BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LOS CONTINUOS ENREJADOS TIENEN n-ÉSIMO HIPERESPACIO ÚNICO

Tesis

que presenta

José Gerardo Ahuatzi Reyes

para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Asesores

Dr. David Herrera Carrasco

Dr. Fernando Macías Romero

H. Puebla de Zaragoza Mayo de 2014

A mis padres:

Leonides y Gerardo.

A mis hermanos:

Diana, Karla y Carlos.

Agradecimientos

A Dios, por ponerme aquí y ahora.

A mis padres, por apoyarme en todos y cada uno de los avatares de mi vida. Por ser mi soporte fundamental, por iniciarme y guiarme siempre en el camino.

A mis hermanos, Diana, Karla y Carlos, por su compañia, por las risas y las peleas en casa. Mis primeros amigos, en todos los sentidos, y los más cercanos. Y a todos los demás en casa.

A mis amigos de la Facultad, esos magníficos seres que he tenido la fortuna de conocer. Aquellos con los que comparto la edad, y la locura y la curiosidad del espíritu científico. Por compartir conmigo un poco de su vida y de sus vivencias. Muy en especial a mis amigos y compañeros de cubo: Vianey, Paco y Luis; y a mi amiga del alma, Zuly.

A mis asesores, David y Fernando, por su apoyo incondicional en esta y otras tantas empresas, por su amistad y por su característico entusiasmo en cada uno de los quehaceres del matemático, del catedrático y del trabajador universitario, y por soportar muchos de mis continuos desplantes.

A la Dra. Patricia Domínguez Soto, al Dr. Raúl Escobedo Conde y al M.C Luis Alberto Guerrero Méndez, por hacer la revisión de este escrito. Muchas gracias por sus correcciones y sugerencias.

Al grupo de Teoría de Continuos y de Topología General, por sus muchos y variados apoyos: académico, económico, entre muchos otros. Y sobre todo, por sus enseñanzas en el abstracto y sinuoso mundo de la Topología. En especial a la Dra. María de Jesús López Toriz, al M. C. Manuel Ibarra Contreras y al Dr. Juan Angoa Amador.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas, por el conocimiento académico al que tan pocos tienen la dicha de acceder;

pero, sobre todo, por la sabiduría acerca del camino del científico en el que hemos decidido andar. Y por el humanista que mantienen vivo en cada unos de sus estudiantes.

Gracias.

Introducción

Este trabajo de tesis se desarrolla mayormente dentro del marco de la Teoría de los Continuos y de sus Hiperespacios. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X, se denota por 2^X al espacio $\{A \subset X : A \text{ es un cerrado de } X\}$ dotado de la topología de Vietoris o, equivalentemente, dotado con la métrica de Hausdorff. Un hiperespacio de X es cualquier subespacio de 2^X.

Una de las cuestiones más fundamentales en el estudio de los hiperespacios de continuos es establecer, dada una clase de hiperespacio $\mathcal{H}$, qué continuos poseen un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ diferente al de cualquier otro continuo, propiedad que se denomina unicidad de hiperespacios. Dicho en forma precisa, un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ si para cualquier continuo Y, tal que $\mathcal{H}(Y)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(X)$ se cumple que Y es homeomorfo a X.

En este trabajo se analiza la unicidad de hiperespacios dentro de una familia que generaliza al hiperespacio de subcontinuos, es decir, al subespacio de 2^X dado por $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$. Dicha familia está conformada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el n-ésimo hiperespacio de X, esto es, por el subespacio de 2^X dado por

$$C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\}.$$

Dentro de la clase de los continuos localmente conexos, la unicidad de los n-ésimos hiperespacios ha sido establecida para diferentes valores de n y para diversas clases de continuos:

- En [7], [13] y [14], se demuestra que las gráficas finitas poseen n-ésimo hiperespacio único, para $n = 1$, $n = 2$ y $n \geq 3$, respectivamente.

- En [9] y [11], se establece que las dendritas de la familia $\mathfrak{D}$ poseen n-ésimo hiperespacio único, para $n = 1$ y $n \geq 3$, respectivamente. El caso $n = 2$ requirió un mayor esfuerzo y quedó establecido en [10] y [15].

- En [1] se prueba que los elementos de la familia $\mathfrak{LD}$ poseen hiperespacio de subcontinuos único.

Siguiendo esta línea de investigación, en [8] se estudian algunas condiciones necesarias y algunas condiciones suficientes para garantizar que se cumple o que no se cumple la unicidad de los n-ésimos hiperespacios en continuos localmente conexos. Dichas condiciones generalizan los resultados citados previamente y representan un paso importante hacia la caracterización de los continuos localmente conexos con n-ésimo hiperespacio único. Considerando esto, la motivación principal del presente estudio ha sido detallar los principales resultados de [8].

El primer capítulo de este trabajo se dedica a exponer las definiciones y los resultados más básicos que son usados a lo largo de la segunda y tercera secciones. Se presentan, entre otros aspectos, algunas familias de continuos, los conceptos de dimensión y variedad, y la construcción de algunos modelos geométricos de hiperespacios. En términos generales, dichas construcciones muestran lo siguiente:

- El hiperespacio $C(I)$, donde I es el intervalo cerrado $[0,1]$ dotado con la topología usual, es homeomorfo a $I^2 = I \times I$.
- El hiperespacio $C(S)$, donde S es la circunferencia unitaria dotada con la topología usual, es homeomorfo a I^2.
- El hiperespacio $C_2(I)$, donde I es el intervalo cerrado $[0,1]$ dotado con la topología usual, es homeomorfo a I^4 [14].

En el segundo capítulo se analizan algunos resultados que dan condiciones necesarias o suficientes para garantizar que la dimensión de los hiperespacios $C_n(X)$, ya sea en un punto dado o globalmente, es finita. Entre los resultados más resaltables de dicho capítulo se encuentra las siguientes dos equivalencias.

- Si X es un continuo localmente conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
  (a) X es una gráfica finita.
  (b) $\dim_X(C(X))$ es finita.
  (c) $\dim(C(X))$ es finita.
  (d) Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dim(C_n(X))$ es finita.
  (e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\dim(C_n(X))$ es finita.

- Si X es un continuo localmente conexo X, $n \in \mathbb{N}$ y $F \in C_n(X)$, entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

  (a) $\dim_F(C_n(X))$ es finita.

  (b) Existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $F \subset \mathrm{int}_X(D)$.

  (c) $F \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

  En donde

$$\mathcal{G}(X) = \{a \in X : a \text{ posee una vecindad en } X \text{ que es una gráfica finita}\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

El tercer capítulo aborda el estudio de los resultados principales de [8]. Dichos resultados se desarrollan alrededor de los conceptos de continuo casi enrejado y continuo enrejado. Un continuo X es casi enrejado si $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo X es enrejado si es casi enrejado y, además, posee una base de vecindades $\mathfrak{B}$, tal que, para cada $U \in \mathfrak{B}$, se cumple que $U-\mathcal{P}(X)$ es conexo. Los resultados más resaltables de este capítulo, y el objetivo final de este estudio, son los siguientes.

- Sea X un continuo localmente conexo. Si X no es casi enrejado, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que X no tiene hiperespacio único $C_n(X)$.

- Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumplen las siguientes dos afirmaciones:

  (a) Si $n = 1$ y X es distinto de un arco y de una curva cerrada simple, entonces X es homeomorfo a Y.

  (b) Si $n \neq 1$, entonces X es homeomorfo a Y.

- Supongamos que X es un continuo enrejado. Si $n \neq 1$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Si X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$.

José Gerardo Ahuatzi Reyes
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Mayo de 2014

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se exponen algunos conceptos y resultados que son básicos para el desarrollo de los capítulos posteriores. En su desarrollo, se da por sentado que el lector conoce los conceptos de conexidad, compacidad y los axiomas de separación, además de las propiedades más básicas de estos conceptos (p.e., que los espacios métricos cumplen todos los axiomas de separación o que una biyección continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es un homeomorfismo), de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y de algunos de sus subespacios (p.e., que los intervalos cerrados y la circunferencia unitaria son subespacios compactos y conexos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$, respectivamente).

En la primera sección se exponen los resultados referentes a espacios topológicos y espacios métricos en general, mientras que en la segunda sección se estudian las dos clases de espacios topológicos sobre las cuales se centra la atención a lo largo de este documento, a saber, los continuos y una subclase de estos, los continuos localmente conexos (una tercera clase, subclase de estos últimos, es atendida en el Capítulo 3). En las secciones de la tercera a la quinta se analizan los conceptos de variedad, dimensión y el Teorema de Toruńczyk. Los resultados principales de tales secciones son utilizados al tratar con hiperespacios, tanto en la sexta y última sección de este capítulo, como en los capítulos posteriores.

1.1. Nociones generales

Esta sección trata algunas nociones y algunos resultados básicos que pueden resultar conocidos para el lector familiarizado con la Topología General. La mayoría de los resultados formulados en esta sección están relacionados con los conceptos de conexidad y arco conexidad, comenzando con los tres teoremas siguientes.

Teorema 1.1. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si existe un subconjunto conexo B de X, tal que $B \subset A \subset \mathrm{cl}_X(B)$, entonces A es conexo.*

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos de A, tales que $U \cup V = A$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, existen S y T subconjuntos abiertos de X, tales que $U = S \cap A$ y $V = T \cap A$. Obsérvese que $B \subset U \cup V \subset S \cup T$. Además, $S \cap B \subset S \cap A = U$ y $T \cap B \subset T \cap A = V$. Luego, $S \cap B$ y $T \cap B$ son subconjuntos ajenos y abiertos de B que cumplen $(S \cap B) \cup (T \cap B) = (S \cup T) \cap B = B$. Como B es conexo, tenemos que $S \cap B = \emptyset$ o $T \cap B = \emptyset$. Como todo subconjunto abierto de X que intersecta a $\mathrm{cl}_X(B)$ también intersecta a B, se deduce que $S \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$ o $T \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$. Así, $U = S \cap A = \emptyset$ o $V = T \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, A es conexo. $\square$

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Si existe un subconjunto conexo B de X, tal que $B \subset \bigcup \mathcal{A}$ y, para cada $A \in \mathcal{A}$, se cumple que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo.*

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos de $\bigcup \mathcal{A}$, tales que $U \cup V = \bigcup \mathcal{A}$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, $U \cap B$ y $V \cap B$ son subconjuntos ajenos y abiertos de B que satisfacen $(U \cap B) \cup (V \cap B) = (U \cup V) \cap B = B$. Como B es conexo, tenemos que $U \cap B = \emptyset$ o $V \cap B = \emptyset$. Así, $B \subset V$ o $B \subset U$. Podemos suponer que $B \subset V$. De manera similar, se puede probar que, para cualquier $A \in \mathcal{A}$, se cumple que $A \subset V$ o $A \subset U$. Como $A \cap B \neq \emptyset$, esto último implica que $A \subset V$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \subset V$; es decir, $(\bigcup \mathcal{A}) \cap U = \emptyset$. Así, se concluye que $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo. $\square$

Teorema 1.3. *Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos no vacíos y conexos de X. Si $\mathrm{cl}_X(A) \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.*

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos de X, tales que $A \cup B \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \cap U \neq \emptyset$. Como A es conexo, $A \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap A = \emptyset$, se satisface que $A \subset U$. Luego, $A \cap V = (A \cap U) \cap V = \emptyset$; es decir, $A \subset X - V$. Como $X - V$ es cerrado en X, se cumple la contención $\mathrm{cl}_X(A) \subset X - V$. De este modo, y porque $\mathrm{cl}_X(A) \cap B \neq \emptyset$, se tiene que $B \cap (X - V) \neq \emptyset$. Como $B \subset U \cup V$, se satisface que $B \cap U \neq \emptyset$. Además, como $U \cap V \cap B = \emptyset$ y B es conexo, también se cumple que $B \subset U$. Así, $A \cup B \subset U$ y $(A \cup B) \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $A \cup B$ es conexo. $\square$

Para definir el concepto de espacio topológico arco conexo y para expresar los siguientes tres resultados, resulta conveniente hacer la siguiente definición. Para ello, nótese que el Teorema 1.22 (3) y el Ejemplo 1.23 implican que los únicos puntos de $[0,1]$ que bajo un homeomorfismo corresponden a 0 y a 1 son ellos mismos (no necesariamente en el mismo orden). Así, para cualesquiera dos homeomorfismos de $[0,1]$ en un espacio dado, sus respectivas imágenes de $\{0,1\}$ coinciden.

Definición 1.4. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Los **puntos extremos de un arco** son los puntos que bajo cualquier homeomorfismo de $[0,1]$ en dicho arco corresponden a 0 y a 1. Un **arco va de** x **a** y si x y y son sus puntos extremos.

Definición 1.5. Un espacio topológico X es **arco conexo** si dados cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco contenido en X que va de x a y.

Los siguientes tres resultados son sencillos lemas que se ocupan a menudo, en especial en la prueba del Teorema 2.14.

Lema 1.6. *Sea X un espacio topológico. Si A es un subconjunto cerrado de X, $x \notin A$ y α es un arco en X que va de x a un punto en A, entonces existe un subarco β de α, tal que $A \cap \beta$ consta solamente de un punto p y los puntos extremos de β son p y x.*

Demostración. Sea $h : [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo con $h(0) = x$. Sea $a = h(1) \in A$. Nótese que el conjunto $\alpha \cap A$ es cerrado en α y no vacío. Luego, el conjunto $B = h^{-1}(\alpha \cap A)$ es cerrado en $[0,1]$ y no vacío. Así, se puede hacer $t_0 = \text{mín}\, B$. Como $h(0) = x \notin A$, se tiene que $t_0 > 0$. De esta manera, $\beta = h([0,t_0])$ es un subarco de α con $x = h(0) \in \beta$. Además, para cualquier $0 \leq t < t_0$ se tiene $t \notin B$; es decir, $h(t) \notin \alpha \cap A$, y, por ende, $h(t) \notin A$. Por lo tanto, $\beta \cap A = \{h(t_0)\}$ y los puntos extremos de β son $h(t_0) = p$ y $h(0) = x$, como queríamos. $\square$

Lema 1.7. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si α es un arco en X, tal que x es uno de sus puntos extremos y U es una vecindad de x, entonces existe un subarco γ de α, tal que $\gamma \subset U$ y x es punto extremo de γ.*

Demostración. Sea $A = X - \text{int}_X(U)$. Obsérvese que se cumplen las hipótesis del Lema 1.6, así que podemos hacer h y t_0 como en la prueba de tal lema. Como $0 < t_0$, podemos tomar $s_0 \in (0,t_0)$. Luego, $\gamma = h([0,s_0])$ es un subarco de α, tal que $x = h(0)$ es punto extremo de γ. Además, como $h(t_0) \notin \gamma \subset h([0,t_0])$ y $h([0,t_0]) \cap A = \{h(t_0)\}$, tenemos que $\gamma \cap A = \emptyset$ y, por tanto, que $\gamma \subset \text{int}_X(U) \subset U$. $\square$

Lema 1.8. *Sea X un espacio topológico arco conexo. Si A y B son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X, entonces existe un arco α en X, tal que $A \cap \alpha = \{p\}$ y $B \cap \alpha = \{q\}$, donde p y q son los puntos extremos de α.*

Demostración. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como X es arco conexo, existe un arco γ que va de a a b. Obsérvese que $b \notin A$. Aplicando el Lema 1.6 obtenemos un subarco β de γ, tal que $\beta \cap A$ consta de un solo punto p y los puntos extremos de β son p y b. Asimismo, $p \notin B$. De nuevo aplicando el Lema 1.6 obtenemos un subarco α de β, tal que $\alpha \cap B$ consta de un solo punto q y los puntos extremos de α son q y p. Como $p \in \alpha \cap A \subset \beta \cap A = \{p\}$, se tiene que $\alpha \cap A = \{p\}$. Esto concluye la prueba del lema. □

Saliendo de los resultados de conexidad anteriores, se tiene ahora el siguiente resultado sobre fronteras cuya sencillez esconde una gran utilidad (véanse los Teoremas 1.24, 1.26, 1.68 y 1.113)

Lema 1.9. *Sea X un espacio topológico. Si Y y A son subconjuntos de X, entonces se cumplen los siguientes dos enunciados.*

(*i*) $\mathrm{Fr}_Y(A \cap Y) \subset \mathrm{Fr}_X(A)$.

(*ii*) *Si* $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{int}_X(Y)$, *entonces* $\mathrm{Fr}_Y(A) = \mathrm{Fr}_X(A)$.

Demostración. Para probar (*i*) basta notar que

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_Y(A \cap Y) &= \mathrm{cl}_Y(A) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A) \subset \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) \\ &\subset \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A) = \mathrm{Fr}_X(A).\end{aligned}$$

Mostremos (*ii*). Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_X(A) &= \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A) \\ &= \mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{cl}_X(X - Y) \cup \mathrm{cl}_X(Y - A)) \\ &= (\mathrm{cl}_X(A) \cap (X - \mathrm{int}_X(Y))) \cup (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A)) \\ &= \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) = Y \cap \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) \\ &= \mathrm{cl}_Y(A) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A) = \mathrm{Fr}_Y(A).\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del lema. □

El siguiente lema de "pegado" de funciones se utiliza para probar los Lemas 3.11 y 3.16.

Lema 1.10. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si A y B son subconjuntos cerrados de X, tales que $X = A \cup B$ y las restricciones $f|_A : A \to Y$ y $f|_B : B \to Y$ son continuas, entonces f es continua.*

Demostración. Para probar que f es continua, mostraremos que las imágenes inversas bajo f de cerrados en Y son conjuntos cerrados en X. Con tal propósito, sea D un subconjunto cerrado de Y. Como $f|_A$ es continua, el conjunto $f^{-1}(D) \cap A = (f|_A)^{-1}(D)$ es cerrado en A. Además, A es cerrado en X, por lo cual $f^{-1}(D) \cap A$ es cerrado en X. Similarmente, $f^{-1}(D) \cap B$ es cerrado en X. Como $f^{-1}(D) = (f^{-1}(D) \cap A) \cup (f^{-1}(D) \cap B)$, se deduce que $f^{-1}(D)$ es cerrado en X. Puesto que D es un subconjunto cerrado de X cualquiera, esto prueba que f es continua. □

Como es posible notar en los capítulos siguientes, el estudio realizado en este trabajo se centra en una clase específica y muy restringida de espacios topológicos: los continuos localmente conexos. Ahora se define la propiedad de conexidad local para espacios topológicos en general. La definición de continuo se reserva para la siguiente sección (véase la Definición 1.14).

Definición 1.11. Un espacio topológico X es **localmente conexo** si existe una base para X formada exclusivamente de subconjuntos abiertos y conexos de X.

La conexidad local, aunque surge naturalmente de localizar la propiedad de conexidad, no es tan cercana a esta última como ocurre con otras propiedades locales y los respectivos conceptos de los que derivan. Esto es, la conexidad y la conexidad local dan características muy diferentes a los espacios que las poseen. Véase por ejemplo los espacios en el Ejemplo 1.12.

Ejemplo 1.12. Dado cualquier conjunto κ, si le asignamos a κ la métrica discreta, el espacio métrico resultante es localmente conexo pero sus únicos subconjuntos conexos son conjuntos singulares. En el otro extremo, si $\mathfrak{C}$ es el conjunto clásico de Cantor, entonces el subespacio métrico de $\mathbb{R}^2$ dado por $G(\{0\} \times \mathfrak{C}, (1,0)) \cup G(\{1\} \times \mathfrak{C}, (0,1))$, donde $G(S,p)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de todos los segmentos de recta de que van de p a un elemento de S, es un espacio conexo (más aún, compacto y arco conexo), tal que cada uno de sus abiertos propios de diámetro menor a 1 es disconexo.

El siguiente resultado da una caracterización de la conexidad local en espacios topológicos en general que resulta de gran utilidad. Se ocupa en el Teorema 2.18, el Lema 2.16 y el Corolario 3.23.

Teorema 1.13. *Un espacio topológico X es localmente conexo si, y sólo si, las componentes de cualquier subconjunto abierto de X son abiertos en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Luego, dado cualquier $x \in C$, U es una vecindad de x en X. De esta manera, existe un subconjunto abierto y conexo V de X, tal que $x \in V \subset U$. Como C es la componente de U que contiene a x, tenemos que $V \subset C$. Puesto que x es un punto arbitrario de C, deducimos que C es un subconjunto abierto de X. Por tanto, las componentes de cualquier subconjunto abierto de X son abiertos en X.

Recíprocamente, supongamos que las componentes de cualquier subconjunto abierto de X son abiertos en X. Afirmamos que el conjunto $\mathfrak{C} = \{C : U$ es un subconjunto abierto de X y C es una componente de $U\}$ es una base para X. En efecto, dados un punto $x \in X$, una vecindad abierta U de x en X y la componente C de U, tales que $x \in U$, se cumple que C es abierto en X y que $x \in c \subset U$; es decir, C es una vecindad abierta de x en X contenida en U. Esto implica que $\mathcal{C}$ es una base para X. Además, $\mathcal{C}$ está formada exclusivamente de subconjuntos conexos de X. Por lo tanto, X es localmente conexo. □

Como se puede observar en la siguiente sección, la propiedad de conexidad local dota a los espacios de nuestro interés de una propiedad muy amena, la arco conexidad (Teorema 1.33) y, más aún, les permite a dichos espacios tener una "estructura convexa" (Teorema 1.37).

1.2. Continuos

Esta sección se aboca a establecer el concepto de continuo y los resultados básicos acerca de él que serán utilizados a lo largo de este texto. Se exponen en subsecciones y en este orden, aspectos generales de los continuos, el concepto de orden, resultados referentes a continuos localmente conexos y, por último, algunas clases de continuos cuyos hiperespacios han sido estudiados en detalle.

1.2.1. Resultados generales

Para comenzar este apartado se establece la definición de continuo y algunos ejemplos de esta clase tan importante de espacios topológicos.

Definición 1.14. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un espacio topológico X, a cualquier subespacio de X que es un continuo le llamaremos un **subcontinuo** de X.

Ejemplo 1.15. Los siguientes continuos son algunos de los ejemplos más simples, pero frecuentemente se hará mención de ellos.

1. *Arcos.* Un **arco** es cualquier espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $I = [0, 1]$.

2. *n-odos simples.* Dado $n \in \mathbb{N}$, un **n-odo simple**, denominado **triodo simple** en el caso $n = 3$, es un espacio homeomorfo al subespacio del plano formado por la unión de los arcos que van del origen a los puntos de una división regular de n puntos de la circunferencia unitaria; es decir, un n-odo simple es cualquier unión de n arcos que poseen un punto en común y que, de cualquier otro modo, son ajenos.

3. *n-celdas.* Dado $n \in \mathbb{N}$, una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada n-dimensional B^n en $\mathbb{R}^n$, donde
$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}.$$

4. *n-esferas.* Dado $n \in \mathbb{N}$, una **n-esfera** es un espacio homeomorfo a la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}.$$

5. *Cubos de Hilbert.* Un **cubo de Hilbert** es cualquier espacio topológico homeomorfo al producto numerable de intervalos cerrados con la topología producto, es decir, al espacio
$$I^\infty = \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$
donde $I_n = [0, 1]$.

El primer resultado sobre continuos que se presenta en este trabajo es el llamado Segundo Teorema de Golpes en la Frontera. Es necesario para probar el Lema 2.12 y el Teorema 2.14.

Teorema 1.16 ([20], Teorema 5.6)**.** *Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\mathrm{cl}_X(K) \cap \mathrm{Fr}_X(E) \neq \emptyset$.*

Para la Sección 3.2 se necesita una operación especial: "pegar" dos continuos en un punto. Antes de definir concretamente esta operación, es necesario el siguiente lema para asegurar que lo que resultará al aplicar dicho pegado entra en los dominios de los continuos. En su demostración, es útil el siguiente resultado sobre metrizabilidad.

Teorema 1.17 ([4], Corolario (10.C.8))**.** *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio Hausdorff. Si existe una función continua y sobreyectiva $f : X \to Y$, entonces Y es metrizable, esto es, existe una métrica sobre Y, tal que la topología inducida por tal métrica es la topología originalmente considerada para Y.*

La unión que se considera en el siguiente lema, es la llamada "suma topológica". Basta decir para el propósito que se persigue que los espacios que se unen (los cuales suponemos ajenos entre sí por simplicidad) resultan abiertos y cerrados al ser considerados como subespacios del espacio topológico resultante, conservando su estructura topológica inicial.

Lema 1.18. *Si X y Y son continuos ajenos, $p \in X$ y $y \in Y$, entonces el espacio topológico $X \cup Y/\{p, y\}$ (es decir, el que se forma al identificar los puntos p y y) es metrizable, conexo y compacto y, por tanto, es un continuo. Más aún, existe una función $f : X \cup Y \to X \cup Y/\{p, y\}$, tal que $f|_X$ y $f|_Y$ son encajes, $f(X) \cup f(Y) = X \cup Y/\{p, y\}$ y $f(X) \cap f(Y) = \{\{p, y\}\}$.*

Demostración. Sea $f : X \cup Y \to (X \cup Y)/\{p, y\}$ la función natural de la identificación del conjunto $\{p, y\}$ a un punto en $X \cup Y$. Esto es

$$f(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in (X \cup Y) - \{p, y\}, \\ \{p, y\} & \text{si } x \in \{p, y\}. \end{cases}$$

Sea $Z = X \cup Y/\{p, y\}$ dotado con la topología cociente. En primer lugar, obsérvese que la restricción de f al dominio $(X \cup Y) - \{p, y\}$ y al codominio $Z - \{\{p, y\}\}$ es una biyección, y recuerde que la topología de Z es la mayor de las topologías para las cuales f es continua, es decir que es exactamente el conjunto

$$\{A \subset Z : f^{-1}(A) \text{ es abierto en } X \cup Y\}.$$

Demostremos primero que $f|_X$ y $f|_Y$ son encajes. Obsérvese que $f|_X$ es inyectiva. Ahora, como f es continua, faltaría demostrar que la imagen bajo $f|_X$ de cualquier abierto de X es abierto en $f(X)$. Para ello, sea U un subconjunto abierto de X. Como X es abierto en $X \cup Y$, se cumple que U es abierto en $X \cup Y$. Si $p \notin U$, entonces $U = f^{-1}(f(U))$. Así, $f(U)$ es abierto en

Z y en $f(X)$. De la misma forma, si $p \in U$, entonces $U \cup Y = f^{-1}(f(U \cup Y))$. Luego, $f(U \cup Y)$ es abierto en Z y $f(U) = (f(U) \cup f(Y)) \cap f(X) = f(U \cup Y) \cap f(X)$ es abierto en $f(X)$. De esta manera, $f|_X$ es un encaje. Similarmente, se puede demostrar que $f|_Y$ es un encaje.

Por otro lado, se tiene que $f(X) \cap f(Y) = \{\{p, y\}\}$. Como X y Y son compactos y conexos, se satisface que $f(X)$ y $f(Y)$ son compactos y conexos. Así, $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y) = Z$ es compacto y conexo.

Obsérvese que $f^{-1}(f(X) - \{\{p, y\}\}) = X - \{p\}$ y que este conjunto es abierto en $X \cup Y$. Esto implica que $f(X) - \{\{p, y\}\}$ es abierto en Z. Igualmente, $f(Y) - \{\{p, y\}\}$ es abierto en Z. Además, $f(X) - \{\{p, y\}\}$ y $f(Y) - \{\{p, y\}\}$ son ajenos y, como el primero es homeomorfo a $X - \{p\}$ y el segundo a $Y - \{y\}$, ambos son espacios Hausdorff.

Probaremos que Z es un espacio Hausdorff. Para ello, sean $a, b \in Z$ con $a \neq b$. Por el párrafo anterior podemos suponer que alguno de a o b es $\{p, y\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = \{p, y\}$ y que $b \in f(X) - \{\{p, y\}\}$. Sea $z \in X$, tal que $b = \{z\}$. Sean S y T subconjuntos abiertos de X ajenos, tales que $p \in S$ y $z \in T$. Obsérvese que $S \cup Y = f^{-1}(f(S \cup Y))$ y $T = f^{-1}(f(T))$ (como lo hicimos al probar que $f|_X$ es un encaje). Como $S \cup Y$ y T son abiertos en $X \cup Y$, se tiene que $f(S \cup Y)$ y $f(T)$ son abiertos en Z. Además, $S \cup Y$ y T son ajenos y p y y no son elementos de T. Así, $f(S \cup Y)$ y $f(T)$ son ajenos. Como $a = f(p) \in f(S \cup Y)$ y $b = f(z) \in f(T)$, podemos concluir que Z es Hausdorff.

De esta forma, aplicando el Teorema 1.17, se obtiene que Z es metrizable. Esto concluye la prueba de este lema. $\square$

Definición 1.19. Sean X y Y dos continuos ajenos, $p \in X$ y $y \in Y$. Denotaremos por $X \cup_p Y$ al continuo obtenido al identificar los puntos p y y en $X \cup Y$.

A partir de este punto, al utilizar la notación anterior siempre se asume el Lema 1.18 implícitamente, de tal forma que es posible manejar el espacio $X \cup_p Y$ con mayor fluidez. En concreto, se considera a los espacios X y Y como subespacios de $X \cup_p Y$, de tal forma que es posible ignorar que se trata con una identificación, y se da por hecho que se cumplen las igualdades $X \cup Y = X \cup_p Y$ y $X \cap Y = \{p\}$. En la Figura 1.1 se muestra la idea geométrica de este concepto.

1.2.2. Orden

Un concepto fundamental en muchas áreas de la topología de continuos, por ejemplo en la caracterización de algunas clases de continuos (que es el

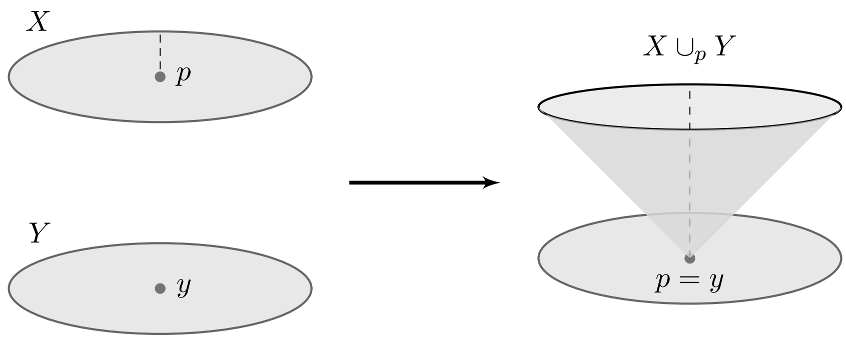


Figura 1.1: Dos círculos "pegados" por su centro. En la imagen de la derecha el símbolo $p = y$ denota el punto $\{p, y\}$.

primer tópico interesante en que se hace mención de este concepto), es el de orden. En este breve apartado se mencionan unos pocos resultados que se relacionan con este concepto, aunque los más sobresalientes son mencionados más adelante. Entre estos últimos resalta, por su amplio uso y sencillez, la caracterización dada en el Teorema 1.45.

Definición 1.20. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea β un número cardinal. A es de **orden** menor o igual que β, denotado por

$$\operatorname{ord}(A, X) \leq \beta,$$

si, para cada subconjunto abierto U de X, tal que $A \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X, tal que

$$A \subset V \subset U \quad \text{y} \quad |\operatorname{Fr}_X(V)| \leq \beta.$$

A es de orden β en X, denotado por

$$\operatorname{ord}(A, X) = \beta,$$

si $\operatorname{ord}(A, X) \leq \beta$ y, para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\operatorname{ord}(A, X) \nleq \alpha$.

Asimismo, para cualquier $p \in X$, denotamos $\operatorname{ord}(p, X) = \operatorname{ord}(\{p\}, X)$.

Como se menciona en párrafos previos, el primer uso que se hace del concepto de orden es el distinguir entre distintos tipos de puntos en un continuo.

Definición 1.21. Dado un continuo X, un punto $p \in X$ es un **punto extremo** de X si $\operatorname{ord}(p, X) = 1$. Del mismo modo, p es un **punto ordinario** de X si $\operatorname{ord}(p, X) = 2$ y p es un **punto de ramificación** de X si $\operatorname{ord}(p, X) \geq 3$. Además, denotaremos

$$\begin{aligned} E(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto extremo de } X\}, \\ O(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto ordinario de } X\}, \\ R(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto de ramificación de } X\}. \end{aligned}$$

El siguiente teorema es una observación, pero se le da la categoría de teorema por su importancia, porque otorga el carácter topológico a los conjuntos de la definición previa.

Teorema 1.22. *Sean X y Y espacios topológicos y p un punto en X. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\operatorname{ord}(p, X) = \operatorname{ord}(h(p), Y)$. En particular, se tiene que $h(E(X)) = E(Y)$, $h(O(X)) = O(Y)$ y que $h(R(X)) = R(Y)$.*

Demostración. Mostremos primero que $\operatorname{ord}(p, X) \leq \operatorname{ord}(h(p), Y)$. Sea U un subconjunto abierto de X, tal que $p \in U$. Luego, $h(U)$ es abierto en Y y $h(p) \in h(U)$. Sea W un subconjunto abierto de Y, tal que $h(p) \in W \subset h(U)$ y $|\operatorname{Fr}_Y(W)| \leq \operatorname{ord}(h(p), Y)$. Obsérvese que $h^{-1}(W)$ es abierto en X y $p \in h^{-1}(W) \subset h^{-1}(h(U)) = U$. Además, $\operatorname{Fr}_X(h^{-1}(W)) = h^{-1}(\operatorname{Fr}_X(W))$ y, por ende, $|\operatorname{Fr}_X(h^{-1}(W))| = |h^{-1}(\operatorname{Fr}_X(W))| = |\operatorname{Fr}_X(W)|$ y $|\operatorname{Fr}_X(h^{-1}(W))| \leq \operatorname{ord}(h(p), Y)$. Por lo tanto, $\operatorname{ord}(p, X) \leq \operatorname{ord}(h(p), Y)$. Análogamente, se puede probar que $\operatorname{ord}(h(p), Y) \leq \operatorname{ord}(p, X)$. Así, se concluye que $\operatorname{ord}(p, X) = \operatorname{ord}(h(p), Y)$ $\square$

A continuación se revisa el orden de los puntos de $\mathbb{R}$ y de los continuos no degenerados más simples: el arco y la curva cerrada simple.

Ejemplo 1.23. 1. Si X es un continuo no degenerado, entonces, para cada $p \in X$, se cumple que $\operatorname{ord}(p, X) > 0$.

De lo contrario, existirían subconjuntos propios y abiertos de X con frontera vacía, lo cual no es posible en un espacio conexo.

2. En $\mathbb{R}$ cada punto p cumple que $\operatorname{ord}(p, \mathbb{R}) = 2$.

En efecto, la familia $\{(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de p en $\mathbb{R}$, tal que la frontera de cada uno de sus elementos tiene cardinalidad 2. Esto implica que $\operatorname{ord}(p, \mathbb{R}) \leq 2$. Para mostrar que $\operatorname{ord}(p, \mathbb{R}) > 1$ tomemos una vecindad abierta U de p en $\mathbb{R}$ contenida en $(p - 1, p + 1)$. Como

U es acotado, podemos tomar $s = \operatorname{ínf} U$ y $t = \sup U$. Obsérvese que $s, t \in \operatorname{Fr}_{\mathbb{R}}(U)$ y $s \neq t$. De esta forma, cualquier vecindad abierta de p en $\mathbb{R}$ contenida en $(p-1, p+1)$ posee al menos dos puntos en su frontera. Por lo tanto, $\operatorname{ord}(p, \mathbb{R}) = 2$.

3. En un arco α, los únicos puntos de orden 1 son sus puntos extremos, según la definición que hicimos previamente al concepto de orden (esto garantiza que la notación $E(X)$ está bien establecida). Todos los demás puntos de α tienen orden 2 en α.

   Por el Teorema 1.22, basta probar el caso en que $\alpha = [0, 1]$. Para esto, obsérvese que la familia $\{[0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades abiertas de 0 en $[0, 1]$, tal que la frontera de cada uno de sus elementos consta de un solo punto. Junto con el inciso 1, esto implica que $\operatorname{ord}(0, [0, 1]) = 1$. Similarmente, $\operatorname{ord}(1, [0, 1]) = 1$. Para mostrar la segunda afirmación, tomemos un punto $p \in (0, 1)$. Como $(0, 1)$ es abierto en $[0, 1]$ tenemos, por el Teorema 1.24, que $\operatorname{ord}(p, [0, 1]) = \operatorname{ord}(p, (0, 1))$. Como $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ se sigue del Teorema 1.22 y del inciso 2 que $\operatorname{ord}(p, (0, 1)) = 2$. Así, $\operatorname{ord}(p, [0, 1]) = 2$.

4. En una curva cerrada simple todos los puntos p cumplen que $\operatorname{ord}(p, S) = 2$.

   Similarmente al inciso 3, basta probar el caso $S = S^1$. Este caso es consecuencia del inciso 2, porque, para cada $p \in S_1$, se cumple que p posee vecindades abiertas en S^1 homeomorfas a $\mathbb{R}$. Procediendo como en la segunda afirmación del inciso 3, obtenemos que $\operatorname{ord}(p, S^1) = 2$.

El resultado que sigue garantiza que el orden se comporta bien con los subespacios.

Teorema 1.24. *Sea X un continuo. Si A es un subespacio de X y $p \in A$, entonces* $\operatorname{ord}(p, A) \leq \operatorname{ord}(p, X)$. *Más aún, si A es una vecindad de p en X, entonces* $\operatorname{ord}(p, A) = \operatorname{ord}(p, X)$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de A con $p \in U$. Luego, existe un subconjunto abierto V de X con $U = A \cap V$. Como $p \in V$, existe un subconjunto abierto W de X, tal que $p \in W \subset V$ y $|\operatorname{Fr}_X(W)| \leq \operatorname{ord}(p, X)$. Aplicando el Lema 1.9 (i), tenemos que $\operatorname{Fr}_A(A \cap W) \subset \operatorname{Fr}_X(W)$. Así, $|\operatorname{Fr}_A(A \cap W)| \leq \operatorname{ord}(p, X)$. Como $A \cap W$ es abierto en A y $p \in A \cap W \subset A \cap V = U$, concluimos que $\operatorname{ord}(p, A) \leq \operatorname{ord}(p, X)$.

Supongamos ahora que A es una vecindad de p en X. Por el párrafo anterior, basta probar que $\operatorname{ord}(p, X) \leq \operatorname{ord}(p, A)$. Para tal efecto, sea U un subconjunto abierto de X con $p \in U$. Como $\operatorname{int}_X(A) \cap U$ es un subconjunto abierto de A con $p \in \operatorname{int}_X(A) \cap U$, existe un subconjunto abierto W de A, tal que $p \in W \subset \operatorname{int}_X(A) \cap U$ y $|\operatorname{Fr}_A(W)| \leq \operatorname{ord}(p, A)$. Como $W \subset \operatorname{int}_X(A) \subset A$, se tiene que W es abierto en $\operatorname{int}_X(A)$ y, por ende, en X. Además, por el Lema 1.9 (*ii*), se cumple que $\operatorname{Fr}_X(W) = \operatorname{Fr}_A(W)$. Como $p \in W \subset U$ y $|\operatorname{Fr}_X(W)| = |\operatorname{Fr}_A(W)| \leq \operatorname{ord}(p, A)$, obtenemos que $\operatorname{ord}(p, X) \leq \operatorname{ord}(p, A)$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

El siguiente concepto se utiliza en la caracterización de una clase de continuos localmente conexos, las dendritas (Teorema 1.51), la cual se define más adelante (Definición 1.48).

Definición 1.25. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Denotaremos por $\mathrm{c}(p, X)$ al cardinal del conjunto de componentes del conjunto $X - \{p\}$.

En el siguiente resultado se expresa la relación entre $\mathrm{c}(p, X)$ y $\operatorname{ord}(p, X)$, para continuos en general.

Teorema 1.26. *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Si* $\operatorname{ord}(p, X)$ *es finito, entonces* $\mathrm{c}(p, X)$ *también es finito. Aún más,* $\mathrm{c}(p, X) \leq \operatorname{ord}(p, X)$.

Demostración. Sean $n = \mathrm{c}(p, X)$, $Z_1, \ldots, Z_n$ las componentes de $X - \{p\}$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i \in Z_i$. Queremos demostrar que $\operatorname{ord}(p, X) \geq n$. Para tal fin tomemos una vecindad abierta U de p en X. Como $X - \{z_1, \ldots, z_n\}$ es una vecindad abierta de p en X, podemos suponer que $U \subset X - \{z_1, \ldots, z_n\}$. Obsérvese que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, Z_j es un subconjunto cerrado de $X - \{p\}$. Luego, dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $\bigcup_{j \neq i} Z_j$ es cerrado en $X - \{p\}$ y el conjunto $Z_i = (X - \{p\}) - \bigcup_{j \neq i} Z_j$ es abierto en $X - \{p\}$. Como $X - \{p\}$ es abierto en X, esto implica que Z_i es abierto en X. Como esto sucede para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que, para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $Z_k \cup \{p\} = X - \bigcup_{j \neq i} Z_j$ es cerrado en X. Así, $\operatorname{cl}_X(Z_k) \subset Z_k \cup \{p\}$. Además, como Z_k es un subconjunto propio, abierto y no vacío de X y X es conexo, se tiene que $Z_k \subsetneq \operatorname{cl}_X(Z_k)$. Por tanto, $\operatorname{cl}_X(Z_k) = Z_k \cup \{p\}$ y $p \in \operatorname{cl}_X(Z_k)$. En esta forma, $U \cap Z_k \neq \emptyset$ y $z_k \in Z_k - U$. Luego, $U \cap Z_k$ es un subconjunto propio, abierto y no vacío de Z_k. Como Z_k es conexo, esto implica que $\operatorname{Fr}_{Z_k}(U \cap Z_k) \neq \emptyset$. Por otro lado, aplicando el Lema 1.9 (*i*), obtenemos que $\operatorname{Fr}_{Z_k}(U \cap Z_k) \subset \operatorname{Fr}_X(U) \cap Z_k$. Por consiguiente, $\operatorname{Fr}_X(U) \cap Z_k \neq \emptyset$. Como para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se satisface la igualdad $Z_j \cap Z_i = \emptyset$, se sigue que $|\operatorname{Fr}_X(U)| \geq n$. Así, se concluye que $\operatorname{ord}(p, X) \geq n$. $\square$

1.2.3. Continuos localmente conexos

En este apartado se exponen algunos resultados generales acerca de los espacios que son foco de este estudio, los continuos localmente conexos. El primero de estos resultados es un sencillo lema auxiliar requerido en la prueba del Teorema 2.15.

Lema 1.27. *Sea X un continuo localmente conexo. Si T es un subcontinuo de X y U es cualquier subconjunto abierto de X, tal que $T \subset U$, entonces existe un subcontinuo Z de X, tal que $T \subset \operatorname{int}_X(Z) \subset Z \subset U$. En particular, si T_1 y T_2 son subcontinuos de X ajenos, entonces existen subcontinuos Z_1 y Z_2 de X, tales que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, $T_1 \subset \operatorname{int}_X(Z_1)$ y $T_2 \subset \operatorname{int}_X(Z_2)$.*

Demostración. Demostremos la primera parte. Con este fin, sean T un subcontinuo de X y U un subconjunto abierto de X, tales que $T \subset U$. Como X es un continuo localmente conexo, para cada $x \in T$ existe un subconjunto abierto y conexo C_x de X, tal que $x \in C_x \subset \operatorname{cl}_X(C_x) \subset U$. Obsérvese que, por el Teorema 1.1, $\operatorname{cl}_X(C_x)$ es conexo. Como T es compacto y $T \subset \bigcup\{C_x : x \in T\}$, existe un subconjunto finito J de T, tal que $T \subset \bigcup\{C_x : x \in J\}$. Sea $Z = \bigcup\{\operatorname{cl}_X(C_x) : x \in J\}$. Luego, Z es cerrado en X y $Z \subset U$. Como $T \subset Z$, para cada $x \in J$, $\operatorname{cl}_X(C_x) \cap T \neq \emptyset$, y T es conexo, aplicando el Teorema 1.2 obtenemos que Z es conexo. Además, $T \subset \bigcup\{C_x : x \in J\} \subset \operatorname{int}_X(Z)$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte, sean T_1 y T_2 subcontinuos de X ajenos. Como T_1 y T_2 son subconjuntos cerrados de X y X es un espacio normal (por ser un espacio métrico), existen subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X ajenos, tales que $T_1 \subset U_1$ y $T_2 \subset U_2$. Por el párrafo anterior, existen subcontinuos Z_1 y Z_2, tales que $T_1 \subset \operatorname{int}_X(Z_1)$ y $T_2 \subset \operatorname{int}_X(Z_2)$. Obsérvese que $Z_1 \cap Z_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Con esto terminamos esta demostración. $\square$

La propiedad de conexidad local exige que en cada punto del espacio en cuestión haya vecindades abiertas, conexas y arbitrariamente pequeñas. Pero hay ocasiones en que esta condición resulta exigente en alguna demostración, así que se precisa de condiciones más accesibles. El siguiente teorema da una condición equivalente a la conexidad local pero que resulta más fácil de probar en la práctica. Para enunciarlo se necesita la siguiente definición.

Definición 1.28. El espacio topológico X es **conexo en pequeño** en el punto $p \in X$ si X tiene una base local de vecindades en p formada exclusivamente de subconjuntos conexos de X.

Teorema 1.29. *Si X un continuo, entonces X es localmente conexo si, y sólo si, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Probemos la suficiencia. Supongamos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por el Teorema 1.13, bastará probar que las componentes de cualquier subconjunto abierto de X son abiertas en X. Para ello, tomemos un abierto U de X y una componente C de U. Para cada $x \in C$, existe una vecindad conexa V_x de x en X, tal que $V_x \subset U$. Como C es una componente de U, la conexidad de V_x y el hecho de que $x \in C \cap V_x$, implican que $V_x \subset C$. Luego, si hacemos $V = \bigcup\{V_x : x \in C\}$, tenemos que $V \subset C \subset \bigcup\{\text{int}_X(V_x) : x \in C\} \subset V$. De lo anterior se desprende que $V = C = \bigcup\{\text{int}_X(V_x) : x \in C\}$ y que C es un subconjunto abierto de X. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Una característica sencilla pero destacable de los continuos localmente conexos se formula a continuación.

Teorema 1.30. *Sea X un espacio métrico. Si X_1 y X_2 son subcontinuos localmente conexos de X, tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, entonces $X_1 \cup X_2$ es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Como la unión de dos conexos que se intersectan es conexa y la unión de compactos es un compacto, es inmediato que $X_1 \cup X_2$ es un continuo. Por consiguiente, por el Teorema 1.29, basta probar que $X_1 \cup X_2$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Para tal fin, tomemos $x \in X_1 \cup X_2$ y un abierto U en $X_1 \cup X_2$, tal que $x \in U$. Queremos hallar una vecindad conexa V de x en $X_1 \cup X_2$, tal que $V \subset U$. Supongamos primero que $x \in X_1 - X_2$. Obsérvese que $X_1 \cap X_2$ es un subconjunto compacto de X_1 y que $X_1 - X_2$ es abierto en X_1. Luego, $U \cap (X_1 - X_2)$ es un subconjunto abierto de X_1. Como X_1 es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X_1, tal que $x \in V \subset U \cap (X_1 - X_2)$. Pero $X_1 - X_2 = (X_1 \cup X_2) - X_2$, por lo cual $X_1 - X_2$ y $U \cap (X_1 - X_2)$ son subconjuntos abiertos de $X_1 \cup X_2$. Esto implica que V es abierto en $X_1 \cup X_2$ y concluye este caso. En caso que $x \in X_2 - X_1$, podemos proceder de igual forma para hallar V. Ahora supongamos que $x \in X_1 \cap X_2$. Como $U \cap X_1$ y $U \cap X_2$ son vecindades de x en X_1 y X_2, respectivamente, existen abiertos V_1 en X_1 y V_2 en X_2, tales que $x \in V_1 \subset U \cap X_1$ y $x \in V_2 \subset U \cap X_2 \subset$. Obsérvese que $V_1 \cup V_2$ es conexo. Sean W_1 y W_2 abiertos en X, tales que $V_1 = W_1 \cap X_1$ y $V_2 = W_2 \cap X_2$. Luego, $W_1 \cap W_2 \cap (X_1 \cup X_2)$ es un subconjunto abierto de $X_1 \cup X_2$ y $x \in W_1 \cap W_2 \cap (X_1 \cup X_2) = (W_1 \cap W_2 \cap X_1) \cup (W_1 \cap W_2 \cap X_2) = (V_1 \cap W_2) \cup (V_2 \cap W_1) \subset V_1 \cup V_2$. Por tanto, $V_1 \cup V_2$ es una vecindad conexa de x en $X_1 \cup X_2$. Así, se concluye que X es conexo en pequeño en X. Esto termina la demostración de este teorema. $\square$

Ahora se prueba un lema, no tan simple y con una demostración un poco intrincada, que será de utilidad en la demostración del Teorema 2.3.

Lema 1.31. *Sea X un continuo localmente conexo. Si A es un subconjunto finito de X, tal que $X - A$ es conexo, entonces, para cada abierto U de X con $A \subset U$, existe una subconjunto cerrado V de X, tal que $A \subset \operatorname{int}_X(V) \subset V \subset U$ y $X - V$ es conexo.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Vamos a definir la colección de conjuntos $U_0, U_1, U_2, \ldots$ de la siguiente manera. Sea $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{d(x,y) : x, y \in A \text{ y } x \neq y\}$. Hagamos $U_0 = U \cap (\bigcup_{x\in A} B_d(x,\varepsilon))$ y supongamos que, para alguna $n \in \mathbb{N}$, hemos definido el conjunto U_{n-1} de tal forma que U_{n-1} es abierto en X y contiene a A. Luego, dada cualquier $x \in A$, existe un subconjunto abierto y conexo W_x de X, tal que $x \in W_x \subset \operatorname{cl}_X(W_x) \subset B_d(x, \frac{1}{n}) \cap U_{n-1}$. Sea $U_n = \bigcup_{x\in A} W_x$. Luego, $\operatorname{cl}_X(U_n) = \bigcup_{x\in A} \operatorname{cl}_X(W_x) \subset U_{n-1}$ y $U_n \subset \bigcup_{x\in A} B_d(x, \frac{1}{n})$.

De esta forma, cada U_n es un subconjunto abierto de X con $A \subset U_{n+1} \subset \operatorname{cl}_X(U_{n+1}n) \subset U_n$ y $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Afirmamos que en esta última relación se da la igualdad. Supongamos, por el contrario, que existe $y \in (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) - A$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\min\{d(y,x) : x \in A\}$. Como $y \in U_{n_0}$ y $U_{n_0} \subset \bigcup_{x\in A} B_d(x, \frac{1}{n_0})$, existe $x_0 \in A$, tal que $y \in B_d(x_0, \frac{1}{n_0})$ y $d(y, x_0) < \frac{1}{n_0}$. Esto contradice la elección de n_0. Por tanto, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{C}_n$ el conjunto de componentes $X - \operatorname{cl}_X(U_n)$. Por el Teorema 1.13, los elementos de cada $\mathcal{C}_n$ son abiertos.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $X - U_n \subset X - \operatorname{cl}_X(U_{n+1}) = \bigcup \mathcal{C}_{n+1}$. Como $X - U_n$ es compacto y los elementos de $\mathcal{C}_{n+1}$ son ajenos, el conjunto $\mathcal{D}_n = \{C \in \mathcal{C}_{n+1} : C \cap (X - U_n) \neq \emptyset\}$ es finito. Además,

$$\bigcup(\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n) = \bigcup\{C \in \mathcal{C}_{n+1} : C \subset U_n\} \subset U_n.$$

Sea $V_n = \operatorname{cl}_X(U_{n+1}) \cup (\bigcup(\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n))$. Luego, $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$ y $X - V_n \subset X - V_{n+1}$. Obsérvese que los conjuntos $\operatorname{cl}_X(U_{n+1})$, $\bigcup(\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n)$ y $\bigcup \mathcal{D}_n$ son conjuntos ajenos cuya unión es X. Por consiguiente, $X - V_n = \bigcup \mathcal{D}_n$. Además, como $X - V_n \subset X - U_{n+1}$, cada elemento de $\mathcal{D}_{n+1}$ es una componente de $X - V_n$. Por tanto, $\mathcal{D}_{n+1}$ es el conjunto de componentes de $X - V_n$.

Dado cualquier $y \in X - A$, definimos el conjunto F^y como sigue. Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = A$, existe $n_y \in \mathbb{N}$, tal que $y \notin U_{n_y}$. Luego, $y \notin V_{n_y}$. Sea $E^y_{n_y} \in \mathcal{D}_{n_y+1}$, tal que $y \in E^y_{n_y}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E^y_{n_y+n}$ el único elemento de $\mathcal{D}_{n_y+n+1}$ que cumple $E^y_{n_y+n-1} \subset E^y_{n_y+n}$. Hagamos $F^y = \bigcup\{E^y_{n_y+n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Obsérvese que F^y es un subconjunto abierto de X que está contenido en $X - \bigcup_{s \geq n_y} V_s = X - V_{n_y}$ y, por ende, $F_y \subset X - A$.

Sean $y, z \in X - A$. Supongamos que, para algunos $j, k \in \mathbb{N}$, $E_j^y \cap E_k^z \neq \emptyset$. Como $E_j^y \subset E_m^y$ y $E_k^z \subset E_m^z$, donde $m = \text{máx}\{j, k\}$, se tiene que $E_m^y \cap E_m^z \neq \emptyset$. Esto último implica que $E_m^y = E_m^z$. Luego, para cada $s \geq m$, $E_s^y = E_s^z$. Por tanto, $F^y = F^z$.

De esta forma, para cada $y, z \in X - A$, $F^y \cap F^z = \emptyset$ o $F^y = F^z$,. Como $X - A = \bigcup\{F^y : y \in X - A\}$, cada F^y es abierto en $X - A$ y $X - A$ es conexo, se tiene que $F^y = F^z$, para cualesquiera $y, z \in X - A$. Fijemos $y \in X - A$. Así, $X - A = F^y$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $D \in \mathcal{D}_{n+1}$, tomemos $p \in D$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $p \in E_k^y$. Sea $m_D = \text{máx}\{n + 1, k\}$. Luego, $p \in E_k^y \subset E_{m_D}^y$. Como D es conexo, $D \subset X - V_n \subset X - V_{m_D}$, $E_{m_D}^y$ es una componente de $X - V_{m_D}$ y $p \in D \cap E_{m_D}^y$, se cumple que $D \subset E_{m_D}^y$.

Como $\mathcal{D}_{n+1}$ es finito, podemos hacer $M_n = \text{máx}\{m_D : D \in \mathcal{D}_{n+1}\}$. Obsérvese que $M_n \geq n + 1$. De este modo, se satisface que $D \subset E_{M_n}^y$, para cualquier $D \in \mathcal{D}_{n+1}$. Por tanto, $X - V_n \subset E_{M_n}^y \subset X - V_{M_n}$; es decir, $V_{M_n} \subset X - E_{M_n}^y \subset V_n$. Hagamos $V = X - E_{M_n}^y$. Como $E_{M_n}^y$ es elemento de $\mathcal{D}_{M_n+1}$ se tiene que $E_{M_n}^y$ es abierto en X y conexo. Luego, V es cerrado en X, $X - V$ es conexo y $A \subset V_{M_n} \subset \text{int}_X(V) \subset V \subset V_n \subset U_n \subset U$. Esto concluye la demostración de este lema. $\square$

A continuación se enuncian dos resultados fundamentales de los continuos localmente conexos. El primero de ellos será utilizado en la prueba del Lema 3.11, mientras que el segundo será utilizado repetidamente en los apartados posteriores.

Teorema 1.32 ([20], Teorema 8.10). *Si X es un continuo localmente conexo y $\varepsilon > 0$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y subcontinuos localmente conexos $X_1, \ldots, X_k$ de X, tales que $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ y $\text{diám}(X_i) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Teorema 1.33 ([20], Teorema 8.26). *Si X es un continuo localmente conexo y A es un subconjunto abierto y conexo de X, entonces A es arco conexo.*

Uno de los resultados más resaltables en cuanto a propiedades de continuos localmente conexos es el que se formula en seguida. Este resultado asegura que a cualquier continuo localmente conexos se le puede dotar de una métrica tal que el continuo adquiere una "forma convexa", refiriéndonos con esto a una similitud con la convexidad en los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$. Pero antes se requieren las siguientes dos definiciones.

Definición 1.34. Sean X y Y espacios con métricas d y e, respectivamente. Una **isometría** es un isomorfismo $h : X \to Y$, tal que, para cada $a, b \in X$, $e(h(a), h(b)) = d(a, b)$.

Definición 1.35. Sea X un espacio compacto con métrica d. Decimos que d es una **métrica convexa** para X si, para cada $p, q \in X$, existe una isometría $\gamma : [0, d(p,q)] \to \gamma([0, d(p,q)])$, tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(d(p,q)) = q$.

Ejemplo 1.36. Los subespacios cerrados de $\mathbb{R}^n$, tales que su métrica usual es una métrica convexa, coinciden con los subespacios cerrados convexos de $\mathbb{R}^n$, es decir, aquellos que contienen cada segmento de recta que une a dos de sus puntos.

Teorema 1.37 ([18], Teorema 4)**.** *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X admite una métrica convexa.*

Aunque la definición de métrica convexa aquí mostrada es distinta a la dada en [18], la Proposición 10.4 de [16] garantiza que estas dos definiciones son equivalentes en el caso de los continuos (más aún, para espacios métricos compactos).

1.2.4. Gráficas finitas, dendritas y dendritas locales

En este apartado se estudian algunas clases de continuos localmente conexos, las cuales son por sí mismas de gran importancia. El estudio de la unicidad de hiperespacios de continuos localmente conexos (al menos de los hiperespacios $C_n(X)$) ha pasado por estas clases, a saber, gráficas finitas, dendritas y dendritas locales (incluyendo a las familias $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{LD}$), pasando también por una clase de continuos que engloba a estas tres y la cual se examina más adelante.

Definición 1.38. Un continuo X es una **gráfica finita** si es la unión de una familia finita de arcos, tales que cada par de ellos, o son ajenos, o se intersectan sólo en uno o dos de sus puntos extremos.

Primero se establecen dos propiedades básicas y notables de las gráficas finitas. La primera de estas propiedades afirma que esta clase de continuos entra dentro de los continuos localmente conexos.

Lema 1.39. *Toda gráfica finita es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Aplicaremos inductivamente el Teorema 1.30 para probar que toda unión finita de continuos localmente conexos, siempre que sea conexa, es un continuo localmente conexo. El caso $n = 2$ es precisamente el Teorema 1.30. Supongamos que la afirmación vale para cada unión conexa de n o menos continuos localmente conexos. Sea $\mathcal{A}$ una familia de $n+1$ continuos localmente conexos distintos por pares, tal que $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo. Tomemos $B \in \mathcal{A}$. Sean $K_1, \ldots, K_r$ las componentes de $\bigcup(\mathcal{A} - \{B\})$. Obsérvese que $r \leq n$ y que, para cualquier $j \in \{1, \ldots, r\}$, se cumple que $K_j = \bigcup\{E \in \mathcal{A} - \{B\} : E \cap K_j \neq \emptyset\}$. Luego, K_j es conexo y es la unión de n o menos continuos localmente conexos. Por hipótesis de inducción, se tiene que K_j es un continuo localmente conexo. Obsérvese que, si $B \cap K_1 = \emptyset$, entonces K_1 y $B \cup \bigcup\{K_i : i \in \{2, \ldots, r\}\}$ son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de $\bigcup \mathcal{A}$ cuya unión es $\bigcup \mathcal{A}$. Como esto contradice la conexidad de $\bigcup \mathcal{A}$, se cumple que $B \cap K_1 \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 1.30, obtenemos que $B \cup K_1$ es un continuo localmente conexo. Como $\bigcup \mathcal{A} = (B \cup K_1) \cup \bigcup\{K_i : i \in \{2, \ldots, r\}\}$ y $r \leq n$, se tiene que $\bigcup \mathcal{A}$ es la unión de n o menos continuos localmente conexos. De nuevo por hipótesis inductiva, concluimos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un continuo localmente conexo. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Como toda gráfica finita es la unión de una cantidad finita de arcos, los cuales son continuos localmente conexos, el párrafo anterior muestra que las gráficas finitas son continuos localmente conexos. □

Lema 1.40 ([20], Proposición 9.2)**.** *Si X y Y son gráficas finitas, tales que $X \cap Y$ es un conjunto finito y no vacío, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.*

En la siguiente definición se describe una clase de continuos que sólo tiene algunas apariciones incidentales en este texto, por ejemplo en el Lema 1.42, que se usa en las pruebas del Teorema 3.8, del Lema 3.11, y del Corolario 3.23.

Definición 1.41. Un continuo X es un **árbol**, si X es una gráfica finita y no contiene curvas cerradas simples.

Lema 1.42. *Sea X un espacio topológico arco conexo. Si F es un subconjunto finito de X, entonces existe un árbol T contenido en X, tal que $F \subset T$.*

Demostración. Demostraremos este lema por inducción sobre el número de elementos de F. El caso $n = 2$ se sigue directamente de que X es arco conexo. Supongamos que el lema se cumple para todo conjunto finito con a lo más n elementos. Sean F un subconjunto de X con n elementos, x un punto en X y T un árbol contenido en X con $F \subset T$. Si $x \in T$, entonces $F \cup \{x\} \subset T$. Supongamos entonces que $x \notin T$. Aplicando el Lema 1.8 obtenemos un arco α contenido en X, tal que x es punto extremo de α y $\alpha \cap T = \{q\}$, donde q

es el punto extremo de α distinto de x. Por el Lema 1.40, se tiene que $T \cup \alpha$ es una gráfica finita. Ahora, mostremos que $T \cup \alpha$ es un árbol.

En efecto, supongamos que $T \cup \alpha$ contiene una curva cerrada simple S. Como T es un árbol y α es un arco, S no está contenido ni en T ni en α. Además, como T y α son compactos, los conjuntos $T - \alpha = (T \cup \alpha) - \alpha$ y $\alpha - T = (T \cup \alpha) - T$ son subconjuntos abiertos y ajenos de $T \cup \alpha$ que interconectan a S. En esta forma, el conjunto $S - (T \cap \alpha) = S - \{q\}$ es disconexo. Esto es una contradicción pues una curva cerrada simple no se hace disconexa al quitarle sólo uno de sus puntos. Por lo tanto, $T \cup \alpha$ es un árbol. Así, se concluye la demostración. $\square$

El siguiente lema es utilizado en la prueba del Teorema 2.15.

Lema 1.43. *Sea X un continuo arco conexo. Si $\mathcal{G}$ es una colección finita de gráficas finitas contenidas en X, tal que cada par de ellas son ajenas, entonces existe una gráfica finita G contenida en X, tal que $\bigcup \mathcal{G} \subset G$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_k\}$, con $G_i \neq G_j$ siempre que $i \neq j$. Como G_1 y $\bigcup\{G_i : 2 \leq i \leq k\}$ son subconjuntos cerrados de X ajenos, podemos aplicar el Lema 1.8 para obtener un arco α_1, tal que $\alpha_1 \cap G_1 = \{a_1\}$ y $\alpha_1 \cap (\bigcup\{G_i : 2 \leq i \leq k\}) = \{b_1\}$, donde a_1 y b_1 son los puntos extremos de α_1. Podemos suponer que $b_1 \in G_2$ (renombrando si es necesario). Aplicando dos veces el Lema 1.40, obtenemos que el conjunto $D_1 = G_1 \cup \alpha_1 \cup G_2$ es una gráfica finita. Obsérvese, además, que D_1 es ajeno a $\bigcup\{G_i : 2 < i\}$. Supongamos que hemos definido los arcos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, con $1 \leq n < k - 1$, de tal forma que el conjunto $D_n = \bigcup\{G_i : i \leq n + 1\} \cup \bigcup\{\alpha_i : i \leq n\}$ es una gráfica finita ajena a $\bigcup\{G_i : n + 1 < i\}$. Obsérvese que estos dos últimos conjuntos son cerrados en X y ajenos. Aplicando de nuevo el Lema 1.8, obtenemos un arco α_{n+1}, tal que $\alpha_{n+1} \cap D_1 = \{a_{j+1}\}$ y $\alpha_{n+1} \cap \bigcup\{G_i : n + 1 < i\} = \{b_{j+1}\}$. Podemos suponer que $b_{n+1} \in G_{n+2}$ (renombrando si es necesario). De nuevo por el Lema 1.40, obtenemos que el conjunto $D_{n+1} = D_n \cup \alpha_{n+1} \cup G_{n+2}$ es una gráfica finita. Además, si $n + 1 < k - 1$, entonces D_{n+1} es ajeno a $\bigcup\{G_i : n + 2 < i\}$.

De este modo, D_{k-1} es una gráfica finita que contiene a $\bigcup\{G_i : i \leq k\}$. Esto concluye la demostración del lema. $\square$

Los siguientes dos resultados son caracterizaciones útiles que se basan en el concepto de orden. Su uso más relevante aquí se da en las pruebas de los Teoremas 3.43 y 2.14.

Teorema 1.44 ([20], Proposición 9.5)**.** *Si X es un continuo no degenerado, entonces* $\operatorname{ord}(x, X) \leq 2$ *para cada $x \in X$ si, y sólo si, X es un arco o una curva cerrada simple.*

Teorema 1.45 ([20], Teorema 9.10)**.** *Si X es un continuo, entonces X es una gráfica finita si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(I) $\operatorname{ord}(p, X)$ *es finito, para cada $p \in X$.*

(II) $\operatorname{ord}(p, X) \leq 2$ *para todos, salvo una cantidad finita, de $p \in X$.*

Una aplicación del Teorema 1.45, es el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.46. *Todo subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

Demostración. Sean X una gráfica finita y A un subcontinuo de X. Mostraremos que A es una gráfica finita. Dado $p \in A$, por el Teorema 1.24, se tiene que $\operatorname{ord}(p, A) \leq \operatorname{ord}(p, X)$. Aplicando el Teorema 1.45 obtenemos que $\operatorname{ord}(p, X)$ es finito. Así, $\operatorname{ord}(p, A)$ es finito. Además, si p cumple que $\operatorname{ord}(p, X) \leq 2$, entonces $\operatorname{ord}(p, A) \leq 2$. De esta forma cada $p \in A$ cumple que $\operatorname{ord}(p, A)$ es finito, $\{q \in A : \operatorname{ord}(q, A) > 2\} \subset \{q \in A : \operatorname{ord}(q, X) > 2\}$ y, por consiguiente, los puntos $q \in A$ que no cumplen $\operatorname{ord}(p, A) \leq 2$ son una cantidad finita. Aplicando de nuevo el Teorema 1.45, se concluye que A es una gráfica finita. □

A continuación se da una caracterización de las gráficas finitas que usa conjuntos que desconectan al espacio total. Ésta sirve para probar otra caracterización (Teorema 2.3) en términos del concepto de dimensión (Definición 1.67).

Teorema 1.47 ([20], Teorema 9.24)**.** *Sea X un continuo no degenerado. X es una gráfica finita si, y sólo si, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier subconjunto A de X con exactamente n elementos se cumple que $X - A$ es disconexo.*

Ahora se presentan cuatro clases más de continuos localmente conexos. La aparición de estos continuos a lo largo de este trabajo es algo breve pero algunos resultados principales (como los Corolarios 3.20 y 3.24) utilizan fuertemente algunas de sus propiedades.

Definición 1.48. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. La **familia** $\mathfrak{D}$ es la colección de las dendritas X, tales que $E(X)$ es cerrado en X.

Ejemplo 1.49. Los árboles, y en particular los arcos, son dendritas. En efecto, los árboles son gráficas finitas que no contienen curvas cerradas simples y, por el Lema 1.39, son continuos localmente conexos. Más aún, veremos en el Lema 1.52 que las gráficas finitas y, por ende, los árboles, tienen un conjunto de puntos extremos cerrado (de hecho finito) y, por tanto, que los árboles pertenecen a la familia $\mathfrak{D}$.

Definición 1.50. Una **dendrita local** es un continuo, tal que cada punto de X posee una vecindad en X que es una dendrita. La **familia** $\mathfrak{LD}$ es la clase formada por los continuos X, tales que cada punto de X posee una vecindad en X que pertenece a $\mathfrak{D}$.

El primer resultado que se expone sobre dendritas es una caracterización interesante en términos de orden y cardinalidad. Se utiliza en la demostración del Corolario 3.23.

Teorema 1.51 ([20], Teorema 10.13)**.** *Sea X un continuo no degenerado. X es una dendrita si, y sólo si, se cumple que* $\operatorname{ord}(p, X) = \operatorname{c}(p, X)$*, para cualquier $p \in X$, tal que* $\operatorname{ord}(p, X)$ *es finito o* $\operatorname{c}(p, X)$ *es finito.*

A continuación, se establece que tanto las dendritas locales como la familia $\mathfrak{LD}$ contienen a las gráficas finitas.

Lema 1.52. *Las gráficas finitas y las dendritas son dendritas locales. Más aún, las gráficas finitas y las dendritas de la familia $\mathfrak{D}$ pertenecen a la familia $\mathfrak{LD}$.*

Demostración. Si X es una dendrita (o un elemento de $\mathfrak{D}$), entonces X es una vecindad de cada punto la cual es una dendrita (o un elemento de $\mathfrak{D}$). Esto implica que X es una dendrita local (o pertenece a $\mathfrak{D}$). Así, las dendritas son dendritas locales y la familia $\mathfrak{D}$ está contenida en $\mathfrak{LD}$. Probaremos que cada gráfica finita es una dendrita local y que pertenece a $\mathfrak{LD}$.

Sean X una gráfica finita y $A_1, \ldots, A_n$ una colección finita de arcos, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y cada par de ellos o son ajenos o sólo se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{n} E(A_i)$. Obsérvese que E es un conjunto finito y, por ende, es cerrado en X. Si $x \in A_i - E(A_i)$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x \in X - \bigcup_{j \neq i} A_j \subset A_i$. Como cada A_j es cerrado en X y, por el Ejemplo 1.49 se cumple que A_i es una dendrita, se tiene que A_i es una dendrita que es vecindad de x. Ahora supongamos que $x \in E(A_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_i$. Sean $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_j\}$ y $K = \{k \in \{1, \ldots, n\} : x \notin A_k\}$. Dado $j \in J$, por el Lema 1.7, existe un subarco B_j de A_j, tal que $B_j \subset X - (E - \{x\})$ y x es un punto extremo de B_j. Sea C_j el subarco que complementa a B_j en A_j. Obsérvese que C_j y A_k son cerrados en X, por ser compactos. Luego, el conjunto $U = X - \left(\left(\bigcup_{j\in J} C_j\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K} A_k\right)\right)$ es abierto en X. Sea $V = \bigcup_{j\in J} B_j$. Como $x \in U \subset V$, se cumple que V es una vecindad de x. Obsérvese que $B_j \cap B_m = \{x\}$, para cada $j, m \in J$. Así, V es una gráfica finita, lo cual implica, por el Lema 1.39, que V es un continuo localmente conexo. Supongamos que C es una curva cerrada simple contenida en V. Luego, $C - \{x\}$ es un conjunto conexo (una curva cerrada simple no se desconecta al restarle a lo más un punto). Note que $B_j - \{x\} = V - \bigcup_{m\neq j} B_m$. Por tanto, cada $B_j - \{x\}$ es abierto en V y es ajeno a cualquier otro conjunto $B_m - \{x\}$. Esto implica, por conexidad, que $C - \{x\} \subset B_j$ para algún $j \in J$. Así, $C \subset B_j$, lo cual es una contradicción. Esto implica que V no contiene curvas cerradas simples. Por tanto, V es una dendrita. De este modo, V es una vecindad de x que es una dendrita. Más aún, como cada $B_j - \{x\}$ es abierto en V, por el Teorema 1.24 se cumple que $\text{ord}(y, V) = \text{ord}(x, B_j)$, para cualesquiera $j \in J$ y $y \in B_j - \{x\}$. En particular, se cumple que $E(V) - \{x\} \subset \bigcup_{j\in J} E(B_j)$. Luego, $E(V)$ es finito y cerrado en X. Esto implica que $\bigcup B_j$ es un dendrita de la familia $\mathfrak{D}$. Como la elección de x fue arbitraria, concluimos que X es una dendrita local de la familia $\mathfrak{LD}$. □

Ahora se enuncia el siguiente resultado, el cual es utilizado en la prueba del Teorema 3.10.

Teorema 1.53 ([17], Teorema 4 (i))**.** *Un continuo X es una dendrita local si, y sólo si, es localmente conexo y contiene a lo más una cantidad finita de curvas cerradas simples.*

1.3. Variedades

En esta sección se estudia un tipo de espacio topológico diferente de los discutidos hasta ahora: las variedades (topológicas). De forma más precisa, el concepto que se expresa es el denominado variedad con frontera, pero por razones de simplicidad en el lenguaje, en este trabajo se utiliza el concepto de variedad (sin hacer uso de la expresión “con frontera”). Además, aunque las definiciones más usadas para este concepto usan condiciones adicionales a la que aquí se establecen, para los propósitos perseguidos bastará la propiedad que se expresa en la siguiente definición (ser localmente homeomorfo a una n-celda). Por otro lado, la razón principal para estudiar este concepto será la de probar algunas de las características de lo que se denomina frontera de una variedad.

En primer lugar, se definen los dos conceptos que hemos mencionado.

Definición 1.54. Dado un número natural n, un espacio topológico M es una n**-variedad** si cada punto $x \in M$ posee una vecindad en M, que es una n-celda.

Definición 1.55. Dada una n-variedad M, denominamos, respectivamente, **interior variedad** de M y **frontera variedad** de M a los conjuntos

$$\begin{aligned} &\operatorname{int}^{\partial} M = \{x \in M : x \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\} \ \text{ y} \\ &\quad \partial M = M - \operatorname{int}^{\partial} M. \end{aligned}$$

Para aterrizar estos conceptos, a continuación se dan, sin prueba, algunos ejemplos de fronteras de variedades. El primero de ellos y su equivalencia, el segundo ejemplo, son usados más adelante.

Ejemplo 1.56. Dado $n \in \mathbb{N}$, B^n es una n-variedad y $\partial B^n = S^{n-1}$. Equivalentemente (véase el Teorema 1.60 y el Lema 1.59), $[0,1]^n$ es una n-variedad y $\partial[0,1]^n = \{x \in I^n : \text{una de las coordenadas cartesianas de } x \text{ es } 0 \text{ o } 1\}$. Por su parte la botella de Klein, denotada por K, y la 2-esfera, denotada por S^2, son ejemplos de 2-variedades sin frontera; es decir, $\partial K = \emptyset$ y $\partial S^2 = \emptyset$.

El primer resultado sobre variedades es la invariancia de sus interiores y fronteras. Aunque es un resultado simple, es muy importante.

Teorema 1.57. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y M y N m-variedades. Si $h : M \to N$ es un homeomorfismo, entonces se cumple que $h(\operatorname{int}^{\partial} M) = \operatorname{int}^{\partial} N$ y, por consiguiente, $h(\partial M) = \partial N$.*

Demostración. Como h^{-1} es también un homeomorfismo, para probar la primera igualdad basta mostrar que $h(\operatorname{int}^{\partial} M) \subset \operatorname{int}^{\partial} N$. Pero esto último es inmediato porque si $p \in \operatorname{int}^{\partial} M$ y U es una vecindad de p en M homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, entonces $h(U)$ es una vecindad de $h(p)$ en N homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, así que $h(p) \in \operatorname{int}^{\partial} N$.

La segunda igualdad se sigue de la primera y de que h es una biyección porque $h(\partial M) = h(M - \operatorname{int}^{\partial} M) = h(M) - h(\operatorname{int}^{\partial} M) = N - \operatorname{int}^{\partial} N = \partial N$. □

A continuación se formula el denominado Teorema de Invariancia del Dominio, el cual es necesario para probar el siguiente lema. Este último resultado establece la equivalencia de los conceptos interior topológico (en $\mathbb{R}^n$) e interior de variedades para todas las n-variedades que son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente, y más significativo para los propósitos perseguidos, dicho lema garantiza la equivalencia entre la frontera de variedades y la frontera topológica en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.58 ([4], Teorema (15.B.4)). *Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $h : U \to \mathbb{R}^n$ es un encaje, entonces $h(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Lema 1.59. *Si C es una n-variedad y C es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\operatorname{int}^{\partial} C = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C) \quad y \quad \partial C = \operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^n}(C).$$

Demostración. Tomemos $v \in \operatorname{int}^{\partial} C$. Sea U una vecindad de v en C, tal que U es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Luego, existe un encaje $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $h(\mathbb{R}^n) = U$. Por el Teorema 1.58, se tiene que U es abierto en $\mathbb{R}^n$. Esto implica que $v \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Así, $\operatorname{int}^{\partial} C \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Recíprocamente, supongamos que $v \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Luego, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon) \subset C$. Como $B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, tenemos que $v \in \operatorname{int}^{\partial} C$. Así, $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C) \subset \operatorname{int}^{\partial} C$. Por tanto, $\operatorname{int}^{\partial} C = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Además, como C es cerrado en $\mathbb{R}^n$, esto implica que $\operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^n}(C) = \partial C$. □

En seguida se muestra un resultado que permite identificar n-celdas en $\mathbb{R}^n$ con cierta facilidad. En particular, asegura que los primeros dos espacios del Ejemplo 1.56 son n-celdas. Más aún, junto con el resultado anterior, justifica la representación de las fronteras (como variedades) de los espacios que se exponen en dicho ejemplo.

Teorema 1.60. *Todo subconjunto convexo, cerrado, acotado y con interior no vacío C de $\mathbb{R}^n$ es una n-celda.*

Demostración. Sea C uno de tales conjuntos. Veremos primero el caso en que $0 \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Sea $R > 0$, tal que $RD^n \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$, en donde RD^n denota el disco de radio R y centro 0 de $\mathbb{R}^n$.

Como C es acotado, podemos definir la función $\rho : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, tal que

$$v \xmapsto{\rho} \sup\{r > 0 : rv \in C\}.$$

Obsérvese que, para todo $v \in S^{n-1}$, se satisface que $\rho(v) > R$ y, como C es cerrado en $\mathbb{R}^n$, $\rho(v)v \in C$.

Demostraremos que ρ es continua. Sean $v \in S^{n-1}$ y $0 < \varepsilon < \rho(v)$. Como C es convexo, $\{tv : 0 \leq t \leq \rho(v)\} \subset C$. Luego, $p = (\rho(v) - \frac{\varepsilon}{2})v \in C$. Si $\eta_1 = \frac{R\varepsilon}{2\rho(v)}$, $u \in B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_1)$ y $w = \rho(v)v + \frac{2\rho(v)}{\varepsilon}(u - \rho(v)v)$, entonces

$$\|w\| = \frac{2\rho(v)}{\varepsilon}\left\|\frac{\varepsilon}{2}v + u - \rho(v)v\right\| = \frac{2\rho(v)}{\varepsilon}\|u - p\| < \frac{2\rho(v)}{\varepsilon}\frac{R\varepsilon}{2\rho(v)} = R.$$

Así, $w \in RD^n$. Como $u = \rho(v)v + \frac{\varepsilon}{2\rho(v)}(w - \rho(v)v)$ y $\varepsilon < \rho(v) < 2\rho(v)$, se cumple que u es parte del segmento de línea que une a $\rho(v)v$ con w. Como

C es convexo y tanto $\rho(v)v$ como w son elementos de C, se tiene que $u \in C$. Por tanto, $B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_1) \subset C$.

Por otro lado, obsérvese que $q = (\rho(v) + \frac{\varepsilon}{2})v \notin C$. Además, se tiene que $q \in B_{\mathbb{R}^n}(\rho(v)v, \varepsilon)$. Como C es cerrado, existe $\eta_2 > 0$, tal que $B_{\mathbb{R}^n}(q, \eta_2) \subset B_{\mathbb{R}^n}(\rho(v)v, \varepsilon) - C$. Sea $\delta = \text{mín}\{\frac{\eta_1}{\rho(v)-\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\eta_2}{\rho(v)+\frac{\varepsilon}{2}}\}$. Luego, si $u \in B_{\mathbb{R}^n}(v, \delta) \cap S^{n-1}$, entonces

$$\left\|\left(\rho\left(v\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) u - p\right\| = \left(\rho\left(v\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|u - v\| < \left(\rho\left(v\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\eta_1}{\rho\left(v\right) - \frac{\varepsilon}{2}} = \eta_1;$$

es decir, $(\rho(v) - \frac{\varepsilon}{2})u \in B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_1)$. De forma similar, se puede demostrar que $(\rho(v) + \frac{\varepsilon}{2})u \in B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_2)$. Como $B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_1) \subset C$ y $B_{\mathbb{R}^n}(p, \eta_2) \cap C = \emptyset$, concluimos que $\rho(v) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \rho(u) \leq \rho(v) + \frac{\varepsilon}{2}$; es decir, que $|\rho(u) - \rho(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Esto prueba que ρ es continua.

Ahora, definimos la función $\phi : C \to D^n$ por

$$v \overset{\phi}{\longmapsto} \begin{cases} \frac{v}{\rho(\frac{v}{\|v\|})} & \text{si } v \neq 0, \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Es claro que ϕ es continua en todo punto distinto de 0. Para mostrar que ϕ es continua en 0, sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C - \{0\}$, tal que $\text{lím}\, v_n = 0$. Luego, $\rho(\frac{v_n}{\|v_n\|}) > R$ y $\|\phi(v_n)\| < R\|v_n\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De este modo, se tiene que $\text{lím}\, \phi(v_n) = 0$. Por tanto, ϕ es continua.

Demostraremos que ϕ es inyectiva. Sean $u, v \in C$ con $\phi(u) = \phi(v)$. Si $u = 0$, entonces $\phi(v) = 0$ y, por consiguiente, $v = 0$. De esta manera, podemos suponer que $u \neq 0 \neq v$. Luego, $u = \lambda v$, donde $\lambda = \frac{\rho(\frac{u}{\|u\|})}{\rho(\frac{v}{\|v\|})}$. Como $\lambda > 0$, se tiene que $\frac{u}{\|u\|} = \frac{\lambda v}{\|\lambda v\|} = \frac{\lambda v}{\lambda\|v\|} = \frac{v}{\|v\|}$. Así, $\rho(\frac{u}{\|u\|}) = \rho(\frac{v}{\|v\|})$ y $u = v$. Por tanto, ϕ es inyectiva.

Ahora, mostremos que ϕ es sobreyectiva. Tomemos $w \in D^n$. Si $w = 0$, entonces $\phi(0) = w$. Supongamos que $w \neq 0$. Luego, si $t = \rho(\frac{w}{\|w\|})$, entonces $\frac{tw}{\|tw\|} = \frac{tw}{t\|w\|} = \frac{w}{\|w\|}$ y $\rho(\frac{tw}{\|tw\|}) = t$. Además, como $\|w\| \leq 1$, se tiene que $t\|w\| \leq t$ y, como C es convexo, $tw = t\|w\|\frac{w}{\|w\|} \in C$. Así, $\phi(tw) = \frac{tw}{t} = w$. Esto prueba que ϕ es sobreyectiva.

En esta forma, ϕ es una biyección continua. Como C es compacto y S^n es Hausdorff, concluimos que ϕ es un homeomorfismo y que C es una n-celda.

Por último demostremos el caso general. Sea $x_0 \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(C)$. Obsérvese que la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$v \overset{h}{\longmapsto} v - x_0$$

es un homeomorfismo, tal que $h(x_0) = 0$. Más aún, $h(x_0) \in h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(C)) \subset h(C)$ y $h(\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(C))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$; es decir, $0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(h(C))$. Además, dados cualesquiera $u, v \in C$ y $t \in [0,1]$, se cumple

$$\begin{aligned} h(u) + t(h(v) - h(u)) &= (u - x_0) + t((v - x_0) - (u - x_0)) \\ &= u - x_0 + t(v - u) \\ &= h(u + t(v - u)). \end{aligned}$$

Como C es convexo se tiene que $u + t(v - u) \in C$ y, en consecuencia, $h(u) + t(h(v) - h(u)) \in h(C)$. Esto implica que $h(C)$ es convexo. Aplicando el caso anterior a $h(C)$, obtenemos que $h(C)$ es un n-celda. Por lo tanto, C es un n-celda. Con esto terminamos la prueba de este teorema. $\square$

El siguiente resultado muestra una característica notable de las fronteras de variedades para n-celdas, el cual expresa que cualquier homeomorfismo de la frontera en sí misma se puede extender al espacio completo.

Teorema 1.61. *Si C es una n-celda y $h : \partial C \to \partial C$ es un homeomorfismo, entonces h se puede extender a un homeomorfismo de C a C.*

Demostración. Sea $g : C \to D^n$ un homeomorfismo. Por el Teorema 1.57, se tiene que $g(\partial C) = \partial D^n = S^{n-1}$. Luego, $f = g|_{\partial C}^{S^{n-1}} \circ h \circ (g|_{\partial C}^{S^{n-1}})^{-1}$ es un homeomorfismo de S^{n-1} en S^{n-1}. Definimos la función $\phi : D^n \to D^n$ por

$$v \overset{\phi}{\longmapsto} \begin{cases} \|v\| f(\frac{v}{\|v\|}) & \text{si } v \neq 0, \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Es claro que ϕ es continua en todo punto diferente de 0. Además, obsérvese que, para cada $v \in D^n - \{0\}$, se cumple que $\| \|v\| f(\frac{v}{\|v\|}) \| = \|v\|$. Esto implica que $\lim_{v \to 0} \phi(v) = 0$. Así, ϕ es continua.

Para mostrar que ϕ es inyectiva, tomemos $u, v \in D^n$ con $\phi(u) = \phi(v)$. Probaremos que $u = v$. Si $u = 0$, entonces $\phi(v) = 0$ y $v = 0$. Así, podemos suponer que $u \neq 0 \neq v$. Luego, se cumple que $u = \lambda v$, donde $\lambda = \frac{f(\frac{v}{\|v\|})}{f(\frac{u}{\|u\|})}$. Como $\lambda > 0$, se tiene que $f(\frac{u}{\|u\|}) = f(\frac{\lambda v}{\|\lambda v\|}) = f(\frac{\lambda v}{\lambda \|v\|}) = f(\frac{v}{\|v\|})$. Esto implica que $\|u\| = \|v\|$ y, como f es un homeomorfismo, $\frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|}$. Así, $u = v$. Esto prueba que ϕ es inyectiva.

Ahora mostremos que ϕ es sobreyectiva. Tomemos $w \in D^n$. Si $w = 0$, entonces $\phi(0) = w$. Supongamos que $w \neq 0$. Luego, si $z = \|w\| f^{-1}(\frac{w}{\|w\|})$, entonces $\|z\| = \|w\|$, $\frac{z}{\|z\|} = f^{-1}(\frac{w}{\|w\|})$ y $f(z) = \|w\| f(f^{-1}(\frac{w}{\|w\|})) = \|w\| \frac{w}{\|w\|} = w$. Así, ϕ es sobreyectiva.

De este modo, hemos probado que ϕ es una biyección continua. Como D^n es compacto y Hausdorff, deducimos que ϕ es un homeomorfismo. Además, $\phi(S^{n-1}) = f(S^{n-1}) = S^{n-1}$ y $\phi|_{S^{n-1}}^{S^{n-1}} = f$. Luego, si $\xi = g^{-1} \circ \phi \circ g$, entonces ξ es un homeomorfismo de C en sí mismo y $\xi|_C^C = (g|_C^{S^{n-1}})^{-1} \circ \phi|_{S^{n-1}}^{S^{n-1}} \circ g|_C^{S^{n-1}} = (g|_C^{S^{n-1}})^{-1} \circ f \circ g|_C^{S^{n-1}} = h$. Esto concluye la demostración de este resultado. $\square$

Los siguientes dos lemas permiten obtener n-celdas a partir de otras n-celdas por medio de la "contracción" de un subconjunto particular a un punto y dan una expresión de la frontera como variedad del espacio resultante. Resultan de utilidad en la prueba de los Teoremas 1.113 y 1.115.

Lema 1.62. *Si K es una n-celda, $T = K \times [0,1]$ y $C = K \times \{0\}$, entonces T/C (la identificación en T de C a un punto) es una $n+1$-celda y*

$$\partial(T/C) = \{\{x\} : x \in \partial T - C\} \cup \{C\}.$$

Demostración. Sea $E = [0,1]^n \times \{0\}$. Demostraremos primero que el espacio cociente $[0,1]^{n+1}/E$ es una $(n+1)$-celda y que $\partial([0,1]^{n+1}/E) = \{\{z\} : z \in \partial[0,1]^{n+1} - E\} \cup \{E\}$. Sea $\Delta = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : 0 \leq x_i \leq x_{n+1} \leq 1,,$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$ (el cono geométrico en $\mathbb{R}^{n+1}$ con base $[0,1]^n \times \{1\}$ y vértice $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$). Obsérvese que $x_i x_{n+1} \leq x_{n+1}$, para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$. De esta manera, podemos definir la función $\kappa : [0,1]^{n+1}/E \to \Delta$ como sigue:

$$w \xmapsto{\kappa} \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } w = E, \\ (x_1 x_{n+1}, \ldots x_n x_{n+1}, x_{n+1}) & \begin{array}{l}\text{si } w = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\} \text{ para} \\ \text{algún } (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}.\end{array} \end{cases}$$

Además, sea $q : [0,1]^{n+1} \to [0,1]^{n+1}/E$ la función natural del cociente; es decir,

$$z \xmapsto{q} \begin{cases} E & \text{si } z \in E, \\ \{z\} & \text{si } z \notin E. \end{cases}$$

Para mostrar que κ es continua, basta probar que $\kappa \circ q : [0,1]^{n+1} \to \Delta$ es continua. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$. Obsérvese que si $x \in E$, entonces se satisface que $x_{n+1} = 0$ y $\kappa \circ q(x) = \mathbf{0} = (x_1 x_{n+1}, \ldots x_n x_{n+1}, x_{n+1})$. Similarmente, si $x \notin E$, entonces $\kappa \circ q(x) = (x_1 x_{n+1}, \ldots, x_n x_{n+1}, x_{n+1})$. Así, $\kappa \circ q(x) = (x_1 x_{n+1}, \ldots x_n x_{n+1}, x_{n+1})$, para cualquier $x \in [0,1]^{n+1}$. Por tanto, $\kappa \circ q$ es continua. Tenemos así que κ es continua.

Ahora probemos que κ es inyectiva. Sean $z, w \in [0,1]^{n+1}/E$, tales que $\kappa(z) = \kappa(w)$. Supongamos que $z \neq E$. Luego, $z = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\}$ y

$\kappa(z) = (x_1x_{n+1}, \ldots, x_nx_{n+1}, x_{n+1})$, para algún $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$. Obsérvese que $x_{n+1} \neq 0$. Así, $\kappa(z) \neq \mathbf{0}$. Esto implica que $w \neq E$. Luego, existe $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$, tal que $w = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\}$. Se tiene que $(y_1y_{n+1}, \ldots, y_ny_{n+1}, y_{n+1}) = \kappa(w) = \kappa(z) = (x_1x_{n+1}, \ldots, x_nx_{n+1}, x_{n+1})$. Por tanto, $y_{n+1} = x_{n+1} \neq 0$. Como para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $y_iy_{n+1} = x_ix_{n+1}$, lo anterior implica que $y_i = x_i$. Así, $w = z$. Ahora supongamos que $z = E$. Por el caso anterior, se satisface que $w = E$. De este modo, en cualquiera de los dos casos se cumple que $z = w$. Esto prueba que κ es inyectiva.

Mostraremos ahora que κ es sobreyectiva. Tomemos $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Delta$. Si $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = \mathbf{0}$, entonces $\kappa(E) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$. Supongamos que $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \neq \mathbf{0}$. Como cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ cumple que $0 \leq z_j \leq z_{n+1}$, esto implica que $z_{n+1} \neq 0$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $0 \leq \frac{z_i}{z_{n+1}} \leq 1$. De este modo, $(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, z_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} - E$ y $\kappa(\{(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, z_{n+1})\}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$. Por lo tanto, κ es sobreyectiva. Así, κ es una biyección y, más aún, existe la función inversa de κ; es decir, $\kappa^{-1} : \Delta \to [0,1]^{n+1}/E$, y está dada por

$$z \xmapsto{\kappa^{-1}} \begin{cases} E & \text{si } z = \mathbf{0}, \\ \{(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, z_{n+1})\} & \text{si } z \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

(donde $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$). Como $[0,1]^{n+1}/E$ es compacto (por ser la imagen de $[0,1]^{n+1}$ bajo q) y Δ es Hausdorff, deducimos que κ es un homeomorfismo. Obsérvese que Δ es un cono geométrico de $[0,1]^n \times \{1\}$ y que, por tanto, Δ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$. Además, claramente Δ es un subconjunto cerrado, acotado y con interior no vacío de $\mathbb{R}^{n+1}$. Aplicando el Teorema 1.60, obtenemos que Δ es una $(n+1)$-celda. Por tanto, $[0,1]^{n+1}/E$ es una $(n+1)$-celda.

Por otro lado, por el Teorema 1.57, se satisface que $\kappa(\partial([0,1]^{n+1}/E)) = \partial\Delta$. Además, por el Lema 1.59, se cumple

$$\begin{aligned} \partial\Delta &= \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^{n+1}}(\Delta) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Delta : x_i = 0 \text{ o } x_i = x_{n+1}, \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ &\qquad\qquad \text{o } x_{n+1} = 1\} \\ &= \left(\bigcup\{(x_{n+1}F) \times \{x_{n+1}\} : x_{n+1} \in [0,1]\}\right) \cup ([0,1]^n \times \{1\}) \\ &= \{\mathbf{0}\} \cup \left(\bigcup\{(x_{n+1}F) \times \{x_{n+1}\} : x_{n+1} \in (0,1]\}\right) \cup ([0,1]^n \times \{1\}), \end{aligned}$$

en donde $F = \{(u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^{n+1} : u_i = 0 \text{ o } u_i = 1 \text{ para alguna } i \in \{1, \ldots, n\}\}$ y $x_{n+1}F$ denota el conjunto formado por los elementos de F

multiplicados por x_{n+1}. Obsérvese que $\kappa \circ q(F \times \{x_{n+1}\}) = (x_{n+1}F) \times \{x_{n+1}\}$ y que $\kappa \circ q([0,1]^n \times \{1\}) = [0,1]^n \times \{1\}$. Así,

$$\begin{aligned}\partial\Delta &= \{\mathbf{0}\} \cup \left(\bigcup \{\kappa \circ q(F \times \{x_{n+1}\}) : x_{n+1} \in (0,1]\}\right) \cup ([0,1]^n \times \{1\}) \\ &= \{\mathbf{0}\} \cup \kappa \circ q\,(F \times (0,1]) \cup ([0,1]^n \times \{1\}) \\ &= \{\mathbf{0}\} \cup \kappa \circ q\,((F \times (0,1]) \cup ([0,1]^n \times \{1\}))\,.\end{aligned}$$

Obsérvese que, por el Ejemplo 1.56, $\partial[0,1]^n = F$ y $\partial[0,1] = \{0,1\}$. Además, por el Teorema 1.66 $\partial[0,1]^{n+1} = ([0,1]^n \times \partial[0,1]) \cup (\partial[0,1]^n \times [0,1]) = ([0,1]^n \times \{1\}) \cup E \cup (F \times [0,1]) = ([0,1]^n \times \{1\}) \cup (F \times (0,1]) \cup E$. Luego,

$$\partial\Delta = \{\mathbf{0}\} \cup \kappa \circ q(\partial[0,1]^{n+1} - E).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\partial([0,1]^{n+1}/E) &= \kappa^{-1}(\partial\Delta) \\ &= \{E\} \cup q(\partial[0,1]^{n+1} - E) \\ &= \{\{z\} : z \in \partial[0,1]^{n+1} - E\} \cup \{E\}.\end{aligned}$$

Esto prueba el caso especial para $[0,1]^{n+1}$.

Ahora probaremos el enunciado general del teorema, es decir, el caso para una n-celda cualquiera K. Sea $f : K \to [0,1]^n$ un homeomorfismo (utilizando, por supuesto, el hecho de que los espacios D^n y $[0,1]^n$ son homeomorfos). Obsérvese que la función $F : T \to [0,1]^{n+1}$ dada por

$$(x,t) \overset{F}{\longmapsto} (f(x),t)$$

es un homeomorfismo (en donde $T = K \times I$). Asimismo, haciendo $C = K \times \{0\}$ y $E = [0,1]^n \times \{0\}$, la función $F_q : T/C \times [0,1]^{n+1}/E$ dada por $A \overset{F_q}{\longmapsto} F(A)$ (la imagen bajo F) es un homeomorfismo.

Esto último implica, por la primera parte de esta demostración, que T/C es una $(n+1)$-celda. Además, $F_q(C) = F(C) = \{(f(x),0) : x \in K\} = \{(y,0) : y \in [0,1]^n\} = E$ y, por el Teorema 1.57, $F^{-1}(\partial[0,1]^{n+1}) = \partial T$.

Aplicando el Teorema 1.57, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\partial(T/C) &= F_q^{-1}(\partial([0,1]^{n+1}/E)) \\
&= F_q^{-1}(\{\{z\} : z \in \partial[0,1]^{n+1} - E\} \cup \{E\}) \\
&= \{F_q^{-1}(\{z\}) : z \in \partial[0,1]^{n+1} - E\} \cup \{F_q^{-1}(E)\} \\
&= \{\{F^{-1}(z)\} : z \in \partial[0,1]^{n+1} - E\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in F^{-1}(\partial[0,1]^{n+1} - E)\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in F^{-1}(\partial[0,1]^{n+1}) - F^{-1}(E)\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in \partial T - C\} \cup \{C\}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Lema 1.63. *Si T es una 2-celda y C es un arco contenido en ∂T, entonces T/C es una 2-celda y*

$$\partial(T/C) = \{\{x\} : x \in \partial T - C\} \cup \{C\}.$$

Demostración. Sean $E = [0,1]^n \times \{0\}$ y $A = [0,1] \times \{0\}$. Obsérvese que, por la demostración del Teorema 1.62 para el caso particular del cociente $[0,1]^{n+1}/E$, se cumple que $[0,1]^2/A$ es una 2-celda y que

$$\partial([0,1]^2/A) = \{\{z\} : z \in \partial[0,1]^2 - A\} \cup \{A\}.$$

Sea T una 2-celda cualquiera y C un arco contenido en ∂T. Luego, existe un homeomorfismo $f : T \to D^2$. Asimismo, existe un homeomorfismo $g : [0,1]^2 \to D^2$. Obsérvese que, por el Teorema 1.57, se cumple que $f(\partial T) = \partial D^2 = S^1$ y $g(\partial[0,1]^2) = \partial D^2 = S^1$. Mostraremos que existe un homeomorfismo $h : D^2 \to D^2$, tal que $h(g(A)) = f(C)$. En efecto, como $g(A)$ y $f(C)$ son arcos contenidos en S^1, existe un homeomorfismo $h_0 : S^1 \to S^1$, tal que $h_0(g(A)) = f(C)$. Aplicando el Teorema 1.61, obtenemos un homeomorfismo $h : D^2 \to D^2$ el cual es una extension de h_0. En particular, $h(g(A)) = f(C)$. Sea $\phi : [0,1]^2 \to T$ la función dada por $\phi = f^{-1} \circ h \circ g$. Obsérvese que ϕ es un homeomorfismo y $\phi(A) = C$. Además, por el Teorema 1.57, se cumple que $\phi(\partial[0,1]^2) = \partial\phi([0,1]^2) = \partial T$. Como la función $\phi_q : [0,1]^2/A \to T/C$ dada por

$$A \xmapsto{\phi_q} \phi(A)$$

es un homeomorfismo, T/C es una 2-celda y, de nuevo por el Teorema 1.57, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\partial(T/C) &= \phi_q^{-1}(\partial([0,1]^2/A)) \\
&= \phi_q^{-1}(\{\{z\} : z \in \partial[0,1]^2 - A\} \cup \{A\}) \\
&= \{\phi_q^{-1}(\{z\}) : z \in \partial[0,1]^2 - A\} \cup \{\phi_q^{-1}(A)\} \\
&= \{\{\phi^{-1}(z)\} : z \in \partial[0,1]^2 - A\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in \phi^{-1}(\partial[0,1]^2 - A)\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in \phi^{-1}(\partial[0,1]^2) - \phi^{-1}(A)\} \cup \{C\} \\
&= \{\{x\} : x \in \partial T - C\} \cup \{C\}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del lema. □

El siguiente lema es en realidad una simple observación que es de utilidad para demostrar algunos resultados posteriores.

Lema 1.64. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si x tiene una vecindad en X que es una n-celda, entonces existe una base de vecindades de x en X formada exclusivamente de n-celdas. De igual forma, si x tiene una vecindad en X homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, entonces X tiene una base de vecindades de x, tal que cada una de ellas es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos primero que x tiene una vecindad N en X que es una n-celda. Sea U una vecindad abierta de x en X. Sea $h : N \to I^n$ un homeomorfismo, donde I es el intervalo cerrado $[0,1]$. Como $U \cap \operatorname{int}_X(N)$ es una vecindad de x en N, se tiene que $h(U \cap \operatorname{int}_X(N))$ es una vecindad de $h(x)$ en I^n. Sean $A_1, \ldots, A_n$ intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, tales que $h(x) \in \operatorname{int}_{I^n}(D) \subset D \subset h(U \cap \operatorname{int}_X(N))$, donde $D = \prod\{A_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Luego, D es una n-celda que es también una vecindad de $h(x)$ en I^n. Por tanto, $h^{-1}(D)$ es una vecindad de x en N que es una n-celda. Además, $h^{-1}(D) \subset U \cap \operatorname{int}_X(N)$, por lo cual $h^{-1}(D)$ es una vecindad de x en X contenida en U. Esto prueba la primera afirmación del lema.

Supongamos ahora que x tiene una vecindad R en X, tal que R es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Tomemos una vecindad abierta U de x en X. Sea $h : R \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. Obsérvese que $h(U \cap \operatorname{int}_X(R))$ es una vecindad de $h(x)$ en $\mathbb{R}^n$. Sea $\varepsilon > 0$, tal que $h(x) \in B \subset h(U \cap \operatorname{int}_X(R))$, donde $B = B_{\mathbb{R}^n}(h(x), \varepsilon)$. Obsérvese que B es una vecindad de $h(x)$ en $\mathbb{R}^n$, tal que B es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $h^{-1}(B) \subset U \cap \operatorname{int}_X(R)$. Así, $h^{-1}(B)$ es una vecindad de x en R, tal que $h^{-1}(B)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $h^{-1}(B) \subset U$. Además, $h^{-1}(B) \subset \operatorname{int}_X(R)$, por lo cual $h^{-1}(B)$ es también vecindad de x

en X. Esto concluye la prueba de la segunda afirmación y la demostración de este lema. $\square$

A continuación se expone un resultado simple pero útil porque garantiza la equivalencia de la existencia de una vecindad que es una n-variedad con la existencia de una base de vecindades con esta misma característica.

Teorema 1.65. *Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Supongamos que existe una vecindad N de x en X que es una n-variedad. Entonces, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) Existe una vecindad U de x en X que es un n-variedad y que cumple $x \in \partial U$.

(b) Para cada vecindad M de x en X que es una n-variedad, se satisface que $x \in \partial M$.

Demostración. Supongamos que no se cumple (b), es decir, que $x \notin \partial M$, para alguna vecindad M de x en X que es una n-variedad. Así, $x \in \operatorname{int}^{\partial} M$. Sea V una vecindad de x en M que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que $\operatorname{int}_M(V) \cap \operatorname{int}_X(M)$ es un abierto de M contenido en $\operatorname{int}_X(M)$ y, en consecuencia, es abierto en X. Como $x \in \operatorname{int}_M(V) \cap \operatorname{int}_X(M)$, deducimos que V es una vecindad de x en X. Luego, dada una vecindad U de x en X que es una n-variedad, por el Lema 1.64, existe una vecindad W de x, tal que W es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $W \subset U$. Como W es también vecindad de x en U, obtenemos que $x \in \operatorname{int}^{\partial} U$; es decir, $x \notin \partial U$. Como U fue arbitraria, deducimos que no se cumple (a). Esto prueba que $(a) \Rightarrow (b)$.

Supongamos ahora que se cumple (b). Luego, se satisface que $x \in \partial N$. Por tanto, $(b) \Rightarrow (a)$. $\square$

El último resultado de esta sección engloba algunas de las propiedades más resaltables, en relación a los fines perseguidos, de las variedades. A saber, establece cuál es la frontera como variedad de una intersección (de un abierto con un variedad) y del producto topológico de variedades.

Teorema 1.66. *Sean M una m-variedad, N una n-variedad y U un subconjunto abierto de M. Entonces, se satisface lo siguiente:*

(1) U es una m-variedad.

(2) $\partial U = (\partial M) \cap U$.

(3) $M \times N$ es una $m+n$-variedad y $\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$.

Demostración. El inciso (1) es una consecuencia inmediata del Lema 1.64. Para demostrar (2), sea $x \in U$. La implicación $(a) \Rightarrow (c)$ del Teorema 1.65 garantiza que si $x \in \partial M$, entonces $x \in \partial U$. Por su parte, la implicación $(b) \Rightarrow (a)$ del mismo teorema asegura que si $x \in \partial U$, entonces $x \in \partial M$. Esto prueba la igualdad en (2).

Por último, probemos (3). Para esto, sea $(x, y) \in M \times N$. Como $x \in M$ y M es una m-variedad, existe una vecindad U de x en M, tal que U es una m-celda. Similarmente, existe una vecindad V de X en N, tal que V es una n-celda. Como U es homeomorfo a I^m y V es homeomorfo a I^n, se tiene que $U \times V$ es homeomorfo a $I^m \times I^n = I^{m+n}$; es decir, $U \times V$ es una $(m+n)$-celda. Además, $U \times V$ es una vecindad de (x, y) en $M \times N$. Como (x, y) es un punto arbitrario, concluimos que $M \times N$ es una $(m+n)$-variedad.

Para probar la igualdad de este inciso, fijemos $(x, y) \in M \times N$. Sean S y T vecindades de x en M y de y en N, respectivamente, tales que S es una n-celda y T es una m-celda. Sean $f : I^m \to S$ y $g : I^m \to T$ homeomorfismos, donde I es el intervalo $[0, 1]$. Definimos la función

$$h : I^m \times I^n \to S \times T \text{ dada por } (s, t) \xrightarrow{h} (f(s), g(t)).$$

Como h es también un homeomorfismo, aplicando el Teorema 1.57, se tienen las igualdades $\partial M = f(\partial I^m)$, $\partial N = g(\partial I^n)$ y $\partial(S \times T) = h(\partial(I^m \times I^n))$. Por otro lado, si p y q son puntos en I^m y en I^n, respectivamente, entonces (p, q) tiene alguna coordenada igual a 0 o a 1 si, y sólo si, p o q tienen alguna coordenada igual a 0 o a 1. Esto implica, por el Ejemplo 1.56 1, que $\partial(I^m \times I^n) = \partial I^{m+n} = ((\partial I^m) \times I^n) \cup (I^m \times (\partial I^n))$. De esta forma, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} h(\partial(I^m \times I^n)) &= h((\partial I^m) \times I^n) \cup h(I^m \times (\partial I^n)) \\ &= (f(\partial I^m) \times g(I^n)) \cup (f(I^m) \times g(\partial I^n)) \\ &= ((\partial S) \times T) \cup (S \times (\partial T)). \end{aligned}$$

Por tanto, $\partial(S \times T) = ((\partial S) \times T) \cup (S \times (\partial T))$. Ahora, con ayuda de esta última igualdad, probaremos la igualdad de (c). Supongamos que $(x, y) \in \partial(M \times N)$. Aplicando el Teorema 1.65, tenemos que $(x, y) \in \partial(S \times T)$. Así, $x \in \partial S$ o $t \in \partial T$. Luego, por el mismo resultado, se cumple que $x \in \partial M$ o $y \in \partial N$. Recíprocamente, si $x \in \partial M$ o $y \in \partial N$, entonces, por el Teorema 1.65, se satisface que $x \in \partial S$ o $y \in \partial T$; es decir, $(x, y) \in \partial(S \times T)$. Otra aplicación del mismo teorema nos lleva a que $(x, y) \in \partial(M \times N)$. Esto prueba la igualdad en (3) y finaliza la demostración de este teorema. □

1.4. Dimensión

Esta breve sección está enfocada a presentar la definición de dimensión, así como algunos resultados acerca de este concepto. Varios de estos resultados se dan sin prueba, pero resultan indispensables en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Definición 1.67. Dado cualquier número entero mayor o igual que -1, se define recursivamente que un espacio topológico X tiene **dimensión** menor o igual que n, denotándose por $\dim(X) \leq n$, de la siguiente forma:

(i) Para cualquier espacio topológico X, $\dim(X) \leq -1$ si, y sólo si, $X = \emptyset$.

(ii) Dado $n \geq 0$, supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico tiene dimensión menor o igual que $n-1$. Entonces, para cualquier espacio topológico X y cualquier $p \in X$, $\dim_p(X) \leq n$ si X tiene una base local de vecindades de p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n-1$. Además, si, para cada $p \in X$, se satisface que $\dim_p(X) \leq n$, entonces $\dim(X) \leq n$.

Definimos también lo siguiente:

1. Para cualquier espacio topológico X y cualesquiera $p \in X$ y $n \geq 0$, $\dim_p(X) = n$ si $\dim_p(X) \leq n$ y es falso que $\dim_p(X) \leq n-1$.

2. Para cualquier espacio topológico X y cualquier $n \geq 0$, la dimensión de X es n, denotada por $\dim(X) = n$, si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n-1$.

3. Para cualquier espacio topológico X, la dimensión de X es ∞, denotada por $\dim(X) = \infty$, si $\dim(X) \leq n$ es falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

De ahora en adelante se asume como cierta la relación $n \leq \infty$ entre cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y el símbolo ∞, lo cual resulta conveniente al formular algunos resultados.

El siguiente teorema enuncia cómo se comporta la dimensión con respecto a subespacios, y que, al menos en espacios topológicos regulares, la dimensión en un punto es una propiedad local.

Teorema 1.68. *Sean X un espacio topológico, A un subespacio de X y $p \in A$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\dim(A) \leq \dim(X)$.

(2) $\dim_p(A) \leq \dim_p(X)$.

(3) Si X *es regular y* $p \in \operatorname{int}_X(A)$*, entonces* $\dim_p(X) = \dim_p(A)$.

Demostración. Demostremos primero (1). Si $\dim(X) = \infty$, entonces la afirmación es inmediata. De esta manera, podemos suponer que $\dim(X)$ es finita. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior de la dimensión de X. En caso de que $\dim(X) \leq -1$, el resultado es inmediato, por vacuidad. Tomemos $n \geq 0$ y supongamos que el resultado es válido siempre que $\dim(X) \leq n-1$. Sean X un espacio topológico con $\dim(X) \leq n$, A un subconjunto de X y $p \in A$. Sea U una vecindad de p en A. Luego, existe una vecindad V de p en X ta que $U = A \cap V$. Como $\dim_p(X)$ es finita, existe una vecindad W de p en X contenida en V con $\dim(\operatorname{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Aplicando el Lema 1.9, tenemos que $\operatorname{Fr}_A(W \cap A) \subset \operatorname{Fr}_X(W) \cap A \subset \operatorname{Fr}_X(W)$. Por la hipótesis de inducción, se deduce que $\dim(\operatorname{Fr}_A(W \cap A)) \leq \dim(\operatorname{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $W \cap A$ es una vecindad de p en A contenida en U, concluimos que $\dim_p(A) \leq \dim_p(X)$. Como esto sucede para cada $p \in A$, obtenemos que $\dim(A) \leq \dim(X)$.

La prueba de (2) es similar a la de (1), salvo que no necesita inducción y hace uso de (1). Haremos esta parte de la demostración omitiendo detalles idénticos a la demostración de (1). Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $p \in A$. Si $\dim_p(X)$ es infinita, entonces la afirmación es inmediata. Supongamos que $\dim_p(X)$ es finita. Dada cualquier vecindad U de p en A, existen vecindades V y W de p en X, tales que $U = V \cap A$, $W \subset V$ y $\dim(\operatorname{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $\operatorname{Fr}_A(W \cap A) \subset \operatorname{Fr}_X(W)$, aplicando (2), tenemos que $\dim_A(\operatorname{Fr}_A(W \cap A)) \leq \dim(\operatorname{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $W \cap A$ es una vecindad de p en X contenida en U, deducimos de esto último que $\dim_p(A) \leq \dim_p(A)$.

Por último, probaremos (3). Por (2), basta mostrar que $\dim_p(X) \leq \dim_p(A)$. Si $\dim_p(A) = \infty$, entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\dim_p(A)$ es finita. Sea U una vecindad abierta de p en X contenida en A. Luego, U es una vecindad abierta de p en A. Sea V una vecindad de p en A con $V \subset U$ y $\dim(\operatorname{Fr}_A(V)) \leq \dim_p(A) - 1$. Obsérvese que V es vecindad de p en X. Como X es regular, podemos suponer que $\operatorname{cl}_X(V) \subset \operatorname{int}_X(A)$. Aplicando el Lema 1.9 (ii) tenemos que $\operatorname{Fr}_X(A) = \operatorname{Fr}_A(V)$. Así, $\dim_p(\operatorname{Fr}_X(V)) \leq \dim_p(A) - 1$. Por tanto, $\dim_p(X) \leq \dim_p(A)$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

El siguiente lema es un sencillo corolario al Teorema 1.68, aplicado a subespacios especiales de productos topológicos. Es usado en el Teorema 2.15.

Lema 1.69. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $p \in X$ y $q \in Y$, entonces* $\dim_p(X) \leq \dim_{(p,q)}(X \times Y)$.

Demostración. Obsérvese que la función $f : X \to X \times \{q\}$ dada por $x \overset{f}{\longmapsto} (x, q)$ es un homeomorfismo que cumple $f(p) = (p, q)$. Así, $\dim_p(X) = \dim_{(p,q)}(X \times \{q\})$. Además, aplicando el inciso (1) del Teorema 1.68, tenemos que $\dim_{(p,q)}(X \times \{q\}) \leq \dim_{(p,q)}(X \times Y)$. Por tanto, $\dim_p(X) \leq \dim_{(p,q)}(X \times Y)$. □

Puesto que la definición de dimensión aquí expuesta es algo intrincada, cabe preguntarse si este concepto se comporta de la manera que se esperaría, por ejemplo, en espacios tan familiares como $\mathbb{R}^n$. Al menos en este caso la respuesta es afirmativa. Sin embargo la prueba de esto no es en ningún modo trivial y se menciona aquí solamente como un ejemplo, siendo usado más adelante.

Ejemplo 1.70. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el espacio $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.

El Teorema 1.68 asegura que si un subconjunto de un espacio topológico regular tiene interior no vacío, entonces ambos espacios tienen la misma dimensión. En el caso de $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, el siguiente resultado afirma que estas dos condiciones son equivalentes.

Teorema 1.71 ([12], Teorema IV 3)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $E \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se cumple que* $\dim(E) = n$ *si, y sólo si, existe un subconjunto abierto U de* $\mathbb{R}^n$, *tal que $U \subset E$.*

Ejemplo 1.72. Dada una n-variedad M, si $x \in M$, entonces $\dim_x(M) = n$.

El resultado que ahora se enuncia, relaciona la propiedad de un subespacio de hacer disconexa a una n-variedad al serle removido, con la dimensión de dicho subespacio. Es necesario para la prueba del Teorema 2.14.

Teorema 1.73 ([12], véase el Corolario 2 al Teorema IV 4)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es una n-celda y A es un subespacio de X, tal que $X - A$ es disconexo, entonces* $\dim(A) \geq n - 1$.

1.5. El Teorema de Toruńczyk

Esta sección está dedicada casi exclusivamente a exponer un teorema muy destacable de la Topología General: El Teorema de Toruńczyk. En términos sencillos, este teorema caracteriza (dentro de una clase que incluye a los retractos absolutos compactos) una clase de espacios otrora difícil de identificar (una clase que incluye al cubo de Hilbert) en términos topológicos relativamente simples. Aunque sus alcances son mayores, en este texto se expresa como una caracterización del cubo de Hilbert en términos de la existencia de cierta sucesión de funciones con características especiales (Teorema 1.81). La utilidad de este resultado es visible en la prueba del Teorema 3.12.

Asimismo, se aprovecha esta sección para definir varios conceptos relacionados al Teorema de Toruńczyk. Para comenzar, se presentan los conceptos de extensor absoluto y retracto absoluto, los cuales, como se observa en el Teorema 1.76, resultan equivalentes.

Definición 1.74. Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset Y$ y $f : A \to X$ una función continua. Decimos que la función $F : X \to Y$ es una **extensión continua** de f a Y si F es continua y $F|_A = f$. Un espacio normal X es un **extensor absoluto** si, para cada espacio normal Y, cada subconjunto cerrado A de Y y cada función continua $f : A \to X$, f tiene una extensión continua a Y.

Definición 1.75. Un subconjunto cerrado A de un espacio topológico Y es un **retracto** de Y si Id_A tiene una extensión continua a Y. Un espacio normal X es un **retracto absoluto** si, para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X, se satisface que B es un retracto de Y.

Teorema 1.76 ([4], Teorema (4.B.19))**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es un retracto absoluto si, y sólo si, X es un extensor absoluto.*

Para formular y tratar con el Teorema de Toruńczyk, resulta conveniente la siguiente notación (en realidad la función d_∞ que se define resulta ser una métrica sobre el espacio de funciones continuas que van de X a Y, pero esta propiedad no es requerida aquí).

Definición 1.77. Dados X y Y espacios métricos, X con métrica acotada, y funciones continuas $f, g : Y \to X$, denotaremos

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(y), g(y)) : y \in Y\}.$$

Para formular el teorema principal de esta sección se requiere también de las siguientes dos definiciones.

Definición 1.78. Sean X y Y espacios métricos y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en Y. Decimos que $f : X \to Y$ es el **límite uniforme** de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim d_\infty(f_n, f) = 0$.

Definición 1.79. Sean X un espacio métrico compacto y A un subconjunto cerrado de X. Decimos que A es un **Z-conjunto** en X si Id_X es el límite uniforme de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan a A. Decimos que una función continua f entre espacios métricos compactos X_1 y X_2 es una **Z-función** si $f(X_1)$ es un Z-conjunto en X_2.

Para manipular Z-conjuntos se requiere el siguiente lema, el cual garantiza que al realizar ciertas operaciones sobre ellos, se siguen obteniendo Z-conjuntos.

Lema 1.80. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Un subconjunto cerrado de un Z-conjunto en X, es a su vez un Z-conjunto en X.

(2) La unión finita de Z-conjuntos en X es un Z-conjunto en X.

Demostración. Probaremos (1). Supongamos que A es un Z-conjunto en X y B es un subconjunto cerrado de A. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe una función continua $f_\varepsilon : X \to X - A$, tal que $d_\infty(f_\varepsilon, Id_X) < \varepsilon$. Obsérvese que $X - A \subset X - B$. De esta manera, podemos considerar que $f_\varepsilon : X \to X - B$. Además, B es un subconjunto cerrado de X. Por lo tanto, B es un Z-conjunto en X.

Ahora mostremos (2). Bastará probar la afirmación para dos elementos. Sean A_1 y A_2 dos Z-conjuntos en X. Tomemos una función continua $f_1 : X \to X - A_1$, tal que $d_\infty(f_1, Id_X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Obsérvese que, dado $a \in A$, se cumple que $d(f_1(X), A_1) \leq d(f(a), a) \leq d_\infty(f_1, Id_X)$. Así, $d(f_1(X), A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como X es compacto, $f_1(X)$ es compacto. Además, $f_1(X) \cap A_1 = \emptyset$. Luego, $d(f_1(X), A_1) > 0$. Así, existe una función continua $f_2 : X \to X - A_2$, tal que $d_\infty(f_2, Id_X) < \frac{1}{2} d(f_1(X), A_n)$. Obsérvese que para cualquier $x \in X$ se cumple que $d(f_1(x), f_2(f_1(x))) < \frac{1}{2} d(f_1(X), A_1) < d(f_1(X), A_1)$ y, por tanto, $f_2(f_1(x)) \notin A_1$. Se sigue de esto último que $f_2(f_1(X)) \subset X - A_1$. Como también $f_2(X) \subset X - A_2$, podemos considerar la función continua $g = f_2 \circ f_1 : X \to X - (A_1 \cup A_2)$. Obsérvese también que $d(g(x), x) \leq d(g(x), f_1(x)) + d(f_1(x), x) < \frac{1}{2} d(f_1(X), A_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4}$, para cualquier $x \in X$. Luego, $d_\infty(g, Id_X) < \varepsilon$. Por tanto, $A_1 \cup A_2$ es un Z-conjunto en X. $\square$

Ahora, ya se tiene las condiciones para enunciar el Teorema de Toruńczyk.

Teorema 1.81 ([16], Teorema 9.3)**.** *Sea X un retracto absoluto. Si la función identidad sobre X es un límite uniforme de Z-funciones, entonces X es un cubo de Hilbert.*

1.6. Hiperespacios

En esta amplia sección se estudian a los objetos que son el tema central de nuestro estudio; es decir, a los hiperespacios de continuos, y, más específicamente, a los hiperespacios $C_n(X)$ de continuos localmente conexos. Se detallan algunas propiedades generales de los hiperespacios, comenzando con su estructura general y condiciones de arco conexidad y conexidad local en hiperespacios. Posteriormente, se definen algunas funciones notables entre hiperespacios, a saber, la función inducida entre dos hiperespacios por una función entre sus espacios subyacentes y un par de funciones basadas en la unión de conjuntos. Por último, se examinan modelos geométricos para algunos hiperespacios de los arcos y de la curva cerrada simple, además de algunos resultados referentes al concepto de hiperespacio de crecimiento.

1.6.1. Resultados generales

Lo primero que se define es el hiperespacio "más grande" considerado en este trabajo.

Definición 1.82. Sea X un espacio métrico. Denotamos

$$2^X = \{A \subset X \ : \ A \text{ es un subconjunto compacto y no vacío de } X\}.$$

Pero sin una estructura, el conjunto recién definido no es de mucha utilidad. Para dotarle de la estructura que necesitamos, se requiere de la siguiente definición.

Definición 1.83. Sea X un espacio métrico con métrica acotada d. Para cualesquiera $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, la **ε-nube alrededor de** A, denotada por $N_d(A, \varepsilon)$, como el conjunto

$$N_d(A, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Asimismo, de la función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ por

$$(A, B) \xmapsto{H_d} \inf \{r > 0 \ : \ A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}.$$

La Figura 1.2, permite visualizar estos dos conceptos.

La función H_d dota a 2^X de una estructura muy rica. Aquí sólo se presenta una ínfima parte de la gran cantidad de propiedades que posee. En primer lugar está el siguiente resultado.

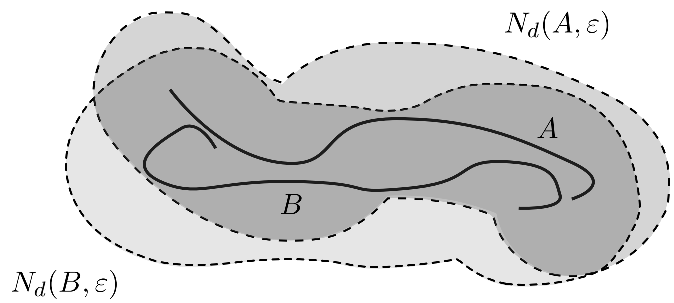


Figura 1.2: Las ε nubes alrededor de A y de B cumplen que $A \subset N_d(B,\varepsilon)$ y $B \subset N_d(A,\varepsilon)$. Por consiguiente, se cumple que $H_d(A,B) \leq \varepsilon$.

Teorema 1.84 ([16], Teorema 2.2)**.** *Para cualquier espacio métrico X con métrica acotada d, la función H_d es una métrica para 2^X.*

De esta manera, la métrica d para X induce una métrica H_d para 2^X. A H_d se le denomina **métrica de Hausdorff inducida por** d o simplemente **métrica de Hausdorff**, cuando no exista posibilidad de confusión. De ahora en adelante, cuando se habla de 2^X siempre se le considera con la métrica de Hausdorff. Además, al hablar de un **hiperespacio** de X siempre se refiere a un subconjunto de 2^X metrizado por la restricción correspondiente de H_d.

Aunque muchas veces la estructura métrica de 2^X posee mayor cabida para la intuición, en ocasiones es conveniente tratar directamente con su estructura topológica. El siguiente resultado da una expresión conveniente y útil de esta última. Pero antes, es necesario definir el siguiente importante concepto.

Definición 1.85. Sean X un continuo y $U_1,\ldots,U_k$ una colección finita de subconjuntos de X. El **vietórico de** $U_1,\ldots,U_k$ **en** 2^X, denotado por $\langle U_1,\ldots,U_k\rangle$, es el conjunto

$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ y } A\cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,k\}\}$$

Además, dada $n \in \mathbb{N}$, el **vietórico de** $U_1,\ldots,U_k$ **en** $C_n(X)$, denotado por $\langle U_1,\ldots,U_k\rangle_n$, es el conjunto

$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle_n = \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \cap C_n(X).$$

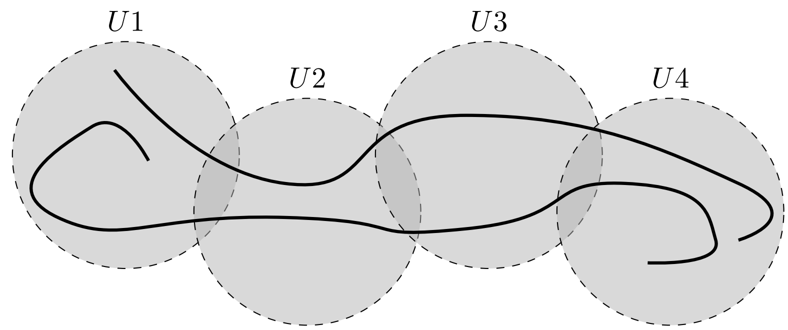


Figura 1.3: Las curvas mostradas se encuentran en el vietórico de los subconjuntos abiertos U_1, U_2, U_3 y U_3.

La Figura 1.3 ejemplifica el concepto anterior. Los ejemplos en las Figuras 1.2 y 1.3 dan una idea del estrecho vínculo que existe entre los vietóricos y la relación de cercanía dada por la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.86. *Sea X un espacio métrico acotado. Entonces, la familia $\{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle : k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k$ son subconjuntos abiertos de $X\}$, forma una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X.*

Demostración. Primero mostraremos que cada vietórico de abiertos en X es abierto en 2^X. Sean $U_1, \ldots, U_n$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X y $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos $x_i \in U_i \cap A$. Como U_i es abierto, existe $\varepsilon_i > 0$, tal que $B_d(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$. Además, si $\bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \neq X$, entonces A y $X - \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X, con A compacto. Por consiguiente, $d(A, X - \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}) > 0$. De cualquier forma, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que $N_d(A, \varepsilon_0) \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Luego, dado $B \in B_{H_d}(A, \varepsilon)$, se tiene que $A \subset N_d(B, \varepsilon)$. Sea $b \in B$, tal que $x_i \in B_d(b, \varepsilon)$. Se tiene que $b \in B_d(x_i, \varepsilon) \subset U_i$. Además, $B \subset N_d(A, \varepsilon) \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Por tanto, $B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ es abierto en 2^X.

Ahora mostremos que la colección de vietóricos de subconjuntos abiertos de X forma una base para la topología inducida por H_d. Tomemos un abierto $\mathfrak{U}$ de 2^X y un punto $A \in \mathfrak{U}$. Sea $\varepsilon > 0$, tal que $B_{H_d}(A, 2\varepsilon) \subset \mathfrak{U}$. Como A es compacto y $A \subset \bigcup\{B_d(x, \varepsilon) : x \in A\}$, existe una colección finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in A$, tales que $A \subset \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$, donde $B_i = B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Obsérvese que $A \in \langle B_1, \ldots, B_n\rangle$.

Queremos probar que $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle \subset \mathfrak{U}$. Tomemos $C \in \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$. Luego, $C \subset \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset N_d(A, \varepsilon)$. Además, $A \subset \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \bigcup\{B_d(c_i, \varepsilon) : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset N_d(C, \varepsilon)$, donde $c_i \in C \cap B_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. De esta manera, $H_d(A, C) \leq \varepsilon$. Así, se concluye que $C \in B_{H_d}(A, 2\varepsilon)$ y que $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle \subset B_{H_d}(A, 2\varepsilon) \subset \mathfrak{U}$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Al tratar con hiperespacios es necesario poder utilizar las propiedades que, como subconjuntos del continuo considerado, tienen sus puntos. Uno de los conceptos que proporciona esta capacidad es el de límite de conjuntos, el cual ahora se define. Uno de los motivos de su utilidad en el estudio de hiperespacios se manifiesta en el Teorema 1.90.

Definición 1.87. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. El **límite inferior de** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y el **límite superior de** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotados respectivamente por $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$, son los conjuntos

$$\begin{aligned}\liminf A_n = \ &\{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x \text{ existe } N \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \text{tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\} \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\limsup A_n = \ &\{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x \text{ existe un subconjunto} \\ &\qquad \text{infinito } T \text{ de } \mathbb{N}, \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset, \\ &\qquad \text{para cada } n \in T\}.\end{aligned}$$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, entonces el **límite de** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es A y se denota por $\lim A_n = A$.

El Ejemplo 1.88 muestra que las definiciones anteriores no son equivalentes entre sí y que, por tanto, $\lim A_n$ no siempre existe.

Ejemplo 1.88. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de segmentos de recta en el plano, tal que $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [-2, 2]$, si n es impar, y $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1]$, si n es par. Entonces,

$$\liminf A_n = [-1, 1] \qquad \text{pero} \qquad \limsup A_n = [-2, 2].$$

El siguiente lema muestra otra expresión de los límites de conjuntos. Será de ayuda al probar el Lema 2.10 y el Teorema 3.30.

Lema 1.89. *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de X, entonces se cumple que*

$$\begin{aligned}\liminf A_n = \{x \in X : \ &\textit{existe una sucesión } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ en } X \textit{ que converge} \\ &a\ x, \textit{ tal que } x_n \in A_n, \textit{ para cada } n \in \mathbb{N}\} \textit{ y}\end{aligned}$$

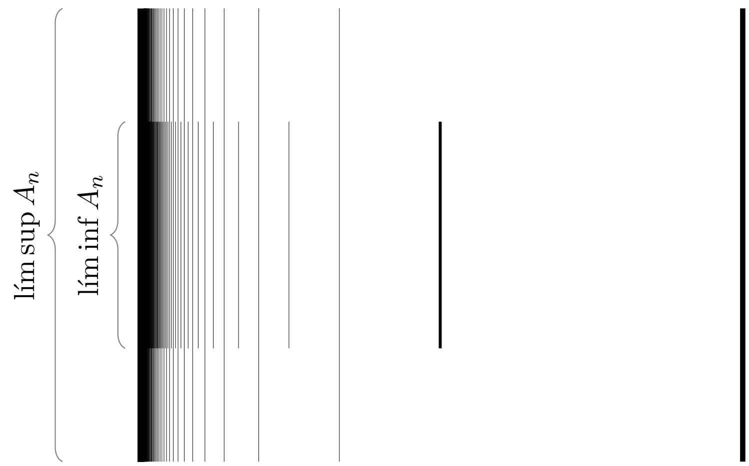


Figura 1.4: Diferencia entre $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \textit{existe } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \textit{ con } x_n \in A_n \textit{ para cada } n \in \mathbb{N}, \textit{ tal que alguna subsucesión de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge a } x\}.$$

Demostración. Sea d una métrica para X. En primer lugar, demostremos la primera igualdad del teorema. Obsérvese que la contención hacia la izquierda es inmediata. Para probar la contención hacia la derecha, tomemos $x \in \liminf A_n$. Hagamos $M_1 = N_1 = 1$. Supongamos que hemos definido M_n, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in \liminf A_n$ y $\frac{1}{n+1} > 0$, existe $N_{n+1} \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $k \geq N_{n+1}$, se cumple que $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A_k \neq \emptyset$. Sea $M_{n+1} = \max\{N_k + 1, N_{k+1}\}$. De esta forma la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. En particular, $M_n \geq n$.

Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, sea $m(k) = \max\{n : k \geq M_n\}$. Como $k \geq M_{m(k)} \geq N_{m(k)}$, existe $x_k \in B(x, \frac{1}{m(k)}) \cap A_k \neq \emptyset$. Probaremos que $\lim x_k = x$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego, para cada $n \geq M_{n_0}$, se cumple que $m(n) \geq n_0$ y $d(x, x_n) < \frac{1}{m(n)} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por tanto, $\lim x_k = x$. Esto prueba la contención hacia la derecha de la primera igualdad.

Demostremos la segunda igualdad. De nuevo, la contención hacia la izquierda es inmediata. Para probar la otra contención, fijemos $x \in \limsup A_n$. Definimos la sucesión $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue. Sea $M(0) = 0$. Supongamos que hemos definido el número natural $M(k-1)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in \limsup A_n$, se cumple que $B(x, \frac{1}{k}) \cap A_j \neq \emptyset$, para una cantidad infinita de $j \in \mathbb{N}$. Luego, existe $M(k) \in \mathbb{N}$, tal que $M(k) > M(k-1)$ y $B(x, \frac{1}{k}) \cap A_{M(k)} \neq \emptyset$. De este modo, la sucesión $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

Definimos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue. Si $n = M(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces elegimos $x_n \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A_n$. En otro caso, elegimos $x_n \in A_n$. Como $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, $\{x_{M(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n \leq M(n)$. Probaremos que $\lim x_{M(n)} = x$. Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, para $k \geq N$ se cumple que $x_{M(k)} \in B(x, \frac{1}{k}) \subset B(x, \frac{1}{N})$ y $d(x, x_k) < \varepsilon$. tanto, $\lim x_{M(n)} = x$. Esto muestra la contención hacia la derecha de la segunda igualdad y concluye la demostración de este lema. □

El siguiente resultado muestra la principal razón de la presencia del límite de conjuntos en este escrito.

Teorema 1.90 ([19], Teorema 0.7). *Sean X un continuo, A un punto en 2^X y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A según la Definición 1.87 si, y sólo si, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff.*

El siguiente resultado es un caso particular, porque aunque se tenga una sucesión convergente $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en 2^X, puede ocurrir que existan $B_n \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que $\lim B_n$ no exista, o incluso que $\liminf B_n = \emptyset$.

Lema 1.91. *Sea X un continuo. Supongamos que existen una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en 2^X y $p \in X$, tales que $\lim A_n = \{p\}$. Si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $p_n \in A_n$, entonces $\lim p_n = p$. Más aún, si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X, tal que $B_n \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim B_n = \{p\}$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Para empezar, probaremos la primera parte del enunciado del lema. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = \{p\}$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n > N$, se cumple que $H_d(A_n, \{p\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijemos $n > N$. Luego, $A_n \subset N_d(\{p\}, \varepsilon)$. Como $p_n \in A_n$, existe $q \in \{p\}$, tal que $d(p_n, q) < \varepsilon$; es decir, $d(p_n, p) < \varepsilon$. Como la elección de $n > N$ y ε fue arbitraria, concluimos que $\lim p_n = p$.

Ahora demostremos la segunda parte del lema. Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X, tal que $B_n \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n \in B_n \subset A_n$, entonces, por la primera parte de la demostración, se cumple que $\lim x_n = p$. Esto implica, por el Lema 1.89, que $p \in \liminf A_n$. Supongamos que $y \in \limsup A_n$. Aplicando el Lema 1.89, obtenemos una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \in A_n$ y alguna subsucesión de esta serie converge a y. Por la primera parte de la demostración, se satisface que $\lim y_n = p$. Como escogimos arbitrariamente a $y \in \limsup A_n$, lo anterior implica que $\limsup A_n \subset \{p\}$. Por lo tanto, $\{p\} \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \{p\}$ o, equivalentemente, $\lim A_n = \{p\}$. Esto concluye esta demostración. $\square$

Hasta aquí se ha tratado con resultados relacionados con una estructura métrica del conjunto 2^X y la convergencia en él con dos tipos equivalentes de límites. Ahora, se presentan los hiperespacios que son el tema central de este trabajo (y un hiperespacio más, que aunque no es estudiado en este trabajo, resulta conveniente tener una notación para él).

Definición 1.92. Sean X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \ : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F(X) = \{A \in 2^X \ : \ A \text{ tiene exactamente un punto}\}.$$

A $C_n(X)$, dotado de la métrica de Hausdorff (relativa a 2^X), se le llama el **n-ésimo hiperespacio de** X.

El primer resultado sobre $C_n(X)$ establece que éste siempre es un continuo, cuando X también lo es. En la demostración de este hecho se utiliza una propiedad del hiperespacio 2^X más fuerte que la arco conexidad. Para enunciar dicha propiedad se requiere la siguiente definición.

Definición 1.93. Sea X un continuo. Un arco $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es un **arco ordenado** en 2^X si para cualesquiera $s, t \in [0,1]$ con $s \leq t$ se cumple que $h(s) \subset h(t)$. Decimos que α va de A a B o, equivalentemente, que es un arco ordenado de A a B, si $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Teorema 1.94 ([19], Lema 1.8)**.** *Sea X un continuo. Si A y B son elementos distintos de 2^X, entonces existe un arco ordenado en 2^X que va de A a B si, y sólo si, $A \subset B$ y cada componente de B intersecta A.*

Teorema 1.95. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ son continuos arco conexos.*

Demostración. Demostremos primero que 2^X es compacto. Para tal efecto, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Queremos probar que esta sucesión tiene una subsucesión convergente en 2^X. Como X es un espacio métrico y compacto, X es segundo numerable. Sea $\{U_1, U_2, \dots\}$ una base numerable para X. Definimos la colección de sucesiones $\{i_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\}$ como sigue (en este desarrollo utilizaremos la siguiente notación para las sucesiones: una sucesión en el conjunto A es una función de $\mathbb{N}$ en A y, dada una sucesión r en A, una subsucesión de r es una composición $r \circ q$, donde q es una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$). Hagamos $i_1 = Id_{\mathbb{N}}$ (la función identidad en $\mathbb{N}$). Supongamos que hemos definido i_s, para cada $s \leq k$. Sea $j_k = i_1 \circ \cdots \circ i_k$. Definimos i_{k+1} de la siguiente manera:

($\bullet$) Si existe una subsucesión $j_k \circ r$ de j_k, tal que $U_k \cap \limsup A_{j_k \circ r(n)} = \emptyset$, entonces hacemos $i_{k+1} = r$. Obsérvese que podemos suponer que i_{k+1} es estrictamente creciente.

($\bullet\bullet$) Si toda subsucesión $j_k \circ r$ de j_k cumple que $U_k \cap \limsup A_{j_k \circ r(n)} \neq \emptyset$, entonces sea $i_{k+1} = Id_{\mathbb{N}}$.

Consideremos la sucesión t dada por $t(k) = j_k(k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Obsérvese que, dada $m \in \mathbb{N}$, si $k \geq m+1$, entonces $j_k = i_1 \circ \cdots \circ i_k = j_m \circ i_{m+1} \circ \cdots \circ i_k$. Esto implica que j_k es una subsucesión estrictamente creciente de j_m. Más aún,

$$\begin{aligned} t(n+1) &= j_{n+1}(n+1) = j_m(i_{m+1} \circ \cdots \circ i_{n+1}(n+1)) \quad \text{y} \\ t(n+1) &= j_{n+1}(n+1) = j_n(i_{n+1}(n+1)) \geq j_n(n+1) \\ &> j_n(n) = t(n). \end{aligned}$$

Como esto ocurre para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ y, además, $t(m) = j_m(m)$, tenemos que $\{t(n)\}_{n=m}^{\infty}$ es una subsucesión estrictamente creciente de $\{j_m(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Mostraremos que la sucesión $\{A_{t(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en 2^X. Supongamos, por el contrario, que esto no sucede. Por el Teorema 1.90, $\{A_{t(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge según la Definición 1.87. Como $\liminf A_{t(n)} \subset \limsup A_{t(n)}$, lo anterior implica que existe $p \in \limsup A_{t(n)}$, tal que $p \notin \liminf A_{t(n)}$. Luego, existe una vecindad V de p en X, tal que una cantidad infinita de elementos de $\{A_{t(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no intersecta a V. Sea $s \in \mathbb{N}$, tal que $p \in U_s \subset V$. De esta forma, podemos hallar una subsucesión estrictamente creciente $t \circ q$ de t, tal que $U_s \cap A_{t\circ q(n)} = \emptyset$. Obsérvese que $t \circ q(n) \geq t(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{t \circ q(n)\}_{n=s}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{t(n)\}_{n=s}^{\infty}$ y, por el párrafo anterior, de $\{j_s(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, como $X - U_s$ es cerrado en X y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_{t\circ q(n)} \subset X - V \subset X - U_s$, aplicando el Lema 1.89, se tiene que $\limsup A_{t\circ q(n)} \subset X - U_s$. Esto implica que $\{j_s(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface ($\bullet$) y, por ende, que $U_s \cap \limsup A_{j_{s+1}(n)} = \emptyset$. Como $\{t(n)\}_{n=s+1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{j_{s+1}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\limsup A_{t(n)} \subset \limsup A_{j_{s+1}(n)}$. Así, $p \in U_s \cap \limsup A_{j_{s+1}(n)} = \emptyset$. Esto es una contradicción. Por tanto,

$\{A_{t(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto prueba que 2^X es compacto.

Ahora, mostraremos que $C(X)$ es compacto. Como 2^X es compacto, basta probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Para esto, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$, tal que $\lim A_n = A$, para algún $A \in 2^X$. Queremos mostrar que A es conexo. Supongamos, por el contrario, que A es disconexo. Sean B y C subconjuntos cerrados y ajenos y no vacíos de A, tales que $A = B \cup C$. Como B y C son compactos, tenemos que $d(A, B) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}d(A, B)$. Luego, si $U = N_d(A, \varepsilon)$ y $V = N_d(B, \varepsilon)$, entonces U y V son subconjuntos abiertos y ajenos X, tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \supset B \neq \emptyset$ y $A \cap V \supset C \neq \emptyset$. Así, $A \in \langle U, V\rangle$. Como $\langle U, V\rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X (por el Teorema 1.86), existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq N$, entonces $A_n \in \langle U, V\rangle$. Como $A_n \subset U \cup V$ y A_n es conexo, se cumple que $A_n \subset U$ o $A_n \subset B$, para cada $n \geq N$. De esta manera, existe una subsucesión $\{A_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que cada uno de sus elementos esta contenido en U o cada uno de sus elementos está contenido en V. Como $\lim A_{k_n} = A$, aplicando el Lema 1.89 obtenemos que $A \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset X - V$ o $A \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset X - U$. Esto contradice el hecho que $C \subset V$ y $B \subset U$. Por tanto, A es conexo y $C(X)$ es cerrado en 2^X.

Por último, demostraremos que 2^X y $C(X)$ son arco conexos. Para este fin, sea A un punto en 2^X distinto de X. Aplicando el Teorema 1.94 obtenemos un arco ordenado α en 2^X de A a X. Supongamos que $A \in C_n(X)$. Sean $A_1, \ldots, A_r$ las r componentes distintas de A. Sean $B \in \alpha$ y $\mathcal{C}$ la familia de componentes de B. Dado $i \in \{1, \ldots, r\}$, hagamos $\mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} : C \cap A_i \neq \emptyset\}$. Obsérvese que $A \subset B = \bigcup\mathcal{C}$. Como $A_i \subset \bigcup\mathcal{C}_i$ y A_i es conexo, aplicando el Teorema 1.2, tenemos que $\bigcup\mathcal{C}_i$ es conexo. Así, $\bigcup\mathcal{C}_i$ está contenido en alguna componente B_i de B. Obsérvese que el subarco de α que va de A a B es un arco ordenado en 2^X. Luego, por el Teorema 1.94, se cumple que $A \cap C \neq \emptyset$, para cada $C \in \mathcal{C}$. De esto último, inferimos que $B = \bigcup\mathcal{C} \subset \bigcup\{\bigcup\mathcal{C}_i : i \in \{1, \ldots, r\}\} \subset \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, r\}\} \subset B$. Por tanto, $B = \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, r\}\}$, B tiene a lo más r componentes y, en consecuencia, $B \in C_n(X)$. De esta manera, hemos probado que cada punto en 2^X puede ser unido a X por un arco contenido en 2^X y que, si tal punto es elemento de $C(X)$, entonces dicho arco está contenido en $C(X)$. Esto prueba que 2^X y $C(X)$ son arco conexos y termina la demostración de este teorema. $\square$

Lema 1.96 ([3], Lema 2.2)**.** *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}$ un subcontinuo de 2^X, tales que $\mathcal{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Entonces, $\bigcup\mathcal{B} \in C_n(X)$.*

El siguiente lema expresa una propiedad que es de suma importancia, y es mencionada en múltiples ocasiones en el Capítulo 3, porque afirma la equivalencia de una propiedad entre un continuo y sus n-ésimos hiperespacios. Esta equivalencia permite descartar muchos espacios en la búsqueda de aquellos que tienen el mismo n-ésimo hiperespacio. Antes, se necesitan los siguientes dos lemas.

Lema 1.97. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es localmente conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, cerrada y sobreyectiva, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.13, basta demostrar que las componentes de cada subconjunto abierto de Y son abiertas en Y. Para tal fin sean U un subconjunto abierto de Y y C una componente de U. Asimismo, dada cualquier $x \in f^{-1}(C)$, sea K_x la componente de $f^{-1}(U)$, tal que $x \in K_x$. Como f es continua $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Aplicando el Teorema 1.13, se tiene que K_x es abierto en X. Por otro lado, también por la continuidad de f, se cumple que $f(K_x)$ es conexo. Así, y como $f(x) \in C \cap f(K_x)$, tenemos que $f(K_x) \subset C$. Esto es, $K_x \subset f^{-1}(C)$. De esta forma, se obtiene la igualdad

$$f^{-1}(C) = \bigcup \{K_x : x \in f^{-1}(C)\}.$$

Por tanto, $f^{-1}(C)$ es abierto en X. Además, como f es sobreyectiva, se satisface que $f(X - f^{-1}(C)) = f(X) - f(f^{-1}(C)) = Y - C$. Como f es cerrada, se sigue que $Y - C$ es cerrado en Y; es decir, C es abierto en Y. Esto concluye la prueba. $\square$

Lema 1.98. *Sea X un continuo y sean $A_1, \ldots, A_m$ subcontinuos de X, con $m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ es un continuo arco conexo.*

Demostración. Si $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ es el conjunto vacío o consta de un solo punto, la afirmación es trivial. Supongamos entonces que $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ consta de más de un punto. Sea $B \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ con $B \subsetneq C$ donde $C = \bigcup \{A_i : i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Obsérvese que $A_i \cap B \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Aplicando el Teorema 1.2, tenemos que C es conexo. Como C es la unión finita de cerrados de X, tenemos que C es cerrado en X. Así, C es un continuo con $C \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$. Procediendo como en la prueba del Teorema 1.95 para el caso $C_n(X)$, obtenemos un arco ordenado α en $C(X)$ que va de B a C. Obsérvese que, para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $D \in \alpha$, se cumple que $D \cap A_i \supset B \cap A_i \neq \emptyset$ y que $D \subset C$. Por tanto, $D \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ y $\alpha \subset \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$. Así, α es un arco en $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ que une B con C. Como B es arbitrario y C es fijo, concluimos que $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle_1$ es arco conexo. Con esto terminamos la demostración de este lema. $\square$

Teorema 1.99. *Si X es un continuo, entonces $C_n(X)$ es localmente conexo si, y sólo si, X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que $C_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X, tales que $x \in U$. Obsérvese que $\langle U \rangle_n$ es una vecindad de $\{x\}$ en $C_n(X)$. Luego, por hipótesis, existe un subconjunto abierto y conexo $\mathfrak{U}$ de $C_n(X)$, tal que $\{x\} \in \mathfrak{U} \subset \langle U \rangle_n$. Por el Teorema 1.86, existen $m \in \mathbb{N}$ y $V_1, \ldots, V_m$ subconjuntos abiertos en X, tales que $\{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_n \subset \mathfrak{U}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^m V_i$. Obsérvese que $x \in V$ y V es abierto en X. Además, como para cada $y \in V$ se tiene $\{y\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_n$, se cumple que $V \subset \bigcup \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_n \subset \bigcup \mathfrak{U} \subset \bigcup \langle U \rangle_n = U$. Así, $x \in \operatorname{int}_X(\bigcup \mathfrak{U}) \subset \bigcup \mathfrak{U} \subset U$. Por otro lado, $\{x\} \in \mathfrak{U} \cap C(X)$ así que, por el Lema 1.96, $\bigcup \mathfrak{U}$ es conexo. Por lo tanto, X es conexo en pequeño en x. Como la elección de x fue arbitraria, concluimos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Aplicando el Teorema 1.29, se tiene que X es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente conexo. Demostremos primero que $C(X)$ es localmente conexo. Sean $A \in C(X)$, $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X, tales que $A \in \langle U_1, \ldots U_k \rangle_1$. Como X es localmente conexo y métrico, para cada $x \in A$, existe un subconjunto abierto y conexo V_x de X, tal que si $i \in \{1, \ldots, k\}$ es cumple que $x \in U_i$, entonces $x \in V_x \subset \operatorname{cl}_X(V_x) \subset U_i$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in A$, tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos tomar $x_{m+i} \in A \cap U_i$. Aplicando de nuevo que X es localmente conexo y métrico obtenemos un subconjunto abierto y conexo $V_{x_{m+i}}$ de X, tal que $x_{m+i} \in V_{x_{m+i}} \subset \operatorname{cl}_X(V_{x_{m+i}}) \subset U_i$. Obsérvese que, para cada $i \in \{1, \ldots, m+k\}$, se tiene que $\operatorname{cl}_X(V_{x_i})$ es un subcontinuo de X y que $A \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{m+k}} \rangle_1 \subset \langle \operatorname{cl}_X(V_{x_1}), \ldots, \operatorname{cl}_X(V_{x_{m+k}}) \rangle_1$. Aplicando el Lema 1.98, obtenemos que el conjunto $\mathfrak{V} = \langle \operatorname{cl}_X(V_{x_1}), \ldots, \operatorname{cl}_X(V_{x_{m+k}}) \rangle_1$ es conexo. Además, si $B \in \mathfrak{V}$, entonces $B \subset \bigcup_{i=1}^{m+k} \operatorname{cl}_X(V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $B \cap U_i \supset B \cap \operatorname{cl}_X(V_{x_{m+i}}) \neq \emptyset$; es decir, $B \in \langle U_1, \ldots U_k \rangle_1$. Así, $\mathfrak{V} \subset \langle U_1, \ldots U_k \rangle_1$. Por tanto, $\mathfrak{V}$ es una vecindad conexa de A contenida en $\langle U_1, \ldots U_k \rangle_1$. Se sigue del Teorema 1.86, que $C(X)$ es conexo en pequeño en A. Como la elección de A fue arbitraria, concluimos que $C(X)$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Aplicando el Teorema 1.29, obtenemos que $C(X)$ es localmente conexo.

Consideremos la función $\psi : (C(X))^n \to C_n(X)$ dada por

$$(A_1, \ldots, A_n) \overset{\psi}{\longmapsto} \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Por el Teorema 1.104, se tiene que ψ es continua. Además, ψ es sobreyectiva pues, dado $B \in C_n(X)$, si $B_1, \ldots, B_k$ son las componentes de B, entonces $k \leq n$ y $\psi(B_1, \ldots, B_k) = \bigcup_{i=1}^{k} B_i = B$. Y como $(C(X))^n$ es compacto y $C_n(X)$ es Hausdorff, ψ es cerrada. Aplicando el Lema 1.97, obtenemos que $C_n(X)$ es localmente conexo. □

Lema 1.100. *Sean X un continuo con métrica d, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Si $H_d(A, B) < \varepsilon$ y C es un subconjunto no vacío de A, entonces $B \cap N_d(C, \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $c \in C$. Como $C \subset A \subset N_d(B, \varepsilon)$, existe $b \in B$, tal que $c \in B_d(b, \varepsilon)$. Así, $d(b, c) < \varepsilon$ y, por tanto, $b \in B_d(c, \varepsilon) \subset N_d(C, \varepsilon)$. Por lo tanto, $B \cap N_d(C, \varepsilon) \neq \emptyset$. □

1.6.2. Funciones

En este apartado se estudian algunas funciones que están relacionadas con los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ (y $F(X)$) las cuales se obtienen a partir de funciones en el espacio subyacente X y de la unión común de conjuntos. Las primera función que se analiza (Teorema 1.101) provee de los homeomorfismos naturales que surgen entre los hiperespacios correspondientes de espacios homeomorfos (Corolario 1.102).

Teorema 1.101. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre los espacios métricos X y Y, entonces la función $f^* : 2^X \to 2^Y$ dada por*

$$A \xmapsto{f^*} f(A)$$

es continua y $f^*(C_n(X)) \subset C_n(Y)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En primer lugar, f^* está bien definida pues, para cada $A \in 2^X$, como A es compacto y f es continua, se tiene que el conjunto $f^*(A) = f(A)$ es compacto y $f^*(A) \in 2^Y$.

Ahora mostremos que f^* es continua. Para ello, fijemos $A \in 2^X$ y sea $U_1, \ldots, U_k$ una colección de subconjuntos abiertos de Y. Afirmamos que

$$(f^*)^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle) = \langle f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k) \rangle.$$

En efecto, supongamos primero que $A \in (f^*)^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle)$. Luego, el conjunto $f^*(A) = f(A)$ es elemento del vietórico $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ o, en otras palabras, $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se cumple que $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$. Esto implica (por propiedades de los conjuntos únicamente) que $A \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$ y que $A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $A \in 2^X$, se tiene que $A \in \langle f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k) \rangle$.

Recíprocamente, supongamos que $A \in \langle f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. Luego, $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se cumple que $A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$. Se deduce de esto (de nuevo únicamente por propiedades de los conjuntos) que $f(A) \subset f(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^{k} f(f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ y que $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $f^*(A) = f(A)$ es elemento de 2^Y, según vimos unas líneas atrás, lo anterior implica que $f^*(A) \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle$. Así, $A \in (f^*)^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle)$. Esto prueba nuestra afirmación.

Como f es continua, cada $f^{-1}(U_i)$ es abierto en Y. De esta manera, tenemos que la imagen inversa de cada vietórico de subconjuntos abiertos de Y bajo f^* es un vietórico de subconjuntos abiertos de X. Aplicando el Teorema 1.86 tanto a X como a Y, deducimos que f^* es continua.

Tomemos ahora $A \in C_n(X)$. Sean $C_1, \ldots, C_r$ las componentes de A, con $r \leq n$. Como f es continua, tenemos que $f(C_i)$ es un subconjunto conexo de Y, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Además, $f(A) = f(\bigcup\{C_i : i \in \{1, \ldots, r\}\}) = \bigcup\{f(C_i) : i \in \{1, \ldots, r\}\}$. Como cada $f(C_i)$ está contenido en una componente de $f(A)$, se sigue que $f(A)$ tiene a lo más r componentes. Por tanto, $f(A) \in C_n(Y)$ y $f(C_n(X)) \subset C_n(Y)$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Corolario 1.102. *Dados X y Y continuos y $n \in \mathbb{N}$, si X es homeomorfo a Y, entonces 2^X es homeomorfo a 2^Y y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. Más aún, si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la función $f^* : 2^X \to 2^Y$ dada por*

$$A \xmapsto{f^*} f(A)$$

es un homeomorfismo y $f^*(C_n(X)) = C_n(Y)$.

Demostración. Sean f y f^* como en el enunciado del corolario. Demostremos primero que f^* es un homeomorfismo. Por el Teorema 1.101, tenemos que f^* es continua. Por otro lado, dados $A_1, A_2 \in 2^X$ con $f^*(A_1) = f^*(A_2)$, se cumple que $f(A_1) = f(A_2)$. Aplicando la inyectividad de f se obtiene la igualdad $A_1 = A_2$. Por tanto, f^* es inyectiva.

Fijemos $B \in 2^X$. Luego, B es un subconjunto compacto de X y, por la continuidad de f^{-1}, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un subconjunto compacto de X. De este modo, $f^{-1}(B) \in 2^X$. Además, considerando que f es sobreyectiva, se sigue que $f^*(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Así, f^* es sobreyectiva. Esto prueba que f^* es una biyección y, más aún, que existe la función inversa de f^*; es decir, $(f^*)^{-1} : 2^Y \to 2^X$, y está dada por

$$B \xmapsto{(f^*)^{-1}} f^{-1}(B).$$

Esto implica, en particular, que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ (donde $(f^{-1})^*$ se define de forma análoga a como lo hicimos con f^*). Aplicando de nuevo el Teorema 1.101, pero esta vez a la función f^{-1}, obtenemos que $(f^{-1})^*$ es continua. Por lo tanto, f^* es un homeomorfismo y 2^X es homeomorfo a 2^Y.

Mostremos la última relación del enunciado del teorema. Aplicando el Teorema 1.101 a las funciones f y f^{-1}, obtenemos las contenciones

$$f^*(C_n(X)) \subset C_n(Y) \text{ y } (f^{-1})^*(C_n(Y)) \subset C_n(X).$$

Por la última igualdad del párrafo anterior, esta última contención es equivalente a que $(f^*)^{-1}(C_n(Y)) \subset C_n(X)$ o, dicho en otros términos, a que $C_n(Y) \subset f^*(C_n(X))$. Por tanto, $f^*(C_n(X)) = C_n(Y)$ y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. Con esto terminamos la prueba del corolario. □

De forma similar al homeomorfismo dado en el Corolario 1.102, es posible proporcionar un homeomorfismo definido de una forma natural para el hiperespacio $F(X)$.

Teorema 1.103. *Sea X un espacio métrico. Entonces, la función $f : X \to F(X)$ dada por $x \overset{f}{\longmapsto} \{x\}$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $U_1, \ldots, U_n$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X. Se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F(X)) &= \Big\{x \in X : \{x\} \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \text{ y} \\ &\qquad \{x\} \cap U_j \neq \emptyset, \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}\Big\} \\ &= \bigcap\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

Como $\bigcap\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es abierto en X, se sigue del Teorema 1.86 que f es continua. Además, es inmediato que f es biyectiva.

Mostremos que f es abierta. Para esto, tomemos un subconjunto abierto U de X. Tenemos que

$$f(U) = \{\{x\} \in F(X) : x \in U\} = \langle U\rangle \cap F(X).$$

Como $\langle U\rangle \cap F(X)$ es abierto en $F(X)$ (por el Teorema 1.86), concluimos que f es abierta y que f es un homeomorfismo. Esto finaliza la demostración. □

Ahora se muestran algunos resultados de funciones relacionadas con uniones de elementos de hiperespacios. El primero de ellos aborda uniones finitas y resulta de utilidad en la prueba de los Teoremas 1.107, 2.1 y 3.41.

Teorema 1.104. *Dado cualquier espacio topológico X y cualquier número natural n, la función $\psi : (2^X)^n \to 2^X$, dada por*

$$(M_1, \ldots, M_n) \overset{\psi}{\longmapsto} \bigcup\{M_i : i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

es continua.

Demostración. Por el Teorema 1.86, basta probar que la imagen inversa de cualquier vietórico de subconjuntos abiertos de X bajo ψ es el producto de vietóricos de subconjuntos abiertos de X. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ una familia finita de abiertos en X. Afirmamos lo siguiente:

$$\psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle) = \bigcup\{\prod_{i=1}^{n} \langle \mathcal{A}_i \rangle : (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{G}\},$$

donde $\mathcal{G}$ es la familia de las n-adas $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, tales que cada $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$ y $\bigcup\{\mathcal{A}_i : i \in \{1, \ldots, r\}\} = \mathcal{C}$. Para probar esta afirmación, sea $(B_1, \ldots, B_n) \in \psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle)$. Luego, $\bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \bigcup \mathcal{C}$ y $\bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \cap U \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{C}$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\mathcal{A}_i = \{U \in \mathcal{C} : U \cap B_i \neq \emptyset\}$. Obsérvese que $B_i \subset \bigcup \mathcal{A}_i$, y $B_i \cap U \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{A}_i$. Así, $B_i \in \langle \mathcal{A}_i \rangle$. Por otro lado, cada elemento de $\mathcal{C}$ intersecta a $\bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$, así que $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{A}_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. De esta forma, $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{G}$. Esto prueba la contención hacia la derecha. Para mostrar la contención restante, sean $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{G}$ y $(B_1, \ldots, B_n) \in \prod_{i=1}^{n} \langle \mathcal{A}_i \rangle$. Luego, $\bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} = \bigcup \mathcal{C}$. Además, dada $U \in \mathcal{C}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $U \in \mathcal{A}_j$. Como $B_j \in \langle \mathcal{A}_j \rangle$, tenemos que $U \cap \bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \supset U \cap B_j \neq \emptyset$. Así, $\bigcup\{B_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \in \langle \mathcal{C} \rangle$; es decir, $(B_1, \ldots, B_n) \in \psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle)$. Esto prueba la segunda contención y concluye la demostración de este teorema. $\square$

La función que se acaba de presentar en el resultado anterior proporciona un homeomorfismo para ciertos subconjuntos de 2^X. Para expresar dichos conjuntos, lo cual se hace en el Teorema 1.107, se realiza la siguiente definición.

Definición 1.105. Sean X un espacio topológico y U y V subconjuntos de X. Decimos que U y V son **mutuamente separados** en X si $U \cap \mathrm{cl}_X(V) = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$.

Observación 1.106. *Dado un espacio topológico, si $U_1, \ldots, U_n$ es una colección finita de conjuntos mutuamente separados por pares en X y $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces A tiene a lo menos una componente contenida en U_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Para continuar con el siguiente resultado, nótese que la unión de n subconjuntos conexos de X tiene a lo más n componentes. Así, la función del Teorema 1.104 puede ser restringida a $\psi : C(Y_1) \times C(Y_2) \times \cdots \times C(Y_n) \to C_n(X)$, donde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in C(X)$. Es posible decir un poco más.

Teorema 1.107. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia de conjuntos mutuamente separados por pares en X. Entonces, la función $\psi : \prod_{I=1}^{n} C(A_i) \to \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_n$ dada por $(M_1, \ldots, M_n) \stackrel{\psi}{\longmapsto} \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 1.104, ψ es continua. Para demostrar que ψ es inyectiva, tomemos $M_1, N_1 \in C(A_1)$, $M_2, N_2 \in C(A_2)$, $\ldots$, $M_n, N_n \in C(A_n)$ con $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $A_i \cap M_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ y $A_i \cap N_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ para $j \neq i$ y $M_i, N_i \subset A_i$, tenemos $M_i = N_i$. Por tanto, ψ es inyectiva.

Mostremos que ψ es sobreyectiva. Sea $H \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle_n$. Se tiene que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $H \cap A_i \neq \emptyset$; $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ y H tiene a lo más n componentes. Luego, como $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de conjuntos mutuamente separados dos a dos en X, se sigue que $H_1 = H \cap A_1, H_2 = H \cap A_2, \ldots, H_n = H \cap A_n$ son las n componentes distintas de H. Obsérvese que, como H es cerrado en X, cada H_i es cerrado en X y, por consiguiente, en A_i. Así, para cada i, $H_i \in C(A_i)$, y $\psi(H_1, H_2, \ldots, H_n) = H$. Por tanto, ψ es sobreyectiva.

Por último, probemos que ψ^{-1} es continua. Obsérvese que, del párrafo anterior, se desprende que $\psi^{-1}(H) = (H \cap A_1, \ldots, H \cap A_2)$, para cada $H \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle_n$. Así, basta mostrar que, dada cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, la función

$$\theta : \langle A_1, \ldots, A_n \rangle_n \to C(A_i) \text{ dada por } H \stackrel{\theta}{\longmapsto} H \cap A_i,$$

es continua. Para esto, sea $U_1, \ldots, U_k$ una colección finita de subconjuntos abiertos de A_i. Sea $\mathfrak{V} = \langle A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, U_1, \ldots, U_k \rangle_n$. Afirmamos lo siguiente

$$\theta^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle_1) = \mathfrak{V}.$$

Para probar esta igualdad, supongamos que $H \in \theta^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k \rangle_1)$. Luego, $H \in \langle A_1, \ldots, A_n \rangle_n$ y $H \cap A_i \cap U_j = \theta(H) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Además, $H \cap A_i \subset \bigcup\{U_j : j \in \{1, \ldots, k\}\}$ y $H \subset \bigcup\{A_j : j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Así, $H \subset \bigcup\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, U_1, \ldots, U_k\}$ y $H \in \mathfrak{V}$. Recíprocamente, supongamos que $H \in \mathfrak{V}$. Se tiene que $H \cap A_i \cap U_j = H \cap U_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como los A_j son ajenos, tenemos que $H \cap A_i \subset A_i \cap \bigcup\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n, U_1, \ldots, U_k\} = \bigcup\{U_1, \ldots, U_k\}$. En consecuencia, $H \cap A_i \in \langle U_1, \ldots, U_k\rangle_1$. De esta manera, $H \in \theta^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle_1)$. Esto prueba la igualdad.

Por otro lado, dada $j \in \{1, \ldots, n\}$, como los A_r están separados mutuamente en X por pares, se tiene que $A_j \subset X - \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \ldots, n\} - \{j\}\}$. Además,

$$\begin{aligned}&\Big(X - \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \ldots, n\} - \{j\}\}\Big) \cap \bigcup\{A_s : s \in \{1, \ldots, n\}\}\\ &= \bigcup\Big\{\Big(X - \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \ldots, n\} - \{j\}\}\Big) \cap A_s : s \in \{1, \ldots, n\}\Big\}\\ &= \Big(X - \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \ldots, n\} - \{j\}\}\Big) \cap A_j = A_j.\end{aligned}$$

En esta forma, A_j es un subconjunto abierto de $\bigcup\{A_s : s \in \{1, \ldots, n\}\}$. Como U_r es abierto en A_i, se sigue que U_r también es abierto en $\bigcup\{A_s : s \in \{1, \ldots, n\}\}$, para cada $r \in \{1, \ldots, k\}$. Luego, $\mathfrak{V}$ es abierto en $C(\bigcup\{A_r : r \in \{1, \ldots, n\}\})$. Por tanto, $\mathfrak{V}$ es abierto en $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle_n$ (pues $\mathfrak{V} \subset \langle A_1, \ldots, A_n\rangle_n \subset C(\bigcup\{A_s : s \in \{1, \ldots, n\}\})$). Así, se concluye que θ es continua y que ψ es un homeomorfismo. $\square$

En el siguiente teorema se muestran algunas propiedades de la función unión sobre subconjuntos de 2^X. Este resultado es de utilidad en las pruebas de los Teoremas 2.14 y 3.8.

Teorema 1.108. *Sea X un continuo. Entonces, se satisface lo siguiente:*

(1) Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$.

(2) Para cualesquiera $A, B \in 2^X$ se cumple que $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(3) La función $\Psi : 2^{2^X} \to 2^X$, dada por $\mathcal{A} \overset{\Psi}{\longmapsto} \bigcup \mathcal{A}$, es continua.

Demostración. Para probar (1), basta mostrar que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X. Para esto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\bigcup \mathcal{A}$, tal que $\lim x_n = x$, para algún $x \in X$. Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $A_i \in \mathcal{A}$, tal que $x_i \in A_i$. Como 2^X es compacto, existe una subsucesión $\{A_{k_n}\}_n \in \mathbb{N}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim A_{k_n} = A$, para algún $A \in 2^X$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X, se tiene que $A \in \mathcal{A}$. Obsérvese, además, que $x = \lim x_{k_n}$ y $\lim x_{k_n} \in \liminf A_{k_n} = \lim A_{k_n}$; es decir, $x \in A$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Esto prueba que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado.

Ahora veremos (2). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ elementos de 2^{2^X}. Por (1), tenemos que $\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B} \in 2^X$.

Sea $\varepsilon > 0$, tal que $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$. Probaremos que $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) < \varepsilon$. Para tal efecto, sea, $\delta > 0$, tal que $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \delta < \varepsilon$, y $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Luego, existe $A \in \mathcal{A}$, tal que $x \in A$. Como $\mathcal{A} \subset N_{H_d}(\mathcal{B}, \delta)$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $H_d(A, B) < \delta$. Esto último implica que $A \subset N_d(B, \delta)$, así que $d(x, y) < \delta$, para algún $y \in B$. Como $y \in \bigcup \mathcal{B}$, tenemos que $x \in N_d(\bigcup \mathcal{B}, \delta)$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \subset N_d(\bigcup \mathcal{B}, \delta)$. De manera similar, obtenemos que $\bigcup \mathcal{B} \subset N_d(\bigcup \mathcal{A}, \delta)$. Por tanto, $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq \delta < \varepsilon$.

Si $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B})$, entonces, por el párrafo anterior, se tiene que $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) < H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

El inciso 3 es una consecuencia inmediata de (2) (porque, para cualquier $\varepsilon > 0$, si $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$, entonces $H_d(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) < \varepsilon$). Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

1.6.3. Modelos de Hiperespacios

En este apartado se construyen modelos geométricos para el hiperespacio de subcontinuos tanto del arco como de la curva cerrada simple y para el segundo hiperespacio del arco. Asimismo, después de probar que tales hiperespacios son n-celdas, para una n apropiada en cada caso, se halla una expresión de la frontera variedad de estos espacios en términos de alguna propiedad que cada uno de sus puntos posee individualmente. Así, esta sección se aboca prácticamente a probar los Teoremas 1.110, 1.113 y 1.115 (además de los Corolarios 1.111 y 1.116).

Para probar los Teoremas 1.110 y 1.113, resulta de utilidad el siguiente lema.

Lema 1.109. *La función $f : \mathbb{R}^2 \to C(\mathbb{R})$ dada por*

$$(a, b) \stackrel{f}{\longmapsto} [a, b]$$

es continua.

Demostración. Para demostrar que f es continua, tomemos $\varepsilon > 0$ y puntos $(a_0, b_0), (a_1, b_1)$ en $\mathbb{R}^2$ con $\|(a_0, b_0) - (a_1, b_1)\| < \varepsilon$. Tenemos que

$$|a_0 - a_1| \leq \|(a_0, b_0) - (a_1, b_1)\| < \varepsilon.$$

Similarmente, $|b_0 - b_1| < \varepsilon$.

Así,

$$\begin{array}{ccc} a_1 - \varepsilon < a_0, & & a_0 - \varepsilon < a_1, \\ b_0 < b_1 + \varepsilon & \text{y} & b_1 < b_0 + \varepsilon. \end{array}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}&[a_0, b_0] \subset (a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) = N(\varepsilon, [a_1, b_1]) \text{ y}\\ &[a_1, b_1] \subset (a_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon) = N(\varepsilon, [a_0, b_0]).\end{aligned}$$

Por tanto, $H(f((a_0, b_0)), f((a_1, b_1))) \leq \varepsilon$. Así, se concluye que f es continua. $\square$

El primer modelo de hiperespacio que se construye es el de los subcontinuos de un arco, lo cual se hace en el siguiente teorema.

Teorema 1.110. *Si X es un arco, entonces $C(X)$ es una 2-celda, $\partial C(X) = F_1(X) \cup C(X, p) \cup C(X, q)$, donde p y q son los puntos extremos de X. Además, si $r \in \{p, q\}$, entonces $C(X, r)$ es un arco con puntos extremos $\{r\}$ y X y $C(X, r) \cup F_1(X)$ es un arco con puntos extremos $\{s\}$ y X, donde $s \in \{p, q\} - \{r\}$.*

Demostración. Demostremos primero el caso en que X es el intervalo cerrado $[0, 1]$. Obsérvese que cualquier subintervalo de $[0, 1]$ es un elemento de $C([0, 1])$ y que, si A es un subcontinuo de $[0, 1]$, entonces A es un subintervalo cerrado de $[0, 1]$; es decir, existen $a, b \in [0, 1]$ con $a \leq b$, tales que $A = [a, b]$. De esta manera, si $T = \{(a, b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, entonces podemos considerar la función $f : T \to C([0, 1])$ dada por

$$(a, b) \xmapsto{f} [a, b]$$

la cual, además, es sobreyectiva. También, por el Lema 1.109, f es continua. Más aún, si $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \in T$ son tales que $[a_0, b_0] = [a_1, b_1]$, entonces $a_0 \leq a_1 \leq a_0$ y $b_0 \leq b_1 \leq b_0$; es decir, $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$. Por tanto, f es inyectiva. De este modo, f es una biyección continua. Como T es compacto y $C([0, 1])$ es un espacio Hausdorff, se tiene que f es un homeomorfismo.

Por otro lado, como T es convexo, cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, por el Teorema 1.60, se cumple que T es una 2-celda. Además, el Lema 1.59 nos asegura que

$$\partial T = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n}(T) = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup \{(a, a) : a \in [0, 1]\}.$$

Aplicando el Teorema 1.57, obtenemos que

$$\begin{aligned}\partial C([0, 1]) &= f(\partial T)\\ &= \{[0, a] : a \in [0, 1]\} \cup \{[a, 1] : a \in [0, 1]\} \cup \{\{a\} : a \in [0, 1]\}\\ &= C([0, 1], 0) \cup C([0, 1], 1) \cup F_1([0, 1]).\end{aligned}$$

Obsérvese que $f^{-1}(C([0,1],0)) = f^{-1}(\{[0,a] : a \in [0,1]\}) = \{0\} \times [0,1]$. Como este último conjunto es un arco con puntos extremos $(0,0)$ y $(0,1)$, tenemos que $C([0,1],0)$ es un arco con puntos extremos $f((0,0)) = \{0\}$ y $f((0,1)) = [0,1]$. Por el Teorema 1.103, $F_1([0,1])$ es un arco con puntos extremos $\{0\}$ y $\{1\}$. Además, $\{0\}$ es el único elemento singular de $C([0,1],0)$; es decir, $F_1([0,1]) \cap C([0,1],0) = \{\{0\}\}$. Por consiguiente, $F_1([0,1]) \cap C([0,1],0)$ es un arco con puntos extremos $\{1\}$ y $[0,1]$. De manera semejante, se puede probar que $C([0,1],0)$ es un arco con puntos extremos $\{1\}$ y X. Con esto terminamos la prueba para el caso del arco $[0,1]$.

Ahora probaremos el caso en que X es un arco cualquiera. Sean $h : [0,1] \to X$ un homeomorfismo y $p = h(0)$ y $q = h(1)$ los puntos extremos de X. Por el Corolario 1.102, la función $h^* : C([0,1]) \to C(X)$ dada por $A \xmapsto{h^*} h(A)$ es un homeomorfismo. De esta manera, $C(X)$ es una 2-celda y, por el Teorema 1.57, tenemos que $\partial X = h(\partial C([0,1]))$. Obsérvese que $A \in C([0,1],0)$ implica que $0 \in A$, $h(0) \in h(A) = h^*(A)$; es decir, $p = h(0) \in h^*(A)$. Así, $h^*(C([0,1],0)) \subset C(X,p)$. La contención recíproca se obtiene de la misma manera. Por tanto, $h^*(C([0,1],0)) = C(X,p)$. Similarmente, se puede probar que $h^*(C([0,1],1)) = C(X,q)$ y $h(F_1([0,1]) = F_1(X)$. Así, se concluye que $\partial X = C(X,p) \cup C(X,q) \cup F_1(X)$.

Por último, tomemos $r \in \{p,q\}$. Obsérvese que

$$C(X,r) = h^*(C([0,1],h^{-1}(r))) \;\text{ y }\; F_1(X) = h^*(F_1([0,1]).$$

Como $h^{-1}(r) \in \{0,1\}$, tenemos, por lo anteriormente demostrado para $[0,1]$, que $C(X,r)$ es un arco con puntos extremos $h^*(\{h^{-1}(r)\}) = \{r\}$ y $h^*([0,1]) = X$ y que $C(X,r) \cup F_1(X)$ es un arco con puntos extremos $h^*(\{h^{-1}(s)\}) = \{s\}$ y $h^*([0,1]) = X$, donde $s \in \{p,q\} - \{r\}$. Esto concluye la prueba del teorema. □

La Figura 1.5 muestra el modelo construido en el Teorema 1.110.

El siguiente corolario, del Teorema 1.110, se emplea en la prueba del Corolario 1.112.

Corolario 1.111. *Si X es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $(0,1]$ o al intervalo $(0,1)$, entonces $C(X)$ es una 2-variedad conexa y $\partial C(X) = F_1(X) \cup C(X, E(X))$.*

Demostración. Sea $f : X \to [0,1]$ un encaje con $f(X) = (0,1)$ o $f(X) = (0,1]$. Obsérvese que $f(X)$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$ y $C(f(X)) = \langle f(X) \rangle_1$ es un subconjunto abierto de $C([0,1])$. Además, por el Teorema

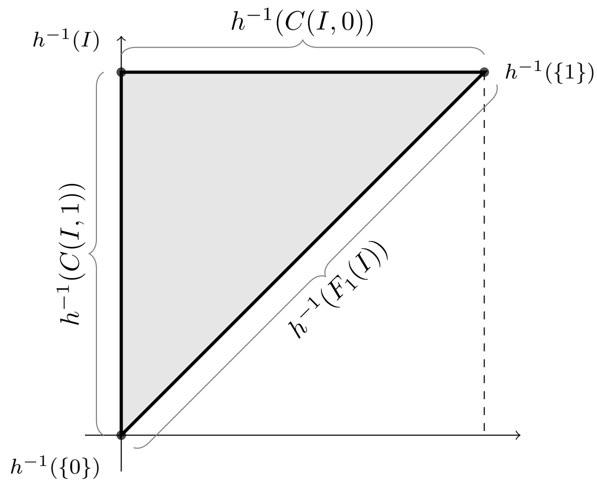


Figura 1.5: Modelo geométrico para $C(I)$.

1.110, $C([0,1])$ es una 2-celda y, por consiguiente, es una 2-variedad. Aplicando el Teorema 1.66, tenemos que $C(f(X))$ es una 2-variedad y $\partial C(f(X)) = C(f(X)) \cap \partial C([0,1])$. Por el Corolario 1.102, la función $f^* : C(X) \to C(f(X))$ dada por $A \xmapsto{f^*} f(A)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 1.57 tenemos que $f^*(\partial C(X)) = \partial C(f(X))$. Por tanto, y aplicando el Teorema 1.110, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^*(\partial C(X)) &= C(f(X)) \cap \partial C([0,1])) \\ &= C(f(X)) \cap (C([0,1],0) \cup C([0,1],1) \cup F_1([0,1])) \\ &= C(f(X),0) \cup C(f(X),1) \cup F_1(f(X)) \\ &= C(f(X),\{0,1\} \cap f(X)) \cup F_1(f(X)). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \partial C(X) &= (f^*)^{-1}(C(f(X),\{0,1\} \cap f(X)) \cup F_1(f(X))) \\ &= \{A \in C(X) : f(A) \cap \{0,1\} \neq \emptyset\} \cup F_1(X) \\ &= \{A \in C(X) : A \cap f^{-1}(\{0,1\}) \neq \emptyset\} \cup F_1(X). \end{aligned}$$

Obsérvese, además, que, por el Teorema 1.24, $E(f(X)) = E([0,1]) \cap f(X) = \{0,1\} \cap f(X)$. De esta manera, y como $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, $E(X) = f^{-1}(E(f(X))) = f^{-1}(\{0,1\} \cap f(X)) = f^{-1}(\{0,1\})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \partial C(X) &= \{A \in C(X) : A \cap E(X) \neq \emptyset\} \cup F_1(X) \\ &= C(X, E(X)) \cup F_1(X). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de este corolario. $\square$

Un segundo corolario al Teorema 1.110 es de gran utilidad en las pruebas del Teorema 2.18 y del Lema 3.39.

Corolario 1.112. *Si X es un continuo y U, V son subconjuntos abiertos de X ajenos entre sí, tales que cada uno de ellos es homeomorfo al intervalo $(0, 1]$ o al intervalo $(0, 1)$, entonces $\langle U, V\rangle_2$ es una 4-variedad conexa y*

$$\partial\langle U, V\rangle = \{U \in \langle U, V\rangle : U \textit{ tiene una componente degenerada o } U \textit{ contiene un extremo de } U \textit{ o de } V\}.$$

Demostración. Por el Teorema 1.107, la función $h : C(U)\times C(V) \to \langle U, V\rangle_2$, dada por $(A, B) \overset{h}{\longmapsto} A \cup B$, es un homeomorfismo.

Obsérvese que, por el Corolario 1.111, $\partial\langle U\rangle_1$ y $\partial\langle V\rangle_1$ son 2-celdas y

$$\begin{aligned}\partial\langle U\rangle_1 &= \partial C(U) = F_1(U) \cup C(U, E(U)) \quad \text{y}\\ \partial\langle V\rangle_1 &= \partial C(V) = F_1(V) \cup C(V, E(V)).\end{aligned}$$

Por los Teoremas 1.57 y 1.66, tenemos que $\partial\langle U, V\rangle_2 = \partial h(C(U) \times C(V)) = h(\partial(C(U) \times C(V))) = h((\partial C(U) \times C(V)) \cup (C(U) \times \partial C(V)))$. De esta forma, y considerando que, para cada $C \in \langle U, V\rangle_2$, se cumple que $C \cap U$ y $C \cap V$ son las dos componentes de C, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\partial\langle U, V\rangle_2 = {}& h((F_1(U) \cup C(U, E(U))) \times C(V)\cup\\ & C(U) \times (F_1(V) \cup C(V, E(V))))\\ ={}& \{A \cup B \in \langle U, V\rangle_2 : A \in F_1(U) \cup C(U, E(U)) \text{ y } B \in C(V), \text{ o}\\ & A \in C(U) \text{ y } B \in F_1(V) \cup C(V, E(V))\}\\ ={}& \{C \in \langle U, V\rangle_2 : C \cap U \in F_1(U) \cup C(U, E(U)) \text{ o}\\ & C \cap V \in F_1(V) \cup C(V, E(V))\}\\ ={}& \{C \in \langle U, V\rangle_2 : A \text{ tiene una componente degenerada o}\\ & A \text{ contiene un punto extremo de } U \text{ o de } V\}.\end{aligned}$$

Con esto concluye la prueba del corolario. $\square$

Ahora se construye un modelo para el hiperespacio de subcontinuos de las curvas cerradas simples.

Teorema 1.113. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda, $\partial C(X) = F_1(X)$ y, para cualquier $p \in X$, se cumple que $C(X, p)$ es una 2-celda y $\partial C(X, p) = \mathrm{Fr}_{C(X)}(C(X, p)) = \{X, \{p\}\} \cup \{A \in C(X) : A$ es un arco contenido en X y p es un punto extremo de $A\}$.*

Demostración. En primer lugar, será conveniente mostrar que las funciones $\text{máx} : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ y $\text{mín} : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ (las funciones máximo y mínimo de un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, respectivamente) son continuas. Para ello, sean $A \in 2^{\mathbb{R}}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $B \in 2^{\mathbb{R}}$, tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego, $A \subset N(B, \varepsilon) \subset$ y $B \subset N(A, \varepsilon)$. Como $B \subset [\text{mín}(B), \text{máx}(B)]$, se tiene que

$$A \subset N([\text{mín}(B), \text{máx}(B)], \varepsilon) = (\text{mín}(B) - \varepsilon, \text{máx}(B) + \varepsilon).$$

Similarmente, $B \subset (\text{mín}(A) - \varepsilon, \text{máx}(A) + \varepsilon)$. Así, $\text{mín}(B) - \varepsilon < \text{mín}(A)$ y $\text{mín}(A) - \varepsilon < \text{mín}(B)$. Esto implica que $-\varepsilon < \text{mín}(A) - \text{mín}(B) < \varepsilon$; es decir, $|\text{mín}(A) - \text{mín}(B)| < \varepsilon$. De manera análoga, obtenemos que $|\text{máx}(A) - \text{máx}(B)| < \varepsilon$. Por tanto, mín y máx son continuas.

Demostremos primero el teorema para el caso en que $X = S^1$. Sea $f : \mathbb{R} \to S^1$ la función dada por $x \overset{f}{\longmapsto} (\cos(x), \sin(x))$. Para lo que sigue de esta prueba, se acepatarán y usarán únicamente las siguientes propiedades de f:

(1) f es continua, sobreyectiva y tiene periodo 2π;

(2) $f|_{[x,x+2\pi)}$ es inyectiva;

(3) la función inversa de $f|_{(x,x+2\pi)}^{f((x,x+2\pi))}$ es continua;

(4) $\|f(x + \pi) - f(x)\| = 2$, y

(5) si $|x - y| \leq \pi$, entonces $\frac{|x-y|}{2} \leq \|f(x) - f(y)\|$;

en donde x, y, s, z son cualesquiera números reales. Obsérvese que, dado $c \in \mathbb{R}$, como f es sobreyectiva y tiene periodo 2π, se cumple que $f([c, c+2\pi)) = S^1$. Como $f|_{[c,c+2\pi)}$ es inyectiva, $f((c, c+2\pi)) = S^1 - \{f(c)\}$. Además, como $f(c) = f(c + 2\pi)$, se cumple que $f|_{(c,c+2\pi]}$ es inyectiva.

Tomemos $A \in C(S^1) - \{S^1\}$. Para cualquier $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) \notin A$, definimos el conjunto K_b^A como sigue. Sea $U(t) = (t, t+2\pi)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Como $f|_{U(b)}^{S^1-\{f(b)\}}$ es un homeomorfismo y $A \subset S^1 - \{f(b)\}$, existe un único $K_b^A \subset U(b)$, tal que $f(K_b^A) = A$. Obsérvese que $f|_{K_b^A}^{A}$ es un homeomorfismo. Así, K_b^A es conexo y cerrado en $\mathbb{R}$. Como K_b^A es acotado, se cumple que K_b^A es un intervalo cerrado. Mostraremos que el valor de $\text{máx}(K_b^A) - \text{mín}(K_b^A)$ y $f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A)))$ no depende de b. Para ello, sea $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(c) \notin A$. Sea $D = \{c + 2k\pi : k \text{ es un entero}\}$. Obsérvese que los conjuntos de la forma $U(c+2k\pi)$, con k variando en los enteros, son abiertos en $\mathbb{R}$ y su unión es $\mathbb{R} - D$. Además, para cualesquiera enteros distintos i y j se cumple que $U(c + 2i\pi) \cap U(c + 2j\pi) = \emptyset$. Luego, como K_b^A no intersecta a D y es conexo, existe un entero k_0, tal que $K_b^A \subset U(c+2k_0\pi)$. Así, $-2k_0\pi + K_b^A \subset U(c)$. Como f tiene periodo 2π, se tiene que $f(-2k_0\pi + K_b^A) = f(K_b^A) = A$. Como $f|_{U(c)}^{S^1-\{f(c)\}}$ es un homeomorfismo, se tiene que $-2k_0\pi + K_b^A = K_c^A$. Por tanto, $\text{mín}(K_c^A) = \text{mín}(-2k_0\pi + K_b^A) = -2k_0\pi + \text{mín}(K_b^A)$. Similarmente, $\text{máx}(K_c^A) = -2k_0\pi + \text{máx}(K_b^A)$. De este modo,

$$\begin{aligned}\text{máx}(K_b^A) - \text{mín}(K_b^A) &= (2k_0\pi + \text{máx}(K_c^A)) - (2k_0\pi + \text{mín}(K_c^A))\\ &= \text{máx}(K_c^A) - \text{mín}(K_c^A) \qquad\qquad y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\tfrac{1}{2}(\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A))) &= f(\tfrac{1}{2}(2k_0\pi + \text{máx}(K_c^A) + 2k_0\pi + \text{mín}(K_c^A)))\\ &= f(2k_0\pi + \tfrac{1}{2}(\text{máx}(K_c^A) + \text{mín}(K_c^A)))\\ &= f(\tfrac{1}{2}(\text{máx}(K_c^A) + \text{mín}(K_c^A))).\end{aligned}$$

Este hecho nos permite considerar las funciones $\alpha : C(S^1) - \{S^1\} \to [0, 2\pi)$ y $\mu : C(S^1) - \{S^1\} \to S^1$, dadas por

$$A \overset{\alpha}{\longmapsto} \text{máx}(K_b^A) - \text{mín}(K_b^A)$$

$$A \overset{\mu}{\longmapsto} f(\tfrac{1}{2}(\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A))),$$

donde b es un valor, tal que $f(b) \notin A$, y K_b^A es un subconjunto de $(b, b+2\pi)$, tal que $f(K_b^A) = A$.

Demostraremos que α y μ son continuas. Con este fin, sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(S^1) - \{S^1\}$, tal que $\text{lím}\, B_n = B$, para alguna $B \in C(S^1) - \{S^1\}$. Sea $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(c) \notin B$. Sean $U = (c, c+2\pi)$ y $V = S^1 - \{f(c)\}$. Obsérvese que $\langle V \rangle_1$ es una vecindad de B en $C(S^1)$. De esta forma, podemos suponer que $B_n \in \langle V \rangle_1$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\alpha(B_n) = \text{máx}(K_c^{B_n}) - \text{mín}(K_c^{B_n})$ y $\mu(B_n) = f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_c^{B_n}) + \text{mín}(K_c^{B_n})))$. Como $f|_U^V$ es un homeomorfismo y $K_c^{B_n} = (f|_U^V)^{-1}(B_n)$, se tiene que $\text{lím}\, K_c^{B_n} = (f|_U^V)^{-1}(B) = K_c^B$. Como máx, mín y f son continuas, se cumple que

$$\text{lím}(\text{máx}(K_b^{B_n}) - \text{mín}(K_b^{B_n})) = \text{máx}(K_b^B) - \text{mín}(K_b^B) \quad \text{y}$$

$$\text{lím}\, f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_c^{B_n}) + \text{mín}(K_c^{B_n}))) = f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_c^B) + \text{mín}(K_c^B))).$$

Así, $\text{lím}\, \alpha(B_n) = \alpha(B)$ y $\text{lím}\, \mu(B_n) = \mu(B)$. Esto prueba que α y μ son continuas. (Una manera de visualizar a $\mu(A)$ y $\alpha(A)$, cuando A es no degenerado, es como el punto medio del arco A y el ángulo medido desde el origen que abre A, respectivamente).

Obsérvese que $0 \leq \alpha(A) < 2\pi$ y $0 < 1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(A) \leq 1$. De esta forma, podemos definir la función $h : C(X) - \{S^1\} \to D^2 - \{0\}$ como sigue

$$A \overset{h}{\longmapsto} (1 - \tfrac{1}{2\pi}\alpha(A))\mu(A).$$

Es claro que h es continua. Mostremos que h es inyectiva. Sean $A, B \in C(X) - \{S^1\}$, tales que $h(A) = h(B)$. Como $\|\mu(A)\| = \|\mu(B)\| = 1$, se tiene que $1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(A) = \|h(A)\| = \|h(B)\| = 1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(B)$ y, por ende, $\mu(A) = \mu(B)$. Luego, si $b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $f(b) \in S^1 - A$ y $f(c) \in S^1 - B$, se tiene que $f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A))) = f(\frac{1}{2}(\text{máx}(K_c^B) + \text{mín}(K_c^B)))$. Como f tiene periodo 2π y su restricción a $[b, b + 2j\pi)$ es inyectiva, para cualquier entero j, la penúltima igualdad implica que $\frac{1}{2}(\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A)) = \frac{1}{2}(\text{máx}(K_c^B) + \text{mín}(K_c^B)) + 2j_0\pi$, para algún entero j_0. Luego,

$$\text{máx}(K_b^A) + \text{mín}(K_b^A) = \text{máx}(K_c^B) + \text{mín}(K_c^B) + 4j_0\pi.$$

Como también se tiene que $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ son iguales, obtenemos que

$$\text{máx}(K_b^A) - \text{mín}(K_b^A) = \text{máx}(K_c^B) - \text{mín}(K_c^B).$$

De las últimas dos ecuaciones obtenemos que $\text{máx}(K_b^A) = \text{máx}(K_c^B) + 2j_0\pi$ y $\text{mín}(K_b^A) = \text{mín}(K_c^B) + 2j_0\pi$. Como $K_b^A = [\text{mín}(K_b^A), \text{máx}(K_b^A)]$ y $K_c^B = [\text{mín}(K_c^B), \text{máx}(K_c^B)]$, se cumple que $K_b^A = 2j_0\pi + K_c^B$ y $A = f(K_b^A) = f(K_c^B) = B$. Esto prueba que h es inyectiva.

Ahora probaremos que h es sobreyectiva. Tomemos $u \in D^2 - \{0\}$. Sean $v = \frac{u}{\|u\|}$ y $r = \|u\|$. Como $v \in S^1$, podemos elegir $t \in f^{-1}(\{v\})$. Sean $K_0 = [t - (1-r)\pi, t + (1-r)\pi]$ y $A_0 = f(K_0)$. Obsérvese que A_0 es un subcontinuo de S^1. Como $0 < r \leq 1$, se tiene que $t - \pi < t - (1-r)\pi$ y $t + (1-r)\pi < t + \pi$, con $1 - r \geq 0$. Así, $K_0 \subset (t - \pi, t + \pi)$, $A_0 \subset S^1 - \{f(t-\pi)\}$, y $A_0 \in C(S^1) - \{S^1\}$. Además, $K_{t-\pi}^{A_0} = K_0$, $\text{mín}(K_0) = t - (1-r)\pi$ y $\text{máx}(K_0) = t + (1-r)\pi$. De esta manera,

$$\alpha(A) = (t + (1-r)\pi) - (t - (1-r)\pi) = 2(1-r)\pi$$

$$\mu(A) = f(\frac{1}{2}((t + (1-r)\pi) - (t - (1-r)))) = f(\frac{1}{2}(2t)) = f(t) = v.$$

Por tanto, $h(A_0) = (1 - \frac{1}{2\pi}(2(1-r)))v = rv = u$. Esto prueba que h es sobreyectiva.

Hasta aquí, hemos visto que h es una biyección continua. Ahora, probaremos que h admite una extensión biyectiva y continua de S^1 en D^2. Para ello, sea $h^* : C(S^1) \to D^2$ la extensión de h, tal que $h^*(S^1) = 0$.

Mostraremos que h^* es continua. Con este fin, tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(S^1)-\{S^1\}$, tal que $\lim A_n = S^1$. Vamos a probar primero que $\lim \alpha(A_n) = 2\pi$. Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que $H(A_n, S^1) < \frac{\varepsilon}{6}$, siempre que $n \geq N$. Podemos suponer que $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Fijemos $n \geq N$. Sea $b_n \in \mathbb{R}$, tal que $f(b_n) \in S^1 - A_n$. Como $S^1 \subset N(A_n, \frac{\varepsilon}{6})$ y A_n es conexo, se cumple que $S_1 - A_n \subset B(f(b_n), \frac{2\varepsilon}{6})$. Como $f(K_{b_n}^{A_n}) = A_n$, $(b_n, \text{mín}(K_{b_n}^{A_n}))$ es ajeno a $K_{b_n}^{A_n}$ y la restricción de f a $(b_n, b_n+2\pi)$ es inyectiva, se tiene que $f((b_n, \text{mín}(K_{b_n}^{A_n}))) \subset S_1 - A_n \subset B(f(b_n), \frac{\varepsilon}{3})$. Luego, $f([b_n, \text{mín}(K_{b_n}^{A_n})]) \subset B(b_n, \frac{\varepsilon}{2})$. En particular, $\|f(\text{mín}(K_{b_n}^{A_n})) - f(b_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado, si $\text{mín}(K_{b_n}^{A_n}) - b_n > \pi$, entonces $b_n + \pi \notin K_{b_n}^{A_n}$ y, como $f|_{(b_n, b_n+2\pi)}$ es inyectiva, se tiene que $f(b_n+\pi) \notin A_n$. Luego, $f(b_n+\pi) \in B(f(b_n), \frac{2\varepsilon}{6})$; es decir, $\|f(b_n+2\pi) - f(b_n)\| < \frac{2\varepsilon}{6}$, y, por la propiedad (4), $\|f(b_n+2\pi) - f(b_n)\| = 2$. Esto implica que $\varepsilon > 6$ y contradice la elección de ε. Así, $|\text{mín}(K_{b_n}^{A_n}) - b_n| = \text{mín}(K_{b_n}^{A_n}) - b_n \leq \pi$. Aplicando la propiedad 5, obtenemos que $|\text{mín}(K_{b_n}^{A_n}) - b_n| \leq \|f(\text{mín}(K_{b_n}^{A_n})) - f(b_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. De forma similar, se puede mostrar que $|b_n + 2\pi - \text{máx}(K_{b_n}^{A_n})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, $|(\text{máx}(K_{b_n}^{A_n}) - \text{mín}(K_{b_n}^{A_n})) - 2\pi| \leq |\text{máx}(K_{b_n}^{A_n}) - (b_n+2\pi)| + |b_n - \text{mín}(K_{b_n}^{A_n})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Como esto sucede para cada $n \geq N$, concluimos que $\lim \alpha(A_n) = 2\pi$.

De este modo, $\lim(1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(A_n)) = 0$, y porque, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se satisface que $\|\mu(A_n)\| = 1$, concluimos que $\lim h(A_n) = 0 = h(S^1)$. Esto prueba que h^* es una biyección continua. Como $C(S^1)$ es compacto y D^2 es un espacio Hausdorff, concluimos que h^* es un homeomorfismo.

Por otra parte, por el Teorema 1.57, se tiene que $\partial C(S^1) = h^{-1}(\partial D^2)$. Como $\partial D^2 = S^1$ y, para cada $A \in C(S^1)$, $\|h(A)\| = 1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(A)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\partial C(S^1) = h^{-1}(S^1) &= \{A \in C(S^1) : 1 - \frac{1}{2\pi}\alpha(A) = 1\}\\ &= \{A \in C(S^1) : \alpha(A) = 0\}.\end{aligned}$$

Como $\alpha(A) = 0$ si y sólo sí $\text{mín}(K_b^A) = \text{máx}(K_b^A)$, para algún b, tal que $f(b) \notin A$, la condición $\mu(A) = 0$ es equivalente a que A sólo posee un punto, es decir, a que $A \in F_1(A)$. Así, se tiene que $\partial C(S^1)) = F_1(S^1)$.

Ahora, demostraremos la parte del teorema acerca de $C(S^1, p)$. Sea b, tal que $f(b) = p$. Sean $T = \{(x,y) : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 2\pi\}$ y $D = \{(x, 2\pi - x) : 0 \leq x \leq 2\pi\}$. Obsérvese que, para cada $(x,y) \in D$, se cumple que $y = 2\pi - x$ y $f([p-x, p+y]) = f([p-x, p-x+2\pi]) = S^1$. De esta forma, podemos definir la función $\phi : T/D \to C(S^1, p)$ dada por

$$z \overset{\phi}{\longmapsto} f([b-x, b+y]),$$

en donde (x, y) es algún elemento de z. Obsérvese que $\phi(D) = S^1$. Sea $q : T \to T/D$ la función natural del cociente; es decir,

$$v \overset{\phi}{\longmapsto} \begin{cases} D & \text{si } v \in D, \\ \{v\} & \text{si } v \notin D. \end{cases}$$

Demostraremos que ϕ es un homeomorfismo. Como para cualquier punto $(x, y) \in T$ se cumple que $\phi \circ q(x, y) = f([b-x, b+y])$, se sigue inmediatamente del Lema 1.109 que $\phi \circ q$ es composición de funciones continuas. Así, $\phi \circ q$ es continua. Esto equivale a que ϕ es continua.

Ahora mostremos que ϕ es inyectiva. Sean $z, w \in T/D$ con $\phi(z) = \phi(w)$. Sean $(x, y) \in z$ y $(u, v) \in w$. Si $z = D$, entonces $\phi(w) = S^1$. Como $f([s, s+t]) \neq S^1$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 2\pi)$ (pues $f|_{[s,s+2\pi)}$ es inyectiva), se satisface que $v - u = b + v - (b - u) = 2\pi$. Así, $(u, v) \in D$; es decir, $w = D$. De esta forma, podemos suponer que $z \neq D \neq w$. Luego, $x + y < 2\pi$ y $u + v < 2\pi$. Sea c, tal que $b + y - 2\pi < c < b - x$. Como $f|_{[c,c+2\pi)}$ es inyectiva y $c < b - x \leq b + y < c + 2\pi$, se cumple que $f(c) \notin f([b-x, b+y])$. Luego, $f(c) \notin f([b-u, b+v])$ y $c \notin [b-u, b+v]$. Como $c < b - x < b$ esto implica que $c < b - u$. Similarmente, como $f(c+2\pi) \notin f([b-u, b+v])$, $c+2\pi \notin [b-u, b+v]$ y $b < b+y < c+2\pi$, se tiene que $b+v < c+2\pi$. Así, $[b-u, b+v] \subset (c, c+2\pi)$. Como también $[b-x, b+y] \subset (c, c+2\pi)$, podemos aplicar la inyectividad de $f|_{[c,c+2\pi)}$ para obtener la igualdad $[b-x, b+y] = [b-u, b+v]$. Así, $b - x = b - u$ y $b - y = b - v$. Dicho en otros términos, $(x, y) = (u, v)$. Por tanto, $z = w$. Esto prueba que ϕ es inyectiva.

Para mostrar que ϕ es sobreyectiva, tomemos $A \in C(S^1, p)$. Si $A = S^1$, entonces $\phi(D) = S^1$. Supongamos que $A \neq S^1$. Como $f((b-2\pi, b)) = S^1 - \{p\}$ y $p \in A$, existe $c \in (b - 2\pi, b)$, tal que $f(c) \notin A$. Obsérvese que, como vimos con anterioridad, $c < \text{mín}(K_c^A)$ y $\text{máx}(K_c^A) < c + 2\pi$. Además, $c < b < c + 2\pi$ y, como $f|_{[c,c+2\pi)}$ es inyectiva, debemos tener $b \in K_c^A$. Así, $b - \text{mín}(K_c^A) \geq 0$, $\text{máx}(K_c^A) - b \geq 0$, $b - \text{mín}(K_c^A) + \text{máx}(K_c^A) - b = \text{máx}(K_c^A) - \text{mín}(K_c^A) < c + 2\pi - c = 2\pi$ y $\phi(\{(b - \text{mín}(K_c^A), \text{máx}(K_c^A) - b)\}) = f([\text{mín}(K_c^A), \text{máx}(K_c^A)]) = f(K_c^A) = A$. Por tanto, ϕ es sobreyectiva.

De este modo, ϕ es una biyección continua. Además, por el Lema 1.63, T/D es una 2-celda. Así, T/D es compacto y $C(S^1, p)$ es Hausdorff. Esto implica que ϕ es un homeomorfismo y que $C(S^1, p)$ es una 2-celda.

Por otra parte, por el Teorema 1.57, es cierto que $\phi(\partial(T/D)) = \partial C(S^1, p)$

y, por el Teorema 1.60 y el Lema 1.63, se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned}\partial T &= \operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^2} T \\ &= ([0,2\pi] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,2\pi]) \cup D \\ &= ((0,2\pi) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0,2\pi)) \cup \{(0,0)\} \cup D\end{aligned}$$

y

$$\partial(T/D) = \{\{z\} : z \in \partial T - D\} \cup \{D\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}&\partial C(S^1, p) \\ &\quad = \phi(\{\{z\} : z \in ((0,2\pi) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0,2\pi)) \cup \{(0,0)\}\} \cup \{D\}) \\ &\quad = \{f([b-x,b]) : x \in [0,2\pi)\} \cup \{f([b,b+y]) : y \in [0,2\pi)\} \cup \{\{p\}, S^1\}.\end{aligned}$$

Afirmamos que $\{f([b-x,b]) : x \in [0,2\pi)\} \cup \{f([b,b+y]) : y \in [0,2\pi)\}$ es la colección de arcos contenidos en S^1 tales que p es uno de sus puntos extremos. Para probar esto, tomemos $x \in [0,2\pi)$. Luego, dado $c \in (b-2\pi, b-x)$, se cumple que $[b-x,b] \subset (c, c+2\pi)$ y $f|_{(c,c+2\pi)}^{S^1-\{f(c)\}}$ es un homeomorfismo. Como $[b-x,b]$ es un intervalo no degenerado, $f([b-x,b])$ es un arco contenido en S^1 y $f(b) = p$ es uno de sus puntos extremos. De manera análoga, para cualquier $y \in [0,2\pi)$, se tiene que $f([b,b+y]]$ es un arco contenido en S^1 y p es uno de sus puntos extremos. Recíprocamente, sea A un arco contenido en S^1 que tiene a p como uno de sus puntos extremos. Como $f((b-2\pi,b]) = S^1$ y $A \neq S^1$, existe $c \in (b-2\pi, b]$, tal que $f(c) \notin A$. Obsérvese que $b \in (c, c+2\pi)$. Como $f|_{(c,c+2\pi)}^{S^1-\{f(c)\}}$ es un homeomorfismo y $\text{máx}(K_c^A)$ y $\text{mín}(K_c^A)$ son los extremos de K_c^A, se cumple que $p \in \{f(\text{máx}(K_c^A)), f(\text{mín}(K_c^A))\}$ y $b \in \{\text{máx}(K_c^A), \text{mín}(K_c^A)\}$. Además, como A no es degenerado y es distinto de S^1, se tiene que $0 < \text{máx}(K_c^A) - \text{mín}(K_c^A) = \alpha(A) < 2\pi$. Supongamos que $b = \text{mín}(K_c^A)$. Luego, $0 < \text{máx}(K_c^A) - b < 2\pi$ y $\phi(\{(b, \text{máx}(K_c^A) - b\}) = f([b, \text{máx}(K_c^A)]) = f(K_c^A) = A$. Del mismo modo, si $b = \text{máx}(K_c^A)$, entonces $0 < b - \text{mín}(K_c^A) < 2\pi$ y $\phi(\{b - \text{mín}(K_c^A)\}) = A$. Esto prueba nuestra afirmación.

De esta manera,

$$\begin{aligned}\partial C(S^1, p) = \{A : A &\text{ es un arco contenido en } S^1 \text{ y} \\ &p \text{ es un punto extremo de } A\} \cup \{\{p\}, S^1\}.\end{aligned}$$

Por último, en este caso particular, mostraremos que $\operatorname{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p)) = \partial C(S^1,p)$. Por el Lema 1.9, $\operatorname{Fr}_{D^2}(h^*(C(S^1,p))) \subset \operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^2}(h^*(C(S^1,p)))$. Por el Lema 1.59, se cumple que $\partial h^*(C(S^1,p)) = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2}(h^*(C(S^1(p))))$. Asimismo, por el Teorema 1.57, $\partial h^*(C(S^1(p))) = h^*(\partial C(S^1(p)))$. De este modo, $\mathrm{Fr}_{D^2}(h^*(C(S^1,p))) \subset h^*(\partial C(S^1,p))$ y, por consiguiente,

$$\mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p)) \subset \partial C(S^1,p).$$

Por otro lado, como $p \in S^1$, existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $S^1 - \{p\}$, tal que $\lim p_n = p$. Luego, $\lim\{p_n\} = \{p\}$ y cada $\{p_n\}$ es un elemento de $C(S^1) - C(S^1,p)$. Como $\{p\} \in C(S^1,p)$, esto muestra que $\{p\} \in \mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p))$. Sean $A \in \partial C(S^1,p) - \{\{p\}\}$ y $\mathfrak{U}$ una vecindad de A en $C(S^1)$. Como $\partial C(S^1) \cap \partial C(S^1,p) = F^1(S^1) \cap \partial C(S^1,p) = \{\{p\}\}$, se cumple que $A \in \mathrm{int}^{\partial}\, C(S^1)$. Sea $\mathfrak{V}$ una vecindad de A en $C(S^1)$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Por el Lema 1.64, existe una vecindad $\mathfrak{W}$ de A en $C(S^1)$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, tal que $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{U}$. Como $A \in \partial C(S^1,p)$, esto implica que $\mathfrak{W} \not\subseteq C(S^1,p)$. Luego, $\mathfrak{U} - C(S^1,p) \supset \mathfrak{W} - C(S^1,p) \neq \emptyset$. Como $\mathfrak{U}$ es una vecindad arbitraria de A, deducimos que $A \in \mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p))$. Esto prueba que $\partial C(S^1,p) \subset \mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p))$. Por tanto, $\mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p)) = \partial C(S^1,p)$.

La igualdad anterior concluye la demostración para el caso S^1. Demostremos ahora el caso general. Con tal motivo, sean X una curva cerrada simple y $q \in X$. Sea $\psi : S^1 \to X$ un homeomorfismo, tal que $\psi(p) = q$. Por el Corolario 1.102, la función $\psi^* : C(S^1) \to C(X)$, dada por

$$A \overset{\psi^*}{\longmapsto} \psi(A),$$

es un homeomorfismo. Luego, $C(X)$ es una 2-celda. Además, por el Teorema 1.57, se tiene que $\partial C(X) = \psi^*(\partial C(S^1))$. Considerando que ψ es una biyección de S^1 en X y que, como hemos visto, $\partial(C(S^1)) = F_1(S^1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial C(X) &= \psi^*(F^1(S^1)) = \{\psi^*(\{z\}) : z \in S^1\} = \{\psi(\{z\}) : z \in S^1\}\\ &= \{\{\psi(z)\} : z \in S^1\} = \{\{x\} : x \in X\} = F_1(X).\end{aligned}$$

Obsérvese que, dado cualquier $A \in C(S^1)$, se cumple que $p \in A$ si, y sólo si, $\psi(p) \in \psi(A)$; es decir, si, y sólo si, $q \in \psi^*(A)$. Por tanto, $C(X,q) = \psi * (C(S^1,p))$. En particular, $C(X,q)$ es una 2-celda. Además, aplicando el Teorema 1.57 y la última igualdad obtenida para $C(S^1,p)$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\partial C(X,q) &= \psi^*(\partial C(S^1,p))\\ &= \{\psi^*(A) : A \text{ es un arco contenido en } S^1 \text{ y}\\ &\qquad p \text{ es un punto extremo de } A\} \cup \{\psi^*(\{p\}), \psi^*(S^1)\}.\end{aligned}$$

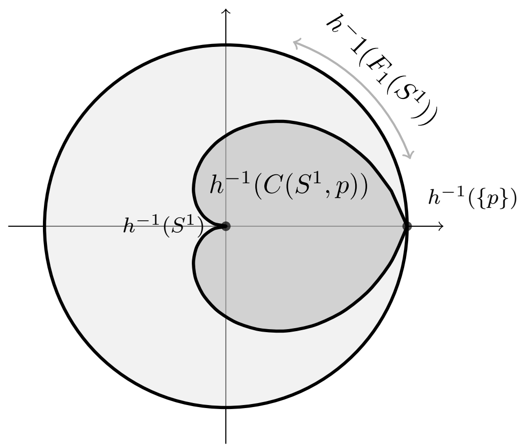


Figura 1.6: Modelo geométrico del hiperespacio de $C(S^1)$.

Sea A un elemento cualquiera de $C(S^1)$. Como $\psi^*(A) = \psi(A)$ y ψ es un homeomorfismo, se cumple que $\psi^*(A)$ es un arco y $\psi(p) = q$ es uno de sus puntos extremos si, y sólo si, A es un arco y p es uno de sus puntos extremos. De esta forma, tenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\partial C(X,q) = \{B : B &\text{ es un arco contenido en } X \text{ y} \\ &q \text{ es un punto extremo de } A\} \cup \{\{q\}, X\}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_{C(X)}(C(X,q)) &= \psi^*(\mathrm{Fr}_{C(S^1)}(C(S^1,p))) \\ &= \psi^*(\partial C(S^1,p)) \\ &= \partial\psi^*(\partial C(S^1,p)) \\ &= \partial C(X,q),\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue del Teorema 1.57. Esto concluye la demostración del teorema. □

En la Figura 1.6 se muestra un esbozo del modelo construido en el Teorema 1.113.

Para probar el Teorema 1.115, en el que se construye un modelo para el hiperespacio $C_2(X)$ de un arco, se utilizan un par de funciones inducidas por las operaciones de suma y producto comunes en los reales. En el siguiente lema se hacen algunas observaciones acerca de dichas funciones.

Lema 1.114. (I) *La función $2^I \times I \to 2^{[0,2]}$ dada por $(A,t) \longmapsto t + A$ es continua.*

(II) *La función $2^I \times I \to 2^I$ dada por $(A,t) \longmapsto tA$ es continua.*

(III) *Para cada $t \in I$ y $A, B \in 2^I$, $t + A = t + B$ si, y sólo si, $A = B$.*

(IV) *Para cada $t \in I - \{0\}$ y $A, B \in 2^I$, $tA = tB$ si, y sólo si, $A = B$.*

(V) *Para cada $t \in I$ y $A \in 2^I$, los conjuntos $t + A$ y tA poseen a lo más tantas componentes como A.*

Demostración. Primero, demostremos que si $A \in 2^I$ y $t \in I$, entonces $t+A \in 2^{[0,2]}$ y $tA \in 2^I$. Si $t = 0$, la afirmación es inmediata pues $t + A = A$ y $tA = \{0\}$. Supongamos que $t \neq 0$. Luego, las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$x \xmapsto{f} t + x \qquad\qquad x \xmapsto{g} tx$$

son homeomorfismos y, como $t + A = f(A)$, $tA = g(A)$ y A es compacto, tanto $t + A$ como tA son compactos y cerrados en $[0, 2]$ y $[0, 1]$, respectivamente. De esta manera, las funciones en (I) y (II) están bien definidas. Más aún, en el caso $t = 0$, el conjunto $t + A = A$ tiene las mismas componentes que A, y el conjunto $tA = \{0\}$ sólo tiene una. Similarmente, en el caso $t \neq 1$, las funciones f y g son continuas y los conjuntos $t + A = f(A)$ y $tA = g(A)$ tienen a lo más tantas componentes como A (porque la imagen continua de una componente está contenida en una componente). Así, se satisface (V).

Ahora probaremos simultáneamente (I) y (II). Sean $A \in 2^I$, $t \in I$ y $\varepsilon > 0$. Para $2^I \times I$ usaremos la métrica $((A,t),(A',t')) \longmapsto H(A,A') + |t - t'|$. Supongamos que $B \in 2^I$ y $s \in I$ son tales que $H(B,A) + |s - t| < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, $A \subset N(B, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B \subset N(A, \frac{\varepsilon}{2})$. Así, si $a \in A$ y $b \in B$, entonces existen $c \in B$ y $d \in A$, tales que $|a - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|b - d| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, tenemos lo siguiente:

$$|(t + a) - (s + c)| \leq |t - s| + |a - c| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4}$$

$$|ta - sc| = |ta - tc + tc - sc| \leq |t||a - c| + |c||t - s| \leq |a - c| + |t - s| < \frac{3\varepsilon}{4}$$

Similarmente, se puede demostrar que $|(b+s)-(t+d)| < \frac{3\varepsilon}{4}$ y $|sb-td| < \frac{3\varepsilon}{4}$. Así

$$\begin{array}{rcl} t + A \subset N(s + B, \frac{3\varepsilon}{4}) & \text{y} & s + B \subset N(t + A, \frac{3\varepsilon}{4}) \\ tA \subset N(sB, \frac{3\varepsilon}{4}) & \text{y} & sB \subset N(tA, \frac{3\varepsilon}{4}) \end{array}$$

Por tanto, $H(s+B, t+A) < \varepsilon$ y $H(sB, tA) < \varepsilon$. Así, se concluye (I) y (II).

Ahora probaremos (III) y (IV). Sean $A, B \in 2^I$ y $t \in I$. Supongamos que $A = B$. Luego, si $a \in A = B$, entonces $t + a \in t + B$ y $ta \in tB$. Así, $t + A \subset t + B$ y $tA \subset tB$. De la misma manera obtenemos las contenciones recíprocas. Por tanto, $t + A = t + B$ y $tA = tB$.

Supongamos ahora que $t + A = t + B$. Si $a \in A$, entonces existe $b \in B$, tal que $t + a = t + b$. Luego, $a = b$, por lo que $a \in B$. Así, $A \subset B$. La otra contención se prueba de forma similar. Por tanto, $A = B$.

Ahora, supongamos que $tA = tB$ con $t \neq 0$. Luego, existe $b \in B$, tal que $ta = tb$, por lo cual $a = b$. Así, $A \subset B$. Similarmente, se puede demostrar que $B \subset A$. Por tanto, $A = B$. Así, se concluye (III) y (IV). □

Otra acotación antes de probar el siguiente teorema. Recuérdese que para verificar una función cuyo dominio es un espacio cociente, expresada en términos de representantes de las clases de equivalencia, basta comprobar que las clases que poseen más de un punto tengan una misma imagen para cada uno de sus representantes. Asimismo, una función como la mencionada anteriormente es continua si, y sólo si, la composición de la función natural (aquella que asigna a un representante su clase correspondiente en el cociente) con tal función (en ese orden) también es continua.

Teorema 1.115. *Si X es un arco, entonces $C_2(X)$ es una 4-celda y*

$$\begin{aligned}\partial C_2(X) = \{A \in C_2(X) : \ & A \text{ es conexo o} \\ & A \text{ tiene una componente degenerada o} \\ & A \text{ contiene alguno de los puntos extremos de } X\}.\end{aligned}$$

Demostración. Probaremos primero el teorema para el caso en que X es el intervalo cerrado $I = [0, 1]$. Durante la prueba, denotaremos por $\text{Cono}(Y)$ al cono topológico de Y, es decir, al espacio cociente $Y \times [0, 1]/Y \times \{1\}$, para cualquier espacio métrico Y.

Sean $D^1 = \{A \in C_2(I) : 1 \in A\}$ y $D_0^1 = \{A \in C_2(I) : 0, 1 \in A\}$. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en D^1 con $\text{lím}\, A_n = A \in C_2(I)$, como puntos, entonces $\text{lím}\, A_n = A$, como conjuntos, y como $1 \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $1 \in A$ y $A \in D^1$. Así, D^1 es cerrado en $C_2(I)$. De forma semejante se puede mostrar que D_0^1 es cerrado.

Probaremos que la función $h : T_1/T_2 \to D_0^1$ dada por

$$[(a, b)] \overset{h}{\longmapsto} [0, a] \cup [b, 1]$$

es un homeomorfismo, donde $T_1 = \{(a, b) \in I^2 : a \leq b\}$ y $T_2 = \{(a, b) \in I^2 : a = b\}$. Obsérvese que h está bien definida, pues, para cada $a \in I$, se cumple que $h([(a,a)]) = [0,a] \cup [a,1] = I$, y cada imagen puntual de h es elemento de D_0^1. También, h es inyectiva. En efecto, supongamos que $[0,a] \cup [b,1] = [0,c] \cup [d,1]$ para algunos $(a,b),(c,d) \in T_1$. Si $a = b$, entonces $[0,c] \cup [d,1] = I$. Luego, $d \leq c$ y, por ende, $c = d$. Por otro lado, si $a < b$, entonces $(c,d) = I - ([0,c] \cup [d,1]) = (a,b) \neq \emptyset$. Así, $a = b$ y $c = d$. En cualquier caso, $[(a,b)] = [(c,d)]$.

Sea $A \in D_0^1$. Si $A = I$, entonces, para cada $a \in I$, se satisface que $h([(a,a)]) = A$. Supongamos $A \neq I$. Luego, A tiene dos componentes (el único subconjunto conexo de I que posee a 0 y 1 es el mismo I). Sean A_0 y A_1 las componentes de A, con $0 \in A_0$ y $1 \in A_1$. Obsérvese que $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ y $A = A_0 \cup A_1$. Asimismo, A_0 y A_1 son subconjuntos cerrados y conexos de I y, por tanto, son intervalos cerrados. Consecuentemente, existen $a, b \in I$ con $A_0 = [0,a]$ y $A_1 = [b,1]$. Claramente, $a < b$ y $h(a,b) = A$. Por lo tanto, h es sobreyectiva.

Probemos ahora que h es continua. Sea $q_h : T_1 \to T_1/T_2$ la función natural del cociente; es decir,

$$(a,b) \xmapsto{q_h} \begin{cases} \{(a,b)\} & \text{si } t \in T_1 - T_2, \\ T_2 & \text{si } t \in T_2. \end{cases}$$

Luego, $f \circ q_h : T_1 \to D_0^1$ y $f \circ q_h(a,b) = [0,a] \cup [b,1]$. Sea $\varepsilon > 0$. Si $||(s,t) - (x,y)|| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|s - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|t - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $[0,s] \subset [0, x + \frac{\varepsilon}{2})$ y $[t,1] \subset (y - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$. Luego, tenemos que $[0,s] \cup [t,1] \subset [0, x + \frac{\varepsilon}{2}) \cup (y - \frac{\varepsilon}{2}], 1] = N([0,x] \cup [y,1], \frac{\varepsilon}{2})$. De forma similar se puede mostrar que $[0,x] \cup [y,1] \subset N([0,s] \cup [t,1], \frac{\varepsilon}{2})$. Por tanto, $H([0,t] \cup [s,1], [0,x] \cup [y,1]) < \varepsilon$. Así, $h \circ q_h$ es continua y, por tanto, h es continua. Además, siendo h una biyección y su dominio compacto, h es un homeomorfismo.

Por otro lado, obsérvese que T_2 es un arco. Además, como T_1 es un subconjunto convexo, cerrado, acotado y con interior no vacío de R^2, por el Teorema 1.60, T_1 es una 2-celda. Además, por el Lema 1.59 $\partial T_1 = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2}(T_1) = \{0\} \times I \cup I \times \{1\} \cup T_2$. Aplicando el Lema 1.63, obtenemos que T_1/T_2 es una 2-celda y $\partial(T_1/T_2) = \{\{z\} : z \in \partial T_1 - T_2\} \cup \{T_2\}$. De este modo, D_0^1 es una 2-celda y, por el Teorema 1.57, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial D_0^1 &= h(\partial(T_1/T_2)) \\ &= h(\{\{(a,b)\} : (a,b) \in (\{0\} \times I \cup I \times \{1\}) - T_2\} \cup \{T_2\}) \\ &= h(\{\{(0,b) : b \in (0,1]\} \cup \{\{(a,1)\} : a \in [0,1)\} \cup \{T_2\}) \\ &= \{\{0\} \cup [b,1] : b \in (0,1]\} \cup \{[0,a] \cup \{1\} : a \in [0,1)\} \cup \{I\}. \end{aligned}$$

Probemos ahora que la función $g : \mathrm{Cono}(D_0^1) \to D^1$ dada por

$$[(A,t)] \xmapsto{g} t + (1-t)A$$

es un homeomorfismo. Obsérvese que g está bien definida. En efecto, para cada $A \in D_0^1$ y $t \in I$ se cumple que $\max(1-t)A = 1-t$ y $\max(t+(1-t)A) = 1$; es decir, $(t+(1-t)A) \in D^1$. Asimismo, por (V) del Lema 1.114, el conjunto $t+(1-t)A$ tiene a lo más 2 componentes. Además, para cada $A \in D_0^1$, $g([(A,1)]) = \{1\}$ (la clase $D_0 \times \{1\}$ es el único elemento de $\text{Cono}(D_0^1)$ con más de un punto).

Sea $q_g : D_0^1 \times I \to \text{Cono}(D_1^0)$ la función natural del cociente; es decir,

$$(A,t) \overset{q_g}{\longmapsto} \begin{cases} \{(A,t)\} & \text{si } t \in [0,1), \\ D_0^1 \times \{1\} & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Luego, dado $(A,t) \in D_0^1 \times I$ se cumple que si $t \neq 1$, entonces $g \circ q_g(A,t) = g(\{(A,t)\}) = t+(1-t)A$, y si $t=1$, entonces $g \circ q_g(A,t) = g(D_0^1 \times \{1\}) = 1 + 0D_0^1 = \{1\} = 1 + (1-1)A$. En otras palabras, la función $g \circ q_g$ es tal que $g \circ q_g(A,t) = t+(1-t)A$, para cada (A,t) en su dominio. Como esta última función es composición de funciones continuas (aplicamos aquí (II) y (I) del Lema 1.114), deducimos que tanto $g \circ q_g$ como g son continuas.

Supongamos ahora que para algunos $[(A,t)]$ se satisface que $g([(A,t)]) = g([(B,s)])$; es decir, $t+(1-t)A = s+(1-s)B$. Como $0 \in A$ y $1-t \geq 0$, se cumple la igualdad $\min(1-t)A = 0$. Así, se tiene que $\min(t+(1-t)A) = t$. Similarmente, $\min(s+(1-s)B) = s$. Luego, $t = s$. De este modo, $t + (1-t)A = t+(1-t)B$ y, por tanto, $A = B$. Así, g es inyectiva.

Mostremos que g es sobreyectiva. Fijemos $A \in D^1$. Sea $t = 1 - \min A$. Queremos probar que existen $B \in D_0^1$ y $s \in I$, tales que $g([(B,s)]) = A$. Si $t = 0$, entonces $A = \{1\}$ y $g([(\{0,1\},1)]) = A$. Podemos suponer entonces que $t > 0$. Sea $B = \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}A$. Como $1 = \max A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \min B &= \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}\min A = \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}(1-t) = 0 \quad \text{y} \\ \max B &= \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}\max A = \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t} = 1. \end{aligned}$$

Esto implica que $B \in D_0^1$. Además,

$$\begin{aligned} g([(B,1-t)]) &= (1-t) + (t)\left(\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}A\right) \\ &= (1-t) + ((t-1) + 1A) = A. \end{aligned}$$

Por tanto, g es sobreyectiva.

En esta forma, g es una biyección continua con dominio compacto y codominio Hausdorff, y, por lo tanto, es un homeomorfismo.

Por otro lado, obsérvese que, por el Teorema 1.66, se cumple que $\partial(D_0^1 \times I) = (\partial D_0^1 \times I) \cup (D_0^1 \times \partial I)$. Además, como D_0^1 es una 2-celda, por el Lema 1.62, el espacio $\mathrm{Cono}(D_0^1) = D_0^1 \times I / D_0^1 \times \{1\}$ es una 3-celda y

$$\begin{aligned}
\partial \,\mathrm{Cono}(D_0^1) &= \{\{z\} : z \in \partial(D_0^1 \times I) - (D_0^1 \times \{1\})\} \cup \{D_0^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{z\} : z \in ((\partial D_0^1 \times I) \cup (D_0^1 \times \partial I)) - D_0^1 \times \{1\}\} \cup \\
&\quad \{D_0^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{z\} : z \in (\partial D_0^1 \times [0,1)) \cup (D_0^1 \times \{0\})\} \cup \{D_0^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{(\{0\} \cup [b,1], t)\} : b \in I, t \in [0,1)\} \cup \\
&\quad \{\{([0,a] \cup \{1\}, t)\} : a \in I, t \in [0,1)\} \cup \\
&\quad \{\{(A,0)\} : A \in D_0^1\} \cup \{D_0^1 \times \{1\}\}.
\end{aligned}$$

Luego, D^1 es una 3-celda y, por el Teorema 1.57, tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial D^1 &= g(\partial \,\mathrm{Cono}(D_0^1)) \\
&= \{\{t\} \cup [t + (1-t)b, 1] : b \in I, t \in [0,1)\} \cup \\
&\quad \{[t, t + (1-t)a] \cup \{1\} : a \in I, t \in [0,1)\} \\
&\quad \cup D_0^1 \cup \{\{1\}\} \\
&= \{\{t\} \cup [t + (1-t)b, 1] : b, t \in I\} \cup \\
&\quad \{[t, t + (1-t)a] \cup \{1\} : a, t \in I\} \cup D_0^1.
\end{aligned}$$

Sean $f : \mathrm{Cono}(D^1) \to C_2(I)$ y $q : D^1 \times I \to \mathrm{Cono}(D^1)$ las funciones dadas por

$$[A,t] \overset{f}{\longmapsto} (1-t)A, \qquad (A,t) \overset{q}{\longmapsto} \begin{cases} \{(A,t)\} & \text{si } t \neq 1, \\ A \times \{1\} & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que f está bien definida. En efecto, por (v) del Lema 1.114 se tiene que $(1-t)A$ posee a lo más dos componentes. Asimismo, D^1 es el único elemento de $\mathrm{Cono}(D^1)$ con más de un elemento y $f([(A,1)]) = \{0\}$, para cada $A \in D^1$.

Mostremos ahora que f es inyectiva. Supongamos que $(A,t), (B,s) \in D^1 \times I$ son tales que $f([(A,t)]) = f([(B,s)])$. Como $1 = \max A = \max B$, tenemos $1-t = \max(1-t)A$ y $1-s = \max(1-s)B$ (porque $1-t, 1-s \geq 0$). Como $(1-t)A = f([(A,t)]) = f([(B,s)]) = (1-s)B$, se cumple que $1-t = 1-s$; es decir, $t = s$. Si $t = s = 1$, entonces $[(A,t)] = D^1 \times 1 = [(B,s)]$. De este modo, podemos suponer que $t = s < 1$. Así, $1-t = 1-s > 1$ y $(1-t)A = (1-s)B$. Esto implica que $A = B$. Por tanto, f es inyectiva.

Para probar que f es sobreyectiva, tomemos $A \in C_2(I)$. Si $A = \{0\}$, entonces $f([(C, 1)]) = \{0\} = A$ para cualquier $C \in D^1$. Si $A \neq \{0\}$, sea $t = 1 - \text{máx}\, A$. Entonces, $\text{máx}\left(\frac{1}{1-t}A\right) = \text{máx}\left(\frac{1}{\text{máx}\, A}A\right) = 1$, porque $\text{máx}\, A > 0$. Así, $\frac{1}{1-t}A \in D^1$ y $f\left(\left[\frac{1}{1-t}A, t\right]\right) = \frac{1-t}{1-t}A = A$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Probemos que f es continua. Tenemos $f \circ q : D^1 \times I \to C_2(I)$ con $f \circ q(A, t) = f([(A, t)]) = (1-t)A$, para cada $(A, t) \in D^1 \times I$, que es claramente continua, por ser una composición de funcionas continuas. Por tanto, f es continua. De esta manera, f es una biyección continua con dominio compacto y codominio Hausdorff. Por tanto, f es un homeomorfismo.

Obsérvese que el Teorema 1.66 asegura la igualdad $\partial(D^1 \times I) = (\partial D^1 \times I) \cup (D^1 \times \partial I)$. Además, D^1 es una 3-celda. Aplicando el Lema 1.62, obtenemos que el espacio $\text{Cono}(D^1) = D^1 \times I / D^1 \times \{1\}$ es una 4-celda y

$$\begin{aligned}
\partial\, \text{Cono}(D^1) &= \{\{z\} : z \in \partial(D^1 \times I) - (D^1 \times \{1\})\} \cup \{D^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{z\} : z \in ((\partial D^1 \times I) \cup (D^1 \times \partial I)) - D^1 \times \{1\}\} \cup \\
&\quad \{D^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{z\} : z \in (\partial D^1 \times [0, 1)) \cup (D^1 \times \{0\})\} \cup \{D^1 \times \{1\}\} \\
&= \{\{(\{t\} \cup [t + (1-t)b, 1], s)\} : b, t \in I, s \in [0, 1)\} \cup \\
&\quad \{\{([t, t + (1-t)a] \cup \{1\}, s)\} : a, t \in I, s \in [0, 1)\} \\
&\quad \cup \{\{(A, s)\} : A \in D^1, s \in [0, 1)\} \cup D^1 \times \{0\} \cup \{D^1 \times \{1\}\}.
\end{aligned}$$

De este modo, $C_2(I)$ es un 4-celda y, por el Teorema 1.57, se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial(C_2(I)) &= f(\partial(\text{Cono}\, D^1)) \\
&= \{\{(1-s)t\} \cup [(1-s)(t + (1-t)b), 1-s] : b, t \in I, s \in [0, 1)\} \cup \\
&\quad \{[(1-s)t, (1-s)(t + (1-t)a)] \cup \{1-s\} : a, t \in I, s \in [0, 1)\} \cup \\
&\quad \{(1-s)A : A \in D^1_0, s \in [0, 1)\} \cup D^1 \cup \{\{0\}\} \\
&= \{\{(1-s)t\} \cup [(1-s)(t + (1-t)b), 1-s] : b, t, s \in I\} \cup \\
&\quad \{[(1-s)t, (1-s)(t + (1-t)a)] \cup \{1-s\} : a, t, s \in I\} \cup \\
&\quad \{(1-s)A : A \in D^1_0, s \in I\} \cup D^1.
\end{aligned}$$

Sean $K_1 = \{\{(1-s)t\} \cup [(1-s)(t + (1-t)b), 1-s] : b, t, s \in I\}$, $K_2 = \{[(1-s)t, (1-s)(t + (1-t)a)] \cup \{1-s\} : a, t, s \in I\}$ y $K_3 = \{(1-s)A : A \in D^1_0, s \in I\}$. De esta forma, tenemos la igualdad $\partial(C_2(I)) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup D^1$.

Denotemos

$$C_\bullet(I) = \{A \in C_2(I) : A \text{ tiene una componente degenerada}\}.$$

Probaremos que $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup D^1 = C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I, \{0,1\})$.

Como cada elemento de K_1 es de la forma $\{x\} \cup [y, z]$, para algunos $x, y, z \in I$, se tiene que $K_1 \subset C(I) \cup C_\bullet(I)$. Similarmente, $K_2 \subset C(I) \cup C_\bullet(I)$. Además, es claro que $D^1 \subset C_2(I, \{0,1\})$.

Por otro lado, supongamos que $F \in K_3$. Luego, $F = (1-s)A$, para algunos $s \in I$ y $A \in D_0^1$. Como $0 \in A$, se tiene que $0 = (1-s)0 \in (1-s)A$. Así, $F \in C(I, \{0,1\})$. Por tanto, $K_3 \subset C_2(I, \{0,1\})$.

Esto prueba que $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup D^1 \subset C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I, \{0,1\})$.

Ahora, tomemos $A \in C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I, \{0,1\})$.

Supongamos que $A \in C(I) - \{\{0\}\}$. Luego, $A = [x, y]$, para algunos $x, y \in I$, tales que $x \leq y$ y $y \neq 0$. Luego, $1-y, \frac{x}{y} \in I$ y $\{(1-(1-y))\frac{x}{y}\} \cup [(1-(1-y))(\frac{x}{y} + (1-\frac{x}{y})0), 1-(1-y)] = [x, y]$. Esto implica que $A \in K_1$. .

Análogamente, si $A \in C_\bullet(I) - C(I)$, entonces $A = [x, y] \cup \{z\}$, para algunos $x, y \in I$, tales que $x \leq y$ y $z \in I - [x, y]$. Tenemos dos subcasos: $z < x$ y $y < z$. En el primer subcaso se tiene que $0 \leq z < x \leq y$; es decir, $y > 0$ y $0 < x - z \leq y - z$. Luego, $\frac{x-z}{y-z}, \frac{z}{y}, 1-y \in I$ y $\{(1-(1-y))\frac{z}{y}\} \cup [(1-(1-y))(\frac{z}{y} + (1-\frac{z}{y})\frac{x-z}{y-z}), 1-(1-y)] = \{z\} \cup [x, y]$. Así, $\{z\} \cup [x, y] \in K_1$. En el segundo subcaso, se cumple que $0 \leq x \leq y < z$; es decir, que $z > 0$ y $0 \leq y - x < z - x$. Luego, $\frac{y-x}{z-x}, \frac{x}{z}, 1-z \in I$ y $[(1-(1-z))\frac{x}{z}, (1-(1-z))(\frac{x}{z} + (1-\frac{x}{z})\frac{y-x}{z-x})] \cup \{1-(1-z)\} = [x, y] \cup \{z\}$. En consecuencia, $A \in K_2$.

Ahora, supongamos que $A \in C_2(I) - \{\{0\}\}$. Si $0 \in A$, entonces $A = [0, x] \cup [y, z]$ para algunos $x, y, z \in I$ con $x \leq y \leq z$ y $z > 0$. Así, $1 = \frac{z}{z}, 0 = \frac{0}{z} \in \frac{1}{z}A$, $\frac{1}{z}A \in D_0^1$, $1 - z \in I$ y $A = (1-(1-z))\frac{1}{z}A \in K_3$. Asimismo, si $1 \in A$ se tiene que $A \in D^1$. Además, $\{\{0\}\} = (1-1)\{\{0,1\}\} \in K_3$.

De esta forma hemos probado la contención $C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I, \{0,1\}) \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup D^1$. Esto prueba que $\partial(C_2(I)) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup D^1 = C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I, \{0,1\})$ y concluye el caso $X = I$.

Ahora, mostraremos el caso en que X es un arco cualquiera. Sea $\phi : I \to X$ un homeomorfismo. Por el Corolario 1.102 se satisface que la función $\phi^* : C_2(I) \to C_2(X)$ dada por

$$A \overset{\phi}{\longmapsto} \phi(A)$$

es un homeomorfismo. En particular, $C_2(I)$ es homeomorfo a $C_2(X)$ y, por consiguiente, $C_2(X)$ es un 4-celda. Además, por el Teorema 1.57, se cumple que $\partial C_2(X) = \phi^*(\partial C_2(I))$. Por otro lado, por el Teorema 1.22, se cumple que $\phi(E(I)) = E(X)$. Esto implica que $A \cap E(I) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $\phi(E) \cap E(X) \neq \emptyset$. Así, y como $E(I) = \{0,1\}$, deducimos que

$\phi^*(C_2(I,\{0,1\})) = C_2(X,E(X))$. Asimismo, A tiene una componente degenerada si, y sólo si, $\phi(A)$ tiene una componente degenerada (porque los homeomorfismos preservan componentes y cardinalidades), y A es conexo si, y sólo si, $\phi(A)$ es conexo. Por tanto, $\phi^*(C_\bullet(I)) = \{A \in C_2(X) : A$ tiene una componente degenerada$\}$ y $\phi^*(C(I)) = C(X)$. De este modo, se tiene

$$\begin{aligned}\partial C_2(X) &= \phi^*(C(I) \cup C_\bullet(I) \cup C_2(I,\{0,1\}))\\ &= C(X) \cup \{A \in C_2(X) : A \text{ tiene una componente degenerada}\}\\ &\quad \cup C_2(X,E(X)).\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de este teorema. □

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene el siguiente corolario, el cual es utilizado en las demostraciones del Teorema 2.18 y los Lemas 3.29 y 3.39.

Corolario 1.116. *Si X es homeomorfo al intervalo $(0,1]$ o al intervalo $(0,1)$, entonces $C_2(X)$ es una 4-variedad conexa y*

$$\begin{aligned}\partial C_2(X) = \{A \in C_2(X) : \ & A \textit{ es conexo } \ o\\ & A \textit{ tiene una componente degenerada } \ o\\ & A \textit{ contiene un punto extremo de } X\}.\end{aligned}$$

Demostración. La prueba es similar a la del Corolario 1.111. Tomemos, como en dicha demostración, un encaje $f : X \to [0,1]$, tal que $f(X) = (0,1)$ o $f(X) = (0,1]$. Obsérvese que $f(X)$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$ y que el conjunto $C_2(f(X)) = \langle f(X)\rangle_2$ es un subconjunto abierto de $C_2([0,1])$. Además, por el Teorema 1.115, $C_2([0,1])$ es una 4-celda y, en consecuencia, es una 4-variedad. Aplicando el Teorema 1.66, se cumple que $C_2(f(X))$ es una 4-variedad y que $\partial C_2(f(X)) = C_2(f(X)) \cap \partial C_2([0,1])$. Por otro lado, por el Corolario 1.102, la función $f^* : C_2(X) \to C_2(f(X))$ dada por $A \xmapsto{f^*} f(A)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 1.57 se satisface que $f^*(\partial C_2(X)) = \partial C_2(f(X))$. Por tanto, $f^*(\partial C_2(X)) = C_2(f(X)) \cap \partial C_2([0,1])$.

Denotemos

$$C_\bullet(Y) = \{A \in C_2(Y) : Y \text{ tiene una componente degenerada}\},$$

para cualquier espacio métrico Y. Obsérvese que para cualquier subespacio Z de Y se cumple que $C_\bullet(Y) \cap C_2(Z) = C_\bullet(Z)$. Con esta notación, aplicando el Teorema 1.115 se tiene la igualdad $\partial C_2([0,1]) = C([0,1]) \cup C_\bullet([0,1]) \cup C_2([0,1], E([0,1]))$. De este modo, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^*(\partial C_2(X)) &= C_2(f(X)) \cap (C([0,1]) \cup C_\bullet([0,1]) \cup C_2([0,1], E([0,1]))) \\ &= C(f(X)) \cup C_\bullet(f(X)) \cup C_2(f(X), E([0,1])). \end{aligned}$$

Por otro lado, por el Corolario 1.102, se satisface que $f^*(C(X)) = C(f(X))$. Además, como $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, se cumple, para cualquier subconjunto A de X, que A tiene una componente degenerada si, y sólo si, $f(A)$ tiene una componente degenerada (los homeomorfismos preservan componentes y cardinalidades). Esto implica que $f^*(C_\bullet(X)) = C_\bullet(f(X))$. Asimismo, por el Teorema 1.24, $E(f(X)) = E([0,1]) \cap f(X)$. De esta manera, y como $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, $E(X) = f(E(f(X))) = f^{-1}(E([0,1]) \cap f(X)) = f^{-1}(E[0,1])$. Por tanto, dado cualquier $A \in C_2(X)$ se cumple que $A \cap E(X) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $f(A) \cap E([0,1]) \neq \emptyset$. Esto implica que $f^*(C_2(X, E(X))) = C_2(f(X), E([0,1])$.

Del párrafo anterior obtenemos las igualdades $C(X) = (f^*)^{-1}(C(f(X)))$, $C_\bullet(X) = (f^*)^{-1}(C_\bullet(f(X)))$ y $C_2(X, E(X)) = (f^*)^{-1}(C_2(f(X), E([0,1])))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \partial C_2(X) &= (f^*)^{-1}(C(f(X)) \cup C_\bullet(f(X)) \cup C_2(f(X), E([0,1]))) \\ &= C(X) \cup C_\bullet(X) \cup C_2(X, E(X)). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de este corolario. □

1.6.4. Hiperespacios de crecimiento

Ahora, se presenta otra clase de hiperespacios de la cual resultan de interés principalmente tres características (dentro del ámbito de los espacios localmente conexos), a saber: contiene a cada clase de hiperespacios distinta de 2^X y $F(X)$ de la cual hemos hablado hasta el momento, cada elemento de esta clase es un retracto absoluto y cada bola cerrada generalizada (Definición 1.119) de un elemento de un hiperespacio de esta clase también pertenece a tal hiperespacio. Estas propiedades, junto con la propiedad de convexidad (de nuevo, dentro de los espacios localmente conexos), proveen de algunas características de la función Φ_ε (Definición 1.127) que se utilizan en las pruebas de los Teoremas 3.12, 3.19 y 3.21.

Definición 1.117. Sean X un continuo y $\mathcal{B}$ un subconjunto cerrado de 2^X. Decimos que $\mathcal{B}$ es un **hiperespacio de crecimiento** si para cualesquiera $A \in \mathcal{B}$ y $B \in 2^X$, tales que $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A, se tiene que $B \in \mathcal{B}$.

El primer resultado acerca de esta clase de hiperespacios es que contiene a los hiperespacios que interesan a este estudio, lo cual se expresa en la siguiente observación.

Observación 1.118. *Dado un continuo localmente conexo X, un subconjunto cerrado K de X y $n \in \mathbb{N}$, los hiperespacios $C_n(X)$, $C_n^K(X)$ y $C_n(X, K)$ son hiperespacios de crecimiento.*

Demostración. Sean $A \in C_n(X)$ y $B \in 2^X$, tales que $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A. Sean $A_1, \ldots, A_k$ las componentes de A, con $k \leq n$. Como $A \subset B$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe una componente B_i de B, tal que $A_i \subset B_i$. Luego, $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Como las componentes de un conjunto cualquiera son ajenas por pares y cada componente de B intersecta a A, tenemos que $B_1, \ldots, B_k$ son todas las componentes de B. Así, $B \in C_n(X)$.

Si, además, $A \in C_n^K(X)$; es decir, $K \subset A$, entonces $K \subset A \subset B$ y $B \in C_n^K(X)$. Si, en lugar de tal condición, A es elemento de $C_n(X, K)$; en otras palabras, si $A \cap K \neq \emptyset$, entonces $B \cap K \supset A \cap K \neq \emptyset$ y $B \in C_n^K(X)$. Esto prueba que $C_n(X)$, $C_n^K(X)$ y $C_n(X, K)$ son hiperespacios de crecimiento. □

Para probar que los hiperespacios de crecimiento son retractos absolutos (Teorema 1.125) se requiere de varios resultados previos, algunos sencillos lemas (Lemas 1.120, 1.121 y 1.122) y algunos teoremas muy resaltables (Teoremas 1.123 y 1.124), además de la siguiente definición.

Definición 1.119. Sean X un espacio con métrica d y $\varepsilon > 0$. Dado cualquier $A \in 2^X$, la **d-bola cerrada generalizada** en X de radio ε alrededor de A, es el conjunto $C_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Lema 1.120. *Sea X un espacio métrico. Si A es un subespacio compacto de X y x es un elemento cualquiera de X, existe $a \in A$, tal que $d(x, A) = d(x, a)$.*

Demostración. Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in A$, tal que $d(x, a_n) < d(x, A) + \frac{1}{n}$. Como A es compacto, podemos suponer que $\lim a_n = a$, para alguna $a \in A$. Obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $d(x, A) \leq d(x, a_n) \leq d(x, A) + \frac{1}{n}$. Así, tomando límites, $d(x, A) = \lim d(x, a_n)$. Además, por la continuidad de d, obtenemos que $\lim d(x, a_n) = d(x, a)$. Por lo tanto, $d(x, A) = d(x, a)$. □

El siguiente lema no sólo resulta útil en la prueba del Teorema 1.125, sino también para demostrar el Lema 1.128 y el Teorema 3.12.

Lema 1.121. *Sea X continuo. Si d es una métrica convexa para X y $\varepsilon > 0$, entonces:*

(1) Para cada $A \in 2^X$, se tiene $C_d(A,\varepsilon) = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon)))$.

(2) Si $\mathcal{B}$ es un hiperespacio de crecimiento, entonces, para cada $A \in \mathcal{B}$, se cumple que $C_d(A,\varepsilon) \in \mathcal{B}$.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$, se tiene $C_d(A,\varepsilon) \in C_n(X)$.

Demostración. (1) Primero mostremos que $\mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon))) \subset C_d(A,\varepsilon)$. Obsérvese que $\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon)) \subset C_d(A,\varepsilon)$, por lo cual basta probar que $C_d(A,\varepsilon)$ es cerrado en X. Para ello, tomemos $x \in X - C_d(A,\varepsilon)$. Luego, $d(x,A) > \varepsilon$. Sea $\delta > 0$, tal que $d(x,A) - \varepsilon > 2\delta$. Dado cualquier $y \in B_d(x,\delta)$ se tiene que $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) < \delta + d(y,a)$. Así, $d(y,a) > d(x,A) - \delta > \delta + \varepsilon$, siempre que $a \in A$. Por tanto, $d(y,A) \geq \delta + \varepsilon > \varepsilon$; es decir, $y \in X - C_d(A,\varepsilon)$. Esto muestra que $B_d(y,\delta) \subset X - C_d(A,\varepsilon)$ y que $C_d(A,\varepsilon)$ es cerrado en X. Obsérvese que esta parte de la prueba no requiere ninguna condición adicional al continuo X.

Ahora probaremos que $C_d(A,\varepsilon) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon)))$. Para tal efecto, tomemos $x \in C_d(A,\varepsilon)$. Si $x \in A$, entonces $x \in N_d(A,\varepsilon) \subset \mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon))$. Podemos suponer entonces que $x \notin A$. Por el Lema 1.120, existe $a \in A$, tal que $d(x,a) = d(x,A)$. Como d es una métrica convexa para X, existe una isometría $\gamma : [0, d(a,x)] \to X$, tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(d(a,x)) = x$. Obsérvese que para cualquier $t \in [0, d(a,x))$ se cumple que $d(a,\gamma(t)) = d(\gamma(0),\gamma(t)) = |t - 0| = t < d(a,x) = d(x,A) \leq \varepsilon$. Esto implica que $\gamma(t) \in B_d(a,\varepsilon)$. En otras palabras, $\gamma([0,d(a,x))) \subset B_d(a,\varepsilon) \subset C_d(A,\varepsilon)$. Así, $\gamma([0,d(a,x))) \subset \mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon))$ y $x \in \gamma([0,d(a,x)]) = \mathrm{cl}_X(\gamma([0,d(a,x)))) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon)))$. Esto muestra que $C_d(A,\varepsilon) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(A,\varepsilon)))$. Más aún, prueba que cada elemento de $C_d(A,\varepsilon) - A$ puede ser unido a un elemento de A por un arco contenido en $C_d(A,\varepsilon)$. Por lo tanto, se da la igualdad de (1).

(2) Mostraremos primero que si K es conexo, entonces $C_d(K,\varepsilon)$ es conexo. Para ello, supongamos que K es conexo. Dado $x \in C_d(K,\varepsilon) - A$, por el párrafo anterior, existen $a_x \in K$ y un arco α_x contenido en $C_d(K,\varepsilon)$ que une a a con x. De este modo, $C_d(K,\varepsilon) = K \cup (\bigcup\{\alpha_x : x \in C_d(K,\varepsilon) - K\})$. Como K es conexo y, para cada $x \in C_d(K,\varepsilon)$, se cumple que α_x es conexo y $a_x \in \alpha_x \cap K$, tenemos, por el Teorema 1.2, que $C_d(K,\varepsilon)$ es conexo.

Ahora, supongamos que $A \in \mathcal{B}$. Probaremos que $C_d(A,\varepsilon) \in \mathcal{B}$. Con tal motivo, sea C una componente de $C_d(A,\varepsilon)$. Sea $x \in C$, tal que $d(x,A) \leq \varepsilon$. Por el Lema 1.120, existe $a \in A$, tal que $d(x,a) = d(x,A) \leq \varepsilon$. Como

$C_d(\{a\},\varepsilon)$ está contenido en $C_d(A,\varepsilon)$ y, por el párrafo anterior, es conexo, tenemos que $C_d(\{a\},\varepsilon) \subset C$. Así, $a \in C$ y $A \cap C \neq \emptyset$. Por tanto, cada componente de $C_d(A,\varepsilon)$ intersecta a A; es decir, $C_d(A,\varepsilon) \in \mathcal{B}$. Esto prueba (3).

(3) Por la Observación 1.118, $C_n(X)$ es un hiperespacio de crecimiento. Aplicando (2), obtenemos el resultado.

Esto concluye la demostración del lema. □

Lema 1.122. *Dado un continuo con métrica convexa d, la función $\Phi : 2^X \times [0,\infty) \to 2^X$ dada por*

$$(A,r) \stackrel{\Phi}{\longmapsto} C_d(A,r)$$

es continua.

Demostración. Usaremos la métrica máx para $2^X \times \mathbb{R}$. Tomemos $\delta > 0$. Sean $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon, \eta \leq 0$, tales que $H_d(A,B) < \frac{\delta}{4}$ y $|\varepsilon - \eta| < \frac{\delta}{4}$. Queremos demostrar que $H_d(C_d(A,\varepsilon), C_d(B,\eta)) < \delta$. Sea $x \in C_d(A,\varepsilon)$. Por el Lema 1.120, existe $a \in A$, tal que $d(x,a) = d(x,A) \leq \varepsilon$. Como $A \subset N_d(B,\frac{\delta}{4})$, existe $b \in B$, tal que $d(a,b) < \frac{\delta}{4}$. Luego, $d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b) < d(x,A) + \frac{\delta}{4} \leq \varepsilon + \frac{\delta}{4} < \frac{\delta}{4} + \eta + \frac{\delta}{4} = \eta + \frac{\delta}{2}$. Sea $\gamma : [0, d(b,x)] \to X$ una isometría. Si $d(b,x) \leq \eta$, entonces $x \in C_d(B,\eta)$. Podemos suponer entonces que $d(b,x) > \eta$. Entonces, $d(b,\gamma(\eta)) = d(\gamma(0),\gamma(\eta)) = \eta$. Así, $\gamma(\eta) \in C_d(B,\varepsilon)$ y $d(x,\gamma(\eta)) = d(\gamma(d(b,x)),\gamma(\eta)) = d(b,x) - eta \leq \eta + \frac{\delta}{2} - \eta = \frac{\delta}{2}$. Por tanto, $x \in N_d(C_d(B,\eta),\frac{\delta}{2})$. De esta manera, $C_d(A,\varepsilon) \subset N_d(C_d(B,\eta),\frac{\delta}{2})$. Del mismo modo, se puede probar que $C_d(B,\eta) \subset N_d(C_d(A,\varepsilon),\frac{\delta}{2})$. Esto muestra que $H_d(C_d(A,\varepsilon), C_d(B,\varepsilon)) < \delta$. Así, se concluye que Φ es continua. □

Los siguientes dos teoremas son resultados muy notables relacionados con el cubo de Hilbert. El primero de ellos es un resultado fundamental de la teoría de los continuos localmente conexos, mientras que el segundo es una propiedad del cubo de Hilbert. No obstante su gran importancia, en este escrito el uso de estos se limita a la prueba del Teorema 1.125.

Teorema 1.123 ([5], Teorema 1)**.** *Sea X un continuo. Entonces, X es un continuo localmente conexo si, y sólo si, 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Teorema 1.124 ([16], Teorema 9.2)**.** *Sea X un espacio métrico compacto. Si X es un retracto del cubo de Hilbert, entonces X es un retracto absoluto.*

Teorema 1.125. *Sea X un continuo localmente conexo. Si $\mathcal{B}$ es un hiperespacio de crecimiento, entonces $\mathcal{B}$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Sea Φ la función continua definida en el Lema 1.122. Dado $A \in 2^X$, se define el valor t_A como sigue. Como X es compacto, X es acotado según la métrica d. Luego, $\Phi(A, 2\,\text{diám}(X)) = X$. Obsérvese que el conjunto $\Phi^{-1}(\mathcal{B}) \cap (\{A\} \times [0,\infty)) = \{A\} \times \{t \in [0,\infty) : \Phi(A,t) \in \mathcal{B}\}$ es cerrado en $2^X \times [0,\infty)$ y contiene al menos al conjunto $\{(A, 2\,\text{diám}(X))\}$. Así, $\{t \in [0,\infty) : \Phi(A,t) \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $[0,\infty)$. Sea $t_A = \text{mín}\{t \in [0,\infty) : \Phi(A,t) \in \mathcal{B}\}$.

Mostraremos que la función $g : 2^X \to [0,\infty)$ dada por $A \overset{g}{\longmapsto} t_A$ es continua. Para ello, sean $\delta > 0$ y $A, B \in 2^X$, tales que $H(A,B) < \frac{\delta}{2}$.

Afirmamos que $C_d(A, t_A) \subset C_d(B, t_A + \frac{\varepsilon}{2})$. En efecto, sea $x \in C_d(A, t_A)$, es decir, $x \in X$, tal que $d(x, A) \leq t_A$. Por el Lema 1.120, existe $a \in A$, tal que $d(x,a) = d(x,A) \leq t_A$. Como $A \subset B(B, \frac{\varepsilon}{2})$, existe $b \in B$, tal que $d(a,b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b) < t_A + \frac{\varepsilon}{2}$; es decir, $x \in C_d(B, t_A + \frac{\varepsilon}{2})$. Esto prueba nuestra afirmación.

Ahora, mostremos que cada componente de $C_d(B, t_A + \frac{\delta}{2})$ intersecta a $C_d(A, t_A)$. Sea C una componente de $C_d(B, t_A + \frac{\varepsilon}{2})$. Tomemos $y \in C$. Luego, por el Lema 1.120, existe $b \in B$, tal que $d(b,y) \leq t_A + \frac{\varepsilon}{2}$. Como $B \subset B(A, \frac{\varepsilon}{2})$, existe $a \in A$, tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Obsérvese que $y, a \in C_d(\{b\}, t_A + \frac{\varepsilon}{2})$. Además, por el Lema 1.121 (3), este último conjunto es conexo. Por tanto, $C_d(\{b\}, t_A + \frac{\varepsilon}{2}) \subset C$. Así, $a \in C$ y $C_d(A, t_A) \cap C \supset A \cap C \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{B}$ es un hiperespacio de crecimiento y $C_d(A, t_A) \in \mathcal{B}$, los dos párrafos anteriores muestran que $C_d(B, t_A + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{B}$. Por tanto, $t_B \leq t_A + \frac{\varepsilon}{2}$. De la misma forma, se puede probar que $t_A \leq t_B + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $-\frac{\varepsilon}{2} \leq t_A - t_B \leq \frac{\varepsilon}{2}$; es decir, $|t_A - t_B| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Esto muestra que g es continua.

De esta forma, la función $\Theta : 2^X \to \mathcal{B}$ dada por $A \overset{\Theta}{\longmapsto} \Phi(A, t_A)$ es continua. Además, $\Theta(A) = \Phi(A, 0) = A$ siempre que $A \in \mathcal{B}$. De este modo, Θ es una retracción de 2^X en $\mathcal{B}$. Además, por el Teorema 1.123, el hiperespacio 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert. Por tanto, $\mathcal{B}$ es un retracto del cubo de Hilbert. Aplicando el Teorema 1.124, concluimos que $\mathcal{B}$ es un retracto absoluto. $\square$

Una consecuencia fundamental del teorema anterior es que los hiperespacios que más nos interesan son retractos absolutos, como lo afirma el siguiente corolario.

Corolario 1.126. *Sean X un continuo localmente conexo, K un subconjunto cerrado de X y $n \in \mathbb{N}$. Si X es localmente conexo, entonces los hiperespacios $C_n(X)$, $C_n^K(X)$ y $C_n(X, K)$ son retractos absolutos.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Observación 1.118 y del Teorema 1.125. $\square$

Como se ha mencionado con anterioridad, la siguiente función es de vital importancia en el Capítulo 3.

Definición 1.127. Dado un continuo localmente conexo y $\varepsilon > 0$, la función $\Phi_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ está dada por

$$A \overset{\Phi_\varepsilon}{\longmapsto} C_d(A, \varepsilon).$$

El siguiente lema provee de las principales características que se ocupan de la función Φ_ε.

Lema 1.128. *Sea X un espacio métrico. Si la métrica de X es convexa, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumplen las siguientes tres afirmaciones:*

(1) Si $\mathcal{B}$ es un hiperespacio de crecimiento, entonces podemos restringir $\Phi_\varepsilon|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

(2) Φ_ε es continua.

(3) $(H_X)_\infty(Id_{2^X}, \Phi_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Demostración. (1) es consecuencia inmediata del Lema 1.121 (3).

(2) es una implicación directa del Lema 1.122.

(3) Dado $A \in 2^X$, probemos que $H_d(A, \Phi_\varepsilon(A)) \leq \varepsilon$. Para tal fin, sea $\eta > 0$. Obsérvese que $A \subset C_d(A, \varepsilon) = \Phi_\varepsilon(A) \subset N_d(\Phi_\varepsilon(A), \varepsilon + \eta)$. Por otro lado, dada $x \in \Phi_\varepsilon(A)$, por el Lema 1.120, existe $a \in A$, tal que $d(x, a) = d(x, A)$. Luego, $d(x, a) \leq \varepsilon < \varepsilon + \eta$ y $x \in N_d(A, \varepsilon + \eta)$. Esto implica que $\Phi_\varepsilon(A) \subset N_d(A, \varepsilon + \eta)$. Por lo tanto, $H_d(A, \Phi_\varepsilon(A)) \leq \varepsilon + \eta$. Como η es un número positivo arbitrario, deducimos que $H_d(A, \Phi_\varepsilon(A)) \leq \varepsilon$. Al ser A un elemento cualquiera de 2^X, concluimos la desigualdad en (3). $\square$

Capítulo 2

Dimensión finita en $C_n(X)$

En este capítulo se revisan algunos resultados que proveen de condiciones necesarias o suficientes para garantizar la finitud de la dimensión, ya sea en un punto dado o globalmente, en los hiperespacios $C_n(X)$. En el camino, se definen algunos conceptos esenciales no sólo para este capítulo sino también para las demostraciones principales del capítulo siguiente, a saber, los arcos libres maximales y las circunferencias libres. Más aún, la segunda sección completa se aboca a probar varios resultados referentes a ellos. Por su parte, la primera sección se enfoca en exponer algunos resultados acerca de la dimensión de $C_n(X)$ para las gráficas finitas. La tercera sección analiza condiciones necesarias y condiciones suficientes para garantizar la finitud de la dimensión en un punto de $C_n(X)$ para los continuos localmente conexos, así como una condición necesaria para que un punto tenga la dimensión mínima posible en $C_2(X)$.

2.1. Dimensión en el hiperespacio $C(X)$ de gráficas finitas

En esta primera sección se estudia un resultado relevante para los objetivos perseguidos, pues establece, para un continuo dado X, varias equivalencias relacionadas con la dimensión de $C(X)$ y con la propiedad de pertenecer a la clase de las gráficas finitas (Teorema 2.3). Para realizar la prueba de tal teorema, se requiere de varios resultados que, además de tal propósito, serán fundamentales en varios resultados posteriores.

El primer resultado de esta sección expresa una condición que garantiza la existencia de m-celdas en el espacio de subcontinuos de un continuo. Además de determinar una cota inferior para la dimensión del hiperespacio de subcontinuos de cualquier gráfica finita (como un ejemplo particular), este resultado es útil para mostrar que $C(X)$ tiene dimensión infinita en X cuando X no es una gráfica (Teorema 2.3).

Teorema 2.1. *Sean X un continuo y m un número natural con $m \geq 2$. Si existen subcontinuos M y N de X con $M \subset N$, tales que $M - N$ es la unión de m conjuntos no vacíos y mutuamente separados por pares en X, entonces existe una m-celda $\mathfrak{M} \subset C(M)$, tal que $M, N \in \mathfrak{M}$ y, para cada $K \in \mathfrak{M}$, $N \subset K \subset M$.*

Demostración. Sean $B_1, \ldots, B_m$ subconjuntos no vacíos de X, mutuamente separados por pares, tales que $M - N = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Sea K una componente cualquiera de $M - N$. Por el Teorema 1.16, se cumple que $\mathrm{cl}_M(K) \cap \mathrm{Fr}_M(M - N) \neq \emptyset$. Como $\mathrm{Fr}_M(M-N) \subset \mathrm{cl}_M(N) = N$, esto implica que $\mathrm{cl}_M(K) \cap N \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 1.3, obtenemos que $K \cup N$ es conexo.

Fijemos $k \in \{1, \ldots, m\}$. Mostraremos que $B_k = \bigcup\{C : C$ es una componente de $M - N$ y $C \cap B_k \neq \emptyset\}$. La contención hacia la derecha es inmediata. Para probar la otra contención, sea C una componente de $M - N$, tal que $C \cap B_k \neq \emptyset$. Obsérvese que $\{B_i : 1 \leq i \leq m\}$ es una colección finita de cerrados en $M - N$ ajenos por pares. Luego, $C \subset B_k$. De este modo, se satisface la igualdad requerida. Además, por el párrafo anterior y el Teorema 1.2, el conjunto $N \cup B_k = N \cup \{N \cup C : C$ es una componente de $M - N$ y $C \cap B_k \neq \emptyset\}$ es conexo. Más aún, $\mathrm{cl}_M(B_k) \subset M - \bigcup\{B_i : i \neq k\} = M - ((M - N) - B_k) = M - (M - (N \cup B_k)) = N \cup B_k$. Así, $N \cup B_k = N \cup \mathrm{cl}_M(B_k)$ y $N \cup B_k$ es cerrado en M y compacto. Por tanto, $N \cup B_k$ es un continuo.

Por el Teorema 1.94, existe un arco ordenado $\alpha_k : [0, 1] \to 2^X$, tal que $\alpha_k(0) = N$ y $\alpha_k(1) = N \cup B_k$. Obsérvese que para cualquier $t_0 \in (0, 1]$, si $h : [0, 1] \to [0, t_0]$ es la función tal que $f(t) = \frac{t}{t_0}$, para cada $t \in [0, t_0]$, entonces h es un homeomorfismo estrictamente creciente y $\alpha_k \circ h$ es un arco ordenado en 2^X que va de N a $\alpha_k(t_0)$. Aplicando el Teorema 1.94, obtenemos que cada componente de $\alpha_k(t_0)$ debe intersectar a N. Como $N \subset \alpha_k(t_0)$, N es conexo y las componentes de cualquier conjunto son ajenas por pares, deducimos que $\alpha_k(t_0)$ sólo posee una componente; es decir, $\alpha_k(t_0)$ es conexo. Así, $\alpha_k([0, 1]) \subset C(X)$.

Por otro lado, dados $t_1, \ldots, t_m \in [0, 1]$, como $N \subset \alpha_i(t_i)$ siempre que $1 \leq i \leq m$, por el Teorema 1.3 se cumple que el conjunto $\alpha_1(t) \cup \cdots \cup \alpha_m(t)$ es conexo. Por tanto, este último conjunto es un continuo.

De esta forma, podemos considerar la función $\Gamma : [0, 1]^m \to C(X)$ dada por

$$(t_1, \ldots, t_m) \overset{\Gamma}{\longmapsto} \alpha_1(t_1) \cup \cdots \cup \alpha_m(t_m).$$

Se sigue del Teorema 1.104 y del hecho que cada α_i es continua, que Γ es continua.

Probemos que Γ es inyectiva. Para ello, sean $(t_1, \ldots, t_m), (s_1, \ldots, s_m) \in [0,1]^m$, tales que $\Gamma(t_1, \ldots, t_m) = \Gamma(s_1, \ldots, s_m)$. Fijemos $k \in \{1, \ldots, m\}$. Obsérvese que para $j \neq k$ se cumple que $N \cap B_k = B_j \cap N = B_j \cap B_k = \emptyset$ y $\alpha_j(t_j) \cap (N \cup B_k) \subset (N \cup B_j) \cap (N \cup B_k) = N$. Esto implica que $\alpha_j(t_j) \cap (N \cup B_k) = N$. Por tanto, y porque $\alpha_k(t_k) \subset N \cup B_k$ y $N \subset \alpha_k(t_k)$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma(t_1, \ldots, t_m) \cap (N \cup B_k) &= (\alpha_k(t_k) \cap (N \cup B_k)) \cup N = \alpha_k(t_k) \cup N \\ &= \alpha_k(t_k).\end{aligned}$$

Similarmente, $\Gamma(s_1, \ldots, s_m) \cap (N \cup B_k) = \alpha_k(s_k)$. Por tanto, $\alpha_k(t_k) = \alpha_k(s_k)$. Como α_k es inyectiva, lo anterior conlleva a que $t_k = s_k$. Puesto que esto sucede para cualquier $k \in \{1, \ldots, m\}$, concluimos que $(t_1, \ldots, t_m) = (s_1, \ldots, s_m)$. Esto prueba que Γ es inyectiva.

Como $[0,1]^m$ es compacto y $C(X)$ es Hausdorff, de lo anterior deducimos que Γ es un encaje. Así, $\Gamma([0,1]^m)$ es una m-celda.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Gamma((1, 1, \ldots, 1)) &= \textstyle\bigcup_{i=1}^m \alpha_k(1) = \bigcup_{i=1}^m (N \cup B_k) = N \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i) \\ &= N \cup (M - N) = M.\end{aligned}$$

Similarmente, $N = \Gamma((0, 0, \ldots, 0))$. Más aún, dado $(t_1, \ldots, t_m) \in [0,1]^m$, para cualquier $k \in \{1, \ldots, m\}$, se cumple que $N \subset \alpha_k(0) \subset \alpha_k(t_k) \subset \alpha_k(1) \subset N \cup B_k$. En consecuencia, $N \subset \Gamma(t_1, \ldots, t_m) \subset \bigcup_{i=1}^m (N \cup B_k) = M$. Por tanto, $M, N \in \Gamma([0,1]^m)$ y, para cualquier $A \in \Gamma([0,1]^m)$, es cierto que $N \subset A \subset M$. Con esto terminamos la demostración. $\square$

El siguiente resultado proporciona, en el caso de las gráficas finitas, la dimensión exacta que poseen los hiperespacios $C_n(X)$ en cualquiera de sus puntos. Resulta de vital importancia en la prueba del Lema 2.16 (y, por ende, en la demostración del Teorema 2.18).

Teorema 2.2 ([6], Teorema 2.4)**.** *Si D es una gráfica finita, entonces, para cualquier $A \in C_n(D)$, se cumple*

$$\dim_A(C_n(D)) = 2n + \sum_{x \in R(D) \cap A} (\operatorname{ord}(x, D) - 2).$$

Ahora se prueba el resultado principal de esta sección. Este teorema es una caracterización de las gráficas finitas X en relación a la dimensión de sus hiperespacios $C_n(X)$, tanto en el punto X como globalmente. Es importante para la demostración de dos de los teoremas principales, los Teoremas 2.14 y 2.15.

Teorema 2.3. *Sea X un continuo locamente conexo. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

(a) X es una gráfica finita.

(b) $\dim_X(C(X))$ *es finita.*

(c) $\dim(C(X))$ *es finita.*

(d) Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dim(C_n(X))$ *es finita.*

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\dim(C_n(X))$ *es finita.*

Demostración. Sea d una métrica para X.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que X no es una gráfica finita. Probaremos que $\dim_X(C(X)) = \infty$ mostrando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim_X(C(X)) \geq n$. Fijemos $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Por el Teorema 1.47, existe un conjunto A con exactamente n elementos, tal que $X - A$ es conexo. Como A es finito, podemos elegir $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}\,\text{mín}\{d(x, y) : x, y \in A \text{ y } x \neq y\}$.

Como X es un continuo localmente conexo, para cada $x \in A$ existe un subconjunto abierto y conexo U_x de X, tal que $x \in U_x \subset \text{cl}_X(U_x) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Sea $C_x = \text{cl}_X(U_x)$. Luego, cada C_x es un subcontinuo de X que posee a x y, para cualesquiera $y, z \in A$ con $y \neq z$, se cumple que $C_y \cap C_z \subset B_d(y, \varepsilon) \cap B_d(z, \varepsilon) = \emptyset$.

Sea $U = \bigcup_{x \in A} U_x$. Obsérvese que U es un subconjunto abierto de X que contiene a A. Como $X - A$ es conexo, por el Lema 1.31, existe un subconjunto cerrado V, tal que $A \subset \text{int}_X(V) \subset V \subset U$ y $X - V$ es conexo. Sea $D = \text{cl}_X(X - V)$. Obsérvese que D es un subcontinuo de X y, como $D = X - \text{int}_X(V)$, se cumple que $X - U \subset D \subset X - A$.

Como U_x es abierto en X se tiene que $X - U_x$ es cerrado en X y $\text{Fr}_X(U_x) = \text{cl}_X(U_x) \cap (X - U_x) \subset (X - \bigcup U_{y \neq x} U_y) \cap (X - U_x) = X - U \subset D$. Además, $\text{Fr}_X(U_x) \subset C_x$. Como U_x es un subconjunto propio de X y X es conexo, se tiene que $\text{Fr}_X(U_x) \neq \emptyset$. Así, $C_x \cap D \neq \emptyset$ y $C_x \cup D$ es conexo. Obsérvese que este último conjunto es un subcontinuo de X y que $x \in C_x - D$.

Como $U \subset \bigcup_{x \in A} C_x$ y $X - U \subset D$, se tiene que $X = D \cup (\bigcup_{x \in A} C_x)$. Luego, $X - D = \bigcup_{x \in A}(C_x - D)$. Así, $X - D$ es la unión de n conjuntos no vacíos mutuamente separados por pares en X (pues los conjuntos C_x son cerrados en X y ajenos por pares). Aplicando el Teorema 2.1, obtenemos una n-celda M contenida en $C(X)$, tal que $X \in M$. Esto implica que $\dim_X(C(X)) \geq n$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, concluimos que $\dim_X(C(X)) = \infty$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Es inmediato.

$(d) \Rightarrow (c)$ Como $C(X) \subset C_n(X)$, el Teorema 1.68 (1) garantiza la desigualdad $\dim(C(X)) \leq \dim(C_n(X))$. Como $C_n(X)$ tiene dimensión finita, esta última relación implica que $C(X)$ tiene dimensión finita.

$(e) \Rightarrow (d)$ Es inmediato.

$(a) \Rightarrow (e)$ Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 2.2 asegura que, para cada $A \in C_n(X)$,

$$\begin{aligned} \dim_A(C_n(X)) &= 2n + \sum_{p \in A \cap R(X)} (\operatorname{ord}(p, X) - 2) \\ &\leq 2 + \sum_{p \in R(X)} (\operatorname{ord}(p, X) - 2). \end{aligned}$$

Así, $\dim(C_n(X)) \leq 2n + \sum_{p \in R(X)} (\operatorname{ord}(p, X) - 2)$. Como $R(X)$ es finito, la relación anterior implica que $\dim(C_n(X))$ es finita.

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

2.2. Arcos y circunferencias libres

Como vimos en la Sección 1.6.3, cuando A es un arco y S es un curva cerrada simple, los hiperespacios $C(A)$, $C_2(A)$ y $C(S)$ poseen modelos geométricos simples que incluso permiten “visualizar” sus fronteras como variedades. Los Teoremas 2.1 y 2.2 pueden dar una idea de como cambia la complejidad de los hiperespacios al tomar espacios con más puntos de ramificación y al aumentar el orden de estos puntos. Asimismo, el Teorema 2.2 y los modelos que se acaban de mencionar permiten establecer que las vecindades más simples en los hiperespacios $C(X)$ son del tipo $C(A) = \langle A \rangle_1$, $C(S) = \langle A \rangle_1$, en donde A un arco y S una curva cerrada simple (tomando en cuenta que, por el Teorema 1.44, este tipo de continuos son los únicos continuos que no contienen puntos de ramificación) cuyos interiores son no vacíos. Lo anterior provee de motivos para analizar este tipo de vecindades para cierto tipo de arcos y curvas cerradas simples en donde se cumplen ciertas condiciones maximales. En esta sección se presentan este tipo de subcontinuos y algunos resultados acerca de sus propiedades dentro del continuo subyacente. En la siguiente sección se aborda cómo este tipo de subcontinuos se relaciona con la dimensión de los hiperespacios $C_n(X)$.

Definición 2.4. Sea X un continuo. Un arco J contenido en X es un **arco libre** en X si $J - E(J)$ es abierto en X. Una curva cerrada simple L contenida en X es una **circunferencia libre** en X si existe $p \in X$, tal que $L - \{p\}$ es abierto en X. Un arco libre K de X es un **arco libre maximal** si, para cada arco libre J de X con $K \subset J$, se cumple que $K = J$.

En el siguiente lema se reúnen algunas observaciones simples de los conceptos que se acaban de definir.

Lema 2.5. *Sean X un continuo y J un arco libre de X.*

(1) Si C es un subconjunto conexo de X con $C \cap E(J) = \emptyset$ o $C \cap \mathrm{Fr}_X(J) = \emptyset$, entonces $C \subset J$ o $C \cap J = \emptyset$.

(2) Si K es un subarco de J, entonces K es un arco libre de X.

(3) Si p es un punto extremo de J con $p \in \mathrm{int}_X(J)$, entonces para cualquier arco K contenido en X con $p \in K$, se cumple que p es un punto extremo de K con $p \in \mathrm{int}_X(K)$.

(4) Si Y es un subcontinuo de X y $J \subset Y \subset X$, entonces J es un arco libre de Y.

Demostración. (1) Obsérvese que $X - J$ y $J - E(J)$ son subconjuntos abiertos y ajenos de X. Como C es conexo y $C \cap E(J) = \emptyset$; es decir, $C \subset X - E(J) = (X - J) \cup (J - E(J))$, se debe tener que $C \subset J - E(J)$ o $C \subset X - J$. Así, $C \subset J$ o $C \cap J = \emptyset$.

(2) Obsérvese que $K - E(K) \subset J - E(J)$. Además, si h es un homeomorfismo de J en $[0, 1]$, entonces $h(K - E(K))$ es un intervalo abierto, por lo cual $K - E(K)$ es abierto en J. Así, $K - E(K)$ es abierto en $J - E(J)$. Como $J - E(J)$ es abierto en X, esto último implica que $K - E(K)$ es abierto en X; es decir, K es un arco libre de X.

(3) Por el Lema 1.7, existe un subarco L de K, tal que $L \subset \mathrm{int}_X(J)$ y p es punto extremo de L. Como L es un subarco de J y p es punto extremo de J, se satisface que L es una vecindad de x en J. Luego, L es una vecindad de x en $\mathrm{int}_X(J)$ y en X. Así, $x \in \mathrm{int}_X(L) \subset \mathrm{int}_X(K)$. Aplicando el Teorema 1.24 se obtiene que $\mathrm{ord}(p, K) = \mathrm{ord}(p, X) = \mathrm{ord}(p, J) = 1$.

(4) Como $J - E(J)$ es abierto en X, se cumple que $J - E(J)$ es abierto en Y. Así, J es un arco libre de Y. □

Ahora se muestran algunas otras propiedades de los arcos libres. Para facilitar la exposición, se utiliza la siguiente notación.

Definición 2.6. Dados un continuo X, un arco J contenido en X y puntos $p, q \in J$, denotaremos por $[p,q]_J$ al subarco de J que va p a q.

Lema 2.7. *Sean X un continuo y J un arco libre de X. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) Ningún punto de $\mathrm{int}_X(J)$ es el vértice de un triodo simple contenido en X.

(b) Si J y K son arcos libres en X y $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \cup K$ es un arco libre de X o una circunferencia libre de X.

Demostración. (a) Supongamos que $p \in \mathrm{int}_X(J)$ es el vértice de un triodo simple T contenido en X. Sean T_1, T_2, T_3 arcos en T, tales que $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$; para cada $i \in \{1,2,3\}$, $p \in E(T_i)$, y, si $i \neq j$, entonces $T_i \cap T_j = \{p\}$. Aplicando el Lema 1.7 obtenemos, para cada $i \in \{1,2,3\}$, un subarco S_i de T_i, tal que $p \in S_i \subset \mathrm{int}_X(J)$. Obsérvese que, para cada $i \in \{1,2,3\}$, se tiene que $p_i \in E(S_i)$ y que $S_i \cap S_j = \{p\}$. Luego, $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ es un triodo simple contenido en $\mathrm{int}_X(J)$ y, por tanto, contenido en J. Esto contradice el hecho que J es un arco. Por tanto, ningún punto de $\mathrm{int}_X(J)$ es el vértice de un triodo simple contenido en X.

(b) Probaremos primero la siguiente Afirmación.

Afirmación. Sean L y M arcos libres de X y sea $E(L) = \{p_L, q_L\}$. Si $q_L \notin M$ y $p_L \in M$, entonces $L \cup M$ es un arco y existe $p_M \in E(M) \cap L$, tal que $L \cap M = [p_M, p_L]_L$ y $E(L \cup M) = \{q_L, q_M\}$, donde $q_M \in E(M) - \{p_M\}$.

Como $M - E(M)$ es abierto, se tiene que $M - E(M) \subset \mathrm{int}_X(M) = M - \mathrm{Fr}_X(M)$ y, por ende, $\mathrm{Fr}_X(M) \subset E(M)$. Por otro lado, por el Lema 1.6, existe un subarco α de L, tal que $\alpha \cap M = \{p_M\}$ y $E(\alpha) = \{q_L, p_M\}$, para algún $p_M \in L$. Obsérvese que $p_M \in \mathrm{Fr}_X(M) \subset E(M)$. Sea q_M el punto extremo de M distinto de p_M.

Supongamos que $[p_M, p_L]_L \not\subset M$. Luego, $p_M \neq p_L$. Sea $s \in [p_M, p_L]_L - M$. Como $p_L \in M$, aplicando de nuevo el Lema 1.6, obtenemos un subarco β de $[s, p_L]_L$, tal que $\beta \cap M = \{t\}$ y $E(\beta) = \{s, t\}$, para algún $t \in [s, p_L]_L$. Similarmente, existen un subarco γ de $[p_M, s]$ y $u \in [p_M, s]_L$, tales que $\gamma \cap M = \{u\}$ y $E(\gamma) = \{u, s\}$. Obsérvese que $t, u \in \mathrm{Fr}_X(M) \subset E(M) = \{p_M, q_M\}$. Como $t \notin [p_M, s]_L$, se cumple que $t = q_M$ y $q_M \in [s, p_L]_L$. Como $u \notin [s, p_L]$, tenemos que $u = p_M$. Luego, $\gamma \cap M = \{p_M\} = \alpha \cap M$ y $\alpha \cap \gamma = [q_L, p_M]_L \cap [p_M, s]_L = \{p_M\}$. Esto implica que $\alpha \cup \gamma \cup M$ es un triodo simple con vértice p_M. Como $p_M \neq p_L$ y $q_L \notin M$, se satisface que $p_M \in L - E(L)$. Esto contradice (a). Por tanto, $[p_M, p_L]_L \subset M$.

En esta forma, se tiene que $L \cap M = ([q_L, p_M]_L \cap [p_M, p_L]_L) \cap M = (\alpha \cup [p_M, p_L]_L) \cap M = \{p_M\} \cup [p_M, p_L]_L = [p_M, p_L]_L$. Además, $L \cup M =$

$[q_L, p_M] \cup M$ con $[q_L, p_M]_L \cap M = [q_L, p_M]_L \cap L \cap M = [q_L, p_M]_L \cap [p_M, p_L]_L = \{p_M\}$. Así, $L \cup M$ es un arco con $E(L \cup M) = \{q_L, q_M\}$. Esto prueba la Afirmación.

Ahora procederemos a probar (b). Para ello, sean J y K arcos libres de X con $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$. Si $E(J) \cap (K - E(K)) = \emptyset$, entonces $K - E(K) \subset J$ o $J \cap (K - E(K)) = \emptyset$. En el primer caso, se cumple que $K = \mathrm{cl}_X(K - E(K)) \subset J$, así que el resultado es inmediato. En el segundo caso, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \subset J \cap K \subset E(K)$, lo cual no es posible pues $E(K)$ es finito y $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Por tanto, podemos suponer que existe $p_J \in E(J) \cap (K - E(K))$. De la misma forma, podemos asumir que existe $p_K \in E(K) \cap (J - E(J))$. Sean q_J el punto extremo distinto de p_J y q_K el punto extremo de K distinto de p_K.

Tenemos dos casos:

- $q_J \notin K$. Por la Afirmación $J \cup K$ es una arco con puntos extremos q_J y t, para algún $t \in E(K)$. Como $p_K \in J - E(J) \subset (J \cup K) - E(J \cup K)$ debemos tener que $t = q_K$. Así, si $q_K \in J$, entonces $q_K \in E(J)$. Esto equivale a que $q_K \notin J - E(J)$. Además, $q_J \in E(K)$, lo cual implica que $q_J \notin K - E(K)$. Por tanto, $(J \cup K) - E(J \cup K) = (J \cup K) - \{q_J, q_K\} = (J - \{q_J\}) \cup (K - \{q_K\}) = (J - E(J)) \cup (K - E(K))$. Esto implica que $(J \cup K) - E(J \cup K)$ es abierto en X y que $J \cup K$ es un arco libre de X.

•• $q_J \in K$. Sea $p \in J - K$. Por el Lema 2.5 (2), $[q_J, p]_J$ es un arco libre de X. Por la Afirmación, $[q_J, p]_J \cap K = [q_J, u]_J$ para algún $u \in E(K)$. De forma similar, $[p, p_J]_J \cap K = [p_J, v]_J$, para algún $t \in E(K)$. Obsérvese que $[u, p]_J \cap K = [u, p]_J \cap [q_J, p]_J \cap K = [u, p]_J \cap [q_J, u]_J = \{u\}$. Análogamente $[p, v]_J \cap K = \{v\}$. Por tanto, $J \cup K = [p, u]_J \cup [p, v]_J \cup K = [u, v]_J \cup K$, con $[u, v]_J \cap K = ([p, u]_J \cup [p, v]_J) \cap K = \{u, v\}$. Como $u \neq v$, se tiene que $J \cup K$ es una circunferencia y que $q_K \in J$.

  En caso que $q_J \in E(K)$, como $p_K \notin E(J)$, se tiene que $q_J = q_K$. Así, $(J \cup K) - \{q_J\} = (J - E(J)) \cup (K - E(K))$, esto es, $(J \cup K) - \{q_J\}$ es abierto en X. Por otro lado, si $q_J \in K - E(K)$, entonces $q_K \in J - E(J)$, porque de lo contrario, $q_K = p_J \in K - E(K)$, lo cual no es posible. De esta forma, $J \cup K = (J - E(J)) \cup (K - E(K))$ y, por ende, $J \cup K$ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X. Esto implica que $J \cup K = X$. En cualquiera de los dos casos, $J \cup K$ es una circunferencia libre de X.

Esto concluye la prueba del teorema. □

Como se ve más adelante en esta sección y en los apartados posteriores, los arcos libres maximales y las circunferencias libres poseen propiedades en común que son utilizadas muy a menudo. Por este motivo, resulta conveniente tener una notación para la colección de este tipo de subcontinuos.

Definición 2.8. Sea X un continuo. Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_S(X) = \{A \subset X \ : \ & A \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ o} \\ & A \text{ es una circunferencia libre de } X\}\end{aligned}$$

En los cuatro lemas que siguen se establecen algunas propiedades elementales de los elementos del conjunto que se acaba de definir.

Lema 2.9. *Sean X un continuo localmente conexo, J un arco libre o una circunferencia libre y $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si $J \not\subset K$, entonces $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$.

(2) Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $J \neq K$, entonces $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$.

(3) $\operatorname{Fr}_X(K) \cap \bigcup\{\operatorname{int}_X(L) : L \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \emptyset$.

Demostración. Si X es un arco o una curva cerrada simple, entonces $K = X$ y el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que X no es un arco ni una curva cerrada simple.

(1) Probaremos este inciso por contrarrecíproco. Con tal fin, supongamos que $J \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$. Si $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, como $J - E(J)$ es abierto, se tiene que $J = \operatorname{cl}_X(J - E(J)) \subset \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(J)) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$; es decir, $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$. Esto último es una contradicción. Por tanto, $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$.

Consideremos los siguientes tres casos.

(i) K es una circunferencia libre de X. Sea $p \in K$, tal que $K - \{p\}$ es abierto en X. Luego, $K - \{p\} \subset \operatorname{int}_X(K)$. Si $p \in \operatorname{int}_X(K)$, entonces $\operatorname{int}_X(K) = K$. Así, K es no vacío, abierto y cerrado en X; es decir, $K = X$. Como esto no es posible, tenemos que $p \notin \operatorname{int}_X(K)$; es decir, $\operatorname{int}_X(K) = K - \{p\}$. Supongamos que $p \in \operatorname{int}_X(J)$ y que existe $q \in J - K$. Sea L un arco contenido en J, tal que p y q son sus puntos extremos. Como $L - \{p\}$ es conexo y $K - \{p\}$ y $X - K$ son abiertos en X y ajenos, se cumple que $L - \{p\} \subset X - K$. Sean A y B arcos contenidos en K, tales que p es un punto extremo de ambos y $A \cap B = \{p\}$. Luego, $A \cup B \cup L$ es un triodo simple con vértice p. Esto contradice el Lema

2.7 (a). Por tanto, $p \notin \mathrm{int}_X(J)$ o $J \subset K$. Si $p \notin \mathrm{int}_X(J)$, entonces $\mathrm{int}_X(J) \subset K - \{p\}$, porque $X - K$ y $K - \{p\}$ son abiertos en X ajenos y $\mathrm{int}_X(J)$ es conexo e intersecta a $K - \{p\}$. Se sigue de lo anterior que $J = \mathrm{cl}_X(J - E(J)) \subset \mathrm{cl}_X(K - \{p\}) = K$. De cualquier modo, $J \subset K$.

(ii) K es un arco libre maximal de X y J es una circunferencia libre de X. Podemos aplicar el caso anterior para obtener la contención buscada.

(iii) K es un arco libre maximal de X y J es un arco libre de X. Por el Lema 2.7, obtenemos que $J \cup K$ es un arco libre de X o una circunferencia libre de X. Supongamos que $J \cup K$ es una circunferencia libre de X. Sea $a \in J \cup K$, tal que $(J \cup K) - \{a\}$ es abierto en X. Si $a \in J - E(J)$, entonces el conjunto $J \cup K = ((J \cup K) - \{a\}) \cup (J - E(J))$ es abierto y cerrado en X y, por ende, $J \cup K = X$. Como esto último no es posible, se tiene que $a \notin J - E(J)$. Sea r un punto extremo de J distinto de a. Luego, existe un arco M contenido en $J \cup K$, tal que $a \notin M$ y $M \cap K = \{r\}$. Así, $M \cup K$ es un arco contenido en $J \cup K$ que contiene propiamente a K y cuyo conjunto de puntos extremos es $(E(K) \cup E(M)) - \{r\}$. Esto último implica que $(M \cup K) - E(M \cup K) = (M - E(M)) \cup (K - E(K)) \cup \{r\} \subset (J \cup K) - \{a\}$. Luego, $(M \cup K) - E(M \cup K)$ es un subconjunto abierto de $J \cup K$ contenido en $(J \cup K) - \{a\}$ y, por consiguiente, es abierto en X. Así, $M \cup K$ es un arco libre de X que contiene propiamente a K. Esto contradice la maximalidad de K. Por lo tanto, $J \cup K$ es un arco libre de X. Por la propiedad maximal de K, se deduce que $K = J \cup K$ y $J \subset K$.

(2) Supongamos que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $J \neq K$. Luego, una de las contenciones $J \subset K$ o $K \subset J$ no se satisface. Si $J \not\subset K$, entonces, aplicando (1), obtenemos que $J \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Supongamos que $K \not\subset J$. Luego, por (1), se tiene que $K \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$ (aquí usamos la hipótesis $J \in \mathfrak{A}_S(X)$). Esto implica que $\mathrm{int}_X(K) \cap J \subset K \cap J \subset \mathrm{Fr}_X(J)$. Como $\mathrm{Fr}_X(J)$ es un conjunto con a lo más dos elementos y $\mathrm{int}_X(K) \cap J$ es un abierto de un continuo no degenerado, debemos tener que $\mathrm{int}_X(K) \cap J = \emptyset$. De esta forma, en cualquiera de los dos casos, se satisface la igualdad requerida.

(3) Por el inciso anterior, para cualquier $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $J \neq K$ se cumple que $K \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. Así, y porque K es cerrado en X, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X) - \{K\}$ es cierto que $\mathrm{Fr}_X(K) \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. Como también $\mathrm{Fr}_X(K) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$, se sigue que $\mathrm{Fr}_X(K) \cap \mathrm{int}_X(L) = \emptyset$, siempre que $L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Esto prueba (3) y concluye la demostración de este lema. $\square$

El siguiente enunciado es una propiedad interesante del conjunto $\mathfrak{A}_S(X)$, porque en general la convergencia de una sucesión en $C(X)$ no se relaciona de una forma tan sencilla con los puntos de sus elementos. En términos de la Sección 1.6, el resultado que sigue garantiza que si el límite inferior de una sucesión de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ no es vacío, entonces la sucesión es convergente y converge a un conjunto singular.

Lema 2.10. *Sean X un continuo localmente conexo, $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\mathfrak{A}_S(X)$ distintos por pares y $x_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Si* $\lim x_m = x$ *para algún $x \in X$, entonces* $\lim J_m = \{x\}$ *(en $C(X)$).*

Demostración. Obsérvese que la existencia de la sucesión $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ garantiza que X no es un arco ni una curva cerrada simple. Así, por la Observación 3.28, podemos hacer $\mathrm{Fr}_X(J_m) = \{p_m, q_m\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ no converge a $\{x\}$ en $C(X)$. Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que $\{J_m\}$ converge a algún $A \in C(X)$ con $A \neq \{x\}$. Similarmente, como X es compacto, podemos asumir que $\lim p_m = p$ y $\lim q_m = q$, para algunos $p, q \in X$.

Obsérvese que $p, q, x \in A$. Como $\{x\} \subsetneq A$, se tiene que A es un subcontinuo no degenerado de X y, por tanto, A tiene una cantidad infinita de elementos. Tomemos $y \in A - \{p, q\}$. Luego, por el Lema 1.89, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que $y_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\lim y_m = y$.

Si $y \in \mathrm{int}_X(J_k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $m > k$, tal que $y_m \in \mathrm{int}_X(J_k)$. Por consiguiente, $J_m \cap \mathrm{int}_X(J_k) \neq \emptyset$. Esto contradice el Lema 2.9 (2). Así, $y \notin \mathrm{int}_X(J_m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo U de X, tal que $y \in U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset X - \{p, q\}$. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $m \geq m_0$, se tiene que $y_m \in U$. Por el Teorema 1.33, U es arco conexo. Luego, dado $m \geq m_0$, podemos tomar un arco α_m en U de y a y_m.

Si $\{y, y_m\} \cap \mathrm{Fr}_X(J_m) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_m \cap \mathrm{Fr}_X(J_m) \neq \emptyset$. Si, por el contrario, $\{y, y_m\} \cap \mathrm{Fr}_X(J_m) = \emptyset$, entonces $y_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$ y $y \in X - J_m$. Aplicando el Lema 2.5, obtenemos que $\alpha_m \cap \mathrm{Fr}_X(J_m) \neq \emptyset$. De cualquier manera, $\{p_m, q_m\} \cap U = \mathrm{Fr}_X(J_m) \cap U \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

De este modo, existe una subsucesión de $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ o de $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ cuyo rango está contenido en U. Así, $p \in \mathrm{cl}_X(U)$ o $q \in \mathrm{cl}_X(U)$, lo cual contradice la elección de U. Por lo tanto, $\lim J_m = \{x\}$. $\square$

Lema 2.11. *Sean X un continuo localmente conexo y J un arco libre de X con un punto extremo e, tal que $e \in \mathrm{int}_X(J)$. Entonces, existe un arco libre K, tal que $J \subset K$, e es un punto extremo de K, $e \in \mathrm{int}_X(J)$ y K contiene a cada arco libre de X que contiene a J.*

Demostración. Podemos suponer que X no es un arco. Dado un arco libre L en X, tal que $e \in L$, sean p_L y q_L sus puntos extremos. Por el Lema

2.5 (3), tenemos que e es un punto extremo de L y $e \in \mathrm{int}_X(L)$. Podemos suponer que $q_L = e$. Obsérvese que $L - \{p_L, e\}$ es abierto en X. Por tanto, $(L - \{p_L, e\}) \cup \{e\} \subset \mathrm{int}_X(L)$. Además, como X no es un arco y L es un subconjunto cerrado y no vacío de X, se tiene que $\mathrm{int}_X(L) \subsetneq L$; es decir, $L - \{p_L\} = \mathrm{int}_X(L)$. Por tanto, $\mathrm{Fr}_X(L) = \{p_L\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{L : L$ es un arco libre de X, tal que $J \subset L\}$. Fijemos $L, M \in \mathcal{F}$. Si $p_L \notin \mathrm{int}_X(M)$, entonces $\mathrm{int}_X(M) \cap \mathrm{Fr}_X(L) = \emptyset$. Como $\mathrm{int}_X(M)$ es conexo y $e \in \mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{int}_X(M)$, se tiene que $\mathrm{int}_X(M) \subset L$. Así, $M = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(M)) \subset L$. Si $p_L \in \mathrm{int}_X(M)$, entonces podemos tomar el subarco $K = [e, p_L]_M$. Por el Lema 2.5 (2), K es un arco libre de X. Como $e \in K$, se cumple que $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_L\}$. Así, $\mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{Fr}_X(K) = \emptyset$. Como $\mathrm{int}_X(L)$ es conexo y $e \in \mathrm{int}_X(K) \cap \mathrm{int}_X(L)$, se tiene que $\mathrm{int}_X(L) \subset \mathrm{int}_X(K)$. Por tanto, $L = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(K)) \subset M$. De cualquier manera, $M \subset L$ o $L \subset M$.

Sean $U = \bigcup\{L - \{p_L\} : L \in \mathcal{F}\}$ y $K = \mathrm{cl}_X(U)$. Supongamos que $U = K$. Luego, U es una subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X. Así, $U = X$. Obsérvese que $\{L - \{p_L\} : L \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $L_1, \ldots, L_r$, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{r}(L - \{p_l\})$. Por el párrafo anterior, podemos suponer que $L_i \subset L_1$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Luego, como L_1 es un arco, $L_i - \{p_{L_i}\} \subset L_1 - \{p_{L_1}\}$. De esta manera, tenemos que $X = L_1 - \{p_{L_1}\}$ y $p_{L_1} \notin X$. Esto es una contradicción. Por tanto, $K \neq U$.

Obsérvese que $e \notin X - U$ y que, por el Teorema 1.33, X es arco conexo. Aplicando el Lema 1.8 obtenemos un arco M en X que va de un punto $p \in X - U$ a E y $M \cap (X - U) = \{p\}$. Luego, $M - \{p\} \subset U$. Para mostrar que $U \subset M - \{p\}$ tomemos $L \in \mathcal{F}$ y $z \in L - \{e, p_L\}$. Luego, $[e, z]_L \subset L - \{p_L\} \subset U$. Por el Lema 2.5 (3), $[e, z]_L$ es un arco libre de X. Luego, $\mathrm{Fr}_X([e, z]_L) = \{z\}$. Como $e \in M \cap \mathrm{int}_X([e, z]_L)$, $p \in M - U \subset M - [e, z]_L$ y M es conexo, debemos tener $\mathrm{Fr}_X(M) \cap M \neq \emptyset$; es decir, $z \in M$. Así, $L - \{p_L, e\} \subset M$ y, por consiguiente, $L - \{p_L\} \subset L = \mathrm{cl}_X(L - \{p_L, e\}) \subset M$. De esta manera $U \subset M$. Como $p \notin U$, concluimos que $U = M - \{p\}$. Por tanto, $K = \mathrm{cl}_X(M - \{p\}) = M$. Por tanto, K es un arco con puntos extremos p y e, $K - \{p\}$ es abierto en X y, para cada $L \in \mathcal{F}$ se cumple que $L - \{p_L\} \subset U \subset K$; es decir, $L \subset K$. Con esto concluimos la demostración de este lema. $\square$

El siguiente lema es un paso importante para la prueba del Lema 2.16 y afirma que los arcos libres siempre están contenidos en un arco libre maximal o en una circunferencia libre. Por sí mismo, este sencillo enunciado es una propiedad significativa de los continuos localmente conexos.

Lema 2.12. *Sean X un continuo localmente conexo y J un arco libre de X. Entonces, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $J \subset K$.*

Demostración. Podemos suponer que X no es una curva cerrada simple ni un arco y que J no está contenido en una circunferencia libre de X. Sean x y y los puntos extremos de J. Fijemos puntos $p, q \in (x, y)_J$, tales que $[x, p]_J \cap [q, y]_J = \emptyset$. Por el Lema 2.5 (2), $[p, q]_J$ es un arco libre de X, así que $(p, q)_J$ es un abierto en X. De esta manera, el conjunto $Y = X - (p, q)_J$ es cerrado en X. Sean X_p y X_q las componentes de Y con $p \in X_p$ y $q \in X_q$. Obsérvese que $\mathrm{Fr}_X(Y) = \mathrm{Fr}_X((p, q)_J) = [p, q]_J - (p, q)_J = \{p, q\}$. Luego, por el Teorema 1.16, cada componente de Y intersecta a $\{p, q\}$; es decir, cada componente tiene como elemento a p o a q. Así, las únicas componentes de Y son X_p y X_q. Por tanto, $Y = X_p \cup X_q$ con $X_p \cap X_q = \emptyset$ o $X_p = X_q = Y$. Obsérvese que X_p y X_q son subcontinuos de X.

Demostremos que X_p y X_q son localmente conexos. En el caso $X_p \cap X_q = \emptyset$, tenemos que $X_p = Y - X_q$, así que $X_p - \{p\} = X - ([p, q)_J \cup X_q) = X - ([p, q]_J \cup X_q)$. De esta forma, $X - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X y, por tanto, es localmente conexo. Obsérvese que $[x, p]_J \cap (p, q)_J = \emptyset$; es decir, $[x, p]_J \subset Y$. Como $p \in X_q$ y $[x, p]_J$ es conexo, se deduce que $[x, p]_J \subset X_p$. Similarmente, $[q, y]_J \subset X_q$. Así, $X_p \cap (x, y)_J = X_p \cap ((x, p]_J \cup (p, q)_J \cup [q, y)_J) = (x, p]_J$. Como $J - \{x, y\} = (x, y)_J$ es una vecindad abierta de p en X, el conjunto $(x, p]_J$ es una vecindad abierta de p en X_p. Por tanto, X_p es localmente conexo. De forma análoga, podemos probar que X_q es localmente conexo.

Como X_q y X_q son subconjuntos abiertos de Y, obtenemos que Y es localmente conexo. En el caso $X_p = X_q = Y$, el conjunto $X_p - \{p, q\} = X - [p, q]_J$ es abierto en X y, por ende, localmente conexo. Además, $X_p \cap (x, y)_J = (x, p]_J \cup [q, y)_J$ y, en consecuencia, $((x, p]_J \cup [q, y)_J) - [q, y]_J = (x, p]_J$ son vecindades abiertas de p en X_p. Por tanto, $X_p = Y$ es localmente conexo.

Por el Lema 2.5 incisos (2) y (4), se tiene que $[x, p]_J$ es un arco libre de X_p y, por el párrafo anterior, $p \in \mathrm{int}_{X_p}([p, q]_J)$. Aplicando el Lema 2.11, obtenemos un arco libre K_p en X_p, tal que $[x, p]_J \subset K_p$, p es un punto extremo de K_p, $p \in \mathrm{int}_{X_p}(K_p)$ y K_p contiene a cada arco libre de X_p que contiene a $[x, p]_J$. De igual manera, $[q, y]_J$ es un arco libre de X_q, $q \in \mathrm{int}_{X_q}[q, y]_J$ y existe un arco libre K_q en X_q, tal que $[q, y]_J \subset K_q$, q es un punto extremo de K_q, $q \in \mathrm{int}_{X_q}(K_q)$ y K_q contiene a cada arco libre en X_q que contiene a $[q, y]_J$. Sean p_0 el punto extremo de K_p con $p_0 \neq p$ y q_o el punto extremo de K_q con $q_0 \neq q$.

Si $p \in (q, q_0)_{K_q}$, entonces $p \in X_p \cap X_q$, $X_p = X_q$ y p no es punto extremo del arco $[q, q_0]_{K_q}$ contenido en X_p. Esto implica, por el Teorema

1.24, que $2 \leq \mathrm{ord}(p, [q, q_0]_{K_q}) \leq \mathrm{ord}(p, X_p) = \mathrm{ord}(p, [x, p]_J)$. Esto contradice el hecho que p es un punto extremo de $[x, p]_J$. Por tanto, $p \notin (q, q_0)_{K_q}$ y $(q, q_0)_{K_q} \subset X_q - \{p, q\}$.

De esta manera, $(q, q_0)_{K_q} = K_q - \{q, q_0\}$ es un subconjunto abierto de X_q contenido en el subconjunto abierto $X_q - \{p, q_0\}$ de X. Obtenemos así que $(q, q_0)_{K_q}$ es abierto en X y que K_q es un arco libre de X. Además, por el Lema 2.5 (2), $[q, y]_J$ y $[p, y]_J$ son arcos libres en X, esto es, $(q, y)_J$ y $(p, y)_J$ son abiertos en X. Obsérvese también que $(q, y)_J \subset J - [x, p]_J \subset [p, y]_J$. Luego, $\emptyset \neq (q, y)_J \subset \mathrm{int}_X([p, y]_J) \cap \mathrm{int}_X(K_q)$. Aplicando el Lema 2.7 (b), obtenemos que $K_q \cup [p, y]_J$ es un arco libre o una circunferencia libre de X.

Supongamos que $K_q \cup [p, y]_J$ es una circunferencia libre. Luego, como $\emptyset \neq (p, y)_J \subset J \cap \mathrm{int}_X(K_q \cup [p, y]_J)$, por el Lema 2.9 (1), se satisface que $J \subset K_q \cup [p, y]_J$. Esto contradice nuestra suposición inicial de que J no está contenido en una circunferencia libre. Así, $K_q \cup [p, y]_J$ es un arco libre de X. De manera similar, $K_p \cup [x, q]_J$ es un arco libre de X.

Obsérvese que $(p, q)_J$ es un subconjunto abierto de X contenido en $K_p \cup [p, y]_J$ y en $K_q \cup [x, q]_J$. Aplicando nuevamente el Lema 2.7 (b), se tiene que $M = K_p \cup K_q \cup [x, q]_J \cup [p, y]_J$ es un arco libre de X (pues $J \subset M$ y hemos supuesto que J no está contenido en una circunferencia libre de X). Obsérvese que $[x, q]_J \cup [p, y]_J = [x, p]_J \cup [p, q]_J \cup [q, y]_J$, así que $M = K_p \cup K_q \cup J$. Por otro lado, $p, q \in (x, y)_J$ y $M - \{p_0, q_0, x, y\} = (p_0, p)_J \cup (x, y)_J \cup (q, q_0)_J$. Obsérvese que $x = p_0$ o $x \in (p_0, p)_J$, y que $y = q_0$ o $y \in (q, q_0)_J$. Luego, por el Teorema 1.24, para cada $z \in M - \{p_0, q_0\}$ se cumple que $2 \leq \mathrm{ord}(z, M - \{p_0, q_0\}) \leq \mathrm{ord}(z, M)$. Esto implica que p_0 y q_0 son los puntos extremos de M.

Sea L un arco libre de X, tal que $M \subset L$ y sean u y v los puntos extremos de L. Podemos suponer que $q \in [p, v]_L$. Luego, $[u, p]_L \cap (p, q)_J = [u, p]_L \cap (p, q)_L = \emptyset$; es decir, $[u, p]_L \subset Y$. Como $p \in [u, p]_L$, deducimos que $[u, p]_L \subset X_p$. Aplicando los incisos (2) y (4) del Lema 2.5, obtenemos que $[u, p]_L$ es un arco libre de X y en X_p. Obsérvese, además, que $[x, p]_J = [x, p]_L$ es un conjunto conexo contenido en $L - (p, q)_J = L - (p, q)_L = [u, p]_L \cup [q, v]_L$, con $[u, p]_L \cup [q, v]_L = \emptyset$. Como $p \in [x, p]_J \cap [u, p]_L$, deducimos que $[x, p]_J \subset [u, p]_L$. Por la maximalidad de K_p, se tiene que $[u, p]_L \subset K_p$. Como $p \in [u, q]_L$, se puede probar de igual manera que $[q, v]_L \subset K_q$. Así, $L = [u, p]_L \cup [p, q]_J \cup [q, v]_L \subset K_p \cup J \cap K_q = M$. Esto muestra que M es maximal y concluye la demostración de este lema. $\square$

Como una aplicación del Lema 2.12, se prueba el siguiente resultado, el cual es usado en reiteradas ocasiones en el Capítulo 3. La notación $\mathcal{FA}(X)$ se establece en dicho capítulo.

Corolario 2.13. *Para cualquier continuo localmente conexo X, se satisface la igualdad* $\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\mathrm{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Demostración. Probaremos las contenciones necesarias para la igualdad. Sea $x \in \mathcal{FA}(X)$. Luego, existe un arco libre J de X, tal que $x \in \mathrm{int}_X(J)$. Por el Lema 2.12, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $J \subset K$. Obsérvese que $\mathrm{int}_X(J) \subset \mathrm{int}_X(K)$. Así, $x \in \mathrm{int}_X(K)$. Esto prueba la contención hacia la derecha.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \mathrm{int}_X(K)$, para algún $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si K es un arco libre maximal, entonces $x \in \mathcal{FA}(X)$. Supongamos, por el contrario, que K es una circunferencia libre de X. Sea $p \in K$, tal que $K - \{p\}$ es abierto en X. Luego, $K - \{p\} \subset \mathrm{int}_X(K) \subset K$. Si $p \in \mathrm{int}_X(K)$, entonces $K = \mathrm{int}_X(K)$ y, en consecuencia K es abierto y cerrado en X; es decir, $K = X$. En este último caso, todo arco contenido en K es un arco libre de X y, por ende, $p \in \mathcal{FA}(X)$. Si ocurre el otro caso; es decir, si $p \notin \mathrm{int}_X(K)$, entonces $x \neq p$ y, dado un arco J contenido en K, tal que $x \in J - E(J)$ y $p \notin J$, se cumple que el conjunto $J - E(J)$ es abierto en K y está contenido en J. Por tanto, $J - E(J)$ es abierto en X, J es un arco libre de X y $x \in J - E(J) \subset \mathrm{int}_X(J) \subset \mathcal{FA}(X)$. Esto muestra la contención hacia la izquierda y finaliza la demostración de este corolario. □

2.3. Gráficas finitas como vecindades de subespacios

En esta sección se presentan algunos resultados que proveen de condiciones necesarias y condiciones suficientes para que el hiperespacio $C_n(X)$ tenga dimensión finita en un punto dado, donde X es un continuo localmente conexo, pudiéndose constatar que esta propiedad está directamente relacionada con la característica de dicho punto de tener una vecindad en X que es una gráfica finita, es decir, que dicho punto está contenido, como conjunto, en el interior en X de un subespacio que es una gráfica finita.

Los teoremas más notables que se exponen en este apartado son los Teoremas 2.15 y 2.18, los cuales son los más fuertes de este capítulo. El primero caracteriza a los puntos de dimensión finita en $C_n(X)$ (para cualquier n), mientras que el segundo caracteriza las componentes del conjunto $\mathfrak{P}_2(X)$ (Definición 2.17).

El primero de los resultados de este sección tiene una prueba extensa, pero es valioso en sí mismo, así como para la demostración del Teorema 2.15. Tal resultado es el siguiente.

Teorema 2.14. *Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in C(X)$ y $\dim_A(C(X))$ es finita, entonces existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \operatorname{int}_X(D)$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Si $A = X$, entonces $\dim_X(C(X))$ es finita y, por el Teorema 2.3, X es una gráfica finita. De esta manera, podemos suponer que $A \neq X$. Sea $m = \dim_A(C(X))$. Haremos la prueba por pasos.

(I) *A es localmente conexo.*

Supongamos que A no es localmente conexo. Aplicando el Teorema 1.29 obtenemos un elemento $p \in A$, tal que A no es conexo en pequeño en p. Sean U una vecindad de p que no contiene vecindades conexas de p, V un subconjunto abierto de A, tal que $p \in V \subset \operatorname{cl}_A(V) \subset U$ y D la componente de $\operatorname{cl}_A(V)$, tal que $p \in D$. Luego, $p \notin \operatorname{int}_A(D)$, pues de lo contrario, D es una vecindad conexa de p en A contenida en U. Así, $p \in A - \operatorname{int}_A(D) = \operatorname{cl}_A(A - D)$.

Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A - D$, tal que $\lim p_n = p$. Como V es vecindad de p en A, podemos suponer que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en V. Por otro lado, si existe una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en alguna componente E de $\operatorname{cl}_A(V)$, como E es cerrado en $\operatorname{cl}_A(V)$, tenemos que $p \in E$. Así, $E = D$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee elementos en D, lo cual no es posible. Por consiguiente, cada componente de $\operatorname{cl}_A(V)$ tiene a lo más una cantidad finita de elementos de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, podemos suponer que existe una sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de componentes de $\operatorname{cl}_A(V)$ diferentes de D y distintas dos a dos, tales que $p_n \in D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en $C(\operatorname{cl}_A(V))$, y éste último es compacto, podemos suponer que $\lim D_n = D_0$ para algún $D_0 \in C(\operatorname{cl}_A(V))$. Como $p \in D_0 \cap D$, D es una componente de $\operatorname{cl}_A(V)$ y D_0 es un subconjunto conexo de $\operatorname{cl}_A(V)$, tenemos que $D_0 \subset D$. Obsérvese que, por el Teorema 1.16, existe $t_n \in \operatorname{Fr}_A(V) \cap D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{Fr}_A(V)$ es compacto, podemos suponer que $\lim t_n = t$ para algún $t \in \operatorname{Fr}_A(V)$. Obsérvese que $t \in \lim D_n = D_0$. Así, $p, t \in D_0$ y, como $p \in V$ y $t \in \operatorname{Fr}_A(V)$, se satisface que $p \neq t$. Luego, D_0 es un continuo no degenerado. Como $D_0 \cap V$ es un subconjunto abierto y no vacío de D_0, se tiene que $D_0 \cap V$ es infinito.

Tomemos $q_1, \ldots, q_{m+1} \in D_0 \cap V$ distintos por pares. Sea W un subconjunto abierto de X, tal que $V = W \cap A$. Como X es localmente conexo, existen $Q_1, \ldots, Q_{m+1}$ subcontinuos de X ajenos por pares tales que $q_i \in \operatorname{int}_X(Q_i)$ y $Q_i \subset W$, para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Sea $B = A \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{m+1}$. Obsérvese que B es cerrado en X, por ser unión finita de cerrados en X. Asimismo, como $q_i \in A \cap Q_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, por el Teorema 1.2, B es conexo. Así, $B \in C(X)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} B - A &= (A \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{m+1}) - A \\ &= (Q_1 - A) \cup (Q_2 - A) \cup \cdots \cup (Q_{m+1} - A). \end{aligned}$$

Supongamos que $Q_i \subset V$ para algún $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Como Q_i es conexo, D es una componente de $\mathrm{cl}_A(V)$ y $q_i \in Q_i \cap D$, esto implica que $Q_i \subset D$. Luego, $Q_i \cap D_n = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $q_i \notin \lim D_n = D_0$. Esto es una contradicción. Así, $Q_i \not\subseteq V$.

Como $Q_i \cap A \subset W \cap A = V$, se cumple que $Q_i - A \neq \emptyset$. Además, los conjuntos $Q_i - A$ están mutuamente separados dos a dos en X, porque $Q_i - A \subset Q_i$ y los conjuntos Q_i son ajenos por pares y cerrados en X. Por el Teorema 2.1, existe una $(m+1)$-celda $\mathfrak{M} \in C(X)$, tal que $A \in \mathfrak{M}$. Aplicando el Teorema 1.68 y el Ejemplo 1.72, se tiene que $\dim_A(C(X)) \geq \dim_A(\mathfrak{M}) = m+1$. Esto contradice el hecho que $m = \dim_A(C(X))$. Por lo tanto, A es localmente conexo.

(II) A es un gráfica finita y $fr_X(A)$ posee a lo más m elementos.

Por el Teorema 1.68, se satisface que $\dim_A(C(A)) \leq \dim_A(C(X))$. Luego, $\dim_A(C(A))$ es finita y, por el Teorema 2.3, A es una gráfica finita.

Supongamos que existen $p_1, \ldots, p_{m+1}$ puntos distintos en $\mathrm{Fr}_X(A)$. Como X es localmente conexo, existen $P_1, \ldots, P_{m+1}$ subcontinuos de X ajenos dos a dos, tales que $p_i \in \mathrm{int}_X(P_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Sea $B_1 = A \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{m+1}$. Como $p_i \in \mathrm{Fr}_X(A)$, tenemos que $\mathrm{int}_X(P_i) \cap (X - A) \neq \emptyset$ y $P_i - A \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Obsérvese que, al igual que en la prueba de (I), se cumple que $B_1 \in C(X)$, los conjuntos $P_i - A$ están mutuamente separados por pares en X y $B_1 - A = (P_1 - A) \cup (P_2 - A) \cup \cdots \cup (P_{m+1} - A)$. Así, en la misma forma que en la prueba de (I), se contradice el hecho que $\dim_A(C(X)) = m$. Por tanto, podemos hacer $\mathrm{Fr}_X(A) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, donde $r \leq m$ y $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$. Hagamos también $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{d(x_i, x_j) : i < j\}$.

(III) Existe una gráfica finita D, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$.

Demostraremos que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe un arco η en X que tiene a x_i como punto extremo y que sólo intersecta a A en este punto. En efecto, como X es localmente conexo, existe una vecindad abierta y conexa U de x_i en X, tal que $U \subset (X - (\{x_1, \ldots, x_r\} - \{x_i\}))$. Por el Teorema 1.33, el subespacio U es arco conexo. Como $x_i \in \mathrm{Fr}(A)$, podemos tomar $y \in U - A$. Por el Lema 1.8, existe un arco η en U, tal que $\eta \cap A = \{t\}$, para algún $t \in A$, y los puntos extremos de η son y y t. Obsérvese que $t \in \mathrm{Fr}_X(A) \cap U = \{x_i\}$. De esta forma, $\eta \cap A = \{x_i\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sea $\mathcal{K}_i$ la colección de todos los conjuntos no vacíos Λ, tales que, para cualquier $\alpha \in \Lambda$, se cumple que α es un arco en X que tiene a x_i como punto extremo, α intersecta a A sólo en este punto y, si β es un elemento de Λ distinto de α, entonces β intersecta a α justamente en x_i. Por el párrafo anterior, $\mathcal{K}_i \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, tomemos $\Gamma_i \in \mathcal{K}_i$. Supongamos que $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r$ tiene más de m elementos. Como de cada conjunto de más de m elementos es posible extraer un subconjunto de $m+1$ elementos, podemos suponer que $|\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r| = m + 1$. Por el Lema 1.7 podemos asumir que los arcos de cada Γ_i están contenidos en $B_d(x_i, \varepsilon)$.

Sean $\alpha, \beta \in \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r$, con $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha \in \Gamma_i$ y $\beta \in \Gamma_j$, con $i \neq j$, entonces $\alpha \cap \beta \subset B_d(x_i, \varepsilon) \cap B_d(x_j, \varepsilon) = \emptyset$. Si $\alpha, \beta \in \Gamma_i$, entonces $(\alpha - A) \cap \mathrm{cl}_X(\beta - A) = (\alpha - \{x_i\}) \cap \mathrm{cl}_X(\beta - \{x_i\}) = (\alpha - \{x_i\}) \cap \beta = \emptyset$. De manera similar obtenemos que $\mathrm{cl}_X(\alpha - A) \cap (\beta - A) = \emptyset$. Por tanto, en cualquier caso, $\alpha - A$ y $\beta - A$ están mutuamente separados.

En este modo, $\{\alpha - A : i \in \{1, \ldots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\}$ es una colección de $m+1$ conjuntos mutuamente separados por pares. Por otro lado, obsérvese que el conjunto $B = A \cup (\bigcup\{\alpha - A : i \in \{1, \ldots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\})$ es un subcontinuo de X y $B - A = \bigcup\{\alpha - A : i \in \{1, \ldots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\}$. De forma similar a la prueba de (I), podemos obtener que $\dim_A(C(X)) \geq m + 1$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $|\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r| \leq m$.

Obsérvese que la conclusión del párrafo anterior implica que los elementos de cada $\mathcal{K}_i$ son finitos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $k_i = \max\{|\Gamma| : \Gamma \in \mathcal{K}_i\}$ y Λ_i un elemento de $\mathcal{K}_i$ con k_i elementos. En la misma forma que hicimos en los párrafos anteriores, podemos suponer que $\bigcup \Lambda_i$ es ajeno a $\bigcup \Lambda_j$ si $i \neq j$.

Fijemos $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $\Lambda_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}\}$. Obsérvese que $\bigcup \Lambda_i = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_{k_i}$ es un k_i-odo simple con vértice x_i.

$(III.1)$ x_i no es punto de acumulación de $R(X)$.

Supongamos que x_i es un punto de acumulación de $R(X)$, es decir, que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $R(X) - \{x_i\}$, tal que $\lim z_n = x_i$ y sus términos son diferentes por pares. Como X es un continuo localmente conexo, podemos tomar un subconjunto abierto y conexo U_n de X, tal que $x_i \in U_n \subset \mathrm{cl}_X(U_n) \subset B(x_i, \frac{1}{n}) - (\mathrm{Fr}_X(A) - \{x_i\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim z_n = x_i$, podemos suponer que $z_n \in U_n$ siempre que $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese, además, que $\lim \mathrm{cl}_X(U_n) = \{x_i\}$.

Por otro lado, como $A - \mathrm{Fr}_X(A)$ es abierto tanto en X como en A, por el Teorema 1.24, se cumple que $\mathrm{ord}(w, X) = \mathrm{ord}(w, A - \mathrm{Fr}_X(A)) = \mathrm{ord}(w, A)$, para cualquier $w \in A - \mathrm{Fr}_X(A)$. Esto implica que $R(X) \cap A \subset R(A) \cup \mathrm{Fr}_X(A)$. Como A es una gráfica finita, por el Teorema 1.45, $R(A)$ es finito. Por tanto,

$R(X) \cap A$ es finito. De esta manera, podemos suponer que cada z_n no es elemento de A.

Obsérvese que, por el Teorema 1.33, U_n es arco conexo. Sea β_n un arco en U_n que va de z_n a x_i. Sean $b \in \beta_n \cap A$ y $\gamma = [z_n, b]_{\beta_n}$. Luego, se cumple que $\gamma \cap A \neq \emptyset$ y $\gamma - A \neq \emptyset$. Aplicando la conexidad de γ, se tiene que $\mathrm{Fr}_X(A) \cap \gamma \neq \emptyset$. Por otro lado, $\mathrm{Fr}_X(A) \cap \gamma \subset \mathrm{Fr}_X(A) \cap U_n = \{x_i\}$; es decir, $x_i \in \gamma$. Esto implica que, $\beta_n = \gamma$ y $\beta_n \cap A = \{x_i\}$. Luego, por la elección de k_i y de los arcos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}$, existe $j \in \{1, \ldots, k_i\}$, tal que $\beta_n \cap (\alpha_j - \{x_i\}) \neq \emptyset$. Como esto sucede para cada $n \in \mathbb{N}$, algún α_j intersecta a una cantidad infinita de los arcos β_n. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\beta_n \cap (\alpha_1 - \{x_i\}) \neq \emptyset$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a construir el arco γ_n de la siguiente manera. Supongamos primero que $z_n \in \alpha_1$. Como X es localmente conexo y $U_n - \{x_i\}$ es una vecindad de z_n, existe un subconjunto abierto y conexo S de X, tal que $z_n \in S \subset U_n - \{x_i\}$. Por el Teorema 1.33, se cumple que S es arco conexo. Como S es abierto en X y $S \cap \alpha_1$ es abierto en α_1, se tiene, por el Teorema 1.24, que $\mathrm{ord}(z_n, S) = \mathrm{ord}(z_n, X) \geq 3$ y $\mathrm{ord}(z_n, S \cap \alpha_1) = \mathrm{ord}(z_n, \alpha_1) \leq 2$. Esto implica que $S \neq S \cap \alpha_1$; es decir, $S \nsubseteq \alpha_1$. Sea $p_n \in S - \alpha_1$. Como $\alpha_1 \cap S$ es un subconjunto cerrado de S que contiene al menos a z_n, por el Lema 1.8, existen $t_n \in S$ y un arco γ_n contenido en S, tales que $\gamma_n \cap \alpha_1 = \{t_n\}$ y $E(\gamma_n) = \{p_n, t_n\}$. Supongamos ahora que $z_n \notin \alpha_1$. Por el Lema 1.8 existe un arco γ_n contenido en U_n, tal que $E(\gamma_n) = \{z_n, t_n\}$ y $\gamma_n \cap (A \cup \alpha_1) = \{t_n\}$, para algún $t_n \in U_n$. Si $t_n \in \mathrm{Fr}_X(A)$, entonces $t_n \in U_n \cap \{x_1, \ldots, x_r\} = \{x_i\}$; es decir, $t_n = x_i$ y $\gamma_n \cap A = \{x_i\}$. Como $\beta_n \cap \alpha_1 \neq \emptyset$ y z_n es un punto extremo de β_n, por el Lema 1.6, existe un subarco γ_n de β_n, tal que $\gamma_n \cap \alpha_1$ consta de un solo punto t_n y $E(\gamma_n) = \{z_n, t_n\}$. Obsérvese que $t_n \neq x_i$ pues de lo contrario $\gamma_n = [z_n, x_i]_{\beta_n} = \beta_n$ y, por consiguiente, $\beta_n \cap \alpha_1 = \{x_i\}$, lo cual no es posible. En ambos casos, tenemos que $x_i \notin \gamma_n$ y $\gamma_n \cap \alpha_1 = \{t_n\}$.

Obsérvese que, por el Lema 1.91, se cumple que $\lim t_n = x_i$ y $\lim \gamma_n = \{x_i\}$. Si existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que todos sus elementos poseen un punto p en común, entonces $p \in \lim \gamma_n$ y $p = x_i$. Así, $x_i \in \gamma_j$ para una cantidad infinita de $j \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción. Por tanto, podemos suponer que los arcos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ son ajenos por pares.

Por otro lado, como $\alpha_1 \nsubseteq A$, se satisface que $A \cup \alpha_1 \neq A$ y $\eta > 0$, donde $\eta = H_d(A, A \cup \alpha_1)$.

Probaremos que $\dim_A(C(X)) \geq m + 1$. Para tal fin, sea $\mathfrak{U}$ una vecindad de A en $C(X)$, tal que $\mathfrak{U} \subset B_{H_d}(A, \frac{1}{2}\eta)$. Sea $\delta > 0$, tal que $B_{H_d}(A, 2\delta) \subset \mathfrak{U}$. Por el Lema 1.7, existe $t \in \alpha_1$, tal que el arco $\alpha_0 = [x_i, t]_{\alpha_1}$ está contenido en $B_d(x_i, \delta)$. Sea $N \in \mathbb{N}$, tal que $t_n \in B_d(x_i, \delta) - [t, q_1]_{\alpha_1}$ y $\gamma_n \in B_{H_d}(\{x_i\}, \delta)$ siempre que $n \geq N$, en donde q_1 es el punto extremo de α_1 distinto de

x_i. Como cada punto t_n es elemento de α_1, se tiene que todos los t_n, para $n \geq N$, son elementos de α_0. Aplicando el Teorema 1.2, obtenemos que el conjunto $B_0 = A \cup \alpha_0 \cup (\bigcup\{\gamma_n : n > N\})$ es conexo. Obsérvese que el conjunto $\{A, \alpha_0\} \cup \{\gamma_n : n > N\} \cup \{\{x_i\}\}$ es un subconjunto cerrado de 2^X. Aplicando el Teorema 1.108, obtenemos que B_0 es un subconjunto cerrado de X. Así, $B_0 \in C(X)$.

Obsérvese que tanto B_0 como $A \cup \alpha_0$ están contenidos en $N_d(A, \delta)$ y son elementos de $B_{H_d}(A, 2\delta) \subset \mathfrak{U}$. Del mismo modo, $A \cup \alpha_0$ y $B_0 \cup \alpha_1$ son subcontinuos de X y, como $B_0 \cup \alpha_1 \supset A \cup \alpha_1$, se satisface que $H_d(A, B_0 \cup \alpha_1) \geq H_d(A, A \cup \alpha_1) = \eta$ y $B_0 \cup \alpha_1 \notin \mathrm{cl}_{C(X)}(B_{H_d}(A, \frac{1}{2}\eta)) \supset \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{U})$.

Obsérvese que el conjunto $\{\gamma_n : n \geq N + m\} \cup \{\{x_i\}\}$ es cerrado en 2^X. Por el Teorema 1.108, se cumple que $C = \{x_i\} \cup \bigcup\{\gamma_n : n \geq N + m\}$ es cerrado en X. Como x_i no es elemento de algún γ_n y los arcos γ_n son ajenos entre sí, se cumple que C es ajeno a γ_n, para cada $N < n < N + m$. Análogamente, como $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ no posee a x_i y es ajeno a γ_n, para cualquier $n \geq N$, se deduce que $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ es ajeno a C. Además, $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ es el arco $[t, q_1]_{\alpha_1}$. Así, $\{C, (\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}\} \cup \{\gamma_n : N < n < N + m\}$ es una familia de $m + 1$ subconjuntos cerrados de X no vacíos y ajenos por pares.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&(B_0 \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0) \\
&\qquad = \left(A \cup C \cup \left(\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}\right) \cup \alpha_1\right) - (A \cup \alpha_0) \\
&\qquad = \left(C \cup \left(\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}\right) \cup \alpha_1\right) - (A \cup \alpha_0)\,.
\end{aligned}$$

Como C, $\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}$ y α_1 no están contenidos en $A \cup \alpha_0$, se desprende de lo anterior que $(B_0 \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0)$ es la unión de $m + 1$ conjuntos separados por pares en X. De esta manera, podemos aplicar el Teorema 2.1 para obtener una $(m+1)$-celda $\mathfrak{M}$ contenida en $C(X)$, tal que $B_0 \cup \alpha_1, A \cup \alpha_0 \in \mathfrak{M}$. Como $A \cup \alpha_0 \in \mathfrak{M} \cap \mathrm{int}_{C(X)}(\mathfrak{U}) \neq \emptyset$ y $B_0 \cup \alpha_1 \in \mathfrak{M} \cap (C(X) - \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \neq \emptyset$, se tiene que $\mathfrak{M} - \mathrm{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})$ es disconexo. Aplicando el Teorema 1.73 obtenemos que $\dim(\mathfrak{M} \cap \mathrm{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \geq m$. Luego, por el Teorema 1.68, $\dim(\mathrm{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \geq m$. Como $\mathfrak{U}$ es una vecindad abierta de A arbitraria (salvo por la cota superior en su diámetro), se sigue que $\dim_A(C(X)) \geq m + 1$. Esto es una contradicción y prueba que x_i no es un punto de acumulación de $R(X)$.

$(III.2)$ $A \cup (\bigcup \Lambda_i)$ es una vecindad de x_i en X.

Sea T_i una vecindad abierta de x_i en X, tal que $T_i \cap R(X) \subset \{x_i\}$. Por el Lema 1.7, podemos suponer que $\alpha_j \subset T_i$ para cada $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Dado

$j \in \{1, \ldots, k_i\}$, sea q_j el punto extremo de α_j distinto de x_i. Como X es localmente conexo, podemos tomar una vecindad abierta y conexa W_i de x_i en X, tal que $W_i \subset T_i \cap B_d(x_i, \varepsilon) - \{q_1, \ldots, q_{k_i}\}$. Por el Teorema 1.33, W_i es arco conexo.

Afirmamos que $W_i \subset A \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k_i}$. Supongamos, por el contrario, que existe $z \in W_i - (A \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k_i})$. Por el Lema 1.8, existe un arco γ contenido en X, tal que $E(\gamma) = \{z, t_0\}$, para algún $t_0 \in W_i$, y $\gamma \cap (A \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k_i}) = \{t_0\}$. Si $t_0 \in A$, entonces $A \cap \gamma = \{t_0\}$, $t_0 \in \mathrm{Fr}_X(A) \cap B_d(x_i, \varepsilon) = \{x_i\}$, $t_0 = x_i$ y $\alpha_j \cap \gamma = \{t_0\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Esto contradice la elección de k_i y de los arcos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}$. Si, por el contrario, $t_0 \notin A$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, k_i\}$, tal que $t_0 \in \alpha_j - A$. De esta forma, $\alpha_j \cap \gamma = \{t_0\}$, con $t_0 \in W_i - A \subset X - \{q_j, t_0\} = X - E(\alpha_j)$. Esto implica que $\alpha_j \cup \gamma$ es un triodo simple con vértice t_0 y que $t_0 \in R(X) \cap T_i - \{x_i\}$. Esto contradice la elección de T_i. Como ambos casos conducen a una contradicción, concluimos que $W_i \subset A \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k_i} = A \cup (\bigcup \Lambda_i)$. Por tanto, $A \cup (\bigcup \Lambda_i)$ es una vecindad de x_i en X.

$(III.3)$ *Existe una gráfica finita D, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$.*

Como A es una gráfica finita y cada $\bigcup \Lambda_i$ es un k_i-odo simple que intersecta a A únicamente en x_i y es ajeno a cualquier otro $\bigcup \Lambda_j$ distinto, aplicando repetidas veces el Lema 1.40 obtenemos que el conjunto $D = A \cup (\bigcup\{\bigcup \Lambda_i : i \in \{1, \ldots, r\}\})$ es una gráfica finita. Además, se tiene que $A = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{Fr}_X(A) = \mathrm{int}_X(A) \cup \{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathrm{int}_X(A) \cup (\bigcup\{\mathrm{int}_X(A \cup (\bigcup \Lambda_i)) : i \in \{1, \ldots, r\}\} \subset D$. Así, $A \subset \mathrm{int}_X(D)$, como queríamos. Esto concluye la prueba de este teorema. □

El siguiente resultado es una doble caracterización de los puntos de $C_n(X)$ que tienen dimensión finita. La primera caracterización permite identificar a tales puntos como aquellos subcontinuos de X que tienen una vecindad que es una gráfica finita. La segunda caracterización, por su parte, los identifica como los subcontinuos de X que no intersectan al conjunto $\mathcal{P}(X)$ (véase la Definición 3.1). Ambas caracterizaciones (en especial la segunda), permiten “visualizar ”directamente estos puntos en el continuo X, además de que son vitales en las pruebas de resultados tan importantes como el Teorema 2.15 y los Lemas auxiliares 2.16 y 3.32.

Teorema 2.15. *Sean X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $F \in C_n(X)$. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

(a) $\dim_F(C_n(X))$ *es finita.*

(b) Existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $F \subset \mathrm{int}_X(D)$.

(c) $F \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea k el número de componentes de F. Obsérvese que $k \leq n$. Supongamos que $k = 1$; es decir, $F \in C(X)$. Como $C(X) \subset C_n(X)$, por el Teorema 1.68, se tiene que $\dim_F(C(X)) \leq \dim_F(C_n(X))$. Así, $\dim_F(C(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 2.14, existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $F \subset \mathrm{int}_X(D)$.

Ahora supongamos que $k \geq 2$. Sean $F_1, \ldots, F_k$ las k componentes de F. Obsérvese que $F_1, \ldots, F_k$ son subcontinuos de X ajenos por pares. Por el Lema 1.27, existen subcontinuos $Z_1, \ldots, Z_k$ de X ajenos entre sí, tales que $F_i \subset \mathrm{int}_X(Z_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Fijemos $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $F_i \in \langle \mathrm{int}_X(Z_i) \rangle_1 \subset C(Z_i)$, se cumple que $C(Z_i)$ es una vecindad de F_i en $C(X)$. Así, aplicando el Teorema 1.68, $\dim_{F_i}(C(X)) = \dim_{F_i}(C(Z_i))$. Por el Lema 1.69, $\dim_{F_i}(C(Z_i)) \leq \dim_{(F_1,\ldots,F_k)}(\prod_{i=1}^{k} C(Z_i))$. Por el Teorema 1.107, existe un homeomorfismo $\varphi : \prod_{i=1}^{k} C(Z_i) \to \langle Z_1, \ldots, Z_k \rangle_k$ con $(F_1, \ldots, F_k) \stackrel{\varphi}{\longmapsto} \bigcup_{i=1}^{k} F_i = F$. Luego,

$$\dim_{(F_1,\ldots,F_k)}(\prod_{i=1}^{k} C(Z_i)) = \dim_F(\langle Z_1, \ldots, Z_k \rangle_k).$$

Como $\langle Z_1, \ldots Z_k \rangle_k \subset C_n(X)$, aplicando el Teorema 1.68, se tiene que

$$\dim_F(\langle Z_1, \ldots Z_k \rangle_k) \leq \dim_F(C_n(X)).$$

Se sigue de las relaciones anteriores que $\dim_{F_i}(C(X)) \leq \dim_F(C_n(X))$ y, por tanto, que $\dim_{F_i}(C(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 2.14, existe una gráfica finita E_i contenida en X, tal que $F_i \subset \mathrm{int}_X(E_i)$. Como F_i es conexo y $F_i \subset \mathrm{int}_X(E_i) \cap \mathrm{int}_X(Z_i)$, existe una componente C_i de $\mathrm{int}_X(E_i) \cap \mathrm{int}_X(Z_i)$, tal que $F_i \subset C_i$. Como $\mathrm{int}_X(E_i) \cap \mathrm{int}_X(Z_i)$ es abierto en X y X es localmente conexo, C_i es abierto en X. Sea $D_i = \mathrm{cl}_X(C_i)$. Luego, D_i es conexo y cerrado en X y, como $E_i \cap Z_i$ es un cerrado de X que contiene a C_i, se satisface que $D_i \subset E_i \cap Z_i$. Por tanto, D_i es un subcontinuo de E_i y también de Z_i. De esto modo, aplicando el Teorema 1.46, obtenemos que D_i es una gráfica finita. Además, se cumple que $F_i \subset C_i \subset D_i$ y $F_i \subset \mathrm{int}_X(D_i) \subset D_i \subset Z_i$.

Como $D_1, \ldots, D_k$ es una colección de gráficas finitas contenidas en X y ajenas por pares, por el Lema 1.43, existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $\bigcup_{i=1}^{k} D_i \subset D$. Así, $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{int}_X(D_i) \subset D$. Por tanto, $F \subset \mathrm{int}_X(D)$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Como $F \in \langle \mathrm{int}_X(D) \rangle_n \subset C_n(D)$, se cumple que $C_n(D)$ es una vecindad de F en $C_n(X)$. Así, por el Teorema 1.68, $\dim_F(C_n(X)) =$

$\dim_F(C_n(D))$. Aplicando el Teorema 2.3, obtenemos que $\dim(C_n(D))$ es finita. De esta manera, tanto $\dim_F(C_n(D))$ como $\dim_F(C_n(X))$ son finitas.

$(b) \Rightarrow (c)$. Esta implicación es inmediata de la definición de $\mathcal{P}(X)$, porque cada punto de F tiene a D como vecindad.

$(c) \Rightarrow (b)$. Obsérvese que $F \subset \mathcal{G}(X)$. Luego, para cada $x \in F$ existe una gráfica finita D_x contenida en X, tal que $x \in \operatorname{int}_X(D_x)$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo E_x de X, tal que $x \in E_x \subset \operatorname{cl}_X(E_x) \subset \operatorname{int}_X(D_x)$. Como F es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_r \in F$, tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^r E_{x_i}$. Sea $E = \bigcup_{i=1}^r \operatorname{cl}_X(E_{x_i})$. Obsérvese que E posee k componentes, para alguna $k \leq r$. Sean $C_1, \ldots, C_k$ tales componentes y fijemos $i \in \{1, \ldots, k\}$. Obsérvese también que C_i es un continuo y que $C_i \subset E \subset \bigcup_{i=1}^r \operatorname{int}_X(D_{x_i})$. Luego, dado $x \in C_i$, existe $y(x) \in \{x_1, \ldots, x_r\}$, tal que $x \in \operatorname{int}_X(D_{y(x)})$. Por el Teorema 1.24, se satisface que $\operatorname{ord}(x, C_i) \leq \operatorname{ord}(x, X) = \operatorname{ord}(x, D_{y(x)})$. Así, $\operatorname{ord}(x, C_i) \leq \operatorname{ord}(x, D_{y(x)})$, para cada $x \in C_i$. Además, por el Teorema 1.45, cada $D_{y(x)}$ tiene orden finito en x y tiene orden menor o igual en todos salvo una cantidad finita de sus puntos. Como $\{y(x) : x \in X\} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ es un conjunto finito se desprende de lo anterior que C_i tiene orden finito en cada uno de sus puntos y orden menor o igual que dos en todos salvo una cantidad finita de sus puntos. Aplicando de nuevo el Teorema 1.45, tenemos que C_i es una gráfica finita. De esta manera, $C_1, \ldots, C_k$ es una colección de gráficas finitas ajenas por pares. Aplicando el Lema 1.43, obtenemos una gráfica finita D contenida en X, tal que $E = \bigcup_{i=1}^k C_i \subset D$. Así, $F \subset \bigcup_{i=1}^r E_{x_i} \subset E \subset D$ y, por tanto, $F \subset \operatorname{int}_X(D)$. □

Para probar el Teorema 2.18 se requiere del siguiente resultado, el cual es usado también al probar los Lemas 3.29 y 3.32.

Lema 2.16. *Sean X un continuo localmente conexo y $A \in C_n(X)$. Entonces, $\dim_A(C_n(X)) \geq 2n$ y, si $\dim_A(C_n(X)) = 2n$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y elementos $J_1, \ldots, J_k \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J_1), \ldots, \operatorname{int}_X(J_k) \rangle_n$, donde cada componente de A está contenida en algún $\operatorname{int}_X(J_i)$.*

Demostración. Si $\dim_A(C_n(X))$ es infinita, el resultado es inmediato. De forma similar, si X es una curva cerrada simple, entonces el único elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ es X, $A \in \langle \operatorname{int}_X(X) \rangle_n$, $R(X) = \emptyset$ y, por el Teorema 2.2, se cumple que $\dim_A(C_n(X)) = 2n$. De este modo, podemos suponer que $\dim_A(C_n(X))$ es finita y que X no es una curva cerrada simple.

Por el Teorema 2.15, existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \operatorname{int}_X(D)$. Así, $A \in \langle \operatorname{int}_X(D) \rangle_n \subset C_n(D)$ y, por el Teorema 1.68, $\dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(D))$.

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.2, se tiene que

$$\dim_A(C_n(D)) = 2n + \sum_{x\in R(D)\cap A} (\mathrm{ord}(x, D) - 2).$$

Como $\mathrm{ord}(x, D) \geq 3$; es decir, $\mathrm{ord}(x, D) - 2 \geq 1$, para cada $x \in R(D)$, se cumple que $\sum_{x\in R(D)\cap A}(\mathrm{ord}(x, D) - 2) \geq 0$ y, por ende, $\dim_A(C_n(D)) \geq 2n$. Esto muestra que $\dim_A(C_n(X)) \geq 2n$.

Supongamos que $\dim_A(C_n(D)) = 2n$. Luego, $\sum_{x\in R(D)\cap A}(\mathrm{ord}(x, D) - 2) = 0$ y $R(D) \cap A = \emptyset$. Sean $A_1, \ldots, A_k$ las componentes de A, con $A_i \neq A_j$ siempre que $i \neq j$. Obsérvese que $k \leq n$. Fijemos $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demostraremos que existe un arco libre J_i de D, tal que $A_i \subset \mathrm{int}_D(J_i)$. Sea $\mathcal{C}$ una colección finita de arcos, tal que $D = \bigcup\mathcal{C}$ y cualesquiera dos elementos de $\mathcal{C}$ o son ajenos o se intersectan sólo en uno o dos de sus puntos extremos. Hagamos $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$, con $C_i \neq C_j$ siempre que $i \neq j$.

Supongamos que A_i posee un elemento p, tal que p es elemento de al menos 3 elementos distintos de $\mathcal{C}$, digamos C_1, C_2 y C_3. Luego, p es punto extremo de estos tres arcos. De esta forma, si, para cada $l \in \{1, 2.3\}$, elegimos un subarco B_l de C_l que posee a p pero que no posee al otro punto extremo de C_l, se tiene que $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es un triodo simple con vértice p. Aplicando el Teorema 1.24, obtenemos que $3 = \mathrm{ord}(p, B_1 \cup B_2 \cup B_3) \leq \mathrm{ord}(p, X)$. Así, $p \in R(X) \cap A_i$. Esto es una contradicción. Por tanto, A_i no posee puntos de intersección de tres arcos distintos de $\mathcal{C}$.

Antes de continuar la demostración, haremos una breve acotación. Supongamos que existe un elemento $q \in C_l \cap C_m \cap A_i$, para algunos $l \neq m$, y que C_l intersecta a C_m sólo en q. Luego, q es punto extremo de C_l y de C_m, y no es elemento de algún otro elemento de $\mathcal{C}$. Además, $C_l \cup C_m$ es un arco cuyos puntos extremos son los puntos extremos de C_l y de C_m distintos de q. Por consiguiente, para cada $C \in \mathcal{C} - \{C_l, C_m\}$ se tiene que C y $C_l \cup C_m$ o son ajenos o se intersectan únicamente en uno o dos de sus puntos extremos. De este modo, podemos reemplazar a C_l y a C_m por $C_l \cup C_m$ en $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es finito, podemos hacer este reemplazo repetidas ocasiones, de tal forma que al final tengamos que si $t \neq s$ y $C_s \cap C_t$ intersecta a A_i, entonces $C_t \cap C_s$ posee dos elementos.

Continuando con la demostración, obsérvese que la unión sobre cualquier subconjunto de $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de D. Luego, si $A_i \subset D - \bigcup(\mathcal{C} - \{C_l\})$, para alguna $l \in \{1, \ldots, r\}$, entonces $C_l - E(C_l) \subset D - \bigcup(\mathcal{C} - \{C_l\}) \subset \mathrm{int}_D(C_l)$. Así, el conjunto $C_l - E(C_l) = \mathrm{int}_D(C_l) - E(C_l)$ es abierto en D; es decir, C_l es un arco libre de D, y $A_i \subset \mathrm{int}_D(C_l)$. Haciendo $J_i = C_l$, tendríamos el arco buscado. De esta forma podemos suponer que A_i

intersecta al menos a dos elementos de $\mathcal{C}$. Sea $q \in C_1 \cap C_2 \cap A$. Como A_i es conexo y los elementos de $\mathcal{C}$ son cerrados en D, existe un par de elementos de $\mathcal{C}$ que se intersectan dentro de A_i, digamos C_1 y C_2. Luego, por el párrafo anterior, C_1 y C_2 se intersectan justamente en sus dos puntos extremos y, en consecuencia, $C_1 \cup C_2$ es una curva cerrada simple. Sea p el punto extremo de C_1 y de C_2 que no es elemento de A_i. Obsérvese que cualquier elemento de $\mathcal{C} - \{C_1, C_2\}$ que intersecte a $C_1 \cup C_2$ tiene que hacerlo en p o q o en ambos. Como $q \in C_1 \cap C_2 \cap A$, se cumple, según vimos en un párrafo anterior, que q no es elemento de dicho arco. En este modo, $(C_1 \cup C_2) - \{p\} = D - \bigcup(\mathcal{C} - \{C_1, C_2\})$ y, por ende, $(C_1 \cup C_2) - \{p\}$ es abierto en D. Así, $\mathrm{Fr}_D(C_1 \cup C_2) \subset \{p\}$. Como $p \notin A_i$ y A_i es conexo e intersecta a $C_1 \cup C_2$, tenemos que $A_i \subset (C_1 \cup C_2) - \{p\}$. Sea J_i un arco contenido en $(C_1 \cup C_2) - \{p\}$, tal que $A_i \subset J_i - E(J_i)$. Luego, $J_i - E(J_i)$ es abierto en $(C_1 \cup C_2) - \{p\}$ y en D. Por tanto, $J_i - E(J_i)$ es un arco libre de D, tal que $A_i \subset \mathrm{int}_D(J_i)$.

Como $A_i \subset \mathrm{int}_X(D) \cap \mathrm{int}_D(J_i)$ y A_i es conexo, existe una componente K_i de $\mathrm{int}_X(D) \cap \mathrm{int}_D(J_i)$, tal que $A_i \subset K_i$. Asimismo, K_i es un subconjunto conexo del arco J_i, así que existe un subarco L_i, tal que J_i o es igual a L_i o a L_i menos uno o dos de sus puntos extremos, es decir, tal que $L_i - E(L_i) \subset K_i \subset L_i$. Como $\mathrm{int}_X(D) \cap \mathrm{int}_D(J_i)$ es un subconjunto abierto de X (pues es un subconjunto abierto de D contenido en $\mathrm{int}_X(D)$), aplicando el Teorema 1.13 obtenemos que K_i es un subconjunto abierto de X. Por tanto, $A_i \subset \mathrm{int}_X(L_i) \subset \mathrm{int}_X(D)$. Además, por el Lema 2.5 (2), se cumple que L_i es un arco libre de D. Luego, $L_i - E(L_i)$ es abierto en D. Así, y como $L_i - E(L_i)$ está contenido en $\mathrm{int}_X(D)$, se tiene que $L_i - E(L_i)$ es abierto en X; es decir, L_i es un arco libre de X. Aplicando el Lema 2.12, podemos obtener un elemento $J_i \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $L_i \subset J_i$. Así, $A_i \subset \mathrm{int}_X(L_i) \subset \mathrm{int}_X(J_i)$. Como esto lo podemos hacer para cualquier $i \in \{1, \ldots, k\}$, concluimos que $A \in \langle \mathrm{int}_X(J_1), \ldots, \mathrm{int}_X(J_k) \rangle_n$ y la componente A_i de A está contenida en $\mathrm{int}_X(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Esto concluye esta prueba. □

El resultado anterior anticipa la importancia de los vietóricos (en $C_n(X)$) de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ entre los subconjuntos del conjunto de puntos de $C_n(X)$ que poseen dimensión igual a $2n$ (que, por el Lema 2.16 y el Teorema 1.107, son precisamente los puntos que poseen una vecindad que es una $2n$-celda). El Teorema 2.18 se refiere precisamente a la relación entre estos conjuntos para el caso $n = 2$. Para facilitar el lenguaje al aludir al último de dichos conjuntos, a continuación se le asigna una notación.

Definición 2.17. Dado un continuo localmente conexo X y n un número natural, denotamos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_n(X) = \{A \in C_n(X) \ &: A \text{ tiene una vecindad en } C_n(X),\\ &\quad \text{tal que } A \text{ es una } 2n\text{-celda}\}.\end{aligned}$$

Como es usual, denotaremos $\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}_1(X)$ y $\mathfrak{P}^\partial(X) = \mathfrak{P}_1^\partial(X)$.

Ahora se prueba el siguiente teorema, el cual es un paso crucial para la demostración del Teorema 3.42 (una de las conclusiones presentadas en este estudio). En palabras llanas, dados dos continuos localmente conexos X y Y, tales que existe un homeomorfismo $h : C_2(X) \to C_2(Y)$, este resultado permite establecer una relación biunívoca entre las parejas de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ y las de $\mathfrak{A}_S(Y)$ por medio de h. Aunque esto no permite establecer un homeomorfismo entre X y Y, sí es un punto de partida para lograrlo.

Teorema 2.18. *Sea X un continuo localmente conexo que no es una curva cerrada simple. Dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, sea $\mathfrak{U}_{J,K} = \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_2$. Entonces, $\{\mathfrak{U}_{J,K} : J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es la colección de componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$ y si $\{J, K\} \neq \{L, M\}$, entonces $\mathfrak{U}_{J,K} \cap \mathfrak{U}_{L,M} = \emptyset$.*

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{P}_2(X)$. Sea $\mathfrak{M}$ una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por el Ejemplo 1.72, $\dim_A(\mathfrak{M}) = 4$. Por el Teorema 1.68, se tiene que $\dim_A(C_2(X)) = \dim_A(\mathfrak{M}) = 4$. Luego, por el Lema 2.16, existen $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que $A \in \mathfrak{U}_{J,K}$. De esta manera, $\mathfrak{P}_2(X) \subset \bigcup\{\mathfrak{U}_{J,K} : J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Ahora, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, demostremos que $\mathfrak{U}_{J,K}$ es un subconjunto conexo de $\mathfrak{P}_2(X)$. Por la Observación 3.28, tenemos que cualquiera de los conjuntos $\mathrm{int}_X(J)$ y $\mathrm{int}_X(K)$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1]$ o al intervalo $(0, 1)$. Si $J = K$, entonces $\mathfrak{U}_{J,K} = C_2(\mathrm{int}_X(J))$. Aplicando el Corolario 1.116, obtenemos que $C_2(\mathrm{int}_X(J))$ es una 4-variedad conexa. Si $J \neq K$, entonces, por (2) del Lema 2.9, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Por el Corolario 1.112, se satisface que $\mathfrak{U}_{J,K}$ es una 4-variedad conexa. De cualquier modo, $\mathfrak{U}_{J,K}$ es conexo y, dado $A \in \mathfrak{U}_{J,K}$, existe una 4-celda $\mathfrak{N}$ contenida en $\mathfrak{U}_{J,K}$, tal que $A \in \mathrm{int}_{\mathfrak{U}_{J,K}}(\mathfrak{N})$. Como $\mathfrak{U}_{J,K}$ es abierto en $C_2(X)$, se cumple que $\mathrm{int}_{\mathfrak{U}_{J,K}}(\mathfrak{M})$ es abierto en $C_2(X)$. Así, $\mathfrak{N}$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ y $A \in \mathfrak{P}_2(X)$. Por tanto, $\mathfrak{U}_{J,K} \subset \mathfrak{P}_2(X)$ y $\mathfrak{U}_{J,K}$ es conexo.

Hasta aquí hemos mostrado que $\mathfrak{P}_2(X) = \bigcup\{\mathfrak{U}_{J,K} : J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ y que cada $\mathfrak{U}_{J,K}$ es conexo. Para concluir la prueba de la primera afirmación del teorema resta demostrar que cada $\mathfrak{U}_{J,K}$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(X)$. Con tal motivo mostraremos la segunda afirmación del teorema. Para esto, sean $J, K, L, M \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que $\{J, K\} \neq \{L, M\}$. Luego, $\{J, K\} \not\subseteq \{L, M\}$ o

$\{L, M\} \nsubseteq \{K, J\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que ocurre lo primero y que $J \in \{J, K\} - \{L, M\}$, esto es, que $J \neq L$ y $J \neq M$. Por el Lema 2.9 (2), se tiene que $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(L) = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$. Sea $B \in \mathfrak{U}_{J,K}$. Como $B \cap \mathrm{int}_X(J) \neq \emptyset$, se satisface que $B \nsubseteq \mathrm{int}_X(L) \cup \mathrm{int}_X(L)$. De esta forma, $B \notin \mathfrak{U}_{L,M}$. Por tanto, $\mathfrak{U}_{J,K} \cap \mathfrak{U}_{L,M} = \emptyset$. Esto prueba la segunda afirmación del teorema.

Volviendo a la demostración de la primera afirmación, sean $L, M \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{C}$ la componente de $\mathfrak{P}_2(X)$, tal que $\mathfrak{U}_{L,M} \subset \mathfrak{C}$. Como $\{\mathfrak{U}_{J,K} : J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X ajenos por pares, los conjuntos $\mathfrak{U}_{L,M}$ y $\bigcup\{\mathfrak{U}_{J,K} : J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{U}_{J,K} \neq \mathfrak{U}_{L,M}\}$ son abiertos en X y ajenos. Como $\mathfrak{P}_2(X)$ es la unión de los dos conjuntos anteriores, $\mathfrak{C}$ intersecta al primero de ellos y $\mathfrak{C}$ es un subconjunto conexo de $\mathfrak{P}_2(X)$, se cumple que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{U}_{L,M}$. Así, $\mathfrak{C} = \mathfrak{U}_{L,M}$. Esto concluye la prueba de la primera afirmación y la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 3

Continuos Enrejados

En este último capítulo se trata una clase de continuos, la clase de los continuos enrejados, que generaliza algunas clases de continuos localmente conexos a las que se ha hecho alusión en los capítulos previos, a saber la clase de las gráficas finitas y las familias $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{LD}$ (Teorema 3.10). No menos resaltable es el estudio de la clase de los continuos casi enrejados, la cual contiene a los continuos enrejados.

La primera sección trata los aspectos más generales de estas dos clases, demostrando algunas caracterizaciones de ellas que serán de gran importancia en la siguiente sección. Por otro lado, la segunda sección presenta las conclusiones principales de este estudio, mostrando, entre otros resultados notables, que los continuos enrejados poseen hiperespacio único $C_n(X)$. Asimismo, se muestra en tal sección que los continuos localmente conexos que no son casi enrejados no poseen hiperespacio único $C_n(X)$, siendo n un número natural arbitrario.

3.1. Propiedades fundamentales

La primera parte de este capítulo está dedicada a las propiedades más básicas de los continuos que son el objetivo principal de este trabajo (junto con sus hiperespacios). Para definir dichos continuos se utiliza la siguiente notación.

Definición 3.1. Dados un continuo X y un número natural n denotamos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X) &= \{p \in X \ : \ p \text{ tiene una vecindad } M \text{ en } X, \text{ tal que} \\ &\qquad\qquad\qquad M \text{ es una gráfica finita}\}, \\ \mathcal{P}(X) &= X - \mathcal{G}(X), \\ \mathcal{FA}(X) &= \bigcup\{\operatorname{int}_X(J) \ : \ J \text{ es un arco libre de } X\}.\end{aligned}$$

Ahora se definen las clases de continuos que son el foco de atención de este capítulo y el objetivo final de este análisis.

Definición 3.2. Un continuo X es **casi enrejado** si $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$, tal que, para cada $U \in \mathcal{B}$, se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

En las Figuras 3.1 y 3.2, se muestran algunos ejemplos de continuos enrejados. Como se ve en el Teorema 3.10, las gráficas finitas y los elementos de las familias $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{LD}$ son continuos enrejados. Es por esta razón que mostramos ejemplos que no son dendritas locales. Como puede observarse en la segunda de estas figuras, a diferencia de las dendritas locales, los continuos enrejados no están restringidos a continuos de dimensión 1.

El primer resultado acerca de los continuos que se acaban de definir es el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sean X un continuo y U un subconjunto de X. Si X es casi enrejado, entonces* $\operatorname{int}_X(U) \subset \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$.

Demostración. Supongamos que $x \in \operatorname{int}_X(U)$. Sea V un subconjunto abierto de X, tal que $x \in V$. Luego, $\operatorname{int}_X(U) \cap V$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Además, como X es casi enrejado, $\operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$. De esta manera $\operatorname{int}_X(U) \cap V \not\subseteq \mathcal{P}(X)$; es decir, $V \cap (\operatorname{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) = (V \cap \operatorname{int}_X(U)) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Así, $V \cap (U - \mathcal{P}(X)) \supset V \cap (\operatorname{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$. □

Una formulación equivalente de continuo casi enrejado puede obtenerse del siguiente resultado.

Lema 3.4. *Si X es un continuo, entonces* $\operatorname{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. *Por lo tanto, un continuo X es casi enrejado si, y sólo si,* $\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ *es denso en X.*

Demostración. Sea X un continuo con métrica d. Como $\mathcal{FA}(X) \subset \mathcal{G}(X)$, basta con mostrar que $\operatorname{cl}_X(\mathcal{G}(X)) \subset \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$.

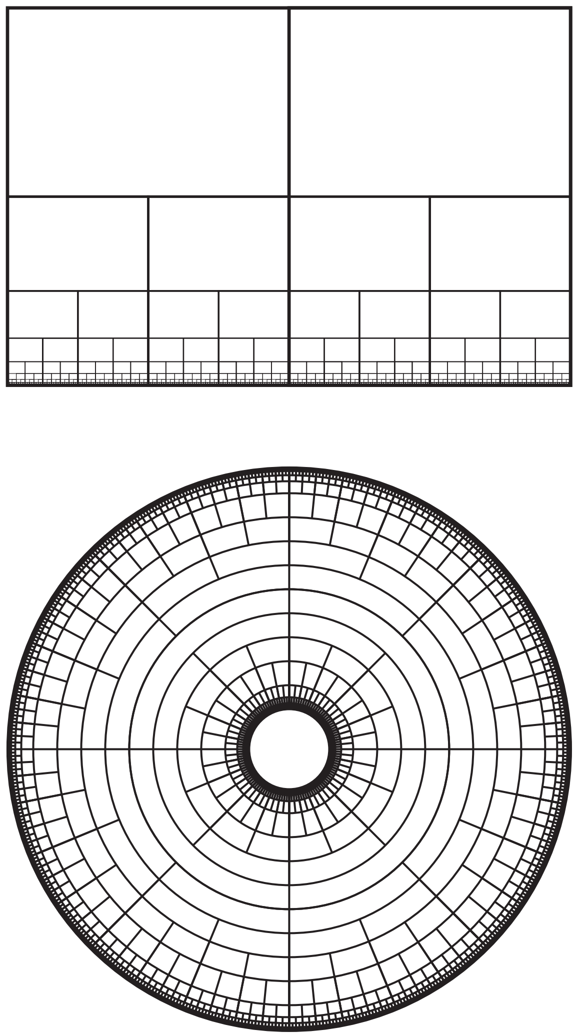


Figura 3.1: Ejemplos de continuos enrejados que no son dendritas locales

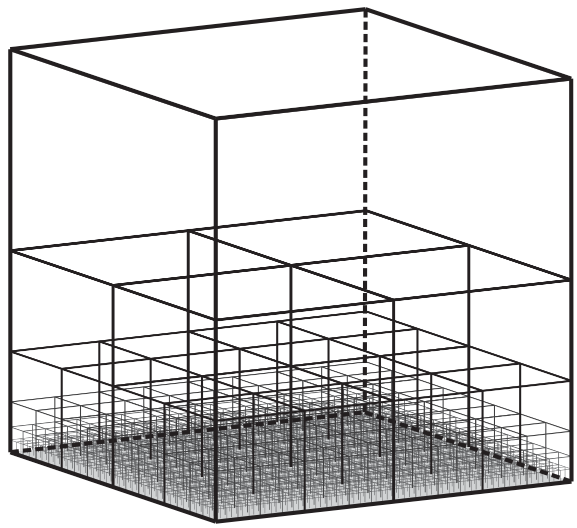


Figura 3.2: Un ejemplo de continuo enrejado de dimensión 2

Supongamos que $x \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X))$. Luego, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{G}(X)$, tal que $\lim x_n = x$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \in \mathcal{G}(X)$, existe una gráfica finita G contenida en X, tal que $x_n \in \mathrm{int}_X(G)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y arcos $A_1, \ldots, A_k$ en G, tales que $\bigcup_{k=1}^{n} A_i = G$ y $A_i \cap A_j \subset E(A_i) \cap E(A_j)$ si $i \neq j$. Sea $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$, tal que $x_n \in A_{j_0}$.

Obsérvese que $V = \mathrm{int}_X(G) \cap B_d(x_n, \frac{1}{n})$ es una vecindad de x_n en X. Aplicando el Lema 1.7 obtenemos un subarco B de A_{j_0}, tal que $x \in B \subset V$.

Obsérvese que $B - E(B) \subset A_{j_0} - E(A_{j_0}) \subset G - \bigcup_{i\neq j_0} A_i$. Luego, $G - (B - E(B)) = \bigcup_{i\neq j_0} A_i \cup (A_{j_0} - (B - E(B)))$. Además, $A_{j_0} - (B - E(B))$ es un subconjunto cerrado de A_{j_0} y, por tanto, de G. Así, $G - (B - E(B))$ es cerrado en G; es decir, $B - E(B)$ es abierto en G. Como además $B - E(B) \subset \mathrm{int}_X(G) \subset G$, se tiene que $B - E(B)$ es un subconjunto abierto de X. De esta manera, B es un arco libre de X.

Sea $y_n \in B - E(B) \subset \mathrm{int}_X(B) \subset \mathcal{FA}(X)$. Obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Así, $\lim y_n = x$, con cada y_n elemento de $\mathcal{FA}(X)$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Esto concluye la prueba del lema. $\square$

Se puede observar que en la definición de continuo enrejado no se ha requerido la propiedad de conexidad local que tanto hemos mencionado en los capítulos anteriores. Como se ha comentado con anterioridad, la conexidad local es una característica importante para los resultados más destacables de este trabajo. El siguiente resultado afirma que los continuos enrejados poseen esta propiedad.

Lema 3.5. *Si X es un continuo enrejado, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo enrejado. Tomemos $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X, tal que $x \in U$. Sean W un subconjunto abierto de X, tal que $x \in W \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset U$ y $\mathcal{B}$ una base de vecindades de X, tal que, para cada $T \in \mathcal{B}$, se tiene que $T - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Sea $V \in \mathcal{B}$, tal que $x \in \mathrm{int}_X(V) \subset V \subset W$. Aplicando el Lema 3.3, tenemos que $\mathrm{int}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset U$. Así, $x \in \mathrm{int}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset U$ y, como $V \in \mathcal{B}$, se tiene que $V - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Luego, por el Teorema 1.1, $\mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$ es conexo. Por lo tanto, X es conexo en pequeño. Aplicando el Teorema 1.29, concluimos que X es localmente conexo. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización de los continuos enrejados, similar a su definición, pero con una condición algo más fuerte y que puede facilitar la identificación (por descarte) de estos continuos.

Lema 3.6. *Sea X un continuo. Entonces, X es enrejado si, y sólo si, X es casi enrejado y X tiene una base $\mathcal{D}$ formada de subconjuntos abiertos y conexos de X, tales que, para cada $U \in \mathcal{D}$, se tiene que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Demostración. La suficiencia se sigue inmediatamente de la definición de continuo enrejado. Demostremos que se cumple la necesidad.

Supongamos que X es enrejado. Luego, por definición, X es casi enrejado. Tomemos $p \in X$ y W un subconjunto abierto de X, tal que $p \in W$. Sean $\mathcal{B}$ una base de X, tal que, para cada $T \in \mathcal{B}$, se tiene que $T - \mathcal{P}(X)$ es conexo y $U \in \mathcal{B}$, tal que $p \in \mathrm{int}_X(U) \subset U \subset W$.

Obsérvese que, por el Lema 3.5, X es localmente conexo. Luego, existe un subconjunto abierto y conexo Z de X, tal que $p \in Z \subset \mathrm{int}_X(U)$. Como $\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto cerrado de X, se tiene que $W - \mathcal{P}(X)$ es un subconjunto abierto de X. Así, y como $U - \mathcal{P}(X) \subset W - \mathcal{P}(X)$, para cada $x \in U - \mathcal{P}(X)$ existe un subconjunto abierto y conexo V_x de X, tal que $x \in V_x \subset W - \mathcal{P}(X)$.

Sean $V_0 = \bigcup\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$ y $V = Z \cup V_0$. Obsérvese que $U - \mathcal{P}(X) \subset V_0 \subset W - \mathcal{P}(X)$, V es abierto en X y $p \in V \subset W$. Luego, $V_0 \subset V - \mathcal{P}(X)$. Además, $V - \mathcal{P}(X) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup (V_0 - \mathcal{P}(X)) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup V_0 \subset (U - \mathcal{P}(X)) \cup V_0 \subset V_0$. Así, $V_0 = V - \mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, obsérvese que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo; para cada $x \in X$, se tiene que $x \in (U - \mathcal{P}(X)) \cap V_x$, y V_x es conexo. Luego, por el Teorema 1.2, $V_0 = (U - \mathcal{P}(X)) \cup V_0$ es conexo; es decir, $V - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Como

$V - \mathcal{P}(X) \subset V$ y, por el Lema 3.3, $V \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$, concluimos, por el Teorema 1.1, que V es conexo. Con esto terminamos la prueba del lema. $\square$

El siguiente resultado es una caracterización, dentro de los continuos localmente conexos, de la propiedad de ser enrejado que relaciona a ésta con una propiedad de algunos de sus hiperespacios. Para enunciarlo (y también para formular algunos resultados posteriores), resulta conveniente utilizar la siguiente notación.

Definición 3.7. Dados un espacio métrico X y $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$\mathfrak{F}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A(C_n(X)) \text{ es finita}\}.$$

Teorema 3.8. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es enrejado.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

(c) Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

Demostración. Sea d una métrica para X.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que X es enrejado. Sean n un número natural, $A \in C_n(X)$ y $\varepsilon > 0$. Sean $A_1, \ldots, A_k$ las componentes de A. Como $A_1, \ldots, A_k$ son subconjuntos compactos de X ajenos por pares, podemos suponer que $N_d(A_1, \varepsilon), \ldots, N_d(A_k, \varepsilon)$ son ajenos por pares. Asimismo, Por el Lema 3.6, existe una base de vecindades $\mathcal{D}$ de X, tal que $\mathcal{D}$ está formada por subconjuntos abiertos y conexos de X y, para cada $T \in \mathcal{D}$, se tiene que $T - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Fijemos $a \in A$. Sea $U_a \in \mathcal{D}$, tal que $a \in U_a \subset B_d(a, \varepsilon)$. Obsérvese que el conjunto $V_a = U_a - \mathcal{P}(X)$ es un subconjunto abierto y conexo de X. Además, como X es casi enrejado, $\mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$, así que $U_a \not\subset \mathcal{P}(X)$; es decir, $V_a \neq \emptyset$. Tomemos un punto $b(a) \in V_a$. Dado $i \in \{1, \ldots, k\}$, por la compacidad de A_i, existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_m \in A_1$, tales que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_d(a_i, \varepsilon) \subset N_d(A_i, \varepsilon)$.

Sean $U = \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j}$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{a_j}$. Obsérvese que U y V son subconjuntos abiertos de X. Además, como $U = A \cup (\bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j})$, A_i es conexo, U_{a_j} es conexo y, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $a_j \in A_i \cap U_{a_j}$, se tiene, por el Teorema 1.2 que U es conexo.

Probemos ahora que V es conexo. Supongamos, por el contrario, que existen V_1 y V_2 subconjuntos abiertos y no vacíos de V, tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

y $V = V_1 \cup V_2$. Dado $j \in \{1, \ldots, m\}$, como V_{a_j} es conexo, tenemos $V_{a_j} \subset V_1$ o $V_{a_j} \subset V_2$. Así, y como $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$, podemos suponer que existe $r \in \{1, \ldots, m-1\}$, tal que $\bigcup_{j=1}^{r} U_{a_j} \subset V_1$ y $\bigcup_{j=r+1}^{m} U_{a_j} \subset V_1$. Luego, $(\bigcup_{j=1}^{r} U_{a_j}) \cap (\bigcup_{j=r+1}^{m} U_{a_j}) - \mathcal{P}(X) = (\bigcup_{j=1}^{r}(U_{a_j} - \mathcal{P}(X))) \cap (\bigcup_{j=r+1}^{m}(U_{a_j} - \mathcal{P}(X))) \subset V_1 \cap V_j = \emptyset$; es decir, $(\bigcup_{j=1}^{r} U_{a_j}) \cap (\bigcup_{j=r+1}^{m} U_{a_j}) \subset \mathcal{P}(X)$. De esta forma, $(\bigcup_{j=1}^{r} U_{a_j}) \cap (\bigcup_{j=r+1}^{m} U_{a_j}) \subset \mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$. Esto contradice la conexidad de U. Por tanto, V es conexo.

Aplicando el Teorema 1.33 obtenemos que V es arco conexo. De esta manera, por el Lema 1.42, existe un árbol T_i contenido en V, tal que $\{b(a_1), \ldots, b(a_m)\} \subset T_i$. Como $b(a_j) \in V_{a_j} \subset U_{a_j} \subset B_d(a_j, \varepsilon)$, tenemos que $B_d(a_j, \varepsilon) \subset B_d(b(a_j), 2\varepsilon)$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_d(a_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_d(b(a_j), 2\varepsilon) \subset N_d(T_i, 2\varepsilon)$. Por otro lado, $T_i \subset V \subset U \subset N_d(A_i, \varepsilon)$. Así, $H_d(A_i, T_i) < 2\varepsilon$. También $T_i \subset V - \mathcal{P}(X)$, así que $T_i \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Obsérvese que $H_{H_d}(\{A_i : i \leq m\}, \{T_i : i \leq m\}) < 2\varepsilon$. Sea $T = \bigcup_{i=1}^{m} T_i \in C_n(X)$. Entonces, $T \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ y, por el Teorema 1.108, $H_d(A, T) < 2\varepsilon$. Además, aplicando el Teorema 2.15, tenemos que $\dim_T(C_n(X))$ es finita, así que $T \in \mathfrak{F}_n(X)$. Así, se concluye que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Es inmediato.

$(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

Mostremos primero que $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Sean U un subconjunto abierto de X y $p \in U$. Obsérvese que $\langle U \rangle_n$ es una vecindad de $\{p\} \in C_n(X)$. Luego, por hipótesis, existe $A \in \mathfrak{F}_n(X)$, tal que $A \in \langle U \rangle_n$. Como $\dim_A(C_n(X))$ es finita, aplicando el Teorema 2.15, obtenemos una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$. Así, $\emptyset \neq A \subset U \cap \mathrm{int}_X(D) \subset U \cap \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(X)$ es denso en X.

Ahora supongamos que X no es enrejado. Luego, existe $p \in X$ y un subconjunto abierto W de X, tal que $p \in W$ y, para cada vecindad U de p en X, se tiene que $U - \mathcal{P}(X)$ es disconexo. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X, tal que $p \in V \subset W$. Luego, $V - \mathcal{P}(X)$ es disconexo. Sean S y T subconjuntos abiertos y no vacíos de V, tales que $S \cup T = V$ y $S \cap T = \emptyset$. Obsérvese que S y T son abiertos en X.

Tomemos $x \in T$ y $p_1, \ldots, p_n$ puntos en S distintos por pares. Como V es arco conexo, por el Lema 1.8, existe un arco α de x a un punto de $\{p_1, \ldots, p_n\}$, tal que $\alpha \cap \{p_1, \ldots, p_n\}$ consta de un solo punto. Podemos suponer que tal punto es p_n. Sea $A = \{p_1, \ldots, p_{n-1}\} \cup \alpha \in C_n(X)$. Como $\{p_1\}, \ldots, \{p_{n-1}\}, \alpha$ son subconjuntos compactos de X ajenos por pares, existe $\varepsilon > 0$, tal que los conjuntos $B_1 = B_d(p_1, \varepsilon), \ldots, B_{n-1} = B_d(p_{n-1}, \varepsilon), B_n = N(\varepsilon, \alpha)$ son ajenos por pares. Como, además, $x \in T$, $\alpha \subset V$, $p_1, \ldots, p_n \in S$,

α es compacto y S, T, V son abiertos en X, podemos suponer que $B_d(x, \varepsilon) \subset T$, $B_d(p_n, \varepsilon) \subset S$, $B_n \subset V$ y $B_i \subset S$, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Como $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en X, existe $B \in \mathfrak{F}_n(X)$, tal que $H_d(A, B) < \varepsilon$. Por el Lema 1.100, B intersecta a B_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, $B \subset N_d(A, \varepsilon) = N_d(\{p_1, \ldots, p_{n-1}\} \cup \alpha, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y los conjuntos $B_1, \ldots, B_n$ son abiertos en X y ajenos entre sí. De esta manera, las componentes de B son $C_1 = B \cap B_1, \ldots, C_n = B \cap B_n$.

Obsérvese que, también por el Lema 1.100, $C_n \cap S = B \cap N_d(\alpha, \varepsilon) \cap S \supset B \cap B_d(p_n, \varepsilon) \cap S = B \cap B_d(p_n, \varepsilon) \neq \emptyset$ y $C_n \cap T = B \cap N_d(\alpha, \varepsilon) \cap T \supset B \cap B_d(x, \varepsilon) \cap T = B \cap B_d(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Así, y porque C_n es conexo, $C_n \not\subseteq S \cup T = V - \mathcal{P}(X)$. Como $C_n \subset B_n \subset V$, tenemos que $C_n \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. De esta manera $B \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 2.15, se tiene $B \notin \mathfrak{F}_n(X)$. Esto contradice la elección de B. Por lo tanto, X es enrejado. □

Para relacionar la clase de los continuos enrejados con clases más conocidas, se enuncian los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.9 ([1], Teorema 3.19)**.** *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces, X pertenece a $\mathfrak{LD}$ si, y sólo si, $\mathfrak{F}(X)$ es denso en $C(X)$.*

Teorema 3.10. *La clase de los continuos enrejados contiene a las siguientes clases:*

(a) las gráficas finitas,

(b) la familia $\mathfrak{D}$ y

(c) la familia $\mathfrak{LD}$.

Demostración. Obsérvese que, por el Lema 1.52, tanto la clase de las gráficas finitas como la clase $\mathfrak{D}$ están contenidas en la clase $\mathfrak{LD}$. Así, basta demostrar que los continuos de la familia $\mathfrak{LD}$ son continuos enrejados. Sea X un continuo de $\mathfrak{LD}$. Por el Teorema 1.53, se cumple que X es localmente conexo. Aplicando el Teorema 3.9, tenemos que $\mathfrak{F}(X)$ es denso en $C(X)$. Luego, por el Teorema 3.8, se tiene que X es enrejado. Con esto concluimos la prueba. □

3.2. Unicidad de Hiperespacios

Esta es la última sección de este documento y en ella se exponen los resultados principales de este último (a saber: los Teoremas 3.19, 3.21, 3.30, 3.35, 3.36, 3.42, 3.43 y 3.44). Como su nombre lo indica, este apartado se aboca a presentar y demostrar algunas condiciones necesarias y algunas otras suficientes para que un continuo localmente conexo tenga o no hiperespacio único $C_n(X)$. Incidentalmente, se exponen algunos teoremas notables como el Teorema de Anderson (Teorema 3.13), sobre extensión de homeomorfismos entre Z-conjuntos de cubos de Hilbert; o el Teorema 3.12, que habla de una condición para que el conjunto $C_n(X,R)$ sea un cubo de Hilbert.

3.2.1. Continuos que no son casi enrejados

El primer apartado de este capítulo aborda algunas propiedades de los hiperespacios de continuos localmente conexos que no son casi enrejados. En particular, se detalla la demostración de que este tipo de continuos no tiene hiperespacio único $C_n(X)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Quizá no tan fácil de enunciar, pero asimismo sobresaliente, es el Teorema 3.12, el cual establece una condición suficiente para que el conjunto $C_n(X,R)$ sea un cubo de Hilbert. Para demostrarlo se requiere el siguiente lema. En la demostración de este último, se hará uso de la notación B_d^X para especificar que los conjuntos B_d se toman sobre el espacio X. En otras palabras, dados un subespacio X de algún espacio con métrica d, un punto $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos $B_d^X(p,\varepsilon) = B_d(p,\varepsilon) \cap X$.

Lema 3.11. *Sean X un continuo localmente conexo, R un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$ y $K \in C(X)$, tal que* $\operatorname{int}_X(K) \cap R \neq \emptyset$. *Entonces, $C_n^K(X)$ es un Z-conjunto de $C_n(X,R)$.*

Demostración. Sea d una métrica para d. Obsérvese primero que, si $A \in C_n^K(X)$, entonces $R \cap A \supset R \cap K \supset R \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$; es decir, $A \in C_n(X,R)$. Como $C_n^K(X)$ es compacto y $C_n(X,R)$ es un espacio métrico, lo anterior implica que $C_n^K(X)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X,R)$.

Fijemos $p \in \operatorname{int}_X(K) \cap R$ y sea $\varepsilon > 0$, tal que $B_d^X(p,\varepsilon) \subsetneq \operatorname{int}_X(K)$. Por el Teorema 1.32, existen $m \in \mathbb{N}$ y subcontinuos localmente conexos $X_1, \ldots, X_m$ de X, tales que $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ y $\text{diám}(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sean $G = \{i \in \{1, \ldots, m\} : p \in X_i\}$ y $S = \bigcup_{i \in G} X_i$. Como $p \in \bigcap_{i \in G} X_i$, se tiene que, para cada $x \in S$, $d(p,x) < \frac{\varepsilon}{4}$; es decir, $S \subset B_d^X(p, \frac{\varepsilon}{4}) \subsetneq X$.

Sean $F = \{i \in \{1, \ldots, m\} : p \notin X_i$ y $X_i \cap S \neq \emptyset\}$ y $H = \{i \in \{1, \ldots, m\} : X_i \cap S = \emptyset\}$. Obsérvese que S y $\bigcup_{i \in H} X_i$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X y $F \cup G \cup H = \{1, \ldots, m\}$. Si $F = \emptyset$, como $S \subsetneq X$, se tiene que $\bigcup_{i \in H} X_i \neq \emptyset$ y $X = S \cup (\bigcup_{i \in H} X_i)$, lo cual contradice la conexidad de X. Así, $F \neq \emptyset$.

Para cada $i \in F$, fijemos $p_i \in X_i \cap S$. Aplicando el Teorema 1.30, tenemos que S es un continuo localmente conexo y, por el Teorema 1.33, S es arco conexo. Luego, por el Lema 1.42, existe un árbol T contenido en S, tal que $\{p\} \cup \{p_i \ : \ i \in F\} \subset T$.

Sea $Y = T \cup (\bigcup_{i \in F} X_i)$. Como para cada $i \in F$, $p_i \in T \cap X_i$ se tiene, por el Teorema 1.30, que Y es un continuo localmente conexo. Obsérvese que, para cada $i \in F$ y $x \in X_i$ se cumple $d(x,p) \leq d(x,p_i) + d(p,p_i) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$; es decir, $\bigcup_{i \in F} X_i \subset B_d^X(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, $Y \subset B_d^X(p, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathrm{int}_X(K)$.

Sea $Z = Y \cap R$. Obsérvese que $p \in Z$ y, por el Corolario 1.126 y el Teorema 1.76, $C(Y)$ y $C(Y, Z)$ son extensores absolutos.

Consideremos las funciones $\varphi : X \to C(X)$, dada por $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \{x\}$; $\alpha = \varphi|_Y : Y \to C(Y)$ y $\beta = \varphi|_Z : Z \to C(Y, Z)$. Por el Teorema 1.103, φ es continua y, por tanto, α y β son continuas. Como Z es un subconjunto cerrado de $(S \cup Y) \cap R$, podemos extender β a una función continua $\overline{\beta} : (S \cup Y) \cap R \to C(Y, Z)$. Obsérvese que $\overline{\beta}|_Z = \beta|_Z = \alpha|_Z$, $(S \cup Y) \cap R$ y Y son subconjuntos cerrados de $((S \cup Y) \cap R) \cup Y = (S \cap R) \cup Y$ y $((S \cup Y) \cap R) \cap Y = Y \cap R = Z$. De esta manera, por el Lema 1.10, la función $\alpha \cup \overline{\beta} : (S \cap R) \cup Y \to C(Y, Z)$ dada por

$$x \overset{\alpha \cup \overline{\beta}}{\longmapsto} \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in Y, \\ \overline{\beta}(x) & \text{si } x \in (S \cup Y) \cap R \end{cases}$$

es continua. Como $(S \cap R) \cup Y)$ es un subconjunto cerrado de $S \cup Y$, podemos extender $\alpha \cup \overline{\beta}$ a una función continua $\overline{\alpha} : S \cup Y \to C(Y)$.

Consideremos ahora la función $\gamma : X \to C(X)$ dada por

$$x \overset{\gamma}{\mapsto} \begin{cases} \overline{\alpha}(x) & \text{si } x \in S \cup Y, \\ \varphi(x) & \text{si } x \in X - (S \cup Y). \end{cases}$$

Como $X - (S \cup Y) = X - \bigcup_{i \in G \cup F} X_i \subset \bigcup_{i \in H} X_i$, se tiene que $\mathrm{cl}_X(X - (S \cup Y)) \subset \bigcup_{i \in H} X_i$. Luego, si $A = \mathrm{cl}_X(X - (S \cup Y)) \cap (S \cup Y)$, entonces $A \subset (S \cup Y) \cap (\bigcup_{i \in H} X_i) = (Y - S) \cap (\bigcup_{i \in H} X_i) \subset Y$. Así, $\gamma|_A = \overline{\alpha}|_A = \alpha|_A = \varphi|_A$. Como $\mathrm{cl}_X(X - (S \cup Y)) = (X - (S \cup Y)) \cup A$, esto último implica que $\gamma|_{\mathrm{cl}_X(X - (S \cup Y))} = \varphi|_{\mathrm{cl}_X(X - (S \cup Y))}$. Por tanto, por el Lema 1.10, γ es continua.

Ahora, definiremos la función g_ε. Obsérvese que, para cada $A \in C_n(X)$, si A_0 es una componente de A, entonces $\gamma(A_0)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Aplicando el Lema 1.96, se tiene que $\bigcup \gamma(A_0) \in C(X)$. Como $\bigcup \gamma(A) = \bigcup \{\bigcup \gamma(A_0) : A_0 \text{ es una componente de } A\}$, y A tiene a lo más n componentes, deducimos que $\bigcup \gamma(A) \in C_n(X)$. De esta manera, podemos considerar la función

$$g_\varepsilon : C_n(X) \to C_n(X) \ \text{ dada por } \ A \overset{g_\varepsilon}{\longmapsto} \bigcup g(A).$$

Obsérvese que, por los Teoremas 1.108 y 1.101, las funciones $\Psi : 2^{2^X} \to 2^X$ y $\gamma* : 2^X \to 2^{C(X)}$ dadas por $\mathcal{A} \overset{\Psi}{\longmapsto} \bigcup \mathcal{A}$ y $A \overset{\gamma*}{\longmapsto} \gamma(A)$ son continuas. Como $g_\varepsilon(B) = \Psi \circ \gamma * (B)$, para cada $B \in C_n(X)$, se tiene que g_ε es una función continua.

Tomemos $A \in C_n(X)$. Dado $x \in A$, si $x \in S \cup Y$, entonces $\gamma(x) = \overline{\alpha}(x) \in C(Y) \subset C(S \cup Y)$ y $\{x\} \in C(S \cup Y)$. Como $S \cup Y \subset B_d^X(p, \frac{\varepsilon}{2})$, se tiene que $H_X(\{x\}, \gamma(x)) \leq \text{diám}(S \cup Y)$. Si, por el contrario, $x \notin S \cup Y$, entonces $\gamma(x) = \{x\}$, y, consecuentemente, $H_X(\{x\}, \gamma(x)) = 0 \leq \text{diám}(S \cup Y)$. De esta manera $H_{H_d}(\{\{x\} : x \in A\}, \{\gamma(x) : x \in A\}) \leq \text{diám}(S \cup Y) < \varepsilon$. Aplicando el Teorema 1.108 (2) obtenemos que $H_X(A, g_\varepsilon(A)) = H_X(\bigcup_{x\in A}\{x\}, \bigcup_{x\in A}\gamma(x)) < \varepsilon$.

Por otro lado, $X - S \subset \bigcup_{i\in F\cup H} X_i$ así que $\text{cl}_X(X - S) \subset \bigcup_{i\in F\cup H} X_i$. Luego, $\text{Fr}_X(S) = S \cap \text{cl}_X(X - S) \subset S \cap (\bigcup_{i\in F\cup H} X_i) = S \cap (\bigcup_{i\in F} X_i) \subset \bigcup_{i\in F} X_i$ y, por ende, $S - \bigcup_{i\in F} X_i = \text{int}_X(S) \cap (X - \bigcup_{i\in F} X_i)$. Así, $S - \bigcup_{i\in F} X_i$ es un subconjunto abierto de X. Como $p \in S - \bigcup_{i\in F} X_i$ y $p \in \mathcal{P}(X)$, tenemos que $S - \bigcup_{i\in F} X_i \nsubseteq T$. Tomemos $s \in (S - \bigcup_{i\in F} X_i) - T = S - Y \subset K$. Luego, dada $x \in A$, si $x \in S \cup Y$, entonces $s \notin Y \supset \overline{\alpha}(x) = \gamma(x)$; es decir, $s \notin \gamma(x)$, y si $x \notin S \cup Y$, entonces $s \notin \{x\} = \gamma(x)$. Así, $s \notin \bigcup_{x\in A} \gamma(x) = g_\varepsilon(x)$ y, por tanto, $K \nsubseteq g_\varepsilon(A)$.

De esta manera $(H_X)_\infty(Id_{C_n(X)}, g_\varepsilon) < \varepsilon$ y $g_\varepsilon : C_n(X) \to C_n(X) - C_n^K(X)$.

Más aún, supongamos que $A \in C_n(X, R)$ y fijemos $a \in A \cap R$. Si $a \in X - (S \cup Y)$, entonces $\gamma(a) = \{a\}$ y, por consiguiente, $g_\varepsilon(A) \cap R \supset \gamma(a) \cap R = \{a\} \neq \emptyset$. Si $a \in S \cup Y$, entonces $a \in (S \cup Y) \cap R$. En consecuencia, $\gamma(a) = \overline{\beta}(a) \in C(Y, Z)$, por lo cual $g_\varepsilon(A) \cap R \supset \gamma(a) \cap Z \neq \emptyset$. De cualquier manera, $g_\varepsilon(A) \in C_n(X, R)$. Por lo tanto, $g_\varepsilon|_{C_n(X,R)} : C_n(X, R) \to C_n(X, R) - C_n^K(X)$. Como, además, $(H_X)_\infty(Id_{C_n(X,R)}, g_\varepsilon|_{C_n(X,R)}) < \varepsilon$ y ε puede ser tomado arbitrariamente pequeño, concluimos que $C_n^K(X)$ es un Z-conjunto de $C_n(X, R)$. $\square$

Como ya se ha mencionado, el siguiente resultado es importante por sí mismo, pero también es un paso esencial para la prueba de los Teoremas 3.19 y 3.21, los cuales son los resultados aquí mostrados acerca de condiciones suficientes para que un continuo localmente conexo X no tenga hiperespacio único $C_n(X)$ (además de dos corolarios al último de tales teoremas).

En la siguiente demostración se hace uso de la notación B_d^X, utilizada en el lema previo.

Teorema 3.12. *Sean X un continuo localmente conexo y R un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$. Entonces, $C_n(X, R)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que, por el Corolario 1.126, el hiperespacio $C_n(X, R)$ es un retracto absoluto. De esta manera, para aplicar el Teorema 1.81, basta mostrar que la función $Id_{C_n(X,R)}$ es un límite uniforme de Z-funciones.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.37, podemos suponer que la métrica para X es convexa. Además, por la Observación 1.118, $C_n(X, R)$ es un hiperespacio de crecimiento. Aplicando el Lema 1.128 obtenemos que la restricción $\Phi_\varepsilon|_{C_n(X,R)} : C_n(X, R) \to C_n(X, R)$ es continua y que

$$(H_X)_\infty(Id_{C_n(X,R)}, \Phi_\varepsilon|_{C_n(X,R)}) < \varepsilon.$$

Como R es compacto, existen $s \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_s \in R$, tales que $R \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_d^X(p_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, sea $K_i = C_d(\{p_i\}, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, $R \subset \bigcup_{i=1}^{s} K_i$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, se cumple que $p_i \in \mathrm{int}_X(K_i) \cap R$ y, por el Lema 1.121, $K_i \in C(X)$. Aplicando el Lema 3.11, obtenemos que $C_n^{K_i}(X)$ es un Z-conjunto en $C_n(X, R)$. De esta manera, por el Lema 1.80, el conjunto $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{s} C_n^{K_i}(X)$ es un Z-conjunto en $C_n(X, R)$.

Sea $A \in C_n(X, R)$. Entonces, $A \cap (\bigcup_{i=1}^{s} K_i) \supset A \cap R \neq \emptyset$; es decir, existe $j \in \{1, \ldots, s\}$, tal que $A \cap K_j \neq \emptyset$. Sea $t \in A \cap K_j$. Luego, $K_j = C_d(\{p_j\}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset C_d(\{t\}, \varepsilon) \subset C_d(A, \varepsilon) = \Phi_\varepsilon(A)$ y, en consecuencia, $\Phi_\varepsilon(A) \in C_n^{K_j}(X)$. Por tanto, $\Phi_\varepsilon(C_n(X, R)) \subset \mathcal{C}$.

Como $C_n(X, R)$ es compacto, $\Phi_\varepsilon(C_n(X, R))$ es compacto y, por ende, un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}$. Luego, aplicando el Lema 1.121, se obtiene que $\Phi_\varepsilon(C_n(X, R))$ es un Z-conjunto en $C_n(X, R)$; es decir, $\Phi_\varepsilon|_{C_n(X,R)}$ es una Z-función. Por lo tanto, $Id_{C_n(X,R)}$ es un límite uniforme de Z-funciones. Así, se concluye, por el Teorema 1.81, que $C_n(X, R)$ es un cubo de Hilbert. $\square$

El siguiente resultado es el análogo del Teorema 1.61 para el caso especial del cubo de Hilbert. Es necesario para probar el Lema 3.16.

Teorema 3.13 ([2], Teorema 10.1)**.** *Si $h : A \to B$ es un homeomorfismo entre Z-conjuntos en un cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$, entonces h se puede extender a un homeomorfismo de $\mathcal{Q}$ sobre $\mathcal{Q}$.*

Para probar los Teoremas 3.19 y 3.21, y los Corolarios 3.20 y 3.24 (todos ellos relacionados con la no unicidad de hiperespacios), se enuncia el teorema que sigue, el cual proporciona una cantidad no numerable de dendritas sin arcos libres que es posible "pegar" a un continuo obteniendo continuos diferentes.

Teorema 3.14 ([8], Teorema 18)**.** *Sean X un continuo localmente conexo y $p \in X$. Entonces, existe una familia no numerable $\mathcal{D}$ de dendritas ajenas y no homeomorfas por pares, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $D \in \mathcal{D}$, se tiene que D no contiene arcos libres.

(b) El continuo localmente conexo $X \cup_p D$ no es homeomorfo a X.

(c) Si B y D son elementos distintos de $\mathcal{D}$, entonces $X \cup_p B$ y $X \cup_p D$ no son homeomorfos.

Ahora se procede a probar el Teorema 3.19. Para ello resulta conveniente probar antes los siguientes tres lemas y una observación.

Lema 3.15. *Sean X, Y y D continuos y $p \in Y$, tales que $Y = X \cup D$ y $X \cap D = \{p\}$. Si E es un subconjunto cerrado de X que contiene a p, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:*

(a) $C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D) = C_n(X, E)$,

(b) $C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D) = C_n(X) - C_n(X, E)$ *y*

(c) $\mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) = \mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$.

Demostración. Demostraremos primero la igualdad $C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D) = C_n(X, E)$. Como $C_n(X, E) \subset C_n(Y, E) \subset C_n(Y, E \cup D)$, resta probar una contención. Supongamos para ello que $A \in C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D)$. Luego, $A \subset X$, $\emptyset \neq A \cap (E \cup D)$ y

$$\begin{aligned} A \cap (E \cup D) &= (A \cap E) \cup (A \cap D) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap X \cap D) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap \{p\}) \\ &= A \cap (E \cup \{p\}) \\ &= A \cap E; \end{aligned}$$

es decir, $A \in C_n(X, E)$. Esto muestra la primera igualdad.

Ahora probemos que $C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D) = C_n(X) - C_n(X, E)$. Supongamos que $A \in C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)$. Luego, $A \subset Y$ y $A \cap D = \emptyset$; es decir, $A \subset Y - D \subset X$. Además, $A \cap E = \emptyset$. Así, $A \in C_n(X) - C_n(X, E)$. Recíprocamente, si $A \in C_n(X) - C_n(X, E)$, entonces

$$\begin{aligned} A \cap (E \cup D) &= (A \cap E) \cup (A \cap D) \\ &= A \cap X \cap D \\ &= A \cap \{p\} \subset A \cap E = \emptyset, \end{aligned}$$

por lo cual $A \in C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)$. Esto demuestra la igualdad en (b).

Por último, mostraremos la igualdad en (c). Como $C_n(X)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(Y)$ y $C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D) \subset C_n(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) &= \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E)) \\ &\subset C_n(X). \end{aligned}$$

Además, $C_n(X, E)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$ y $C_n(Y, E \cup D)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(Y)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) &= C_n(X, E) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E)) \\ &= (C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D)) \cap \\ &\quad \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\ &= C_n(Y, E \cup D) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\ &= \mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D)). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Lema 3.16. *Sean X, Y, D continuos, $p \in Y$ y E un subconjunto cerrado de X, tales que $Y = X \cup D$, $X \cap D = \{p\}$ y $p \in E$. Si $C_n(X, E)$ y $C_n(Y, E \cup D)$ son cubos de Hilbert,* $\mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$ *es un Z-conjunto en $C_n(X, E)$ y* $\mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$ *es un Z-conjunto en $C_n(Y, E \cup D)$, entonces $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$.*

Demostración. Por el Lema 3.15, $\mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) = \mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$, por lo cual la función identidad

$$id : \mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) \to \mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$$

es un homeomorfismo. Aplicando el Teorema 3.13 podemos extender id a un homeomorfismo $h_1 : C_n(X, E) \to C_n(Y, E \cup D)$. Consideremos la función $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ dada por

$$A \overset{h}{\mapsto} \begin{cases} h_1(A) & \text{si } A \in C_n(X, E), \\ Id_{C_n(X)}(A) & \text{si } A \in C_n(X) - C_n(X, E). \end{cases}$$

Obsérvese que, si $C = C_n(X, E) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E))$, entonces $C = \mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$, de manera que $h_1|C = id = Id_{C_n(X)}|C$. Así, por el Lema 1.10, obtenemos que h es continua. Además, de nuevo por el Lema 3.15, $C_n(X) - C_n(X, E) = C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)$. Luego,

$$\begin{aligned} Id_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E)) &= C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D) \\ &= C_n(Y) - h_1(C_n(X, E)) \end{aligned}$$

y, como $Id_{C_n(X)}$ y h_1 son inyectivas, se tiene que h es inyectiva. Más aún,

$$\begin{aligned}
h(C_n(X)) &= h_1(C_n(X,E)) \cup Id_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X,E)) \\
&= C_n(Y, E \cup D) \cup (C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\
&= C_n(Y);
\end{aligned}$$

es decir, h es sobreyectiva. Así, se concluye así que h es un homeomorfismo. □

Lema 3.17. *Sean X, Y, D continuos y $p \in Y$, tales que $Y = X \cup D$ y $X \cap D = \{p\}$. Si d es una métrica convexa de Y, la métrica inducida en X por d es una métrica convexa.*

Demostración. Supongamos que d es una métrica convexa de Y. Sean $a, b \in X$. Luego, existe una isometría $\gamma : [0, d(a,b)] \to \gamma([0, d(a,b)]) \subset Y$, tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(d(a,b)) = b$.

Si p es un punto extremo del arco $A = \gamma([0, d(a,b)])$, digamos $p = b$, entonces $A - \{p\}$ es conexo. Como $X \cap D = \{p\}$ y tanto X como Y son cerrados de Y, los conjuntos $X - \{p\} = X - D$ y $D - \{p\} = X - D$ son abiertos de Y ajenos entre sí. Además, $(X - \{p\}) \cup (D - \{p\}) = Y - \{p\}$. En consecuencia, $A - \{p\} \subset X - \{p\}$ o $A - \{p\} \subset D - \{p\}$. Como $a \in (X - \{p\}) \cap (A - \{p\})$, se tiene que $A - \{p\} \subset X - \{p\}$. Así, $A \subset X$.

Por otro lado, si p no es un punto extremo de A, entonces $A - \{p\}$ tiene dos componentes, cada una de ellas conteniendo un punto extremo de A. Sean K_a y K_b tales componentes, con $a \in K_a$ y $b \in K_b$. Como K_a y K_b son conexos y $a \in K_a \cap (X - \{p\})$ y $b \in K_b \cap (X - \{p\})$, podemos aplicar un argumento similar al aplicado a $A - \{p\}$ en el caso anterior, para obtener que $K_a, K_b \subset X - \{p\}$. Por tanto, $A = K_a \cup K_b \cup \{p\} \subset X$.

De este modo, en cualquier caso, se cumple que $A \subset X$; es decir, existe un arco de a a b contenido en X y que es isométrico a un intervalo cerrado. Esto prueba que la métrica inducida por d sobre X es convexa. □

Observación 3.18. *Para cualesquiera continuos X y Z, tales que $Z \subset X$, se satisface que $\mathcal{P}(Z) \subset \mathcal{P}(X)$ o, equivalentemente, $\mathcal{G}(X) \cap Z \subset \mathcal{G}(Z)$.*

En efecto, supongamos que $x \in \mathcal{G}(X) \cap Z$. Luego, $\{p\} \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ y, por el Teorema 2.15, se cumple que $\dim_{\{p\}}(C(X))$ es finita. Como $C(Z) \subset C(X)$, por el Teorema 1.68 (1), tenemos la desigualdad $\dim_{\{p\}}(C(Z)) \leq \dim_{\{p\}}(C(X))$. Así, $\dim_{\{p\}}(C(Z))$ es finita. Aplicando de nuevo el Teorema 2.15, obtenemos que $\{p\} \cap \mathcal{P}(Z) = \emptyset$; es decir, $p \in \mathcal{G}(Z)$.

En la siguiente demostración se utiliza de nuevo la notación B_d^X, detallada en los comentarios previos al Lema 3.11. Además, se utiliza la notación N_d^X para denotar los conjuntos N_d, pero considerando la métrica inducida en el subespacio X por d, en vez de d misma. Es decir, dados un subespacio X de algún espacio con métrica d, un punto $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos $N_d^X(A, \varepsilon) = N_d(A, \varepsilon) \cap X$.

Teorema 3.19. *Sea X un continuo localmente conexo. Si X no es casi enrejado, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que X no tiene hiperespacio único $C_n(X)$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como X no es casi enrejado, $X - \mathcal{P}(X)$ no es denso en X; es decir, existe $p \in \operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X))$. Por el Teorema 3.14, existe un continuo localmente conexo D que no contiene arcos libres, tal que el continuo localmente conexo $Y = X \cup_p D$ no es homeomorfo a X.

Mostremos ahora que $C_n(X)$ y $C_n(Y)$ son homeomorfos. Para tal efecto, por el Teorema 1.37, podemos suponer que la métrica, d, de Y es convexa. Esto implica, por el Lema 3.17, que las métricas inducidas en X y D por d son convexas. Sea $r > 0$, tal que $B_d^X(p, 2r) \subset \mathcal{P}(X)$. Hagamos $E = C_d(\{p\}, r)$. Probaremos las siguientes tres afirmaciones.

Afirmación 1. $C_m(Y, E \cup D)$ y $C_m(X, E)$ son cubos de Hilbert.

Obsérvese que E es un subconjunto cerrado de X y $E \subset B_d^X(p, 2r) \subset \mathcal{P}(X)$; es decir, E es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$. Como D no contiene arcos libres, por el Lema 3.4, se cumple que $\operatorname{cl}_D(\mathcal{G}(D)) = \operatorname{cl}_D(\mathcal{FA}(D)) = \emptyset$. Así, $\mathcal{G}(D) = \emptyset$ y $\mathcal{P}(D) = D$. Además, $E \cup D$ es un subconjunto cerrado de Y y, por la Observación 3.18, se cumple que $E \cup D \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(Y)$, esto es, $E \cup D$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(Y)$. Así, por el Teorema 3.12, $C_n(X, E)$ y $C_n(Y, E \cup D)$ son cubos de Hilbert.

Afirmación 2. $\operatorname{Fr}_{C_m(X)}(C_m(X, E))$ es un Z-conjunto en $C_m(X, E)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Observación 1.118, $C_n(X, E)$ es un hiperespacio de crecimiento. Aplicando el Lema 1.128, obtenemos que la función

$$\Phi_\varepsilon|_{C_n(X,E)} : C_n(X, E) \to C_n(X, E)$$

es continua y cumple que $(H_X)_\infty(Id_{C_n(X,E)}, \Phi_\varepsilon|_{C_n(X,E)}) < \varepsilon$. Además, dada $A \in C_n(X, E)$, como $N_d^X(A, \varepsilon) \cap \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(E)) \supset A \cap E \neq \emptyset$, se tiene que

$$\Phi_\varepsilon(A) \cap \operatorname{int}_X(E) \supset N_d^X(A, \varepsilon) \cap \operatorname{int}_X(E) \neq \emptyset.$$

Sean $p_A \in \Phi_\varepsilon(A) \cap \operatorname{int}_X(E)$ y $r_A > 0$, tales que $B_d^X(p_A, r_A) \subset \operatorname{int}_X(E) \subset E$. Luego, si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_n(X)$ que converge a $\Phi_\varepsilon(A)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n > N$, se tiene $E \cap A_n \supset B_d^X(p_A, r_A) \cap$

$A_n \neq \emptyset$; es decir, $A_n \in C_n(X,E)$. Así, $\Phi_\varepsilon(A) \notin \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X,E))$ y, por ende, $\Phi_\varepsilon(A) \notin \mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X,E))$. En esta forma,

$$\Phi_\varepsilon|_{C_n(X,E)} : C_n(X,E) \to C_n(X,E) - \mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X,E)).$$

Por tanto, $\mathrm{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X,E))$ es un Z-conjunto en $C_n(X,E)$.

Afirmación 3. $\mathrm{Fr}_{C_m(Y)}(C_m(Y,E \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_m(Y,E \cup D)$.

Obsérvese que $p \in \mathrm{int}_X(E) \cap \mathrm{int}_D(D)$, por lo cual $p \in \mathrm{int}_Y(E \cup D)$. Además, $X - \{p\} = Y - D$ es abierto en Y. Así,

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(E)) = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_X(E)) = \mathrm{cl}_Y((\mathrm{int}_X(E) - \{p\}) \cup \{p\}) \\ &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_{X-\{p\}}(E - \{p\}) \cup \{p\}) = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E - \{p\})) \cup \{p\} \\ &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E)) \cup \{p\}. \end{aligned}$$

De esta manera, y como $D - \{p\} = Y - X$ es abierto en Y, se tiene

$$\begin{aligned} E \cup D &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E)) \cup \{p\} \cup (D - \{p\}) \\ &= \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E) \cup \mathrm{int}_Y(D - \{p\})) \cup \{p\} \\ &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E \cup D)). \end{aligned}$$

Por tanto, $E \cup D = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E \cup D))$ (la otra contención se sigue de la contención $\mathrm{int}_Y(E \cup D) \subset E \cup D$ y del hecho que $E \cup D$ es cerrado en Y). Con esta última igualdad y siguiendo un procedimiento idéntico al de la prueba de la Afirmación 1, se puede mostrar que $\mathrm{Fr}_{C_n(Y)}(C_n(Y,E \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_n(Y,E \cup D)$.

Por las Afirmaciones 1, 2 y 3, y el Lema 3.16, concluimos que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. Por lo tanto, X no tiene hiperespacio único $C_n(X)$. $\square$

Como un corolario casi inmediato del resultado anterior (y del Teorema 3.14), se tiene el siguiente enunciado.

Corolario 3.20. *Sea X un continuo localmente conexo que no es casi enrejado. Entonces, existe una familia no numerable $\mathcal{Y}$ de continuos localmente conexos y no homeomorfos por pares, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $Y \in \mathcal{Y}$, se tiene que X no es homeomorfo a Y.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $Y \in \mathcal{Y}$, se cumple que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$.

Demostración. Por el Teorema 3.14, existe una familia no numerable $\mathcal{D}$ de dendritas que satisface las siguientes condiciones:

(I) Para cada $D \in \mathcal{D}$, se cumple que D no contiene arcos libres.

(II) El continuo localmente conexo $X \cup_p D$ no es homeomorfo a X.

(III) Si B y D son elementos distintos de $\mathcal{D}$, entonces $X \cup_p B$ y $X \cup_p D$ no son homeomorfos.

Siguiendo la demostración del Teorema 3.19, se puede mostrar que para cualquier $D \in \mathcal{D}$ los hiperespacios $C_n(X)$ y $C_n(X \cup_p D)$ son homeomorfos. De esta forma, si hacemos $\mathcal{Y} = \{X \cup_p D : D \in \mathcal{D}\}$, entonces $\mathcal{Y}$ es una familia que cumple (a) y (b). $\square$

3.2.2. Continuos casi enrejados sin hiperespacio único

Habiendo probado que todo continuo localmente conexo que no es casi enrejado no tiene n-ésimo hiperespacio único, es natural preguntarse si todo continuo localmente conexo que es casi enrejado tiene n-ésimo hiperespacio único. El siguiente resultado responde a este cuestionamiento negativamente. Además de dicho enunciado, este apartado presenta algunos corolarios que pueden ser útiles en la obtención de continuos sin hiperespacio único.

En la demostración del siguiente resultado se usa de nuevo la notación N_d^X, la cual se detalla en los comentario previos al Teorema 3.19.

Teorema 3.21. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen un subconjunto cerrado R de $\mathcal{P}(X)$ y subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares $U_1, \ldots, U_{n+1}$ de X, tales que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $X - R = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ *y,*

(b) para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, *se cumple que* $R \subset \mathrm{cl}_X(U_i)$.

Entonces, X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$, para cada $m \leq n$.

Demostración. Sea $m \leq n$. Fijemos $p \in R$. Por el Teorema 3.14, existe un continuo localmente conexo D que no contiene arcos libres, tal que el continuo localmente conexo $Y = X \cup_p D$ no es homeomorfo a X. Demostraremos que $C_m(X)$ y $C_m(Y)$ son homeomorfos. Para tal efecto, por el Teorema 1.37, podemos suponer que la métrica de Y, denotada por d, es convexa. Esto implica, por el Lema 3.17, que las métricas inducidas sobre X y D por d son convexas. Vamos a probar las siguientes tres afirmaciones.

Afirmación 1. $C_m(Y, R \cup D)$ y $C_m(X, R)$ son cubos de Hilbert.

Obsérvese en primer lugar que $R \cup D \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(Y)$. Como $R \cup D$ es compacto, se tiene que $R \cup D$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(Y)$. Además, como por hipótesis R es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$, aplicando el Teorema 3.12 obtenemos que $C_m(Y, R \cup D)$ y $C_m(X, R)$ son cubos de Hilbert.

Afirmación 2. $\mathrm{Fr}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_m(Y, R \cup D)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Observación 1.118, $C_m(Y, R \cup D)$ es un hiperespacio de crecimiento. Luego, aplicando el Lema 1.128, se tiene que la función $\Phi_\varepsilon|_{C_m(Y,R\cup D)} : C_m(Y, R \cup D) \to C_m(Y, R \cup D)$ es continua y que

$$(H_X)_\infty(Id_{C_m(Y,R\cup D)}, \Phi_\varepsilon|_{C_m(Y,R\cup D)}) \leq \varepsilon.$$

Tomemos $A \in C_m(Y, R \cup D)$.

Caso 1. $A \cap R \neq \emptyset$.

Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ se cumple que $R \subset \mathrm{cl}_X(U_i)$, por lo cual $N_d^X(A, \varepsilon) \cap \mathrm{cl}_X(U_i) \supset A \cap \mathrm{cl}_X(U_i) \supset A \cap R \neq \emptyset$. Así, $\Phi_\varepsilon(A) \cap U_i \supset N_d^X(A, \varepsilon) \cap U_i \neq \emptyset$. Consideremos una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C_m(Y)$, tal que $\lim A_k = \Phi_\varepsilon(A)$. Luego, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ y $j \geq M$, se cumple $U_i \cap A_j \neq \emptyset$. Tomemos $j \geq M$. Supongamos que $A_j \cap (R \cup D) = \emptyset$. Entonces, $A_j \subset Y - (R \cup D) = (Y - R) \cap (Y - D) = (Y - R) \cap (X - \{p\}) = X - R = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, De esta manera, y como los U_i son abiertos, ajenos por pares e intersectan a A_j, se cumple que A_j tiene a lo menos $n+1$ componentes. Esto contradice el hecho que $A_j \in C_m(Y)$. Por tanto, $A_j \cap (R \cup D) \neq \emptyset$; es decir, $A_j \in C_m(Y, R \cup D)$. Esto prueba que no existe sucesión alguna en $C_m(Y) - C_m(Y, R \cup D)$ que converja a $\Phi_\varepsilon(A)$. Así, $\Phi_\varepsilon(A) \notin \mathrm{cl}_{C_m(Y)}(C_m(Y) - C_m(Y, R \cup D)) \supset \mathrm{Fr}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$.

Caso 2. $A \cap R = \emptyset$. En este caso $\Phi_\varepsilon(A) \cap (D - \{p\}) \supset A \cap (D - \{p\}) = (A \cap R) \cup (A \cap (D - \{p\})) = A \cap (R \cup D) \neq \emptyset$. Como $D - \{p\} = Y - X$ es un abierto en Y contenido en $R \cup D$, tenemos que $\Phi_\varepsilon(A) \in \mathrm{int}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$.

Por los casos 1 y 2, tenemos que $\Phi_\varepsilon|_{C_m(Y,R\cup D)} : C_m(Y, R \cup D) \to C_m(Y, R \cup D) - \mathrm{Fr}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$. Esto prueba la Afirmación 2.

Afirmación 3. $\mathrm{Fr}_{C_m(X)}(C_m(X, R))$ es un Z-conjunto en $C_m(X, R)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Observación 1.118, $C_m(Y, R \cup D)$ es un hiperespacio de crecimiento. Luego, aplicando el Lema 1.128, podemos restringir

$$\Phi_\varepsilon|_{C_m(X,R)} : C_m(X, R) \to C_m(X, R).$$

Obsérvese, además, que $C_m(X, R) \subset C_m(Y, R \cup D)$. Así, aplicando el Lema

3.15,

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(C_m(X,R)) &\subset C_m(Y,R\cup D)-\mathrm{Fr}_{C_m(Y)}(C_m(Y,R\cup D))\\ &= C_m(Y,R\cup D)-\mathrm{Fr}_{C_m(X)}(C_m(X,R)).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Phi_\varepsilon|_{C_m(X,R)}: C_m(X,R)\to C_m(X,R)-\mathrm{Fr}_{C_m(X)}(C_m(X,R)).$$

Como $\Phi_\varepsilon|_{C_m(X,R)}$ es continua y

$$(H_X)_\infty(Id_{C_m(X,R)},\Phi_\varepsilon|_{C_m(X,R)})\leq\varepsilon,$$

se obtiene la Afirmación 3.

Por las Afirmaciones 1, 2 y 3 y el Lema 3.16, concluimos que h es un homeomorfismo. □

Como un caso particular del Teorema 3.21 cuando $n=1$, se tiene el siguiente Corolario, el cual facilita la identificación de continuos sin hiperespacio de subcontinuos único.

Corolario 3.22. *Sea X un continuo localmente conexo, tal que $X-\mathcal{P}(X)$ es disconexo. Entonces, X no tiene hiperespacio único $C(X)$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de $X-\mathcal{P}(X)$, tales que

$$X-\mathcal{P}(X)=U\cup V.$$

Como $\mathcal{P}(X)$ es cerrado en X, los conjuntos U y V son abiertos en X; es decir, los conjuntos $X-U$ y $X-V$ son cerrados en X. Así, y como $U\subset X-V$ y $V\subset X-U$, se satisface que $\mathrm{cl}_X(U)\subset X-V$ y $\mathrm{cl}_X(V)\subset X-U$ o, equivalentemente, $V\subset X-\mathrm{cl}_X(U)$ y $U\subset X-\mathrm{cl}_X(U)$.

Sea $R=\mathrm{cl}_X(U)\cap\mathrm{cl}_X(V)$. Obsérvese que $R\subset(X-U)\cap(X-V)=X-(U\cup V)=\mathcal{P}(X)$. Como X es casi enrejado, se tiene que $\mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X))=\emptyset$ y, por consiguiente, $\mathrm{cl}_X(U)\cup\mathrm{cl}_X(V)=\mathrm{cl}_X(U\cup V)=\mathrm{cl}_X(X-\mathcal{P}(X))=X-\mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X))=X$. Como X es conexo, se sigue de esto último que $R\neq\emptyset$.

Sean $W=X-\mathrm{cl}_X(U)$ y $Z=X-\mathrm{cl}_X(V)$. Luego, $W\cup Z=(X-\mathrm{cl}_X(U))\cup(X-\mathrm{cl}_X(V))=X-R$. Asimismo, como $V\subset W$ y $U\subset Z$, se cumple que $R\subset\mathrm{cl}_X(W)\cap\mathrm{cl}_X(Z)$. De esta forma, los conjuntos R, W y Z satisfacen las condiciones del Teorema 3.21, para $n=1$. Por tanto, X no tiene hiperespacio único $C(X)$. □

El siguiente corolario del Teorema 3.21 descarta muchos continuos de la clase de los continuos con hiperespacio único $C_n(X)$ (para una n apropiada).

Corolario 3.23. *Sean X una dendrita que no es un árbol y*

$$k = \sup\{\mathrm{ord}(p, X) \ : \ p \in \mathcal{P}(X)\}.$$

Obsérvese que $k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Entonces, para cada $m < k$ se cumple que X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$.

Demostración. Obsérvese que, por el Teorema 3.19, podemos suponer que X es casi enrejado. Por otro lado, obsérvese que, como X no contiene curvas cerradas simples y no es un árbol, X no es una gráfica finita. Así, por el Teorema 2.15 (haciendo $F = X$), se cumple que $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. En particular, k está bien definido.

Sea $m < k$. Luego, existe un punto $q \in \mathcal{P}(X)$, tal que $m < \mathrm{ord}\,(q, X)$. Aplicando el Teorema 1.51, se tiene que $\mathrm{c}\,(q, X)$ es infinito o $\mathrm{c}\,(q, X)$ es finito y $\mathrm{c}\,(q, X) = \mathrm{ord}\,(q, X)$. En cualquiera de los dos casos, podemos tomar $U_1, \ldots, U_m$ componentes distintas de $X - \{q\}$ y U_{m+1} la unión de las componentes restantes, con $U_{m+1} \neq \emptyset$. Luego

$$X - \{q\} = \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i.$$

Como X es localmente conexo y $X - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X, por el Teorema 1.13, se sigue que los conjuntos $U_1, \ldots, U_{m+1}$ son abiertos en X.

Fijemos $j \in \{1, \ldots, m+1\}$. Obsérvese que $\mathrm{cl}_X(U_j) \subset X - \bigcup_{i \neq j} U_i = U_j \cup \{p\}$ (pues $U_j \subset X - \bigcup_{i \neq j} U_i$, y este último es cerrado en X). Si $p \notin \mathrm{cl}_X(U_j)$, entonces $\mathrm{cl}_X(U_j) = U_j$ y, por ende, U_j sería un subconjunto propio, no vacío, abierto y cerrado de X. Como esto contradice la conexidad de X, se debe tener que $p \in \mathrm{cl}_X(U_j)$. De esta manera, los conjuntos $\{p\}$ y $U_1, \ldots, U_{m+1}$ satisfacen las condiciones del Teorema 3.21 para $n = m$. Podemos concluir entonces que X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$. $\square$

Un último corolario al Teorema 3.21 establece un resultado similar al Corolario 3.20, pero reemplazando la condición de no ser casi enrejado con las condiciones del Teorema 3.21.

Corolario 3.24. *Sean X un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, tales que satisfacen las condiciones del Teorema 3.21. Entonces, existe una familia no numerable $\mathcal{Y}$ de continuos localmente conexos y no homeomorfos por pares, tal que las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) para cada $Y \in \mathcal{Y}$, se tiene que X no es homeomorfo a Y, y

(b) para cada $Y \in \mathcal{Y}$ y $m \leq n$, se cumple que $C_m(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$.

Demostración. Por el Teorema 3.14, existe una familia no numerable $\mathcal{D}$ de dendritas que satisface las siguientes condiciones.

(I) Para cada $D \in \mathcal{D}$, se cumple que D no contiene arcos libres,

(II) El continuo localmente conexo $X \cup_p D$ no es homeomorfo a X y

(III) Si B y D son elementos distintos de $\mathcal{D}$, entonces $X \cup_p B$ y $X \cup_p D$ no son homeomorfos.

Dados cualesquiera $D \in \mathcal{D}$ y $m \leq n$, se sigue de la demostración del Teorema 3.21, que los hiperespacios $C_m(X)$ y $C_m(X \cup_p D)$ son homeomorfos. Haciendo $\mathcal{Y} = \{X \cup_p D : D \in \mathcal{D}\}$, tenemos que $\mathcal{Y}$ es una familia no numerable de continuos localmente conexos que satisface (a) y (b). $\square$

3.2.3. Los continuos enrejados tienen n-ésimos hiperespacios únicos

Ahora se exponen los resultados referentes a la unicidad de los hiperespacios $C_n(X)$ para los continuos enrejados. Básicamente, en este apartado se expresa en varios enunciados, resumidos en el Teorema 3.44, el resultado que da título a esta subsección, es decir, que los continuos enrejados poseen hiperespacio único $C_n(X)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, además de algunos resultados auxiliares (algunos de ellos significativos, como el Teorema 3.34). En los resultados que se abordan, los dos conjuntos siguientes tomarán un papel esencial.

Definición 3.25. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se cumplen las siguientes igualdades.

- $\mathfrak{P}_n^{\partial}(X) = \{A \in C_n(X) \ : \ A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda y $A \in \partial M\}$.
- $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) - \mathfrak{P}_n(X) \ : \ A$ tiene una base local de vecindades $\mathscr{B}$ en $C_n(X)$, tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{B}$, se tiene $\dim \mathcal{U} = 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo$\}$.

Antes de continuar, nótese que la condición que describe cada uno de los conjuntos para los que se acaba de asignar una notación se describe en términos puramente topológicos. Esto implica que tales conjuntos son invariantes bajo cualquier homeomorfismo entre n-ésimos hiperespacios. El enunciado preciso de esta última afirmación se delinea en la siguiente observación, en la cual se incluye, con la misma propiedad, al conjunto previamente definido $\mathfrak{F}_n(X)$.

Observación 3.26. *Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathfrak{F}_n(X)$, $\mathfrak{P}_n(X)$, $\mathfrak{P}_n^{\partial}(X)$ y $\Gamma_n(X)$, son invariantes topológicos.*

Para el siguiente resultado, se requiere de la definición que sigue. La similitud en notación a la Definición 2.8 puede relacionarse con algunas características que estos conjuntos poseen en común, porque además de poseer una frontera de un solo punto (Observación 3.28), forman, como puntos, el conjunto $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$ (véase el Lema 3.29).

Definición 3.27. Dado un continuo X,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_E(X) = \{J \in \mathfrak{A}(X) \ &: \text{existe un punto extremo } p \text{ de } J,\\ &\quad \text{tal que } p \in \operatorname{int}_X(J)\}.\end{aligned}$$

En el caso que $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p es un punto extremo de J, tal que $p \in \operatorname{int}_X(J)$, a p se le llama un extremo de X.

Observación 3.28. *Para cualquier continuo X, distinto de un arco y de una curva cerrada simple, y cualquier $J \in \mathfrak{A}_S X$ se satisfacen las siguientes dos afirmaciones:*

(1) Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\operatorname{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\operatorname{Fr}_X(J) = \{q_J\}$, en donde p_J y q_J son los puntos extremos de J, con $p_J \in \operatorname{int}_X(J)$. En particular, $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1]$.

(2) Si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\operatorname{int}_X(J) = J - \{p_J, q_J\}$ y $\operatorname{Fr}_X(J) = \{p_J, q_J\}$, si J es un arco y p_J y q_J son sus puntos extremos, o $\operatorname{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\operatorname{Fr}_X(J) = \{q_J\}$, para algún $q_J \in J$, si J es una curva cerrada simple. De cualquier manera, $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$.

Lema 3.29. *Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in C(X)$, entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

(b) Existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que una de las siguientes condiciones se cumple: (1) $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$, (2) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X, tal que $p \in A \subset \operatorname{int}_X(J)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Sea $\mathfrak{M}$ una vecindad de A en $C(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathfrak{M}$. Por el Teorema 1.68 (3), se cumple que $\dim_A(C(X)) = \dim_A(\mathfrak{M})$. Así, $\dim_A(C(X)) = 2$. Luego, aplicando el Lema 2.16 obtenemos un elemento $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$.

Nótese que, por la Observación 3.28, el conjunto $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo al intervalo $(0,1]$ o al intervalo $(0,1)$. De este modo, por el Corolario 1.111, tenemos que $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ es una 2-variedad y

$$\partial\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1 = F_1(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1) \cup C(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1, E(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1)).$$

Por otro lado, como $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ es una vecindad de A en $C(X)$, el Teorema 1.65 asegura que $A \in \partial\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$.

Lo anterior implica que $A \in F_1(X)$ o $A \in C(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1, E(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1))$. En el primer caso, existe $p \in \operatorname{int}_X(J)$, tal que $A = \{p\}$. En el segundo caso, $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ y existe $p \in E(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1)$, tal que $p \in A$. Obsérvese que, si ocurre esto último, entonces, por el Teorema 1.24, se satisface que $\operatorname{ord}(p, J) = \operatorname{ord}(p, \operatorname{int}_X(J)) = 1$; es decir, $p \in E(J)$. Así, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p es un extremo de X. Esto prueba la primera implicación del lema.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos ahora que existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que se cumple (1) o (2). Luego, $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ y $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ es una vecindad de A en $C(X)$. Además, por el Corolario 1.111, se tiene que $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ es una 2-variedad y

$$\partial\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1 = F_1(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1) \cup C(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1, E(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1)).$$

Si se cumple (1); es decir, si $A = \{p\}$ para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$, entonces $p \in F_1(X)$. Supongamos que se cumple (2). De este modo, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe $p \in E(X)$, tal que $p \in \operatorname{int}_X(J)$ y $p \in A$. Por el Teorema 1.24, tenemos que $\operatorname{ord}(p, \operatorname{int}_X(J)) = \operatorname{ord}(p, J) = 1$. Así, $p \in E(\operatorname{int}_X(J))$ y $A \in C(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1, E(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1))$. De cualquier modo, $A \in \partial\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$.

Sea $\mathfrak{M}$ una vecindad de A en $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ que es una 2-celda. Como $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1$ es abierto en $C(X)$, el conjunto $\mathfrak{M}$ es una vecindad de A en $C(X)$. Además, por el Teorema 1.65, se cumple que $A \in \partial\mathfrak{M}$. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Esto prueba la segunda implicación del lema y concluye la demostración de éste. $\square$

Ahora, se demuestra un resultado que define un homeomorfismo entre dos conjuntos notables de X y de $C(X)$ y el cual es la base para demostrar los Teoremas 3.35 y 3.36.

Teorema 3.30. *Sea X un continuo localmente conexo que no es un arco. Entonces, existe un homeomorfismo $h : \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^{\partial}(X))$, tal que, para cada $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, se satisfacen los siguientes dos enunciados:*

(1) *Si $p \notin \bigcup\{\mathrm{int}_X(J) \ : \ J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$, entonces $h(p) = \{p\}$.*

(2) *Si $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces $p \in \mathcal{P}(X)$ o p es un punto extremo de J y $h(p) = J$, para algún $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ con $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ y $p \in \mathrm{int}_X(J)$.*

Demostración. Sea $f : X \to F_1(X)$ la función dada por $x \overset{f}{\mapsto} \{x\}$. Por el Teorema 1.103, f es un homeomorfismo. Además, por el Corolario 2.13 y el Lema 3.29, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\mathcal{FA}(X)) &\subset f(\bigcup\{\mathrm{int}_X(K) : K \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \\ &\subset \mathfrak{P}^{\partial}(X). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))) &\subset \mathrm{cl}_{C(X)}(f(\mathcal{FA}(X))) \\ &\subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^{\partial}(X)). \end{aligned}$$

Dado cualquier $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, sean p_J y q_J los puntos extremos de J, con $p_J \in \mathrm{int}_X(J)$. Como X no es un arco, $J - \{q_J\} \subset \mathrm{int}_X(J) \subsetneq X$, así que $\mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\}$. Sea $\mathcal{L}_J = F_1(J) \cup C(J, p_J)$. Obsérvese que, por el Teorema 1.110, $\mathcal{L}_J$ es un arco con puntos extremos $\{q_J\}$ y J, $F_1(J)$ y $C(J, p_J)$ son subarcos de $\mathcal{L}_J$, y $F_1(J) \cap C(J, p_J) = \{p_J\}$. Nótese también que q_J y J son los únicos puntos de $\mathcal{L}_J$ a los cuales pertenece q_J. Sea $g_J : J \to \mathcal{L}_J$ un homeomorfismo, tal que $g_J(q_J) = \{q_J\}$ y $g_J(p_J) = J$. Como $\mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\}$, se sigue del Lema 3.29, que

$$\begin{aligned} g_J(J - \{q_J, p_J\}) &= \mathcal{L}_J - \{\{q_J\}, J\} \\ &\subset \mathfrak{P}^{\partial}(X). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} g_J(J) &= g_J(\mathrm{cl}_X(J - \{q_J, p_J\})) \\ &\subset \mathrm{cl}_{C(X)}(g_J(J - \{q_J, p_J\})) \\ &\subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^{\partial}(X)). \end{aligned}$$

Sea $W = \bigcup\{J - \{q_J\} \ : \ J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$. Obsérvese que, por el Lema 2.9 (2), la familia $\{J - \{q_J\} \ : \ J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$ está formada de subconjuntos abiertos de X ajenos por pares, así que existe una función continua

$g : W \to \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^{\partial}(X))$, tal que

$$g|_{J-\{q_J\}} = g_J|_{J-\{q_J\}}, \text{ para cada } J \in \mathfrak{A}_E(X).$$

Más aún, como para cualesquiera J y K elementos distintos de $\mathfrak{A}_E(X)$ se satisface que g_J es inyectiva y $g_J(J - \{q_J\}) \cap g_K(K - \{q_K\}) \subset (C(J) - \{\{q_J\}\}) \cap (C(K) - \{\{q_K\}\}) = \emptyset$, la función g es inyectiva.

Como las funciones f y g son inyectivas y $f(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W) \cap g(W) \subset F_1(X - W) \cap (F_1(W) \cup C(W, P_J)) = \emptyset$, existe una función inyectiva $h : \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^{\partial}(X))$, tal que

$$h|_{\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))-W} = f|_{\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))-W} \quad \text{y} \quad h|_W = g|_W.$$

Puesto que f y g son continuas en $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W$ y W, respectivamente, para mostrar que h es continua basta probar que h es continua en cada punto de $\mathrm{Fr}_X(W)$. Para este fin, tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en W, tal que $\lim x_n = x$, para algún $x \in X - W$. Queremos demostrar que $\lim h(x_n) = h(x)$, es decir, que $\lim g_{J_n}(x_n) = \{x\}$, donde cada J_n es un elemento de $\mathfrak{A}_E(X)$, tal que $x_n \in J_n - \{q_J\}$.

Si $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y una subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en J_k. Obsérvese que $x \in J_k - W = \{q_{J_k}\}$; es decir, $x = q_{J_k}$. Luego, por la continuidad de g_{J_k}, se tiene que $\lim g_{J_k}(y_n) = g_{J_k}(q_{J_k}) = \{q_{J_k}\}$. Así, $\lim g_{J_n} = \{x\}$. De esta manera, podemos suponer que $J_r \neq J_s$ si $r \neq s$.

Aplicando el Lema 2.10, obtenemos que $\lim J_n = \{x\}$. Como $h(x_n) = g_{J_n}(x_n) \subset J_n$ se tiene, por el Lema 1.89, que $\lim h(x_n) = \{x\}$. Esto prueba que h es continua.

Ahora, para mostrar que h es sobreyectiva, obsérvese que

$$h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W) = F_1(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W)$$

y

$$\begin{aligned} h(W) &= \bigcup\{h(J - \{q_J\}) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\} \\ &= \bigcup\{F_1(J - \{q_J\}) \cup C(J, p_J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\} \\ &= F_1(W) \cup (\bigcup\{C(J, p_J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}). \end{aligned}$$

Además, por el Corolario 2.13, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = \bigcup\{\mathrm{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$. Así,

$$\begin{aligned} h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))) &= F_1(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))) \cup (\bigcup\{C(J, p_J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}) \\ &= F_1(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \cup \\ &\quad (\bigcup\{C(J, p_J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.29, obtenemos que $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)))$. De esta manera, $\mathrm{cl}_X(\mathfrak{P}^{\partial}(X)) \subset h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)))$, esto es, h es sobreyectiva. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Por último, sea $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, tal que $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. En el caso $h(p) = \{p\}$, se tiene que $p \in \mathcal{P}(X)$. Si, por el contrario, $h(p) \neq \{p\}$, entonces $p \in W$; es decir, existe $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, tal que $p \in J - \{q_J\} = \mathrm{int}_X(J)$. Luego,

$$\begin{aligned} h(p) \cap \mathcal{P}(X) &\subset h(p) - (J - \{q_J\}) \\ &= g_J(p) - (J - \{q_J\}) \\ &\subset J - (J - \{q_J\}) \\ &= \{q_J\}. \end{aligned}$$

Así, $q_J \in h(p)$. Además, puesto que $h(p) = g_J(p)$, se cumple que $h(p) \in \{J, \{q_J\}\}$ (según se observó previamente). Como $h(p) = \{q_J\}$ implica que $p \notin W$, lo cual es una contradicción, concluimos que $h(p) = J$. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Para demostrar que los continuos enrejados poseen hiperespacio único $C_n(X)$, con $n \geq 3$, se requiere del Lema 3.32, el cual proporciona una expresión para el conjunto $\Gamma_n(X) \subset C_n(X)$ relacionada directamente con el continuo localmente conexo X. Para probar dicho lema se puede utilizar su versión particular para el caso de las gráficas finitas, expresado en el siguiente resultado.

Lema 3.31 ([14], Lema 3.6)**.** *Si D es una gráfica finita y $n \geq 3$, entonces*

$$\Gamma_n(D) = \{A \in C_n(D) : A \textit{ es conexo y } A \cap R(D) = \emptyset\}.$$

Lema 3.32. *Si X es un continuo localmente conexo y $n \geq 3$, entonces*

$$\begin{aligned} \Gamma_n(X) &= \{A \in C(X) : \textit{existe } J \in \mathfrak{A}_S(X), \textit{ tal que } A \subset \mathrm{int}_X(J)\} \\ &= \mathfrak{P}(X). \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, demostremos la siguiente afirmación.

Afirmación. *Si $A \in C_n(X)$ y G es una gráfica finita contenida en X, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$, entonces, para cualquier vecindad abierta $\mathcal{U}$ de A en X con $\mathcal{U} \subset C_n(G)$, se cumple que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}(G)$.*

Dado $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$, se cumple que B tiene una vecindad en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Luego, por el Lema 1.64, existe una $2n$-celda $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$, tal que $B \in \mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(G)$. De esta manera, y como $\mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M})$ es abierto en $C_n(G)$, la $2n$-celda $\mathcal{M}$ es una vecindad de B en $C_n(G)$; es decir, $B \in \mathfrak{P}_n(G)$. Recíprocamente, si $B \in \mathfrak{P}_n(G) \cap \mathcal{U}$, entonces existe una vecindad de B en $C_n(G)$ que es una $2n$-celda. Como $\mathcal{U}$ también es abierto en $C_n(G)$, por el Lema 1.64, existe una $2n$-celda $\mathcal{M}$ en $C_n(G)$, tal que $B \in \mathrm{int}_{C_n(G)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(G)$. Luego, $\mathrm{int}_{C_n(G)}(\mathcal{M})$ es abierto en $\mathcal{U}$ y, por ende, en $C_n(X)$. Así, $\mathcal{M}$ es una vecindad de B en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda, esto es, $B \in \mathfrak{P}_n(X)$.

Probemos la primera igualdad. Sea $A \in \Gamma_n(X)$. Luego, $\dim_A(X) = 2n$. Aplicando el Teorema 2.15, podemos encontrar una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$. Así, $A \in \langle \mathrm{int}_X(D) \rangle_n \subset C(D)$; es decir, $C(D)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Por consiguiente, existe una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}$ de A en $C_n(X)$, tal que, dado cualquier $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, se cumple que $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, el conjunto $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo y $\mathcal{U} \subset C(D)$. Aplicando la Afirmación 1, se tiene que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$ es arco conexo y $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(D)$. Obsérvese, además, que $\mathfrak{H}$ es asimismo una base de vecindades de A en $C_n(D)$. Esto prueba que $A \in \Gamma_n(D)$. Aplicando el Lema 3.31, obtenemos que A es conexo y, por el Lema 2.16, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $A \in \langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_n$; es decir, $A \subset \mathrm{int}_X(J)$.

Recíprocamente, supongamos que $A \in C(X)$ y que existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Como $R(J) = \emptyset$, por el Lema 3.31, $A \in \Gamma_n(J)$ o, equivalentemente, $A \in C_n(J) - \mathfrak{P}_n(J)$ y existe una base $\mathfrak{H}$ de vecindades abiertas de A en $C_n(J)$, tal que, dado cualquier $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, el conjunto $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}(J)$ es arco conexo y $\dim(\mathfrak{H}) = 2n$. Como $A \in \langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_n \subset \mathrm{int}_{C_n(X)} C_n(J) \subset C_n(J)$; es decir, como $\mathrm{int}_{C_n(X)} C_n(J)$ es una vecindad de A en $C_n(J)$, podemos suponer que $\mathcal{U} \subset \mathrm{int}_{C_n(X)} C_n(J)$. Así, $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathrm{int}_{C_n(X)} C_n(J)$, esto es, $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta de A en $C_n(X)$. Aplicando la Afirmación 1, obtenemos que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo y $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(D) = \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(X)$. Obsérvese, además, que, de esta forma, $\mathcal{H}$ es también una base de vecindades abiertas de A en $C_n(X)$. Por tanto, hemos probado que $A \in \Gamma_n(X)$.

Mostremos por último la segunda igualdad. Si $B \subset \mathrm{int}_X(J)$ para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $B \in \langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_n \subset C(J)$; es decir, $C(J)$ es una vecindad de B en $C_n(X)$. Además, por los Teoremas 1.110 y 1.113, $C(J)$ es una 2-celda. De esta manera, $B \in \mathfrak{P}(X)$. Recíprocamente, si $B \in \mathcal{P}(X)$, entonces B tiene una vecindad en X que es una 2-celda. Luego, $\dim_B(X) = 2$. Aplicando el Lema 2.16, obtenemos $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $B \in \langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_1$, es decir, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Por lo tanto, $\{A \in C(X) \ : \text{existe } J \in \mathfrak{A}_S(X),$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)\} = \mathfrak{P}(X)$. $\square$

Como corolario al Lema 3.32, en el siguiente enunciado se garantiza la invariabilidad topológica de los conjuntos $\mathfrak{P}(X)$ y $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Corolario 3.33. *Sean X y Y continuos localmente conexos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Si existe un homeomorfismo $h : C_n(X) \to C_n(Y)$, entonces $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(Y)$ y $h(\mathfrak{P}^{\partial}(X)) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$.*

Demostración. Primero demostremos que $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(Y)$. El caso $n = 1$ se tiene por la Observación 3.26. Supongamos que $n \geq 3$. Por el Lema 3.32 se tiene que $\Gamma_n(X) = \mathfrak{P}(X)$. Similarmente $\Gamma_n(Y) = \mathfrak{P}(Y)$. Por la Observación 3.26 se cumple que $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$. Así, $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(Y)$.

Ahora mostremos que $h(\mathfrak{P}^{\partial}(X)) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Afirmamos que $\mathfrak{P}^{\partial}(X) = \partial\mathfrak{P}(X)$. En efecto, si existe una vecindad $\mathfrak{M}$ de A en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda, entonces, como $\mathfrak{P}(X)$ es abierto en $C(X)$, se cumple que $\mathfrak{M}$ es una vecindad de A en $C(X)$. Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{M}$ es una vecindad de A en $C(X)$ que es una 2-celda. Obsérvese que $\mathfrak{P}(X)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Luego, por el Lema 1.64, existe una vecindad $\mathfrak{N}$ de A en $C(X)$ contenida en $\mathfrak{P}(X)$, tal que $\mathfrak{N}$ es una 2-celda. Obsérvese que N es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$. Esto valida nuestra afirmación.

Aplicando el Teorema 1.57 obtenemos que $h(\partial\mathfrak{P}(X)) = \partial\mathfrak{P}(Y)$ o, equivalentemente, que $h(\mathfrak{P}^{\partial}(X)) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. $\square$

Ahora se prueba, a lo largo de varios resultados, que dentro de la clase de los continuos que son localmente conexos y casi enrejados se satisface la condición que define la unicidad de los hiperespacios $C_n(X)$, para $n \geq 3$ (Teorema 3.35), para $n = 1$ (Teorema 3.36) y para $n = 2$ (Teorema 3.42). Junto con el Teorema 3.8 (y algunos resultados más) estos resultados (condensados en el Teorema 3.43) permiten establecer la unicidad de hiperespacios $C_n(X)$ para los continuos enrejados (Teorema 3.44). Para probar el caso $n \geq 3$, se requiere el siguiente importante resultado, el cual es el caso particular para las gráficas finitas de la primera parte del Teorema 3.44.

Teorema 3.34 ([14], Teorema 3.8 (b))**.** *Toda gráfica finita X tiene hiperespacio único $C_n(X)$, para cualquier $n \geq 2$.*

Teorema 3.35. *Si X y Y son continuos localmente conexos y casi enrejados, $n \geq 3$ y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Si X es un arco, entonces, por el Teorema 3.34, se cumple que X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Esto implica que X es homeomorfo a Y y, por consiguiente, el resultado se cumple. De esta forma, podemos suponer que X no es un arco. Análogamente, podemos suponer que Y no es un arco. Sea $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Por el Corolario

3.33 se tiene que $h(\mathfrak{P}^\partial(X)) = \mathfrak{P}^\partial(Y)$. Luego, como h conserva cerraduras, se satisface que

$$\begin{aligned} h(\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))) &= \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(h(\mathfrak{P}^\partial(X))) \\ &= \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y)). \end{aligned}$$

En particular, $\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y))$.

Por otro lado, como X y Y no son arcos, se sigue del Teorema 3.30 que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))$ y que $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y))$. De los dos enunciados anteriores obtenemos que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$ son homeomorfos. Además, como X y Y son continuos casi enrejados, se sigue del Lema 3.4 que $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y que $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. $\square$

Teorema 3.36. *Si X y Y son continuos localmente conexos y casi enrejados que no son arcos y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $h : C(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Aplicando el Corolario 3.33, obtenemos que $h(\mathfrak{P}^\partial(X)) = \mathfrak{P}^\partial(Y)$. Como h conserva cerraduras, la igualdad anterior implica que

$$h(\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))) = \mathrm{cl}_{C(Y)}(h(\mathfrak{P}^\partial(X))) = \mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y)).$$

Consecuentemente, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y))$.

Por otra parte, como X y Y no son arcos, se tiene, por el Teorema 3.30, que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathfrak{P}^\partial(X))$ son homeomorfos. Del mismo modo, $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathfrak{P}^\partial(Y))$. De los tres enunciados anteriores obtenemos que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Además, como X y Y son continuos casi enrejados, se sigue del Lema 3.4 que $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y que $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. $\square$

Vale la pena notar que las pruebas de los Teoremas 3.35 y 3.36 resultan similares entre sí y, gracias a los resultados previamente enunciados, su demostración se establece de manera breve y sencilla. Sin embargo la demostración del resultado análogo para $C_2(X)$ es más elaborada y requiere un resultado adicional, además de algunos auxiliares, que ahora se exponen. Para enunciar y demostrar dichos resultados resulta útil la siguiente notación.

Definición 3.37. Dados un continuo X distinto de una curva cerrada simple y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, denotaremos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(J,K) = &\operatorname{cl}_{C_2(X)}(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_2) \cap \\ &\operatorname{cl}_{C_2(X)}(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_2),\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(J) = \operatorname{cl}_{C(X)}(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1).$$

Denotaremos también por C_0 al subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ dado por $C_0 = D - \operatorname{int}_{\mathbb{R}^2}(E)$, donde D y E son los discos en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(2,0)$ y $(1,0)$ y radio 2 y 1, respectivamente.

En lo que sigue se acepta que C_0 es homeomorfo a cualquier continuo que se puede expresar como $\operatorname{cl}_M(M - N)$, donde M y N son 2-celdas, tales que $M \subset N$ y $\partial M \cap N = \emptyset$.

Los siguientes tres lemas proveen de expresiones para los conjuntos $\mathcal{E}(J)$, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$ y $\mathcal{D}(J,K)$ y representan pasos previos para la prueba del Teorema 3.41.

Lema 3.38. *Sean X un continuo que no es una curva cerrada simple y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces, son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *Si J es una arco, entonces $\mathcal{E}(X) = C(J)$ y $\mathcal{E}(J)$ es una 2-celda.*

2. *Si J es una curva cerrada simple, entonces $\mathcal{E}(J) = \{J\} \cup F_1(J) \cup C(J - \{p_J\}) \cup \{A : A$ es un subarco de J, tal que q_J es uno de sus puntos extremos$\}$ y $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo a C_0.*

Demostración. (1) Como J es un arco libre de X, se tiene que $J - \{p_J, q_J\}$ es abierto en X. Luego, $J - \{p_J, q_J\} \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como todo subintervalo cerrado de $[0,1]$ se puede aproximar por subintervalos cerrados contenidos en $(0,1)$, concluimos que $C(J) = \operatorname{cl}_{C(J)}(\langle J - \{p_J, q_J\}\rangle_1)$. Así, $C(J) \subset \operatorname{cl}_{C(J)}(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_1) \subset C(J)$. Por tanto, $C(J) = \mathcal{E}(X)$. Además, por el Teorema 1.110, tenemos que $\mathcal{E}(X)$ es una 2-celda. Esto prueba (1).

(2) Por la Observación 3.28, se tiene que $\operatorname{int}_X(J) = J - \{p_J\}$, para algún $p_J \in J$. Como $C(J)$ es cerrado en $C(X)$, tenemos que $\operatorname{cl}_{C(J)}(C(J - \{p\})) = \operatorname{cl}_{C(X)}(C(J - \{p\})) = \mathcal{E}(X)$. Por otro lado, $C(J) = C(J - \{p\}) \cup C(J, p)$ y $C(J - \{p\}) \cap C(J, p) = \emptyset$. Así, $C(J - \{p\}) = C(J) - C(J, p)$ y $\operatorname{Fr}_{C(J)}(C(J - \{p\})) = \operatorname{Fr}_{C(J)}(C(J, p))$. Por tanto, $\mathcal{E}(J) = C(J - \{p\}) \cup \operatorname{Fr}_{C(J)}(C(J, p))$. Además, por el Teorema 1.113 se cumple que $\operatorname{Fr}_{C(J)}(C(J, p)) = \{\{p_J\}, J\} \cup \{A \in C(J) : A$ es un arco y p es un punto extremo de $A\}$. De este modo, se satisface la igualdad de (2). Además, $\mathcal{E}(J) = \operatorname{cl}_{C(X)}(C(J) - C(J, p))$ y,

también por el Teorema 1.113, se cumple que $C(J)$ y $C(J,p)$ son 2-celdas y $\partial C(J) = F_1(J)$. Luego, $\partial C(J) \cap C(S^1, p) = \{\{p\}\}$ y, como $C(J,p) \subset C(J)$, se tiene que $\mathcal{E}(X)$ es homeomorfo al continuo C_0. Esto concluye la prueba de este lema. $\square$

Lema 3.39. *Sea X un continuo localmente conexo que no es una curva cerrada simple. Entonces, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) = \{A \in \mathfrak{P}_2(X) : A$ es conexo o A tiene una componente degenerada o A contiene un extremo de $X\}$.*

Demostración. Si X es un arco, entonces, por el Teorema 1.115, $C_2(X)$ es una 4-celda y $\partial C_2(X) = \{A \in C_2(X) : A$ es conexo o A tiene una componente degenerada o A contiene un extremo de $X\}$. Luego, $\mathfrak{P}_2(X) = C_2(X)$. Obsérvese que $\partial C_2(X) \subset \mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$. Además, dado $A \in \mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$, existe una vecindad $\mathfrak{M}$ de A en $C_2(X)$, tal que A es una 4-celda y $A \in \partial\mathfrak{M}$. Por el Teorema 1.66, se cumple que $A \in \partial C_2(X)$. Así, $\partial C_2(X) = \mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$ y se satisface la igualdad del teorema. Por tanto, podemos suponer que X no es un arco.

Por el Teorema 2.18, basta probar que, dados cualesquiera $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, se cumple que

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \mathfrak{U} =& \{A \in \mathfrak{U} : A \text{ es conexo o } A \text{ tiene una componente degenerada} \\ & \text{o } A \text{ contiene un extremo de } X\},\end{aligned}$$

en donde $\mathfrak{U} = \langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_2$.

Por el Teorema 1.65, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X)_2 = \partial\mathfrak{P}_2(X)$. Como $\mathfrak{P}_2(X)$ es una 2-variedad y $\mathfrak{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{P}_2(X)$, aplicando el Teorema 1.66 obtenemos que $\partial\mathfrak{P}_2(X) = \partial\mathfrak{U}$. Así, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) = \partial\mathfrak{U}$.

Por otro lado, por la Observación 3.28, $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo al intervalo $(0,1]$ o al intervalo $(0,1)$, al igual que $\operatorname{int}_X(K)$. Si $J \neq K$, por el Lema 2.9 (2), se tiene que $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$. Aplicando el Corolario 1.112, se tiene que $\mathfrak{U}$ es una 4-variedad y

$$\begin{aligned}\partial\mathfrak{U} = \{A \in \mathfrak{U} : & A \text{ tiene una componente degenerada o} \\ & A \text{ contiene un extremo de } \operatorname{int}_X(J) \text{ o de } \operatorname{int}_X(K)\}.\end{aligned}$$

Como $\operatorname{int}_X(J)$ y $\operatorname{int}_X(K)$ son subconjuntos abiertos de X, por el Teorema 1.24, un punto $p \in \operatorname{int}_X(J) \cup \operatorname{int}_X(K)$ es un punto extremo de X si, y sólo si, p es punto extremo de $\operatorname{int}_X(J)$ o de $\operatorname{int}_X(K)$. Además, como $\operatorname{int}_X(J)$ y $\operatorname{int}_X(K)$ son ajenos, $\mathfrak{U}$ no tiene elementos conexos. De esta forma podemos escribir la igualdad anterior como

$$\begin{aligned}\partial\mathfrak{U} = \{A \in \mathfrak{U} : \ & A \text{ es conexo } \text{ o} \\ & A \text{ tiene una componente degenerada o} \\ & A \text{ contiene un extremo de } X\}.\end{aligned}$$

Si $J = K$, entonces $\mathfrak{U} = \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2 = C_2(\mathrm{int}_X(J))$. Como $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo al intervalo $(0,1]$ o al intervalo $(0,1)$, aplicando el Corolario 1.116, tenemos que

$$\begin{aligned}\partial\mathfrak{U} = \{A \in \mathfrak{U} : \ & A \text{ es conexo } \text{ o} \\ & A \text{ tiene una componente degenerada } \text{ o} \\ & A \text{ contiene un punto extremo de } \mathrm{int}_X(J)\}.\end{aligned}$$

Similarmente al caso anterior, esta igualdad la podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\partial\mathfrak{U} = \{A \in \mathfrak{U} : \ & A \text{ es conexo } \text{ o} \\ & A \text{ tiene una componente degenerada } \text{ o} \\ & A \text{ contiene un punto extremo de } \mathrm{int}_X(J)\}.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Lema 3.40. *Sea X un continuo localmente conexo. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que*

$$Fr_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J) \quad y \quad Fr_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(J,K) = \{\{p\} \cup A : \ & p \in \mathrm{Fr}_X(J) \ y \ A \in \mathcal{E}(K), \ o \\ & p \in \mathrm{Fr}_X(K) \ y \ A \in \mathcal{E}(J)\}.\end{aligned}$$

Demostración. Primero demostremos la contención hacia la derecha. Fijemos $B \in \mathcal{D}(J,K)$. Queremos mostrar que $B = \{p\} \cup A$, en donde p y A son tales que $p \in \mathrm{Fr}_X(J)$ y $A \in \mathcal{E}(K) = \mathrm{cl}_{C(X)}(C(\mathrm{int}_X(K)))$, o $p \in \mathrm{Fr}_X(K)$ y $A \in \mathcal{E}(J) = \mathrm{cl}_{C(X)}(C(\mathrm{int}_X(J)))$.

Sea $\mathfrak{U} = \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_2$. Luego, existen sucesiones $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \mathfrak{U}$ y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \mathfrak{U}$, con $\lim E_n = B = \lim F_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}_2(X) - \mathfrak{U}$, aplicando el Teorema 2.18, obtenemos $L_n, M_n \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que $F_n \in \langle \mathrm{int}_X(L_n), \mathrm{int}_X(M_n)\rangle_2$ y $\{L_n, M_n\} \neq \{J, K\}$. Podemos suponer que $M_n \neq K$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\{E_n^1, E_n^2\}$ el conjunto de componentes de E_n, con $E_n^1 \cap \operatorname{int}_X(J) \neq \emptyset$, y sea $\{F_n^1, F_n^2\}$ el conjunto de componentes de F_n, con $F_n^1 \cap \operatorname{int}_X(L_n) \neq \emptyset$.

Obsérvese que $B_i, E_n^i, F_n^i \in C(X)$, para $i \in \{1,2\}$. Si $L_n \neq M_n$, entonces, por el Lema 2.9 (2), $\operatorname{int}_X(L_n) \cap \operatorname{int}_X(M_n) = \emptyset$. Luego, por la conexidad de F_n^1, se tiene que $F_n^1 \cap \operatorname{int}_X(M_n) = \emptyset$. Esto implica que $F_n^1 \subset \operatorname{int}_X(L_n)$ y $F_n^2 \cap \operatorname{int}_X(M_n) \neq \emptyset$. Como F_n^2 es también conexo, tenemos que $F_n^2 \subset \operatorname{int}_X(M_n)$. Si $L_n = M_n$, entonces $F_n^1, F_n^2 \subset \operatorname{int}_X(L_n) \cup \operatorname{int}_X(M_n) = \operatorname{int}_X(L_n) = \operatorname{int}_X(M_n)$. En ambos casos, $F_n^1 \in C(\operatorname{int}_X(L_n))$ y $F_n^2 \in C(\operatorname{int}_X(M_n))$. Obsérvese que, por el Lema 2.9 (2), $\operatorname{int}_X(K) \cap \operatorname{int}_X(M_n) = \emptyset$ y, por consiguiente, $F_n^2 \in C(X - \operatorname{int}_X(K))$. Así, $\{F_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{F_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $C(\bigcup\{\operatorname{int}_X(L_n) : n \in \mathbb{N}\})$ y $C(X - \operatorname{int}_X(K))$, respectivamente. De forma similar se puede probar que $\{E_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{E_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $C(\operatorname{int}_X(J))$ y $C(\operatorname{int}_X(K))$, respectivamente.

Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que $\lim F_n^1 = F^1$, $\lim F_n^2 = F^2$, $\lim E_n^1 = E^1$ y $\lim E_n^2 = E^2$, para algunos $F^1, F^2, E^1, E^2 \in C(X)$. Luego, por el Teorema 1.104, $B = \lim F_n = \lim(F_n^1 \cup F_n^2) = \lim F_n^1 \cup \lim F_n^2 = F^1 \cup F^2$ y $B = E^1 \cup E^2$. Obsérvese que $F^2 \in C(X - \operatorname{int}_X(K))$, $E^1 \in \operatorname{cl}_{C(X)}(C(\operatorname{int}_X(J))) \subset C(J)$, $E^2 \in \operatorname{cl}_{C(X)}(C(\operatorname{int}_X(K))) \subset C(K)$ y $F^1, F^2 \in C(J \cup K)$.

Si $K = L_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K = L_n$ y $J \neq M_n$. Aplicando el Lema 2.9 (2) tenemos que $M_n \cap \operatorname{int}_X(J) = M_n \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$. Luego, $\{F_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X - (\operatorname{int}_X(J) \cup \operatorname{int}_X(K))$ y $\{F_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(\operatorname{int}_X(K))$. Así, $F^2 \cap \operatorname{int}_X(J) = \emptyset$ y $F^2 \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$; es decir, $F^2 \subset \operatorname{Fr}_X(J) \cup \operatorname{Fr}_X(K)$. Por la Observación 3.28, $\operatorname{Fr}_X(J) \cup \operatorname{Fr}_X(K)$ es un conjunto con a lo más cuatro elementos. Esto implica que F^2 es degenerado. Sea $p \in \operatorname{Fr}_X(J) \cup \operatorname{Fr}_X(K)$, tal que $F^2 = \{p\}$. Luego, $B = F_1 \cup \{p\}$, con $F^1 \in \operatorname{cl}_{C(X)}(C(\operatorname{int}_X(K))) \subset C(K)$. Si $p \in \operatorname{Fr}_X(J)$, ya acabamos. Si $p \notin \operatorname{Fr}_X(J)$, entonces $p \in K$, $J \neq K$ y $B \subset K$. Así, $E_1 \subset B \cap J = (B \cap \operatorname{Fr}_X(J)) \cup (B \cap \operatorname{int}_X(J)) \subset (B \cap \operatorname{Fr}_X(J)) \cup (K \cap \operatorname{int}_X(J)) = B \cap \operatorname{Fr}_X(J)$. Luego, podemos tomar $q \in B \cap \operatorname{Fr}_X(J)$, tal que $E_1 = \{q\}$. Por tanto, $B = \{q\} \cup E^2$, con $E^2 \in \operatorname{cl}_{C(X)}(C(\operatorname{int}_X(K)))$.

De esta manera, podemos suponer que $K \neq L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.9 (2), $L_n \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, así que $F_n = F_n^1 \cup F_n^2 \subset L_n \cup (X - \operatorname{int}_X(K)) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$. Luego, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_2(X - \operatorname{int}_X(K))$ y $B \in C_2(X - \operatorname{int}_X(K))$. Así, $B \subset (J \cup K) - \operatorname{int}_X(K)$. Si $J = K$, entonces $E^2 \subset B \subset \operatorname{Fr}_X(K)$. Si $J \neq K$, entonces, por el Lema 2.9 (2), $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$. Por consiguiente, $J \cap K \subset \operatorname{Fr}_X(K)$, $B \subset J \cup \operatorname{Fr}_X(K)$ y $E^2 \subset B \cap K \subset (J \cap K) \cup \operatorname{Fr}_X(K) \subset \operatorname{Fr}_X(K)$. De cualquier modo, $E^2 \subset \operatorname{Fr}_X(K)$. Por tanto,

$B = E^1 \cup \{p\}$ para algún $p \in \mathrm{Fr}_X(K)$ y con $E^1 \in \mathrm{cl}_{C(X)}(C(\mathrm{int}_X(J)))$. Esto concluye la prueba de la primera contención.

Probemos la contención izquierda. Sea $B = \{p\} \cup A$, donde $p \in \mathrm{Fr}_X(J)$ y $A \in \mathcal{E}(K)$. Sea $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\langle \mathrm{int}_X(K)\rangle_1$, tal que $\lim A_m = A$. Por la Observación 3.28, $\mathrm{Fr}_X(J) \subset E(J)$, así que existe una sucesión $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{int}_X(J)$, tal que $\lim p_m = p$. Por la hipótesis del Lema, existe una sucesión $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{FA}(X) - J$, tal que $\lim q_m = p$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $\{p_m\} \cup A_m \in \mathfrak{U}$ y $\{q_m\} \cup A_m \notin \mathfrak{U}$. Si $p_m \in A_m$, entonces $\{p_m\} \cup A_m = A_m$ es conexo y si $p_m \notin A_m$, entonces $\{p_m\}$ es una componente degenerada de $\{p_m\} \cup A_m$, pues A_m y $\{p_m\}$ son subconjuntos cerrados de $\{p_m\} \cup A_m$ y ajenos. En cualquiera de estos dos casos, aplicando el Lema 3.39, tenemos que $\{p_m\} \cup A_m \in \mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$. Análogamente, $\{q_m\} \cup A_m \in \mathfrak{P}_2^{\partial}(X)$. Así, $\{\{p_m\} \cup A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \mathfrak{U}$ y $\{\{q_m\} \cup A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \mathfrak{U}$. Además, por el Teorema 1.104, $\lim(\{p_m\} \cup A_m) = (\lim\{p_m\}) \cup (\lim A_m) = B$. De forma similar, $\lim(\{q_m\} \cup A_m) = B$. Por tanto, $B \in \mathcal{D}(J, K)$. Esto concluye la prueba de la segunda contención y la demostración del lema. $\square$

El teorema siguiente es, junto con el Teorema 2.18, la base de la demostración del Teorema 3.42.

Teorema 3.41. *Sean X y Y continuos localmente conexos. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $L, M \in \mathfrak{A}_S(Y)$, tales que*

$$Fr_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J), \quad Fr_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K),$$
$$Fr_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L) \quad y \quad Fr_Y(M) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M).$$

Supongamos que $h : C_2(X) \to C_2(Y)$ es un homeomorfismo y

$$h(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L), \mathrm{int}_Y(M)\rangle_2.$$

Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(1) Si $J = K$ y J es una curva cerrada simple, entonces $L = M$ y L es una curva cerrada simple.

(2) Si $J = K$, J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$, L es un arco y $L \notin \mathfrak{A}_E(Y)$.

(3) Si $J = K$ y $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$ y $L \in \mathfrak{A}_E(Y)$.

(4) Si $J \neq K$, entonces $L \neq M$.

(5) *Si X y Y son casi enrejados, $J = K$ y $p \in \mathrm{Fr}_X(J)$, entonces $h(\{p\})$ es un conjunto singular y $h(\{p\}) \subset \mathrm{Fr}_Y(L)$.*

Demostración. Para esta demostracíon, se construirán modelos para el conjunto $\mathcal{D}(J, K)$, considerando todas las posibilidades sobre los conjunto J y K, cuando $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Pero primero, será conveniente probar algunos otros hechos relacionados con $\mathcal{D}(J, K)$.

Para cualesquiera $M \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $r \in X$, sea $D_r^M = \{\{r\} \cup A : A \in \mathcal{E}(M)\}$. Mostraremos que D_r^M es homeomorfo a $\mathfrak{E}(M)$. Obsérvese que la función $f : \mathcal{E}(M) \to D_r^M$ dada por $A \xmapsto{f} \{r\} \cup A$ es sobreyectiva. Además, se sigue del Teorema 1.104, que f es continua. Probemos que f es inyectiva. Para esto, sean $A, B \in \mathcal{E}(M)$ con $\{r\} \cup A = \{r\} \cup B$. Si $r \in A$, entonces $\{r\} \cup B$ es conexo y, en consecuencia, $r \in B$ y $A = B$. Si $r \notin A$, entonces $\{r\}$ y A son las componentes de $\{r\} \cup A$. Además, $\{r\} \cup B$ es disconexo, así que $r \notin B$. Esto implica que las componentes de $\{r\} \cup B$ son $\{r\}$ y B. Así, $A = B$. Esto prueba que f es inyectiva. Puesto que $\mathcal{E}(M)$ es compacto y D_r^M es Hausdorff, deducimos que f es un homeomorfismo. Por tanto, $\mathcal{E}(M)$ es homeomorfo a D_r^M.

Por otra parte, obsérvese que, por el Lema 3.38, $F_1(M) \subset \mathcal{E}(M)$. Así, los conjuntos $\{r, p\}$ M son elementos de D_r^M, para cualquier $p \in M$. Asimismo, $M \in \mathcal{E}(M)$, por lo cual $M \in D_r^M$, siempre que $r \in L$.

Fijemos $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $r, s \in \mathrm{Fr}_X(L) \cup (X - L)$ con $r \neq s$. Mostraremos expresiones concretas para $D_r^L \cap D_s^L$. Para ello, supongamos que C es un elemento de $D_r^L \cap D_s^L$. Luego, $\{r\} \cup A = C = \{s\} \cup B$, para algunos $A, B \in \mathcal{E}(L)$. Consideramos dos posibilidades: que tanto r como s sean elementos de L y que alguno de r o s no pertenezca a L. Supongamos primero que $r, s \in L$, es decir, que $r, s \in \mathrm{Fr}_X(L)$. Obsérvese que en este caso, L es un arco y r y s son sus puntos extremos. Además, por el párrafo anterior, $\{r, s\}, L \in D_r^L \cap D_s^L$. Si $r \notin A$, entonces C es disconexo y $\{r\}$ y A son las componentes de C. Análogamente, $\{s\}$ y B son las componentes de C. Como $\{r\} \neq \{s\}$, tenemos que $A = \{s\}$ y $B = \{r\}$. Así, $C = \{r, s\}$. Por otro lado, si $r \in A$, entonces $C = A$. Luego, $s \in A$. Esto implica que A es un subcontinuo del arco L que contiene a sus dos puntos extremos; es decir $A = L$. Por lo tanto, $D_r^L \cap D_s^L = \{\{r, s\}, L\}$.

Ahora supongamos que $r \notin L$ o $s \notin L$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r \notin L$. Luego, $r \notin A$. Esto implica que C es disconexo y que $\{r\}$ y A son sus componentes. Además, $s \notin B$ y $\{s\}$ y B son las componentes de C. Como $\{r\} \neq \{s\}$, se tiene que $A = \{s\}$ y $B = \{r\}$. Por tanto, $C = \{r, s\}$. Sin embargo, $\{r, s\} \in D_s^L$ implica que $r \in L$, lo cual no es posible. Así, $D_r^L \cap D_s^L = \emptyset$.

Fijemos $L, M \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $L \neq M$. Tomemos $r \in \mathrm{Fr}_X(L)$ y $s \in \mathrm{Fr}_X(M)$, tales que $L \neq M$ o $r \neq s$. Mostraremos una expresión para $D_r^M \cap D_s^L$. Para ello tomemos $C \in D_r^M \cap D_s^L$. Luego, $\{r\} \cup A = C = \{s\} \cup B$, para algunos $A \in \mathcal{E}(M)$ y $B \in \mathcal{E}(L)$. Por el Lema 2.9 (2), se tiene que $L \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$; es decir, $L \cap M \subset \mathrm{Fr}_X(M)$. Como $B \subset \{r\} \cup A$, $r \in L$, $B \subset L$ y $A \subset M$, tenemos que $B \subset \{r\} \cup (A \cap L) \subset \{r\} \cup (L \cap M) \subset \mathrm{Fr}_X(L)$. Como B es conexo y $\mathrm{Fr}_X(L)$ es finito, se tiene que $B = \{b\}$, para algún $b \in \mathrm{Fr}_X(L)$. Similarmente, existe $a \in \mathrm{Fr}_X(M)$, tal que $A = \{a\}$. Así, $\{r\} \cup \{a\} = C = \{s\} \cup \{b\}$. Esto prueba la contención hacia la derecha de la igualdad $D_r^M \cap D_s^L = \{\{r, a\} : a \in \mathrm{Fr}_X(M)\} \cap \{\{s, b\} : b \in \mathrm{Fr}_X(L)\}$. La otra contención se sigue de uno de los párrafos anteriores. Así, si $\mathrm{Fr}_X(L) = \{r, u\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{s, v\}$, entonces $D_r^M \cap D_s^L = \{\{r, s\}, \{r, v\}\} \cap \{\{s, r\}, \{s, u\}\} = \{\{r, s\}\} \cup (\{\{r, v\}\} \cap \{\{s, u\}\})$. Más aún, $D_r^M \cap D_s^L \neq \{\{r, s\}\}$ si, y sólo si, $\{r, v\} = \{s, u\} \neq \{r, s\}$. Obsérvese que esta última expresión es equivalente a que $v \neq s$, $r \neq u$, $u = v$ y $r = s$.

En resumen, tenemos lo siguiente. Si $r, s \in \mathrm{Fr}_X(L) \cup (X - L)$, entonces

$$D_r^L \cap D_s^L = \begin{cases} \{\{r, s\}, L\} & \text{si } r, s \in L, \\ \emptyset & \text{si } r \notin L \text{ o } s \notin L \end{cases}$$

y, si $r, u \in \mathrm{Fr}_X(L)$, $s, v \in \mathrm{Fr}_X(M)$, entonces

$$D_r^M \cap D_s^L = \begin{cases} \{\{r, s\}, \{r, v\}\} & \text{si } u = v,\ r = s,\ r \neq u \text{ y } v \neq s, \\ \{\{r, s\}\} & \text{de cualquier otro modo.} \end{cases}$$

Fijemos $J, K \in \mathfrak{A}_S(X))$. Por la Observación 3.28, podemos expresar $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K, q_K\}$ (es decir, que ambos conjuntos tienen a lo más dos elementos). Ahora procederemos a mostrar los modelos para el conjunto $\mathcal{D}(J, K)$.

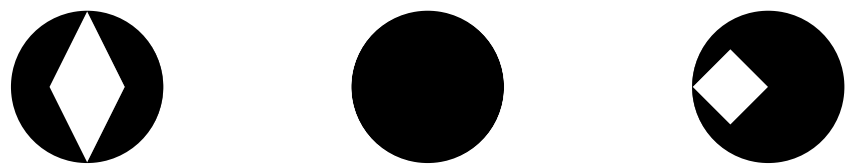
Por el Lema 3.40, se cumple que $\mathcal{D}(J, K) = \{\{p\} \cup A : p \in \mathrm{Fr}_X(J), A \in \mathcal{E}(K)\} \cup \{\{p\} \cup A : p \in \mathrm{Fr}_X(K), A \in \mathcal{E}(J)\}$. Luego, $\mathcal{D}(J, K) = D_{p_J}^K \cup D_{q_J}^K \cup D_{p_K}^J \cup D_{q_K}^J$.

Primero, supongamos que $J = K$. Obsérvese que, al ocurrir esto, se tiene que $\mathcal{E}(J) = \mathcal{E}(K)$; para cada $s \in \mathrm{Fr}_X(J) = \mathrm{Fr}_X(K)$, $D_s^K = D_s^J$; y, consecuentemente, $\mathcal{D}(J, K) = D_{p_J}^J \cup D_{q_J}^J$. Tenemos los siguientes casos:

(a) J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$. En este caso $D_{p_J}^J$ y $D_{q_J}^J$ son 2-celdas, $fr_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathcal{D}(J, J) = D_{p_J}^J \cup D_{q_J}^J$. Además, como $p_J, q_J \in J$, se cumple que $D_{p_J}^J \cap D_{q_J}^J = \{\{p_J, q_J\}, J\}$.

(b) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. Aquí, $D_{p_J}^J$ es una 2-celda, $\mathrm{Fr}_X(J) = \{P_J\}$ y $\mathcal{D}(J, J) = D_{p_J}^J$.

(c) J es una curva cerrada simple. Aquí, $D_{p_J}^J$ es homeomorfo al continuo C_0, $\mathrm{Fr}_X(J) = \{P_J\}$ y $\mathcal{D}(J, J) = D_{p_J}^J$.



(a) (b) (c)

Ahora, supongamos que $J \neq K$. Tenemos los casos:

(d) J y K son arcos y $J, K \notin \mathfrak{A}_E(X)$. En este caso, $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K, q_K\}$, con $p_J \neq q_J$ y $p_K \neq q_K$. También, $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^K_{q_J} \cup D^J_{p_K} \cup D^J_{q_K}$.

$(d.1)$ $J \cap K$ posee a lo más un elemento. Podemos suponer que $p_J \notin K$ y $p_K \notin J$. Así, $D^K_{p_J} \cap D^K_{q_J} = \emptyset$ y $D^J_{p_K} \cap D^J_{q_K} = \emptyset$. Además, $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$, $D^K_{p_J} \cap D^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, $D^K_{q_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$ y $D^K_{q_J} \cap D^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

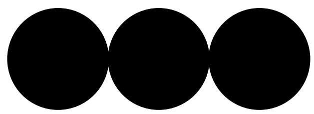
$(d.2)$ $J \cap K$ es un conjunto con dos elementos. Esto implica que $\mathrm{Fr}_X(J) = \mathrm{Fr}_X(K)$. Podemos suponer que $p_J = p_K$ y $q_J = q_K$. Luego, $p_K, q_J \in J$ y $p_J, q_J \in K$. Por tanto, $D^K_{p_J} \cap D^K_{q_J} = \{\{p_J, q_J\}, K\}$ y $D^J_{p_K} \cap D^J_{q_K} = \emptyset$. Además, como $p_J \neq q_J$ y $p_K \neq q_K$, tenemos que $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}, \{p_J, q_K\}\}$, $D^K_{p_J} \cap D^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, $D^K_{q_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$ y $D^K_{q_J} \cap D^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}, \{p_J, q_K\}\}$.

$(d1)$ $(d2)$

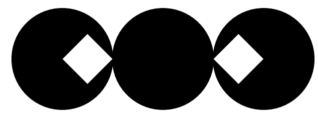
(e) J y K son arcos, $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y $K \in \mathfrak{A}_E(X)$. En este caso, $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K\}$, con $p_J \neq q_J$. Luego, $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^K_{q_J} \cup D^J_{p_K}$. Además, como $\mathrm{Fr}_X(J)$ tiene más elementos que $\mathrm{Fr}_X(K)$, podemos suponer que $p_J \notin \mathrm{Fr}_X(K)$, es decir, que $p_J \notin K$. Así, $D^K_{p_J} \cap D^K_{q_J} = \emptyset$. Por otro lado, como $p_K = q_K$, tenemos que $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$ y $D^K_{q_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$. En este caso, $D^K_{p_J}$, $D^K_{q_J}$ y $D^J_{p_K}$ son 2-celdas.

(f) J es un arco, $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y K es una curva cerrada simple. Aquí, tenemos que $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K\}$, con $p_J \neq q_J$. Luego, se cumplen las mismas igualdades que en (e); es decir, $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^K_{q_J} \cup$

$D^J_{p_K}$, $D^K_{p_J} \cap D^K_{q_J} = \emptyset$, $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$ y $D^K_{q_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$. Sin embargo, en este caso $D^K_{p_J}$ y $D^K_{q_J}$ son homeomorfos a C_0 y $D^J_{p_K}$ es una 2-celda.



(e)

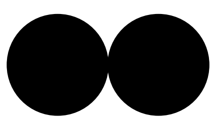


(f)

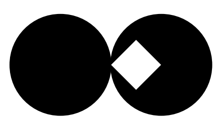
(g) J y K son arcos y $J, K \in \mathfrak{A}_E(X)$. Como $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K\}$, tenemos que $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^J_{p_K}$. Como $p_J = q_J$, se cumple que $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$. En este caso, $D^K_{p_J}$ y $D^J_{p_K}$ son 2-celdas.

(h) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y K es una curva cerrada simple. Como $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K\}$, se tienen las mismas igualdades que en (g), esto es, $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^J_{p_K}$ y $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$. Aquí, $D^K_{p_J}$ es una 2-celda y $D^J_{p_K}$ es homeomorfo a C_0.

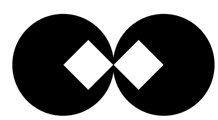
(i) J y K son curvas cerradas simples. Al igual que en (h), se satisface que $\mathrm{Fr}_X(J) = \{p_J\}$ y $\mathrm{Fr}_X(K) = \{p_K\}$. Asimismo, $\mathcal{D}(J, K) = D^K_{p_J} \cup D^J_{p_K}$ y $D^K_{p_J} \cap D^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$. No obstante, en este punto, $D^K_{p_J}$ y $D^J_{p_K}$ son homeomorfos a C_0.



(g)



(h)



(i)

Ahora probemos (5). Sea $B = h(\{p\})$. Por la Observación 3.28, $\mathrm{Fr}_X(J) \subset E(J)$. Luego, como $p \in \mathrm{Fr}_X(J)$, podemos tomar una sucesión $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{int}_X(J)$, tal que $\lim p_m = p$. Asimismo, por hipótesis, existe una sucesión $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{FA}(X)$, tal que $\lim x_m = p$. Aplicando el Teorema 1.103 y la continuidad de h, tenemos que $\lim h(\{p_m\}) = h(\lim\{p\}) = h(\{\lim p_m\}) = h(\{p\})$. De igual forma $\lim h(\{x_m\}) = h(\{p\})$. Por otro lado, por los incisos (1), (2) y (3), se satisface la igualdad $L = M$. Por consiguiente, $h(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_2$. Obsérvese que, dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, se cumple $\{p_m\} \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2$, así que $h(\{p_m\}) \in \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_2$. Como $C_2(L)$ es un subconjunto cerrado de $C_2(X)$, se tiene que $B \in C_2(L)$; es decir, $B \subset L$.

Por el Corolario 2.13, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $x_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$. Sean $L_m, M_m \in \mathfrak{A}_S(Y)$, tales que

$$h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_X(L_m), \mathrm{int}_X(M_m)\rangle_2.$$

Como $x_m \in J_m - J$, se tiene que $J_m \neq J$. Luego, $\mathrm{int}_X(J_m) \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$ y $h(\langle \mathrm{int}_X(J_m) \rangle_2) \cap h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2) = \emptyset$. Así,

$$\langle \mathrm{int}_Y(L_m), \mathrm{int}_Y(M_m) \rangle_2 \cap \langle \mathrm{int}_Y(Y) \rangle_2 = \emptyset.$$

Luego, $h(x_m) \notin \langle \mathrm{int}_Y(L) \rangle_2$; es decir, $h(x_m) \cap \mathrm{int}_Y(L) = \emptyset$. Por tanto, $B = h(x) \subset Y - \mathrm{int}_X(L)$. Así, se concluye que $B \subset L \cap \mathrm{cl}_Y(Y - L) = \mathrm{Fr}_Y(L)$. $\square$

Ahora se muestra el análogo a los Teoremas 3.35 y 3.36 para el caso $n = 2$.

Teorema 3.42. *Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_2(X)$ y $C_2(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Usaremos la siguiente notación para X: dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, denotaremos por p_J y q_J a los puntos extremos de J, si J es una arco, y por q_J al punto en J tal que $J - \{q_J\}$ es abierto en X, si J es una curva cerrada simple. Por la Observación 3.28 se tiene que $\mathrm{Fr}_X(J) = \{q_J\}$ si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ o si J es una curva cerrada simple, y que $\mathrm{Fr}_X(J) = \{q_J, p_J\}$ en otro caso. Tanto la notación como la observación son válidas y se usarán para Y.

Sea $h : C_2(X) \to C_2(Y)$ un homeomorfismo. Por la Observación 3.26, $h(\mathfrak{P}_2(X)) = \mathfrak{P}_2(Y)$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. El Teorema 2.18 garantiza que el conjunto $\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(X)$. Luego, $h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2)$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(Y)$. Aplicando de nuevo el Teorema 2.18, existen $L, M \in \mathfrak{P}_2(Y)$, tales que $h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L), \mathrm{int}_Y(M) \rangle_2$. Como X es casi enrejado, el conjunto $\mathcal{FA}(X) - J$ es denso en el subconjunto abierto $X - J$ de X. Luego, $\mathrm{Fr}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(X - J) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$. Similarmente, como Y es casi enrejado, $\mathrm{Fr}_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$ y $\mathrm{Fr}_Y(M) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M)$ Por (1), (2) y (3) del Teorema 3.41, se tiene que $L = M$. Así, $h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2) = \langle \mathrm{int}_X(L) \rangle_2$. De esta manera, dado cualquier $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ existe $L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)$, tal que $h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L_J) \rangle_2$.

Obsérvese que la argumentación anterior se puede repetir para el homeomorfismo $h^{-1} : C_2(Y) \to C_2(X)$. Así, para cualquier $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $h^{-1}(\langle \mathrm{int}_Y(L) \rangle_2) = \langle \mathrm{int}_X(K) \rangle_2$; es decir, $\langle \mathrm{int}_X(L) \rangle_2 = \langle \mathrm{int}_Y(L_J) \rangle_2$. De este modo $\mathrm{int}_X(K) = \mathrm{int}_X(J)$. Luego, $L = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(L)) = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(L_J)) = L_J$. Por tanto, $Y - R_Y = \bigcup\{L_J : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Más aún, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $J \neq K$, por el Lema 2.9 (2), $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$, así que $\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2 \cap \langle \mathrm{int}_X(K) \rangle_2 = \emptyset$. Como h es inyectiva, tenemos que $h(\langle \mathrm{int}_X(J) \rangle_2) \cap h(\langle \mathrm{int}_X(K) \rangle_2) = \emptyset$; es decir, $\langle \mathrm{int}_Y(L_J) \rangle_2 \cap \langle \mathrm{int}_Y(L_K) \rangle_2 = \emptyset$. Así, $L_J \neq L_K$.

Sea $p \in R_X$. Afirmamos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in R_Y$. Como $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, podemos tomar una sucesión $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{FA}(X)$, tal que $\lim p_m = p$. Por el Corolario 2.13, $\mathcal{FA}(X) = X - R_X$. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $p_m \in \text{int}_X(J_m)$. Como X no es un arco ni una curva cerrada simple, $\text{int}_X(J_m) \subsetneq X$, así que podemos tomar $q_m \in \text{Fr}_X(J_m)$. Obsérvese que, si $\{J_m : m \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces $p \in \text{cl}_X \bigcup\{J_m : m \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{J_m : m \in \mathbb{N}\}$ y, por consiguiente, $p \in J_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Luego, $p \in \text{Fr}_X(J_r)$. Aplicando (5) del Teorema 3.41, tenemos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in \text{Fr}_Y(L_{J_r})$. De esta manera, podemos suponer que $\{J_m : m \in \mathbb{N}\}$ es infinito y, más aún, que $J_m \neq J_k$ si $m \neq k$. Por el Lema 2.10, $\lim J_m = \{p\}$. Luego, por el Lema 1.91, $\lim\{q_m\} = \{p\}$. Por (5) del Teorema 3.41, se tiene que $h(\{q_m\}) = \{w_m\}$, para algún $w_m \in \text{Fr}_Y(L_{J_m})$. Tomando en cuenta la continuidad de h tenemos que $\lim h(\{q_m\}) = h(\{p\})$, esto es, $\lim\{w_m\} = h(\{p\})$. Como $F_1(Y)$ es un subconjunto cerrado de $C_2(Y)$, existe $y \in Y$, tal que $\lim\{w_m\} = \{y\}$. Luego, por la continuidad de φ^{-1} se tiene que $\lim w_m = y$. Obsérvese que, por el Lema 2.9 (3), $\text{Fr}_Y(L_{J_m}) \subset R_Y$. Así, $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el conjunto cerrado R_Y y, por ende, $y \in R_Y$. Por tanto, $h(\{p\}) = \{y\}$, con $y \in R_Y$. De esta manera, podemos considerar la función continua $g_1 = \varphi_Y^{-1} \circ h \circ \varphi_X : R_X \to R_Y$. Obsérvese que, también por el Lema 2.9 (3), para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ se cumple que $\text{Fr}_X(J) \subset R_X$.

Si J es una curva cerrada simple, por (1) y (5) del Teorema 3.41, L_J es una curva cerrada simple y $h(\{q_J\})$ es un conjunto singular contenido en $\text{Fr}_X(L_J) = \{q_{L_J}\}$; es decir, $g_1(q_J) = q_{J_L}$. Sea $g_J : J \to L_J$ un homeomorfismo con $g_J(q_{J_L}) = q_J$. Similarmente, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, por (1) y (3) del Teorema 3.41, $L_J \in \mathfrak{A}_E(Y)$ y $g_1(q_{J_L}) = q_{J_L}$. Fijemos un homeomorfismo $g_J : J \to L_J$ con $g_J(q_J) = q_{L_J}$, Si J es un arco que no pertenece a $\mathfrak{A}_E(X)$, entonces, por (2) y (5) del Teorema 3.41, L_J es un arco que no pertenece a $\mathfrak{A}_E(Y)$ y $h(\{p_J\})$ y $h(\{q_J\})$ son conjuntos singulares contenidos en $\text{Fr}_X(L_J) = \{q_{L_J}, p_{J_L}\}$. Luego, podemos suponer que $h(\{p_J\}) = \{p_{J_L}\}$. Como h es inyectiva, $h(\{q_J\}) = \{q_{J_L}\}$. Así, $g(p_J) = p_{J_L}$ y $g(q_J) = q_{J_L}$. Fijemos un homeomorfismo $g_J : J \to L_J$ con $g_J(p_J) = p_{L_J}$ y $g_J(q_J) = q_{L_J}$. Obsérvese que en cualquiera de estos casos, $g_J(\text{Fr}_X(J)) = \text{Fr}_Y(L_J)$. Como $\{\text{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X)$ es una familia de subconjuntos abiertos y ajenos entre sí de X, existe una función continua $g_2 : X - R_X \to Y$, tal que $g_2|_{\text{int}_X(J)} = g_J|_{\text{int}_X(J)}$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.

Sea $g : X \to Y$ la función, tal que $g|R_X = g_1$ y $g|X - R_X = g_2$. Obsérvese que $g|_J = g_J$. Como g_1 y g_2 son continuas, para mostrar que g es continua, resta probar que g es continua en cada punto de $\text{Fr}_X(X - R_X)$.

Sea $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X - R_X$, tal que $\lim p_m = p$ para algún $p \in F$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, tal que $p_m \in \text{int}_X(J_M)$. Si $\{J_m : m \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces $p \in \text{cl}_X(\bigcup\{J_m : m \in \mathbb{N}\}) = \{J_m : m \in \mathbb{N}\}$, por lo cual $p \in J_{m_0}$, para algún $m_0 \in \mathbb{N}$. Luego, $p \in \mathrm{Fr}_X(J_{m_0})$. De esta manera, podemos suponer que $J_m \neq J_k$ si $m \neq k$. Aplicando el Lema 2.10, tenemos que $\lim J_m = \{p\}$. Luego, por el Lema 1.91, $\lim\{q_{J_m}\} = \{p\}$.

Como cada q_{J_m} es un elemento de R_X, se tiene que $g(q_{J_m}) = g_1(q_{J_m}) \in L_{J_m}$, Además, por la continuidad de h, $\{g(p)\} = \varphi(g(p)) = h(\{p\}) = \lim h(\{q_{J_m}\}) = \lim\{g(q_{J_m})\}$. Luego, por la continuidad de φ^{-1}, obtenemos que $\lim g(q_{J_m}) = g(p)$. Así, y porque $L_{J_m} \neq L_{J_k}$ para $J_k \neq J_m$, podemos aplicar de nuevo el Lema 2.10 para obtener $\lim L_{J_m} = g(p)$. Obsérvese también que $g(p_m) = g|_{\mathrm{int}_X(J_m)}(p_m) = g_{J_m}(p_m) \in L_{J_m}$. Aplicando nuevamente el Lema 1.91, se tiene que $\lim g(p_m) = g(p)$. Por lo tanto, g es continua.

Para mostrar que g es una biyección nótese que $g(\mathrm{int}_X(J)) = \mathrm{int}_Y(L_J)$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Así, $g(X - R_X) = g(\bigcup\{J : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) = \bigcup\{L_J : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = Y - R_Y$. Por el Corolario 2.13, $\mathcal{FA}(X) = Y - R_Y$. Luego, R_X es denso en X, y R_Y es denso en Y. Por tanto, $Y = \mathrm{cl}_Y(g(X - R_X)) \subset g(\mathrm{cl}_X(X - R(X))) = g(X)$. Así, g es sobreyectiva. Además, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $J \neq K$, como g_J es un homeomorfismo, se tiene que $g_J(\mathrm{int}_X(J)) = g_J(J - \mathrm{Fr}_X(J)) = L_J - \mathrm{Fr}_Y(L_J) = \mathrm{int}_Y(L_J)$. Similarmente, $g_K(\mathrm{int}_X(K)) = \mathrm{int}_Y(L_K)$. Como $L_J \neq L_K$, aplicando el Lema 2.9 (2), tenemos que $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_Y(L_K) = \emptyset$; es decir, $g_J(\mathrm{int}_X(J)) \cap g_K(\mathrm{int}_X(K)) = \emptyset$. Por tanto, g_2 es inyectiva. Como g_1 también es inyectiva y $g_1(R_X) \cap g_2(X - R_X) \subset R_Y \cap g(X - R_X) = R_Y \cap Y - R(Y) = \emptyset$, concluimos que g es inyectiva. Por lo tanto, g es un homeomorfismo. Con esto concluimos la prueba del teorema. $\square$

Como un compendio de los Teoremas 3.35, 3.36 y 3.42, se enuncia el siguiente resultado que establece una propiedad similar a la unicidad de hiperespacios $C_n(X)$ para los elementos de la clase de los continuos que son localmente conexos y casi enrejados, pero restringida a dicha clase.

Teorema 3.43. *Supongamos que X y Y son continuos localmente conexos y casi enrejados, y que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Si $n = 1$ y X es distinto de un arco y de una curva cerrada simple, entonces X es homeomorfo a Y.

(b) Si $n \neq 1$, entonces X es homeomorfo a Y.

Demostración. (a) Supongamos que X es distinto de un arco y una curva cerrada simple. Para poder ocupar el Teorema 3.36, probaremos que Y no es un arco. Aplicando el Teorema 1.44, obtenemos $p \in X$, tal que $\mathrm{ord}(p, X) \geq 3$. Así, existe una vecindad abierta U de p en X, tal que, para cada subconjunto abierto U_0 de X con $p \in U_0 \subset U$, se cumple que $|\operatorname{Fr}_X(U_0)| \geq 3$. Obsérvese que $|\operatorname{Fr}_X(U)| \geq 3$, por lo cual $U \neq X$. Sea W una vecindad abierta de p en X, tal que $\operatorname{cl}_X(W) \subset U$. Luego, $|\operatorname{Fr}_X(W)| \geq 3$. Como X es localmente conexo, podemos suponer que W es conexo. Obsérvese que $\operatorname{cl}_X(W)$ es un subcontinuo de X. Tomemos $a_1, a_2, a_3 \in \operatorname{Fr}_X(W)$ distintos por pares. Sean V_1, V_2 y V_3 subconjuntos abiertos de X ajenos por pares, tales que $a_i \in V_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Fijemos $i \in \{1, 2, 3\}$. Como X es un continuo localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo Z_i de X, tal que $a_i \in Z_i \subset \operatorname{cl}_X(Z_i) \subset V_i$. Obsérvese que $\operatorname{cl}_X(Z_i)$ es conexo y compacto. Además, como U es un subconjunto propio y abierto de X, se cumple que U no es cerrado en X. Así, $\operatorname{cl}_X(Z_i) - \operatorname{cl}_X(W) \supset \operatorname{cl}_X(Z) - U \neq \emptyset$.

De esta forma, los conjuntos $\operatorname{cl}_X(W_1)$, $\operatorname{cl}_X(W_2)$ y $\operatorname{cl}_X(W_3)$ son subcontinuos de X ajenos por pares. Esto implica que estos mismos conjuntos están mutuamente separados por pares en X. Además, para cada $i \in \{1, 2.3\}$ se satisface que $\operatorname{cl}_X(Z_i) - \operatorname{cl}_X(W) \neq \emptyset$ y $a_i \in \operatorname{cl}_X(Z_i) \cap \operatorname{cl}_X(W)$. De este modo, el conjunto $T = cl_X(W) \cup \operatorname{cl}_X(Z_1) \cup \operatorname{cl}_X(Z_2) \cup \operatorname{cl}_X(Z_3)$ es un subcontinuo de X, tal que

$$T - \operatorname{cl}_X(W) = \bigcup_{i=1}^{3} (\operatorname{cl}_X(Z_i) - \operatorname{cl}_X(W))$$

donde las diferencias de la derecha están mutuamente separadas por pares en X. Aplicando el Teorema 2.1, obtenemos una 3-celda $\mathfrak{M}$ contenida en $C(X)$.

Así, $h(\mathfrak{M})$ es una 3-celda contenida en $C(Y)$. Por tanto, el Ejemplo 1.72 asegura que $\dim(h(\mathfrak{M})) = 3$. Por el Teorema 1.68 (1), se satisface que $\dim(C(Y)) \geq 3$. Aplicando de nuevo el Ejemplo 1.72, se tiene que $C(Y)$ no es una 2-variedad y, por consiguiente, $C(Y)$ no es una 2-celda. Luego, por los Teoremas 1.110 y 1.113, se cumple que Y no es un arco ni una curva cerrada simple. Aplicando el Teorema 3.36, obtenemos que X es homeomorfo a Y. Esto prueba (a).

(b) El caso $n = 2$ es el Teorema 3.42. El caso $n \geq 3$ se enuncia en el Teorema 3.35. $\square$

Para cerrar este capítulo, se presenta el teorema que establece la unicidad de los hiperespacios $C_n(X)$ de los continuos enrejados.

Teorema 3.44. *Supongamos que X es un continuo enrejado. Si $n \neq 1$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Si X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$.*

Demostración. Demostremos la primera parte. Para ello, sea $n \neq 1$. Supongamos que Y es un continuo, tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. Como

X es enrejado, aplicando el Lema 3.5, tenemos que X es localmente conexo. Luego, por el Teorema 1.99, se cumple que $C_n(X)$ es locamente conexo. Así, $C_n(Y)$ es localmente conexo. De nuevo por el Teorema 1.99, Y es localmente conexo. Sea $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Por la Observación 3.26, se cumple que $h(\mathfrak{F}_n(X)) = \mathfrak{F}_n(Y)$. Además, como X es enrejado, por el Teorema 3.8, se satisface que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$. Así, $\mathfrak{F}_n(Y)$ es denso en $C_n(Y)$. Aplicando de nuevo el Teorema 3.8, obtenemos que Y es un continuo enrejado. En particular, Y es un continuo casi enrejado. Como X es también un continuo casi enrejado, aplicando el Teorema 3.43 (b), concluimos que X es homeomorfo a Y. Esto prueba que X tiene hiperespacio único $C_n(X)$.

La segunda parte del teorema es idéntica salvo que omitimos el caso en que X es un arco o un curva cerrada simple y reemplazamos el uso de (b) del Teorema 3.43, por (a) del mismo teorema. $\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[1] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, and F. Macías-Romero. Local dendrites with unique hyperspace $C(X)$. *Topology Appl.*, 157(13):2069–2085, 2010.

[2] R. D. Anderson. On topological infinite deficiency. *Michigan Math. J.*, 14:365–383, 1967.

[3] J. J. Charatonik and A. Illanes. Local connectednes in hyperspaces. *Rocky Mountain J. Math*, 36(3):811–856, 2006.

[4] C. O. Christenson and L. Voxman. *Aspects of Topology.* BCS, Associates, 1998.

[5] D. W. Curtis and R. M. Schori. 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the hilbert cube. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:927–931, 1974.

[6] V. Martínez de-la Vega. Dimension of the n-fold hyperspaces of graphs. *Houston J. Math.*, 32(3):783–799, 2006.

[7] R. Duda. On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, i. *Fund. Math*, 62:265–286, 1968.

[8] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, and V. Martínez de-la Vega. Uniqueness of hyperspaces of peano continua. *Rocky Mountain J. Math.*, 43(5):1583–1624, 2013.

[9] D. Herrera. Dendrites with unique hyperspace. *Houston J. Math.*, 33(3):795–805, 2007.

[10] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, and F. Macías-Romero. Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$. *Topology Appl.*, 156(3):549–557, 2009.

[11] D. Herrera-Carrasco and F. Macías-Romero. Dendrites with unique n-fold hyperspace. *Topology Proc.*, 32:301–320, 2008.

[12] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*, volume 4 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1941.

[13] A. Illanes. The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph is unique. *Glas. Mat. Ser. III*, 37(57)(2):347–363, 2002.

[14] A. Illanes. Finite graphs X have unique hyperspace $C_n(X)$. *Topology Proc.*, 27(1):179–188, 2003.

[15] A. Illanes. Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$, II. *Topology Proc.*, 156(3):549–557, 2009.

[16] A. Illanes and S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, volume 126 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.

[17] K. Kuratowski. *Topology*, volume II. Academic Press, New York-London and PWN, Warszawa, 1968. New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor.

[18] E. E. Moise. Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:1111–1121, 1949.

[19] Jr. S. B. Nadler. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, volume 49 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 1978.

[20] Jr. S. B. Nadler. *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* New York: Marcel Dekker Inc., 1992.