\gamma) : \mathrm{Nat}(H_A, F) \to \mathrm{Nat}(H_A, G)$ con $M(\gamma)(\alpha) = \gamma \circ \alpha$ en morfismos. También consideremos el funtor “evaluación en A” $\mathrm{ev}_A : \mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathrm{Set}) \to \mathrm{Set}$ definido en objetos por $\mathrm{ev}_A(F) = FA$ y en morfismos $\mathrm{ev}_A(\gamma) = \gamma_A$. Entonces se tiene que para cada $\alpha : H_A \to F$

$$\left(\mathrm{ev}_A \circ \theta_{F,A}\right)(\alpha) = \gamma_A(\theta_{F,A}(\alpha)) = \gamma_A(\alpha_A(1_A)) = \left(\gamma_A \circ \alpha_A\right)(1_A)$$

por otra parte

$$\left(\theta_{G,A} \circ M(\gamma)\right)(\alpha) = \theta_{G,A}\left(M(\gamma)(\alpha)\right) = \theta_{G,A}(\gamma \circ \alpha) = (\gamma \circ \alpha)_A(1_A) = (\gamma_A \circ \alpha_A)(1_A)$$

lo cual indica que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(H_A, F) \arrow[r, "\theta_{F,A}"] \arrow[d, "M(\gamma)"'] & FA \arrow[d, "\mathrm{ev}_A(\gamma)"] & F \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathrm{Nat}(H_A, G) \arrow[r, "\theta_{G,A}"'] & GA & G
\end{tikzcd}$$

y que por tanto $\theta_{F,A}$ es una transformación natural en la variable F. □

A partir del Lema de Yoneda se tiene que dados dos objetos A y B, $\mathrm{Nat}(H_A,H_B) \cong \hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ y por dualidad que

$$\mathrm{Nat}(H^A,H^B) \cong \hom_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B,A) \cong \hom_{\mathscr{C}}(A,B).$$

Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, donde $\mathscr{C}$ es pequeña, sea $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ la **categoría de funtores**, cuyos objetos son todos los funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y sus morfismos son las transfomaciones naturales.

Entonces, dada una categoría pequeña $\mathscr{C}$, la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ tiene como objetos a todos los funtores contravariantes de $\mathscr{C}$ en $\mathbf{Set}$ (llamados pregavillas sobre $\mathscr{C}$). Definimos la función $Y : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ por $Y(A) = H^A$ para cada $\mathscr{C}$-objeto A y $Y(f)_C(g) = f \circ g$ donde $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son $\mathscr{C}$-morfismo. Entonces Y es un funtor y es inyectivo en objetos. Más aún por el Lema de Yoneda Y es pleno y fiel, así se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.15 (Teorema del encaje de Yoneda)**.** *Para todo categoría pequeña $\mathscr{C}$, el funtor Y es un encaje pleno de $\mathscr{C}$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.*

Más aún, el siguiente Teorema será de gran importancia pues nos permite garantizar que todo funtor en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ puede ser "aproximado por funtores representables".

Teorema 1.16. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña. Entonces para cada objeto F de $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ existe un diagrama $\mathbf{D}$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ cuyos vértices son funtores representables tales que $F = \mathrm{colím}\,\mathbf{D}$. Es decir, cada objeto F de $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ es el colímite de funtores representables.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña. Dado un objeto F en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que los conjuntos $\{FA : A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$ son ajenos. Para cada $x \in FA$ escribamos H_x por H^A. Sea $\mathbf{D}$ el diagrama en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ cuyo conjunto de vértices es

$$\{H_x : x \in FA, A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}.$$

Recordemos que para cada $x \in FA$ se define en la prueba del Lema de Yoneda una transformación natural $\tau(x) : H^A \to F$ dada por

$$\tau(x)_B : H^A(B) \to FB \text{ donde } f \mapsto (Ff)x.$$

Tomaremos como morfismos del diagrama **D** a todos los morfismos $\eta : H_x \to H_y$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_x \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "x*"'] & & H_y \arrow[dl, "y*"] \\ & F & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

para cada $x \in FA, y \in FB$.

De esto se deduce inmediatamente que $K = \{x* : H_x \to F : x \in FA, A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$ es un cono bajo **D**. Probaremos que $K =$ colím **D**. Supongamos que

$$K' = \{\xi_x : H_x \to G : x \in FA, A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$$

es cualquier otro cono bajo **D**. Esto implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_x \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta_x"'] & & H_y \arrow[dl, "\eta_y"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

siempre que el diagrama 1.1 conmute. Tenemos que mostrar que existe una única transformación natural $\alpha : F \to G$que haga conmutar el siguiente diagrama para cada $x \in FA$ y $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

$$\begin{tikzcd} H_x \arrow[r, "x*"] \arrow[dr, "\xi_x"'] & F \arrow[d, "\alpha"] \\ & G \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Para lograr esto primero necesitaremos ver que para cada $f : B \to A$ y $x \in FA$, haciendo $y = (Ff)x \in FB$,

$$(\xi_y)_B(1_B) = (\xi_x)_B(f) \tag{1.4}$$

Para establecer 1.4, notemos que, como el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_y \arrow[rr, "Yf"] \arrow[dr, "y*"'] & & H_x \arrow[dl, "x*"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

conmuta, también lo hace el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_y \arrow[rr, "Yf"] \arrow[dr, "\xi_y"'] & & H_x \arrow[dl, "\xi_x"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

de modo que en particular se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^B(B) = H_y(B) \arrow[rr, "(Yf)_B"] \arrow[dr, "(\xi_y)_B"'] & & H_x(B) = H^A(B) \arrow[dl, "(\xi_x)_B"] \\ & GB & \end{tikzcd}$$

donde obtenemos

$$(\xi_y)_B(1_B) = (\xi_x)_B((Yf)_B(1_B)) = (\xi_x)_B(f)$$

como queriamos.

Entonces definamos para cada $\mathscr{C}$-objeto A, $\alpha_A : FA \to GA$ por

$$\alpha_A(x) = (\xi_x)_A(1_A) \text{ para } x \in FA.$$

Luego, $\alpha = \{\alpha_A : A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$ es una transformación natural $F \to G$. Para verificar esto, sea $f : B \to A$, $x \in FA$ y hagamos $y = (Ff)x$. Entonces

$$\begin{aligned} (GF)(\alpha_A(x)) = {} & (GF)((\xi_x)_A(1_A)) \\ = {} & (\xi_x)_B(H^A(f)(1_A)) \quad \text{porque } \xi \text{ es natural} \\ = {} & (\xi_x)_B(f) \\ = {} & (\xi_y)_B(1_B) \quad \text{por 1.4} \\ = {} & \alpha_B(y) \\ = {} & \alpha_B((Ff)x). \end{aligned}$$

De modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FB \arrow[r, "\alpha_B"] & GB
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $\mathscr{C}$-objeto A, y por tanto α es una transformación natural. También 1.3 conmuta, pues dados $f : B \to A$ y $x \in FA$, tomando $y = (Ff)x$.

$$\alpha_B(x_B * (f)) = \alpha_B(y) = (\xi_y)_B(1_B) = (\xi_x)_B(f)$$

por 1.4.

Resta verificar que α es la única transformación que hace conmutar 1.3, pero dados $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), x \in FA, \alpha_A(x)$ está determinada únicamente por

$$\alpha_A(x) = \alpha_A(x_A * (1_A)) = (\xi_x)_A(1_A).$$

□

1.8 Adjunciones

Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores tales que para cada par de objetos A de $\mathscr{C}$ y B de $\mathscr{D}$, existe una biyección

$$\phi_{A,B} : \hom_{\mathscr{C}}(A, GB) \cong \hom_{\mathscr{D}}(FA, B), \tag{1.5}$$

La cual $\phi_{A,B}$ es **natural** en A, en el sentido de que para cada $\mathscr{C}$-morfismo $f : A \to A'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathscr{C}}(A', GB) \arrow[r, "\phi_{A',B}"] \arrow[d, "_\circ f"'] & \hom_{\mathscr{D}}(FA', B) \arrow[d, "_\circ Ff"] \\
\hom_{\mathscr{C}}(A, GB) \arrow[r, "\phi_{A,B}"] & \hom_{\mathscr{D}}(FA, B)
\end{tikzcd}$$

Es decir, para cada $h \in \hom_{\mathscr{C}}(A', GB)$:

$$\phi_{A,B}(h \circ f) = \phi_{A',B}(h) \circ Ff. \tag{1.6}$$

Además, $\phi_{A,B}$ es natural en B, en el sentido de que, para todo $\mathscr{D}$-morfismo $g : B' \to B$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathscr{C}}(A, GB') \arrow[r, "\phi_{A,B'}"] \arrow[d, "Gg \circ _"'] & \hom_{\mathscr{D}}(FA, B') \arrow[d, "g \circ _"] \\
\hom_{\mathscr{C}}(A, GB) \arrow[r, "\phi_{A,B}"] & \hom_{\mathscr{D}}(FA, B)
\end{tikzcd}$$

Es decir:

$$\phi_{A,B}(Gg \circ h) = g \circ \phi_{A,B'}(h). \tag{1.7}$$

Entonces se dira que (F, G, ϕ) es una **adjunción** entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. A F se le llamará **adjunto izquierdo** de G y a G **adjunto derecho** de F. A menudo una adjunción se denotará por

$$F \dashv G$$

indicando que F es el adjunto izquierdo de G.

Dada una adjunción (F, G, φ) entre C y D y A un $\mathscr{C}$-objeto, haciendo $B = FA$ en la ecuación 1.5 se tiene que existe un $\eta_A : A \to GFA$ tal que $\phi_{A,FA}(\eta_A) = 1_{FA}$. Entonces, dado un $\mathscr{D}$-objeto B y un morfismo $k : FA \to B$ consideremos

$$\hat{k} = Gk \circ \eta_A : A \to GB$$

Haciendo $B' = FA$ en la ecuación 1.7 se tiene

$$\phi_{A,B}(\hat{k}) = \phi_{A,B}(Gk \circ \eta_A) = k \circ \phi_{A,FA}(\eta_A) = k \circ 1_{FA} = k.$$

Así la función entre $\hom_{\mathscr{D}}(FA, B)$ y $\hom_{\mathscr{C}}(A, GB)$ definida por $k \mapsto \hat{k}$ es la inversa de la biyección $\phi_{A,B}$. Por lo cúal, para cada $h : A \to GB$ existe un único $k : FA \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "h"'] & GFA \arrow[d, "Gk"] \\
& GB
\end{tikzcd}$$

conmuta. Y, más aún, los morfismos η_A son los componentes de una transformación natural

$$\eta : 1_{\mathscr{C}} \to GF$$

Ya que para cada $f : A \to A'$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GFA \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GFf} \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & GFA' \end{array}$$

Para comprobarlo, tomemos $B = FA'$ en la ecuación 1.6 y verifiquemos que

$$\phi_{A,FA'}(\eta_{A'} \circ f) = \phi_{A',FA'}(\eta_{A'}) \circ Ff = 1_{FA'} \circ Ff = Ff.$$

y por otra parte, tomando $B = FA'$ y $B' = FA$ en la ecuación 1.7 se tiene

$$\phi_{A,FA'}(GFf \circ \eta_A) = Ff \circ \phi_{A,FA}(\eta_A) = Ff \circ 1_{FA} = Ff.$$

De estas dos ecuaciones se tiene $\phi_{A,FA'}(\eta_{A'} \circ f) = \phi_{A,FA'}(GFf \circ \eta_A)$ y dado que $\phi_{A,FA'}$ es una biyección, $\eta_{A'} \circ f = GFf \circ \eta_A$ como se deseaba. A la transformación natural $\eta : 1_{\mathscr{C}} \to GF$ se le conoce como la **unidad** de la adjunción (F, G, φ).

Similarmente, consideramos para cada $\mathscr{D}$-objeto B al morfismo

$$\epsilon_B = \phi_{GB,B}(1_{GB}) : FGB \to B.$$

Entonces, haciendo $A' = GB$ en la ecuación 1.6, para cada $h : A \to GB$ definamos $\tilde{h}$ como $\epsilon_B \circ Fh$, así se tiene

$$\tilde{h} = \epsilon_B \circ Fh = \phi_{GB,B}(1_G B) \circ Fh = \phi_{A,B}(1_{GB} \circ h) = \phi_{A,B}(h).$$

Luego, la función de $\hom_{\mathscr{C}}(A, GB)$ en $\hom_{\mathscr{D}}(FA, B)$ dada por $h \mapsto \tilde{h}$ tiene como inversa a $\phi_{A,B}$. Así, para cada $k : FA \to B$ existe un único morfismo $h : A \to GB$ que hace conmutar al diagrama.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "Fh"'] \arrow[dr, "h"] & \\ FGB \arrow[r, "\eta_B"] & B \end{tikzcd}$$

Y, nuevamente, los ϵ_B forman las componentes de una transformación natural

$$\eta : FG \to 1_{\mathscr{D}}.$$

Para verificar que es una transformación natural, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FGB \arrow[r, "\epsilon_B"] \arrow[d, "FGg"'] & B \arrow[d, "g"] \\
FGB' \arrow[r, "\epsilon_{B'}"] & B'
\end{tikzcd}$$

donde para cada $g : B \to B'$ se tiene

$$\epsilon_{B'} \circ FGg = \phi_{GB,B'}(Gg) = \phi_{GB,B'}(Gg \circ 1_{GB}) = g \circ \phi_{GB,B}(1_G B) = g \circ \epsilon_B.$$

A la transformación natural ϵ se le conoce como la **counidad** de la adjunción (F, G, ϕ). Tambien, para k en $\hom_{\mathscr{D}}(FA, B)$ el morfismo $\hat{k}$ de $\hom_{\mathscr{C}}(A, GB)$ se denomina el **transpuesto (izquierdo)** de k a través de la adjunción $F \dashv G$. Dualmente para cada h en $\hom_{\mathscr{C}}(A, GB)$ el morfismo $\tilde{h}$ de $\hom_{\mathscr{D}}(FA, B)$ es el **transpuesto (derecho)** de h a través de la adjunción $F \dashv G$.

Las siguientes son algunas propiedades esenciales de las transpuestas de una adjunción.

Proposición 1.17. Para $f : A \to A'$ en $\mathscr{C}$, $g : B \to B'$ en $\mathscr{D}$, $v : C \to A$.

$$\begin{array}{cc}
\widetilde{\eta_A} = 1_{FA} & \widehat{\epsilon_B} = 1_{GB} \\
\widehat{1_{FA}} = \eta_A & \widetilde{1_{GB}} = \epsilon_B \\
\hat{\tilde{h}} = h & \tilde{\hat{k}} = k \\
\epsilon_{FA} \circ F\eta_A = 1_{FA} & G\epsilon_B \circ \eta_{GB} = 1_{GB} \\
\widetilde{(\eta_A \circ f)} = Ff & \widehat{(g \circ \epsilon_B)} = Gg \\
\widetilde{(h \circ v)} = \tilde{h} \circ Fv & \widehat{(k \circ Fv)} = \hat{k} \circ v
\end{array}$$

1.9 Preservación de límites

Sea **E** un diagrama con vértices $\{E_i : i \in I\}$ en una categoría $\mathscr{C}$. Dados un cono

$$K = \{f_i : E_i \to A : i \in I\}$$

bajo **D** y un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, sea

$$FK = \{Ff_i : FE_i \to FA : i \in I\}$$

y sea F**E** el diagrama en $\mathscr{D}$ con vértices $\{FE_i : i \in I\}$ y morfismos Fd donde d es un morfismo de **E**. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "f_i"'] & & E_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmuta, también el diagrama correspondiente

$$\begin{tikzcd} FE_i \arrow[rr, "Fd"] \arrow[dr, "Ff_i"'] & & FE_j \arrow[dl, "Ff_j"] \\ & FA & \end{tikzcd}$$

Así que FK es un cono bajo F**E**.

Diremos que F **preserva el colímite de E** si para todo colímite K para **E** en $\mathscr{C}$, FK es un colímite para F**E** en $\mathscr{D}$. Y diremos que F preserva colímites (finitos) si F preserva el límite da cada diagrama (finito) en $\mathscr{C}$. Dualmente, se fórmula la noción de preservación de límites.

Un funtor que preserva colímites (límites) finitos es llamado exacto derecho (izquierdo). Un funtor que es tanto exacto izquierdo como exacto derecho se dirá que es exacto.

Las siguientes proposiciones son útiles para establecer cuándo un funtor preserva límites o colímites.

Proposición 1.18.

1. Si $\mathscr{C}$ es una categoría completa, entonces $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ preserva límites si y sólo si preserva productos e igualadores.
2. Si $\mathscr{C}$ es una categoría finitamente completa, entonces $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es izquierdo exacto si y sólo si preserva productos binarios, igualadores y objetos terminales.

Demostración. Ambos enunciados se siguen directamente del Teorema 1.10. □

Teorema 1.19. *Todo funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ con adjunto derecho preserva colímites. Dualmente, todo funtor con adjunto izquierdo preserva límites.*

Demostración. Sea $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un adjunto derecho de F y ϵ la counidad de la adjunción $F \dashv G$. Sea $\mathbf{E}$ un diagrama en $\mathscr{C}$ con vértices $\{E_i : i \in I\}$ y supongamos que $\mathbf{E}$ tiene un colímite $\{f_i : E_i \to A : i \in I\}$ en $\mathscr{C}$. Deseamos demostrar que el cono $\{Ff_i : FE_i \to FA : i \in I\}$ es un colímite para $F\mathbf{E}$. Veremos que para todo cono bajo $F\mathbf{E}$

$$K = \{g_i : FE_i \to B : i \in I\},$$

existe un único morfismo $k : FA \to B$ tal que $g_i = k \circ Ff_i$ para cada $i \in I$.

Como K es un cono bajo $F\mathbf{E}$, se tiene para cada $i, j \in I$ y $d : E_i \to E_j$ en $\mathbf{E}$

$$g_j \circ Fd = g_i$$

Entonces se tiene, tomando las transpuestas conforme a la Proposición 1.17

$$\hat{g}_i = \widehat{g_j \circ Fd} = \hat{g}_j \circ d,$$

así que $\{\hat{g}_i : E_i \to GB : i \in I\}$ es un cono sobre $\mathbf{E}$. Luego, como $\{f_i : E_i \to A : i \in I\}$ es un colímite, existe un único morfismo $h : A \to GB$ tal que

$$\hat{g}_i = h \circ f_i$$

Haciendo $k = \hat{h} : FA \to B$ se tiene, usando nuevamente la Proposición 1.17

$$k \circ Ff_i = \tilde{h} \circ Ff_i = \widetilde{h \circ f_i} = \tilde{\hat{g}}_i = g_i.$$

Así k factoriza a g_i a través de Ff_i.

Para mostrar que k es único, notemos que si r cumple $g_i = r \circ Ff_i$, entonces

$$\hat{g}_i = \widehat{(r \circ Ff_i)} = \hat{r} \circ f_i,$$

de lo cual se sigue, por unicidad, que $\hat{r} = h$ y entonces $r = \tilde{\hat{r}} = \tilde{h} = k$. $\square$

Teorema 1.20. *Para toda categoría pequeña $\mathscr{C}$, el encaje de Yoneda $Y : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ preserva límites.*

Demostración. Sea $\mathbf{D}$ un diagrama en $\mathscr{C}$ con vértices $\{D_i : i \in I\}$ y supongamos que $\{f_i : A \to D_i : i \in I\}$ es un límite para $\mathbf{D}$. Se demostrará que $\{Yf_i : YA \to YD_i : i \in I\}$ es un límite para $Y\mathbf{D}$.

Mostraremos que todo cono sobre $Y\mathbf{D}$ se factoriza a través de $\{f_i : A \to D_i : i \in I\}$. Sea pues $\{\eta_i : F \to YD_i : i \in I\}$ un cono sobre $Y\mathbf{D}$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$. Por el Teorema 1.16 existe un diagrama $\mathbf{E}$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ con vértices $\{YB_j : j \in J\}$ y morfismos $\{\beta_j : YB_j \to F : j \in J\}$ tal que $F = \operatorname{colím} \mathbf{E}$. Entonces

$$\eta_i \circ \beta_j : YB_j \to YD_i.$$

Entonces, como Y es pleno, para cada $i \in I, j \in J$ existe un morfismo $f_{ij} : B_j \to D_i$ tal que

$$Yf_{ij} = \eta_i \circ B_j. \tag{1.8}$$

Como $A = \operatorname{lím} \mathbf{D}$, para cada $j \in J$ existe un único $g_i : B_j \to A$ tal que

$$f_i \circ g_i = f_{ij} \tag{1.9}$$

para cada $i \in I$. Entonces verificaremos que $\{Yg_i : YB_i \to YA : j \in J\}$ es un cono bajo $\mathbf{E}$. Como $F = \operatorname{colím} \mathbf{E}$ existe un único $\alpha : F \to YA$ tal que

$$\alpha \circ B_j = Yg_j \tag{1.10}$$

para cada $j \in J$. Entonces, usando 1.8 y 1.9 se tiene para cada $i \in I$ y $j \in J$,

$$\begin{aligned} \eta_i \circ \beta_i &= Yf_{ij} = Y(f_i \circ g_j) \\ &= Y(f_i) \circ Y(g_j) \\ &= Yf_i \circ \alpha \circ \beta_j. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por lo que $\{\eta_i \circ \beta_i : YB_j \to YD_i : j \in J\}$ es un cono bajo **E** para cada $i \in I$, así que por la propiedad de unicidad de colímites y 1.11 se sigue

$$\eta_i = Yf_i \circ \alpha \tag{1.12}$$

para cada $i \in I$.

Entonces para verificar que $\{Yf_i : YA \to YD_i : i \in I\}$ es un límite para $Y\mathbf{D}$ resta probar que el morfismo $\alpha : F \to YA$ que satisface 1.12 es único. Supongamos que $\beta : F \to YA$ cumple $\eta_i = Yf_i \circ \beta$ para cada $i \in I$. Como Y es pleno, para cada $j \in J$ existe un $h_j : B_j \to A$ tal que $\beta \circ \beta_j = Yh_j$. Así, usando 1.8,

$$Yf_{ij} = \eta_i \circ \beta_j = Yf_i \circ \beta \circ \beta_j = Yf_i \circ Yh_j = Y(f_i \circ h_j).$$

Como Y es fiel, se sigue entonces que $f_{ij} = f_i \circ h_j$ para cada $i \in I$. Entonces por la propiedad de unicidad de g_j que cumple 1.9 se tiene $h_j = g_j$, de forma que

$$\beta \circ \beta_j = Yh_j = Yg_i$$

para todo $j \in J$. Entonces α es el único morfismo que satisface 1.12, por tanto $\alpha = \beta$. $\square$

1.10 Topos Elementales

Si $\mathscr{E}$ es una categoría con límites finitos, un **clasificador de subobjetos** es un monomorfismo $T : 1 \to \Omega$ cuyo dominio es un objeto terminal, tal que para cada monomorfismo $A \to X$ en $\mathscr{E}$ existe un único morfismo $\chi_A : X \to \Omega$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Una categoría $\mathscr{E}$ con límites finitos tiene **objetos potencia** si, para cada objeto B existe un objeto $P(B)$ y un monomorfismo $\in_B \rightarrowtail P(B) \times B$ tal que; para todo monomorfismo $r : R \rightarrowtail A \times B$ existe un único morfismo $\chi_r : A \to P(B)$ de modo que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \in_B \arrow[d, tail] \\ A \times B \arrow[r, "\chi_r \times 1_B"'] & P(B) \times B \end{tikzcd}$$

Finalmente diremos que una categoría $\mathscr{E}$ es un **topos (elemental)** si posee límites finitos, objeto terminal, clasificador de subobjetos y objetos potencia.

Capítulo

2 Teorias Locales

En este capítulo se enuncian los lenguajes locales, se derivan algunas de sus reglas de inferencia y se construyen teorías de conjuntos locales. El objetivo central de este capítulo es ilustrar que las teoría de conjuntos locales determinan categoría de la misma forma en la que la teoría de conjuntos clásica determina a la categoría Set. En efecto, las categoría de conjuntos locales resultan ser topos y más aún se puede verificar que cada topos puede ser visto como una categoría de conjuntos locales determinado por su *lógica interna*. Después de desarrollar estos conceptos se enuncia el Teorema de Equivalencia y se aplica para obtener propiedades esenciales de los topos por medio de demostraciones en la lógica interna.

2.1 Lenguajes Locales

Un lenguaje local $\mathscr{L}$ queda determinado por las siguientes clases de símbolos:

- Un símbolo llamado símbolo de tipo unidad: $\mathbf{1}$.
- Un símbolo llamado símbolo de tipo valor de verdad: $\mathbf{\Omega}$.
- Una colección, posiblemente vacía, de símbolos llamados símbolos de tipo elemental: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$
- Una colección, posiblemente vacía, de símbolos llamados símbolos funcionales: $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \dots$

Dada una colección de símbolos de $\mathscr{L}$ definimos recursivamente los símbolos de tipo:

- $\mathbf{1}$ y $\mathbf{\Omega}$ son símbolos de tipo.

- Todo símbolo de tipo elemental es un símbolo de tipo.
- Si $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$ son símbolos de tipo, también lo es $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$, asumiendo que si $n = 1$, $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$ es $\mathbf{A_1}$ y si $n = 0$, $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$ es 1. Al símbolo $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$ se le conoce como símbolo de tipo producto.
- Si $\mathbf{A}$ es un símbolo de tipo, también lo es $\mathbf{PA}$, el cual se denomina símbolo de tipo potencía.

Suponemos también que para cada símbolo de tipo $\mathbf{A}$, $\mathscr{L}$ tiene un conjunto de símbolos $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, \ldots$ llamados variables de tipo $\mathbf{A}$ (abreviadamente se escribe $x : A$ para indicar que x es de tipo $\mathbf{A}$) Además suponemos que $\mathscr{L}$ tiene al símbolo $*$ y que para cada símbolo funcional de $\mathscr{L}$ existe su firma, de la forma $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son símbolos de tipo. Usando estas convenciones definimos recursivamente los términos de $\mathscr{L}$.

- $*$ es un término de tipo 1.
- Para cada tipo $\mathbf{A}$, las variables $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, \ldots$ son términos de tipo $\mathbf{A}$.
- Si f es una función con firma $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y α es un término de tipo $\mathbf{A}$, entonces $f(\alpha)$ es un término de tipo $\mathbf{B}$.
- Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son términos de tipo $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$ respectivamente, entonces $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ es un término de tipo $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$. Con la convención de que $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ es α_1 si $n = 1$ y es $*$ si $n = 0$.
- Si α es un término de tipo $\mathbf{A_1} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$ y $1 \leq i \leq n$, $(\alpha)_i$ es un término de tipo $\mathbf{A_i}$. A $(\alpha)_i$ se le conoce como la i-ésima coordenada de α.
- Si α es un término de tipo $\mathbf{\Omega}$ y $x_{\mathbf{A}}$ es una variable de tipo $\mathbf{A}$, $\{x_{\mathbf{A}} : \alpha\}$ es un término de tipo $\mathbf{PA}$. Al término $\{x_{\mathbf{A}} : \alpha\}$ se le llama *el conjunto de todos los $x_{\mathbf{A}}$ que satisfacen α.*
- Si α, β son términos del mismo tipo, entonces $\alpha = \beta$ es un término de tipo $\mathbf{\Omega}$.
- Si α es un término de tipo $\mathbf{A}$ y β es un término de tipo $\mathbf{PA}$, entonces $\alpha \in \beta$ es un término de tipo $\mathbf{\Omega}$.

A los términos de tipo $\mathbf{\Omega}$ se les llamará fórmulas. Acordaremos por denotar con las últimas letras griegas, $\sigma, \tau, \ldots$ a los términos arbitrarios, y con las primeras, $\alpha, \beta, \ldots$ a las fórmulas. Cuando no haya lugar a confusión omitiremos también el subindice que denota el tipo de las variables y sólo escribiremos $x, y, z \ldots$ Por el símbolo $\tau(x)$ denotaremos al término τ teniendo consideración de la variable x, aunque ésta pueda no ocurrir en τ. Diremos que la variable libre x en el término τ es **acotada** si aparece en un contexto de la forma $\{x : \alpha\}$, de otro modo la ocurrencia es libre. Un término sin variables libres se llamará **cerrado** y a las fórmulas cerradas se les llamará **enunciados**.

Para cualesquiera términos τ, σ y una variable x del mismo tipo de σ, denotaremos por $\tau(x/\sigma)$ al resutado de sustituir por σ cada ocurrencia libre de x en τ. Un término σ se dirá libre para x en τ si para cada variable libre y en σ, todas las ocurrencias de y en $\tau(x/\sigma)$ que no están en τ son ocurrencias libres. Si Γes un conjunto de fórmulas, escribiremos $\Gamma(x/\sigma)$ para la colección de fórmulas $\tau(x/\sigma)$ donde $\tau \in \Gamma$, y diremos que σ es *libre para x en* Γ si σ es libre para x en cada fórmula de Γ. Sin embargo, se dirá que x es libre en Γ si es libre para algún elemento de Γ.

Operaciones Lógicas

	Operación	Definición
L1	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\alpha = \beta$
L2	$\top$	$* = *$
L3	$\alpha \wedge \beta$	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \top, \top \rangle$
L4	$\alpha \Rightarrow \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$
L5	$\forall x. \alpha$	$\{x : \alpha\} = \{x : \top\}$
L6	$\perp$	$\forall \omega . \omega$
L7	$\neg \alpha$	$\alpha \Rightarrow \perp$
L8	$\alpha \vee \beta$	$\forall \omega [(\alpha \Rightarrow \omega \wedge \beta \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$
L9	$\exists x . \alpha$	$\forall \omega [\forall x (\alpha \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$

En L8 y L9 se supone que ω es una variable de tipo $\mathbf{\Omega}$ que no ocurre ni en α ni en β.

Los axiomas y reglas de inferencia del lenguaje se darán en forma de secuentes.

Un **secuente** en $\mathscr{L}$ es una expresión de la forma

$$\Gamma : \alpha$$

donde α es una fórmula y Γ es un conjunto finito (posiblemente vacío) de fórmulas. Convendremos en usar las siguientes abreviaciones:

Abreviación	Significado
$\Gamma, \Delta : \alpha$	$\Gamma \cup \Delta : \alpha$
$\beta, \Gamma : \alpha$ o $\Gamma, \beta : \alpha$	$\Gamma \cup \{\beta\} : \alpha$
$\beta_1, \dots, \beta_n : \alpha$	$\{\beta_1, \dots, \beta_n\} : \alpha$
$: \alpha$	$\emptyset : \alpha$

Los axiomas para una teoría de conjuntos local son los siguientes:

Axioma	Secuente
Tautología	$\alpha : \alpha$
Unidad	$: x_{\mathbf{1}} = *$
Igualdad	$x = y, \alpha(z/x) : \alpha(z/y)$ con x e y libres para z en α
Productos	$: (\langle x_1, \dots, x_n \rangle)_i = x_i$
	$: x = \langle (x)_1, \dots, (x)_n \rangle$
Comprensión	$: x \in \{x : \alpha\} \Leftrightarrow \alpha$

Reglas de Inferencía para lenguajes locales

Regla	Secuente
Agregación	$\dfrac{\Gamma : \alpha}{\beta, \Gamma : \alpha}$
Corte	$\dfrac{\Gamma : \alpha \qquad \alpha, \Gamma : \beta}{\Gamma : \beta}$
Sustitución	$\dfrac{\Gamma : \alpha}{\Gamma(x/\tau) : \alpha(x/\tau)}$ Donde τ es libre para x en Γ y α
Extensión	$\dfrac{\Gamma : x \in \sigma \Leftrightarrow x \in \tau}{\Gamma : \sigma = \tau}$ Donde x no es libre en Γ, σ, τ.
Equivalencia	$\dfrac{\alpha, \Gamma : \beta \qquad \beta, \Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}$

Si S es una colección de secuentes, se define como **demostración a partir de S** al árbol finito cuyo vértice se encuentra en el extremo inferior y cuyos nodos se relacionan biúnivocamente con secuentes de tal forma que: todo secuente asociado con un nodo que tiene nodos arriba es una consecuencia directa de ellos por medio de las reglas de inferencias asociados a los nodos superiores y los nodos más altos se relación con un axioma o un elemento de S. El secuente del vértices del árbol se llamará la conclusión de la demostración. Acordemos en denotar por

$$\Gamma \vdash_S \alpha$$

al enunciado: existe una demostración a partir de S que tiene a $\Gamma : \alpha$ como conclusión, en cuyo caso diremos que $\Gamma : \alpha$ es derivable a partir de S. En caso de que S sea vacío omitiremos el subíndice y diremos que $\Gamma : \alpha$ es un secuente **válido.** Cuando se tenga $\emptyset \vdash_S \alpha$ escribiremos $\vdash_S \alpha$ y diremos que α es demostrabe a partir de S. Observemos que si $S \subset S'$ entonces $\vdash_S \alpha$ implica inmediatamente $\vdash_{S'} \alpha$.

Entonces definiremos una **teoría de conjuntos local** o simplemente una **teoría,** en $\mathscr{L}$ como una colección S de secuentes que es cerrada bajo derivabilidad. Es decir, S es una teoría de conjuntos local si, para cada secuente $\Gamma : \alpha$, se tiene

$$\Gamma \vdash_S \alpha \quad \text{si y sólo si} \quad (\Gamma : \alpha) \text{ está en } S.$$

Definimos la teoría de conjuntos local generada por una colección de secuentes S como $\overline{S}$ dado por

$$(\Gamma : \alpha) \text{ está en } \overline{S} \quad \text{si y sólo si} \quad \Gamma \vdash_S \alpha.$$

Diremos también que S es un **conjunto de axiomas** para una teoría de conjuntos local S' si y sólo si $S' = \overline{S}$. Además, dadas dos teorías de conjuntos locales S y S' diremos que S' es una extensión de S si para cada secuente $\Gamma : \alpha$ de $\mathscr{L}$, $\Gamma \vdash_S \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{S'} \alpha$. Diremos que una teoría de conjuntos local es **consistente** si no ocurre $\vdash_S \perp$. La teoría de conjuntos local generada en $\mathscr{L}$ por un conjunto vacío de axiomas es llamada la **teoría de conjuntos local pura** y se denotará por L. La teoría de conjuntos local sin tipos elementales o símbolos funcionales es llamada **lenguaje de conjuntos locales puro** y se denotará por $\mathscr{L}_0$. La teoría de conjuntos loca pura en $\mathscr{L}_0$ se denotará por L_0.

La lógica de las teorías locales de conjuntos

Propiedades de la igualdad

$$\vdash \mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad (2.1)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{x : x}\,(\text{Tau.}) \qquad \dfrac{}{x : x}\,(\text{Tau.})}{: x = x}\,(\text{Eq.})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \vdash \mathbf{y} = \mathbf{x} \qquad (2.2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x = x}\,(2.1)}{x = y : x = x}\,(\text{Ag.}) \qquad \dfrac{}{x = x, x = x : y = x}\,(\text{Ig.})}{x = y : y = x}\,(\text{C.})$$

$$\mathbf{x = y, y = z \vdash x = z} \qquad (2.3)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y=z : y=z}\,\text{(T)}}{x=y, y=z : y=z}\,\text{(Ag)} \qquad \dfrac{}{y=z, x=y : x=z}\,\text{(eq)}}{x=y, y=z : x=z}\,\text{(C)}$$

Propiedades de los pares ordenados

$$\mathbf{x = x', y = y' \vdash (\langle x, y\rangle)_1 = x'} \qquad (2.4)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{:(\langle x,y\rangle)_1 = x}\,\text{(Pr.)}}{x = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = x}\,\text{(Ag.)} \qquad \dfrac{}{(\langle x,y\rangle)_1 = x, x = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = x'}\,\text{(2.3)}}{x = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = x'}\,\text{(C.)}}{x = x', y = y' : (\langle x,y\rangle)_1 = x'}\,\text{(Ag.)}$$

$$\mathbf{(\langle x, y\rangle)_1 = x' \vdash (\langle x, y\rangle)_1 = (\langle x', y'\rangle)_1} \qquad (2.5)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{:(\langle x',y'\rangle)_1 = x'}\,\text{(Pr.)} \qquad \dfrac{}{(\langle x,y\rangle)_1 = x', (\langle x',y'\rangle)_1 = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = (\langle x',y'\rangle)_1}\,\text{(2.3)}}{(\langle x,y\rangle)_1 = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = (\langle x',y'\rangle)_1}\,\text{(C.)}$$

$$\mathbf{x = x', y = y' \vdash (\langle x, y\rangle)_1 = (\langle x', y'\rangle)_1} \qquad (2.6)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{x = x', y = y' : (\langle x,y\rangle)_1 = x'}\,\text{(2.4)} \qquad \dfrac{}{(\langle x,y\rangle)_1 = x' : (\langle x,y\rangle)_1 = (\langle x',y'\rangle)_1}\,\text{(2.5)}}{x = x', y = y' : (\langle x,y\rangle)_1 = (\langle x',y'\rangle)_1}\,\text{(C.)}$$

Similarmente se obtienen las propiedades para la segunda coordenada

$$\mathbf{x = x', y = y' \vdash (\langle x, y\rangle)_2 = y'} \qquad (2.7)$$
$$\mathbf{(\langle x, y\rangle)_2 = y' \vdash (\langle x, y\rangle)_2 = (\langle x', y'\rangle)_2} \qquad (2.8)$$
$$\mathbf{x = x', y = y' \vdash (\langle x, y\rangle)_2 = (\langle x', y'\rangle)_2} \qquad (2.9)$$

Los siguientes serán de utilidad para caracterizar la unicidad de los pares ordenados.

$$\mathbf{x = x', y = y' \vdash \langle x, y\rangle = \langle (\langle x', y'\rangle)_1, (\langle x, y\rangle)_2\rangle} \qquad (2.10)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(\langle x,y\rangle)_1=(\langle x',y'\rangle)_1,\langle x,y\rangle=\langle(\langle x,y\rangle)_1,(\langle x,y\rangle)_2\rangle:\langle x,y\rangle=\langle(\langle x',y'\rangle)_1,(\langle x,y\rangle)_2\rangle}\,\text{(Ig.)}}{x=x',y=y':\langle x,y\rangle=\langle(\langle x',y'\rangle)_1,(\langle x,y\rangle)_2\rangle}\,\text{(C. con 2.6)}$$

De forma análoga al anterior se prueba

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}',\mathbf{y}=\mathbf{y}',\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle(\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle)_1,(\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle)_2\rangle\vdash\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle(\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle)_1,(\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle)_2\rangle \tag{2.11}$$

Y finalmente usando la regla de corte con (2.10) y (2.11) se prueba

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}',\mathbf{y}=\mathbf{y}'\vdash\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle \tag{2.12}$$

De ahora en adelante se omitirán pasos obvios en las demostraciones para disminuir la longitud de las pruebas.

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle\vdash\mathbf{x}=\mathbf{x}' \tag{2.13}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle,(\langle x,y\rangle)_1=x:(\langle x',y'\rangle)_1=x}\,\text{(Ig.)}}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle:(\langle x',y'\rangle)_1=x}\,\text{(C.)}\qquad\dfrac{}{(\langle x',y'\rangle)_1=x'}\,\text{(Prod.)}}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle:x=x'}\,\text{(2.3)}$$

En completa analogía a la demostración anterior se tiene también

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}',\mathbf{y}'\rangle\vdash\mathbf{y}=\mathbf{y}' \tag{2.14}$$

Propiedades del símbolo de verdad

$$\alpha\vdash\alpha \tag{2.15}$$

$$\dfrac{}{\alpha:\alpha}\,\text{(T.)}$$

$$\vdash\top \tag{2.16}$$

$$\dfrac{}{*=*}\,\text{(Un.)}$$

$$\alpha\vdash\alpha=\top \tag{2.17}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\top}\,\text{(2.16)}}{\alpha:\top}\,\text{(Ag.)}\qquad\dfrac{\dfrac{}{\alpha:\alpha}\,\text{(T.)}}{\top,\alpha:\alpha}\,\text{(Ag.)}}{\alpha:\alpha=\top}\,\text{(Eq.)}$$

$$\alpha=\top\vdash\alpha \tag{2.18}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{:\top}\,\text{(2.16)}\qquad\dfrac{}{\top=\alpha,\top:\alpha}\,\text{(Ig.)}}{\top=\alpha:\alpha}\,\text{(C.)}\qquad\dfrac{}{\alpha=\top:\top=\alpha}\,\text{(2.2)}}{\alpha=\top:\alpha}\,\text{(C.)}$$

Propiedades de la conjunción

$$\frac{\Gamma : \alpha \qquad \Gamma : \beta}{\Gamma : \alpha \wedge \beta} \tag{2.19}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \alpha = \top, \beta = \top : \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \top, \top \rangle}\,\text{(2.11)} \qquad \dfrac{}{\Gamma : \beta = \top}\,\text{(2.17)}}{\Gamma, \alpha = \top : \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \top, \top \rangle}\,\text{(C.)} \qquad \dfrac{}{\Gamma : \alpha = \top}\,\text{(2.17)}}{\Gamma : \alpha \wedge \beta}\,\text{(C.)}$$

$$\frac{\alpha, \Gamma : \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma} \tag{2.20}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \alpha}\,\text{(2.13)}}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \alpha}\,\text{(Ag.)} \qquad \dfrac{}{\alpha, \Gamma : \gamma}\,\text{(h.)}}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(C.)}$$

De forma casi idéntica se prueba

$$\frac{\beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma} \tag{2.21}$$

Propiedades de la implicación

$$\frac{\alpha, \Gamma : \beta}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta} \tag{2.22}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \alpha}\,\text{(2.20)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha, \Gamma : \alpha}\,\text{(Ag.)} \qquad \dfrac{}{\alpha, \Gamma : \beta}\,\text{(h.)}}{\alpha, \Gamma : \alpha \wedge \beta}\,\text{(2.19)}}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}\,\text{(eq.)}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha \qquad \beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \Leftrightarrow \beta, \Gamma : \gamma} \tag{2.23}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha}\,\text{(h.)} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \alpha \Leftrightarrow \beta, \alpha : \beta}\,\text{(Ig.)}}{\Gamma, \alpha \Leftrightarrow \beta : \beta}\,\text{(C.)} \qquad \dfrac{}{\beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(h.)}}{\Gamma, \alpha \Leftrightarrow \beta : \gamma}\,\text{(C.)}$$

Y nuevamente de forma análoga

$$\frac{\Gamma : \alpha \qquad \beta, \Gamma : \gamma}{\beta \Leftrightarrow \alpha, \Gamma : \gamma} \tag{2.24}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha \qquad \beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma : \gamma} \tag{2.25}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha}\,\text{(h.)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(h.)}}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(2.20)}}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(2.23)}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma, \alpha : \beta} \tag{2.26}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}\,\text{(h.)} \qquad \dfrac{}{\alpha = \alpha \wedge \beta, \alpha : \alpha \wedge \beta}\,\text{(Ig.)}}{\Gamma, \alpha : \alpha \wedge \beta}\,\text{(C.)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta, \Gamma : \beta}\,\text{(T.)}}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \beta}\,\text{(2.20)}}{\alpha, \Gamma : \beta}\,\text{(C.)}$$

Más propiedades de la conjunción

$$\frac{\alpha, \beta : \gamma}{\alpha \wedge \beta : \gamma} \tag{2.27}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \alpha}\,\text{(2.20)} \qquad \dfrac{}{\alpha, \beta : \gamma}\,\text{(h.)}}{\alpha \wedge \beta, \beta : \gamma} \qquad \dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \beta}\,\text{(2.21)}}{\alpha \wedge \beta : \gamma}\,\text{(C.)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta : \gamma}{\alpha, \beta : \gamma} \tag{2.28}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha : \alpha}\,(\text{T.}) \qquad \dfrac{}{\beta : \beta}\,(\text{T.})}{\alpha, \beta : \alpha \wedge \beta}\,(2.19) \qquad \dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \gamma}\,(\text{h.})}{\alpha, \beta : \gamma}\,(\text{C.})$$

$$\frac{\Gamma : \alpha}{\bigwedge \Gamma : \alpha} \tag{2.29}$$

Se hará inducción sobre la cardinalidad de Γ. Obsérvese que el caso base está garantizado por 2.27. Supongamos que la propiedad se cumple para cuando Γ tiene menos de n elementos. Si $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ entonces

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha_1, \Gamma \setminus \{\alpha_1\} : \alpha}\,(\text{h.})}{\Gamma \setminus \{\alpha_1\} : \alpha_1 \to \alpha}\,(2.22)}{\bigwedge(\Gamma \setminus \{\alpha_1\}) : \alpha_1 \Rightarrow \alpha}\,(\text{H.I.})}{\alpha_1, \bigwedge(\Gamma \setminus \{\alpha_1\}) : \alpha}\,(2.26)}{\bigwedge \Gamma : \alpha}\,(2.27)$$

Revirtiendo la demostración anterior y usando las propiedades recíprocas en cada paso es fácil ver que también se cumple

$$\frac{\bigwedge \Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha} \tag{2.30}$$

Propiedades de la cuantificación universal

$$\frac{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}{\Gamma : \{x : \alpha\} = \{x : \beta\}} \tag{2.31}$$

Dado que x no es libre en Γ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}\,(\text{h.})}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}\,(2.20)}{\Gamma, \alpha : \beta}\,(2.26)}{x \in \{x : \alpha\}, \Gamma : x \in \{x : \beta\}}\,(\text{Ig.}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}\,(\text{h.})}{\Gamma : \beta \Rightarrow \alpha}\,(2.20)}{\Gamma, \beta : \alpha}\,(2.26)}{x \in \{x : \beta\}, \Gamma : x \in \{x : \alpha\}}\,(\text{Ig.})}{\Gamma : x \in \{x : \alpha\} \Leftrightarrow x \in \{x : \beta\}}\,(\text{Eq.})}{\Gamma : \{x : \alpha\} = \{x : \beta\}}\,(\text{Ext.})$$

$$\frac{\Gamma : \alpha}{\Gamma : \forall x.\alpha} \tag{2.32}$$

Dado que i) x no es libre en Γ o ii) x no es libre en α. Demostración para i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha : \alpha \Leftrightarrow \top}\,(2.17) \qquad \dfrac{}{\Gamma : \alpha}\,(\text{h.})}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \top}\,(\text{C.})}{\Gamma : \forall x.\alpha}\,(2.31)$$

Para ii). Sea v una variable nueva. Entonces

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha}\,(\text{h.})}{\Gamma(x/v) : \alpha}\,(\text{Sus.})}{\Gamma(x/v) : \forall x.\alpha}\,(\text{i})}{\Gamma : \forall x.\alpha}\,(\text{Sus.})$$

$$\frac{\Gamma : \{x : \alpha\} = \{x : \beta\}}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta} \tag{2.33}$$

donde x es libre en α o β.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow x \in \{x : \alpha\}}\,(\text{Com. y 2.2}) \qquad \dfrac{}{\Gamma, \{x : \alpha\} = \{x : \beta\} : x \in \{x : \alpha\} \Leftrightarrow x \in \{x : \beta\}}\,(\text{Ig.})}{\Gamma, \{x : \alpha\} = \{x : \beta\} : \alpha \Leftrightarrow x \in \{x : \beta\}}\,(2.3)}{\Gamma, \{x : \alpha\} = \{x : \beta\} : \alpha \Leftrightarrow \beta}\,(\text{Com. y 2.3})}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}\,(\text{h. y C.})$$

$$\forall x.\alpha \vdash \alpha \quad \text{donde } x \text{ es libre en } \alpha. \tag{2.34}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\alpha : \forall x.\alpha}\,\text{(T.)}}{\forall x.\alpha : \alpha = \top}\,\text{(2.33)} \qquad \dfrac{}{\alpha = \top : \alpha}\,\text{(2.18)}}{\forall x.\alpha : \alpha}\,\text{(C.)}$$

$$\forall u.\alpha(x/u) \Leftrightarrow \forall x.\alpha \quad \text{Dado que } u \text{ es libre para } x \text{ y no es libre en } \alpha. \tag{2.35}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{: u \in \{u : \alpha(x/u)\} \Leftrightarrow \alpha(x/u)}\,\text{(Com.)}}{: x \in \{u : \alpha(x/u)\} \Leftrightarrow \alpha}\,\text{(Sus.)}}{: x \in \{u : \alpha(x/u)\} \Leftrightarrow x \in \{x : \alpha\}}\,\text{(Com.)}}{: \{u : \alpha(x/u)\} = \{x : \alpha\}}\,\text{(Ext.)}}{: \forall u.\alpha(x/u) \Leftrightarrow \forall x.\alpha}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha(x/u)}{\Gamma : \forall x.\alpha} \tag{2.36}$$

Dado que $i)$ u es libre para x en α y no es libre en Γ o $\forall x.\alpha$ o bien $ii)$ x no es libre en α.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha(x/u)}\,\text{(h.)}}{\Gamma : \forall u.\alpha(x/u)}\,\text{(2.32)} \qquad \dfrac{}{\forall u.\alpha(x/u) : \forall x.\alpha}\,\text{(2.35)}}{\Gamma : \forall x.\alpha}\,\text{(C.)}$$

$$\frac{\alpha(x/\tau), \Gamma : \beta}{\forall x.\alpha, \Gamma : \beta} \tag{2.37}$$

Dado que τ es libre para x en α, x es libre en α y cada variable libre de τ es libre en $\forall x.\alpha, \Gamma$ o β.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\alpha : \alpha}\,\text{(2.34)}}{\forall x.\alpha : \alpha(x/\tau)}\,\text{(Sus.)} \qquad \dfrac{}{\alpha(x/\tau), \Gamma : \beta}\,\text{(h.)}}{\forall x.\alpha, \Gamma : \beta}\,\text{(C.)}$$

Propiedades de la negación

$$\bot \vdash \alpha \qquad (2.38)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall w.w : w}\,\text{(2.34)}}{\forall w.w : \alpha}\,\text{(Sus.)}}{\bot : \alpha}$$

$$\frac{\alpha, \Gamma : \bot}{\Gamma : \neg\alpha} \qquad (2.39)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\alpha, \Gamma : \bot}\,\text{(h.)}}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \bot}\,\text{(2.22)}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha}{\neg\alpha, \Gamma : \bot} \qquad (2.40)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha}\,\text{(h.)} \qquad \dfrac{}{\bot, \Gamma : \bot}\,\text{(T.)}}{\alpha \Rightarrow \bot, \Gamma : \bot}\,\text{(2.25)}$$

Propiedades de la disyunción

$$\frac{\alpha, \Gamma : \gamma \qquad \beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \vee \beta, \Gamma : \gamma} \qquad (2.41)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha, \Gamma : \gamma}\,\text{(h.)}}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \gamma}\,\text{(2.22)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(h.)}}{\Gamma : \beta \Rightarrow \gamma}\,\text{(2.22)}}{\Gamma : (\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)}\,\text{(2.27)} \qquad \dfrac{}{\gamma : \gamma}\,\text{(T.)}}{(\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \gamma, \Gamma : \gamma}}{\alpha \vee \beta, \Gamma : \gamma}\,\text{(2.37)}$$

$$\frac{\Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha \vee \beta} \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma : \beta}{\Gamma : \alpha \vee \beta} \qquad (2.42)$$

Como ambas demostraciones son similares, sólo se probará la segunda regla

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \beta}\,\text{(h.)} \qquad \dfrac{}{\omega : \omega}\,\text{(h.)}}{\beta \Rightarrow \omega, \Gamma : \omega}\,\text{(2.25)}}{(\alpha \Rightarrow \omega) \wedge (\beta \Rightarrow \omega), \Gamma : \omega}\,\text{(2.21)}}{\Gamma : (\alpha \Rightarrow \omega \wedge \beta \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega}\,\text{(2.22)}}{\Gamma : \alpha \vee \beta}\,\text{(2.32)}$$

Propiedades de la cuantificación existencial

$$\alpha \vdash \exists x.\alpha \quad \text{si } x \text{ es libre en } \alpha. \tag{2.43}$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(T.)}
\UnaryInfC{$\alpha : \alpha$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(T.)}
\UnaryInfC{$\omega : \omega$}
\RightLabel{(2.25)}
\BinaryInfC{$\alpha \Rightarrow \omega, \alpha : \omega$}
\RightLabel{(2.37)}
\UnaryInfC{$\forall x(\alpha \Rightarrow \omega), \alpha : \omega$}
\RightLabel{(2.22)}
\UnaryInfC{$\alpha : \forall x.(\alpha \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega$}
\UnaryInfC{$\alpha : \exists x.\alpha$}
\end{prooftree}
$$

$$\frac{\alpha, \Gamma : \beta}{\exists x.\alpha, \Gamma : \beta} \tag{2.44}$$

Dado que $i)$ x no es libre en Γ o β o bien $ii)$ x no es libre en α.

Demostración para el primer caso

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(h.)}
\UnaryInfC{$\alpha, \Gamma : \beta$}
\RightLabel{(2.22)}
\UnaryInfC{$\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta$}
\RightLabel{(2.36)}
\UnaryInfC{$\Gamma : \forall x.(\alpha \Rightarrow \beta)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(T.)}
\UnaryInfC{$\beta : \beta$}
\RightLabel{(2.25)}
\BinaryInfC{$\forall x.(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta, \Gamma : \beta$}
\UnaryInfC{$\exists x.\alpha, \Gamma : \beta$}
\end{prooftree}
$$

Demostración para el segundo caso. Sea u una variable nueva, entonces

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha, \Gamma : \beta$}
\RightLabel{(Sus.)}
\UnaryInfC{$\alpha, \Gamma(x/u) : \beta(x/u)$}
\RightLabel{(i.)}
\UnaryInfC{$\exists x.\alpha, \Gamma(x/u) : \beta(x/u)$}
\UnaryInfC{$\exists x.\alpha, \Gamma : \beta$}
\end{prooftree}
$$

$$\frac{\alpha(x/u), \Gamma : \beta}{\exists x.\alpha, \Gamma : \beta} \tag{2.45}$$

Bajo el supuesto de que $i)$ u es libre para x en α y no es libre en $\exists x.\alpha, \Gamma$ o β, o bien $ii)$ x no es libre en α.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x.\alpha : \exists u.\alpha(x/u)}\,(\text{Sus.}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha(x/u), \Gamma : \beta}\,(\text{h.})}{\exists u.\alpha(x/u), \Gamma : \beta}\,(2.44)}{\exists x.\alpha, \Gamma : \beta}\,(\text{C.})$$

$$\frac{\Gamma : \alpha(x/\tau)}{\Gamma : \exists x.\alpha} \tag{2.46}$$

Dado que τ es libre para x en α, x es libre en α y cada variable libre de τ es libre en Γ o $\exists x.\alpha$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma : \alpha(x/\tau)}\,(\text{h.}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha : \exists x.\alpha}\,(2.43)}{\alpha(x/\tau) : \exists x.\alpha}\,(\text{Sus.})}{\Gamma : \exists x.\alpha}\,(\text{C.})$$

$$\vdash \exists u.\alpha(x/u) \Leftrightarrow \exists x.\alpha \tag{2.47}$$

Dado que u es libre para x pero no lo es en α.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha(x/u) : \alpha(x/u)}\,(\text{T.})}{\alpha(x/u) : \exists x.\alpha}\,(2.46)}{\exists u.\alpha(x/u) : \exists x.\alpha}\,(2.44)$$

y para el recíproco:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha : \alpha(x/u)(u/x)}\,(\text{T.})}{\alpha : \exists u.\alpha(x/u)}\,(2.46)}{\exists x.\alpha : \exists u.\alpha(x/u)}\,(2.44)$$

$$\vdash \exists x.(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha \wedge \exists x.\beta \tag{2.48}$$

Dado que x es libre en β pero no en α.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \alpha}\,(2.20)}{\exists x.(\alpha \wedge \beta) : \alpha}\,(2.44) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \wedge \beta : \beta}\,(2.21) \qquad \dfrac{}{\beta : \exists x.\beta}\,(2.43)}{\alpha \wedge \beta : \exists x.\beta}\,(\text{C.})}{\exists x.(\alpha \wedge \beta) : \exists x.\beta}\,(2.44)}{\exists x.(\alpha \wedge \beta) : \alpha \wedge \exists x.\beta}\,(2.27)$$

Para el recíproco

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta}\,(2.27) \qquad \dfrac{}{\alpha\wedge\beta:\exists x.(\alpha\wedge\beta)}\,(2.43)}{\alpha,\beta:\exists x.(\alpha\wedge\beta)}\,(\mathrm{C.})}{\alpha,\exists x.\beta:\exists x.(\alpha\wedge\beta)}\,(2.44)}{\alpha\wedge\exists x.\beta:\exists x.(\alpha\wedge\beta)}\,(2.27)$$

$$\frac{\Gamma:\alpha \qquad \alpha,\Gamma:\beta}{\exists x_1.(x_1=x_1),\ldots,\exists x_n.(x_n=x_n),\Gamma:\beta} \tag{2.49}$$

donde $x_1,\ldots,x_n$ son las variables libres de α sin ocurrencias libres en Γ o β.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma:\alpha}\,(\mathrm{h.})}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\Gamma:\alpha}\,(\mathrm{Ag.}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha,\Gamma:\beta}\,(\mathrm{h.})}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\alpha,\Gamma:\beta}\,(\mathrm{Ag.})}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\Gamma:\beta}\,(\mathrm{C.})}{\exists x_1.(x_1=x_1),\ldots,\exists x_n.(x_n=x_n),\Gamma:\beta}\,(2.44)$$

Esto nos permite deducir una versión más de la regla de corte

$$\frac{\Gamma:\alpha \qquad \alpha,\Gamma:\beta}{\Gamma:\beta} \tag{2.50}$$

dado que, siempre que **A** sea el tipo de una variable libre de α sin ocurrencias libres en Γ o β, exista un término cerrado de tipo **A**,

Demostración. Sean $x_1,\ldots,x_n$ las variables libres de α que no tienen ocurrencias libres en Γ o β, y sean $\mathbf{A_1},\ldots,\mathbf{A_n}$ sus tipos respectivos. Sean $\tau_1,\ldots,\tau_n$ términos cerrados de tipos $\mathbf{A_1},\ldots,\mathbf{A_n}$. Entonces

$$\dfrac{\dfrac{}{:\tau_1=\tau_1,\ldots,\tau_n=\tau_n}\,(2.1) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma:\alpha \qquad \alpha,\Gamma:\beta}\,(\mathrm{h.})}{\exists x_1.(x_1=x_1),\ldots,\exists x_n.(x_n=x_n),\Gamma:\beta}\,(2.49)}{\Gamma:\beta}\,(\mathrm{C.})$$

□

Eliminabilidad de descripciones para formulas y términos de tipo potencia

Definamos el cuantificador existencial **existe un único** $\exists!$ por

$$\exists! x.\alpha := \exists\, x.(\alpha \wedge \forall\, y.(\alpha(x/y) \Rightarrow x = y))$$

donde y es una variable distinta de x y no es libre en α. Deseamos que cuando se valide $\exists! x.\alpha$ seamos capaces de hallar un elemento, del mismo tipo que x que cumple la propiedad α. Esto es posible siempre que x sea una fórmula o un término de tipo potencia.

Proposición 2.1 (Eliminabilidad de descripciones para fórmulas)**.**

$$\exists!\omega.\alpha \vdash \alpha(\omega/\alpha(\omega/\top))$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{\scriptsize (∃!)}
\UnaryInfC{$\exists!\omega.\alpha, \alpha, \alpha(\omega/\top), \alpha : \omega = \top$}
\RightLabel{\scriptsize (2.18)}
\UnaryInfC{$\exists!\omega.\alpha, \alpha(\omega/\top), \alpha : \omega$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\scriptsize (2.17 y 2.27)}
\UnaryInfC{$\omega, \alpha : \omega = \top \wedge \alpha$}
\RightLabel{\scriptsize (Sus.)}
\UnaryInfC{$\omega, \alpha : \alpha(\omega/\top)$}
\RightLabel{\scriptsize (Eq.)}
\BinaryInfC{$\exists!\omega.\alpha, \alpha : \omega = \alpha(\omega/\top)$}
\RightLabel{\scriptsize (Sus.)}
\UnaryInfC{$\exists!\omega.\alpha, \alpha : \alpha(\omega/\alpha(\omega/\top))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\scriptsize (2.20)}
\UnaryInfC{$\exists!\omega.\alpha : \exists\omega : \alpha$}
\RightLabel{\scriptsize (C.)}
\BinaryInfC{$\exists!\omega.\alpha : \alpha(\omega/\alpha(\omega/\top))$}
\end{prooftree}
$$

Proposición 2.2 (Eliminabilidad de descripciones para términos de tipo potencia)**.** Sea α una fórmula y w una variable de tipo potencia. Dada x una variable que no ocurre en α definimos

$$A = \{x : \exists\, w.(x \in w \wedge \alpha)\}$$

Entonces

$$\exists! w.\alpha \vdash \alpha(w/A)$$

Demostración. Primero veamos que $\alpha \vdash x \in w \Rightarrow x \in A$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(2.43)}
\UnaryInfC{$\alpha, x \in w : \exists\, w.(x \in w \wedge \alpha)$}
\RightLabel{(Com.)}
\UnaryInfC{$\alpha, x \in w : x \in A$}
\RightLabel{(2.22)}
\UnaryInfC{$\alpha : x \in w \Rightarrow x \in A$}
\end{prooftree}
$$

Demostremos también que $\exists! w.\alpha, \alpha \vdash x \in A \Rightarrow x \in w$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists! w.\alpha, \alpha, x \in A : \exists! w.\alpha \wedge \alpha \wedge \exists z(x \in z \wedge \alpha(w/z))}\;(2.29 \text{ y Com.})}{\exists! w.\alpha, \alpha, x \in A : \exists z(\exists! w.\alpha \wedge \alpha \wedge \alpha(w/z) \wedge x \in z)}\;(2.49)}{\exists! w.\alpha, \alpha, x \in A : \exists! w.\alpha, \alpha, x \in A : \exists z(w = z \wedge x \in z)}\;(\exists!)}{\dfrac{\exists! w.\alpha, \alpha, x \in A : x \in w}{\exists! w.\alpha, \alpha : x \in A \Rightarrow x \in w}\;(2.22)}\;(\text{Sus.})$$

Por tanto, usando la regla de extensión se tiene

$$\exists! w.\alpha, \alpha \vdash A = w \wedge \alpha \vdash \alpha(w/A)$$

Luego, por (2.44) se sigue $\exists! w.\alpha, \exists w \alpha \vdash \alpha(w/A)$ y aplicando regla de corte con $\exists! w.\alpha \vdash \exists w.\alpha$ se sigue $\exists! w.\alpha \vdash \alpha(w/a)$ como se deseaba. $\square$

2.2 Teorías de conjuntos locales

En los lenguajes locales, suponemos que cada símbolo de tipo **A** posee variables de tipo **A** lo que nos acerca la idea de pertenencia como es usual en la teoría clásica de conjuntos. Más aún los axiomas de extensión y comprensión nos permiten considerar a los terminos cerrados de tipo potencia como si fuerán conjuntos en el sentido usual. Por tal razón llamaremos a los términos cerrados de tipo potencía de un lenguaje local $\mathscr{L}$ como $\mathscr{L}$-conjuntos o simplemente conjuntos y los representaremos por letras mayúsculas. Como es usual adoptaremos las siguientes abreviaciones

Abreviación	Significado
$\forall x \in X.\alpha$	$\forall x(x \in X \Rightarrow \alpha)$
$\exists x \in X.\alpha$	$\exists x(x \in X \wedge \alpha)$
$\exists! x \in X.\alpha$	$\exists! x(x \in X \wedge \alpha)$
$\{x \in X : \alpha\}$	$\{x : x \in X \wedge \alpha\}$

A continuación se enuncian algunas operaciones de tipo conjuntista para lenguajes locales

	Operación	Definición
O1	$X \subset Y$	$\forall x \in X . x \in Y$
O2	$X \cap Y$	$\{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
O3	$X \cup Y$	$\{x : x \in X \vee x \in Y\}$
O4	$U_{\mathbf{A}}$ o A	$\{x : x_A : \top\}$
O5	$\emptyset_A$ o $\emptyset$	$\{x_A : \perp\}$
O6	$-X$	$\{x : \neg(x \in X)\}$
O7	PX	$\{u : u \subset X\}$
O8	$\bigcap U$	$\{x : \forall u \in U . x \in U\}$
O9	$\bigcup U$	$\{x : \exists u \in U . x \in U\}$
O10	$\bigcap_{i \in I} X_i$	$\{x : \forall i \in I . x \in X_i\}$
O11	$\bigcup_{i \in I} X_i$	$\{x : \exists i \in I . x \in X_i\}$
O12	$\{\tau\}$	$\{x : x = \tau\}$
O13	$\{\sigma, \tau\}$	$\{x : x = \sigma \vee x = \tau\}$
O14	$\{\tau : \alpha\}$	$\{z : \exists x_1, \cdots, \exists x_n (z = \tau \wedge \alpha)\}$
O15	$X \times Y$	$\{\langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$
O16	$X + Y$	$\{\langle \{x\}, \emptyset \rangle : x \in X\} \cup \{\langle \emptyset, \{y\} \rangle : y \in Y\}$
O17	X^Y	$\{u : u \subset Y \times X \wedge \forall y \in Y \exists! x \in X . \langle y, x \rangle \in u\}$
O18	$\prod_{i \in I} X_i$	$\{u \in A^I : \forall i \in I . \{x : \langle i, x \rangle \in u\} \subset X_i\}$
O19	$\coprod_{i \in I} X_i$	$\{\langle i, x \rangle : i \in I \wedge x \in X_i\}$

Donde estas operaciones están sujetas a las siguientes restricciones:

- En O1, O2 y O3 es necesario que X y Y sean del mismo tipo.
- Si X y Y son de tipo **PA** y **PB** respectivamente, entonces $X \times Y$, $X + Y$, X^Y son términos de tipos **P**(**A** × **B**), **P**(**PA** × **PB**) y **PP**(**B** × **A**) respectivamente.
- En O8 y O9, U es de tipo **PPA**.
- En O7 y O8 se necesita que x no sea libre en τ.
- En O14, $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de τ y τ no es una variable.
- En O10, O11, O18 y O19 X_i es un término de tipo **PA** que puede o no tener a la variable i como variable libre.

Por abuso de lenguaje diremos que los $\mathscr{L}$-conjuntos obtenidos por O4 son tipos. La siguiente proposición recopila consecuencias útiles de los operadores anteriormente introducidos. Como las demostraciones son consecuencias inmediatas de las definiciones y axiomas se omitirán la pruebas.

Proposición 2.3.

1. $\vdash X = Y \Leftrightarrow \forall x(x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$
2. - $\vdash X \subset X$
   - $\vdash (X \subset Y \wedge Y \subset X) \Rightarrow X = Y$
   - $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$
3. $\vdash Z \subset X \cap Y \Leftrightarrow Z \subset X \wedge Z \subset Y$
4. $\vdash X \cup Y \subset Z \Leftrightarrow X \subset Z \wedge Y \subset Z$
5. $\vdash x_A \in A$
6. $\vdash \neg(x_A \in \emptyset_A)$
7. $\vdash X \in PY \Leftrightarrow X \subset Y$
8. $\vdash X \subset \bigcap U \Leftrightarrow \forall u \in U.X \subset u$
9. $\vdash \bigcup U \subset X \Leftrightarrow \forall u \in U.u \subset X$
10. $\vdash x \in \{y\} \Leftrightarrow x = y$
11. $\vdash \alpha \Rightarrow \tau \in \{\tau : \alpha\}$

Es importante observar que 1 es el axioma de extensión, 4 es el axioma de uniones binarias, 6 es el axioma de conjunto vacío, 7 el axioma de conjunto potencia, 9 el axioma de unión y 10 el axioma de singulares. Estos junto con el axioma de comprensión forman el núcleo de las terías de conjuntos locales. Y debido a las restricciones impuestas sobre ciertas operaciones que requieren elementos del mismo tipo es por que a la teoría de conjuntos resultante se le denomina local.

2.3 Categorías de teorías locales

Sea S una teoría local de conjuntos determinada por un lenguaje local $\mathscr{L}$. Definamos la relación $\sim_S$ dada sobre la colección de $\mathscr{L}$-conjuntos por

$$X \sim_S Y \qquad \text{sii} \qquad \vdash_S X = Y$$

Es claro que $\sim_S$ es una relación de equivalencía. Entonces un S-conjunto será una clase de equivalencia determinada por $\sim_S$, $[X]_S$ donde X es un $\mathscr{L}$-conjunto. Por abuso de notación nos referiremos a la clase de equivalencia $[X]_S$ simplemente por X.

Una S-función $f : X \to Y$ es un triple de S-conjuntos (f, X, Y) tal que

$$\vdash_S f \in Y^X$$

En lo siguiente identificaremos a (f, X, Y) solo por f o $f : X \to Y$ y diremos que X es el dominio de f ($\mathrm{dom} f$) y Y el codominio de f ($\mathrm{cod} f$).

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, definamos la composición

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle : \exists\, y(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g)\}$$

A continuación veremos que la colección de S-conjuntos, S-funciones y la operación de composición forman una categoría. Primero veamos una propiedad útil que permite asegurar la igualdad de S-funciones en base a las variables de su dominio.

Proposición 2.4. Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son S-funciones, entonces

$$f = g \quad \text{sii} \quad x \in X \vdash_S \langle x, y\rangle \in f \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g$$

Demostración. La necesidad se sigue inmediatamente de la aplicación del axioma de extensión. Para la suficiencia, si $u \in f$, entonces existen $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $u = \langle x, y\rangle$, así $x \in X \vdash_S u \in f \Leftrightarrow u \in g$ por tanto $u \in g$ y viceversa, si $u \in g$ entonces $u \in f$, aplicando el axioma de extensión se sigue $f = g$. □

Proposición 2.5. Dada una teoría local de conjuntos S. La colección de S-conjuntos y S-funciones, con la operación de composición forma una categoría.

Demostración. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces $g \circ f \subset X \times Z$ y $\forall\, x \in X\, \exists! z : \langle x, z\rangle \in g \circ f$, por tanto $g \circ f \in Z^X$ y $g \circ f : X \to Z$

- $\circ$ es asociativa
  Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, entonces $h \circ (g \circ f) : X \to W$ y $(h \circ g) \circ f : X \to W$. Además dado $x \in X$ se tienen las siguientes equivalencias
  $$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in h \circ (g \circ f) &\Longleftrightarrow \exists z(\langle x, z\rangle \in g \circ f \wedge \langle z, y\rangle \in h)\\ &\Longleftrightarrow \exists u(\langle x, u\rangle \in f \wedge \langle u, z\rangle \in g) \wedge \langle z, y\rangle \in h\\ &\Longleftrightarrow \exists u(\langle x, u\rangle \in f \wedge \langle u, y\rangle \in h \circ g)\\ &\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in (h \circ g) \circ f\end{aligned}$$
  Por tanto, en virtud de la Proposición 2.4, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Dado un S-conjunto X, sea $\Delta_X = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ y $1_X = (\Delta_X, X, X)$. Entonces 1_X tiene como dominio y codominio a X y además para cada $f : X \to Y$, si $x \in X$ se tiene
  $$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in f &\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, x\rangle \in \Delta_X\\ &\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in \Delta_X \circ f\end{aligned}$$
  y por la Proposición 2.4, $f = f \circ 1_X$. Análogamente se ve que si $g : Y \to X$ entonces $1_X \circ g = g$. Por tanto 1_X actúa como el morfismo identidad.
- Observemos también que si $f : X \to Y$ es una S-función, existe un símbolo funcional **f** asociado con firma $X \to Y$, lo que garantiza que se cumpla la condición de pequeñez de la clase de morfismos entre dos objetos.

□

Si S es una teoría de conjuntos local, denotaremos por $\mathbf{C}(S)$ a la categoría de S-conjuntos (y S-funciones). Entonces se verá que justo como la categoría Set da lugar a un topos, $\mathbf{C}(S)$ también lo hace. Primero veamos que cada término en $\mathscr{L}$ da lugar a un morfismo en $\mathbf{C}(S)$. Si τ es un término tal que $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \vdash_S \tau \in Y$ escribiremos

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Y\\ \langle x_1, \ldots, x_n\rangle &\mapsto \tau\end{aligned}$$

o más abreviadamente $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mapsto \tau$ o $\mathbf{x}\mapsto\tau$ para representar:

$$\{\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle,\tau\rangle : \langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in X\}.$$

Entonces, si $x_1,\ldots,x_n$ son todas las variables libres de τ y X e Y son S-conjuntos, entonces $\mathbf{x}\to\tau$ es un S-morfismo $X\to Y$. Así cuando no haya lugar a confución escribiremos simplemente $\tau : X\to Y$ para denotar a esta función. Si $\mathbf{f}$ es un símbolo funcional, simplemente escribiremos f para denotar a la función $x\mapsto \mathbf{f}(x)$. El siguiente lema es una consecuencia directa de esta notación

Lema 2.6. *Si* $\mathbf{y}\mapsto\tau$ *y* $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{u}$, *entonces* $(\mathbf{y}\mapsto\tau)\circ(\mathbf{x}\mapsto\mathbf{u}) = (\mathbf{x}\mapsto\tau(\mathbf{y}/\mathbf{u}))$.

Probemos también las siguientes equivalencias que serán de utilidad para demostrar que la categoría resultante de una teoría local de conjuntos es un topos.

Proposición 2.7. Sea f una S-función, entonces

$$f \text{ es monomorfismo sii } \langle x,z\rangle\in f, \langle y,z\rangle\in f \vdash_S x=y$$

Demostración. Supongamos que $f : Y\to Z$ es monomorfismo. Consideremos el S-conjunto

$$R=\{\langle x,y\rangle : \exists z\left(\langle x,z\rangle\in f \wedge \langle y,z\rangle\in f\right)\}$$

Sean $g : R\to Y$ y $h : R\to Y$ las S-funciones

$$g = (\langle x,y\rangle\mapsto x)$$
$$h = (\langle x,y\rangle\mapsto y).$$

Esto garantiza que

$$\exists z\left(\langle x,z\rangle\in f \wedge \langle y,z\rangle\in f\right)\vdash_S \langle\langle x,y\rangle,z\rangle\in f\circ g \Leftrightarrow \langle\langle x,y\rangle,z\rangle\in f\circ h.$$

Lo cual implica que $f\circ g = f\circ h$ y como f es monomorfismo, $g=h$. Y claramente $\langle x,z\rangle\in f, \langle y,z\rangle\in f\vdash\exists z\left(\langle x,z\rangle\in f, \langle y,z\rangle\in f\right)$. Así

$$\langle x,z\rangle\in f, \langle y,z\rangle\in f\vdash_S x=y$$

Como se deseaba.

Para el recíproco, supongamos que

$$\langle x,z\rangle \in f, \langle y,z\rangle \in f \vdash_S x = y$$

y sean $g, h : X \to Y$ S-funciones tales que $f \circ g = f \circ h$. Entonces, es claro por definición de la operación composición que

$$x \in X \vdash_S \exists u \exists v \left(\langle x,u\rangle \in g \wedge \langle x,v\rangle \in h \wedge \langle u,z\rangle \in f \wedge \langle v,z\rangle \in f\right)$$

pero aplicando la hipótesis $u = v$ y por tanto

$$x \in X \vdash_S \exists u \left(\langle x,u\rangle \in g \wedge \langle x,u\rangle \in h\right)$$

y por tanto $g = h$. Así, f es un monomorfismo. □

Dada una S-función $f : X \to U_\Omega$, escribiremos

$$f^*(x) \quad \text{en vez de} \quad \langle x, \top\rangle \in f$$

Entonces, como $\vdash_S \exists!\omega.\langle x,\omega\rangle \in f$, se sigue de la Proposición 2.1 que

$$x \in X \vdash \langle x, f^*(x)\rangle \in f.$$

y pensaremos en f^* como el *valor* de f en x. Las siguientes ecuaciones son una consecuencía inmediata de adoptar esta convención.

$$X \xrightarrow{x \mapsto f^*(x)} U_\Omega = f, \tag{2.51}$$

$$\vdash_S \left(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mapsto \alpha\right)^* \left(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right) \Leftrightarrow \alpha \tag{2.52}$$

Escribiremos simplemente Ω en vez de U_Ω y al morfismo $x \mapsto \top$ lo representaremos por $\top : 1 \to \Omega$. La siguiente proposición da una equivalencía útil respecto a los productos fibrados en la categoría $\mathbf{C}(S)$.

Proposición 2.8. Un cuadrado en $\mathbf{C}(S)$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "h"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado si y sólo si

$$h = (x \mapsto \exists\, y.\langle y, x\rangle \in m)$$

Demostración. Supongamos que $h = (x \mapsto \exists\, y.\langle y, x\rangle \in m)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\vdash_S \langle z, \omega\rangle \in h \circ m \\
&\Leftrightarrow \exists\, x(\langle z, x\rangle \in m \wedge \omega = \exists\, y.\langle y, x\rangle \in m) \\
&\Leftrightarrow \omega = \top
\end{aligned}$$

lo que prueba que el cuadrado conmuta. Para ver que es producto fibrado, sea $f : Z \to X$ una S-función que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, tail, "f"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "h"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces, definamos $g = \{\langle z, y\rangle : \exists\, x\,\big(\langle z, x\rangle \in f \wedge \langle y, x\rangle \in m\big)\}$. Es claro que $g : Z \to Y$ es una S-función y que $m \circ g = f$ y $m \circ h = f$, luego se sigue $h = g$ por que m es monomorfismo. Por tanto el diagrama es un producto fibrado.

Para el recíproco, supongamos que el diagrama es un producto fibrado, entonces

$$\vdash_S \langle x, \omega\rangle \in h \circ m \Leftrightarrow \omega = \top$$

Y por el secuente 2.26 se tiene

$$\langle y, x\rangle \in m \wedge \langle x, \omega\rangle \in h \vdash_S \omega = \top$$

y por 2.22

$$\langle x, y\rangle \in m \vdash_S \langle m, \omega\rangle \in h \Rightarrow \omega = \top$$

y así

$$\langle y, x\rangle \in m \vdash_S \langle x, \top\rangle \in h$$

que implican
$$\exists\, y.\langle y,x\rangle \in m \vdash_S h^*(x).$$

Entonces, sea $Z = \{x : h^*(x)\}$ y definamos la S-función $\overline{h} : Z \to X$ por $x \mapsto x$. Así el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, tail, "\overline{h}"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "h"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

conmuta. Y por la propiedad universal de los productos fibrados, existe una S-función $f : Z \to Y$ tal que $\overline{h} = m \circ f$. Entonces

$$h^*(x) \vdash_S \exists\, y\, \big(\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle y,x\rangle \in m\big) \vdash_S \exists\, y.\langle y,x\rangle \in m.$$

Lo que finalmente da lugar, junto con el secuente anterior a

$$\vdash_S h^*(x) = (\exists\, y.\langle y,x\rangle \in m),$$

que justamentes es
$$h = (x \mapsto \exists\, y.\langle y,x\rangle \in m).$$

□

Teorema 2.9. *Para toda teoría local de conjuntos S, la categoría* $\mathbf{C}(S)$ *es un topos.*

Demostración. Se comprobarán las propiedades requeridas

- $\mathbf{C}(S)$ posee un objeto terminal.
  Sea $1 = U_1$. Entonces para cada S-conjunto X, consideremos la S-función dada por $x \mapsto *$, cuyo dominio es X y codominio 1. Luego, si $f : X \to 1$;
  $$x \in X \vdash_S \langle x,*\rangle \in f$$
  así que por la Proposición 2.4 $f = (x \mapsto *)$. Lo cual garantiza la unicidad del morfismo de X en 1.

- **C**(S) posee productos binarios.
  Sean X e Y S-conjuntos. Definamos las proyecciones $\pi_1 = (\langle x, y\rangle \mapsto x)$ y $\pi_2 = (\langle x, y\rangle \mapsto y)$. Entonces
$$X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$
  y si
$$X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$$
  podemos definir una S-función por $\langle f, g\rangle = \{\langle z, \langle x, y\rangle\rangle : \langle z, x\rangle \in f \wedge \langle z, y\rangle \in g\}$. Además es fácil verificar por medio de la proposición 2.4 que $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ y $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$. Más aún si $h : Z \to X \times Y$ satisface $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$, entonces
$$z \in Z \vdash_S \langle z, \langle x, y\rangle\rangle \in h \Leftrightarrow \langle z, x\rangle \in f \wedge \langle z, y\rangle \in g$$
  lo que garantiza la únicidad del morfismo $Z \to X \times Y$.

  Por tanto **C**(S) tiene productos binarios.
- $(\Omega, \top)$ es un clasificador de subobjetos en **C**(S)

  Supongamos que $m : Y \rightarrowtail X$ es un monomorfismo en **C**(S). Definamos $\chi(m) : X \to \Omega$ por
$$\chi(m) = (x \mapsto \exists\, y.\langle y, x\rangle \in m).$$
  Entonces por la Proposición 2.8, $\chi(m)$ es el único morfismo $X \to \Omega$ que hace que el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$
  sea un producto fibrado.

  Y recíprocamente, dada una S-función $h : X \to \Omega$, definiendo $Z = \{x : h^*(x)\}$ y $\overline{h} : Z \to X$ por $\overline{h} = (x \mapsto x)$. Se tiene
$$\chi(\overline{h}) = (x \mapsto \exists\, y.\langle y, x\rangle \in \overline{h}) = x \mapsto h^*(x) = h$$

Por tanto $(\Omega, \top)$ es un clasificador de subobjetos en $\mathbf{C}(S)$.

- $\mathbf{C}(S)$ tiene objetos potencia

  Dado un S-conjunto X, veremos que PX es un objeto potencia para X.

  Definamos $\in_X : X \times PX \to \Omega$ por

$$\in_X = \{\langle x, z\rangle \mapsto x \in z\}$$

  Luego, si $f : X \times Y \to \Omega$ y definimos $\hat{f} : Y \to PX$ por $\hat{f} = (y \mapsto \{x : f^*(\langle x, y\rangle)\})$ es fácil verificar que

$$\in_X \circ (1_X \times \hat{f}) = (\langle x, y\rangle \mapsto f^*(\langle x, y\rangle)) = f$$

  Y más aún, si $g : Y \to PX$ satisface $\in_X \circ (1_X times g) = f$, entonces

$$\vdash_S f^*(\langle x, y\rangle) = \exists w \in PX(x \in w \wedge \langle y, w\rangle \in g).$$

  También $y \in Y \vdash_S \langle y, z\rangle \in \hat{f} \Leftrightarrow z = \{x : f^*(\langle x, y\rangle)\}$ de forma que

$$y \in Y \vdash_S \langle y, z\rangle \in \hat{f} \Leftrightarrow z = \{x : \exists w \in PX(x \in w \wedge \langle y, w\rangle \in g)$$

  Pero $y \in Y \vdash_S \exists! w \in PX.\langle y, w\rangle \in g$. Lo cual implica finalmente que

$$y \in Y \vdash_S \langle y, z\rangle \in \hat{f} \Leftrightarrow \langle y, z\rangle \in g$$

  Lo cual, por la Proposición 2.4 garantiza que $g = \hat{f}$.

$\square$

A los topos de la forma $\mathbf{C}(S)$ se les llamará topos lingüísticos, para hacer énfasis en el hecho de que fueron generados por un lenguaje local.

2.4 Interpretación de lenguajes locales

En esta sección se desarrollará la forma en la que los lenguajes locales pueden ser interpretados en topos arbitrarios, lo que culminará en el teorema de robustez y por tanto que la validez de fórmulas en una teoría de conjuntos local implica validad en cada topos.

Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje local y $\mathscr{E}$ un topos. Supongamos que los productos, objetos potencia, objeto terminal y el clasificador de subobjetos en $\mathscr{E}$ están especificados.

Una **interpretación** $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}$ en $\mathscr{E}$ es una función que asigna a cada variable de tipo $\mathbf{A}$ un $\mathscr{E}$-objeto $\mathbf{A}_{\mathscr{I}}$, de tal forma que las estructuras de tipos se preservan, es decir

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_{\mathscr{I}} \times \cdots \times \mathbf{A}_n)_{\mathscr{I}} &= (\mathbf{A}_1)_{\mathscr{I}} \times \cdots \times (\mathbf{A}_n)_{\mathscr{I}} \\ (\mathbf{PA})_{\mathscr{I}} &= P(\mathscr{A}_{\mathscr{I}}) \\ \mathbf{1}_{\mathscr{I}} &= 1, \quad \text{el objeto terminal de } \mathscr{E} \\ \Omega_{\mathscr{I}} &= \Omega_{\mathscr{E}}\end{aligned}$$

También a cada símbolo funcional con firma $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se le asociará un $\mathscr{E}$-morfismo $\mathbf{f}_{\mathscr{I}} : \mathbf{A}_{\mathscr{I}} \to \mathbf{B}_{\mathscr{I}}$. Una interpretación de $\mathscr{L}$ es entonces un par ordenado $(\mathscr{E}, \mathscr{I})$ de un topos $\mathscr{E}$ y una interpretación $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}$ en $\mathscr{E}$. Una vez dicho esto, por comodidad, nos referiremos a $\mathbf{A}_{\mathscr{I}}$ simplemente por A y a $\mathbf{f}_{\mathscr{I}}$ por f. Si $(\mathscr{E}, \mathscr{I})$ es una interpretación de $\mathscr{L}$ podemos extender la interpretación a todos los términos de $\mathscr{L}$ de la siguiente forma. Sea τ un término de tipo $\mathbf{B}$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ variables de tipos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, entre ellas las variables libres de τ. Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Definiremos recursivamente al morfismo

$$[\![\tau]\!]_{\mathscr{I},\mathbf{x}} : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$$

mediante los siguientes casos

- $[\![*]\!]_{\mathbf{x}} = A_1 \times \cdots \times A_n \to 1$ que es único $\mathscr{E}$.
- $[\![x_i]\!]_{\mathbf{x}} = \pi_i$, la proyección $A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$
- $[\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathscr{I}} \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}$
- $[\![\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}}, \ldots, [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}} \rangle$
- $[\![(\tau)_i]\!]_{\mathbf{x}} = \pi_i \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}$
- $[\![\{y : \alpha\}]\!]_{u\mathbf{x}} = \widehat{([\![\alpha(y/u)]\!]_{\mathbf{x}} \circ \gamma)}$ donde u no es ninguna de las $x_1, \ldots, x_n$ y es libre para y en α, y es de tipo $\mathbf{C}$ y B es $\mathbf{PC}$, además γ

es el isomorfismo canónico $\gamma : C \times (A_1 \times \cdots \times A_n) \cong C \times A_1 \times \cdots \times A_n$. $\hat{f}$ es la transpuesta de la potencía.

- $[\![\sigma = \tau]\!]_{\mathbf{x}} = e_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ donde σ y τ son de tipo **C**.
- $[\![\sigma \in \tau]\!]_{\mathbf{x}} = e_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ donde σ es de tipo **C**, e_C es el morfismo evaluación.

Nótese que si τ es un término cerrado, entonces $\mathbf{x}$ puede ser vacío $\emptyset$, en ese caso escribiremos simplemente $[\![\tau]\!]$. Además si τ es un término cerrado $\{y : \alpha\}$ de tipo **PC**, entonces $[\![\{y : \alpha\}]\!]$ es un $\mathscr{E}$-objeto de PC, que corresponde por medio de la potencia transpuesta a un subobjeto de C, especificamente el subobjeto de C clasificado por $[\![\alpha]\!]_{\gamma}$. Una consecuencia inmediata de la interpretación de términos es que $[\![\top]\!]_{\mathbf{x}} = T$, el morfismo verdad de $\mathscr{E}$.

El siguiente Lema será de utilidad para garantizar que en realidad podemos sólo restringirnos en la interpretación a las variables libres de cada término.

Lema 2.10. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos finitos. Sean $B, A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ $\mathscr{C}$-objetos. Consideremos los isomorfismos canónicos*

$$\gamma_A : B \times \left(A_1 \times \cdots \times A_n\right) \cong B \times A_1 \times \cdots \times A_n,$$
$$\gamma_B : B \times \left(B_1 \times \cdots \times B_m\right) \cong B \times B_1 \times \cdots \times B_m,$$

denotemos por π a la composición

$$\pi_2 \circ \gamma_A^{-1} : B \times A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$$

y sea π_1 la proyección $B \times A_1 \times \cdots \times A_n \to B$. Si $f_1, \ldots, f_m$ es una colección de morfismos, donde $f_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to B_i$ para $1 \leq i \leq m$, entonces

$$\langle \pi_1, f \circ \pi, \ldots, f_m \circ \pi \rangle \circ \gamma_A = \gamma_B \circ (1_B \times \langle f_1, \ldots, f_m \rangle).$$

Demostración. Ambos morfismos tienen dominio $B \times \left(A_1 \times \cdots \times A_n\right)$ y codominio $(B_1 \times \cdots \times B_m)$. No es dificil probar que si π_i' son las proyecciones canónicas de $B_1 \times \cdots \times B_m$, entonces

$$\pi_1' \circ \langle \pi_1, f \circ \pi, \ldots, f_m \circ \pi \rangle \circ \gamma_A = \pi_1 \circ \gamma_A = \pi_1' \circ \gamma_B \circ (1_B \times \langle f_1, \ldots, f_m \rangle) \quad \text{y}$$
$$\pi_i' \circ \langle \pi_1, f \circ \pi, \ldots, f_m \circ \pi \rangle \circ \gamma_A = f_{i-1} \circ \pi_2 = \pi_i' \circ \gamma_B \circ (1_B \times \langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$$

lo cual garantiza, por la únicidad del morfismo al producto que

$$\langle \pi_1, f \circ \pi, \ldots, f_m \circ \pi \rangle \circ \gamma_A = \gamma_B \circ (1_B \times \langle f_1, \ldots, f_m \rangle).$$

□

Este Lema se usará en la siguiente demostración

Lema 2.11 (Sobre variables superfluas). *Sea τ un término cuyas variables libres están dentro de las variables $x_1, \ldots, x_n$. Supongamos que $1 < p_1 < \cdots < p_m < n$ y $x_{p_1}, \ldots, x_{p_m}$ incluye a todas sus variables libres. Entonces, abreviando $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$ y $(x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}) = \mathbf{x}'$, se tiene para cada interpretación de $\mathscr{L}$ en un topos $\mathscr{E}$.*

$$\llbracket \tau \rrbracket_{\mathbf{x}} = \llbracket \tau \rrbracket_{\mathbf{x}'} \circ \llbracket \langle x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{\mathbf{x}}.$$

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre la formación de τ. Sin embargo notemos que el único caso problematico ocurre cuando τ es $\{y : \alpha\}$. Supongamos que y es de tipo $\mathbf{B}$ y τ de tipo $\mathbf{PB}$. Si $x_1, \ldots, x_n$ son de tipo $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, respectivamente, haciendo uso del Lema anterior se siguen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
\llbracket \{y : \alpha\} \rrbracket_{\mathbf{x}} &= \widehat{(\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A)} \\
&= \widehat{\left(\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}'} \circ \llbracket \langle u, x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)} \text{ H.I.} \\
&= \widehat{\left(\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}'} \circ \langle \pi_1, \llbracket x_{p_1} \rrbracket_{u\mathbf{x}}, \ldots, \llbracket x_{p_m} \rrbracket_{u\mathbf{x}} \rangle \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left(\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}'} \circ \langle \pi_1, \llbracket x_{p_1} \rrbracket_{\mathbf{x}} \circ \pi, \ldots, \llbracket x_{p_m} \rrbracket_{\mathbf{x}} \circ \pi \rangle \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left(\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}'} \circ \gamma_B \circ (1_B \times \llbracket \langle x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{\mathbf{x}})\right)} \\
&= \widehat{(e_B \circ [1_B \times (\llbracket \alpha(y/u) \rrbracket_{u\mathbf{x}'} \circ \gamma_B])} \circ \widehat{\left(1_B \times \llbracket \langle x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{\mathbf{x}}\right)} \\
&= \widehat{\left(e_B \times 1_B \times \llbracket \{y : \alpha\} \rrbracket_{\mathbf{x}'} \circ \llbracket \langle x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{\mathbf{x}}\right)} \\
&= \llbracket \{y : \alpha\} \rrbracket_{\mathbf{x}'} \circ \llbracket \langle x_{p_1}, \ldots, x_{p_m} \rangle \rrbracket_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

□

Similarmente, haciendo inducción sobre la formación de los términos se demuestra el siguiente Lema

Lema 2.12 (De sustitución)**.** *Sea τ un término cuyas variables libres se encuentran entre $z_1, \ldots, z_m$. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ terminos donde σ_i es libre para z_i en τ para cada $1 \leq i \leq m$. Entonces para toda interpretación de $\mathscr{L}$ en un topos $\mathscr{E}$, se tiene*

$$[\![\tau(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$$

donde $\mathbf{x}$ *incluye todas las variables libres de $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$.*

Demostración. Nuevamente el caso más complicado es cuando τ es de la forma $\{y : \alpha\}$. Supongamos que y es de tipo $\mathbf{B}$ y τ es de tipo $\mathbf{PB}$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ de tipos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ respectivamente. Se tienen dos subcasos

i. Si y no es una de las variables $z_1, \ldots, z_m$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}(\tau/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{y : \alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(\mathbf{z}/\sigma)(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)}
\end{aligned}$$

ii. Si y es una de las variables $z_1, \ldots, z_m$. Entonces escribiremos $\mathbf{z} = y\mathbf{z}'$, $\sigma = \rho\sigma'$ y así se tiene

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}(y\mathbf{z}'/\rho\sigma')]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{y : \alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(\mathbf{x}/\sigma)(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)(y\mathbf{z}'/\rho\sigma')]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)}.
\end{aligned}$$

Pero en ambos casos, para una variable $\mathbf{z}$ arbitraria, se tienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&[\![\{y:\alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} = \widehat{\left([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ [\![\langle u,\sigma_1,\dots,\sigma_m\rangle]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle \pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{u\mathbf{x}},\dots,[\![\sigma_m]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle \pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1,\dots,x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}},\dots,[\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1,\dots,x_m\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}\rangle \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle \pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ \mathrm{proy},\dots,[\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ \mathrm{proy}\rangle \circ \gamma_A\right)} \\
&= \widehat{\left([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{z}} \circ \gamma_B \circ (1_B \times [\![\langle \sigma_1,\dots,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})\right)} \\
&= \widehat{\left(e_B \circ (1_B \times [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}}) \circ (1_B \times [\![\langle \sigma_1,\dots,\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}})\right)} \\
&= \widehat{\left(e_B \circ 1_B \times [\![\{y:\alpha\}_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle \sigma_1,\dots,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}\right)} \\
&= [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle \sigma_1,\dots,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Una consecuencia inmediata de este Lema es el siguiente

Lema 2.13 (De independencia)**.** *Si u es libre para x y no lo es en un término τ, entonces para cada interpretación de $\mathscr{L}$,*

$$[\![\tau(x/u)]\!]_{u\mathbf{y}} = [\![\tau]\!]_{x\mathbf{y}}$$

Validez en topos

Dada una interpretación $\mathscr{I}$ de un topos $\mathscr{E}$, para cada conjunto finito de formulas $\Gamma = \{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ escribiremos

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathscr{I},\mathbf{x}} = \begin{cases} [\![\alpha_1]\!]_{\mathscr{I},\mathbf{x}} \wedge \cdots \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathscr{I},\mathbf{x}} & \text{si } m > 0 \\ \mathrm{T} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Dada una fórmula β, sea $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ la tupla de todas sus variables libres en $\Gamma \cup \{\beta\}$, escribiremos

$$\Gamma \models_{\mathscr{I}} \beta \text{ o } \Gamma \models_{\mathscr{E}} \beta \text{ sii } [\![\gamma]\!]_{\mathscr{I},\mathbf{x}} \leq [\![\beta]\!]_{I,\mathbf{x}}$$

Y diremos que el secuente $\Gamma : \beta$ es válido bajo la interpretación $\mathscr{I}$ en $\mathscr{E}$ si $\Gamma \models_{\mathscr{I}} \beta$.

Obsérvese de la definición de validez, que

$$\models_{\mathscr{I}} \alpha \text{ sii } [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{T}.$$

Adoptemos también las siguientes definiciones

Abreviación	Definición
$\Gamma \models \alpha$	$\Gamma \models_{\mathscr{I}} \alpha$ para cada interpretación $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}$
$\dfrac{\Gamma_1 \models_{\mathscr{I}} \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models_{\mathscr{I}} \alpha_n}{\Delta \models_{\mathscr{I}} \beta}$	$\Gamma_1 \models_{\mathscr{I}} \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models_{\mathscr{I}} \alpha_n$ implican $\Delta \models_{\mathscr{I}} \beta$
$\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$	$\dfrac{\Gamma_1 \models_{\mathscr{I}} \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models_{\mathscr{I}} \alpha_n}{\Delta \models_{\mathscr{I}} \beta}$ para toda interpretación $\mathscr{I}$.

Para cada teoría local de conjuntos S en $\mathscr{L}$, una interpretación $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}$ en un topos $\mathscr{E}$ es un **modelo** de S, si cada axioma de S es válido bajo $\mathscr{I}$. Y escribiremos

$$\Gamma \models_S \alpha$$

si $\Gamma \models_{\mathscr{I}} \alpha$ para cada modelo $\mathscr{I}$ de S. Esto nos permite enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.14 (Teorema de robustez)**.**

- $\Gamma \vdash \alpha$ *implica* $\Gamma \models \alpha$.
- $\dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$ *implica* $\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$
- $\Gamma \vdash_S \alpha$ *implica* $\Gamma \models_S \alpha$

Demostración. Para probar las primeras dos implicaciones es suficiente verificar la validez bajo interpretaciones $\mathscr{I}$ de los axiomas y reglas de inferencia de la teoría local de conjuntos pura. Una vez hecho esto es fácil ver que si $\Gamma \vdash_S \alpha$, entonces existen algunas inferencias $\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n$ de S tal que

$$\frac{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n}{\Gamma : \alpha}$$

lo cual garantiza la tercera implicación en virtud de la segunda. $\square$

2.5 El teorema de Completez

Dada una teoría local de conjuntos S de un lenguaje local $\mathscr{L}$, definiremos la interpretación canónica $C(S)$ de $\mathscr{L}$ en $\mathbf{C}S$ por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{C(S)} &= U_{\mathbf{A}} && \text{Para cada símbolo de tipo } \mathbf{A} \\ \mathbf{f}_{C(S)} &= U_{\mathbf{A}} \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{f}(x)} U_{\mathbf{B}} && \text{Para cada símbolo funcional de firma } \mathbf{A} \to \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Para cada término τ, escribiremos $[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}$ para $[\![\tau]\!]_{C(S),\mathbf{x}}$.

La siguiente proposición será de utilidad para demostrar el Teorema de Completez.

Proposición 2.15.

$$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \to \tau).$$

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre la complejidad de la fórmula, sin embargo l único caso problematico es cuando τ es $\{x : \alpha\}$ y en este caso

$$\begin{aligned} [\![\{x : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}} &= \widehat{([\![\alpha(x/u)]\!]_{u\mathbf{z}} \circ \gamma_A)} \\ &= \widehat{((\langle u, z_1, \ldots, z_n\rangle \mapsto \alpha(x/u)) \circ (\langle x, y\rangle \mapsto \langle x, (y)_1, \ldots, (y)_n\rangle))} \\ &= \widehat{(\langle x, y\rangle \mapsto \alpha(z_1/(y)_1) \cdots (z_n/(y)_n))} \\ &= y \mapsto \{x : \alpha(z_1/(y)_1) \cdots (z_n/(y)_n)\} \\ &= \mathbf{z} \mapsto \{x : \alpha\}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.16.

$$\Gamma \Vdash_{C(S)} \alpha \quad sii \quad \Gamma \vdash_S \alpha.$$

Demostración. Usanddo la proposición anterior se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}\Vdash_{C(S)} \alpha \text{ sii } & [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} = T \\ \text{sii } & (\mathbf{x} \mapsto \alpha) = (\mathbf{x} \mapsto \top) \\ \text{sii } & \vdash_S \alpha = \top \\ \text{sii } & \vdash_S \alpha.\end{aligned}$$

Así, en general se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash_S \alpha \text{ sii } & \bigwedge \Gamma \vdash_S \alpha \\ \text{sii } & \vdash_S \bigwedge \Gamma \Rightarrow \alpha \\ \text{sii } & \Vdash_{C(S)} \bigwedge \Gamma \Rightarrow \alpha \\ \text{sii } & \bigwedge \Gamma \Vdash_{C(S)} \alpha \\ \text{sii } & \Gamma \Vdash_{C(S)} \alpha,\end{aligned}$$

donde las dos últimas equivalencias las garantiza el Teorema de Robustez. □

De esta forma $C(S)$ puede ser visto como un modelo canónico de S. Como consecuencia de esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.17 (de Completez)**.**

(i) $\Gamma \models \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash \alpha$

(ii) $\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$ *implica* $\dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$

(iii) $\Gamma \models_S \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_S \alpha$.

Demostración.

(i) Si $\Gamma \Vdash \alpha$, entonces $\Gamma \Vdash_{C(S)} \alpha$ y por el Corolario 2.16, $\Gamma \vdash \alpha$.

(ii) Sea S un conjunto de secuentes $\{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n\}$. Entonces

$$\Delta \vdash_S \beta \text{ sii } \frac{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$$

y

$$\Gamma_1 \vdash_S \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_S \alpha_n.$$

Suponiendo $\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$ se tiene por el Corolario 2.16, que

$$\Gamma_1 \Vdash_{C(S)} \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \Vdash_{C(S)} \alpha_n.$$

Entonces, por hipótesis, $\Delta \Vdash_{C(S)} \beta$, y nuevamente por el Corolario 2.16, $\Delta \vdash_S \beta$. Entonces la equivalencia anterior implica que

$$\frac{\Gamma_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$$

(iii) Por el Corolario 2.16, $C(S)$ es un modelo de S. Entonces, se tiene

$$\Gamma \Vdash_S \alpha \text{ implica } \Gamma \Vdash_{C(S)} \alpha \text{ implica } \Gamma \vdash_S \alpha.$$

$\square$

El teorema de equivalencia

Se probrará que, más aún, todo topos es equivalente a un topos lingüístico. Sea $\mathscr{E}$ un topos y definamos el lenguaje local $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ determinado por $\mathscr{E}$ (también llamado **lenguaje interno de** $\mathscr{E}$) como sigue: Los símbolos de tipo elemental de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ corresponderán a los objetos de $\mathscr{E}$ distintos a $1_{\mathscr{E}}$ y $\Omega_{\mathscr{E}}$. Entonces para cada objeto A existe un tipo $\mathbf{A}$ correspondiente en $\mathscr{L}(\mathscr{E})$. Entonces asociemos a cada símbolo de tipo A el $\mathscr{E}$-objeto $\mathbf{A}_{\mathscr{E}}$ definido recursivamente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathscr{E}} &= A \qquad \text{Para cada símbolo de tipo elemental } \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\mathscr{E}} &= \mathbf{A}_{\mathscr{E}} \times \mathbf{B}_{\mathscr{E}} \\ (\mathbf{PA})_{\mathscr{E}} &= P(\mathbf{A}_{\mathscr{E}}) \end{aligned}$$

De esta forma los símbolos funcionales de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ son los triples $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son símbolos de tipos en $\mathscr{L}(\mathscr{E})$. La firma de $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ es $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. A menudo escribiremos simplemente $\mathbf{f}$ en vez de $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ cuando no haya lugar a confusión.

Definimos la **interpretación natural**, denotada por E o $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ en $\mathscr{E}$ a las asociaciones

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{\mathscr{E}} = A & \text{Para cada símbolo de tipo elemental } A \\ \mathbf{f}_{\mathscr{E}} = f & \text{Para cada símbolo funcional } \mathbf{f}. \end{array}$$

La teoría local de conjuntos Th($\mathscr{E}$) asociada es definida como la teoría local en $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ cuyos axiomas son todos los secuentes $\Gamma : \alpha$ tales que $\Gamma \models_{\mathscr{E}} \alpha$ bajo la interpretación natural de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ en $\mathscr{E}$.

Dicho esto, es posible enunciar el teorema de equivalencia, cuya prueba se encuentra en [4].

Teorema 2.18 (de Equivalencia)**.** *Para todo topos $\mathscr{E}$,*

$$\mathscr{E} \cong \mathbf{C}(\mathrm{Th}(\mathscr{E})).$$

2.6 Propiedades básicas de los topos

Se aprovechará el Teorema de Equivalencia formulado en la sección anterior para probar algunas características básicas que poseen los topos. En particular la descomposición minimal y las propiedades de coproductos en topos se usarán ampliamente en el capítulo 3.

Proposición 2.19. Todo topos tiene igualadores, y por tanto es finitamente completo.

Demostración. Se demostrará que todo topos lingüístico $C(S)$ tiene igualadores. Sean $f, g : X \to Y$ morfismos en $C(S)$ y sea

$$Z = \{x \in X \mid \forall y \left(\langle x, y\rangle \in f \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g\right)\}$$

Entonces Z es un igualador para f y g. Obsérvese que el S-conjunto Z ese construye de la misma forma que el igualador de Set. Finalmente por el Teorema de equivalencia, todo topos tiene igualadores. □

Proposición 2.20. Todo topos es finitamente cocompleto

Demostración. Se verificará que todo topos tiene objeto inicial, coproductos binarios y coigualadores, lo cual garantizará que sea finitamente cocompleto.

- **Todo topos tiene objeto inicial.** Sea $0 = \emptyset_1$. Para ver que 0 es inicial en $C(S)$, dado un S-conjunto $X = \{y_{\mathbf{A}} : \alpha\}$, sea $0 \to X = \emptyset_{\mathbf{1}\times\mathbf{A}}$. Además, si existiera un morfismo $f : 0 \to X$ en $C(S)$, se tiene

  $$\langle x, y\rangle \in f \vdash_S x \in 0 \vdash_S \perp$$

  y entonces

  $$\vdash_S \langle x, y\rangle \in f \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \emptyset_{\mathbf{1}\times\mathbf{A}}$$

  lo cual garantiza que $f = \emptyset_{\mathbf{1}\times\mathbf{A}}$.

- **Todo topos tiene coproductos binarios.** Sean X e Y S-conjuntos. Entonces $X + Y$ es un S-conjunto. Definamos las inyecciones canónicas $\sigma_1 : X \to X + Y$ y $\sigma_2 : Y \to X + Y$ en $C(S)$ por

  $$\begin{aligned}\sigma_1 &= (x \mapsto \langle \{x\}, \emptyset\rangle)\\ \sigma_2 &= \big(y \mapsto \langle \emptyset, \{y\}\rangle\big)\end{aligned}$$

  Entonces, si $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ son morfismos en $C(S)$, definamos $h : X + Y \to Z$ por

  $$\begin{aligned}h =&\{\langle\langle u, v\rangle, z\rangle : \langle u, v\rangle \in X + Y \wedge \big(\exists\, x(u = \{x\} \wedge \langle x, z\rangle \in f)\vee\\ &\exists\, y(v = \{y\} \wedge \langle y, z\rangle \in g)\big)\}\end{aligned}$$

  Entonces se verifica que $h \circ \sigma_1 = f$, $h \circ \sigma_2 = g$, y que, si $k \circ \sigma_1 = f$, $k \circ \sigma_2 = g$, entonces $k = h$. Y por tanto $X + Y$ con las inyecciones σ_1, σ_2 es un coproducto para X e Y.

- **Todo topos tiene coigualadores.** Dado un S-conjunto Y de tipo **PA**, escribiremos Equiv(u) para la expresión:

  $$\begin{aligned}u \subset& Y \times Y \wedge \forall\, y \in Y\ \langle y, y\rangle \in u\\ &\wedge \forall\, y \in Y\ \forall\, z \in Y\ \big(\langle y, z\rangle \in u \Leftrightarrow \langle z, y\rangle \in u\big)\\ &\wedge \forall\, x \in Y \forall\, y \in Y \forall\, z \in Y\ \big(\langle x, y\rangle \in u \wedge \langle y, z\rangle \in u \Rightarrow \langle x, z\rangle \in u\big)\,.\end{aligned}$$

Entonces Equiv(u) afirma que u es una relación de equivalencia sobre Y. Si R es un S-conjunto tal que $\vdash_S$ Equiv(R), se define el cociente Y/R como el S-conjunto

$$\{\{x : \langle x, y\rangle \in R\} : y \in Y\}$$

y se define la proyección canónica $\pi : Y \to Y/R$ por

$$\pi = (y \mapsto \{x : \langle x, y\rangle \in R\}).$$

Entonces dado un par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $C(S)$. Se define

$$R = \bigcap\{u : \mathrm{Equiv}(u) \wedge \forall x \forall y \forall z \left(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in g \Rightarrow \langle y, z\rangle \in u\right)\}$$

Y es fácil verificar que $\vdash_S$ Equiv(R) y que $\pi : Y \mapsto Y/R$ es coigualador para f y g en $C(S)$.

□

Proposición 2.21. Todo topos es cerrado cartesiano

Demostración. Se demostrará que todo topos lingüístico tiene exponenciales. Dados X, Z dos S-conjuntos, se definió anteriormente el S-conjunto Z^X. Sea $\mathrm{ev}_{Z,X} : X \times Z^X \to Z$ la S-función.

$$\mathrm{ev}_{Z,X} = \{\langle\langle x, u\rangle, z\rangle : \langle x, z\rangle \in u\}.$$

Entonces, dada una S-función $f : X \times Y \to Z$, definimos $\hat{f} : Y \to Z^X$ como la S-función

$$\hat{f} = (y \mapsto \{\langle x, z\rangle : \langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in f\}).$$

Claramente $\mathrm{ev}_{Z,X} \circ (1_X \times \hat{f}) = f$, y es fácil verificar que, si $g : Y \to Z^X$ satisface $\mathrm{ev}_{Z,X} \circ (1_X \times g) = f$, entonces $g = \hat{f}$. Por tanto $(Z^X, \mathrm{ev}_{Z,X})$ es el exponencial de Z por X en $C(S)$. □

Corolario 2.22. *Un topos $\mathscr{E}$ es degenerado si y sólo si $0 \cong 1$ en $\mathscr{E}$.*

Una útil caracterización de los epimorfismos

Lema 2.23. *Un morfismo $f : X \to Y$ en $C(S)$ es epimorfo si y sólo si*

$$y \in Y \vdash_S \exists x(\langle x, y\rangle \in f).$$

Demostración. Para la necesidad. Supongamos que f es epimorfismo. Definamos las siguientes funciones

$$g = Y \to \Omega, y \mapsto \exists x(\langle x, y\rangle \in f)$$

y

$$h = Y \to \Omega, y \mapsto \top$$

Así $g \circ f = h \circ f$ y como por hipótesis f es epimorfismo, se sigue que $g = h$ de donde se sigue

$$y \in Y \vdash_S \exists x(\langle x, y\rangle \in f).$$

Para la suficiencia. Si $g, h : Y \to Z$ son morfismos en $C(S)$ tales que $g \circ f = h \circ f$, entonces

$$y \in Y \vdash_S \exists x \exists u \exists v \left(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, u\rangle \in g \wedge \langle y, v\rangle \in h\right)$$

y dado que $g \circ f = h \circ f$,

$$y \in Y \vdash_S \exists x \exists u \exists v \left(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, u\rangle \in g \wedge \langle y, v\rangle \in h \wedge u = v\right)$$

y por tanto

$$y \in Y \vdash_S \exists u \left(\langle y, u\rangle \in g \wedge \langle y, u\rangle \in h\right)$$

de donde se sigue $g = h$. □

Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$. Una **descomposición** de f es un par de morfismos $k : A \twoheadrightarrow C$, $m : C \rightarrowtail B$ donde k es un epimorfismo, m es un monomorfismo y $m \circ k = f$. Además diremos que la descomposición (k, m) de f es:

- **única** si para cualquier descomposición (k', m') existe un isomorfismo $C \cong C'$ de forma que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, tail, "m"] & \\ A \arrow[ur, two heads, "k"] \arrow[dr, two heads, "k'"'] & & B \\ & C' \arrow[ur, tail, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

- **minimal** si para cada factorización $A \xrightarrow{l} D \overset{n}{\rightarrowtail} B$ de f con n monomorfismo, existe un único $j : C \to D$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, tail, "m"] \arrow[dd, "j"] & \\
A \arrow[ur, two heads, "k"] \arrow[dr, "l"'] & & B \\
& C' \arrow[ur, tail, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

A menudo al monomorfismo $C \rightarrowtail B$, o simplemente su dominio, en una descomposición única de f es llamado la **imagen** de f.

Proposición 2.24. Todo morfismo en un topos tiene una descomposición minimal única.

Demostración. Dado $f : X \to Y$ en $C(S)$, definamos

$$Z = \{y : \exists x \left(\langle x, y\rangle \in f\right)\}.$$

Claramente se tiene entonces que $\vdash_S f \in Z^X$. Haciendo $k = (f, X, Z)$ se sigue que $k : X \to Z$ y k es epimorfismo por el Lema 2.23. Llamando m al morfismo $Z \to Y$, $y \mapsto y$ se verifica que m es monomorfismo y entonces (k, m) es una descomposición de f. Para asegurar la unicidad, consideremos otra descomposición

$$X \xrightarrow{k'} Z' \overset{m'}{\rightarrowtail} Y$$

de f. Entonces como k' es un epimorfismo

$$z \in Z' \vdash_S \exists x (\langle x, z\rangle \in k').$$

Así que, como $m' \circ k' = f$,

$$\begin{aligned}
\langle z, y\rangle \in m' &\vdash_S \exists x \left(\langle x, z\rangle \in k' \wedge \langle z, y\rangle \in m'\right) \\
&\vdash_S \exists x \left(\langle x, y\rangle \in f\right) \\
&\vdash_S y \in Z.
\end{aligned}$$

y por tanto $\vdash_S m' \in Z^{Z'}$. Llamando n a la S-función (n, Z', Z) se tiene $n : Z' \to Z$. De esta forma el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dd, "n"] \arrow[dr, tail, "m'"] & \\ X \arrow[ur, two heads, "k'"] \arrow[dr, two heads, "k"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además n es un isomorfismo porque tiene inversa $n' : Z \to Z'$ dada por

$$n' = \{\langle y, z\rangle : y \in Z \wedge \langle z, y\rangle \in n\}.$$

Finalmente, se verificará que la descomposición (k, m) es minimal. Sea

$$X \overset{l'}{\twoheadrightarrow} V \overset{p'}{\rightarrowtail} W$$

Pero entonces

$$X \overset{l'}{\twoheadrightarrow} V \overset{n \circ p'}{\to} Y$$

es una descomposición de f y entonces existe un isomorfismo $i : Z \to V$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[dr, two heads, "l'"'] & Z \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "i"] & Y \\ & V \arrow[ur, tail, "n \circ p'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Y por tanto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[dr, two heads, "l"'] & Z \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "p' \circ i"] & Y \\ & W \arrow[ur, tail, "n"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta y la descomposición es única. $\square$

Corolario 2.25. *Todo topos es balanceado.*

Lema 2.26 (Caracterízación de productos fibrados)**.** *Sea*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[r, "k"] & W
\end{tikzcd}$$

un cuadrado conmutativo en $C(S)$. Entonces el cuadrado es un producto fibrado si y sólo si

$$y \in Y, z \in Z \vdash_S \exists u \left(\langle y, u\rangle \in h \wedge \langle z, u\rangle \in k\right) \Rightarrow \exists! x \left(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in g\right).$$

Demostración. Para la suficiencia. Supongamos que el diagrama es conmutativo. Definamos

$$j = \{\langle x', x\rangle : \exists\, y(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x', y\rangle \in f') \wedge \exists z(\langle x, z\rangle \in g \wedge \langle x', z\rangle \in g')\}$$

entonces es fácil ver que $j : X' \to X$ y es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr, "g'"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & Y \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Y por tanto, el cuadrado conmutativo es un producto fibrado.

Para la necesidad. Supongamos que el cuadrado es un producto fibrado, sea

$$V = \{\langle y, z\rangle : y \in Y \wedge z \in Z \wedge \exists\, u \left(\langle y, u\rangle \in h \wedge \langle z, u\rangle \in k\right)\}.$$

Entonces, usando la suficiencia del Lema ya probada, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\langle y,z\rangle \mapsto y"] \arrow[d, "\langle y,z\rangle \mapsto z"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[r, "k"] & W
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. De esta forma debe existir un isomorfismo $i : V \cong X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, "\langle y,z\rangle \mapsto y"] \arrow[ddr, "\langle y,z\rangle \mapsto z"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & Y \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y por tanto se cumple la propiedad deseada. □

Proposición 2.27. En todo topos, productos fibrados de epimorfismos son epimorfismos. Esto es, si

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[r, two heads, "k"] & W
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y k es epimorfismo, entonces f lo es.

Demostración. Supongamos que se cumplen las hipótesis. Como k es epimorfismo, por el Lema 2.23, se tiene

$$y \in Y \vdash_S \exists z \exists u \left(\langle y,u\rangle \in h \wedge \langle z,u\rangle \in k \right)$$

y por el Lema 2.26 se tiene

$$\begin{aligned} y \in Y &\vdash_S \exists z \exists ! x \left(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in g \right) \\ &\vdash_S \exists x \left(\langle x, y \rangle \in f \right) . \end{aligned}$$

□

Proposición 2.28. En todo topos, los coproductos binarios son ajenos. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\sigma_1"] \\ Y \arrow[r, "\sigma_2"] & X + Y \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración. En $C(S)$ el resultado se sigue inmediatamente del Lema 2.26 y de las definiciones de las inyecciones canónicas en $C(S)$. □

Proposición 2.29. En todo topos $\Omega \cong P1$.

Demostración. En $C(S)$ es fácil verificar que la S-función

$$U_\Omega \to U_{\mathbf{P1}} \quad \text{dada por} \quad \omega \mapsto \{x_{\mathbf{1}} : \omega\}$$

es un bimorfismo y por tanto es un isomorfismo. □

Propiedades de los coproductos en topos

Generalizando el caso binario anteriormente enunciado se tiene como consecuencia la siguiente proposición.

Proposición 2.30. En todo topos, las inyecciones de coproductos son monomorfismos y los coproductos ajenos, es decir, si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de objetos tales que $\coprod_{i\in I} A_i$ existe, entonces para cada par $i, j \in I$ con $i \neq j$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & A_i \arrow[d, "\sigma_i"] \\ A_j \arrow[r, "\sigma_j"] & \coprod A_i \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Más aún las siguientes dos propiedades serán de gran utilidad en el Capítulo 3.

Teorema 2.31 (De coproductos en productos fibrados)**.** *Supongamos que* $\{f_i : B_i \to B \,|\, i \in I\}$ *es un coproducto en un topos* $\mathscr{E}$*. Sea* $f : A \to B$ *y para cada* $i \in I$ *sea*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & B_i \arrow[d, "f_i"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

un producto fibrado. Entonces $\{g_i : A_i \to A \,|\, i \in I\}$ *también es un coproducto en* $\mathscr{E}$*.*

Demostración. Conssideremos los funtores

$$\mathscr{E} \xrightarrow{B^*} \mathscr{E}/B \xrightarrow{f^*} \mathscr{E}/A \xrightarrow{A} \mathscr{E} = \mathscr{E} \xrightarrow{F} \mathscr{E}.$$

Donde F manda a los morfismos $\square \to B$ a su producto fibrado $\square \to A$ a través de f. Entonces B^*, f^* y A tienen adjuntos derechos y por tanto preservan colímites, en particular el diagrama del coproducto $\{f_i : B_i \to B \,|\, i \in I\}$. Entonces F también los preserva y $\{g_i : A_i \to A \,|\, i \in I\}$ es un coproducto. $\square$

Corolario 2.32. *Supongamos que para cada* $i \in I$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en un topos $\mathscr{E}$. Entonces lo es el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod A_i \arrow[r] \arrow[d] & \coprod B_i \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

con los morfismos canónicos.

Demostración. Tomando el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \coprod B_i \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

y considerando que el diagrama de la hipótesis conmuta se tiene que para cada $i \in I$ existe un único morfismo $A_i \to P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[d] \\ P \arrow[r] & \coprod B_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[d] \\ P \arrow[r] \arrow[d] & \coprod B_i \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

el cuadrado exterior y el inferior son productos fibrados, lo que garantiza que el cuadrado superior también lo sea y por el Teorema de coproductos en productos fibrados se sigue que P es $\coprod A_i$ y por tanto se cumple la propiedad deseada. $\square$

Capítulo

3 BIST y topos con DSSI

3.1 BIST

Se denotará por **BIST** (*Basic Intuitionistic Set Theory*) a la teoría intuicionista de conjuntos básica que se desarrollará en esta sección. Se trabajará en una lógica intuicionista de primer orden con igualdad, donde se incorpora un predicado unario S, donde $S(x)$ expresa el enunciado: x es un conjunto. Se incluye también un predicado binario $\in$ (de pertenencia) y tomaremos como término indefinido la palabra clase. Convenimos también en usar las siguientes abreviaciones: $y \subset x$ es abreviación de la fórmula: $S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$, mientras que $\text{Ƨ}z : \varphi$ representa la fórmula $\exists\, y : \big(S(y) \wedge \forall z : z \in y \longleftrightarrow \varphi\big)$. Consideraremos los siguientes axiomas de BIST^{-}

Pertenencía	$y \in x \rightarrow S(x)$
Extensión	$S(x) \wedge S(y) \wedge (\forall z : z \in x \longleftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$
Unión indexada	$S(x) \wedge (\forall y \in x : (\text{Ƨ}z : \varphi) \rightarrow \text{Ƨ}z : (\exists\, y \in x : \varphi))$
Conjunto vacío	$\text{Ƨ}z : \perp$
Par	$\text{Ƨ}z : (z = x \vee z = y)$
Igualdad	$\text{Ƨ}z : (z = x \wedge z = y)$
Potencia	$S(x) \rightarrow \text{Ƨ}y : y \subset x$
Colección (Coll)	$S(x) \wedge (\forall y \in x\, \exists z\, \varphi) \rightarrow \exists\, w\, S(w) \wedge$ $(\forall y \in x\, \exists z \in w\, \varphi) \wedge (\forall z \in w\, \exists\, y \in x\, \varphi)$

Si φ es una fórmula donde x es libre en φ, se denotará por $\{x \mid \varphi[x]\}$ a la clase de todas las clases que satisfacen la fórmula φ con esquema de definición

$$\forall x\,(x \in \{x \mid \varphi[x]\} \longleftrightarrow \varphi[x])$$

Es importante hacer notar que el símbolo de pertenencia se está usando como una abreviación y no como el símbolo de la relación de pertenencía. Esto se debe a que el axioma de pertenencia nos garantiza que la fórmula $x \in y$ es válida cuando y es un conjunto.

Observese que el axioma de unión indexada es una combinación de los axiomas de reemplazo y de unión. El siguiente par de resultados establecen tal condición y prueba que podemos obtener dichos axiomas como consecuencia del sistema axiomático establecido para $BIST^{-}$.

Teorema 3.1. BIST^{-} $\vdash$ *Unión:* $\big(S(x) \wedge (\forall\, y \in x : S(y))\big) \rightarrow Ƨz : (\exists y \in x : z \in y)$

Demostración. Supongamos $S(x)$ y $\forall\, y \in x\ : S(y)$, entonces se cumple $Ƨz : z \in y$, pues y es un conjunto y $\forall\, z : z \in y \longleftrightarrow z \in y$. Por el axioma de unión indexada se tiene entonces que $Ƨz : (\exists y \in x : z \in y)$ como se deseaba. □

Teorema 3.2. BIST^{-} $\vdash$ Reemplazo : $\big(S(x) \wedge (\forall\, y \in x : \exists! z : \varphi)\big) \rightarrow Ƨz : (\exists y \in x : \varphi)$

Demostración. Supongamos $S(x)$ y $(\forall\, y \in x \, \exists! z : \varphi[z])$. Sea $y \in x$, por hipótesis sea u el único elemento que cumple $\varphi[u]$ luego, por axioma de igualdad, se tiene $Ƨz : z = u \wedge z = u$, esto es equivalente a $Ƨz : z = u$ lo cuál por definición asegura que existe un conjunto w, tal que $z \in w \longleftrightarrow z = u$. Pero esta última igualdad ocurre si y sólo si $\varphi[z]$, lo cual garantiza $Ƨz : \varphi$. Por el axioma de unión indexada se sigue finalmente $Ƨz : (\exists y \in x : \varphi)$. □

Obsérvese que la fórmula $Ƨz : \varphi$ nos garantiza la existencia de un conjunto cuyos elementos cumplen la propiedad φ. Por simplicidad convendremos en denotar a tal conjunto por $\{z \,|\, \varphi\}$. También adoptaremos las siguientes abreviaciones: $\emptyset = \{z \,|\, \bot\}$, $\{x\} = \{z \,|\, z = x\}$, $\{x, y\} = \{z \,|\, z = x \vee z = y\}$, $\delta_{xy} = \{z \,|\, z = x \wedge z = y\}$ y $x \cap y = \bigcup_{z \in x} \bigcup_{w \in y} \delta_{zw}$, de donde se obtiene que $z \in x \cap y \longleftrightarrow (z \in x) \wedge (z \in y)$, similarmente $x \cup y = \{z \,|\, \exists\, w \in \{x, y\} : z \in w\}$ de donde se sigue que $z \in x \cup y \longleftrightarrow (z \in x) \vee (z \in y)$.

3.2 Separación restringida

Por una instancia de separación nos referimos a una fórmula de la forma

$$\varphi[x,y]-\mathrm{Sep} \qquad S(x)\rightarrow S\left(\{y\,|\,y\in x\wedge\varphi\}\right)$$

donde φ es una fórmula con variables libres x e y.

También para toda fórmula φ consideraremos la abreviación $!\varphi$ para la fórmula

$$\text{Ƨ}z:(z=\emptyset\wedge\varphi),$$

donde z no es libre en φ. Leeremos $!\varphi$ diciendo que la fórmula φ está restringida.

Lema 3.3. *Si φ y ψ son fórmulas tales que $\varphi\longleftrightarrow\psi$, entonces $!\varphi\longleftrightarrow!\psi$*

Demostración. Supongamos que $\varphi\longleftrightarrow\psi$ y $!\varphi$, entonces existe un conjunto y tal que $\forall z:(z\in y\longleftrightarrow(z=\emptyset\wedge\varphi))$ pero $(z=\emptyset\wedge\varphi)\longleftrightarrow(z=\emptyset\wedge\psi)$ lo cual garantiza que $\exists y:\left(S(y)\wedge(\forall z:z\in y\longleftrightarrow(z=\emptyset\wedge\psi)\right)$ que es $!\psi$. Análogamente, si $!\psi$ entonces $!\varphi$. Por tanto $!\varphi\longleftrightarrow!\psi$. □

Lema 3.4. $\mathrm{BIST}^{-}\vdash(\forall\,y\in x\,!\varphi)\longleftrightarrow\varphi[x,y]-\mathrm{Sep}$

Demostración.

$\rightarrow$] Supongamos que $\forall\,y\in x:!\varphi$ y $S(x)$. Sea ψ la fórmula $(z=y)\wedge\varphi$, entonces $\forall\,y\in x\,\exists!z:\psi$, $(z=y)$. Luego, por reemplazo se tiene $\text{Ƨ}z:\exists\,y\in x:\psi$ pero $\exists\,y\in x:\psi\longleftrightarrow\exists\,y\in x:(z=y\wedge\varphi)$, por el Lema anterior, y entonces $\text{Ƨ}z:y=z\wedge\varphi$. Así por el axioma de unión indexada $\text{Ƨ}z:\exists\,y\in x:(y=z\wedge\varphi)$ que es $\text{Ƨ}z:z\in x\wedge\varphi$.

$\leftarrow$] Supongamos que se cumple $\varphi[x,y]$-Sep. Sea $y_0\in x$, entonces $S(x)$ por el axioma de pertenencía. Aplicando $\varphi[x,y]$-Sep se tiene que existe un conjunto w tal que $z\in w\longleftrightarrow\exists\,y\in x:(z=y\wedge\varphi)$. Entonces $w\cap\{y_0\}$ es un conjunto que cumple; para todo $z\in w\cap\{y_0\}$ existe un único v tal que $v=\emptyset$ y aplicando reemplazo se sigue que $\{v\,|\,\exists z\in w\cap\{y_0\}:z=\emptyset\}=\{v\,|\,v=\emptyset\wedge\exists z:z\in w\cap\{y_0\}\}$ es un conjunto. Pero $z\in w\cap\{y_0\}$ si y sólo si $z=y_0$ y $z\in w$ si y sólo si $z=y_0$ y $\exists\,y\in x:(z=y\wedge\varphi)$ si y sólo si $y_0 \in x \wedge \varphi$ si y sólo si φ. Por tanto $\{v \mid v = \emptyset \wedge \varphi\}$ es un conjunto y $\forall\, y \in x\, !\varphi$. □

Teorema 3.5. *Los siguientes enunciados se cumplen en* BIST^{-}

1. $!(x = y)$.
2. *Si* $S(x)$ *y* $\forall\, y \in x : !\varphi$, *entonces* $!(\forall\, y \in x : \varphi)$ *y* $!(\exists\, y \in x : \varphi)$.
3. *Si* $S(x)$, *entonces* $!(y \in x)$.
4. *Si* $!\varphi$ *y* $!\psi$, *entonces* $!(\varphi \wedge \psi)$, $!(\varphi \vee \psi)$, $!(\varphi \to \psi)$ *y* $!(\neg\varphi)$.
5. *Si* $\varphi \vee \neg\varphi$, *entonces* $!\varphi$.

Demostración.

1. Por el axioma de igualdad se tiene que $w = \{z \mid z = x \wedge z = y\}$ es un conjunto y $\forall z \in w\, \exists! v : v = \emptyset$. Así $\{v \mid z = x \wedge z = y \wedge v = \emptyset\} = \{v \mid v = \emptyset \wedge x = y\}$ es un conjunto por reemplazo.
2. Si $S(x)$ y $\forall\, y \in x : !\varphi$, por el Lema 3.4 se cumple $\varphi[x, y]$-Sep, de forma que $w = \{y \mid y \in x \wedge \varphi\}$ es un conjunto. Por 1. $\{u \mid u = \emptyset \wedge w = x\}$ también es un conjunto. Pero $w = x$ si y sólo si $\forall\, y : y \in x \longleftrightarrow y \in x \wedge \varphi$ de modo que $\forall\, y \in x : \varphi$. Así $\{u \mid u = \emptyset \wedge \forall\, y \in x : \varphi\}$ y por tanto $!(\forall\, y \in x : \varphi)$.
   Si $S(x)$ y $\forall\, y \in x : !\varphi$, se tiene que $\forall\, y \in x\ \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\}$ es un conjunto, así que por el axioma de unión indexada $\{z \mid \exists\, y \in x : z = \emptyset \wedge \varphi\} = \{z \mid z = \emptyset \wedge \exists\, y \in x : \varphi\}$ es un conjunto.
3. Si $S(x)$, se tiene que $y \in x \longleftrightarrow \exists z \in x : z = y$. Por el Lema 3.3 se tiene que $!(y \in x) \longleftrightarrow !(\exists z \in x : z = y)$ pero la última fórmula ocurre, pues por 1. $!(z = y)$ y por 2. $!(\exists z \in x : z = y)$. Por tanto $!(y \in x)$.
4. Supongamos que $!\varphi$ y $!\psi$, entonces
   - Como $w = \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\}$ y $v = \{z \mid z = \emptyset \wedge \psi\}$ son conjuntos, se tiene que $w \cap v$ es conjunto, donde

$$\begin{aligned} u \in w \cap v &\longleftrightarrow (u \in w) \wedge (u \in v) \\ &\longleftrightarrow u = \emptyset \wedge (\varphi \wedge \psi) \\ &\longleftrightarrow u \in \{z \mid z = \emptyset \wedge (\varphi \wedge \psi)\} \end{aligned}$$

Por tanto $\{z \mid z = \emptyset \wedge (\varphi \wedge \psi)\}$ es conjunto y así $!(\varphi \wedge \psi)$.

- Similarmente, si $w = \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\}$ y $v = \{z \mid z = \emptyset \wedge \psi\}$ son conjuntos, $w \cup v$ es conjunto y

$$\begin{aligned} u \in w \cup v &\longleftrightarrow (u = \emptyset \wedge \varphi) \vee (u = \emptyset \wedge \psi) \\ &\longleftrightarrow u = \emptyset \wedge (\varphi \vee \psi) \\ &\longleftrightarrow u \in \{z \mid z = \emptyset \wedge (\varphi \vee \psi)\} \end{aligned}$$

  Entonces $\{z \mid z = \emptyset \wedge (\varphi \vee \psi)\}$ es un conjunto y por tanto $!(\varphi \vee \psi)$.

- Obsérvese que son equivalentes:

$$\begin{aligned} \big(\forall z \in \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\} : \psi\big) &\longleftrightarrow \forall z : (z = \emptyset \wedge \varphi) \to \psi \\ &\longleftrightarrow \forall z : z = \emptyset \to \big(\varphi \to \psi\big) \\ &\longleftrightarrow \varphi \to \psi \end{aligned}$$

  y por hipótesis $!\psi$ implica $\forall z \in \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\} : !\psi$. Además $\{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\}$ es conjunto. Aplicando 2 se tiene

$$!\,\big(\forall z \in \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\} : \psi\big)$$

  pero esto ocurre si y sólo si $!(\varphi \to \psi)$.

- Por el axioma de conjunto vacío, $\emptyset$ es un conjunto y para todo $y \in x$: existe un único u que satisface $u = \emptyset$, entonces por reemplazo $\{u \mid u = \emptyset \wedge \bot\}$ es un conjunto, lo cual garantiza $!\bot$. Luego, $!\varphi$ y $!\bot$ garantizan que $!(\varphi \to \bot)$, que es justamente $!(\neg\varphi)$.

5. Supongamos $\varphi \vee \neg\varphi$, entonces para todo $x \in \{\emptyset\}$ existe un único y tal que $(y = x \wedge \varphi) \vee (y = \{x\} \wedge \neg\varphi)$. Por reemplazo se tiene entonces que $w = \{y \mid \exists x \in \{\emptyset\} : (y = x \wedge \varphi) \vee (y = \{x\} \wedge \neg\varphi)\} = \{y \mid (y = \emptyset \wedge \varphi) \vee (y = \{\emptyset\} \wedge \neg\varphi)\}$ es un conjunto. Además por 1. se tiene $!(y = \emptyset)$ y por tanto $\forall\, y \in w : !(y = \emptyset)$, así que por el Teorema 3.3 se cumple $(y = \emptyset)[w, y]$-Sep. De esta manera $\{y \mid y \in w \wedge y = \emptyset\}$ es un conjunto, donde claramente $y \in w \wedge y = \emptyset \longleftrightarrow y = \emptyset \wedge \varphi$. Por tanto $\{y \mid y = \emptyset \wedge \varphi\}$ es un conjunto y $!\varphi$.

$\square$

Corolario 3.6. *Supongamos que $\varphi[x_1,\dots,x_k]$ es una fórmula que no contiene subfórmulas atómicas de la forma $S(z)$ y tal que todo cuantificador es acotado y de la forma $\forall\, y \in x_i$ o $\exists\, y \in x_i$ para algún $i \in \{1,\dots,n\}$. Entonces*

$$\mathrm{BIST}^- \vdash S(x_1) \wedge \cdots \wedge S(x_k) \to !\varphi$$

3.3 Axiomas sobre propiedades restringidas

Ahora consideraremos otros axiomas que nos permitan tener más instancias de separación[1]:

RS	Restricción del predicado de conjunto	$!S(x)$
R$\exists$	$\exists$ restringido	$(\forall\, x : !\varphi) \to !(\exists\, x : \varphi)$
R$\forall$	$\forall$ restringido	$(\forall\, x : !\varphi) \to !(\forall\, x : \varphi)$

Teorema 3.7. $\mathrm{BIST}^- + \mathrm{R}S \vdash \{y \mid y \in x\}$ *es un conjunto.*

Demostración. Consideremos al conjunto $\{x\}$, por RS se tiene que $\forall\, y \in \{x\} : !S(x)$ y por el Lema 3.4 se tiene $S(x)$-Sep, así que $u = \{z \mid z \in \{x\} \wedge S(x)\}$ es un conjunto. Pero, si $z \in u$, entonces $z = x \wedge S(x)$ implica que z es un conjunto. Aplicando unión se tiene que $w = \bigcup u$ es un conjunto. De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} y \in w \quad &\leftrightarrow \quad \exists z \in u : \; y \in z \\ &\leftrightarrow \quad \exists z : (z = x \wedge S(x) \wedge y \in z) \\ &\leftrightarrow \quad z = x \wedge y \in z \\ &\leftrightarrow \quad y \in x \end{aligned}$$

Entonces $\{y \mid y \in x\}$ es un conjunto. $\square$

[1] Se adopta el uso de las siglas que representan los axiomas por sus nombres en inglés: Restricted Sethood, Restricted $\exists$ y Restricted $\forall$ respectivamente.

Corolario 3.8. *Los siguientes enunciados se cumplen en* $\mathrm{BIST}^{-} + \mathrm{R}S$

1. $!S(x)$
2. $!(y \in x)$
3. *Si* $\forall\, y \in x : !\varphi$, *entonces* $!(\forall\, y \in x : \varphi)$ *y* $!(\exists\, y \in x : \varphi)$

Demostración. El enunciado 1 es inmediato por la misma definición del axioma RS, 2 y 3 se siguen porque $x = \{z \,|\, z \in x\}$ es un conjunto, por el Teorema 3.7, en el Teorema 3.5.3 y 3.5.2 respectivamente. □

Diremos que una fórmula es acotada si todos los cuantificadores que ocurren en ella están acotados, i.e. son de la forma $\forall z \in x$ o $\exists z \in x$. Denotaremos por bSep al esquema de separación acotada:

$$\varphi[x, y]\text{-Sep para toda fórmula } \varphi \text{ acotada}$$

Corolario 3.9. $\mathrm{BIST}^{-} + \mathit{bSep} = \mathrm{BIST}^{-} + \mathrm{R}S$

Demostración. Es claro que $\mathrm{BIST}^{-} + \mathrm{bSep} \vdash \mathrm{BIST}^{-} + \mathrm{R}S$, pues R$S$ es una instancia de bSep.
Por otra parte, sea $\varphi[x, y]$ una fórmula acotada. Por inducción sobre la complejidad de φ se demostrará $\varphi[x, y]$-Sep.

- Si φ es atómica, entonces se obtiene de aplicar un símbolo predicativo. Las opciones son $x = y$, $x \in y$, $y \in x$, $S(x)$, $S(y)$. Pero por el Teorema 3.5 o el Corolario $\varphi[x, y]$-Sep se tiene en todos los casos $!\varphi$. Así $\forall\, y \in x : !\varphi$, finalmente por el Lema 3.4 se tiene $\varphi[x, y]$-Sep.
- Si $\varphi = \psi \Box \chi$, donde $\Box$ es un conectivo lógico o $\varphi = \neg\psi$, se tiene por hipótesis inductiva $\psi[x, y]$-Sep y $\chi[x, y]$-Sep, aplicando el Lema 3.4 se tiene $\forall y \in x : !\varphi$ y $\forall y \in x : !\chi$, de donde se sigue $\forall y \in x : !\psi \wedge !\chi$ y entonces el Teorema 3.5-4. garantiza $\forall y \in x : !(\psi \Box \chi)$ o $\forall y \in x : !\neg\psi$, en cualquier caso $\forall y \in x : !\varphi$. Y nuevamente por el Lema 3.4 $\varphi[x, y]$-Sep.
- Si $\varphi[x, y]$ es de la forma $\forall z \in w : \psi$, entonces por hipótesis inductiva se tiene $\psi[x, y]$-Sep y por el Lema 3.4 $\forall y \in x : !\psi$, entonces $\forall z \in w\, \forall y \in x : \psi$ implica $\forall y \in x\, \forall z \in w : !\psi$ y por

el Corolario 3.8-3 $\forall y \in x\,!(\forall z \in w : \psi)$ de donde se obtiene $\forall y \in x :!\varphi$ y $\varphi[x,y]$-Sep. Similarmente se procede si φ es de la forma $\exists z \in w : \psi$.

De esto se deduce BIST$^-$+R$S \vdash$ BIST$^-$+ bSep y por tanto la igualdad. $\square$

Lema 3.10. $BIST^- + \mathrm{R}\exists \vdash \mathrm{R}\forall$

Demostración. Supongamos R$\exists$ y $\forall x :!\varphi$. Demostremos primero lo siguiente:

$$\forall x : \varphi \longleftrightarrow \forall p \in P(\{\emptyset\}) \left(\exists x(\varphi \to \emptyset \in p)\right) \to \emptyset \in p.$$

$\to$] Supongamos $\forall x : \varphi$. Sea $p \in P(\{\emptyset\})$ tal que $\exists x(\varphi[x] \to \emptyset \in p)$. Entonces existe un x_0 tal que $\varphi[x_0] \to \emptyset \in p$ y como $\forall x : \varphi[x]$ en particular $\varphi[x_0]$. Así $\emptyset \in p$.

$\leftarrow$] Supongamos que $\forall p \in P(\{\emptyset\}) \left(\exists x(\varphi \to \emptyset \in p)\right) \to \emptyset \in p$. Sea x_0 arbitrario, definamos $p_0 = \{z \,|\, z = \emptyset \wedge \varphi[x_0]\}$. Entonces p_0 es un conjunto, pues $!\varphi[x_0]$ (por hipótesis $\forall x :!\varphi$). Entonces $p_0 \in P(\{\emptyset\})$ (porque $p_0 \subseteq \{\emptyset\}$). Por hipótesis $\left(\exists x(\varphi \to \emptyset \in p_0)\right) \to \emptyset \in p_0$, pero por definición de p_0 se tiene $\varphi[x_0] \to \emptyset \in p_0$. Así $\emptyset \in p_0$, pero por definición de p_0 nuevamente $\varphi[x_0]$. Por tanto $\forall x : \varphi[x]$

Luego $p \in P(\{\emptyset\})$ implica que p es un conjunto, así $!(\emptyset \in p)$ y $\forall x :!\varphi$, entonces $\forall x :!\varphi \to !(\emptyset \in p)$ y $\forall x :!(\varphi \to \emptyset \in p)$. Aplicando R$\exists$ se tiene

$$!\left(\exists x : (\varphi \to \emptyset \in p)\right) \text{ y también } !\left(\exists(\varphi \to \emptyset \in p)\right) \to \emptyset \in p).$$

Finalmente $!(\forall p \in P(\{\emptyset\}))\left(\exists x(\varphi \to \emptyset \in p)\right) \to \emptyset \in p$. Pero por la equivalencia enunciada esto ocurre si y sólo si $!\forall x : \varphi$. $\square$

Corolario 3.11. $BIST^- + Sep = BIST^- + \mathrm{R}S + \mathrm{R}\exists$

Demostración. Como $BIST^- + Sep \vdash BIST^- + bSep \vdash \mathrm{R}S$ es claro que en $BIST^- + Sep$ se deduce RS. Además si suponemos $\forall x :!\varphi$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \forall x :!\varphi[x] &\to \forall z \in \{x\} :!\varphi[z] \\ &\to !\left(\exists z \in \{x\} : \varphi[z]\right) \text{ Por el Teorema 3.5} \\ &\to !\left(\exists z : z = x \wedge \varphi[z]\right) \\ &\to !(\exists x : \varphi) \end{aligned}$$

Por tanto $BIST^- + Sep \vdash BIST^- + \mathrm{R}S + \mathrm{R}\exists$.
Por otra parte, se demostrará que bajo $BIST^-$+RS+R$\exists$ se deduce $!\varphi$ para toda fórmula φ. Se hará inducción sobre la complejidad de la fórmula

- Si φ es atómica, se tienen las siguiente opciones
  - Si $\varphi = x_i = x_j$, por el Teorema 3.5-1 se sigue $!\varphi$.
  - Si $\varphi = x_i \in x_j$, entonces por el Corolario 3.8-2 se tiene $!\varphi$.
  - Si $\varphi = S(x_i)$, entonces por el Corolario 3.8-1 se tiene $!\varphi$.

  Por tanto, en cualquier caso, se cumple $!\varphi$.
- Si $\varphi = \psi \Box \chi$, entonces por hipótesis inductiva se cumplen $!\psi$ y $!\chi$ de donde se puede aplicar el Teorema 3.5-4 y se tiene $!\varphi$. Similarmente, si $\varphi = \neg\psi$, se cumple $!\varphi$.
- Si $\varphi = \forall x : \psi$ por hipótesis inductiva se tiene $!\psi$ y por tanto $\forall x : !\psi$. Como R$\forall$ se deduce de $BIST^- + \mathrm{R}\exists$ (Lema 3.10) se tiene $!\left(\forall x : \psi\right)$. Análogamente si $\varphi = \exists x : \psi$, se cumple $\forall x : !\psi$ por hipótesis inductiva y aplicando R$\exists$ se tiene $!\left(\exists x : \psi\right)$. se concluye que $!\varphi$.

Como para toda φ se tiene $!\varphi$, en particular, si x e y son variables libres de φ se tiene $\forall y \in x : !\varphi$ que por el Lema 3.4 se obtiene $\varphi[x, y]$-Sep para toda φ. $\square$

3.4 Pares ordenados, relaciones y funciones

Definición 3.12. El **par ordenado** de x e y es $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Proposición 3.13. $(x, y) = (a, b) \rightarrow x = a \wedge y = b$.

Demostración. Supongamos $(x, y) = (a, b)$, entonces como $\{x\} \in (x, y)$ se tiene que $\{x\} \in (a, b)$, así que $\{x\} = \{a\}$ o $\{x\} = \{a, b\}$, pero en cualquier caso $x = a$. Similarmente $\{x, y\} \in (a, b)$, así que $\{x, y\} = \{a\}$ o $\{x, y\} = \{a, b\}$. Si $\{x, y\} = \{a\}$, entonces $x = y = a$ y $\{x\} = \{x, y\} = \{a\} = \{b\}$, entonces $y = b$. Si $\{x, y\} = \{a, b\}$ entonces $y \in \{a, b\}$ y si $y = a$ se tiene por el mismo razonamiento anterior que $y = b$. Así que,

de cualquier forma $y = b$.
Por tanto $x = a$ y $y = b$ como se deseaba. $\square$

Definición 3.14. Dadas dos clases A y B se define la clase **producto cartesiano** como

$$A \times B = \{z : \exists\, x \in A, \exists\, y \in B : z = (x, y)\}$$

Proposición 3.15. Si A y B son conjuntos entonces $A \times B$ es conjunto.

Demostración. Sea $b \in B$. Para cada $a \in A \exists! z : z = (a, b)$ así que por reemplazo $\text{Ƨ}z : \exists a \in A : z = (a, b)$. Entonces para cada $b \in B$

$$(\text{Ƨ}z : \exists a \in A : z = (a, b))$$

lo cual implica por el axioma de unión indexada que $\text{Ƨ}z : \exists b \in B : \exists a \in A : z = (a, b)$ que es justamente, por convención, $A \times B$. $\square$

Definición 3.16. Diremos que R es una **relación** si y sólo si $\forall z \in R : \exists x, y : z = (x, y)$.

Definición 3.17. Diremos que f es una **función** si y sólo si f es relación y $(x, y), (x, z) \in f$ implican que $y = z$.

Como es usual, el **dominio** de R es $\operatorname{dom} R = \{x : \exists y : (x, y) \in R\}$ y el rango de R es $\operatorname{rango} R = \{y : \exists x : (x, y) \in R\}$. En caso de que f sea una función, $\operatorname{dom} f = A$ y $\operatorname{rango} f \subseteq B$ se dira que la función va de A en B y se denotará por $f : A \to B$

Proposición 3.18. Si A es conjunto y $f : A \to B$, entonces rango f es conjunto.

Demostración. Sea $x \in A$, como f es función $\exists! y \in B : (x, y) \in f$, así que por reemplazo $\text{Ƨ}z : \exists z \in B : (x, z) \in B$ garantiza que rango f es conjunto. $\square$

Definición 3.19. Dado un conjunto A, se define la **clase de todas las funciones de A en B** como

$$B^A = \{f \mid S(f) \text{ y } f : A \to B \text{ es función }\}$$

Proposición 3.20. Si B es conjunto, entonces B^A es conjunto.

Demostración. Obsérvese que $B^A = \{f \mid f \in P(A \times B) \wedge (\forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f)\}$, entonces sea $f \in P(A \times B)$. Se aplicará varias veces el Lema 3.5. Como f es conjunto $!\left((a,b) \in f\right)$, luego $\forall\, b \in B :! \left((a,b) \in f\right)$ implica $!\left(\exists! b \in B : (a,b) \in f\right)$ y como $\forall\, a \in A :! \left(\exists! b \in B : (a,b) \in f\right)$ se sigue

$$!\left(\forall\, a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f\right).$$

Por tanto $\forall f \in P(A \times B) :! \left(\forall\, a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f\right)$ lo cuál implica por el Lema 3.3 que $\{f \mid f \in P(A \times B) \wedge (\forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in f)\} = B^A$ es conjunto. $\square$

3.5 Axiomas de infinitud

Consideremos adicionalmente los siguientes axiomas de infinitud

Inf $\quad \exists I : \exists 0 \in I : \exists s \in I^I : (\forall\, x \in I : s(x) \neq 0) \wedge \left(\forall\, x, y \in I : s(x) = s(y) \to x = y\right)$

vN-Inf $\quad \exists\, I : (\emptyset \in I \wedge \forall\, x \in I : S(x) \wedge x \cup \{x\} \in I)$

Consideremos **BIST= BIST$^-$+ Inf**

Al agregar el axioma Inf, podemos construir el conjunto de números naturales en BIST de la siguiente forma

$$N = \bigcap \{A \in P(I) : 0 \in A \wedge \forall\, a \in A : s(a) \in A\}.$$

Para ver que en efecto N es conjunto se demostrará primero la siguiente proposición

Proposición 3.21. Si $\exists u \in A$ y $\forall a \in A : S(a)$, entonces $\bigcap A$ es conjunto.

Demostración. Por hipótesis $\exists\, u \in A$ y como $u \in A$, A es conjunto por el axioma de pertenencía. Entonces sea $z \in u$ y $a \in A$, como $S(a)$, entonces

$!(z \in a)$, luego $\forall a \in A :!(z \in a)$ implica $!(\forall a \in A : z \in a)$ por el Lema 3.5. Entonces $\forall z \in u :!(\forall a \in A : z \in a)$ y por el Lema 3.3 se tiene que $D = \{z | z \in u \wedge \forall a \in A : z \in a\}$ es un conjunto. Pero $z \in D \longleftrightarrow z \in u \wedge (\forall a \in A : z \in a) \longleftrightarrow \forall a \in A : z \in a \longleftrightarrow z \in \bigcap A$ lo que concluye que $\bigcap$ es conjunto. □

Teorema 3.22. *N es un conjunto*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{A \in P(I) : 0 \in A \wedge \forall a \in A : s(a) \in A\}$. Primero se demostrará que $\mathscr{A}$ es un conjunto: Sea $A \in P(I)$, entonces $S(A)$ y por el Teorema 3.5 se tienen $!(0 \in A)$, $!(s(a) \in A)$, $\forall a \in A :!(s(a) \in A)$ y $!(\forall a \in A : s(a) \in A)$. Por tanto $\forall A \in P(I) :!(\forall a \in A : s(a) \in A)$ y por el Lema 3.3 se tiene que $\{A \in P(I) : 0 \in A \wedge \forall a \in A : s(a) \in A\}$ es un conjunto. Entonces, como $I \in \mathscr{A}$ y $\forall A \in \mathscr{A} : S(A)$ (pues $A \subseteq I$) se tiene por la Proposición 3.21 que $N = \bigcap \mathscr{A}$ es un conjunto. □

Para cada fórmula $\varphi[x]$, el principio de inducción para φ es

$$\varphi[x] - \text{Ind} \qquad \varphi[0] \wedge \big(\forall x \in N : \varphi[x] \to \varphi[s(x)]\big) \to \forall x \in N : \varphi[x]$$

E Ind para el principio de inducción completo: φ-Ind para toda fórmula φ. Mientras que RInd representa el esquema de inducción restringida:

$$\text{Rind} \qquad (\forall x \in N : !\varphi) \to \varphi[x] - \text{Ind}$$

Se deducirán a continuación algunas propiedades relacionadas con el esquema de inducción en BIST

Lema 3.23. *BIST $\vdash$ RInd*

Demostración. Supongamos que $\forall x \in N :!\varphi$. Entonces por el Lema 3.3 la clase $A = \{x | x \in N \wedge \varphi[x]\}$ es un subconjunto de N. Entonces si suponemos $\varphi[0]$ y $\forall x \in N : \varphi[x] \to \varphi[s(x)]$ se tiene que $0 \in A$ y $\forall a \in A : s(a) \in A$ entonces $A \in \mathscr{A}$ donde $\mathscr{A}$ es el conjunto definido en el Teorema 3.22. Por tanto $N \subseteq A$ y $\forall x \in N : \varphi[x]$. □

Lema 3.24. *BIST+Sep $\vdash$ Ind*

Demostración. En BIST+Sep se tiene que $A = \{x \mid x \in N \wedge \varphi[x]\}$ es un conjunto. Así que al suponer $\varphi[0]$ y $\forall x \in N : \varphi[x] \to \varphi[s(x)]$ se obtiene que $A \in \mathscr{A}$ (ver Teorema 3.22) y por tanto $N \subseteq A$. Lo anterior implica $\forall x \in N : \varphi[x]$. □

Proposición 3.25. BIST + Ind $\vdash$ vN-Inf

Demostración. Demostraremos por inducción el siguiente enunciado:

$$\forall n \in N : \exists! f_n \in \mathrm{S}^{\{x \in N \mid x \leq n\}} : \forall x \in \{x \in N \mid x \leq n\} :$$

$$(x = 0 \to f_n(x) = \emptyset) \wedge \left(x > 0 \to f_n(x) = f_n(x-1) \cup \{f_n(x-1)\}\right)$$

Si $x = 0$, es claro que $f_0 \in \mathrm{S}^{\{x \in N \mid x \leq 0\}}$ está definida por $f_0(0) = \emptyset$ y es la única que cumple esa condición.
Supongamos que el enunciado se cumple para $x \in N$, entonces existe una única función $f_n \in \mathrm{S}^{\{x \in N \mid x \leq n\}}$ tal que

$$(x = 0 \to f_n(x) = \emptyset) \wedge \left(x > 0 \to f_n(x) = f_n(x-1) \cup \{f_n(x-1)\}\right).$$

Entonces definamos $f_{n+1} \in \mathrm{S}^{\{x \in N \mid x \leq n+1\}}$ como $f_n \cup \{(n+1, f_n(n) \cup \{f_n(n)\})\}$. Es claro por la contrucción de f_{n+1} que se cumple $f_{n+1}(0) = \emptyset$ y $f_{n+1}(x) = f_{n+1}(x-1) \cup \{f_{n+1}(x-1)\}$ si $x > 0$. Finalmente la unicidad se sigue de la unicidad de f_n y del valor $f_{n+1}(n+1)$. □

3.6 Axiomas sobre el tercero excluso

Consideremos ahora los siguientes esquemas de axiomas[2]

DE	Igualdad decidible	$x = y \vee \neg(x = y)$
REM	Ley del tercero excluso restringida	$!\varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$
LEM	Ley del tercero excluso	$\varphi \vee \neg\varphi$

[2]Nuevamente se usarán las siglas de los nombres en inglés de los axiomas: Decidable equality, Restricted Excluded Middle y Law of Excluded MIddle respectivamente.

Lema 3.26. *BIST*$^-$ $\vdash$ DE $\longleftrightarrow$ REM

Demostración.

$\rightarrow$] Supongamos DE y $!\varphi$. Entonces $w = \{z \mid z = \emptyset \wedge \varphi\}$ es un conjunto. Luego, por DE, $w = \{\emptyset\}$ o $w \neq \{\emptyset\}$. En el primer caso $\emptyset \in w$ implica φ, en el segundo caso $\emptyset \notin w$ implica $\neg\varphi$. Por tanto $\varphi \vee \neg\varphi$.

$\leftarrow$] Por el Teorema 3.5 $!(x = y)$, así que por *REM* $x = y \vee \neg(x = y)$. $\square$

Proposición 3.27. BIST$^-$+LEM $\vdash$ Sep

Demostración. Sea $\varphi[x, y]$ una fórmula, por LEM $\varphi \vee \neg\varphi$ y por el Teorema 3.5 se tiene $!\varphi$. Por tanto $\forall\, y \in x :!\varphi$. Pero por el Lema 3.3 se tiene $\varphi[x, y]$-Sep. Por tanto se cumple Sep. $\square$

Corolario 3.28. *BIST*$^-$+ *Sep* + *REM* = *BIST*$^-$+*LEM*

Demostración. Es inmediato por la Proposición 3.27 que BIST$^-$+LEM $\vdash$ Sep. También de LEM se tiene $\varphi \vee \neg\varphi$ lo cual implica $!\varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$ que es justamente REM.

Supongamos entonces BIST$^-$+ Sep + REM, sea φ una fórmula y supongamos que u y v son variables que no tienen ocurrencias libres en φ. Por Sep y el Lema 3.3 se tiene $\forall\, u \in v :!\varphi$ pero esto es $!\varphi$, aplicando REM se tiene entonces $\varphi \vee \neg\varphi$ como se deseaba. $\square$

3.7 Sistemas de inclusiones

Definición 3.29. Un **sistema de inclusiones** sobre una categoría K es una subcategoría I (cuyos morfismos serán llamados inclusiones y representados por $\hookrightarrow$) que cumple las siguientes condiciones:

(si1) Toda inclusión es monomorfismo en K.

(si2) Existe a lo más una inclusión entre cualesquiera dos objetos de K.

(si3) Para cada monomorfismo $m : P \rightarrowtail A$ en K existe una inclusión $A_m \hookrightarrow A$ que es isomorfa a m en K/A.

(si4) Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, hook, "i"] & A \\ A'' \arrow[u, "m"] \arrow[ur, hook, "j"] & \end{tikzcd}$$

donde i y j son inclusiones, entonces m es inclusión.

En lo siguiente supondremos que siempre podemos encontrar tal $A_m \hookrightarrow A$ para cada m que satisface (si3). Además por (si3) cada objeto de K es un objeto de I, por lo cual cada morfismo identidad en K es una inclusión. También por (si2), los objetos de I están preordenados por inclusiones. Escribiremos $A \equiv B$ si $A \hookrightarrow B \hookrightarrow A$. Si $i : A \hookrightarrow B$ entonces $A \equiv B$ si y sólo si i es un isomorfismo, en cuyo caso i^{-1} es la inclusión de B a A.

Diremos que I es un sistema de inclusiones parcialmente ordenado cuando el preorden I es un orden parcial.

Proposición 3.30. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. I es un sistema de inclusiones parcialmente ordenado de K.
2. I es una subcategoría de K que cumple (si1), (si2) y también:

   (si3!) Para cada monomorfismo $m : P \rightarrowtail A$ en K existe una única inclusión $A_m \hookrightarrow A$ que es isomorfa a m en K/A.

Demostración.

$1 \to 2$] Verifiquemos la unicidad de (si3). Sea $m : P \rightarrowtail A$ un monomorfismo en K. Si $A_m \hookrightarrow A$ y $A_n \hookrightarrow A$ son isomorfos a m en K/A. Esto implica que $A_m \cong P$ y $P \cong A_n$, así que $A_m \cong A_n$. Entonces existe un $k : A_m \to A_n$ isomorfismo. Pero se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, hook] & A \\ A_m \arrow[u, "k"] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_m \arrow[r, hook] & A \\ A_n \arrow[u, "k^{-1}"] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Entonces $A_m \hookrightarrow A_n \hookrightarrow A_m$ implica $A_m = A_n$.

$2 \to 1$] Primero veremos que I es un orden parcial. Es claro que $A \hookrightarrow A$, pues toda identidad es una inclusión. Si $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$ entonces $A \hookrightarrow C$ por la composición de las inclusiones. Finalmente, si $i : A \hookrightarrow B$ y $j : B \hookrightarrow A$ se tiene $j = i^{-1}$, de forma que j es isomorfo a 1_A en K/A. Como también 1_A es una inclusión, se sigue por (si3!) que $j = 1_A$ y por tanto $A = B$.

Resta ver que se cumple (si4). Supongamos que i y j son inclusiones y m es un morfismo que satisface el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, hook, "i"] & A \\
A'' \arrow[u, "m"] \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $k : A'_m \to A'$ la única inclusión isomorfa a m en K/A'. Entonces $i \circ k : A'_m \hookrightarrow A$ es isomorfo a $j : A'' \hookrightarrow A$ en K/A. Entonces, por la unicidad de (si3!), $A''_m = A''$ y $i \circ k = j = i \circ m$. Luego, como i es monomorfismo, se tiene que $k = m$ lo cual garantiza que m es una inclusión. □

Definición 3.31. Un sistema de inclusiones I sobre una categoría K (con al menos un elemento) es **dirigido** si el preorden inducido sobre I es dirigido, es decir, para cada par de objetos, A, B, existe un objeto C_{AB} con inclusiones $A \hookrightarrow C_{AB} \hookleftarrow B$.

Proposición 3.32. Supongamos que I es un sistema dirigido de inclusiones sobre un topos elemental $\mathscr{E}$. Entonces

1. El preorden I tiene supremos finitos. Denotaremos por $\emptyset$ a un elemento inicial seleccionado, y $A \cup B$ para el supremo binario seleccionado.
2. Un objeto A de $\mathscr{E}$ es inicial si y sólo si $A \equiv \emptyset$.
3. El preorden I tiene ínfimos finitos. Escribiremos $A \cap B$ para el ínfimo binario seleccionado.
4. El cuadrado siguientes es un producto fibrado y un coproducto

fibrado

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r, hook] & A\cup B \end{tikzcd}$$

Demostración. Primero se construirá $A\cup B$. Sean $i : A \hookrightarrow C$ y $j : B \hookrightarrow C$ inclusiones. Entonces como $\mathscr{E}$ posee coproductos, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r] & A+B \arrow[u, dashed, "{[i,j]}"] & B \arrow[ul, "j"'] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

De donde tomaremos la factorización epi-mono del morfismo $[i,j] : A+B \to C$ y definiremos $A\cup_C B$ como el objeto imagen de la factorización, es decir,

$$[i,j] : A+B \to C = A+B \twoheadrightarrow A\cup_C B \hookrightarrow C.$$

Supongamos que $k : C \hookrightarrow D$, entonces $k\circ i : A \hookrightarrow D$ y $k\circ j : B \hookrightarrow D$ son inclusiones. Definamos similarmente $A\cup_D B$ como la imagen bajo la factorización epi-mono. Entonces

$$\begin{aligned} \big([k\circ i, k\circ j] : A+B \to D\big) &= \big(k\circ[i,j] : A+B \to C \hookrightarrow D\big) \\ &= A+B \twoheadrightarrow A\cup_C B \hookrightarrow C \hookrightarrow D \\ &= A+B \twoheadrightarrow A\cup_C B \hookrightarrow D. \end{aligned}$$

Entonces por la unicidad de la factorización, se sigue que $A\cup_C B \hookrightarrow D$ y $A\cup_D B \hookrightarrow D$ son isomorfos en K/D. Por tanto $A\cup_C B = A\cup_D B$.

Entonces, dados A y B sea C_{AB} el objeto que satisface $A \hookrightarrow C_{AB} \hookleftarrow B$. Definamos $A\cup B$ como $A\cup_{C_{AB}} B$. Para ver que en efecto es un supremo, sea C tal que $A \hookrightarrow C \hookleftarrow B$. Por ser I un preorden dirigido, existe un objeto D tal que $C_{AB} \hookrightarrow D \hookleftarrow C$. Y por lo anteriormente expuesto $A\cup B = A\cup_{C_{AB}} B = A\cup_D B = A\cup_C B$. Entonces $A\cup B \equiv A\cup_C B \hookrightarrow C$. Así $A\cup B \hookrightarrow C$.

Ahora, sean 0 y $0'$ objetos iniciales de $\mathscr{E}$. Por lo anterior tenemos un epimorfismo $0+0' \twoheadrightarrow 0\cup 0'$. Pero $0+0'$ es un objeto inicial y, en todo topos elemental, la imagen de un objeto inicial es inicial. De esta forma $0 \cup 0'$ es inicial y el morfismo inclusión $0 \hookrightarrow 0 \cup 0'$ es un isomorfismo. De esta forma $0 \equiv 0 \cup 0'$. Analogámente se prueba que $0' \equiv 0 \cup 0'$. También, si $0 \hookrightarrow A$ donde A es un objeto en $\mathscr{E}$ y 0 es un objeto inicial, existe un único morfismo $0 \to A$ que es un monomorfismo. Luego, por (si3), existe una inclusión $0' \hookrightarrow A$ para algún objeto inicial. Por lo anterior $0 \equiv 0'$, así $0 \hookrightarrow A$. Por tanto los elementos minimos en el preorden de inclusión son exactamente los objetos iniciales.

Para definir $A \cap B$, construimos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet\lrcorner"] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ B \arrow[r, hook, "j"'] & A \cup B \end{tikzcd}$$

Donde m y n son monomorfismos porque i y j lo son. Usando (si3), definamos $k : A \cap B \hookrightarrow A$ como la inclusión representativa de m. Entonces se tiene un isomorfismo $p : A \cap B \to P$ con $m \circ p = k$. Entonces $i \circ k = j \circ n \circ p$, donde podemos aplicar (si4) para obtener que $n \circ p$ es una inclusión, entonces $A \cap B \hookrightarrow B$. Más aún, como p es un isomorfismo se tiene el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, hook, "n \circ p"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet\lrcorner"] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ B \arrow[r, hook, "j"'] & A \cup B \end{tikzcd}$$

Para ver que $A \cap B$ es el ínfimo de A y B, supogamos que $A \hookleftarrow C \hookrightarrow B$. Por (si2), esto es un cono para el diagrama $A \hookrightarrow A \cup B \hookleftarrow B$. El producto fibrado anterior nos da un morfismo $C \to A \cap B$, que es una inclusión por (si4).

Finalmente, como $A \cup B$ se obtuvo como imagen de la factorización de $A+B$ y en todo topos el producto fibrado de dos epimorfismos seguidos de monomorfismos es un coproducto fibrado. $\square$

Corolario 3.33. *Dado un sistema dirigido de inclusiones sobre un topos elemental, un cuadrado de inclusiones (que necesariamente es conmutativo)*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, hook] & D \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado si y sólo si $A \equiv B \cap C$.

Demostración. Por la Proposición 3.32-1, $B \cup C \hookrightarrow D$. Usando esto se verifica fácilmente que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, hook] & D \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado si y sólo si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, hook] & B \cup C \end{tikzcd}$$

lo es. Siendo esto equivalente, en virtud de la Proposición 3.32-4, a $A \equiv B \cap C$. $\square$

Definición 3.34. Un sistema de inclusiones I sobre un topos elemental $\mathscr{E}$ es **estructural** (denotado por DSSI[3]) si satisface las condiciones siguientes

[3] Por su nombre original Directed Structural System of Inclusions

(ssi1) Para cada para de morfismos paralelos $f, g : A \to B$, el igualador especificado $E \rightarrowtail A$ es una inclusión.

(ssi2) Para todas las inclusiones $i : A' \hookrightarrow A$ y $j : B' \hookrightarrow B$, el producto especificado $i \times j : A' \times B' \rightarrowtail A \times B$ es una inclusión.

(ssi3) Para cada objeto A, el monomorfismo pertenencia $\ni \rightarrowtail P(A) \times A$ es una inclusión.

(ssi4) Para cada inclusión $i : A' \hookrightarrow A$, el morfismo imagen directa $P_i : P(A') \rightarrowtail P(A)$ es una inclusión.

Lema 3.35. *Sea I un sistema dirigido de inclusiones sobre un topos elemental $\mathscr{E}$, que satisface la propiedad (ssi4). Entonces es posible respectificar la estructura sobre $\mathscr{E}$ de forma que I es un DSSI respecto a la nueva estructura.*

Demostración. Dado un par de morfismos parelelos $f, g : A \to B$ y $e : E \rightarrowtail A$ el igualador originalmente especificado, seleccionaremos entonces a la inclusión representativa de e, $A_e \hookrightarrow A$ como nuevo igualador lo cual satisface (ssi1).

Para satisfacer (ssi2) se definirá un nuevo producto $A \times' B$ definido a partir del original $A \times B$, de la siguiente forma: Sea

$$kpr_X = X \times X \to P^2(X) \text{ definido por } (x, y) \mapsto \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Es fácil verificar que kpr_X define una transformación natural, así que para los objetos A y B, con inclusiones $i : A \hookrightarrow A \cup B$ y $j : B \hookrightarrow A \cup B$, se tiene el monomorfismo

$$m_{AB} = \mathrm{kpr}_{A \cup B} \circ i \times j : A \times B \rightarrowtail (A \cup B) \times (A \cup B) \rightarrowtail P^2(A \cup B).$$

Entonces por (si3) existe una inclusión que representa al monomorfimo m_{AB}. Tomemos a $A \times' B$ como el dominio de tal representación, digamos, $p_{AB} : A \times' B \hookrightarrow P^2(A \cup B)$. Entonces existe un único isomorfismo

$$i_{AB} : A \times' B \to A \times B$$

tal que $p_{AB} = m_{AB} \circ i_{AB}$. Definamos entonces las proyecciones de este nuevo producto como $\pi'_i = \pi_i \circ i_{AB}$ para $i \in \{1, 2\}$. Así $\pi'_1 : A \times' B \to A$ y

$\pi'_2 : A \times' B \to B$ y dado que i_{AB} es un isomorfismo $(A \times' B, \pi'_1, \pi'_2)$ es un producto en $\mathscr{E}$. Obsérvemos que si tomamos dos morfismos, $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ existe un único morfismo que denotaremos por $f \times' g$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times' B \arrow[r, "i_{AB}"] \arrow[d, "f \times' g"'] & A \times B \arrow[d, "f \times g"] \\ A' \times B' \arrow[r, "i_{A'B'}"] & A' \times B' \end{tikzcd}$$

Se probará entonces que se cumple (ssi2). Supongamos que f y g son inclusiones. Entonces $f : A \hookrightarrow A'$ y $g : B \hookrightarrow B'$, además existen inclusiones $A' \hookrightarrow A' \cup B'$ y $B' \hookrightarrow A' \cup B'$ de modo que existe una inclusión $k : A \cup B \hookrightarrow A' \cup B'$.

Entonces se tienen los siguientes cuadrados conmutativos.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "f"'] & A \cup B \arrow[d, hook, "k"] \\ A' \arrow[r, hook, "i'"] & A' \cup B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "g"'] & A \cup B \arrow[d, hook, "k"] \\ B' \arrow[r, hook, "j'"] & A' \cup B' \end{tikzcd}$$

cuyo producto da lugar al cuadrado central del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times' B \arrow[r, "i_{AB}"] \arrow[d, "f \times' g"'] \arrow[rrr, bend left, "p_{AB}"] & A \times B \arrow[r, "i \times j"] \arrow[d, "f \times g"] & (A \cup B) \times (A \cup B) \arrow[r, "kpr_{A \cup B}"] \arrow[d, "k \times k"] & P^2(A \cup B) \arrow[d, "P^2(k)"] \\ A' \times B' \arrow[r, "i_{A'B'}"] \arrow[rrr, bend right, "p_{A'B'}"'] & A' \times B' \arrow[r, "i' \times j'"] & (A' \cup B') \times (A' \cup B') \arrow[r, "kpr_{A' \cup B'}"] & P^2(A' \cup B') \end{tikzcd}$$

El cuadrado izquierdo conmuta por la definición del nuevo producto $\times'$ y el derecho por la naturalidad de kpr. De este diagrama se deduce que

$P^2(k) \circ p_{AB} = p_{A'B'} \circ (f \times' g)$. Pero p_{AB} y $p_{A'B'}$ son inclusiones y por (ssi4) también $P^2(k)$ lo es. Por tanto $f \times' g$ es una inclusión por (si4).

Para reespecificar la estructura de objetos potencia en $\mathscr{E}$ consistente con el nuevo producto $\times'$ consideremos a la inclusión $\ni'_A \hookrightarrow P(A) \times' A$ representativa del monomorfismo

$$\ni_A \rightarrowtail P(A) \times A \rightarrowtail P(A) \times' A$$

donde el segundo morfismo es $i^{-1}_{P(A)A}$. Así se satisface (ssi3). Observemos finalmente que con esta reedefinición del morfismo pertenencia no se afecta la acción del funtor potencía por lo que también se cumple (ssi4).

□

Proposición 3.36. Sea I un DSSI sobre un topos elemental $\mathscr{E}$. Entonces:

1. $(A \times B) \cap (A' \times B') \equiv (A \cap A') \times (B \cap B')$
2. $P(A) \cap P(B) \equiv P(A \cap B)$.

Demostración. Para 1, como los siguientes cuadrados son productos fibrados por la Proposición 3.32-4.

$$\begin{tikzcd} A \cap A' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ A' \arrow[r, hook] & A \cup A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \cap B' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ B' \arrow[r, hook] & B \cup B' \end{tikzcd}$$

El producto de ambos es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \cap (A' \times B') \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \times B \arrow[d, hook] \\ A' \times B' \arrow[r, hook] & (A \cup A') \times (B \cup B') \end{tikzcd}$$

Entonces por el Corolario 3.33, $(A \times B) \cap (A' \times B') \equiv (A \cap A') \times (B \cap B')$.

Para 2, usaremos la Proposición 3.32-4 y la propiedad (ssi4). Dado que el funtor potencia preserva productos fibrados de monomorfismos se tiene que el siguiente cuadrado es producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
P(A\cap B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & P(A) \arrow[d, hook] \\
P(B) \arrow[r, hook] & P(A\cup B)
\end{tikzcd}$$

Y aplicando nuevamente el Corolario 3.33 se sigue que $PA\cap PB \equiv P(A\cap B)$. □

Notemos que en un topos con dssi, si la imagen de un morfismo $\langle s,t\rangle : X \to PA\times A$ está incluida en $\ni_A$, es decir, $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_A$, entonces $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_A \hookrightarrow PA\times A$ es una inclusión, pero tomando la factorización epimorfismo-inclusión de $\langle s,t\rangle$,

$$\langle s,t\rangle : X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow PA\times A$$

La condición de unicidad de inclusiones garantiza que la inclusión en la factorización de $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle$ es justamente $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_A \hookrightarrow PA\times A$ lo cual resulta en la factorización del morfismo $\langle s,t\rangle$ a través de $\ni_A \hookrightarrow PA\times A$. Resumimos lo anterior en la siguiente observación.

Observación 3.37. En un topos elemental con DSSI, un morfismo $\langle s,t\rangle : X \to PA\times A$ se factoriza a través de $\ni_A \hookrightarrow PA\times A$ si y sólo si $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_A$. Más aún, si $i : A \hookrightarrow B$, entonces $Pi\times i : A \hookrightarrow PB\times B$ y por tanto $\ni_A \hookrightarrow \ni_B$.

Proposición 3.38. Sea I un DSSI sobre un topos elemental $\mathscr{E}$. Supongamos que $\langle s,t\rangle : X \to PA\times A$ se factoriza a través de $\ni_A \hookrightarrow PA\times A$ y que $\mathrm{Im}(s) \hookrightarrow P(A\cap B)$. Entonces $\mathrm{Im}(t) \hookrightarrow A\cap B$ y $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_{A\cap B}$.

Demostración. Dado $\langle s,t\rangle : X \to PA\times A$ donde $\mathrm{Im}(s) \hookrightarrow PB$ se tiene evidentemente, que $\mathrm{Im}(s) \hookrightarrow PA$. Así que por la Proposición 3.36-2 $\mathrm{Im}(s) \hookrightarrow P(A\cap B)$. Factorizemos a $\langle s,t\rangle$ como la composición de los morfismos inferiores e izquierdo del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed] \arrow[dd, "\langle e_s, t\rangle"'] & \ni_{A\cap B} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\bullet"] & \ni_A \arrow[dd, hook] \\
 & P(A\cap B)\times(A\cap B) \arrow[d, hook] & \\
\mathrm{Im}(s)\times A \arrow[r, hook] & P(A\cap B)\times A \arrow[r, hook] & PA\times A
\end{tikzcd}$$

El rectángulo de la derecha es un producto fibrado, porque la inclusión $P(A\cap B)\times A \hookrightarrow PA\times A$ se obtuvo como $P(i)\times 1_A$, donde $i : A\cap B \hookrightarrow A$. Entonces supongamos que $\langle s,t\rangle$ se factoriza a través de $\ni_A\hookrightarrow PA\times A$. Entonces por la propiedad de los productos fibrados existe un único morfismo $X \to \ni_{A\cap B}$. Así que por la descomposición minimal se sigue que $\mathrm{Im}\langle s,t\rangle \hookrightarrow \ni_{A\cap B}$. Más aún, como el cuadrado de la izquierda es conmutativo también $\mathrm{Im}(t) \hookrightarrow A\cap B$. $\square$

3.8 Interpretando BIST en un topos con DSSI

Se dará una interpretación del lenguaje de primer orden expuesto anteriormente dentro de un topos con DSSI. Sea $\mathscr{E}$ un topos con un sistema dirigido estructurado de inclusiones I. La interpretación es similar a la semántica de Kripke-Joyal para el lenguaje de Mitchell-Bénanou.

Interpretaremos a una fórmula $\phi(x_1,\dots,x_k)$ (con a lo más $x_1,\dots,x_k$ libres) relativo a lo siguiente: un objeto X de $\mathscr{E}$ llamado “estado de definición” y un “X-ambiente” ρ que envía a cada variable libre $x \in \{x_1,\dots,x_k\}$ a un morfismo $p_x : X \to A_x$ en $\mathscr{E}$. Convendremos en usar la siguiente notación:

- Para cada p_x escribiremos a la representación epimorfismo-inclusión como $X \overset{e_x}{\twoheadrightarrow} I_x \overset{i_x}{\hookrightarrow} A_x$
- Dado un morfismo $t : Y \to X$, por $\rho\circ t$ nos referiremos al Y-ambiente que envía a cada x a $\rho_x \circ t$

- Dada una colección de morfismos $A_x \to B_x$ para cada variable libre, por $b \circ \rho$ nos referiremos al morfismo qu envía x a $b_x \circ \rho_x$
- Dada una variable $x \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$, y un morfismo $a : X \to A_x$, por $\rho[a/x]$ nos referiremos al ambiente que coincide con ρ sobre $\{x_1, \ldots, x_k\}$ y que envía x a a.

Escribiremos $X \Vdash_\rho \phi$ para la relación de "forzamiento" definido inductivamente por los siguientes casos:

Relación	Definición
$X \Vdash_\rho S(x)$	Existe B y $I_x \hookrightarrow PB$
$X \Vdash_\rho x = y$	$i_x \circ \rho_x = i_y \circ \rho_y$ donde i_x e i_y son las inclusiones $i_x : A_x \hookrightarrow A_x \cup A_y$ y $i_y : A_y \hookrightarrow A_x \cup A_y$
$X \Vdash_\rho x \in y$	Existen inclusiones $i : I_x \hookrightarrow B$ y $j : I_y \hookrightarrow PB$ tales que $\langle j \circ e_y, i \circ e_x \rangle : X \to PB \times B$ se factoriza a través de $\ni_B$
$X \Vdash_\rho \bot$	X es un objeto inicial
$X \Vdash_\rho \phi \wedge \psi$	$X \Vdash_\rho \phi$ y $X \Vdash_\rho \psi$
$X \Vdash_\rho \phi \vee \psi$	Existen morfismos conjuntamente epimorfos $s : Y \to X$ y $t : Z \to X$ tales que $Y \Vdash_{\rho\circ s} \phi$ y $Z \Vdash_{\rho\circ t} \psi$
$X \Vdash_\rho \phi \to \psi$	Para cada $t : Y \to X$, $Y \Vdash_{\rho\circ t} \phi$ implica $Y \Vdash_{\rho\circ t} \psi$
$X \Vdash_\rho \forall x.\phi$	Para cada $t : Y \to X$ y $a : Y \to A$, $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[a/x]} \phi$
$X \Vdash_\rho \exists x.\phi$	Existe un epimorfismo $t : Y \to X$ y un morfismo $a : Y \to A$ tal que $Y \Vdash_{(p\circ t)[a/x]} \phi$

A continuación se establecen resultados esenciales para el tratamiento de estas relaciones

Lema 3.39. *Para cada $t : Y \to X$, si $X \Vdash_\rho \phi$ entonces $Y \Vdash_{\rho\circ t} \phi$.*

Demostración. Se procederá por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

- Si ϕ es atómica
  - Si ϕ es $S(x)$, entonces por hipótesis existe un objeto B tal que $I_x \hookrightarrow PB$. Recordando que el morfismo asociado a x

es $p_x \circ t$, tomemos I'_x como la imagen bajo la factorización epimorfismo-inclusión de $p_x \circ t$, luego como

$$p_x \circ t : Y \xrightarrow{t} X \overset{e_x}{\twoheadrightarrow} I_x \overset{i_x}{\hookrightarrow} A_x$$

es una factorización de $p_x \circ t$ donde i_x es un monomorfismo se sigue que existe una inclusión $j : I'_x \hookrightarrow I$ y por tanto $I'_x \hookrightarrow I_x \hookrightarrow PB$ garantiza $Y \Vdash_{p_x \circ t} S(x.)$

- Si ϕ es $x = y$, sean $i_x : A_x \to A_x \cup A_y$ e $i_y : A_y \to A_x \cup A_y$ los morfismos canónicos. Por hipótesis $i_x \circ \rho_x = i_y \circ \rho_y$ pero entonces $i_x \circ (\rho_x \circ t) = i_y \circ (\rho_y \circ t)$ donde $\rho_x \circ t$ y $\rho_y \circ t$ son los morfismos enviados bajo x por el Y-ambiente $\rho \circ t$. Por tanto $Y \Vdash x = y$.
- Si ϕ es $x \in y$, entonces existen un objeto e inclusiones $i : I_x \hookrightarrow B$ y $j : I_y \hookrightarrow PB$ tales que

$$\langle j \circ e_y, i \circ e_x \rangle : x \to PB \times B$$

se factoriza a través de $\ni_B$. Pero si I'_x e I'_y son las imagenes bajo la factorización epimorfismo-inclusión de $\rho_x \circ t$ y de $\rho_y \circ t$ respectivamente, entonces existen inclusiones $k : I'_x \hookrightarrow I_x$ y $l : I'_y \hookrightarrow I_y$ tales que $i \circ k : I'_x \hookrightarrow B$ y $j \circ l : I'_y \hookrightarrow PB$ donde $j \circ l \circ e'_y = j \circ e_y$ y $i \circ k \circ e'_x = i \circ e_x$. Entonces

$$\langle j \circ l \circ e'_y, i \circ k \circ e'_x \rangle : X \to PB \times B$$

se factoriza a través de $\ni_B$ y por tanto $Y \Vdash_{\rho \circ t} x \in y$.

- Si ϕ es $\perp$. Entonces como $t : Y \to X$ y existe un morfismo $s : X \to Y$ porque X es inicial, se tiene $t \circ s = 1_X$ por únicidad. Entonces $Y \cong X$, pero esto implica que Y es objeto inicial y por tanto $Y \Vdash_{\rho \circ t} \perp$.

▪ Si ϕ es compuesta

- Si ϕ es $\varphi \wedge \psi$, por hipótesis se cumple $X \Vdash_\rho \varphi$ y $X \Vdash_\rho \psi$, y usando la hipótesis inductiva $Y \Vdash_{\rho \circ t} \varphi$ y $Y \Vdash_{\rho \circ t} \psi$. Por tanto $Y \Vdash_{\rho \circ t} \varphi \wedge \psi$.

- Si ϕ es $\varphi \vee \psi$, existen morfismos conjuntamente epimorfos $r : W \to X$ y $s : Z \to X$ tales que $W \Vdash_{\rho \circ r} \varphi$ y $Z \Vdash_{\rho \circ s} \psi$. Consideremos los siguientes productos fibrados

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet\lrcorner", very near start] & W \arrow[d, "r"] \\ Y \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "l"] \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet\lrcorner", very near start] & Z \arrow[d, "s"] \\ Y \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces por hipótesis inductiva $Q \Vdash_{\rho \circ r \circ k} \varphi$ y $R \Vdash_{\rho \circ s \circ l} \psi$, pero como $r \circ k = t \circ m$ y $s \circ l = t \circ n$ entonces $Q \Vdash_{\rho \circ t \circ m} \varphi$ y $R \Vdash_{\rho \circ t \circ n} \psi$. Además como m y n se obtuvieron a través de productos fibrados, el siguiente diagrama también lo es

$$\begin{tikzcd} Q+R \arrow[r] \arrow[d, "{[m,n]}"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet\lrcorner", very near start] & W+Z \arrow[d, "{[r,s]}"] \\ Y \arrow[r, "t"'] & X \end{tikzcd}$$

Pero como r y s con conjuntamente epimorfos $[r,s]$ es un epimorfismo y como estos se preservan bajo productos fibrados, $[m,n]$ también es epimorfismo y por tanto $m : Q \to Y$ y $n : R \to Y$ son conjuntamente epimorfos, lo que prueba que $Y \Vdash_{\rho \circ t} \varphi \vee \psi$.

- Si ϕ es $\varphi \to \psi$, sea $s : Z \to Y$, entonces $t \circ s : Z \to X$ y por hipótesis, $Z \Vdash_{\rho \circ t \circ s} \varphi$ implica $Z \Vdash_{\rho \circ t \circ s} \psi$. Por tanto $Y \Vdash_{\rho \circ t} \varphi \to \psi$.

- Si ϕ es $\forall x.\psi$, sea $s : Z \to Y$ y $a : Z \to A$. Como $t \circ s : Z \to X$ por hipótesis se sigue que $Z \Vdash_{(\rho \circ t \circ s)[a/x]} \psi$. Por tanto $Y \Vdash_{\rho \circ t} \psi$.

- Si ϕ es $\exists x.\psi$, entonces existe un epimorfismo $s : W \to X$ y un morfismo $a : W \to A$ tal que $W \Vdash_{(\rho \circ s)[a/x]} \psi$, entonces construyendo el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner" very near start] & W \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

se tiene por hipótesis inductiva que $Q \Vdash_{(\rho\circ s\circ l)[a\circ l/x]} \psi$, pero esto es equivalente a decir que $Q \Vdash_{(\rho\circ t\circ k)[a\circ l/x]} \psi$, donde $k : Q \to Y$ es un epimorfismo porque en todo topos los epimorfismos se preservan bajo productos fibrados, además $a \circ l : Q \to A$ y por tanto $Y \Vdash_{\rho\circ t} \exists x.\psi$.

□

Lema 3.40. *Para toda familia finita de morfismos conjuntamente epimorfos $t_1 : Y_1 \to X, \ldots, t_k : Y_k \to X$, si $Y_i \Vdash_{\rho\circ t_i} \phi$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ entonces $X \Vdash_\rho \phi$.*

Demostración. Primero observemos que para cada variable $x \in \mathrm{dom}(p)$, el morfismo $p_x \circ t_i : Y_i \to A_x$ se factoriza como

$$Y_i \overset{e'_{x,i}}{\twoheadrightarrow} I'_{x,i} \hookrightarrow A_x.$$

Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_1 + \cdots + Y_k \arrow[r, two heads, "e'_{x,1} + \cdots + e'_{x,k}"] \arrow[d, two heads, "t_1 + \cdots + t_k"'] & I'_{x,1} + \cdots + I'_{x,k} \arrow[r, two heads] & I'_{x,1} \cup \cdots \cup I'_{x,k} \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, two heads, "e_x"] & I_x \arrow[r, hook, "i_x"] & A_x
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo de la izquierda es epimorfismo porque los t_i son conjuntamente epimorfos. Así por la únicidad de la factorización $I_x \equiv I'_{x,1} \cup \cdots \cup I'_{x,k}$.

Entonces se hará inducción sobre la complejidad de la fórmula ϕ.

- Si ϕ es atómica

- Si ϕ es $S(x)$ entonces para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existen B'_i tales que $I'_{x,i} \hookrightarrow PB'_i$, como $I_x \equiv I'_{x,1} \cup \cdots \cup I'_{x,k}$ se sigue inmediatamente que $I_x \hookrightarrow PB'_1 \cup \cdots \cup PB'_k$ y es fácil ver que $PB'_1 \cup \cdots \cup PB'_k \hookrightarrow P(B'_1 \cup \cdots \cup B'_k)$. Así, haciendo $B = B'_1 \cup \cdots \cup B'_k$, se tiene $I_x \hookrightarrow PB$ como se deseaba.

- Si ϕ es $x = y$, entonces por hipótesis $i_x \circ (p_x \circ t_i) = i_y \circ (p_y \circ t_i)$ que es $(i_x \circ p_x) \circ t_i = (i_y \circ p_y) \circ t_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, como los morfismos t_i son conjuntamente epimorfos se sigue que $i_x \circ p_x = i_y \circ p_y$ y por tanto $X \Vdash_\rho x = y$.

- Si ϕ es $x \in y$, por hipótesis para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existen B'_i e inclusiones $i'_i : I'_{x,i} \hookrightarrow B'_i$ y $j'_i : I'_{y,i} \hookrightarrow PB'_i$ tales que $\langle j'_i \circ e'_{y,i}, i'_i \circ e'_{x,i} \rangle$ se factoriza a través de $\ni_{B'_i}$. Como $I_x \hookrightarrow B'_1 \cup \cdots \cup B'_k$ y $I_y \hookrightarrow PB'_1 \cup \cdots \cup PB'_k \hookrightarrow P(B'_1 \cup \cdots \cup B'_k)$. Entonces definamos $B = B'_1 \cup \cdots \cup B'_k$. Las inclusiones anteriores son $i : I_x \hookrightarrow B$ y $j : I_y \hookrightarrow PB$ y se debe demostrar que $\langle j \circ e_y, i \circ e_x \rangle$ se factoriza a través de $\ni_B$. Se razonará internamente, tomando $a : X$ se debe demostrar que $i(e_x(a)) \in j(e_y(a))$. Como los t_i son conjuntamente epimorfos existe un índice i y un $b : Y_i$ tal que $a = t_i(b)$. Por hipótesis $i'_i(e'_{x,i}(b)) \in j'_i(e'_{y,i}(b))$ y por la definición de $e'_{x,i}$ y de $e'_{y,i}$, las inclusiones $B'_i \hookrightarrow B$ envían $i'_i(e'_{x,i}(b))$ a $i(e_x(t_i(b))) = i(e_x(a))$, y la inclusión $PB_i \hookrightarrow PB$ envía $j'_i(e'_{y,i}(b))$ a $j(e_y(t_i(b))) = j(e_y(a))$. También $\ni_{B'_i} \hookrightarrow \ni_B$, por la Observación 3.37. Por tanto $i(e_x(a)) \in j(e_y(a))$ y $X \Vdash_\rho x \in y$.

- Si ϕ es $\perp$, tomando $a : X$ existe un índice i y una variable $b : Y_i$ tal que $a = t_i(b)$, pero por hipótesis $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \perp$ lo cual implica que Y_i es inicial y es inmediato que $a \in X \vdash \perp$. Por tanto X es inicial.

- Si ϕ es compuesta
  - Si ϕ es $\varphi \wedge \psi$, como para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \varphi \wedge \psi$, se sigue por definición que $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \varphi$ y $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \psi$. Entonces por hipótesis inductiva $X \Vdash_\rho \varphi$ y $X \Vdash_\rho \psi$ que implica justamente $X \Vdash_\rho \varphi \wedge \psi$.

- Si ϕ es $\varphi \vee \psi$, por hipótesis para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \varphi \vee \psi$ pero esto implica que existen morfismos $r_i : W_i \to Y_i$ y $s_i : Z_i \to Y_i$ conjuntamente epimorfos tales que $W_i \Vdash_{\rho \circ t_i \circ r_i} \varphi$ y $Z_i \Vdash_{\rho \circ t_i \circ s_i} \psi$. Entonces los morfismos $t_i \circ r_i : W_i \to X$ y $t_i \circ s_i : Z_i \to X$ se factorizan a través de $W_1 + \cdots + W_k$ y $Z_1 + \cdots + Z_k$ como lo muestran los diagramas

$$\begin{tikzcd} W_1 + \cdots + W_k \arrow[r, "m"] & X \\ W_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "t_i \circ r_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_1 + \cdots + Z_k \arrow[r, "n"] & X \\ Z_i \arrow[u, "l_i"] \arrow[ur, "t_i \circ s_i"'] & \end{tikzcd}$$

  donde los j_i y l_i son las inyecciones canónicas. Entonces como $W_i \Vdash_{\rho \circ t_i \circ r_i} \varphi$ y $Z_i \Vdash_{\rho \circ t_i \circ s_i} \psi$ se sigue que $W_i \Vdash_{\rho m \circ j_i} \varphi$ y $Z_i \Vdash_{\rho n \circ j_i} \psi$. Pero los j_i son conjuntamente epimorfos, pues $j_1 + \cdots + j_k : W_1 + \cdots + W_k \to W_1 + \cdots + W_k$ resulta ser la identidad en $W_1 + \cdots + W_k$. Entonces apicando la hipótesis inductiva se sigue que $W_1 + \cdots + W_k \vdash_{\rho \circ m} \varphi$ y similarmente $Z_1 + \cdots + Z_k \Vdash_{\rho \circ n} \psi$. Probemos entonces que m y n son conjuntamente epimorfos: Si $f \circ m = g \circ m$ y $f \circ n = g \circ n$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, k\}$

$$f \circ m \circ j_i = g \circ m \circ j_i \quad \text{y} \quad f \circ n \circ l_i = g \circ n \circ l_i$$

  lo que implica $f \circ t_i \circ r_i = g \circ t_i \circ r_i$ y $f \circ t_i \circ s_i = g \circ t_i \circ s_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, pero r_i y s_i son conjuntamente epimorfos, así que $f \circ r_i = g \circ t_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, lo que finalmente implica que $f = g$. Por tanto $X \Vdash_\rho \varphi \vee \psi$.

- Si ϕ es $\varphi \to \psi$, por hipótesis $Y_i \Vdash_{\rho \circ t_i} \varphi \to \psi$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Si $s : W \to X$ y $W \Vdash_{\rho \circ s} \varphi$ entonces consideremos los morfismos que conforman el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} Q_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "l_i"] & Y_i \arrow[d, "t_i"] \\ W \arrow[r, "s"'] & X \end{tikzcd}$$

  Luego, como $W \Vdash_{\rho \circ s} \varphi$ se tiene también $Q_i \Vdash_{\rho \circ s \circ l_i} \varphi$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Así $Q_i \Vdash_{\rho \circ t_i \circ m_i} \varphi$ y por hipótesis inductiva

$Q_i \Vdash_{\rho\circ t_i\circ m_i} \psi$ pero esto es $Q_i \Vdash_{\rho\circ s\circ l_i} \psi$. Ahora como los t_i son conjuntamente epimorfos y los l_i se obtuvieron por producto fibrado de ellos, se tiene que los l_i son también conjuntamente epimorfos y por hipótesis inductiva $W \Vdash_{\rho\circ s} \psi$. Por tanto $X \Vdash_\rho \varphi \to \psi$.

- Si ϕ es $\forall x.\psi$, sea $s : W \to X$ y $a : Z \to A$ y consideremos el siguiente producto fibrado para cada $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\begin{tikzcd} Q_i \arrow[r, "l_i"] \arrow[d, "r_i"'] & Y_i \arrow[d, "t_i"] \\ Z \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

Como por hipótesis $Y_i \Vdash_{\rho\circ t_i} \forall x.\psi$, entonces $Q_i \Vdash_{\rho\circ t_i\circ l_i} \forall x.\psi$ pero esto es equivalente a $Q_i \Vdash_{\rho\circ s\circ r_i} \forall x.\psi$ y como $a\circ r_i : Q_i \to A$ se cumple $Q_i \Vdash_{(\rho\circ s\circ r_i)[a\circ r_i/x]}$Como los r_i se obtienen a partir de los t_i por productos fibrados se sigue que los r_i son conjuntamente epimorfos y por hipótesis inductiva $W \Vdash_{(\rho\circ s)[a/x]\psi}$. Por tanto $X \Vdash_\rho \forall x.\psi$.

- Si ϕ es $\exists x.\psi$ como por hipótesis $Y_i \Vdash_{\rho\circ t_i} \exists x.\psi$ entonces existen $s_i : Z_i \twoheadrightarrow Y_i$ y $a_i : Z_i \to A$ tal que $Z_i \Vdash_{(\rho\circ t_i\circ s_i)[a_i/x]} \psi$. Luego $s_1 + \cdots + s_k : Z_1 + \cdots + Z_k \twoheadrightarrow Y_1 + \cdots + Y_k$ es epimorfismo y también $t_1 + \cdots + t_k : Y_1 + \cdots + Y_k \twoheadrightarrow X$, porque los t_i son conjuntamente epimorfos, así $(t_1 \cdots + t_k) \circ (s_1 + \cdots + s_k)$ es un epimorfismo, llamemoslo m, de esta forma se cumple el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} Z_1 + \cdots + Z_k \arrow[r, two heads, "m"] & X \\ Z_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "t_i\circ s_i"'] & \end{tikzcd}$$

Pero como $Z_i \Vdash_{(\rho\circ t_i\circ s_i)[a_i/x]} \psi$, entonces $Z_i \Vdash_{(\rho\circ m\circ j_i)[a_i/x]} \psi$. Pero los j_i también son conjuntamente epimorfismos, por ser las inyecciones canónicas, así por hipótesis inductiva $Z_1+\cdots+Z_k \Vdash_{(\rho\circ m)[a_1+\cdots+a_k/x]} \psi$. Por tanto $X \Vdash_\rho \exists x.\psi$.

□

Lema 3.41. *Si para cada variable libre x de ϕ, existen inclusiones $k_x : A_x \hookrightarrow B_x$, entonces $\vdash_\rho \psi$ si y sólo si $X \vdash_{k\circ\rho} \psi$.*

Demostración. Hagamos la siguiente observación: Si $X \overset{e_x}{\twoheadrightarrow} I_x \overset{i_x}{\hookrightarrow} A_x$ es la factorización epimorfismo-inclusión indicada para p_x, podemos factorizar a $i \circ p_x$ como

$$X \overset{e_x}{\twoheadrightarrow} I_x \overset{j_x\circ i_x}{\hookrightarrow} B_x$$

de forma que podemos, sin pérdida de generalidad, asumir que la imagen bajo la factorización epimorfismo-inclusión de ambos morfismos es el mismo I_x.

Entonces procedamos por inducción.

- Si ψ es atómica
  - Si ψ es $S(x)$ la proposición es inmediata en virtud de la observación.
  - Si ψ es $x = y$. Sean $i_x : A_x \hookrightarrow A_x \cup A_y$, $i_y : A_y \hookrightarrow A_x \cup A_y$, $j_x : B_x \hookrightarrow B_x \cup B_y$ y $j_y : B_y \hookrightarrow B_x \cup B_y$ las inclusiones canónicas. Obsérvemos que

    $$j_x \circ k_x : A_x \hookrightarrow B_x \cup B_y \quad \text{y} \quad j_y \circ k_y : A_y \hookrightarrow B_x \cup B_y$$

    son inclusiones que garantizan la existencia de una inclusión $l : A_x \cup A_y \hookrightarrow B_x \cup B_y$. Donde se cumple

    $$\begin{aligned} i_x \circ \rho_x = i_y \circ \rho_y &\qquad \text{sii} \\ l \circ i_x \circ \rho_x = l \circ i_y \circ \rho_y &\qquad \text{sii} \\ j_x \circ k_x \circ \rho_x = j_y \circ k_y \circ \rho_y &\qquad \text{sii} \\ j_x \circ (k \circ \rho)_x = j_y \circ (k \circ \rho)_y & \end{aligned}$$

    de donde es claro que $X \Vdash_\rho x = y$ si y sólo si $X \Vdash_{k\circ\rho} x = y$.
  - Si ψ es $x \in y$, la conclusión se sigue inmediatamente por la observación inicial.

- Si ψ es $\perp$, se sigue inmediatamente que $X \Vdash_\rho \perp$ si y sólo si $X \Vdash_{k\circ\rho} \perp$.

- Si ϕ es compuesta
  - Si ϕ es $\varphi \wedge \psi$. Entonces $X \Vdash_\rho \varphi$ y $X \Vdash_\rho \psi$ si y sólo si $X \Vdash_{k\circ\rho} \varphi$ y $X \Vdash_{k\circ\rho} \psi$, por hipótesis inductiva, pero esto ocurre si y sólo si $X \Vdash_{k\circ\rho} \varphi \wedge \psi$.
  - Si ϕ es $\varphi \vee \psi$. Entonces $X \Vdash_\rho \varphi \vee \psi$ si y sólo si existen $s : Y \to X$ y $t : Z \to X$ morfismos conjuntamente epimorfos tales que $Y \Vdash_{\rho\circ s} \varphi$ y $Z \Vdash_{\rho\circ t} \psi$, pero por hipótesis inductiva esto ocurre si y sólo si $\Vdash_{k\circ\rho\circ s} \varphi$ y $Z \Vdash_{k\circ\rho\circ t} \psi$ que es justamente decir que $X \Vdash_{k\circ\rho} \varphi \vee \psi$.
  - Si ϕ es $\varphi \to \psi$. Entonces $X \Vdash_\rho \varphi \to \psi$ si y sólo si para cada $t : Y \to X$, $Y \Vdash_{\rho\circ t} \varphi$ implica que $Y \Vdash_{\rho\circ t} \psi$. Pero para cada $t : Y \to X$ se cumple por hipótesis inductiva que $Y \Vdash_{\rho\circ t} \varphi$ si y sólo si $Y \Vdash_{k\circ\rho\circ t} \varphi$ y también $Y \Vdash_{\rho\circ t} \psi$ si y sólo si $Y \Vdash_{k\circ\rho\circ t} \psi$. De donde se sigue facilmente el resultado.
  - Si ϕ es $\forall x.\psi$. Se tiene $X \Vdash_\rho \forall x.\psi$ si y sólo si para cada $t : Y \to X$ y $a : Y \to A$, se cumple $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[a/x]} \psi$, pero esto último ocurre si y sólo si $Y \Vdash_{(k\circ\rho\circ t)[a/x]} \psi$. Por hipótesis inductiva.
  - Si ϕ es $\exists x.\psi$. Se tiene $X \Vdash_\rho \psi$ si y sólo si existe un epimorfismo $t : Y \to X$ y un morfimos $a : Y \to A$ tal que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[a/x]} \psi$ pero por hipótesis inductiva esto ocurre si y sólo si

    $$Y \Vdash_{(k\circ\rho\circ t)[a/x]\psi} .$$

    Obsérvese que tanto en este caso como en el anterior el intercambio $[a/x]$ no se ve afectado, pues x no es libre en ψ.

$\square$

Lema 3.42. *Si $X \Vdash_\rho x \in y$ y existe una inclusión $j : I_y \hookrightarrow PB$, entonces existe una inclusión $i : I_x \hookrightarrow B$ tal que $\langle j \circ e_y, i \circ e_x\rangle : X \to PB \times B$ se factoriza a través de $\ni_B$.*

Demostración. Supongamos que $X \Vdash_\rho x \in y$. Entonces por definición, existen $i' : I_x \hookrightarrow A$ y $j' : I_y \hookrightarrow PA$ tales que $\langle j' \circ e_y, i' \circ e_x\rangle : X \to PA \times A$

se factoriza a través de $\ni_A$. Supongamos que $j : I_y \hookrightarrow PB$. Aplicando la Proposición 3.38, $\mathrm{Im}(i' \circ e_x) \hookrightarrow A \cap B$, y $\mathrm{Im}(j' \circ e_y, i' \circ e_x) \hookrightarrow \ni_{A\cap B}$, donde $\mathrm{Im}(i' \circ e_x)$ es justamente I_x. También es claro que $\mathrm{Im}\langle j' \circ e_y, i' \circ e_x\rangle \equiv \mathrm{Im}\langle j \circ e_y, i \circ e_x\rangle$, por lo que $\mathrm{Im}\langle j \circ e_y, i \circ e_x\rangle \hookrightarrow \ni_{A\cap B} \hookrightarrow \ni_B$. Por tanto $\langle j \circ e_y,, i \circ e_x\rangle$ se factoriza a través de $\ni_B$. □

Proposición 3.43. Si $k : I_z \hookrightarrow PC$, entonces son equivalentes

1. $X \Vdash_\rho \forall x \in z.\phi$
2. Para cada $t' : Y' \to X$ y $s' : Y' \to C$, si $\langle k \circ e_z \circ t', s'\rangle : Y' \to PC \times C$ se factoriza a través de $\ni_C$, entonces $Y \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} \phi$
3. $Y \Vdash_{(\rho \circ t)[s/x]} \phi$, donde $\phi = \{(c,a) : C \times X \,|\, c \in k(e_z(a))\}$ y $t : Y \to X$, $s : Y \to C$ son las proyecciones.

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Sean $t' : Y' \to X$ y $s' : Y' \to C$ tales que $\langle k \circ e_z \circ t', s'\rangle$ se factoriza a través de $\ni_C$. Por hipótesis $X \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} x \in z \Rightarrow \phi$, es decir $X \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} x \in z$ implica $X \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} \phi$. Obsérvemos que como $s' \circ t'$ tiene la factorización epimorfismo-inclusión

$$s' \circ t' : Y' \overset{e'_x \circ t'}{\twoheadrightarrow} I'_x \overset{l}{\hookrightarrow} C$$

Existen inclusiones l, k tales que $\langle k \circ e_z \circ t', l \circ e'_x \circ t'\rangle$ se factoriza a través de $\ni_C$, esto es $X \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} x \in z$ y por hipótesis se sigue $X \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} \phi$ como se deseaba.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $Y = \{(c,a) : C \times A | c \in k(e_z(a))\}$ y $t : Y \to A$, $s : Y \to C$ sus proyecciones. Obsérvemos que para cada $(c,a) \in Y$ se cumple $c \in k(e_z(a))$, es decir, $s[(c,a)] \in k \circ e_z \circ t[(c,a)]$ y entonces $\langle k \circ e_z \circ t, s\rangle$ se factoriza a través de $\ni_C$. Por tanto, aplicando la hipótesis $Y \Vdash_{(\rho \circ t)[s/x]} \phi$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sean $t' : Y' \to X$ y $s' : Y' \to C$ morfismos. Deseamos ver que $Y' \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} x \in z$ implica $Y' \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} \phi$. Entonces supongamos que $Y' \Vdash_{(\rho \circ t')[s'/x]} x \in z$, esto garantiza que el morfismo $\langle k \circ e_z \circ t', s'\rangle$ se factoriza a través de $\ni_C$. Razonando internamente esto significa que para cada $u : Y'$ el elemento $(s'(u), t'(u))$ satisface que $s'(u) \in k \circ e_z(t'(u))$ lo cual garantiza que $(s'(u), t'(u)) \in Y$. Si $r : Y' \to Y$ es la función que envía a cada $u : Y'$ a $(s'(u), t'(u))$ en Y, es fácil ver que $s' = s \circ r$ y $t' = t \circ r$.

De esta forma $Y' \Vdash_{(\rho\circ t\circ r)[s\circ r]} \varphi$ que es justamente $Y' \Vdash_{(\rho\circ t')[s'/x]} \varphi$, como se deseaba. $\square$

Proposición 3.44. $X \Vdash_\rho \exists x \in z.\phi$ si y sólo si existe un epimorfismo $t : Y \twoheadrightarrow X$ y un morfismo $s : Y \to C$ tal que $\langle k \circ e_z \circ t, s\rangle : Y \to PC \times C$ se factoriza a través de $\ni_C$ y $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$.

Demostración. Por definición $X \Vdash_\rho \exists x \in z.\phi$ si y sólo si existe un epimorfismo $t : Y \twoheadrightarrow X$ y un morfismo $s : Y \to C$ tal que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[a/x]} x \in z \wedge \phi$. Pero esto último ocurre si y sólo si $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} x \in z$ y $Y \Vdash_{\rho\circ t} [s/x]\phi$. Lo cuál por definición es equivalente a que el morfismo $\langle k \circ e_z \circ t, s\rangle$ se factorice a través de $\ni_C$ y $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$. $\square$

Proposición 3.45. $X \Vdash_\rho x \subseteq y$ si y sólo si existe un objeto B tal que $i : I_x \hookrightarrow PB$, $j : I_y \hookrightarrow PB$ y $\langle i \circ e_x, j \circ e_y\rangle : X \to PB \times PB$ se factoriza a través de $\subseteq_B \hookrightarrow PB \times PB$.

Proposición 3.46. $X \Vdash_\rho \text{Ƨ}x.\phi$ si y sólo si existen B y $R \hookrightarrow X \times B$ tal que para todos los objetos Y,A y morfismos $t : Y \to X$ y $s : Y \to A$, $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$ si y sólo si $\mathrm{Im}(p) \hookrightarrow R$. Donde $p = \langle t, s\rangle : Y \to X \times A$.

Demostración.

$\to]$ Supongamos que $X \Vdash_\rho \text{Ƨ}x.\phi$, es decir, $X \Vdash_\rho \exists y.(S(y) \wedge \forall x.(x \in y \leftrightarrow \phi))$, donde y no es libre en ϕ. Entonces existen morfismos $t' : Y \to X$ y $s' : Y' \to A'$ tal que $Y' \Vdash_{(\rho\circ t')[s'/y]} S(y)$ y $Y' \Vdash_{(\rho\circ t')[s'/y]} \forall x.(x \in y \leftrightarrow \phi)$. Obsérvese que podemos suponer sin pérdida de generalidad, en virtud del Lema 3.41, que s' es un epimorfismo, y como $Y' \Vdash_{(\rho\circ t')[s'/x]} S(y)$, existe un objeto B y una inclusión $i' : A' \to PB$. Consideremos $R = \{(a, b) : X \times B \mid \exists c : Y' \text{ tal que } t'(c) = a \text{ y } b \in i'(s'(c))\}$.

Sean $t : Y \to X$ y $s : Y \to A$ morfismos arbitrarios. Se desea demostrar que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$ si y sólo si $\mathrm{Im}\langle t, s\rangle \hookrightarrow R$. Nuevamente, por el Lema 3.41, podemos suponer que s es epimorfismo. Si se tiene un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} Y'' \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "r"'] & Y' \arrow[d, "t'"] \\ Y \arrow[r, "t"] & X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Se tienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi \ &\text{sii } Y'' \Vdash_{(\rho\circ t\circ r)[s\circ r/x]} \phi \\ &\text{sii } Y'' \Vdash_{(\rho\circ t'\circ r')[s\circ r/x]} \phi \\ &\text{sii } Y'' \Vdash_{(\rho\circ t'\circ r')[s'\circ r'/y,s\circ r/x]} \phi \quad \text{porque } y \text{ no es libre en } \phi \\ &\text{sii } Y'' \Vdash_{(p\circ t'\circ r')[s'\circ r'/y,s\circ r/x]} x \in y \quad \text{por hipótesis.} \end{aligned}$$

Para ver que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$ implica $\mathrm{Im}\langle t,s\rangle \hookrightarrow R$, construyamos Y', r, r' como en el Diagrama 3.1 y supongamos que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$. Por las equivalencias mostradas anteriormente se sigue $Y'' \Vdash_{(\rho\circ t'\circ r')[s'\circ r'/y,s\circ r/x]} x \in y$. Entonces por la factorización epimorfismo-inclusión de $s'\circ r' : Y'' \to A'$ existe una inclusión $\mathrm{Im}(s'\circ r') \hookrightarrow A'$, por hipótesis $A' \hookrightarrow PB$ y como $Y'' \Vdash_{(\rho\circ t'\circ r')[s'\circ r'/y,s\circ r/x]} x \in y$, aplicando el Lema 3.42, debe existir una inclusión $\mathrm{Im}(s\circ r) \hookrightarrow B$ y $\mathrm{Im}\langle s'\circ r', s\circ r\rangle \hookrightarrow \ni_B$. Sin embargo $A \equiv \mathrm{Im}(s\circ r)$, porque s y r son epimorfismos, de modo que $j : A \hookrightarrow B$ y por tanto $\mathrm{Im}\langle t\circ r, s\circ r\rangle \hookrightarrow X \times B$. Se mostrará que esta inclusión se factoriza a través del subobjeto R razonando internamente en $\mathscr{E}$. Sea $d : Y''$ y tomemos $c = r'(d)$, entonces $t'(c) = t'(r'(d)) = t(r(d))$. Como $\mathrm{Im}\langle s'\circ r', s\circ r\rangle \hookrightarrow \ni_B$ se tiene que $\langle i'\circ s'\circ r', j\circ s\circ r\rangle$ se factoriza a través de $\ni_B$ y de esta forma $j(s(r(d))) \in_B i'(s'(r'(d))) = (i'(s'(c)))$. Lo cuál garantiza que $\mathrm{Im}\langle t\circ r, s\circ r\rangle \hookrightarrow R$ y, como r es epimorfismo, $\mathrm{Im}\langle t,s\rangle \hookrightarrow R$.

Recíprocamente, si $\mathrm{Im}\langle t,s\rangle \hookrightarrow R$, como $R \hookrightarrow X \times B$ y $A \equiv \mathrm{Im}(s)$, existe una inclusión $j : A \hookrightarrow B$. Definamos Y'' como

$$Y'' = \{(c,c') : Y \times Y' \mid t(c) = t'(c') \wedge j(s(c)) \in i'(s'(c'))\}$$

Donde $r : Y'' \to Y$ y $r' : Y'' \to Y'$ son las proyecciones canónicas correspondientes. Es inmediato por la definición de Y'' que $t\circ r = t'\circ r'$. También, como $\mathrm{Im}\langle t,s\rangle \hookrightarrow R$ y de la definición de R, se sigue que r es epimorfismo. Luego, por la definición de Y'' se tiene $Y'' \Vdash_{(\rho\circ t'\circ r')[s'\circ r'/y,s\circ r/x]}$

$x \in y$. Por las equivalencias anteriormente mostradas se tiene entonces que $Y \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$.

$\leftarrow$] Supongamos que existe un objeto B y una inclusión $R \hookrightarrow X \times B$ que satisfacen las proposiciones enunciadas. se demostrará que

$$X \Vdash_{\rho} \exists y. \big(S(y) \wedge \forall x.(x \in y \longleftrightarrow \phi)\big)$$

Definamos $r : X \to PB$ por $r(x) = \{y : B \,|\, (x, y) \in R\}$. Entonces se probará que $X \Vdash_{\rho[r/y]} S(y) \wedge \forall x.(x \in y \longleftrightarrow \phi)$. Dado que r tiene codominio PB es inmediato que $X \Vdash_{\rho[r/y]} S(y)$, de modo que resta ver que $X \Vdash_{\rho[r/y]} \forall x(x \in y \longleftrightarrow \phi)$. Sean $t : Y \to X$ y $s : Y \to A$ dos morfismos donde, por el Lema 3.41 podemos suponer que s es epimorfismo. Obsérvese que $X \Vdash_{(\rho[r/y]\circ t)[s/x]} x \in y$ si y sólo si $X \Vdash_{(\rho\circ t)[s/x]} \phi$, porque y no es libre en ϕ y esta equivalencia ocurre si y sólo si $\mathrm{Im}\langle t, s\rangle \hookrightarrow R$. Por tanto es suficiente ver que $\mathrm{Im}\langle t, s\rangle \hookrightarrow$ si y sólo si $X \Vdash_{(\rho[r/y]\circ t)[s/x]} x \in y$.
Para verificar la implicación, supongamos que $\mathrm{Im}\langle t, s\rangle \hookrightarrow R$. Como $R \hookrightarrow X \times B$ y s es epimorfismo se sigue que $A \equiv \mathrm{Im}(s) \hookrightarrow B$, también por la definición de r, $\mathrm{Im}(r \circ t) \hookrightarrow PB$ y $\langle r \circ t, s\rangle$ se factoriza a través de $\ni_B \hookrightarrow PB \times B$. De esta forma $X \Vdash_{(\rho\circ t)[r\circ t/y, s/x]} x \in y$.
Para el recíproco, supongamos que $X \Vdash_{(\rho[r/y]\circ t)[s/x]} x \in y$. Como $\mathrm{Im}(r \circ t) \hookrightarrow PB$ y s es epimorfismo, se sigue por el Lema 3.42, que existe una inclusión $i : A \equiv \mathrm{Im}(s) \hookrightarrow B$ y $\langle r\circ t, i\circ s\rangle$ se factoriza a través de $R \hookrightarrow X \times B$, esto es $\mathrm{Im}\langle t, i \circ s\rangle \hookrightarrow R$. Así $\mathrm{Im}\langle t, s\rangle \equiv \mathrm{Im}\langle t, i \circ s\rangle \hookrightarrow R$. □

Para cada enunciado φ, escribiremos $(\mathscr{E}, I) \Vdash \varphi$ para expresar que, para todos los objetos X se cumple $X \Vdash \varphi$. Similarmente para una teoría (conjunto de enunciados), se escribirá $(\mathscr{E}, I) \Vdash \mathscr{T}$ para expresar que $(\mathscr{E}, I) \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \mathscr{T}$. Entonces se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.47 (Robustez y Completez para las semanticas de forzamiento)**.** *Para toda teoría $\mathscr{T}$ y todo enunciado ϕ, los siguientes son equivalentes*

1. *$BIST^{-}$+Coll+$\mathscr{T} \vdash \varphi$.*

2. *$(\mathscr{E}, I) \Vdash \phi$ para todo topos $\mathscr{E}$ y DSSI I que satisface $(\mathscr{E}, I) \Vdash \mathscr{T}$.*

La demostración de este teorema se encuentra en [3] y es el resultado principal de ese artículo mostrando que se logró una caracterización exitosa de los topos con DSSI con la teoría de conjuntos intuicionista básica BIST.

Conclusiones

La teoría intuicionista BIST presentada en esta tesis posee propiedades muy interesantes, las cuales se comentarán brevemente: En todo topos elemental la semántica de forzamiento siempre válida el axioma completo de colección lo que garantiza que BIST sea una teoría de conjuntos natural, en el sentido de que sus axiomas estan dados de forma parecida a los de ZFC o NBG. Aunque el axioma de separación no se cumple en general, es posible dar condiciones específicas bajo las cuales este axioma se válida, siendo esto muy importante para poder operar libremente con subconjuntos de un conjunto dado. El teorema de completez para la semántica de forzamiento muestra que la teoría BIST+Coll axiomatiza exactamente las propiedades conjuntistas validas bajo esta semántica. Se prueba en [3] que BIST es una extensión conservativa de la aritmética intuicionista de altos ordenes (HAH por sus siglas en inglés) y que en particular no pude probar la consistencia de HAH por el segundo teorema de incompletitud de Gödel.

Finalmente resta mencionar que la investigación respecto a esta área es nueva y posee aplicaciones inmediatas en lógica categórica y computación teórica.

Bibliografía

[1] Aczel, Peter; Rathjen, Michael. *CST Book draft*, 2010.

[2] Aczel, Peter; Rathjen, Michael. *Notes on constructive set theory*. 2001.

[3] Awodey, Steve, et al. *Relating first-order set theories, toposes and categories of classes*. Annals of Pure and Applied Logic, 2014, vol. 165, no 2, p. 428-502.

[4] Bell, J. L., *Toposes and Local Set Theories, An Introduction*. Oxford Logic Guides, no. 14. Oxford University Press, New York, 1988.

[5] Borceux, Francis. *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*, vol. 50, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. 1994.

[6] Herrlich, Horst; Strecker, George E. *Category theory*. Boston: Allyn and Bacon, 1973.

[7] Lambek, J.; Scott, P. J., *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 7, Cambridge University Press, Reino Unido, 1986.

[8] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 5, Springer, New York, 1998.