BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

LOS EFECTOS DEL CONTRATO DIDÁCTICO Y SU REPERCUSIÓN EN LA GESTIÓN DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Tesis para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ GARCÍA

DIRECTOR: ERIC FLORES MEDRANO

NOVIEMBRE 2018

Esta tesis se realizó gracias al financiamiento del
Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP)
De Julio de 2017 a Junio de 2018
NPTC con folio PTC-513 N° de convenio 511-6/17-8017

A los que son mi soporte, cuidan de mi

y siempre me han dado su amor incondicional.

A ti que siempre estás ahí, que iluminas mí vida,

que te debo mi felicidad, mi crecimiento y

que siempre me apoyas a solas y con todos.

A los que me aconsejaron y criticaron en privado;

que me aplaudieron y apoyaron públicamente.

Agradecimientos

Este camino de cinco años fue largo y lleno de momentos satisfactorios y desfavorables, ciertamente no fue fácil, y dentro de este camino, logré hallar a gente que en su momento me ayudó a caminarlo de manera fructífera, pero también hallé personas que se quedaron siempre ahí, que su apoyo fue incondicional y que, gracias a ellos, logré llegar a la meta.

Porque bien, a lo largo de la licenciatura además de los conocimientos matemáticos que adquirí, también aprendí lecciones de vida, y una de las más importantes, es que, nada se puede lograr en solitario, las matemáticas, la educación y la vida se hace más amena, divertida y se disfruta más haciéndola en conjunto, puesto que así encontramos la posibilidad de relacionarnos y aprender de todos, puesto que todos somos profesores y estudiantes de las personas que decidimos rodearnos.

Esta tesis, no solamente es producto de quien escribe, sino también de todos aquellos que aportaron algo al desarrollo de esta. Es por ello por lo que dedico esta sección a agradecer a todos aquellos que de alguna forma apoyaron en la conclusión de este trabajo y que me ayudaron a caminar durante este tiempo.

A mis padres, Verónica y Juan Ramón. Quiero darles las gracias por apoyarme desde el inicio, por los sacrificios que durante tanto tiempo han realizado para poder llegar a este momento. Gracias por cada palabra de aliento o regaño, puesto que ambos me ayudaron a crecer y a no rendirme. Ahora me doy cuenta de que ustedes desde hace ya un tiempo, me han enseñado que el trabajo en conjunto siempre es más fructífero, me enseñaron que las cosas que se hacen con amor son las que nos hacen felices y plenos. Los amo y soy consciente que estas líneas no bastan para expresar todo lo que siento y lo agradecido que estoy con ambos, pero le dedicaré toda mi vida a probar que han sido los mejores padres.

A mi hermana, María Fernanda. Quiero agradecerte tu apoyo emocional durante estos años y sobre todo por las veces que me hiciste ver que podía continuar aún con las dificultades comunes que la vida nos presenta, gracias por esas veces en las cuales tus pocas, pero precisas palabras me ayudaron a retomar el camino. A mis abuelos y tíos por todo su apoyo no solamente a mí, sino también por el apoyo que le han dado a mi familia, siempre han estado ahí en los momentos difíciles. A mi tía Erika por todo su apoyo y por aceptar acompañarme en esta etapa de mi vida.

A Brenda. Antes que otra cosa, gracias por llegar a mi vida y permitirme llegar a la tuya. Te agradezco también por quedarte a mi lado en los momentos difíciles. En esos momentos en los cuales llegué a pensar que no estaba hecho para esto e incluso para dedicarme a algo que tanto quiero, la educación, siempre estuviste ahí conmigo con palabras de aliento y recordándome lo poco que cada vez me faltaba para llegar a este momento. Gracias por estar en esos momentos en los cuales estuve tan decidido a dejar todo y que tú me mostraste el camino de regreso en todo momento. Gracias por disfrutar junto a mi cada uno de los logros, porque tú me has enseñado que puedo contar contigo y tu conmigo y que estamos siempre el uno para el otro. Gracias por enseñarme lo hermoso que es la vida acompañado y por las grandes experiencias que hemos vivido juntos. Gracias por apoyarme en mis sueños académicos, profesionales y personales.

A mis amigos de la licenciatura, que, aunque esta relación se fortaleció en este último año y medio, siempre estuvieron ahí, para criticarme y apoyarme en los momentos difíciles tanto personales como académicos. Mireya, por acompañarme académica y personalmente durante estos cinco años, gracias por esas palabras oportunas en los momentos difíciles, por no dejarme rendirme en varias ocasiones. Nava, gracias por todos esos momentos de enseñanza y apoyo incondicional, por esas desveladas para sacar ejercicios de todos los tipos, y también por no dejar rendirme. Cata y Alba, gracias por esos momentos de diversión que siempre aparecen de forma oportuna, al igual que por sus palabras de apoyo. Wendy, gracias por tu ayuda en algunos proyectos personales, por tu amistad y por mostrarme como que ante la adversidad siempre es posible salir adelante. Uriel "el Papu", gracias por esos "Papus", que, aunque a veces causaban molestia, regularmente siempre logran abrir los ojos de los que ahí nos encontrábamos hacía el conocimiento matemático. Alan, gracias por tus palabras, tu amistad y por mostrarme que siempre se puede lograr lo que te propongas, por enseñarme a disfrutar la lectura y de un buen café. Ángel, gracias por tus palabras de apoyo tanto personales como académicas, por la confianza y por tu amistad. A mis demás amigos de la licenciatura, David, Brian, Levent, Yansi, Itzel y Baruch, por todo su apoyo moral y académico en los últimos años. A Mago, por sus enseñanzas en este último año, sus palabras de crítica y de apoyo, así como por permitirme entrar a su hogar y aprender de su familia, por su amistad incondicional, así como por los momentos de felicidad. A mis amigos de la MEM, Andrés, Rey, Danae, Rafa, Marco, Alma, Juan Carlos, Wendy, Carina, Bernardo y Kary a todos gracias por mostrarme que hay más gente que ama lo que hace, la educación, gracias por permitirme ser "el becario" del grupo y compartir experiencias y grandes momentos junto a ustedes. A Miguel y Gaby por su apoyo incondicional durante estos años, por sus palabras de aliento y su confianza, gracias por su amistad y por creer siempre en mí. A Abby y Ángel por estar junto a mí durante seis años, por sus palabras de apoyo y crítica en los momentos importantes, su amistad y por su apoyo durante este tiempo. A mis amigos, Munive, Ángeles, Sandy, Gabo y Paola por su confianza.

Al Colectivo Universitario por la Educación Popular (CUEP), a aquellas personas que me permitieron ser parte de este gran proyecto, a los que confiaron en mi y aceptaron mis ideas, a las personas que considero mis amigos y que trabajaron junto a mí, y particularmente a todas las personas que gracias al CUEP conocí, y a los que tuve la oportunidad de formar mucho o poco de manera académica. Gracias a todos por enseñarme que la educación es algo importante en el desarrollo y mejora de la sociedad. A Anguie, Andrea, La Chida, Daney, Ara, Alberto, Bobby, Paola, Eliana, César, Fidel, Iván, Julia, Nadia, Jaqueline, Juan Carlos, Joshi, Lulú, Eduardo, Alejandro, Celeste y Lalito, gracias por el apoyo, las enseñanzas, sus palabras de aliento y crítica, pero sobre todo por su amistad.

Al Dr. Eric por permitirme aprender de él, por sus consejos, y sus palabras de apoyo, por mostrarme la entrada a la educación matemática, por permitirme entrar a su casa y aprender de su familia y por guiarme académicamente por un buen camino. Gracias por aceptar dirigir mi tesis y por guiarme en las decisiones académicas a futuro. A la Dra. Dina por sus palabras de apoyo, por mostrarme de igual manera el buen camino y abrir una puerta en la educación matemática, por sus consejos y por mostrarme su amor a lo que hace. Gracias a ambos por ser para mí una guía y soporte en este último año.

Al Dr. José Antonio, por abrirme por primera vez una puerta a la educación matemática, por mostrarme que hay que estar orgulloso de esta área, por presentarme al Dr. Eric y por aceptar ser parte del jurado para la defensa de esta tesis, así como por sus comentarios y correcciones hacía este trabajo.

A la Dra. Lidia y a la Dra. Avenilde por aceptar ser parte del jurado para la defensa de esta tesis, de igual manera agradezco sus comentarios y correcciones hacía este trabajo.

Al profesor Ángel Contreras, al Dr. Carlos Andrade, al Dr. Carlos Guillén, al Dr. Bulmaro Juárez, al Dr. Jorge Velázquez, al Dr. Agustín Contreras, al Dr. David Herrera, la Dra. Lucía Cervantes y a la Mtra. Elizabeth Banfi, por todos los conocimientos que me ayudaron a adquirir, por mostrarme el amor que las personas le pueden tener a las matemáticas, por enseñarme que este amor siempre es posible contagiar, por sus palabras de aliento en momentos difíciles y por el aprendizaje académico como personal que cada uno de ustedes me brindó durante estos cinco años.

A la administración de la facultad, a la Dra. Martha, la Dra. Araceli, al Mtro. Rogelio, Paty, Kari, Oli, Cony, Gustavo, Lupita y a todos aquellos que, durante estos dos años, me apoyaron para la última parte de la licenciatura.

Sin todos ustedes, esto no sería posible.

Infinitas gracias a todos.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

Durante el desarrollo de nuestra experiencia como profesores, e inclusive como alumnos, es posible identificar la tendencia a repetir ciertas acciones y a vivir ciertos momentos dentro del salón de clases. Dichas acciones regularmente dependen de cada uno de los profesores. Debido a nuestra pequeña, por no decir nula experiencia dentro del ámbito de la enseñanza, a estas situaciones ya descritas no les hallamos alguna explicación, es más, las creemos muy naturales, e incluso tratamos de buscar siempre con cada profesor nuevo estas características, que de cierta manera nos ayudarán a mediar nuestro comportamiento y desarrollo en clases.

A la par, llegamos a identificar dentro del desarrollo de una clase, acciones de los profesores que nos *permiten crear* nuestro propio conocimiento, aunque de cierta forma, no nos damos cuenta de que él mismo nos guía de muchas formas para lograrlo. Por otro lado, también llegamos a identificar momentos en los cuales el profesor, para nosotros, mal interpreta nuestra idea ajustándola a alguna que ayude al desarrollo de la actividad.

De igual manera, muchos de nosotros a lo largo de nuestra formación académica nos hemos enfrentado a actividades que han sido previamente diseñadas por el profesor de alguna asignatura, en estas nos pudimos dar cuenta que regularmente hay un orden establecido. Particularmente, se suele comenzar maniobrando algunos ejemplos, realizando actividades para comprender dichos ejemplos, localizando patrones a partir de una interacción entre nosotros y los contenidos. Incluso, en algún momento de la actividad el profesor pudo habernos hecho algunas preguntas acerca de lo que estábamos realizando. Dichas preguntas solían tener la intención de generar discusiones, de manera que los conocimientos que se querían establecer pudieran salir a partir de dicha discusión. Es altamente probable que el profesor tuviera una idea *a priori* sobre lo que se iba a discutir y el desarrollo de la propia discusión.

Esos fenómenos que pudieron haber llamado nuestra atención en la vida escolar, comenzaron a ser analizados en los años 60 del siglo pasado por Guy Brousseau. A partir de ideas de corte constructivista cercanas a las de Jean Piaget, explicó la forma en la que se desarrollaban las clases de matemáticas en Francia, llegando a observar todo lo que en los párrafos anteriores se ha descrito, es decir, comenzó a preocuparse por la manera en la que el alumno adquiría el conocimiento matemático.

Según Brousseau (1986) después de estas observaciones, logró modelar de alguna forma la manera en la que se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje en algunas situaciones didácticas; su manera de hacerlo fue, como lo describe D'Amore (2002), a partir de un triángulo como el que se muestra en la Imagen 1, donde los vértices representan, respectivamente, la parte epistemológica de la situación, la parte psicológica y la parte pedagógica, y aquellas cosas que unen estos vértices corresponden a la manera en la que se relacionan estos elementos durante el desarrollo de una situación didáctica.

Imagen 1. Esquema de enseñanza
(Brousseau, 2000, p. 7)

Además de los elementos y las relaciones entre ellos que se muestran en la Imagen 1, Brousseau comenzó a darle importancia a los procesos que le dan funcionamiento a dicho esquema. Es decir, buscó dar respuesta a la pregunta ¿qué es lo que hace que la relación entre los elementos dé lugar a la adquisición del conocimiento y del saber matemático?

Este tipo de análisis da lugar al desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en la cual Brousseau desarrolla la manera en la que se construye el conocimiento a través de las situaciones fundamentales, didácticas o a-didácticas, siendo estas últimas las más recomendables por dicho autor.

Por su parte Ávila (2001a, 2001b), a través de las investigaciones que realiza, logra notar que en México la teoría desarrollada por Brousseau se presenta dentro de las aulas de clases, particularmente observa los efectos del contrato didáctico y la devolución, los cuales pueden llegar a ser considerados como elementos de gran importancia de dicha teoría.

Brousseau, durante el desarrollo de su teoría, llamó contrato didáctico a aquellas reglas o normas no escritas que existen entre el profesor y el grupo de alumnos. Un ejemplo de este constructo lo encontramos cuando los alumnos llegan a conocer e identificar los gestos y manera de responder del profesor a ciertas acciones de ellos, para saber si su respuesta es correcta o incorrecta, o incluso que después de determinado tiempo, el mismo profesor procederá a darle respuesta. También el contrato didáctico podemos hallarlo con lo descrito anteriormente, las acciones y/o actitudes que se presentan de manera particular con cada profesor y grupo.

Dentro de este contrato didáctico, se identifican efectos que pueden repercutir en el desarrollo de la situación didáctica. No necesariamente dicha repercusión debe considerarse como negativa hacía el desarrollo de la clase, ni mucho menos en la adquisición de los conocimientos planeados. Brousseau (1986) identifica la existencia de dichos constructos y entre los más notables encontramos: el efecto Topaze, que surge con la guía extrema del profesor; el efecto Jourdain, el cual se identifica con la acción de sobrevalorar los conocimientos de los alumnos; el deslizamiento metacognitivo, el cual surge ante el fracaso de una actividad de enseñanza, cuando el profesor toma sus propias explicaciones y medios heurísticos como objetos de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático, y el uso excesivo de la analogía, el cual se genera con la pérdida de identidad matemática de un objeto al relacionarlo con objetos parecidos matemáticamente o estructuralmente.

Y es aquí donde, gracias al trabajo de Ávila (2001b), podemos darnos cuenta de que los profesores en nuestro país recaen en dichos efectos en distintas ocasiones, ya sea de manera consciente o inconsciente, y no necesariamente con el propósito de afectar de manera negativa el desarrollo de la situación didáctica, sino también con el propósito de mejorar o ayudar al desarrollo de esta. Es así como, basándonos en lo ya descrito se genera la siguiente pregunta que marcará el camino de la investigación.

¿Cómo repercuten los efectos del contrato didáctico en los que incide el profesor en la gestión de una situación didáctica diseñada para el cálculo del volumen de un sólido de revolución?

La manera en la que se planifica abordar esta pregunta es a partir de una investigación cualitativa basada en un estudio de caso instrumental sostenido en la aplicación de una situación didáctica que fue diseñada para el tema de volumen de sólidos de revolución (tercer año de bachillerato). Dicha situación didáctica fue discutida y aprobada previamente a su aplicación por un grupo de investigación conformado dentro del proyecto "Diseño y análisis de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para Cálculo en Bachillerato" celebrado entre septiembre de 2017 y marzo de 2018, dentro de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. La aplicación de la situación estuvo a cargo de una de las profesoras que conformaban dicho grupo de investigación. Esta aplicación se llevó a cabo en una escuela perteneciente al sistema general de bachilleratos del Estado de Puebla, dentro de los meses de enero y febrero de 2018.

Seguido de la aplicación se recurrió a transcribir las cinco sesiones para después comenzar el análisis de los datos, estas transcripciones no solo incluyen los diálogos entre la profesora y los alumnos, sino que también incluyen los gestos y el lenguaje corporal que, a nuestra interpretación, pueden llegar a dar información necesaria para la investigación. Este análisis se basó en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986), y de los aportes a la misma por parte de Ávila (2001b), Sadovsky (2005), D'Amore (2002), entre otros.

La estructura de este análisis se encuentra organizada por cada elemento teórico, puesto que, en primera instancia, se analizó la transcripción de cada una de las sesiones y seguido de esto se llevó a cabo una comparación de esta con cada uno de los videos, para así poder explicar lo sucedido en cada situación elegida o bien poder descartar alguna de las situaciones como posible aparición de un efecto.

Seguido de este análisis, se discutieron las distintas causas por las cuales las situaciones seleccionadas ayudaban a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, basándonos principalmente en las razones por las cuales fueron consideradas como algún tipo de efecto.

Dentro de las conclusiones se manifiesta cuál de los efectos es el más recurrente dentro de una situación didáctica, la razón por la cual esto sucede, así como cuál es el efecto que menor aparición tiene y sus razones, la manera en la que este u otros efectos, e incluso otros elementos de la teoría de las situaciones didácticas, por ejemplo, la devolución, repercuten en el desarrollo de la situación didáctica. Además, presentamos una reflexión sobre si la aparición de los efectos del contrato didáctico corre completamente por cuenta del profesor o de qué manera los alumnos y el medio repercuten en su aparición.

Con miras a futuro, se espera que esta investigación sea parte de una base, para así poder comenzar a buscar la relación entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la aparición de los efectos de contrato didáctico, es decir, se pretende que esta investigación dé cabida a la investigación entre la relación de estos tres constructos teóricos y con esto poder buscar la manera de introducirlos en conjunto como posible solución a algunos problemas que se encuentran en la matemática educativa que por separado estos constructos aún no han logrado resolver.

I.1 Resumen del trabajo

Este trabajo está conformado por un total de cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 se presenta en Marco Teórico y lo dividimos en dos partes. En la primera encontraremos un acercamiento a los inicios de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, así como la interpretación que otros autores le dan a la manera en la cual comenzó dicha teoría. De igual forma podremos encontrar las primeras ideas que llevaron a Brousseau a pensar en las situaciones didácticas. En la segunda parte podremos hallar el desarrollo de esta teoría, abarcando sus distintos elementos como son los distintos tipos de situaciones, el contrato didáctico, los efectos del contrato didáctico, la devolución y las dificultades y errores que se presentan dentro de una clase de matemáticas.

En el Capítulo 2 se presenta la Metodología que empleamos en el estudio. En dicho capítulo se realiza al principio un acercamiento a la teoría sobre la investigación cualitativa, así como el uso de un estudio de caso como auxiliar para la investigación. Se da una explicación breve, basándose en la teoría, de la razón por la cual nuestra investigación la catalogamos como una investigación cualitativa usando un estudio de caso instrumental. También presentamos las tres fases de nuestra investigación, comenzando con el diseño de la situación didáctica, en donde se realiza un análisis de las actividades diseñadas, dicho análisis se enfoca en la clasificación de estas actividades en las distintas situaciones didácticas que se encuentran en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. En la siguiente fase se presenta la manera en la que se aplicó dicha situación, así como los datos básicos sobre nuestro informante y la recogida de datos, y por último en la tercera fase se explica la forma en la que se llevó a cabo el análisis de los datos que nos proporcionó nuestro informante.

En el Capítulo 3 se presenta el análisis de cada uno de los constructos teóricos, así como de sus diferentes momentos, en cada uno de ellos se inicia con una contextualización seguida de la presentación del momento y concluyendo con la explicación de las razones por las cuales se decidió clasificarlas de dicha forma. Comenzamos este análisis con los efectos, dando inicio con el efecto Topaze, seguido del efecto Jourdain, el uso excesivo de la analogía y concluyendo con el envejecimiento de las situaciones de enseñanza. Al final se suma un par de ejemplos sobre la devolución y el uso didáctico del error, que, si bien no eran foco de este trabajo, nos resultaron de interés al hilo del trabajo de análisis.

Por último, en el Capítulo 4, desarrollamos y discutimos nuestras Conclusiones, y de nueva cuenta, al igual que en el capítulo previo, dichas conclusiones se dan por constructo teórico, en el mismo orden en el cual fueron analizados. Seguido de esto, presentamos las conclusiones generales, apoyadas de las particulares, con las cuales se da respuesta a nuestra pregunta de investigación. Se termina este este capítulo con una explicación breve acerca de la manera en la que este trabajo podría enlazarse con otras teorías desarrolladas dentro de la Educación Matemática, como lo son las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y el modelo denominado *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK).

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo se describirá la manera en la cual la Teoría de las Situaciones Didácticas se fue desarrollando, desde el punto de vista de Brousseau, quien es considerado como su autor principal. Además, se presentan algunas de las interpretaciones que se le llegan a dar a dicha teoría. Expondremos las cuestiones que llevaron a su creación, así como un recorrido sobre las distintas partes teóricas que la conforman, enfocándonos principalmente en lo referente al contrato didáctico, sus efectos, la devolución y el uso didáctico del error.

1.1 Inicios de la teoría de las situaciones didácticas

A partir de los años 60 se enfatiza la preocupación por comprender la forma en la que se transfiere y se adquiere el conocimiento matemático. Fue la escuela francesa la primera en enfocarse en esta preocupación, comenzando con Guy Brousseau y su teoría de las situaciones didácticas.

En esta teoría Brousseau propone un modelo con el cual podemos comprender la manera en la que el conocimiento es adquirido por el alumno, así como la forma en la que el profesor, los compañeros y el entorno interactúan entre sí para y con el alumno. Esto lo explica en distintas partes de su teoría, las cuales describiremos más adelante.

Las ideas constructivistas llevan a Brousseau a hipotetizar que el alumno puede o tiene la habilidad de adaptarse a un medio, el cual se encontrará continuamente ocasionándole conflictos de todo tipo.

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, 1986 p. 11).

Comúnmente se entiende por enseñanza a la parte que relaciona el sistema educativo y al alumno, así como con la forma en la que se transfiere el saber. Es así como Brousseau propone un esquema tripolar, asociado con la concepción de enseñanza, la forma en la que el profesor acomoda el saber que se va a aprender, y la forma en la que el alumno elige lo que quiere adquirir, en resumen, este esquema nos da la forma en la que se lleva a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje en determinadas situaciones (Imagen 2.1).

Donde el vértice *saber escolar* representa la parte epistemológica, el vértice *alumno* la parte psicológica y el vértice *sistema educativo* que corresponde al maestro representa la parte pedagógica y cada lado de este esquema representa la relacion que hay entre cada uno de estos polos (D'Amore, 2002).

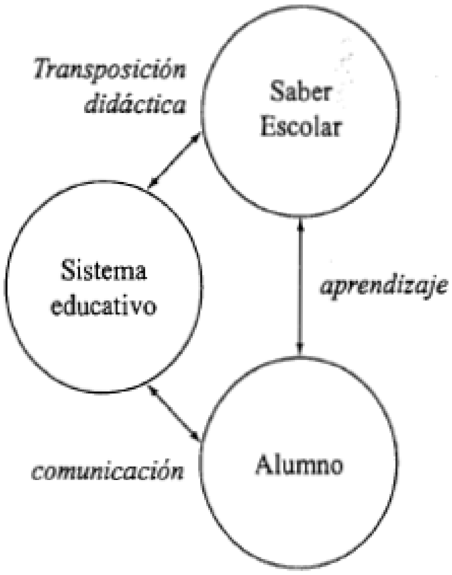


Imagen 2.1. Esquema de enseñanza
(Brousseau, 2000, p. 7)

D' Amore identifica en el esquema de Brousseau tres categorías:

- Los elementos: los cuales se pueden idenficar con los vértices del triángulo.
- Las relaciones: estos son idenficados con los lados.
- Procesos: los cuales los identificamos con la forma en la que el sistema funciona.

Es en esta categoría en la cual Brousseau desarrolla la mayoría de su teoría de las situaciones didácticas, y es lo que rodea al triángulo lo que Brousseau llama medio, el cual abordaremos más adelante, y a toda esta estrucutra se le llama situación.

Podemos decir que Brousseau propone un modelo que describe la construcción del conocimiento matemático a partir de dos tipos de interacciones básicas:

- La interacción del alumno con una problemática resistente que opera a partir de los conocimientos matemáticos puestos en juego.
- La participación que tiene el docente con el alumno para ocasionar la interacción de éste con la problemática.

En su teoría, Brousseau enmarca la forma en la que se construye el conocimiento matemático a través de distintas situaciones, llámense fundamentales, didácticas o a-didácticas, todas éstas incluyendo la participación del alumno, el docente y un medio.

1.2 Situación didáctica y a-didáctica

Dentro del contexto de la teoría de situaciones didácticas comprenderemos como una situación a aquel modelo de simbiosis entre el sujeto (el que aprende) y el medio en el cual se encuentra (Brousseau, 2007). En esta situación el alumno se puede encontrar en un estado favorable, el cual puede llegar a cambiar dependiendo de las decisiones que el sujeto tome, dichas decisiones son regidas por conocimientos precisos que adquiere el alumno durante la interacción con el medio o por conocimientos previos. Este modelo del que hablamos se puede entender como la representación de tres cuestiones:

- Los estados del medio y de los cambios que el sujeto puede darle (Brousseau, 2000).
- Lo que se juega en la acción, en general el estado final y el interés que el sujeto le da a la acción (Brousseau, 2000).
- Una colección de las elecciones permitidas por las reglas (Brousseau, 2000).

Todo esto nos ayuda en la identificación de los conocimientos matemáticos que el sujeto pone en juego durante una estrategia que emplea en cada momento de la situación. Como se mencionó anteriormente estos conocimientos determinan las elecciones o acciones del sujeto sobre el medio con el propósito de obtener el estado final de este, algunas de estas acciones pueden ser más eficaces, más fiables o más económicas que otras.

Para Brousseau una situación didáctica es:

> "Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" (Gálvez, 1994, p. 42).

Ávila (2001a) define, basándose en Brousseau, una situación didáctica como aquella situación portadora de condiciones que implican una adaptación del sujeto, donde solamente su carácter didáctico obliga a que se produzca el aprendizaje.

Entenderemos como situación didáctica aquella situación que modela las actividades del profesor y del alumno, así como a todo aquello que conforme el entorno del alumno (el profesor, el sistema educativo y el medio) en la cual se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar, es decir, podemos interpretar que la situación didáctica es un juego donde el docente se encuentra implicado entre las interacciones del alumno con problemas que el profesor plantea.

Brousseau se basó en las ideas constructivistas de Piaget, lo cual ocasionó que se diera a lugar a la necesidad de darle un papel principal, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, a la existencia de momentos de aprendizaje en los cuales el alumno se encuentre solo frente a la solución del problema sin que el profesor tenga un papel relativo en la transmisión de conocimiento.

Es así como Brousseau (1986) define situación a-didáctica como toda aquella situación que, por una parte, no puede ser denominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Por su cuenta Sadovsky (2005) entiende por situación a-didáctica aquella situación donde hay una interacción entre un sujeto y un medio a propósito de un conocimiento, en el cual el medio se ve modificado por la interacción del alumno ayudado de sus conocimientos, lo que ocasionaría que el mismo medio ofreciera respuestas al alumno, con el propósito de generar conocimiento y transmitir el saber.

Entenderemos entonces como situación a-didáctica aquella situación donde el alumno acepta el problema como suyo, es decir, el alumno obtiene el compromiso intelectual con el medio y el profesor se rehúsa a una intervención donde él proponga los conocimientos que quiere ver aparecer durante y al final de la actividad. Esta concepción de situación a-didáctica nos lleva a suponer que deben aparecer dos condiciones: (1) que el alumno (sujeto) esté consiente de su posición de producir y (2) que el problema y la forma en la que es planteado obligue al medio a que ofrezca la posibilidad de que el sujeto valide sus acciones "como si pareciera que le estuviéramos atribuyéndole cualidades humanas al medio" (Sadovsky, 2005 p. 5).

Sadovsky (2005), Ávila (2001a) y, desde luego, Brousseau (1986) convergen en que mientras más veces se ponga al alumno en una situación a-didáctica mejor será la transmisión del saber, lo cual era de suponerse por la gran relación que tiene esta teoría con la teoría propuesta por Piaget, es por esta razón que Brousseau se enfoca en hallar una manera de meter al alumno en una situación a-didáctica. Es aquí donde aparece la idea de "la devolución", la cual abordaremos más adelante.

Podríamos preguntarnos cómo distinguir una situación a-didáctica de una situación didáctica. Desde mi punto de vista, considero que algo que nos ayuda a distinguir una de la otra es el rol que tiene el profesor en cada una de ellas, ya que, aunque en ambas el profesor se encarga de colocar al alumno dentro de ellas, el papel que desarrolla durante, si es muy distinto, ya que en una, la didáctica, el rol del profesor es de un jugador más de la situación, rol que tiene como propósito darle herramientas al alumno, para que con ellas, pueda relacionarse con su medio, y en la otra, la a-didáctica, el rol del profesor está más encaminado a la de un espectador del juego, puesto que su rol, consiste en poner al alumno en la situación en cuestión y solo estar cerca en caso de que el alumno comience a desviarse de los temas.

Otra diferencia clara es la forma en la que el alumno enfrenta la problemática presentada en cada una de ellas, puesto que, en la didáctica, puede recibir herramientas, ayuda e ideas, no solamente del medio, sino también del profesor, en cambio en la a-didáctica, la retroalimentación, el apoyo y los retos son puestos meramente por el medio, lo cual ocasiona que exista mayor exigencia para que el alumno pueda generar su propio conocimiento.

Algo importante en lo que se debe hacer hincapié es que en ambos tipos de situaciones siempre se busca la creación y la transmisión de conocimientos, de tal forma que sean más accesibles al alumno, y que por ende logre, no solamente aprender un tema, sino también conocer lo que hay detrás de ese conocimiento, así como la forma en la que puede llegar a ser aplicado en su vida cotidiana.

1.3 Algunos elementos de la teoría de las situaciones didácticas

Hasta el momento hemos hablado de las situaciones didácticas y a-didácticas, y en ambas situaciones se mencionan algunos otros elementos que ayudan a crear dichas situaciones y que al mismo tiempo son parte de estas, uno de estos elementos, y de los más mencionados es el medio, que junto con los demás elementos ayudan al proceso enseñanza-aprendizaje. A continuación, haremos un paseo por las definiciones de algunos de estos elementos.

Sadovsky (2005) entiende el medio como el conjunto de relaciones, esencialmente matemáticas que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimiento en el transcurso de la situación, transformando así la realidad con la cual interactúa, este conjunto de relaciones va acompañado de una problemática matemática inicial al cual el sujeto se enfrenta.

En Brousseau (2003) se define como medio al sistema antagónico del alumno, es decir todo aquello que actúa sobre el alumno y/o eso sobre lo que el alumno actúa.

Nosotros entenderemos por *medio* a todo aquello que rodea al alumno dentro de la situación, es decir, el medio lo llegan a constituir el problema en el que se quiere que el alumno actúe, los conocimientos con los cuales cuenta el alumno, sus compañeros y sus conocimientos, así como los materiales didácticos, el entorno físico e incluso el entorno cultural y social que rodea al alumno, pero, puesto que el medio puede ser un elemento compuesto de otras características, llegaron a surgir algunas dudas, entre ellas, podemos elegir las siguientes, ¿el profesor tiene actividad dentro de este medio?, ¿es posible darle una estructura a este medio?

Brousseau (2007) introduce a su teoría de las situaciones didácticas la noción de *estructura del medio* con la cual trató de dar solución a las cuestiones anteriores.

Dentro de esta estructura se pueden identificar dos roles para el profesor y cinco para el alumno, en el caso del primero encontramos el profesor que prepara su clase y el profesor que está enseñando, puesto que el alumno puede encontrarse en cinco roles, entonces eso implica que podemos distinguir cinco medios con los que el alumno interactúa de distintos modos. Las interacciones que tiene el sujeto (profesor o alumno) dependen del medio en el que se encuentre.

Esta estructura de la que nos habla Brousseau se describe en la Imagen 2.2, la lectura que le podemos dar a esta imagen es la siguiente; comenzando desde adentro podemos distinguir que la situación que se ve al interior se convierte en el medio de los sujetos que están en el exterior, así podemos distinguir los distintos roles que se mencionaban con anterioridad.

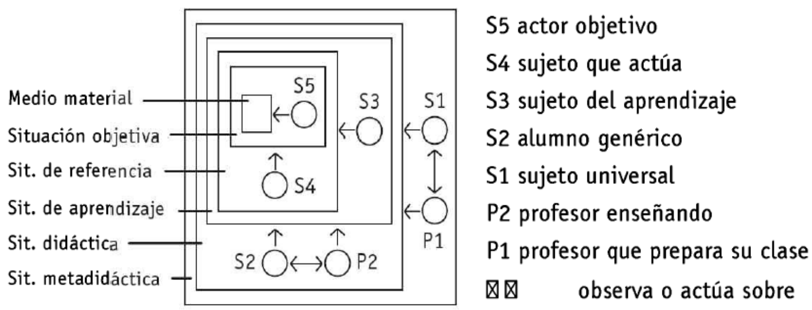


Imagen 2.2. Estructura del medio
(Brousseau, 2007, p. 53)

Expliquemos los conceptos que se notan en la Imagen 2.2.

- *Medio material.* Cuando el profesor prepara su clase organiza el medio que incluye las reglas que definen el fracaso o el éxito, a este conjunto de reglas se le conoce como medio material y en este medio se debe considerar también las interacciones que puede llegar a tener un sujeto con este medio. A este sujeto al que nos referimos recibe el nombre de actor objetivo (S5 en la imagen). A este par {medio, actor} se le conoce como situación objetiva.
- *Medio objetivo.* En este medio el sujeto que se encuentra en posición como alumno ante la situación objetiva toma el rol de sujeto que actúa (S4 en la imagen), es decir, este sujeto pude identificarse como S5. Para un observador externo no hay diferencia entre un sujeto S4 y S5, pero sí para el actor. Este medio es movilizado por completo por la exigencia que se le pide al alumno para actuar sobre y en la situación.

- El *sujeto aprende* modificando sus acciones y anticipando los efectos de estas sobre el medio, para las situaciones en las que se encuentra comprometido son para él herramientas de aprendizaje, con los cuales él interactúa (S3 en la imagen), los medios de referencia son aquellos sobre los cuales se ejercen las capacidades que tiene el sujeto para la construcción de conocimiento, a estas situaciones, donde el sujeto se encuentra comprometido, se le conoce como situación de aprendizaje, y es esta la situación que se encuentra en el centro de la construcción de conocimientos y de su significación para el sujeto. Para los sujetos que se encuentran en S3 la reflexión sobre la acción le da la posibilidad de aprender.
- Ser un *alumno* implica producir las situaciones de aprendizaje (puede ser con ayuda del profesor), cuando esto sucede el profesor se coloca como sujeto de actuación puesto que se ubica como el profesor que enseña, mientras tanto el alumno se convierte en alumno genérico S2 y el medio con el cual se interrelacionan tanto el alumno como el profesor es el generado en las situaciones de aprendizaje. Éstas interacciones constituyen las relaciones entre conocimientos o de transformar conocimientos en saberes, y es aquí el momento en el que nos encontramos en lo que llamaremos en general una situación didáctica (Brousseau, 2007).

Estas distintas estructuras del medio dan pie a la necesidad de darle un nombre a cada una de las etapas, y es así como esta estructura es la base para las distintas situaciones didácticas (o a-didácticas) que Brousseau presenta, la de acción, la de formulación, la de validación y la de institucionalización, de las cuales hablaremos más adelante.

1.4 Tipo de situaciones didácticas (a-didácticas)

En este apartado discutiremos los distintos tipos de situaciones didácticas o a-didácticas, dicha clasificación está basada en las distintas relaciones y acciones que toma el alumno con su medio, así como la forma en la que participa el profesor, y con el propósito general de dicha situación, el orden en el que se presentan los distintos tipos de situaciones no necesariamente representan la forma en la que aparecen durante una situación de enseñanza, puesto que esto depende de los distintos objetivos que el profesor y el propio medio tengan con respecto al conocimiento que se desea introducir.

1.4.1 Situación fundamental

Este tipo de situación es correspondiente a un saber determinado, puesto que son aquellas situaciones (puede ser una o un esquema de ellas) que se encargan de generar un nuevo saber, de la misma forma en la que el saber matemático fue creado en su principio, a partir de los conocimientos que se poseen para poder resolver una problemática en la cual se encontró al principio de la situación.

Por lo anterior podemos decir que todo saber matemático contiene una situación fundamental en su interior, la cual tuvo como objetivo el de crear dicho saber (Brousseau, 1986).

Brousseau (1986, citado por Macías, 2016) propone las siguientes condiciones para diseñar una situación fundamental:

- La situación debe ser diseñada de tal forma que el conocimiento sea utilizado para su solución, y que en mayor probabilidad no intervengan otros conocimientos.
- La actividad debe permitir el uso de todas o la mayoría de las estrategias observadas en clase, así como el poder desarrollar todas las variantes que estas estrategias pudieran tener, lo cual significaría la modificación del significado del conocimiento que está siendo formado.
- La persona que diseña la situación debe de asegurarse que dicha situación permita engendrar por medio de un sistema de variables todos los problemas conocidos socialmente donde se utilice dicho conocimiento.

Un ejemplo de este tipo de situación lo encontramos en Ávila (2001b, pp. 157-159), en este ejemplo se tiene como objetivo de enseñanza a la variación proporcional directa, y se desarrolla en un salón de clases de sexto grado con 36 alumnos y con una profesora que tiene seis años de experiencia docente.

El mobiliario en este salón de clases está constituido por butacas. De manera distinta a lo habitual entonces en las escuelas, las butacas se encuentran dispuestas en semicírculo de doble fila, abierto hacia el pizarrón.

Mta: (pone sobre el piso, al centro del salón, un carrito de pedales, una pequeña bicicleta y un carrito "de ficción", los tres juguetes son amarillos) ¿Ya se dieron cuenta de que me traje los juguetes de Uri? (Uri es su hijo, los niños están familiarizados con él)
Ns: (Algarabía, risas, comentarios)
Mta: Observen por favor los tres juguetes. […]
Mta: A ver, ¿qué características tienen estos juguetes?

Sin esperar indicación, los niños van dando distintas respuestas (tienen ruedas, diferente tamaño, color amarillo, ruedas grandes, sirven para transportarse, tienen asiento, tiene el mismo dueño), la maestra las va anotando en el pizarrón.

El interrogatorio continúa, algún niño dice:
No: Dos [juguetes] tienen cuatro llantas y uno tiene dos.
Mta: ¿Y cómo son esas llantas? Vámonos por las características de las llantas.
No: Son redondas
No: Unas son más grandes que otras
Mta: […] A ver, a ver, ¿cómo se moverán las de delante de este carrito en relación con las de atrás? (el carro tiene las llantas de adelante más chicas)
Coro: ¡Más rápido!
Mta: Bueno, ahora vamos a trabajar en equipo (se organizan en tres equipos). A cada equipo le voy a dar un juguete y van a averiguar y me dicen cómo giran las ruedas grandes en relación con las chicas, pueden hacerlo aquí o en el patio (da a cada equipo un juguete).

Se hace un alboroto, todos salen al patio y una vez ahí empiezan a discutir. En un equipo, cuyos integrantes se ven pensativos, se registra lo siguiente:
No1: Ya sé, hay que moverlo (se refiere a empujar el cochecito)
No2: (Empuja el cochecito, los demás observan con mucho interés)
No3: ¿Y eso qué? (se refiere a que el sólo verlo rodar no les da información)
No4: Hay que contarlas [las vueltas que dan las ruedas]
No2: (Empuja nuevamente el cochecito)
No5: Pero éste [el niño que empuja el carrito], le da muy duro [y no se pueden contar las vueltas]
No3: ¡Más despacio!
No2: (Empuja más lentamente el carrito, pero aun así no logran contar con precisión las vueltas)
No6: Hay que marcarle con un gis [en la orilla de la llanta], si no, no se puede [contar las vueltas]
(varios miembros del equipo van por un gis al salón, cuando regresan uno de ellos pone una marca en cada llanta, los demás siguen atentamente sus acciones)

Después, intentan contar las vueltas de las dos llantas al mismo tiempo, pero no lo logran, es difícil hacer el conteo simultáneo, entonces, -a sugerencia de un niño- la tarea se divide: unos cuentan las vueltas de las llantas delanteras mientras otros cuentan las de las traseras, los siguientes minutos se dedican a ello […]

Cuadro 2.1. Ejemplo situación fundamental.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, pp. 157-159)

Este ejemplo fue elegido como situación fundamental, puesto que, a partir de una necesidad dada por una tarea (la de buscar la relación entre las llantas grandes y las pequeñas), los alumnos comienzan a tener una idea sobre dicha relación, la cual tomó forma en la puesta en común que realizarán con la profesora

1.4.2 Situación de acción

Una situación de acción (ver Imagen 2.3) es:

> "una situación donde el conocimiento del sujeto se manifiesta solamente por decisiones, por acciones regulares y eficaces sobre el medio y donde es insignificante para la evolución de las interacciones con el medio que el actualmente pueda o no identificar, aclarar o explicar el conocimiento necesario" (Brousseau, 2003, p3).

Imagen 2.3. Situación de acción
(Brousseau, 2000, p.19)

Entenderemos por una situación de acción a aquella en la cual alumno interactúa en primera instancia con el medio (Ávila, 2001b, Brousseau, 2007, 2000, Macías, 2016, Panizza, 2003, Piña, Rodríguez y Soto, 2012), dicho de una forma, es el momento donde el alumno comienza a familiarizarse con la situación mediante la interacción con el medio, pero no sabe el propósito completo de dicha interacción, es decir, no conoce cuáles conocimientos necesita ni cómo aplicarlos, aunque conforme avanza en su actuar con el medio él puede comenzar a identificar estas características, puesto que comienza a reflexionar sobre su papel en la situación, por lo que podríamos decir que de manera efectiva se encuentra en una situación de acción pero al mismo tiempo interiorizando alguna forma de situación de formulación.

Una buena situación de acción no solamente debe reducirse a manipulaciones, sino que también debe ofrecerle al alumno la oportunidad de que el alumno juzgue el resultado de su accionar y por ende de ajustar su acción sin la intervención del profesor, esto gracias a la retroalimentación que el medio le da al alumno mientras este interactúa con él (Ávila, 2001b).

Un ejemplo de esta situación lo encontramos de igual manera en el ejemplo que se citó en la parte situación fundamental, hallado en Ávila (2001b, pp. 158-159), recordemos que esta situación se encuentra en un grupo de sexto grado que están teniendo el acercamiento a la variación proporcional.

Mta: Bueno, ahora vamos a trabajar en equipo (se organizan en tres equipos). A cada equipo le voy a dar un juguete y van a averiguar y me dicen cómo giran las ruedas grandes en relación con las chicas, pueden hacerlo aquí o en el patio (da a cada equipo un juguete).

Se hace un alboroto, todos salen al patio y una vez ahí empiezan a discutir. En un equipo, cuyos integrantes se ven pensativos, se registra lo siguiente:
No1: Ya sé, hay que moverlo (se refiere a empujar el cochecito)
No2: (Empuja el cochecito, los demás observan con mucho interés)
No3: ¿Y eso qué? (se refiere a que el sólo verlo rodar no les da información)
No4: Hay que contarlas [las vueltas que dan las ruedas]
No2: (Empuja nuevamente el cochecito)
No5: Pero éste [el niño que empuja el carrito], le da muy duro [y no se pueden contar las vueltas]
No3: ¡Más despacio!
No2: (Empuja más lentamente el carrito, pero aun así no logran contar con precisión las vueltas)
No6: Hay que marcarle con un gis [en la orilla de la llanta], si no, no se puede [contar las vueltas]
(varios miembros del equipo van por un gis al salón, cuando regresan uno de ellos pone una marca en cada llanta, los demás siguen atentamente sus acciones)

Después, intentan contar las vueltas de las dos llantas al mismo tiempo, pero no lo logran, es difícil hacer el conteo simultáneo, entonces, -a sugerencia de un niño- la tarea se divide: unos cuentan las vueltas de las llantas delanteras mientras otros cuentan las de las traseras, los siguientes minutos se dedican a ello […]

Cuadro 2.2. Ejemplo situación de acción.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, pp. 158-159)

Esta parte de la situación es considerada como una de acción, puesto que los alumnos, para poder dar respuesta a lo que la profesora solicita, comienzan a interactuar con su medio, es decir, con sus compañeros de equipo, y el juguete en cuestión, buscando a partir de esta interacción, la o las estrategias que necesitan para poder dar una respuesta.

1.4.3 Situación de formulación

Brousseau (2003) define como situación de formulación a:

> "una situación que pone en relación al menos dos actuantes con un medio. Su éxito común exige que uno formule el conocimiento en cuestión (bajo una forma cualquiera) con la intención del otro que lo necesita para convertirlo en decisión eficaz sobre el medio. La formulación consiste para esta pareja de actuantes en utilizar un repertorio conocido para formular un mensaje final, pero la situación puede conducir a modificar este repertorio." (p.3).

En contraste Ávila (2001b, p. 47) interpreta la definición anterior como sigue: "Las situaciones de formulación son situaciones en las cuales el medio ha sido organizado de manera que obliga al alumno a hacer funcionar su conocimiento para producir formulaciones mediante el uso de un lenguaje que expresa un saber".

Por lo que identificaremos como situación de formulación (ver Imagen 2.4) a aquella situación en la cual puede encontrarse dos actuantes (receptor y emisor) donde uno de ellos (emisor) tratará de modificar los conocimientos del otro actor (receptor) a través de mensajes que transportan las formulaciones que el emisor ha obtenido gracias a su actuar sobre el medio, lo que guiaría el actuar del receptor con el medio. Es por la razón anterior que a esta situación también se le conoce como situación de comunicación (Brousseau, 1986).

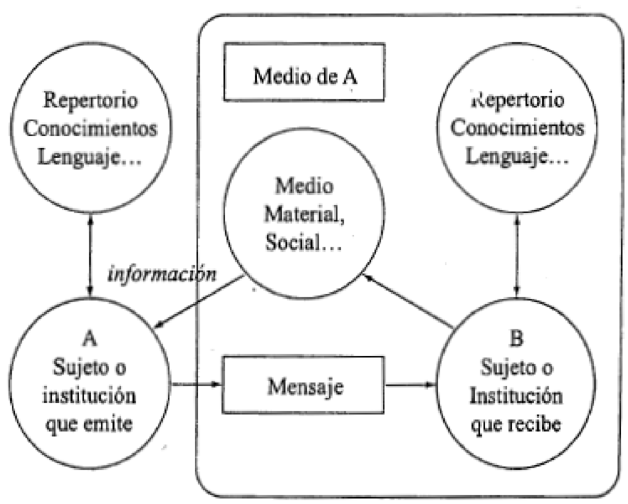


Imagen 2.4. Situación de formulación
(Brousseau, 2000, p. 19)

Un ejemplo que podemos mostrar como una situación de formulación, la podemos encontrar en Ávila (2001b, p. 159), usando el mismo ejemplo de las situaciones anteriores, nos encontramos ahora en lo que Ávila denomina como tercera fase. Aquí los alumnos, después de interactuar con sus respectivos juguetes y discutir entre ellos las distintas estrategias que encontraron, son introducidos con ayuda de la profesora en una puesta en común. A continuación, mostramos una extracción de lo discutido con el primer equipo.

Cuando los tres equipos terminan la tarea, regresan al salón y se exponen las respuestas al resto de los compañeros:

Equipo 1.

Eduardo:	Nosotros lo que vimos es que la chiquita da una vuelta y la grande da media vuelta, la grande da una vuelta y la chiquita da dos vueltas.
Mta:	La chiquita da una vuelta, la grande da//
Coro:	¡Media!
Mta:	La chiquita da dos vueltas, la grande da//
Coro:	¡Una!
Mta:	¿Y por qué? (Dirigiéndose a Eduardo)
Eduardo:	Porque es de diferente tamaño, es más chica
Mta:	¿Y qué más? (a Eduardo)
Eduardo:	(y otros del equipo que se unen para dar la respuesta) Es la mitad
Mta:	¿Están seguros de que es la mitad, cómo lo comprobaron? (a los niños del equipo)
No:	Le marcamos y le dábamos vuelta, la chica daba su vuelta completa y la grande daba media; la chica daba 2 vueltas, la grande ya daba una vuelta.
Mta:	(a los niños del equipo) Pero vuelvo a repetir, ¿cómo supieron que la chiquita es la mitad de la grande?
No:	Por el número de vueltas que dio la chiquita y la grande
Mta:	¡Ah, bueno! Aquí ya nos contestaron que la rueda chiquita mide la mitad de la grande (…) ¿Y si la grande da 5 vueltas?, ¿la chica?
Coro:	¡Diez!
Mta:	¿Y si la grande da 10?
Coro:	¡La chica veinte!

Cuadro 2.3. Ejemplo situación de formulación.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, p. 159)

Cómo se puede notar en el diálogo anterior los alumnos, a partir de sus interacciones con su medio al inicio de la actividad, comenzaron a dar distintas respuestas, lo cual, genera una situación de formulación, donde la profesora y los demás equipos son los sujetos que reciben la información del equipo en cuestión.

1.4.4 Situación de validación

Dentro de la teoría de situaciones didácticas se puede encontrar un tercer tipo de situación, la situación de validación, la cual se define de la siguiente forma:

> "una situación de validación es una situación cuya solución exige que los actuantes establezcan conjuntamente la validez del conocimiento característico de esta situación. Su realización efectiva depende pues también de la capacidad de los protagonistas de establecer juntos explícitamente esta validez" (Brousseau, 2003, p.4).

Por otro lado, Ávila (2001b) entiende por situación de validación aquella situación donde la relación entre el medio y los alumnos es tal que da lugar a la producción de las justificaciones, aserciones de resultados.

Es decir, nosotros podríamos entender que en una situación de validación (ver Imagen 2.5) los dos actuantes toman de manera alternante el papel de oponente y proponente, puesto que en esta situación es necesario que ambos intercambien ideas, pruebas y demostraciones con el propósito de validar las formulaciones y resultados que hayan obtenido, aunque al mismo tiempo el medio también interfiere como sujeto oponente, puesto que pone a prueba las acciones de los dos actores.

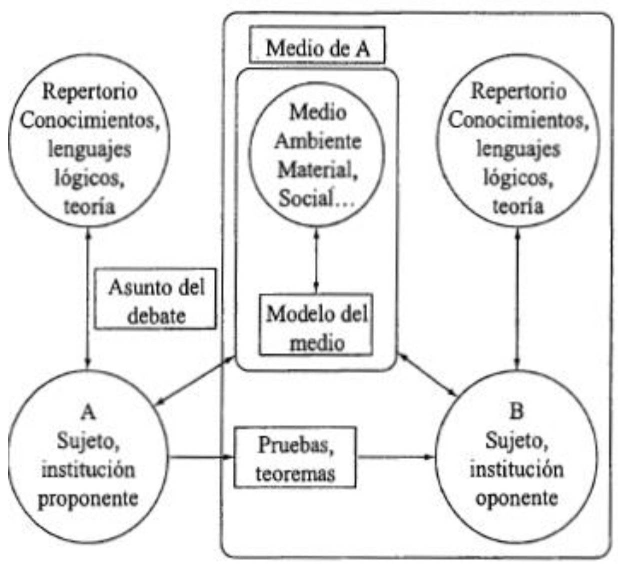


Imagen 2.5. Situación de validación
(Brousseau, 2000 p.20)

Este tipo de situaciones podría decirse que dan lugar a la promoción del razonamiento matemático, logrando con esto un nuevo equilibrio conceptual y de conocimientos, puesto que ayuda a la incorporación de los nuevos conceptos y de los conocimientos que están en formación durante la situación, los cuales toman sentido para el alumno mientras son validados para poder defenderlos (Ávila, 2001b).

Continuando con el ejemplo usado para las situaciones anteriores podemos encontrar también una situación de validación (Ávila, 2001b, pp. 160-161), aquí los alumnos se encuentran en una tarea posterior a su presentación frente al grupo de aparatos que funcionan con engranes o poleas y que discutieran entre todos el funcionamiento de dicho aparato, con esta misma idea, la profesora comienza una nueva tarea, recordemos de nuevo que, el grupo es de sexto grado y el objeto de estudio es la variación proporcional directa.

Mta:	Bien, vamos a continuar con este trabajo, pero ahora en equipos […] (La maestra reparte dos "engranes" de cartulina a cada equipo y solicita averiguar cuántos giros da el pequeño en relación con el grande; la relación es 24/8). Los equipos realizan la tarea. En el equipo registrado, los niños marcan un punto en la orilla de cada engrane, el cual les servirá de referencia para contar los giros y realizan la tarea de forma similar a como hicieron en la sesión anterior con el carrito, esta vez la estrategia es más fluida y sistemática (…)
No:	¡Maestra, maestra! (la maestra se acerca) Nosotros contamos los dientes, aquí son ocho y acá son 24; entonces 24 entre ocho, toca tres; ha dado tres vueltas el chiquito y el grande una (en tono que denota entusiasmo).
Mta:	(Se pasea entre las bancas, cuando los niños le dicen a su paso el resultado que obtuvieron, les dice: "A ver cómo me lo prueban", luego le dice a todo el grupo: "A ver cómo me lo prueban")
Ns:	¡Nosotros ya se los comprobamos! (Son los niños que le dijeron que su engrane tiene 8 y 24 dientes respectivamente) (…)
Mta:	A ver, todos acá. Acá dicen sus compañeritos que para comprobar si es correcta su respuesta van a sacar la medida de los engranes; los compañeritos de este otro equipo también dicen que van a sacar la medida; aquí sus compañeritos dicen que van a hacer otra vez los giros y al irlos contando podrán comprobar, acá estos compañeritos dicen que van a comprobar contando los dientes de los engranes […]
Mta:	¿Saben qué?, a ver si nos ponemos de acuerdo, ´porque hay distintas respuestas, a ver de qué manera podemos comprobar más fácil (anota en el pizarrón las respuestas que le habían dado los distintos equipos a su paso por su lugar y que ella repitió en voz alta) ¿Cuál de todas estas formas les parecerá más fácil? (Las lee y pregunta a varios niños; por el momento queda como "favorita" la de contar los dientes de los dos engranes y luego dividir los números resultantes).
Mta:	Casi todos dicen que contando los dientes sería más fácil [comprobar], vamos a ver … les voy a dar esto para que vean qué pueden hacer para calcular los giros simultáneos … (y reparte unos círculos de cartulina que denomina "engranes sin dientes": esto, en principio, impediría a los niños utilizar el conteo como estrategia de solución y/o comprobación).

> En algunos equipos aún se utiliza la estrategia de hacer girar simultáneamente los "engranes sin dientes", marcando el punto de inicio del giro en cada "engrane". Otros dicen a la maestra que "se puede saber sabiendo lo que miden las circunferencias" (y tratan de medirlas). El siguiente es uno de estos casos:
>
> Los niños del equipo miden con una regla el diámetro de cada uno de los círculos y calculan el perímetro de ambos usando una calculadora; luego dividen lo que mide la circunferencia mayor entre la medida de la menor, obtienen 3 como resultado. El entusiasmo del equipo es enorme, llaman a la maestra para comunicarle lo que perciben como un gran descubrimiento.

Cuadro 2.4. Ejemplo situación de validación.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, pp. 160-161)

Esta situación fue elegida como ejemplo para la situación de validación, puesto que la discusión que hay entre los alumnos y la profesora al preguntar qué método sería el más fácil para hallar la relación entre las vueltas de los engranes y la actividad que propone después, logra el objetivo que tiene la situación de validación, puesto que esta segunda actividad funge como el oponente para la idea que resultó ser la más fácil para el grupo, lo cual lleva al alumno a volver a una situación de acción y formulación para llegar a usar este objeto oponente para validar su respuesta inicial.

1.4.5 Situación de institucionalización

Al principio del desarrollo de la teoría de las situaciones didácticas Guy Brousseau solamente había contemplado, gracias a sus observaciones de distintas clases, las situaciones de acción, formulación y validación, pero mientras analizaba las clases se dio cuenta que casi siempre al concluir una situación, el profesor se veía en la necesidad de reafirmar las validaciones que los propios alumnos habían logrado, es decir, existe la necesidad de dar como oficial las validaciones y por ende el conocimiento nuevo, esta necesidad es ocasionada por las exigencias del propio sistema (Brousseau, 2007). Fue así como Brousseau decide incorporar en su teoría la situación de institucionalización, la cual define como:

> "Una situación que se desata por el paso de un conocimiento de su papel de medio de resolución de una situación de acción, formulación o de validación, a un nuevo papel, el de referencia para utilizaciones futuras, personales o colectivas" (Brousseau, 1988, p.4).

Aunque Ávila (2001b), Brousseau (1986, 1988, 2000, 2003), Macías (2016) y Soto (2012) enlistan a las diferentes situaciones didácticas en el mismo orden que aquí se han decidido exponer, los tres aclaran, como lo mencionamos al inicio de la sección, que eso no significa que en este orden se presenten durante una actividad o tarea escolar, puesto que estas situaciones regularmente se pueden llegar a presentar en el mismo momento, es decir, en un momento de la actividad se podría encontrar una combinación de estas situaciones.

De igual forma estos autores mencionan que sería de gran importancia que estas situaciones se convirtieran de preferencia en situaciones a-didácticas, puesto que como anteriormente hemos comentado, en este tipo de situación el alumno tiene una mayor interacción con el medio logrando así la relación constructivista que Brousseau tiene con Piaget.

Un ejemplo sobre este tipo de situaciones nos los da Ávila (2001b, pp. 211-212), cuando nos muestra lo desarrollado en un salón de clases de tercer grado con una profesora de 20 años de servicio y el tema matemático en juego es el concepto de ángulo, clasificación de ángulos y trazo de estos.

Mta:	A ver, niños, saquen su cuaderno de matemáticas porque vamos a trabajar un tema nuevo: ángulos. Pongan la fecha y el margen y como título "Ángulos" (…) Escriban (y dicta a la vez que escribe en el pizarrón): [1]*Ángulo es la región comprendida entre dos líneas que parten de un mismo punto. Existen cuatro clases de ángulos:* (varios niños repiten en voz baja después de la maestra lo que ésta va dictando) *Rectos, obtusos*
No:	¡Ah!, ya sé cómo son, maestra, así (describe un ángulo con las manos)
Mta:	Si, ahorita los vemos (varios niños repiten en voz alta "obtusos", parece que el término les llama la atención)
Mta:	*Llanos* (varios niños ahora repiten: "llanos", "llanos", "llanos" …)
Mta:	(…) *Los ángulos agudos* … subrayan agudos … *miden* (…) Antes de que sigamos adelante les voy a decir una cosa muy importante. Para medir líneas utilizamos una regla con los centímetros o con los milímetros (muestra una regla). ¿Se acuerdan? Pero para medir ángulos utilizamos este instrumento (muestra un transportador), ¿cómo se llama?
Alumnos:	Transportador | | Compás
Mta:	Transportador. Y las rayitas que se ven aquí no son centímetros ni milímetros, ¿cómo se llaman?
Na:	¡Micas!
Mta:	No, micas no
Ns:	Grados, son grados

Mta:	Grados, grados. Entonces para medir ángulos utilizamos el grado y utilizamos el transportador. (continúa el dictado a la vez que escribe en el pizarrón, éste queda así): *Los ángulos agudos miden de 1 grado a 89 grados, los ángulos rectos miden 90 grados, los ángulos obtusos miden de 91 a 179 y los ángulos llanos miden 180.*
No:	¿Le ponemos ejemplo, maestra?
Mta:	No todavía no. *El grado es la unidad de medida (…) que nos sirve para medir ángulos (…) EL símbolo del grado es* (anota en el pizarrón ° …) *El instrumento geométrico que sirve para medir ángulos se llama … transportador (…).*
Mta:	Bueno, ahora sí, ejemplos. Vamos a trabajar (…)

Cuadro 2.5. Ejemplo situación de institucionalización.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
hace referencia al dictado
(Ávila, 2001b, pp. 211-212)

Se eligió este ejemplo para una situación de institucionalización, puesto que la profesora a partir de la manera clásica de institucionalizar un concepto da la definición de ángulo, su clasificación, así como la forma en la que se miden y el instrumento que se utiliza para dicha tarea, seguido de ejemplos para poder así comprender que las definiciones quedaron claras. Este tipo de situaciones ayuda a que los alumnos comprendan que es lo que su profesor quería lograr desde el inicio de la actividad, así como saber la manera en la que se dirigirán a los objetos matemáticos en cuestión.

1.5 El contrato didáctico

En el año 1995, Brousseau comienza con el análisis del ejercicio del profesor en relación con la didáctica desde un punto de vista distinto al de las situaciones didácticas. (Ávila, 2001b).

Es así como Brousseau sostiene en su teoría que la enseñanza se caracteriza por las restricciones que acepta y que impone y además modela la forma en la cual el profesor participa, todo esto en términos de contratos, que según Brousseau cada contrato se caracteriza por la forma en la que se distribuye el rol de profesor, el rol del medio y del propio alumno (Ávila, 2001b).

Brousseau (1986), basado en la extensión de Filloux del contrato social de Rousseau en donde destaca la noción de contrato pedagógico con las precisiones de las obligaciones reciprocas entre el alumno y el profesor, afirma que:

> "en todas las situaciones [...] se establece una relación que determina -explícitamente en parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada protagonista el enseñante y el enseñado, tiene la responsabilidad de administrar y de lo que será responsable delante del otro de una forma u otra. [...] Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de este contrato que es específica del contenido: el conocimiento matemático buscado" (p.13).

Por su parte Chevallard (1992, citado por Ávila, 2001b) afirma que, el contrato didáctico regula las relaciones que maestro y alumnos mantienen con el saber, establece derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar.

En 2005, Sadovsky menciona que el contrato didáctico es la relación que sostienen los alumnos y el profesor a propósito de una situación a-didáctica o de manera general a raíz de un objeto matemático, esta relación o interacción son muy marcadas por lo que tanto uno como el otro espera ya ciertas acciones del otro, todo esto gracias a que en las prácticas cotidianas dentro del aula, ocasionan que el alumno desarrolle un conjunto de normas regularmente comunicado por el docente (de manera implícita, a través de palabras, gestos, actitudes o silencio) que monitorean lo que está o no permitido dentro del aula y en el accionar con un objeto matemático.

Por otro lado Godino, Batanero y Font (2003) entienden por contrato didáctico al conjunto de reglas, derechos y obligaciones no escritas que norman la relación entre el alumno y el profesor dentro de la clase de matemáticas, mencionan que es el resultado de un proceso de negociación entre los actuantes dentro de la clase, algunos de los componentes esenciales son los métodos de evaluación que se encuentran explícitos y los no explícitos que se notan cuando el profesor plantea actividades habituales, los alumnos por su parte en su actuar para adaptarse al medio escolar van desarrollando la habilidad de captar las reglas del contrato didáctico en cualquiera que sea la situación.

Como se puede notar, todos los autores mencionados convergen en que el contrato didáctico es el conjunto de reglas implícitas y no implícitas que rigen el comportamiento entre el profesor y el alumno en el momento de interactuar con un objeto matemático, es por esa razón que, así es como entenderemos la noción de contrato didáctico, sin importar la situación en la que se encuentren los actuantes.

Un ejemplo que puede ayudar a comprender la noción de contrato didáctico se puede observar en lo realizado por los investigadores del IREM de Grenoble (Brousseau, 2007), quienes se encontraban explorando si los niños de los primeros años de escolaridad, frente al enunciado de un problema tomaban en cuenta la adecuación de los datos a la pregunta planteada, entre los enunciados propuestos intercalaron pseudoproblemas (incompletos, sin solución) entre ellos se encontraba el conocido como *La edad del capitán*, el cual plantea lo siguiente:

En un navío se embarcaron 26 ovejas y 18 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán? - 44 años – dicen los alumnos. Lo que ocasionó que los investigadores les preguntaran a los alumnos si el problema no les pareció un poco raro. -Sí, la pregunta era tonta -dicen algunos. - ¿Por qué? - ¡Porque las ovejas no tienen nada que ver con la edad del capitán! -Pero entonces ¿por qué respondieron? -Porque la maestra lo pedía

Cuadro 2.6. La edad del capitán
(Brousseau, 2007, p. 75)

Como se puede notar los alumnos dan una respuesta, aunque no le encuentran sentido al problema propuesto, esto es ocasionado por una cláusula del contrato didáctico que tiene con la profesora, dicha cláusula señala que a toda pregunta los alumnos deben de dar una respuesta usando los datos numéricos del propio problema.

1.6 Efectos del contrato didáctico

Como ya se mencionó, la noción de contrato didáctico permite explicar la manera en el que el alumno interpreta una situación y la forma en la cual, su participación y sus respuestas se ven afectadas por dicha interpretación, dicho de otra forma, el contrato didáctico explica la forma en la que un alumno reacciona hacia algunas situaciones dentro del salón de clase, donde dicha reacción se ve afectada por juegos de relaciones y obligaciones entre el profesor y el alumno, dichos juegos producen efectos y éstos efectos no necesariamente implican un deterioro en el aprendizaje, algunos de los efectos observados por Brousseau son los siguientes.

1.6.1 Efecto Topaze

Este efecto aparece cuando en una situación donde la respuesta que se espera de los alumnos está predeterminada, el maestro elige las preguntas que provocan dicha respuesta (Brousseau, 2001), es decir, este efecto aparece dentro de una situación cuando el profesor guía de una manera muy marcada a través de preguntas al alumno o grupo para poder recibir la respuesta correcta, lo cual ocasiona que los conocimientos previos desaparezcan por completo para poder usarlos y así generar un nuevo conocimiento. Cuando este efecto aparece se logra obtener la respuesta correcta por parte del alumno, pero no necesariamente esto significa que el conocimiento que se quiere generar el alumno lo comprendió, puesto que no lo generó él mismo a partir de sus conocimientos previos. Brousseau dice que este efecto muestra la impotencia que tiene un profesor frente a la poca respuesta de sus alumnos (Ávila, 2001b).

Un ejemplo que nos puede ayudar a comprender este efecto nos lo proporciona Ávila (2001b, pp. 309-310), durante un episodio que se lleva a cabo con un grupo de quinto grado con una profesora que llevaba a cabo su primer año de servicio, en el salón de clases se tiene por objeto de enseñanza la recta numérica.

Mta:	Hoy vamos a hablar sobre la recta numérica. Esto ya lo han visto en otros años … A ver, díganme … ¿qué es una recta?
No:	Es una línea partida en pedacitos
Mta:	Es una línea partida en pedacitos … (el tono indica que la respuesta no es satisfactoria)
No:	Es una varilla que tiene números
Mta:	Es una varilla que tiene números … (enfatiza la palabra varilla, con el tono indica que no es completa aún la respuesta)
No:	¿Está dividida en centímetros?
Mta:	Pues no, no necesariamente en centímetros (…) pero vamos a ver que esa línea puede ser horizontal o sea acostadita, o vertical, o sea paradita (…) Ahora, esta línea, como nos estaba diciendo Oscar, ¿verdad?, que estaba partida en pedazos; bueno, pues si, (…) y cada uno de esos pedacitos se va a llamar segmento, ¿sí? , cuando dividimos una línea en partes iguales, a cada uno de esos pedacitos lo vamos a llamar segmento, ¿sí? Escribimos en nuestro cuaderno (los niños sacan el cuaderno, la maestra continúa): Recta numérica (enfática, con el tono indica que deben escribir). Recta numérica, punto y aparte (…) Recta, escribimos recta, dos puntos y seguido: ¿Qué será?, ¿qué dijimos que era recta? (…)
No:	¿Un segmento? (dudoso)
Mta:	¿Un segmento? No, ¿qué dijimos que era recta?
No:	Una recta línea que está dividida en segmentos

Mta:	Bueno, ¡parecido, parecido!, pero nada más lo que es recta, ahorita no digan nada de segmentos, ¿quién se acuerda?, es algo de línea.
No:	¿Una línea que podía ser horizontal o vertical? (dudoso)
Mta:	¡Aja! Entonces vamos a escribir que una recta es una línea que puede ser horizontal o vertical (espera que los niños escriban; los niños anotan en su cuaderno). Ahora escribimos segmento (…) ¿Quién podría recordar qué es segmento?
No:	Son los pedacitos en que está dividida
Mta:	Ajá, son los pedacitos en que está dividida, entonces vamos a apuntar que los segmentos son partes de la recta que tienen igual tamaño (los niños escriben). Ahora, si juntamos lo que es la recta y lo que es segmento, las dos cosas que acabamos de escribir ahorita, entonces, podríamos decir lo que es la recta numérica (…) A ver, ¿quién se imagina lo que es una recta numérica? (ningún niño responde)
Mta:	¿Qué será una recta numérica, Luis Miguel?
No:	¿Una recta que sirve para hacer operaciones?
Mta:	Bueno, nos va a servir para hacer operaciones, pero leyendo [lo que acabamos de escribir], fíjense: dice que recta es una línea que puede ser vertical u horizontal, y que segmento son partes de igual tamaño ¿qué creen que será una recta numérica?
Ns:	(silencio)
Mta:	Leyendo esas dos definiciones, si las juntamos, ¿cómo podríamos hacer una única definición? A ver, Julio.
Julio:	¿Una línea con números? (dudoso)
Mta:	Una línea con números, pues por ahí va, por ahí va, ¿quién me quiere completar lo que acaba de decir Julio? (…)
Ignacio:	¿Es una línea con varios segmentos?
Mta:	¡Ahí está! (con tono de aprobación) a ver Alma Lilia, tú querías decir algo
Alma:	Lo que dijo Ignacio
Mta:	¿Sí?, entonces, una recta numérica va a ser una línea horizontal o vertical que va a estar dividida en partes iguales que se llaman segmentos (…) y sobre cada partecita nosotros podemos representar números (…)

Cuadro 2.7. Ejemplo efecto Topaze.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, pp. 309-310)

Este ejemplo, fue seleccionado como efecto Topaze, puesto que el uso de frases como "parecido, parecido", "es algo de línea", "si juntamos, lo que es la recta y lo que es segmento", "por ahí va, por ahí va" y "leyendo esas dos definiciones, si las juntamos, ¿cómo podríamos hacer una única definición?, así como los tonos de desaprobación y de aprobación hacía las respuestas de los alumnos, guiaron demasiado a los alumnos para llegar a crear la definicion que la profesora preparó para el concepto de recta numérica, que dicho sea de paso, la terminó enunciando la profesora y no los alumnos, esto a partir de lo poco que los alumnos fueron aportando.

1.6.2 Efecto Jourdain

Ávila (2001b) interpreta este efecto, como aquel momento en donde el profesor, al no querer constatar que existe un fracaso en la forma en la que está enseñando algún contenido, reconoce o admite un indicio de conocimiento en los comportamientos del alumno, aunque estos conocimientos sean ocasionados por cuestiones banales del medio.

Es decir, este efecto describe la creencia de que, aunque las ideas y los conocimientos se encuentren en la cabeza del profesor, eso no significa que estos mismos se encuentran en la cabeza de los alumnos, dicho de otra forma, es sobrevalorar las acciones de los alumnos (Brousseau, 1986).

Este efecto según Brousseau (1986) puede ser provocado por las siguientes situaciones:

- El deseo de insertar el conocimiento a través de actividades familiares, pues esto ocasiona que el profesor sustituya la problemática verdadera por otra.
- Ciertos métodos pedagógicos centrados en las preocupaciones del niño.
- La idea estructuralista, donde el alumno manipula un ejemplo y el profesor ve en dicho ejemplo la estructura que se desea enseñar.

El ejemplo que nos puede ayudar a comprender este tipo de efecto, lo encontramos en Rincón, Salinas, Guanina y Hurtado (2002), ellos comentan lo siguiente:

> "Tal es el caso de un docente de escuela básica que pide calcular el área A de un triángulo ABC, cuyos lados son *a, b* y *c*, donde *b* es la base, mediante el empleo de la formula $A = \frac{base \times altura}{2}$, para ello el docente suministra las longitudes de los lados y sus respectivas alturas. Un alumno, a diferencia de sus compañeros, no utiliza el valor de la base b del triángulo, sino que calcula el área requerida sustituyendo los valores de a y ha en la formula del área. Entonces, el profesor se le acerca y lo felicita por haber utilizado el teorema: En todo triángulo el producto de las alturas por sus respectivos lados es contante. Es decir, $hc \times c = hb \times b \ = ha \times a$, lo cual no es conocido por el alumno hasta entonces" (p. 11).

1.6.3 Deslizamiento metacognitivo

En algunas circunstancias, como el fracaso de un método de enseñanza, el profesor para justificarse y para continuar su acción puede realizar la enseñanza utilizando sus propios medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero objeto matemático, un ejemplo de esto, es comenzar a dar un curso de lógica cuando se pretende enseñar un error de razonamiento dentro de la solución del problema, si este intento fracasa, se puede volver a acercar a un nuevo deslizamiento al tratar de hacer un dibujo o algún otro grafo, este fenómeno, al producirse varias veces, puede ocasionar la confusión de los alumnos, puesto que pierden de vista el objeto matemático principal (Ávila, 2001b, Brousseau, 1986).

Un ejemplo que nos puede ayudar en la comprensión de este efecto lo encontramos en Rincón, Salinas, Guanina y Hurtado (2002, p. 25), ellos presentan una situación donde el profesor (D3) se encuentra enseñando la multiplicación de enteros y reportan lo siguiente:

D3: Esther, pasa a resolver el primer problema.
El problema plantea:
Fíjate en las siguientes caritas, utiliza tu imaginación para establecer los signos. Responde con caritas o con signos.

a.) ☹ x 😆 x ☹ = b.) 😆 x 😆 x 😆 =
c.) 😆 x ☹ x 😆 = d.) ☹ x ☹ x ☹ =

-Esther, inmediatamente responde:
A1: a.) ☹ x 😆 x ☹ = ☹
D3: Esther, la respuesta es una carita alegre o un "mas".
A1: ¿Por qué?, si tengo más caritas tristes que alegres, entonces la respuesta es una carita triste.
D3: No, las caritas tristes son "menos" y las caritas alegres "mas", luego se multiplican.
A1: : ¡Ah!, entonces la respuesta es: a.) ☹ x 😆 x ☹ = ☹+

Cuadro 2.8. Ejemplo situación de deslizamiento metacognitivo.
D3 se refiere a al profesor y A1 al alumno
(Rincón, Salinas, Guanina y Hurtado, 200, p. 25)

En el ejemplo se nota claramente que el profesor utiliza una heurística propia, puesto que él les asigna a las caritas un signo (a las tristes un menos y a las felices un más), lo cual, como se menciona en la definición de dicho efecto, es utilizada dicha heurística en lugar del verdadero objeto matemático (el signo).

1.6.4 Uso excesivo de la analogía

Para Brousseau (1986), la analogía es un método heurístico muy exitoso si es utilizado con control, pero su utilización en exceso dentro de una clase de matemáticas es una forma de producir el efecto Topaze, las analogías pueden darse de dos formas; usando problemas similares o realizando la analogía de objetos matemáticos con objetos cotidianos, que llegan en algún momento a deformar el propio objeto matemático.

Un ejemplo que nos ayudará a comprender mejor este tipo de efecto nos lo muestra Ávila (2001b, pp. 199-200), dicho evento toma lugar en un salón de quinto grado con una profesora que tiene 16 años de experiencia docente, el objeto de enseñanza en dicho evento es el concepto de fracciones.

Mta:	El día de hoy vamos a ver qué son las fracciones (muestra a los niños un palto de pozole) ¿Para qué sirve (el plato)?
Ns:	¡Para pozole!
La maestra interroga sobre los ingredientes que se ponen al pozole y con los que éste se acompaña: el interrogatorio es muy amplio; finalmente, una respuesta da pie a la maestra para entrar al contenido matemático previsto.	
Na:	Rábanos
Mta:	¿Y van enteros?
Na1:	No, porque no nos lo podemos comer así
Mta:	(…) Exactamente, no lo podemos comer, y por eso los partimos (enfatiza con el tono de voz la última frase). Por eso vamos a ver qué son las fracciones. En la antigüedad les llamaban quebrados y yo no sabía por qué, pero un día estaba jugando con mi hermanito ¿y qué creen que pasó? (lanza el plato por el aire; los niños se ponen tensos; después de varios simulacros, la maestra tira el plato y éste se rompe)
Ns:	¡Ah! ¡Se rompió! (y otros comentarios similares)
Mta:	Sí, pero ¿qué pasó?
No:	Se despedazó, se hizo varios pedazos.
Mta:	Si, había un entero y a la hora de romperse se dividió en partes (saca de su escritorio una taza)
Ns:	¡No, no, maestra! (gritan todos)
Mta:	¡Por qué [esta taza] es entera?
No:	Porque sus partes están enteras y no le falta ni un "cacho" (…)
Mta:	Este es un entero, pero (…) (Rompe la taza lanzándola al aire a pesar de que los niños gritaban pidiéndole que no lo haga)
Mta:	Ahora es un quebrado. ¿Por qué es un quebrado?
No:	Porque se desunen todas sus partes
Mta:	Estas [partes] son quebrados (muestra los pedazos de la taza)

Cuadro 2.9. Ejemplo de uso excesivo de la analogía.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
(Ávila, 2001b, pp. 199-200)

Este ejemplo, muestra este efecto puesto que la profesora explica el concepto con puros objetos que los estudiantes conocen, perdiendo de fondo la misma definición matemática de un quebrado o fracción, lo cual en un futuro podría llegar a ocasionar algún tipo de confusión para los alumnos.

1.7 Devolución

Como ya lo hemos estado mencionando, consideramos al aprendizaje como una modificación del conocimiento que el alumno produce por sí mismo y que el profesor solo provoca (de igual forma ya comentamos que para lograr lo anterior el profesor busca una situación apropiada). Brousseau (1988) dice que para que esta situación si desarrolle algún aprendizaje es necesario que la respuesta que el alumno de al inicio no sea lo que se le quiere enseñar, sino que esta respuesta debe ayudar a construir una estrategia base ayudada de sus conocimientos previos, pero que a su vez esta estrategia en algún momento adelantado de la actividad se muestre débil y así lograr que el alumno se vea en la necesidad de realizar modificaciones en sus conocimientos con el propósito de lograr resolver la situación en la que se encuentra.

Sadovsky (2005) y Brousseau (1988) concuerdan en que el trabajo del profesor consiste en proponerle al alumno situaciones de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuestas personales a preguntas y que los haga funcionar o los llegue a modificar como respuestas a las exigencias del medio y no a las del profesor.

Así la resolución del problema se convierte en responsabilidad del alumno, pero esto no es sencillo, puesto que el alumno debe tener un proyecto de solución y aceptar su responsabilidad, más aún no basta que el profesor comunique el problema para que se convierta en su problema, de igual manera no basta que el alumno sienta suyo para que el problema sea universal, es decir que se encuentre libre de cuestiones subjetivas. Cuando el profesor realiza alguna actividad mediante la cual se intenta alcanzar ambas cosas se dice que el profesor está realizando una devolución (Brousseau, 1988). Lo anterior nos indica que el profesor mediante la devolución pone al alumno en una situación a-didáctica.

Un ejemplo de un contrato donde se utiliza la devolución nos lo presenta Ávila (2001b, pp. 293-294), el grupo al que se refiere el siguiente episodio es un grupo de cuarto grado con una profesora con cuatro años de servicio docente, el objeto de enseñanza son fracciones. Ávila nos comenta antes de presentar el episodio que, en general la maestra solicitaba a los niños que abrieran el libro de texto en una página señalada, seguido de esto, algún alumno o la profesora leía el primer ejercicio o actividad, y en caso de que se creyera necesario la profesora agregaba alguna explicación o interrogaba para asegurar la comprensión. El episodio que nos presenta como ejemplo de devolución, es el siguiente:

Selene:	[2]"*En la tienda del pueblo hay de todo un poco, así, las personas no tienen que ir tan lejos para comprar lo que necesitan. Don Rodolfo encargó unos clavos a su sobrino Juan, le dio dinero para comprarlos y una tira de papel para medirlos. La tira era de este tamaño*" […]
Mta:	¿Ya vimos el tamo? (se refiere a la tira que aparece en el libro)
Ns:	¡Sí!
Mta:	¿Ya vieron todos los clavos? (los niños observan y la maestra pide que encierren los clavos de acuerdo a las instrucciones que aparecen en el libro)
Mta:	"*En la tienda Juan pidió clavos de tres tamaños: de una tira, de media tira y de una tira más un medio de tira. EL dueño de la tienda le mostró clavos de varios tamaños para que Juan escogiera. Marca los clavos que debió escoger Juan*".
Mta:	Encierren en un circulo los clavos que escogió
Mta:	Oye Miriam, ¿cuántos [clavos] escogiste?
Miriam:	Tres, maestra
Mta:	Oye, Mayolo, ¿cuántos escogiste?
Mayolo:	Cuatro
Mta:	¿Por qué escogiste cuatro, Mayolo? (no se escucha la respuesta de Mayolo). … ¿Tú cuántos escogiste, Julieta? (tampoco se escucha) … Levanten la mano quien escogió 4 (algunos levantan la mano). ¿Quién escogió 3? (la mayoría levanta la mano).
Mta:	Valencia, ¿cuántos escogiste?
Valencia:	Cuatro
Mta:	¿Por qué cuatro?
Valencia:	Porque son del mismo tamaño
Mta:	Selene, ¿cuántos señalaste?
Selene:	Tres
Mta:	¿Por qué no cuatro, o por qué no dos, por qué a fuerzas?
Lorena:	Porque pienso que tres son de la misma medida que la tira […]

Cuadro 2.5. Ejemplo situación de institucionalización.
No se refiere a un alumno y Mta a la maestra
hace referencia al texto que se lee
(Ávila, 2001b, pp. 211-212)

Ávila (2001b), comenta que, con el planteamiento de la situación, así como las preguntas durante la parte en la que comienza la puesta en común, se busca que los alumnos tomen la responsabilidad de su aprendizaje. Y, en efecto, tratan de medir los clavos, algunos lo hacen con sus dedos, otros con el lápiz y unos más con la regla. Pero no siguen la lógica que el libro plantea (a excepción de Lorena, quien se entiende tiene una vaga idea), es decir, la de usar la tira que aparece en el problema como unidad de medida, de donde se concluye que hay problemáticas para resolver el ejercicio, con lo que la devolución desaparece de la situación, puesto que la profesora más adelante decide retomar la responsabilidad para poder darle solución al problema, esto lo realiza explicando el problema y el método de solución propuesto por el libro.

1.8 Obstáculos, errores y dificultades

Dentro de las distintas teorías en la enseñanza de las matemáticas, existe un gran interés en identificar los obstáculos, errores y dificultades que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a continuación, presentaremos algunas ideas sobre estos conceptos.

Godino, Batanero y Font (2003) hablan de error cuando el alumno realiza una práctica que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar (escuela, profesor, libros) y entienden por dificultad a aquello que indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio.

Para estos investigadores las creencias de los profesores sobre los errores de los alumnos dependen de sus propias concepciones sobre las matemáticas, de igual manera se menciona que el modelo de aprendizaje es determinante para los errores, puesto que si el modelo es conductista el error debe ser corregido, mientras que en el modelo constructivista el error es constitutivo del conocimiento durante el aprendizaje (Godino, Batanero y Font, 2003).

Según Godino, Batanero y Font (2003) clasifican las dificultades en 6 grupos, los cuales presentamos a continuación:

- Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.
- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas.

- Dificultades que se originan en la organización de la institución.
- Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado.
- Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos.
- Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.

Por su parte Davis (1984, citado en Rico 1998) con su teoría de esquemas y constructos personales combinados con los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información, tipifica los errores de la siguiente manera:

- Reversiones binarias.
- Errores inducidos por el lenguaje o la notación.
- Errores por recuperación de un esquema previo.
- Errores producidos por una representación inadecuada.
- Reglas que producen reglas.

Por otro lado, Radatz realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías (1979, citado en Rico 1998):

- Errores debidos a dificultades de lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información especial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

De igual manera Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987, citados en Rico 1988) basan la siguiente clasificación en el conocimiento matemático más que el en procesamiento de la información:

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Inferencias no válidas lógicamente.
- Teoremas o definiciones deformados.
- Falta de verificación en la solución.

- Errores técnicos.

Como se puede observar distintos autores realizan una clasificación de los errores desde distintos puntos de vista, desde el conocimiento matemático hasta en la manera en la que se procesa la información, de igual forma se puede observar que algunas de estas clasificaciones convergen en algunos mismos tipos de errores, por ejemplo, con los errores cometidos por el mal entendimiento del lenguaje.

En contraste, gracias a los trabajos de Chevallard (e.g. Chevallard, 1992), en los que definió el concepto de obstáculo epistemológico y que aseguró que este tipo de obstáculo no se encontraba en el aprendizaje de las matemáticas, Brousseau (2007) se interesó en dar la definición de obstáculo:

> "Un obstáculo es un conocimiento en el sentido que le hemos dado de manera regular de tratar un conjunto de situaciones. Este conocimiento da resultados correctos o ventajas apreciables en determinado ámbito, pero se revela falso o completamente inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio. El conocimiento nuevo no se establece a partir del conocimiento anterior sino contra él […] estos conocimientos son respuestas universales en ámbitos precisos. Aparecen entonces casi necesariamente en la génesis de un saber, ya sea en una génesis histórica o didáctica" (p.45).

Podemos entender que un obstáculo aparece gracias a errores que están unidos por fuentes comunes, una de estas fuentes puede ser un conocimiento previo que en su momento tuvo éxito, de modo que un obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento, sino que pone resistencia para su adquisición.

Esta concepción de obstáculo por parte de Brousseau nos hace pensar que los obstáculos dan lugar a dificultades, y estas dificultades al confrontarse con algo nuevo dan a lugar a errores, el uso correcto de todos estos elementos implica la buena identificación y la inclusión explícita del rechazo de un obstáculo por parte del profesor (Brousseau, 2003).

Brousseau clasifica los obstáculos en tres:

- Obstáculo ontogenético o psicogenético. "Son los que ocurren a causa de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto educativo: el desarrolla conocimientos convenientes a sus medios y a sus objetivos de acuerdo con su edad actual" (Brousseau, 2003, p.4).

- Obstáculo didáctico. "Son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto del sistema educativo" (Brousseau, 2003, p.4).
- Obstáculo epistemológico. "Son aquellos a los cuales no se puede, ni debe escaparse, por su mismo papel constitutivo en el conocimiento contemplado. Se puede encontrar en la historia de los propios conceptos. Eso no quiere decir que se debe a ampliar su efecto ni que se deben reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vinculado" (Brousseau, 2033, p.4).

Es decir, los primeros, son causados por los objetivos y medios que rodean al sujeto dependiendo de su desarrollo personal, tanto físico como cognitivo, los segundos dependen de la forma y métodos en la que el profesor o el sistema atacan los temas matemáticos, y los últimos son aquellos que tienen que ver con la forma en la que se entiende de raíz el concepto matemático.

En conclusión, podemos observar que, aunque se han hecho grandes intentos por desarrollar una clasificación de errores basándose en obstáculos, hasta el momento no se ha superado los niveles generales, descriptivos y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita calificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos (Rico, 1988). Es por esta razón que aceptamos el hecho que menciona Godino, Batanero y Font (2003), que la tipificación de los errores depende de las experiencias que tiene el profesor sobre las matemáticas, al igual que al observar las distintas categorías que se proponen aceptamos la clasificación de los obstáculos propuesta por Brousseau, puesto que para nosotros es la clasificación más general para este constructo.

Capítulo 2
Metodología

En este capítulo abordaremos la metodología que se utilizó para el desarrollo de este trabajo. Se explicará, desde los conceptos teóricos que envuelve, el tipo de investigación cualitativa que se llevó a cabo y el estudio de caso instrumental. Se abordarán y explicarán las tres fases de esta investigación, en donde explicaremos paso a paso la manera en la que fue realizada. Se describirá a nuestro informante, así como el medio que lo rodea.

De igual manera, dentro de este capítulo se presentará el diseño de la situación didáctica que se discutió y aplicó, durante dicha presentación explicaremos los momentos en los cuales los conceptos desarrollados en la teoría Brousseauniana aparecen en nuestra situación didáctica.

2.1 Diseño de la investigación

Dentro de esta sección abordaremos los conceptos teóricos sobre metodología que nos ayudarán a clasificar nuestra investigación como una investigación cualitativa e interpretativa, usando un estudio de caso instrumental.

2.1.1 El estudio cualitativo

Corbin y Strauss (2002) entienden por investigación cualitativa a "cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación" (pp. 19-20). Aunque igual no se deja a un lado que parte de los datos recabados sean cuantificados, sin embargo, la gran parte del análisis se basa en la interpretación.

Añaden que también se entiende por análisis cualitativo a "el proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico" (Corbin y Strauss, 2002, p. 20).

De manera similar Baptista, Fernández y Hernández (2010) entienden por enfoque cualitativo a la "recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación" (p. 7).

Según Grinnell (1997, citado en Baptista, Fernández y Hernández, 2001) este enfoque ha sido también entendido como una investigación, naturalista, fenomenológica, interpretativa o etnográfica.

Lincoln y Guba (1991, citado en González, 2001, pp. 228-229) entienden y enfocan la investigación naturalista como una investigación interpretativa y cualitativa y lo caracterizan por cinco axiomas:

- La naturaleza de la realidad. Entiende a la realidad como algo simple y fragmentable, el concepto de que las realidades son múltiples, holísticas y construidas, es decir renunciar al ideal positivista de predicción y del control y usar el objetivo de la investigación como interpretación de los fenómenos.

- La relación entre el investigador y lo conocido. Se supone al investigador del objeto como inseparables.
- La posibilidad de generalización. Desarrollar un modelo conocimientos (cuerpo ideográfico) que pueda describir al objeto de estudio.
- La posibilidad de nexos causales. No es factible distinguirse la relación causa-efecto, pues se supone a los fenómenos en una situación de influencia mutua.
- El papel de los valores en la investigación. La investigación esta influida por
    - El investigador.
    - La elección del paradigma desde el cual se trabaja.
    - La elección de la teoría sustantiva seleccionada para guiar y recoger, analizar e interpretar datos.
    - Valores que forman parte del contexto.

Basándonos en los elementos descritos anteriormente, podemos justificar que la investigación que se llevó a cabo es de índole cualitativa con un enfoque interpretativo, puesto que se intentó explorar los efectos del contrato didáctico en los que recae un profesor, recabando datos para después interpretarlos y organizarlos, y con esto, hallar la relación que tienen estos efectos con el desarrollo y aplicación de una situación didáctica diseñada.

2.1.2 Estudio de caso

Stake (1995), hace mención en que un estudio de caso tendría que ser igual de complejo que uno particular, puesto que su verdadero trabajo es el de particularizar y no el de generalizar, es así como además sus conclusiones deben invitar la modificación de la generalización.

Rosales (2018) basándose en Stake (1995) menciona que "el caso puede corresponder a un solo elemento o varios que se encuentran dentro de la población de nuestro objeto de estudio" (p. 36).

Según Stake (1995) este estudio es efectivo tanto para el estudio de programas, personas, fenómenos e interpretaciones, es por esta razón que se decide utilizar dicho estudio, pues nuestro propósito es estudiar los fenómenos causantes por la aparición de los efectos del contrato didáctico. Para esta investigación, podemos decir que nuestro caso es un elemento de la población de profesores del nivel bachillerato en Puebla.

Para Stake (1995) dependiendo de la intensidad del estudio se puede caracterizar un estudio de caso como intrínseco o instrumental.

2.1.2.1 Estudio de caso intrínseco

El estudio de caso intrínseco es útil cuando nuestro propósito en la investigación es comprender un caso particular más no la generalidad de un fenómeno, por lo que es necesario acotar nuestro caso de estudio y limitarnos al estudio de éste, su importancia la encontramos en la naturaleza del caso que se está estudiando y de lo que se puede aprender de él, lo que obliga a que el análisis se realice de manera profunda (Stake, 1995).

2.1.2.2 Estudio de caso instrumental

Este tipo de estudio de caso es útil cuando el propósito es comprender un fenómeno o generar, o afinar una generalización, o incluso el de comprobar una teoría en el estudio de un caso particular. Por su nombre podemos entender que este tipo de estudio sirve como instrumento para la comprensión de algo complejo, el estudio de un caso particular sirve de apoyo para generar ideas que ayuden a explicar el fenómeno a comprender o comprobar.

Igual, se entiende que este estudio de caso nos ayuda en la elección de un método de investigación y de la forma de analizar datos, impidiendo así clarificar el camino a seguir y evitar desviaciones.

Con lo descrito anteriormente, nos es posible ubicar nuestra investigación como un estudio de caso instrumental, puesto que se utilizó como medio para la comprensión de conceptos complejos, como lo son los desarrollados en la teoría de situaciones didácticas.

2.2 Fases de la investigación

La presente investigación, se llevó a cabo en el marco del proyecto "Diseño y análisis de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para Cálculo en Bachillerato", celebrado entre septiembre de 2017 y mayo de 2018.

En dicho proyecto participaron dos investigadores de la Maestría en Educación Matemática (MEM) de la BUAP, tres alumnos de la MEM y dos alumnos de la licenciatura en matemáticas de la BUAP, así como cuatro profesores invitados que imparten la materia de cálculo integral a nivel bachillerato.

El tema en el cual se centró el diseño de los materiales, así como el diseño de la situación didáctica es "Cálculo de volumen de sólidos de revolución", correspondiente al mapa curricular del tercer año de bachillerato.

Durante el tiempo en el cual se llevó a cabo el proyecto, se realizaron reuniones semanales con el grupo de trabajo, para discutir y analizar propuestas y resultados propios del proyecto, a la par se realizaron reuniones quincenales con los miembros del grupo de investigación, en las cuales, en primera instancia, se diseñó y discutió los materiales didácticos que se utilizarían en la secuencia didáctica, seguido de esto, en este grupo de investigación, se discutían resultados propios de las distintas ramas de investigación que daba el proyecto (correspondiente a las cinco tesis que se tendrán como producto).

El diseño de la situación didáctica que se presentará a continuación se llevó a cabo durante dos sesiones con el grupo de investigación, en donde se discutió el orden de las actividades, junto con los objetivos de cada una de ellas.

2.2.1 Fase 1. Diseño de la situación didáctica

Como ya se mencionó las actividades que se desarrollaron corresponden al tema de sólidos de revolución, el diseño de la secuencia de actividades tiene como propósito llevar al alumno a la construcción autónoma del concepto de sólido de revolución y el uso de la integral para el cálculo de volúmenes, para los fines de esta secuencia se dividió al grupo en 8 equipos cada uno de ellos con cinco integrantes.

De igual manera, dicha secuencia fue diseñada y discutida, con el grupo de investigación conformado por dos investigadores de la MEM, tres alumnos de la MEM y dos alumnos de la licenciatura en matemáticas, en un total de dos sesiones.

A continuación, describiremos con más detalle cada una de las situaciones, así como sus objetivos particulares.

Estas primeras dos actividades forman parte del inicio de la secuencia, donde se tiene como objetivo principal que los alumnos tengan una idea de lo que es un sólido de revolución y realicen las primeras formulaciones acerca de sus características.

1° actividad. “Primer acercamiento a sólidos de revolución”

Se tiene como objetivo establecer que los sólidos de revolución se generan a partir de girar la gráfica de una función o una figura plana y consta de tres etapas:

Etapa 1

- Dividir al grupo en equipos de cuatro a cinco alumnos y proyectarles el siguiente video en dos momentos: en el intervalo de tiempo [0,0:56] y [3:15, 4:12].

Link: ***https://goo.gl/7RVrEY***

Esta etapa de la actividad es identificada como una situación de formulación, puesto que los alumnos obtienen información por parte de un elemento de su medio (el video) con el propósito de guardar esta información y usarla en actividades o etapas posteriores, de igual forma, se tiene el propósito de que el alumno comience a reconocer el resultado de rotar una figura con respecto a un eje dado.

Etapa 2

- Los alumnos deberán realizar la actividad propuesta en el video (en los tiempos 3:36 a 4:20, el vídeo se deja correr sin pausas y, al finalizar dicho intervalo de tiempo, se proyectarán las figuras del vídeo y se añadirán dos que provengan de funciones). Por equipos dibujarán los sólidos de revolución que se forman al girar las figuras dadas sobre el eje indicado.

Esta segunda etapa la podemos identificar como una situación de acción que al mismo tiempo lleva una situación de formulación, puesto que los alumnos al recibir la información dada por el video y comenzar a crear las figuras que se generan comienza a hacer uso de su medio y con esto encontrarse en la situación de acción, y mientras esto sucede se espera que comience a ver la reacción de algunos elementos de su medio, observar cómo sus compañeros trabajan, comentarios de la profesora e incluso parte de lo que el video presenta y usar en algún momento sus conocimientos previos; entrar a la situación de formulación y usar todo para poder darle respuesta a lo propuesto.

Etapa 3

- Una vez terminadas las propuestas, los alumnos compararán y discutirán sus dibujos con la solución que deberá proyectar el profesor. Las reflexiones se guiarán en torno a las posibles dificultades en la identificación del sólido de revolución resultante al girar una figura o una curva.

Esta última etapa fue creada con el propósito de generar una situación de validación, puesto que, como ya se mencionó, en este tipo de situación didáctica el alumno busca convencer a los demás sujetos que participan en la situación a través de la argumentación de sus respuestas así, como recibir por parte de los demás sujetos cuestiones y observaciones que en algún momento obliguen al alumno a entrar a una situación de formulación en caso de ser necesario. En esta parte los alumnos comparan con sus compañeros y con la profesora en una puesta en común sus resultados, de igual manera se espera que al entrar al momento final de la etapa, se lleve a cabo una situación de institucionalización, puesto que en el momento en el que la profesora dirija las reflexiones se espera que ella refute que los sólidos de revolución provienen de girar una figura o la gráfica de una función con respecto a un eje.

2° actividad. "Clasifica sólidos de revolución"

Para la siguiente actividad se les entregará a los alumnos algunos objetos que sean sólidos de revolución y otros que no lo sean (como los que se observan en las siguientes imágenes), además del material necesario para que puedan verificar sus respuestas simulando ejes de rotación.

Esta actividad tiene como objetivo que el alumno, con las características que en la actividad previa fueron rescatadas, sea capaz de clasificar algunos objetos comunes en cuáles son y no son sólidos de revolución, y de nueva cuenta podemos identificar tres etapas en esta actividad.

Etapa 1.

Con estos objetos los estudiantes deberán:

- Explorarlos y clasificarlos en dos grupos, los que sean sólidos de revolución y los que no.

En este momento el alumno se encuentra en una situación de acción, puesto que él comienza a maniobrar parte de su medio, los objetos, para comenzar a identificar algunas características de cada uno de ellos, de igual manera podemos identificar que el alumno se introduce en una situación de formulación, puesto que se espera que al recordar las características que en la primera actividad fueron institucionalizadas comience a realizar una primera clasificación de estos objetos a partir de su acción sobre ellos.

Etapa 2

- Para los que sí lo sean, identificar el eje de rotación para que dicho objeto cumpla las características de ser sólido de revolución. Una vez identificado, indicar la figura que lo genera. Comprobar sus respuestas manipulando los objetos con los materiales que se les proporcionará.
- Para los que no lo sean, dar las razones que los llevan a esa conclusión.

En este momento se espera que se introduzca al alumno en una situación, de acción, puesto que debe maniobrar los objetos, los cuales son parte de su medio y, en su mayoría en una situación de formulación, puesto que el alumno, a partir de su clasificación y de su última acción sobre cada uno de los objetos comience a identificar algunos elementos extras al objeto, como lo son su eje de rotación y la figura que los genera, o en su defecto comenzar a construir las razones del porqué identificó a algún objeto como no sólido de revolución.

Etapa 3

- Con base en sus observaciones, se les se les pedirá que discutan sobre las características comunes que encuentren en los objetos que sí son sólidos de revolución y cuáles describen a los que no lo son.

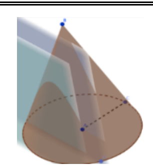
En esta etapa se introduce al alumno en una situación de validación, puesto que al discutir con sus compañeros las características que hallaron a partir de sus observaciones e interacciones con los objetos recibirán por parte de ellos o por parte de la profesora una retroalimentación que pueda en algún momento apoyar su observación o llegar a mejorarla al ponerla en duda y ocasionar que el alumno busque la manera de justificar de manera más adecuada dicha observación, o incluso llegar a convencerlo de que tal vez está incorrecta su observación.

Las siguientes seis actividades forman parte del desarrollo de la secuencia didáctica, en general se espera lograr en esta etapa que el alumno formalice las características de lo que es un sólido de revolución y la manera en la que este se genera, concluyendo que cada uno de ellos es generado generalmente por una función al ser rotada con respecto a un eje determinado.

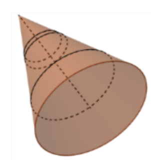
3° actividad. "Manipula sólidos de revolución con cortes"

En esta actividad, la cual es la primera que localizamos como parte del desarrollo de la secuencia, se tiene como objetivo que el alumno reconozca que al realizar cortes de manera perpendicular al eje de rotación se genera una circunferencia, para esto, la actividad tendrá como material auxiliar unos conos que fueron diseñados en madera, tales que tuvieran cortes perpendiculares y paralelos al eje de revolución y que pudieran retirarse dichas partes.

Para la siguiente actividad, el profesor les proporcionará a los alumnos material didáctico (sólidos de revolución con cortes como el esquema que se muestra a continuación).



- El alumno explora y manipula el material didáctico comparando las figuras que se forman en los diferentes cortes. Una vez hecho esto, deberá medir y comparar los radios de las circunferencias que se forman en los cortes perpendiculares al eje de giro.



Dentro de esta actividad encontramos una sola etapa, donde esperamos inducir al alumno en una situación de acción, al manipular el material didáctico, una situación de formulación, mientras busca similitudes en los diferentes cortes y así poder concluir lo esperado, y una situación de validación, puesto que al concluir la actividad durante la puesta en común se espera que al confrontar ideas y realizar retroalimentaciones se llegue a la conclusión conjunta de que un sólido de revolución tiene como característica principal que al realizar cortes perpendiculares al eje de rotación se generan circunferencias, y con llegar a una situación de institucionalización donde la profesora será la encargada de dar forma y conjuntar las conclusiones de las actividades 1, 2 y 3 para poder dar una definición de lo que es un sólido de revolución.

4° actividad. “Regresando a los sólidos clasificados”

En esta actividad se tiene como objetivo que el alumno reclasifique los sólidos de la actividad 2 usando las características institucionalizadas en la actividad previa.

- Regresando a los objetos que clasificaron en la actividad anterior, los alumnos decidirán a qué objetos hacer (o simular) los cortes perpendiculares al eje de rotación, observar cómo son dichos cortes y comprobar si los objetos que consideraron como sólidos de revolución, realmente lo son. Para los que sí sean sólidos de revolución, aproximar el radio de las circunferencias que se forman en los cortes.

Por la estructura de la actividad es posible notar que se encuentra en una situación de validación, puesto que al reclasificar los sólidos de revolución se espera que el medio, los sólidos y los demás alumnos, confronten al alumno con la característica que en su momento él usó para la primera clasificación con las nuevas características, esto en el caso de los que en primera instancia fueron clasificados como no sólidos de revolución y que si lo eran, o con los que fueron clasificados como sólidos de revolución y que no lo son y para el caso de los que si son, validar con ayuda del medio la clasificación previa. Para así lograr mostrar aquí un salto en cuanto al conocimiento construido hasta este momento de la actividad.

5° actividad. “Con hojas milimétricas”

Esta actividad fue diseñada con el propósito de lograr que el alumno comprenda que un sólido de revolución no necesariamente es generado a partir de una figura plana, si no que de manera general se genera a partir de una función con determinado dominio.

En esta actividad podemos identificar dos etapas.

Etapa 1
El profesor entregará a los alumnos hojas milimétricas.

- Ahora, únicamente con los objetos clasificados como sólidos de revolución, el alumno dibujará en las hojas milimétricas el contorno del objeto, de forma que el eje de rotación coincida con el eje horizontal de la hoja milimétrica, tratando de imaginar el giro de la figura que dibujaron y cómo se forma el sólido de revolución a partir de dicho giro.

En este momento de la actividad podemos darnos cuenta que se espera que el alumno se inmersa en una situación de acción y de formulación, la primera en el momento justo en el cual el alumno comienza a maniobrar los objetos y la hoja milimétrica, puesto que es posible, o se esperaría que el alumno confirme en este momento el manejo de los conceptos y de las características que hasta el momento ya han sido validados por todo el grupo, la segunda puesto que el alumno debe de comenzar a deducir la figura y la manera en la que se debe girar, para así poder generar cada sólido de revolución.

Etapa 2

- Una vez hecho esto, se discutirá la posibilidad de borrar de su dibujo las líneas paralelas al eje vertical (excepto si tienen curvatura) y todo lo que se encuentre por debajo de eje horizontal, e imaginarse qué figura se forma ahora, si se gira nuevamente alrededor del eje de rotación.

En este momento se induce nuevamente al alumno a una situación de formulación puesto que a partir de estas indicaciones y de la ejecución de estas se espera que logren deducir que el sólido que se generará a rotar la figura resultante sigue siendo el mismo sólido de revolución que al inicio, y así él pueda concluir que basta rotar una "tipo" función para generar un sólido de revolución.

De igual manera se espera que al concluir esta actividad se lleve a cabo una situación de institucionalización, puesto que se plantea que la profesora formalice que un sólido de revolución es generalmente generado por rotar una función respecto a una recta o un eje dado.

6° actividad. "Se les proporciona una función"

Esta actividad tiene como objetivo principal que el alumno comprenda que los radios de las circunferencias que se crean al realizar cortes al sólido de manera perpendicular con respecto al eje de rotación dependen del lugar donde se realice el corte, y que concluya que dicho radio corresponde es igual a lo que resulta de evaluar la función en el valor del dominio donde se realizó dicho corte. En esta actividad podemos identificar tres etapas.

Etapa 1.
En la siguiente actividad, el profesor debe proporcionar a los alumnos las siguientes funciones: $y = 3$ en el intervalo [1, 9], $y = 2x$ en el intervalo [0, 3], $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6] y $y = x^2 + 1$ en el intervalo [-2,5].

- El alumno deberá dibujar las funciones dadas y los sólidos de revolución que se generan a partir de estas, con la convención de que el eje de rotación será el eje horizontal.

En este momento se introduce al alumno en una situación de formulación puesto que el alumno usa su conocimiento previo, acerca de las distintas formas de graficar e identificar una función y sus elementos, para poder graficar y seguido de ahí poder deducir el sólido de revolución que se genera.

Etapa 2.

- Una vez dibujado el sólido de revolución generado por cada función, que el alumno se concentre en algún punto sobre el eje de rotación y aproxime la distancia entre dicho punto y algunos otros sobre el contorno del sólido en la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje a la altura de dicho punto. Luego, que compare las medidas que resulten y que repita el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación. (Se reforzará esta parte de la actividad con un diseño en GeoGebra).

En este momento se desea introducir al alumno a una situación de acción y a la vez de formulación puesto que se planea que el alumno deberá manipular su medio directo, cada función, y usar conocimientos previos, medición con regla, evaluar una función, para poder dar respuesta a lo que se está solicitando, de igual manera algo que se espera es que se introduzcan ellos mismos en una situación de validación al discutir con sus compañeros de equipo la estrategia que usarán o usan para hallar la distancia solicitada, puesto que esto ocasionará que entre ellos se lleve a cabo una retroalimentación de dichas ideas.

Etapa 3.

- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

En este momento se planifica que al inicio se inmersa a los alumnos en una situación de formulación, esto en el momento en el que la profesora comienza a realizar preguntas para saber las razones de las variaciones en las distancias medidas, se espera que estas preguntas sean diseñadas con la intención de generar varias veces una devolución con el propósito de lograr la respuesta esperada.

Al mismo tiempo se espera que se sumerja a los alumnos en una situación de validación, puesto que se planea que mientras la profesora realiza la devolución sus compañeros retroalimenten las respuestas que se vayan dando.

7° actividad. "Video del cálculo de volumen de sólidos de revolución"

Esta actividad fue diseñada con el objetivo de lograr que el alumno comprenda que la integral sirve como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, conociendo la función con la cuál fue generado.

Esta actividad fue diseñada con el propósito de hacer aparecer dos etapas:

Etapa 1

- Proyectar el video basado en la lectura guiada que se encuentra en el enlace:

Link: ***https://goo.gl/bDwcu1***

Esta etapa tiene como objetivo que el alumno se encuentre en una situación de acción, puesto que lo único que deben realizar durante esta etapa es ver el video y a partir de esto comenzar a sacar la información que ellos crean necesaria que pueda llegar a ser una herramienta para la construcción de un nuevo conocimiento.

Etapa 2

- El profesor deberá discutir con el grupo sobre la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el barrido como estrategia para llegar a la integral, qué es lo que se integra y la similitud de este proceso con el cálculo de área bajo la curva.

Esta etapa tiene como objetivo inducir al alumno en una situación de formulación, en un principio, puesto que se espera que los alumnos utilicen la información que recabaron del video para poder discutir con sus compañeros lo que la profesora solicite, mientras que la profesora ayuda a lograr los objetivos ocasionando devoluciones durante la discusión ya sea por parte de la profesora u ocasionar que los alumnos lo lleven a cabo, de igual manera se espera que los alumnos entren y salgan de una situación de validación mientras se encuentran dentro de la situación de formulación, puesto que en el momento en el que los demás alumnos comiencen a confrontar las ideas que ellos tiene con la que se esté exponiendo, deberán de buscar la forma de contrarrestar dicha confrontación usando sus conocimiento previos generados por el video.

8° actividad. "Aplica lo del video"

Esta actividad tiene como objetivo principal que el alumno utilice la integral para calcular el volumen de un sólido de revolución que es generado a partir de rotar una función sobre algún eje dado.

Esta actividad de nueva cuenta está planteada en dos etapas:

Etapa 1
Los alumnos deberán realizar el siguiente ejercicio de forma individual:

Dibujar la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,10] y el sólido de revolución que genera; luego, calcular su volumen por el método de la integral.

En este momento se espera que el alumno se introduzca en una situación de formulación, puesto que es necesario que primero identifiquen la función y la grafiquen usando conocimiento previos, seguido de esto, se espera que entren en una situación de acción, puesto que después de dibujar la gráfica de la función, se espera que ellos ya identifiquen el sólido de revolución que se genera y posiblemente utilicen otro método distinto al de la integral para calcular el volumen, en caso de que no suceda lo anterior se espera que continúen en una situación de formulación puesto utilizaran conocimiento previo, el obtenido cuando se vio área de curvas, para poder utilizar la integral como herramienta de solución al problema.

Etapa 2.

- El profesor deberá realizar una generalización a través de una lluvia de ideas.

En esta segunda etapa de la actividad se espera que se inmersa a los alumnos en una situación de validación, esto en un principio, puesto que al ser una lluvia de ideas, la profesora con apoyo de la devolución generará la discusión y ocasionará que los alumnos pongan en duda las participaciones de los demás, para así lograr que los alumnos busquen la manera de convencer a sus compañeros utilizando los conocimientos que hasta el momento han adquirido, en una segunda instancia se espera que se entre en una situación de institucionalización donde la profesora usando las conclusiones de la lluvia de ideas de una manera formal la generalización del uso de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes.

Las siguientes 2 actividades forman parte del cierre de la secuencia didáctica, en esta parte de la secuencia se pretende darle utilidad a lo institucionalizado en las actividades previas en la vida diaria de los alumnos, así como generar una conclusión general del tema de sólidos de revolución.

9° actividad. "Calcular el volumen de objetos"

Esta actividad tiene como objetivo que el alumno compruebe que el método de la integral da un resultado más exacto para el cálculo del volumen de un sólido conocido, es decir, se pretende que el propio medio, el material didáctico, genere el alumno en alguna instancia una devolución, esta se llevará a cabo en el momento en el que el volumen calculado con el método de la integral no corresponda o tenga una diferencia muy marcada con el volumen conocido del material, lo cual le indicaría al alumno que hay algo en el método que seguramente se realizó de manera errónea y en otra una validación de los aprendido hasta el momento, esto, en el momento en el que el método de la integral dé el mismo volumen o con una diferencia pequeña al conocido del objeto. Esto se espera lograr en tres etapas.

Etapas 1.
Al inicio de esta actividad, el profesor proporcionará a los alumnos objetos que sean sólidos de revolución (por ejemplo, un plato, un vaso, un cilindro, una esfera), uno por equipo, con los cuales el alumno deberá:

- Determinar el eje de rotación.
- Proponer la función que genera el sólido de revolución y sobre qué intervalo queda definida dicha función. (Para esto pueden recurrir a la medición de los objetos, para lo cual el profesor debe facilitarle el material necesario)

En este momento el alumno se encontraría en una situación de acción y formulación, de acción puesto que es necesario que reconozcan las características del objeto con el cual trabajarán, y de formulación, puesto que al ya conocer las características del objeto deberán usarla para poder deducir que función podría ayudarles a generar el sólido correspondiente.

Etapa 2.

- Calcular el volumen del objeto, con al menos dos métodos, de forma que uno de ellos sea utilizando la integral como herramienta y comparar los resultados.

En este segundo momento, el alumno es introducido a una situación de formulación, puesto que se le pide no solamente usar el método de la integral, sino, de pensar en algún otro método para calcular el volumen del objeto, es decir, se espera que el alumno, al utilizar la gráfica de la etapa anterior calculen el volumen del sólido usando el método de la integral y seguido de eso, buscar otro método distinto para poder observar que en efecto el método de la integral es una buena aproximación al volumen real del objeto.

Etapa 3.

- Por equipos, exponer su resultado al grupo.

En el último momento se espera que el alumno se encuentre en una situación de validación, puesto que, al compartir sus resultados con todo el grupo, ellos recibirán retroalimentación y así poder ayudar a generar la oportunidad de que ellos justifiquen su respuesta usando todo lo aprendido o se encuentren en la posibilidad de corregir sus argumentos. Y con esto llegar a un común acuerdo de que el método de la integral es una de las mejores herramientas para el cálculo de volúmenes.

10° actividad. "Resumen del tema"

- Para finalizar, los alumnos harán un resumen de la práctica realizada para este tema rescatando la importancia de la integral para el cálculo de los volúmenes de sólidos de revolución (un resumen por equipo).

Esta actividad tiene el objetivo de lograr la interiorización de toda la información obtenida a partir de la práctica a lo largo de las 9 actividades anteriores.

Aquí se pretende que el alumno se encuentre en una situación de validación, pero esta situación es inducida a partir de su propio medio, puesto que deberá usar sus producciones de las actividades previas y de los conocimientos recibidos por parte de estas mimas actividades, de igual manera la validación será provocada por el mismo al comparar las respuestas que dio en las primeras actividades con las que daría ya que adquirió y construyó al final de la secuencia.

2.2.2 Fase 2. Aplicación de la situación didáctica

En esta sección del capítulo, se dará una explicación sobre la escuela, es decir el contexto que rodea a la aplicación, así como también se dará a conocer a nuestro informante, y la manera en la que se llevó a cabo la recolección de datos y su respectivo análisis.

2.2.2.1 Contexto

La situación didáctica diseñada y explicada anteriormente, fue aplicado en un bachillerato perteneciente al sistema de bachilleratos general en la ciudad de Puebla en el estado de Puebla, en un grupo de tercer año con un total de 45 alumnos, en dicha escuela los alumnos al ingresar al tercer año son divididos por área de conocimiento (ciencias exactas, sociales y humanidades y ciencias de la salud), en nuestro caso, el grupo de alumnos corresponde al área de ciencias exactas, es decir una gran porcentaje de estos alumnos pretende estudiar alguna licenciatura correspondiente a dicha área, ya sea, alguna ingeniería, arquitectura o incluso matemáticas o física.

Ellos reciben la clase de matemáticas, en la cual se aplicará la situación didáctica tres veces por semana en un módulo equivalente a 50 minutos.

2.2.2.2 Informante

La profesora que será nuestra informante, participó en el grupo de investigación que diseñó la situación didáctica, es decir, ella colaboró con el diseño de todo el material que se ocupará durante la aplicación de la situación.

Actualmente, es estudiante de la Maestría en Educación Matemática que oferta la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, estudió la licenciatura en matemáticas en la Universidad de San Luis Potosí, al término de sus estudios, comenzó con su trayectoria docente, teniendo a la fecha 30 años de servicio en el nivel medio superior.

En la escuela, la profesora es la encargada del área de matemáticas y atiende a grupos de todos los grados además de llevar en ella 24 años de servicio.

2.2.2.3 Recogida de información

La aplicación de la situación didáctica diseñada fue repartida en un total de cinco sesiones, dichas sesiones fueron grabadas en audio y video, en particular, el audio fue recogido de la siguiente manera; se utilizaron en total cinco grabadoras de audio, la profesora eligió cuatro equipos, que tuvieron durante las cinco sesiones una grabadora de audio y otra grabadora la tenía solamente la profesora.

Se grabó en video con dos videograbadoras, una que se encargara de grabar en video solamente a la profesora y otra encargada de grabar en video a los alumnos, recorriendo entre todos los equipos.

Al finalizar las sesiones, todas las grabadoras de audio y video eran vaciadas y el contenido era guardado en un disco duro, esto con el propósito de poder analizar los contenidos de los videos y grabaciones en un tiempo posterior.

El propósito de grabar en audio además del video era lograr complementar lo que en el video no se lograra percibir.

2.2.3 Fase 3. Preparación del análisis

Al término de las cinco sesiones, se comenzó con la preparación de los datos, este proceso se explica a continuación.

En primera instancia, después de vaciar todos los audios y videos, se trascribieron todas las sesiones, poniendo mayor énfasis en las acciones que la profesora realizó durante todas las sesiones, puesto que como se mencionó la profesora tiende a realizar demasiadas gesticulaciones durante sus clases, dichas acciones aparecen en la transcripción escritas entre corchetes, acompañados con el diálogo que la profesora sostenía en ese momento.

Para lograr una mejora en las transcripciones basadas en los videos que se tomaron con la cámara encargada de la profesora, se utilizaron los audios tanto de la profesora como de los equipos seleccionados por ella.

En nuestra transcripción se le otorgó a cada alumno una nomenclatura (AX), donde X representa el número que le corresponde al alumno, dicho número fue asignado por orden de participación durante las sesiones, y para identificar a los equipos se les asignó (EX) donde X corresponde al número de quipo, recordando que en total se tenían ocho.

Al término de las transcripciones, se comenzó con la identificación y discusión de los efectos del contrato didáctico que ocurrieron en las sesiones, esto, apoyado en los videos, transcripciones y la teoría desarrollada en el capítulo 2. Al concluir dicha identificación se comenzó con el análisis de los datos y justificación de los mimos, dando lugar al presente trabajo.

Capítulo 3

Análisis

En este capítulo presentaremos el desglose de los momentos de la clase que creemos importante analizar, esto se llevó a cabo usando los elementos teóricos desarrollados, en específico los que se presentan dentro de las situaciones didácticas, cómo lo son los efectos del contrato didáctico, la devolución y el uso didáctico del error.

Este análisis se encuentra organizado por elemento teórico, es decir, especificaremos por cada elemento teórico los momentos de la clase que clasificamos como tal junto con la justificación por la cual fueron clasificados de tal forma.

Estos momentos como ya se ha mencionado en el capítulo anterior se llevaron a cabo dentro de un grupo de tercer año de bachillerato de un total de 40 alumnos, los cuales fueron dividido en ocho equipos, con los cuales trabajaron durante todas las sesiones, y una profesora que tiene 30 años de experiencia docente y el objeto de enseñanza es la definición y características de los sólidos de revolución y el uso de la integral para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Una aclaración que debemos realizar es que la profesora durante la aplicación del plan de clase cambió, por distracción, el orden de dos actividades, lo cual en algún principio nos hizo pensar que podría ser clasificado como un efecto, pero al ver que ese cambio no afectó el rendimiento y el curso de la clase, se decidió no clasificar dicho cambio como un efecto.

Durante todo este capítulo asignaremos la siguiente nomenclatura:

- Pr – Indicará los diálogos de la profesora
- As – Referirá los diálogos en los cuales los alumnos de todo el grupo contestan
- AEX – Indicará los diálogos en donde los alumnos del equipo número X hablen al mismo tiempo.
- AX – Referirá el diálogo del alumno número X o cuando se dirijan a él o sea parte de una referencia.
- EX – Indicará los diálogos y será referencia para el equipo número X

3.1 Efecto Topaze

Recordemos que, como lo mencionamos en el Capítulo 2, para nosotros el **efecto Topaze** es aquel que es ocasionado por una guía muy marcada por parte de la profesora hacía la manera de actuar del alumno con su medio, así como hacía la manera en la que debe de formular y validar las respuestas esperadas.

A continuación, se presentan los momentos que para nosotros fueron catalogados como una situación que genera un **efecto Topaze**, o como tal el efecto.

En el siguiente momento de la clase, nos encontramos en el inicio de la actividad uno, en dicha actividad se pide reproducir un video (dicho video se puede encontrar en: https://goo.gl/7RVrEY), con el cual se pretende introducir una idea sobre sólidos de revolución. Previamente, los alumnos ya habían investigado lo que era un sólido de revolución. Los siguientes extractos se refieren a la situación que se genera durante una indicación en el video, la cual consiste en dibujar los sólidos de revolución que se generan al rotar ciertas figuras sobre determinados ejes.

Pr: (…) Entonces pongan mucha atención, a ver si este video coincide con lo que investigaron, ¿sale?, ¿ya [está] todo mundo listo?
As: Sí
Pr: Sí [Reproduce el video].
Pr: [Pausa el video] Me espero, ¿lo quieren dibujar?
As: Sí
Pr: ¿Quieren sacar su libretita? y conforme vayan avanzando ustedes van a ir dibujando, ¿si entendieron la actividad que van a hacer?
As: Sí
Pr: ¿Le regreso rapidito o entendieron? (…) va. [Reproducción del video] (…) [Pausa el video] ¿Qué tal van?
As: Bien
Pr: ¿Otra vez? [Repite el video].
As: Sí
Pr: Última vez, [Repite y pausa el video mientras murmuran los estudiantes], no los escucho, ¿qué dijeron?
A6: Decimos que es como un cilindro, pero con un cono adentro [se refieren al sólido que resulta al hacer girar un triángulo rectángulo con un vértice, distinto al del ángulo recto, sobre el eje de rotación]
Pr: ¿Ya les cayó el veinte a los demás?
As: Ya
Pr: ¿Siguiente ya? Ya todo mundo siguió la sugerencia de A1, ya tiene la idea verdad, pero no lo sabe dibujar… pero bueno, siguiente chicos [Reproduce el video] (…) [Pausa el video] ¿otra vez? [Repite el video] ¿parada o acostada? [Refiriéndose a la parábola que aparece en el video]
As: Acostada
Pr: Ustedes me dicen, ¿qué fue? [Refiriéndose a un alumno] ¿Qué fue?
A2: Como un medio círculo
A3: Como un plato
Pr: Como un plato, ¿de cuáles?
A3: Como un plato hondo
Pr: Ándale, eso como que se parece más [Muestra emoción] pozolero[1] ¿no?, [Reproduce el video] (…) [Pausa el video] ¿otra vez?
As: Sí
Pr: Cambiaron el eje de rotación acuérdense [Refiriéndose a la parábola del video] (…) [Pausa el video y murmuran los estudiantes, teniendo noción de lo que dibujaran], quiero ver sus dibujos [Se acerca al equipo E8], ¿el que sigue?, ¿listos? [Reproduce el video] (…) [Pausa el video y los alumnos murmuran discutiendo el posible sólido de revolución] (…) [Repite el video]. Dice A5 que es una dona, yo le creo, pero también la rosquilla [Concluye el video].

Como se puede observar la profesora pausa el video en varias ocasiones, en especial después de cada indicación que el video ofrece, lo cual les permite a los alumnos discutir entre sí, como se nota cuando A6 comenta "nosotros decimos que es como cilindro, pero con un cono adentro" refiriéndose al sólido que se generaría al rotar un triángulo

[1] Plato hondo hecho de barro o cerámica, que se utiliza para servir el platillo conocido como Pozole.

rectángulo con el cateto menor como base, y eje de rotación vertical tangente al vértice que comparte la base con la hipotenusa, e incluso hay una discusión con la profesora, como lo podemos observar cuando la profesora dice "Ustedes me dicen, ¿qué fue?, ¿qué fue?", esto ocasiona para nosotros un **efecto Topaze** puesto que este tipo de discusiones ocasionados por las pausas en el video (las cuales no están marcadas en el plan de clase) guían las respuestas de los alumnos, puesto que logra cambiar las ideas que tenían en un principio los alumnos.

Dentro de este mismo extracto podemos observar que la profesora evita que se cometa un error, creando así un **efecto Topaze**, esto ocurre durante la creación del sólido generado por la rotación de una parábola, puesto que en el video utilizan la misma parábola de manera consecutiva, pero con un cambio en los ejes de rotación, esto se nota cuando la profesora menciona "cambiaron el eje de rotación, acuérdense".

Seguido de la reproducción del video, la profesora comienza con la puesta en común de los resultados que los alumnos y con esto los equipos obtuvieron, en particular, el siguiente extracto corresponde a la discusión que se genera al revisar los resultados de la parábola horizontal en el cual ella propone mover de nueva cuenta el eje de rotación, ahora, colocándolo de manera vertical y pasando por los dos extremos de dicha parábola.

Pr: Oigan, y qué pasa si ahora fíjense, aquí estaba el eje en esta posición, después con la misma parábola pusimos el eje acá, ¿y qué pasa si ahora ponemos el eje acá? [Ubica el eje de manera vertical de manera que sea tangente a los extremos de la parábola].
As: Una esfera
Pr: No, ¿apoco es esfera?, ¿apoco es circunferencia? [Lo pregunta con un tono de tal manera que se entiende que no han dado la respuesta correcta]
As: No, [hablan al mismo tiempo, y se logra percibir que algunos alumnos se acercan a la respuesta] [La profesora hace un gesto con la mano de manera que se entiende que se acercan a la respuesta].
A6: Como un balón de futbol americano
Pr: Como un balón de futbol americano, ¿verdad?

El **efecto Topaze** en el episodio anterior es generado en el momento en el cual la profesora, al preguntar qué se generará al rotar la parábola con el eje como ella lo propone y los alumnos comienzan a dar respuestas, cuestiona con un tono de desaprobación, dando a entender así que ninguna de las dos respuestas recibidas hasta ese momento son las correctas y, seguido de esto, cuando los alumnos continúan dando respuestas al azar, y la profesora logra percibir alguno que se acerca, ella realiza con sus manos la señal *más o menos* que da a entender a los alumnos que la respuesta es muy cercana a lo que ella espera, logrando así guiar la respuesta de los alumnos.

Dentro de la misma puesta en común, llegando el momento marcado por la secuencia, donde la profesora debe guiar la discusión hacía las características en común que tienen los sólidos de revolución que los alumnos acaban de dibujar, esto con el propósito de comenzar a hallar características necesarias y suficientes para determinar si un sólido es de revolución o no, esto se muestra en el siguiente extracto.

Pr: ¿Qué características tienen los sólidos de revolución?
A11: Que es una figura
Pr: ¿El sólido de revolución? [Hace un gesto simulando sorpresa a manera de desaprobación por la respuesta]
A7: Que tiene volumen
Pr: Aja, por ejemplo, que tiene volumen
A5: Bueno, es una figura plana que rota sobre un eje muchas veces.
Pr: Ok [Con sus manos simula rotaciones con respecto a un eje vertical], entonces, ella dice una cosa muy importante, y que a lo mejor no hemos aterrizado mucho, ¿qué es un eje?, estamos hablando de ejes y estamos hablando de rotar figuras planas, ¿sale?, entonces, como que ya nos estamos formando la idea de lo que es un sólido de revolución, A10 [Lo señala para que haga su participación].
A10: Yo podría decir que es una figura que, es una figura.
Pr: ¿Una figura un sólido de revolución? [Con sus manos da a entender que un sólido tiene volumen]
A10: Es una figura en 3D que se forma a partir de girar otra figura de primera o segunda dimensión sobre su propio eje. [Mientras esto pasa, la profesora realiza un gesto de aprobación a lo que A10 da como respuesta].
Pr: ¡Wow!, ¡muy bien!, fíjense todo lo que dijo, hasta te aplaudieron

En la situación anterior, se llega a notar el **efecto Topaze**, puesto que durante toda la discusión, la profesora toma actitudes tales como gestos de aprobación, en particular durante la participación de A10, lo cual le da a entender al alumno que va por el camino correcto, al igual que en esta misma participación la profesora ayuda a continuar con la idea simulando con sus manos la idea de volumen, de igual manera logramos observar que otra de las actitudes (la mayoría de ellas) son a manera de desaprobación como se nota durante la participación de A11, lo cual ocasiona que el alumno cambie su idea original, o en este caso que los demás alumnos comiencen a hacer otro tipo de participación, logrando así guiar la discusión hasta lograr obtener una respuesta que ella puede aceptar como verdadera.

Durante la puesta en común de la segunda actividad, la cual recordemos que consiste en clasificar algunos objetos como sólidos de revolución o no a partir de las características que observaron en la actividad previa, el episodio generado cuando la profesora pregunta las respuestas que le dieron al sólido correspondiente a un estuche de cepillo de dientes se encuentra a continuación

Pr: Y, a ver, el del millón, porque con este estaba observando que hay mucha confusión, ¿este es o no es [sólido de revolución]? [Refiriéndose a un estuche de cepillo de dientes]
As: [Contestan de manera dividida, un porcentaje dice que no y el otro dice que sí]
Pr: No es, ¿por qué?
A6: Porque no cumple con lo de tener una circunferencia o un círculo que pueda determinar que tiene una rotación [La profesora con su dedo señala un circulo en la base del estuche de cepillo de dientes y A6 señala la base de la botella que tiene en su mano] [A1 dice, no cumple mis reglas].
Pr: No cumple las reglas de A1, A6 dice que porque no tiene una base como habían mencionado de forma circular.

En el ejemplo anterior aparece el **efecto Topaze**, puesto que la profesora al lanzar la pregunta "¿este es o no es?" recibe respuestas divididas y esta solamente atiende la respuesta correcta, esto guía la discusión, puesto que evita el error, al ignorar a los demás alumnos, de igual manera podemos observar que durante la participación de A6 la profesora realiza un movimiento con su dedo, lo cual ocasiona que el alumno pueda concluir con su idea, logrando así guiarlo.

Dentro de la actividad dos, durante el episodio en el cual se les pide a los alumnos ubicar el eje de rotación y la figura que genera a los sólidos que ellos clasificaron como de revolución, la profesora se acerca a E1 para discutir con ellos lo que llevan hasta ese momento.

Pr: [Se dirige a E1], ¿le van a poner a otro?, ¿a cuál?
A12: Al vasito
Pr: Al vasito, es parecido ¿no?, que tal si escogemos otro, ese, miren este se hizo como el que vimos ayer de la (inaudible) le puedes hacer a este, ¿este cuál es?, exacto, muy bien, entonces vayan pensando, al girar se supone que esto, al girar es lo que va generando el sólido [Simula con sus manos la rotación alrededor de un eje]
AE1: Sí
Pr: Y se va a formar, tiene que ver con un círculo, con una elipse o con que
AE1: Es circular

En este evento aparece el **efecto Topaze**, durante el momento en el cual la profesora comienza a decir "vayan pensando, al girar se supone que esto, al girar es lo que va generando el sólido", puesto que durante ese momento la profesora comienza a hacer con sus manos la simulación de rotar la figura con respecto a un eje, seguido de esto pregunta que es lo que se va a formar, y da al mismo tiempo una sugerencia, "tiene que ver con un circulo", entonces dicha sugerencia junto con el movimiento de sus manos, guía a los alumnos de E1, logrando así que ellos den la respuesta "circular."

Una situación similar la encontramos durante el desarrollo de la actividad tres, en dicho momento, los alumnos se encuentran analizando los dos conos (el que tiene cortes perpendiculares al eje de rotación y el que los tiene paralelos), la profesora se acerca a E1 para preguntar qué es lo que ellos observan.

Pr: ¿Qué observan? [Se dirige a E1]
A15: Si lo partimos a la mitad puede ser un solido
Pr: Ah, sería, a ver si eres más específica porque no entiendo
A15: Ajá, que estos son sólidos, porque a la hora de girar, se parten a la mitad y giran formando la figura
Pr: O sea, que lo que ustedes dicen que lo que gira es esta parte [no se logra observar a que parte de algunos de los conos se refiere], o ¿cuál es la parte que gira?
A15: O sea, como en los videos que nos mostraba que una parte de la figura que es la que va a la mitad, a la hora de dar vuelta hacia círculos y se formaba la figura con volumen.
Pr: A ver pongan mucha atención [Haciendo gesto de desaprobación], A15 ya lo vio
AE1: No, no puede ser
Pr: Exacto, ¿ya vieron cuál era el error?
AE1: Sí
Pr: Porque esto se parece un poco al vaso ¿no?
AE1: Sí

Al igual que la situación previa, durante la discusión entre los alumnos de E1 y la profesora, ella muestra cierto desacuerdo e incluso desesperación hacia lo que AE1 comentan, esto indicado por la frase "A ver pongan mucha atención", puesto que mientras la profesora lo menciona, ella realiza un gesto de desaprobación, ocasionando así que AE1 cambien de opinión, en particular A15, puesto que la misma profesora se da cuenta que es uno de los primeros en cambiar su idea, ocasionando así que los demás también lo hagan, por estas razones, consideramos que la profesora guía el razonamiento de AE1, logrando por completo cambiar la idea original.

Durante la parte final de la actividad tres, la profesora continúa acercándose a distintos equipos para conversar con ellos lo que llevan observado, después de varios acercamientos a distintos alumnos, encontramos el siguiente evento, en este caso la profesora se acerca a E8 y platica con ellos.

Pr: [Se acerca a E8] ¿Qué diferencia hay entre estos cortes y esos cortes?, ok, a ver chicos, después de que ya los han estado manipulando, ¿Qué diferencia hay entre uno y otro?, entre este por ejemplo [Refiriéndose al cono con cortes paralelos al eje de rotación] y el otro [Refiriéndose al cono con cortes perpendiculares al eje de rotación], ¿Qué diferencia hay?
A16: Tienen cortes diferentes
Pr: Tienen cortes diferentes, ¿y que genera cada corte?, ¿ya observaron?
AE8: Eje de rotación diferente
Pr: Ajá, ok, entonces a ver, traten de analizarlo y me platican sale.

En esta parte podemos observar que la profesora comienza a realizar ciertas preguntas como "¿qué diferencia hay entre estos cortes y esos cortes?, ¿y que genera cada corte?" con el propósito de comenzar a guiar el tipo de observación que deben de realizar los alumnos, es decir, de cierta forma la profesora da pistas acerca de las cosas que van a diferir en cada cono, es por esto que nosotros lo catalogamos como un evento donde aparece el **efecto Topaze**.

Continuando con la actividad de acercarse a otros equipos y comenzando con la puesta en común dentro de la misma actividad tres nos encontramos con la siguiente situación en el momento en el cual la profesora se acerca a E2

Pr: ¿Cuál es la diferencia?, ¿por qué ves que los cortes son diferentes? y ¿cuál es la diferencia entre uno y otro?, y ¿cómo es el corte en uno y otro?
A17: Uno es horizontal y otros son verticales
Pr: Exacto, ¿dónde está el eje de rotación?, ¿cómo son los cortes con respecto al eje de rotación?
A18: Este es recto…
Pr: Es ¿cómo?
AE2: [inaudible] [Mientras hablan, la profesora hace gestos con sus manos simulando líneas paralelas]
Pr: O sea, tengo el eje de rotación y luego ¿cómo son los cortes en ese?, ¿dónde va el eje de rotación?
AE2: [discuten entre sí]
Pr: ¿Y los cortes cómo son con respecto al eje de rotación?

En este momento notamos que la profesora continúa con las preguntas que, al igual que en lo anterior, guían la forma en la que deben observar los alumnos. Además, cuando uno de los alumnos (A17) logra darle una respuesta que espera, ella comienza a guiar de nuevo la observación y las respuesta con la pregunta "¿Cómo son los cortes con respecto al eje de rotación?" y mientras recibe respuestas por partes de los alumnos de

E2, ella comienza a realizar con sus manos una simulación de rectas paralelas, y al ver que no recibe una respuesta deseada, manda de nuevo las preguntas "¿cómo son los cortes en ese?, ¿dónde va el eje de rotación?, ¿y los cortes como son con respecto al eje de rotación?", con que de nueva cuenta, ocasiona una discusión entre los integrantes de E2 pero ya de una manera guiada, puesto que ya saben que es lo que deben buscar.

Después de comenzada la puesta en común y seguido de haber analizado el cono que tiene los cortes paralelos a su eje de rotación, la profesora comienza con el análisis grupal del otro cono (el que tiene los cortes perpendiculares al eje de rotación), para esto, ya llegaron a la conclusión de que los cortes que se generan en este cono forman círculos.

Pr: ¿Y cómo son esos círculos? [Muestra los cortes en forma de círculos y los compara poniéndolos uno sobre el otro]
A19: Tienen un diámetro similar o igual…
A16: El diámetro de la parte de abajo coincide con la parte de arriba del segundo…
Pr: Claro estos coinciden, pero…
A1: Son escala del otro
Pr: Es algo más sencillo, ya están pensando muy allá (…) en tamaño ¿cómo son? [Continúa manipulando el cono y mostrando los cortes y poniéndolos uno sobre otro]
A9: Son diferentes
Pr: Son diferentes, ¿por qué?
A1: Por la base
Pr: ¿De qué depende el tamaño?
A18: De la base, de la altura del triángulo
A5: Yo pienso que de la base y de la punta
Pr: Bueno, ¿de qué depende el tamaño de mis círculos?
A5: De la base del de abajo y del de hasta arriba
Pr: A ver piensen un poquito más en eso, a ver quién es el primero que me dice, ¿de qué depende el tamaño de los círculos?
A15: De donde se ubica el corte
Pr: Exacto

Durante el desarrollo de la escena, podemos observar que la profesora tiene acciones que determinan el curso de la discusión, por ejemplo, durante su pregunta "¿y cómo son esos círculos?" la profesora está maniobrando los dos cortes que tiene en sus manos, haciendo al mismo tiempo una comparación entre ellos al superponerlos, esperando que con esto los alumnos se den cuenta de lo que espera por respuesta, al darse cuenta que dichos movimientos no logran guiar en demasía las respuestas lanza la pregunta "en tamaño ¿cómo son?" y al mismo tiempo continúa con los mismos movimientos y con la pregunta "¿de qué depende el tamaño de los círculos?" hasta que al final A15 le da la respuesta esperada "de donde se ubica el corte", por estas razones consideramos que en esta situación se presenta un **efecto Topaze**.

Al concluir dicha actividad, la profesora comienza con la conclusión de la sesión (la segunda), y esto lo realiza llevando a cabo un resumen de lo visto hasta ese momento, una parte de dicho resumen se presenta a continuación.

Pr: Sí, pero, la última actividad nos enseñó eso, ¿Qué nos genera?, ¿Qué dijeron por allá?
A13: Círculos
Pr: Nos generan círculos, muy bien, A13 dibujó muy padre, entonces también descubrimos que, en los sólidos de revolución, si hacemos cortes perpendiculares al eje de rotación, siempre me generan ¿Qué?
As: Círculos
Pr: Ok, incluso esos círculos, ¿son iguales todos?
As: No
Pr: ¿En qué sólido de revolución serán iguales los círculos?
As: En un cilindro
Pr: En un cilindro ¿verdad?, en un cilindro todos son iguales, ¿en un cono cómo fue?, ¿cómo que iban qué? [La profesora recorre con sus manos en el aire a un cono, dando a entender que aumenta y disminuye], aumentando o disminuyendo dependiendo de cómo lo hubieran puesto, ¿sale?, ¿y de qué dependía el tamaño del diámetro del circulo?
As: De donde estuviera el corte

En dicho resumen podemos observar que la profesora cae de nuevo en un **efecto Topaze**, puesto que al preguntar "¿En qué solido de revolución serán igual los círculos?" y continuar con la pregunta "¿en un cono cómo fue?, ¿cómo que iban qué?" la profesora comienza a realizar el gesto con sus manos simulando un cono, y seguido de esto pregunta "¿y de que dependía el tamaño del diámetro del circulo?" con lo que logra obtener la respuesta deseada "de donde estuviera el corte".

En el inicio de la tercera sesión, la profesora realiza un resumen de lo que han concluido hasta ese momento y se presenta la siguiente situación.

Pr: Les pasaron unos solidos de revolución en su bolsita, ok, ustedes ya habían hecho la clasificación de cuáles sí eran sólidos de revolución y cuáles no, y también… ¿qué me comentaron acerca de hacer cortes perpendiculares al eje de rotación?, ¿qué me comentaron ustedes?
A19: ¿Perpendiculares? [La profesora contesta que sí]
A3: Que iban a ser paralelos al eje de rotación
Pr: ¿Paralelos? [Realiza un gesto de desaprobación], ¿Qué me comentaron acerca de los cortes que hacíamos perpendiculares al eje de rotación?, ¿qué me comentaron?, ¿qué figura se formaba?

As: Círculos
Pr: Se formaban círculos, ¿eso pasará en todos los sólidos de revolución o solo en algunos?
As: En algunos
Pr: ¿En algunos? [Lo pregunta con un tono de desaprobación y realiza un gesto]
As: En todos
Pr: ¿En todos? [Lo pregunta con el mismo tono de desaprobación]
As: En la mayoría
Pr: ¿En la mayoría? [Lo pregunta con el mismo tono de desaprobación] entonces todavía nos hace falta ver más sólidos de revolución. A ver, saquen sus solidos de revolución, nada más los que habían clasificado como que sí son sólidos de revolución

Podemos observar que durante dicho resumen la profesora cae en el **efecto Topaze**, puesto que al preguntar "¿qué me comentaron acerca de hacer los cortes perpendiculares al eje de rotación?" recibe la respuesta "que iban a ser paralelos al eje de rotación", lo que ocasiona que la profesora pregunte "¿paralelos?" con un tono de desaprobación ocasionando así que cambien su respuesta de manera inmediata, de igual manera al continuar con las preguntas "¿eso pasará con todos en todos los sólidos de revolución o solo en algunos?" y al recibir la respuesta "en algunos" ella devuelve la pregunta "¿en algunos?" con el mismo tono de desaprobación logrando así un cambio en las respuestas de los alumnos.

Durante la puesta en común de la actividad cuatro, la profesora busca que se llegue a alguna conclusión con respecto al tamaño de la circunferencia que se genera al realizar un corte en un sólido de revolución, usando los que en un principio los alumnos clasificaron como tal.

Pr: ¿Y por ejemplo en ese? [Refiriéndose a la botella en forma de pesa]
A6: Por ejemplo, estas que son iguales pues no varía mucho, es casi similar, en esta a lo mejor sí puede variar, pero por lo mismo de la figura que está aquí en medio
Pr: Entonces como qué puedes resumir, ¿en dónde sí y en donde no?
A6: Pues es que le digo que yo considero que también depende que tanto difiera el diámetro del circulo que se forma en el corte de una figura que pasa de forma perpendicular por el eje de rotación, por ejemplo, en este caso, de estas dos figuras es algo similar, en esta a lo mejor difiere por que viene siendo una figura totalmente diferente, lo mismo con el cono y otras figuras
Pr: Están de acuerdo en que las dos "las figuras" [Las comillas las realiza con sus manos la profesora] que generan su sólido de revolución son ¿"totalmente diferentes"? [La profesora realiza las comillas con sus manos y lo pregunta con un tono de desaprobación] ¿están de acuerdo en esa afirmación?, dice que la figura que genera el sólido de revolución, las figuras… porque son dos figuras,

dice que son totalmente diferentes, ¿qué figura rotan para formar eso? [Simula la rotación con sus dedos], o ¿qué figuras rotan para formar eso? ¿Cómo?
A5: Dos rectángulos
Pr: Dos rectángulos, entonces no son tan diferentes, solo varían ¿en qué?
As: En tamaño
Pr: En tamaño, pero está muy bien la observación que él dice, en toda la parte de arriba, los radios van a tener más o menos el mismo radio, o sea digo más o menos porque bueno aquí está un poquito metido ¿verdad?, si lo imaginamos liso entonces sucedería eso, ok, entonces dice su compañero que ¿de qué depende el tamaño del radio?, A3, ¿de qué depende?
A3: En caso de otra figura, por ejemplo, un cono, en la parte donde no se corte, pero, por ejemplo, si es un cilindro perfecto se podría decir, pues daría el mismo radio donde hagas el corte
Pr: Exacto, ¿y en un cono?
A3: En un cono, no
Pr: ¿Y por ejemplo en este? [Refiriéndose a la botella de jugo del valle]
A3: Igual son dos figuras
Pr: Son dos figuras las que generan, ok, podemos verlo, así como una figura y otra ¿verdad?, por ejemplo, en esta parte [Refiriéndose al inicio de la botella], ¿todos van a tener el mismo radio?
A3: No, porque se va haciendo como que gorda y se va haciendo chiquita (inaudible)
Pr: Ok, muy bien

En esta situación podemos observar que seguido de la segunda participación de A6, la profesora al tratar explicarle a los demás alumnos la idea que expresó, usa durante en las palabras que, al parecer, según ella fueron mal usadas o que se le debe dar importancia unas comillas, para hacer énfasis en ellas, y así lograr guiar la discusión, para así conseguir que los alumnos lleguen a la respuesta que ella desea, logrando confirmar dicha respuesta al pedir el mismo razonamiento, pero ahora con un cono, el ejemplo más claro que evita los errores y concluye con la pregunta ¿todos tendrán el mismo radio?, consiguiendo la respuesta deseada "no".

Durante la puesta en común correspondiente a la actividad cinco en la cual recordemos, la profesora comienza con la discusión que tiene por objetivo que se concluya que los sólidos de revolución se generan a partir de girar una función, para esto la profesora ocupa la producción de dos equipos, puesto que uno de ellos, el primero, corresponde al vaso de yogurt y el segundo al vaso de café.

Pr: Ustedes eligieron dos, ¿fueron diferentes?
A15: Sí
Pr: ¿De qué depende?
A15: Del corte
Pr: ¿Del corte?, ¿Cómo? [Realiza un gesto de pregunta]

A15: Sobre el eje
A6: De la altura de la figura ¿no?, ¿del lugar donde se haga el corte? [La profesora señala la producción que tiene en las manos].
Pr: Del lugar donde se haga el corte [La profesora realiza en el aire los cortes], esto [Señala el contorno de la figura] la figura o el contorno de la figura que genera mi solido de revolución, ¿a qué se parece?
A4: A un cono
Pr: No, el contorno de la figura que genera mi sólido de revolución, ¿a qué se parece?, esto de acá, ¿a qué se parece? [Señalando la figura dibujada]
As: Una parábola
Pr: ¿Una parábola? [Realiza un gesto de desaprobación], como una recta ¿no?, a lo mejor si está así poquito… por ejemplo aquí tiene una curvita ¿no?, ¿pero hay alguno donde haya sido una recta?
As: No
Pr: A3 ¿con cuál trabajaron ustedes?
A4: Con este [Refiriéndose al vaso de café]
Pr: Me lo puedes enseñar, se lo puedes enseñar a tus compañeros
Pr: Ok, a lo mejor no lo ven, esto es una recta, otro que sea diferente, ¿Quién me dice más o menos a que se parece? [Dibuja en el aire una función], a que se parece, aquí, a ver préstame este, el contorno de la figura en esta parte ¿qué es?, sin miedo
A23: Una recta
Pr: Una recta, ¿en esta parte que es?
A23: Igual una recta
Pr: ¿En esta parte?
A23: Como una curvita
Pr: Es como más curvito, y por ejemplo ¿en esta parte? [Señalando el dibujo que le proporcionaron correspondiente al vaso de yogurt]
A23: Como una semi parábola
Pr: Como una semi parábola, ¿habían escuchado eso?, muy poquito ¿no?, ok, entonces a ver, conclusión, ya midieron, ya vieron que el tamaño del radio depende del lugar donde hagan el corte, ya identificaron el contorno, eso es más o menos lo que me está generando esa figura [Hace con sus manos la rotación], eso es lo que me está generando mi solido de revolución, ¿dudas hasta aquí?
As: No

Durante este evento podemos observar distintas acciones que generan un **efecto Topaze**, entre ellos, se encuentra que, en el momento en el cual, la profesora comienza la discusión usando la producción de un equipo correspondiente al envase de yogurt, durante la participación de A6, resultado de que la profesora preguntara "¿de qué depende?" la diferencia entre el resultado de dos sólidos, la profesora comienza a señalar partes de la producción que tiene en sus manos, para hacer énfasis en lo que desea que los alumnos se den cuenta, al darse cuenta que no logra lo deseado, comenta: "la figura o el contorno de la figura que genera mi solido de revolución, ¿a qué se parece?", seguido de esto recibe la respuesta "a un cono" y la profesora responde señalando la parte que desea que observen "¿a qué se parece?" con lo que logra que le respondan "una parábola", pero la profesora regresa la pregunta con "¿una parábola?" junto con un gesto de desaprobación, aunque seguido de esto ella rectifica que en efecto podría similar una, puesto que tiene una "curvita", cuando termina dicha discusión, se dirige hacia otro equipo, y con el vaso de café realiza las mismas acciones o similares, logrando guiar al alumno en sus respuestas.

Durante el cambio de actividades (la siete por la seis), ocasionado por accidente por la profesora, después de la reproducción del video el cual tiene como propósito el de dar una introducción al uso de la integral para el cálculo de volúmenes, la profesora comienza con una discusión sobre él mismo, las siguientes dos extracciones de dicha discusión se presentan a continuación.

Pr: Platíquenme sobre el video, ¿Quién quiere decir algo?
A2: Que, sí es buen método para solidos de revolución que no tienen alguna fórmula como tal, como es el cilindro…
Pr: ¿El cilindro? [La profesora hace un gesto de desaprobación]
A2: El cilindro sí tiene, pero unos que no tienen como …
Pr: Por ejemplo, este [Refiriéndose a la botella de jugo] ¿tendrá fórmula?, ¿habrá fórmula para calcular?, ¿no?, y entonces que les sugiere el video

En esta primera parte podemos observar que cuando un alumno comenta que "es buen método para sólidos de revolución que no tienen alguna fórmula como tal, como es el cilindro" la profesora le pregunta "¿el cilindro?" junto con un gesto de desaprobación, lo cual ocasiona que el alumno cambie su respuesta.

Pr: Todo esto encaminado a calcular ¿qué?
As: El volumen
Pr: El volumen, ¿a través de?
As: Integrales
Pr: Como que va a ser a través de integrales, entonces les voy a encargar que por favor piensen en eso, chequen lo que hicimos, acuérdense lo que hicimos precisamente como dijeron la mayoría de sus compañeros cundo estábamos aproximando áreas y que después hicimos un ¿qué?, ¿se acuerdan?
A15: Un barrido
Pr: Un barrido ¿verdad?, estoy muy orgullosa de ustedes, a ver A24 quiere decir algo
A24: Y si en la integración sacamos volúmenes ¿tenemos que agregar otra integral?
Pr: Esa es una buena pregunta, a ver, cuando hacíamos esto que dijeron hace rato, el barrido [Realiza con sus manos el barrido, recorriendo de un lado a otro],

¿Qué era?, quién me definía esta altura, ¿se acuerdan?, de los rectángulos, ¿Quién definía la altura de los rectángulos?

A9: La fórmula [Los demás compañeros dan respuestas distintas y la profesora señala a A9, porque encuentra una respuesta que podría aceptar como correcta]

A20: La función [La profesora ignora las demás respuestas y señala a A20, puesto que da la respuesta correcta]

Pr: La función, exacto, pero ahora lo que me genera ese solido de revolución, ahora ¿Quién lo genera? [Señala con sus manos un recorrido haciendo alusión a una función]

As: El eje de rotación

Pr: No, no, ese barrido ahora quien lo estaría… quien generaría… [Realiza con sus manos el recorrido haciendo alusión a una función]

A9: El contorno de la figura

Pr: Mmm más o menos, acuérdense que acá eran rectángulos y lo hacíamos tan delgaditos para que la cantidad de rectángulos fuera casi infinita, dijeron por ahí, y entonces en realidad me quedaba una cierta altura, así como si no tuviera ya el rectángulo no tuviera base o la base fuera muy pequeñita ¿sí o no?, y entonces eso era, lo que hacíamos el barrido y generara toda mi área, ahora, ¿qué es lo que genera todo mi volumen?

A9: El radio [La profesora hace con sus manos el gesto de que se encuentra cerca de la respuesta]

A2: La circunferencia

Pr: Exacto, la circunferencia

En este segundo extracto, podemos observar que seguido de una pregunta que A24 realizó, "¿tenemos que agregar otra integral?", la profesora comienza una discusión recordando los rectángulos que se usaron cuando comenzaron a calcular áreas, seguido de esto pregunta "¿Quién definía la altura de los rectángulos?", los alumnos lanzan respuestas distintas, pero ella solamente le da la palabra a los alumnos A9 y A20 que dan las respuestas que ella espera, seguido de esto, lo cual cae en el **efecto Topaze**, puesto que con esta acción obliga a los que dieron respuestas incorrectas a cambiarla por la que ya fue aceptada, evitando así el error a favor de la situación. También ella pregunta "¿quién lo genera?", refiriéndose a lo que genere el sólido de revolución, pero mientras realiza la pregunta, la profesora en el aire con sus manos comienza a simular el dibujo de alguna función, esta acción la realiza durante la misma discusión, recibe la respuesta "el eje de rotación", lo que ocasiona que la profesora re formule la pregunta, cambiando así el sentido por completo de la discusión, por "ese barrido ahora quien lo estaría… quien generaría" y al mismo tiempo realizando con sus manos la imagen de una función, recibiendo la respuesta "el contorno de la figura", a lo que la profesora contesta "más o menos", seguido de un recordatorio con respecto a los rectángulos, a lo que A9 contesta "el radio", mientras A9 da la respuesta la profesora hace con sus manos la seña de que esta cerca de la respuesta, logrando así que A2 diga "circunferencia", la cual es la respuesta que la profesora recibe, toda esta situación genera el efecto, puesto que el mal planteamiento de la pregunta inicial, ocasiona que la profesora no use las respuestas que recibe a favor de la situación, evitando esto al reformularla enseguida, y con eso comience a guiar las respuestas con sus acciones.

Durante la actividad seis, la profesora cambia el guion que está marcado en la situación diseñada, recordemos, en esta actividad se les proporciona a los alumnos unas funciones y para cada una de ellas un intervalo, sobre el cual deberán graficar la función correspondiente seguido del sólido de revolución que se generaría al rotar dicha función con respecto al eje X.

Pr: Quiero que me hagan el dibujito, ¿sale?, ok, ¿cuáles son esas funciones?, chequen, [Escribe las funciones y su intervalo en el pizarrón], [Les recuerda el significado de los intervalos], ya entendieron perfectamente lo que van a hacer, ¿qué vamos a hacer con estas funciones?
As: Graficar
Pr: Las vamos a graficar en el intervalo indicado y ¿luego?
As: Rotarlas
Pr: La van a rotar para obtener el sólido de revolución y quiero sus dibujitos, ¿tienen idea que representa cada una de estas graficas? ¿Quién me dice?
As: Sí
Pr: ¿Quién me dice? [Señala una función y $= x^2 + 1$]
A3: Yo le digo…ah, de ese no
Pr: A3, no te acuerdas de esta [Lo dice con voz de sorpresa], ¿Qué representa esta?
As: Una parábola
Pr: Una parábola, ¿Qué más me dicen de ella?
A25: Que está hacia arriba, y el "y" está en el 1…
Pr: En el "y" está en el 1, ¿Qué quiere decir eso?
A3: Su origen es (0,1)
Pr: Aja, ¿de qué otra forma también se llama ese puntito?
As: Origen
Pr: Origen ¿o?, [Con sus manos dibuja en el aire una parábola]
As: Vértice
Pr: Vértice, ¿tiene idea de lo que es esto? [Señala la función y=2x]
As: Una recta
Pr: Una recta, ¿Qué más me pueden decir?
A6: Que pasa en (0,2)
Pr: ¿Pasa en (0,2)? [Realiza un gesto que muestra duda y desaprobación], no, ¿verdad que no?, a ver ¿qué más me dicen?, ¿cuál es la pendiente de esta recta?
A4: Dos
Pr: O sea que, ¿tiene un ángulo como de cuánto?
A3: 66 grados

Pr: Como un ángulo de 66 grados, ¿y esta? [Refiriéndose a y=3]
A6: Es una línea recta paralela al eje X
Pr: Ajá, es paralela al eje x, ¿Qué idea les da de qué van a obtener aquí o que sólido de revolución van a obtener aquí?
A6: Un cilindro
Pr: ¿Acá? [Refiriéndose a $y = 2x$]
A6: Como un conito
Pr: Como un conito, tal vez, ¿se acuerdan de esta? [Refiriéndose a $y = \sqrt{36 - x^2}$]
As: Si, es media circunferencia
Pr: Es media circunferencia, ok, ¿qué van a obtener?
As: Una esfera
A6: Pero…
Pr: A ver digan los peros
A6: Pero lo que pasa es que al parecer al graficarlo saldría como un cuarto de la circunferencia entonces puede que salga como media esfera [La profesora hace un gesto desaprobación]
Pr: Mmm perfecto, si vienen con todo, ok, ¡a trabajar, por favor!

En todo el extracto anterior, podemos observar que la profesora después de escribir en el pizarrón las funciones junto con su intervalo, da una explicación del significado de intervalo, lo cual puede llegar a ocasionar que los alumnos no cometan errores a la hora de graficar la función (aunque después de revisar las producciones, sí hubo algunos alumnos que cayeron en el error de graficar toda las función y no solo en el intervalo indicado), de igual manera poder observar que la profesora se sale del guion establecido en la situación diseñada, puesto que en ésta, viene indicado que solamente se le debe proporcionar a los alumnos las funciones, pero en nuestro caso, la profesora después de esto comienza a cuestionarle a todo el grupo sobre si recuerdan que es lo que cada una de ellas representa, ocasionando así que los alumnos comiencen la actividad con una pequeña idea de lo que saldrá en cada una de las producciones, es por estas razones que consideramos el evento pasado como un **efecto Topaze**.

Al término de la discusión explicada en el ejemplo anterior, la profesora recorre los distintos equipos para ver cómo van avanzando con la actividad que se les encargó, dentro del recorrido que realiza la profesora en los equipos se presenta la siguiente situación cuando se acerca a E1.

A20: Ya formamos lo que nos pide la ecuación [refiriéndose a la ecuación y=3].
Pr: Ahora rótalo y obtén tu solido de revolución, tu especifica bien de donde a donde.
A20: Pero nada más es una línea, si lo roto solo esto [Realiza un movimiento con su lapicero, rotando con respecto a un posible eje "y"].

Pr: No, porque van a rotar con respecto al eje de las "x".
A20: Ah, ya.
Pr: Acuérdense, qué bueno que me dijo A20, estamos utilizando el eje "x", en la actividad que hicimos en la hoja de papel milimétrico elegimos el eje "x" para empezar a rotar ese contorno de la figura y ya obtener nuestro sólido, ok, entonces ahora vamos a tomar otra vez como eje de rotación a nuestro eje "x" para que se acomoden en su hojita, ¿Qué ibas a obtener si escogías el otro eje? [Le pregunta a A20].
A20: Voy a obtener un cilindro, pero más pequeño, no, a ver, [La profesora simula la rotación de la función y=3 con una regla], si lo escojo de manera hacia el eje voy a obtenerlo, pero va a ser el diámetro más largo, pero va a estar, así como de esta altura.
Pr: ¿Y qué más?
A20: Va a ser como esto [Agarra su libreta].
Pr: A ver checa bien, [Mueve su cabeza diciendo que no] ¿Qué vas a rotar?, ¿una qué?
A20: Una línea, 8 cm supongamos.
Pr: Lo vas a rotar alrededor de, pero a lo mejor estas escogiendo mal tu centro de donde estas rotando, y solo es una línea.
A20: Entonces si solo va a ser…
Pr: ¿Qué va a ser? [Hace un gesto de duda]
A20: Como un platito
Pr: A ver ejercicio para todos, ayúdenle a su compañero, suponiendo que se equivocó de eje, entonces la de la línea recta, ahorita ya A15 ya la cacho, supongan que lo roto, pero utilizando el eje de las "y" entonces lo que va a rotar ahora es este segmento de línea alrededor del eje de las "y", A15 ¿qué obtuviste?, no, ¿todavía no?, sin miedo…
A2: Profa, ¿no es como una dona?
A9: Ah, sí, sale como una dona
Pr: Exacto, dice A9 ¿Qué?
A9: Es una dona plana

Como podemos notar en el extracto anterior, al inicio, la profesora corrige a A20 en su error (el de rotar con respecto al eje "y") , lo que ocasiona que ella le recuerde a todo el grupo que deben de rotar con respecto al eje "x", lo cual ocasiona que los alumnos eviten equivocarse, puesto que los pone sobre aviso de un posible error, ocasionando así un **efecto Topaze**, seguido del recordatorio la profesora comienza a cuestionar a A20 sobre, lo que se hubiera generado si rotaba como el sugería y mientras A20 da respuesta, ella comienza a hacer una simulación con sus manos sobre la rotación de la que se está hablando, lo que ocasiona que el alumno cambie su respuesta, puesto que el menciona "no, a ver", dando pie a que dicha acción se considere como causante de un **efecto Topaze**, cuando el alumno termina de dar su respuesta, ella le pide que se asegure de ella mientras realiza un gesto de desaprobación, y al darse cuenta que no recibe una respuesta esperada, ella comienza a hacer preguntas como "¿qué vas a rotar?, ¿una qué?"

seguido de "a lo mejor estas escogiendo mal tu centro de donde estas rotando, ¿qué va a ser?" a lo que recibe una respuesta incorrecta, por lo que decide pedirle ayuda a todo el grupo con lo que logra tener la respuesta correcta por parte de A2, esto anterior ocasiona una **efecto Topaze** en E1, puesto que las preguntas que les realiza los deja analizando, y el que pida el apoyo del grupo ocasiona que los alumnos de E1 dejen aún lado su razonamiento que tenían en proceso para poder aceptar lo que la profesora ya dio por correcto.

Otra acción que se lleva a cabo durante esta misma actividad se presenta a continuación.

Pr: [Se acerca a E1 y revisa el ejercicios de A16] ¿Qué paso hija?, a ti te toco la 3, quiero que cheques bien ese intervalo es de [0,6], y especifica por favor el intervalo que quede bien claro, [Observa el ejercicio de A2] muy bien ahora nada más te falta rotarlo, pónganle las dimensiones a sus solidos de revolución que han obtenido, esto es de [0,3] muy bien, ok chicos a ver si ya nos vamos apurando por favor.

En el extracto anterior podemos observar cómo la profesora realiza énfasis en que tenga mucho cuidado con el intervalo correspondiente a cada función, lo cual predispone al alumno en sus acciones para resolver la actividad, es por esta razón que también consideramos esta intervención de la profesora como generador de un **efecto Topaze**.

Continuando con el recorrido de la profesora con los equipos, no encontramos con otra intervención que creemos importante analizar.

Pr: ¿Cómo van chicos?, insisto porfa en que les pongan las medidas de sus radios, sus alturas, todos los sólidos de revolución que están obteniendo, insisto en que les pongan las medidas, pónganle que medidas tienen, porque lo que sigue vamos a rescatar como obtuvieron esas medidas, por eso es importante que le pongan a cada uno de sus solidos de revolución las dimensiones, [Se acerca a E1] A7, ¿lo giraste alrededor del eje "x" o "y"?
A7: "y"
Pr: Exacto, y ¿alrededor de donde era?
A7: Hacia el otro lado
Pr: Hacia acá ¿no?, ¿entonces?, bueno el que género es ¿más gordo o más flaco?
A7: Es lo mismo ¿no?
Pr: No creo, hay que checar
A15: Es más delgado, como una dona
Pr: ¿Dona?, a ver ayúdenle a su compañera chicos

Dentro del extracto anterior podemos identificar dos acciones que pueden generar un **efecto Topaze**, la primera, se presenta en el momento en el que la profesora revisa la producción de A7 y le pregunta "¿lo giraste alrededor del eje "x" o "y"?" y le responden "y" a lo que la profesora contesta "¿alrededor de donde era?" lo cual le da a entender al alumno que la manera en la que procedió es incorrecta, y por ende se tiene que hacer en la única opción que queda disponible, es decir el de rotar con respecto al eje "x", seguido de esto, la profesora le pregunta al alumno "bueno el que generó es ¿más gordo o más flaco?" y al no recibir la respuesta que ella espera contesta "no creo, hay que checar", lo cual ocasiona que los alumnos de dicho equipo comprendan que la respuesta dada es la incorrecta y que no más que el "no" como respuesta, estas dos acciones, evitan que los alumnos accionen con el medio en cuestión, puesto que la profesora ya los predetermina a comprender la respuesta que ella de manera indirecta da como correcta, es por esa razón que lo identificamos como **efecto Topaze**.

Mientras la profesora continúa con el recorrido en los equipos, se presenta la siguiente situación.

Pr: ¿Cómo vas, hijo?
A27: Bien
Pr: ¿Cuál eje estas eligiendo para rotar?
A27: El eje "y"
Pr: Lo queremos con el eje "x"
A27: ¿Con el eje "x"? Ah ya.
Pr: Va a ser diferente, muy diferente verdad. ¿Alguien necesita ayudadita?, A10, ¿de dónde a donde es? [El alumno contesta la pregunta] entonces nada más es esto de aquí hasta acá [La profesora señala la respuesta en el dibujo], perfecto [avanza a E3], mala elección del eje, que dijimos, ¿con relación a cuál eje? [Refiriéndose al dibujo de A4]
A3: Ah sí, hay que girar el eje "x"
Pr: Ayúdenle entre todos, igual aquí, es muy importante que chequen de donde a donde es
A4: De [0,6]
Pr: O sea, dime con tu dedito de donde a donde debe ser, o sea esto [hace un movimiento en su mano como quitando una parte], ¿Cómo lo voy a rotar? [Hace el movimiento de la rotación con su dedo]
A4: Así [Copia el movimiento de la profesora]
Pr: Hacia abajo, si se te va a formar esto, si hubieras hecho todo esto y lo hubieras rotado, ¿Qué iba a ser?
A4: La esfera
Pr: ¿Ya viste la diferencia?, muy bien, ¿es de [0,3]?, muy bien, la función es ¿esta?, muy bien, eje de rotación, ¿Cómo lo vas a rotar?, ah más o menos lo llevas,

nada más aquí le das su efecto como un circulo, ok, creo que ya la mayoría han avanzado mucho, acá van muy bien, ¿tienen las dimensiones?

A3: Sí

Como podemos observar, al inicio del extracto, la profesora corrige de nueva cuenta un error relacionado con el eje con respecto al cuál fue rotado una de las funciones, esto ocurre con el alumno A27, seguido de esta corrección, la profesora se acerca a la producción de A10, al observar que dicha producción tiene un error con respecto al intervalo donde fue graficado ella comenta "¿de dónde a dónde es?" y al recibir la respuesta por parte de A10, ella señala el dibujo diciendo "entonces nada más esto de aquí hasta acá", lo cual ocasiona un **efecto Topaze**, puesto que esto hace que el alumno solamente cambie el dibujo sin cuestionarse la razón, para que sea la respuesta correcta. Después de este echo la profesora se dirige a E1, donde nuevamente corrige el eje de rotación de la producción de A4, además de eso, ella ubica un error con respecto al intervalo en el cual fue graficada la función, lo que ocasiona que ella haga el comentario "chequen de donde a donde es" y al recibir la respuesta la profesora le pide al alumno que le indique en el dibujo dicho intervalo, pero mientras lo hace ella con sus manos hace un movimiento como borrando la parte que sobra en el dibujo, ocasionado así el **efecto Topaze**, puesto que ayuda al alumno a dar la respuesta y para confirmar que en efecto el haberlo graficando así era incorrecto, ella pregunta "si hubieras hecho todo esto y lo hubieras rotado, ¿Qué iba a ser?", pero mientras esto ocurre la profesora realiza un movimiento con sus manos simulando la rotación que A4 copia, logrando así que alumno se dé cuenta que tiene que poner atención en ese movimiento, lo cual ocasiona el efecto en cuestión, pues ayuda por completo a que el alumno de la respuesta y así se dé cuenta que en efecto estaba en un error.

Continuando con la situación diseñada, la profesora pasa a la siguiente parte de la actividad seis, en donde se tiene como propósito que los alumnos se den cuenta que el radio de las circunferencias que se generar al realizar cortes perpendiculares al eje de rotación depende de donde se realice dicho corte y se compare esto con el resultado de evaluar la función en el punto de dicho corte.

Pr: Bueno, entonces ustedes sorpréndanme, acuérdense que el eje de rotación está en medio de su sólido de revolución ahí en su dibujo ¿sí o no?

As: Si

Pr: Es el eje de las "x" ¿sí o no?
As: Si
Pr: Entonces ahí ustedes elijan en qué lugar, no sé, en equis igual a uno, equis igual a menos diez, no sé, con la "x" que ustedes elijan y ahí hagan el corte transversal y calcúlenme por favor el radio de esa circunferencia [Lo explica con señas, simulando la rotación y el corte].

Como podemos observar al inicio de este momento, la profesora recuerda la ubicación del eje de rotación, lo cual ayuda a los alumnos a saber con exactitud la distancia que deben medir, es por esta razón que catalogamos dicha situación como **efecto Topaze**.

Continuando con esta misma actividad la profesora comienza a recorrer los equipos, se presenta lo siguiente:

A29: Profa ya…
Pr: Porque a lo mejor si no hacemos los dibujos muy exactos podemos tener problemas ¿no?
A29: Aquí le hice corte y aquí y en los dos da lo mismo
Pr: Exacto, ¿por qué?, porque es una característica en particular de la función constante, [A29 comenta que "tiene lo mismo de angosto"] ok, muy bien, a ver acá, en cuatro, ¿apoco es cuatro? [Pregunta con tono de sorpresa y desaprobación, además de que señala la producción, refiriéndose a la producción correspondiente a y=$\sqrt{36-x^2}$], aquí lo mediste, pero ¿está bien hecha tu figura? ¿la hiciste con compas?
A30: No la hice con compas
Pr: Aja y ¿de qué otra forma estarías segura?

Podemos observar que mientras la profesora se acerca a evaluar la producción de A29, en el momento en el que A29 afirma "aquí le hice corte y aquí y en los dos da lo mismo", la profesora pregunta "¿por qué?" ella misma se responde, lo que evita que el alumno pueda comprender la razón, lo que ocasiona que haya un **efecto Topaze** en dicha situación, seguido de esto la profesora nota un error, en una producción correspondiente a la función y=$\sqrt{36-x^2}$, y realiza la pregunta "¿a poco es cuatro?" pero la realiza con un tono de desaprobación lo que ocasiona que los alumnos sepan que ese resultado es incorrecto, a lo que sugiere la profesora que busquen la forma de asegurarse de otra manera como saber si es correcto o no.

A continuación, la profesora repite el video de la actividad siete, el cual recordemos que ya se había visto por un error de la profesora, después de ver el video, la profesora comienza con una puesta en común para poder formalizar la manera en la que se usa la integral como método para el cálculo de volúmenes, para esto la profesora dibuja en el pizarrón la imagen común con la que se representa una función, durante la discusión, la profesora comienza a realizar una analogía entre los cilindros que se usarán para el volumen con los rectángulos que usaron para el área, lo que ocasiona que los alumnos recuerden todo el procedimiento que realizaron para áreas y así logran relacionar que los cilindros que ahora se usarán deberían de hacerse lo más delgados posibles, lo que lleva a la profesora a preguntar sobre el barrido que se necesita para lograr cubrir todo el sólido, lo que ayuda a que la profesora comience a cuestionar sobre quien cae la responsabilidad de realizar dicho barrido.

Pr: Más delgadita que una oblea, es una circunferencia, y entonces ahora quien va a ser este barrido en mi solido de revolución
A6: Los cilindros
Pr: Los cilindros verdad, pero esos cilindritos si son muy muy delgaditos es como si fuera nada más una circunferencia ¿sí o no?
A3: Entonces sería el diámetro del cilindro
Pr: No porque es la circunferencia, es toda la circunferencia que tiene, acuérdense el primer acercamiento que ustedes tuvieron con sólidos de revolución fue, que giraba que rotaba una figura, por ejemplo, un triangulito y se formaba un cono ¿se acuerdan?, ese triangulito te hacia lo que ustedes decían un cono lleno por dentro, ese lleno por dentro es el volumen, entonces ahora nuevamente les digo voy a hacer el barrido ¿con que? [Realiza el barrido con sus manos]
As: Con los cilindros
Pr: Con los cilindros o con mis discos, y esos discos, así como esté tenía este rectangulito es tan delgadito que parece un cabellito que mide de aquí a acá g(x) [Refiriéndose a lo que dibujó en el pizarrón], ahora ese círculo está en tercera dimensión, ¿Quién me dice? O sea, es lo que va a hacer barrido, pero ¿Quién es?, es un circulo, ¿Qué más? No les quiero decir.

Podemos notar que cuando la profesora menciona, "pero esos cilindritos si son muy muy delgaditos es como si fuera nada más una circunferencia ¿sí o no?", y recibe la respuesta de A3, ella de manera inmediata responde "no" seguido de un recordatorio sobre alguna de las actividades, después de esto, los alumnos logran dar una de las respuestas esperadas "con los cilindros", pero, al no ser de todo correcta la profesora continúa haciendo preguntas y comienza a señalar lo que ella ya dibujó previamente en el pizarrón y al notar que no logra ayudar con el razonamiento dichas señas y dando la respuesta dentro de su diálogo, lo cual ocasiona que clasifiquemos dicha acción como **efecto Topaze**, puesto que de manera indirecta da la respuesta que espera que den los alumnos.

Continuando con esta discusión, después de las ultimas preguntas del extracto anterior un alumno interviene con algo que le ayuda a la profesora a continuar con el objetivo deseado.

A20:	Estoy imaginando que es así [Señala al dibujo que está en el pizarrón], y que va a ser πr^2 y le vamos a restar de donde esté ubicado en el de las "x"
Pr:	De donde a donde eso es otro rollo ¿no?, pero eso que dijo el ¿ya lo vio todo mundo?, ¿no?, diles otra vez…
A20:	πr^2
Pr:	πr^2, ¿por qué πr^2?, [hablan al mismo tiempo los alumnos]
A20:	Porque es el área del circulo
Pr:	Porque es el área del circulo ¿sí o no?, aquí va a tener πr^2 porque es un radio chiquito, acá va a tener πr^2 con otro radio más grande, y así sucesivamente dependiendo de donde ese situado ese disco, entonces el barrido en realidad lo voy a hacer con el área del círculo, que es como dice su compañero πr^2, pero ese radio ¿Quién es?, ustedes lo calcularon hace rato
A9:	La altura
Pr:	La altura, o sea ¿Quién?
A9:	g(x)
Pr:	g(x) o la función, y entonces ya me pueden decir, vamos a hacer un barrido, dice A20, para calcular el volumen vamos a hacer un barrido y esto es la integral, ¿de dónde a dónde?, donde me indiquen de "a" hasta "b".
Pr:	¿Pero quién es el radio?
As:	La altura
Pr:	¿O sea?
A15:	La función
Pr:	¿Entonces que escribo aquí?
A20:	La función
Pr:	¿Qué más?
As:	Por π
Pr:	¿Qué más?
As:	Por r^2
Pr:	Pero ¿quién es el radio?
A20:	Sería la función por π
Pr:	La función por π y ¿Qué más?
A20:	Al cuadrado
Pr:	¿Y quién está al cuadrado? ¿también π?
A15:	La función
Pr:	¿Aquí? [señala la función], entonces como va a ser el barrido va a ser la integral del intervalo de donde me estén indicando de "a" a "b" de π por f(x) al cuadrado esta va a ser mi integral, ¿dudas? ¿entonces es fácil o difícil calcular el volumen?
As:	Fácil

En todo el extracto anterior, podemos observar que se llega a formalizar el uso de la integral para calcular el volumen de un sólido de revolución, pero al mismo tiempo es muy notorio que la profesora guía toda la discusión, puesto que señala el pizarrón, y también hace intervenciones muy claras como "ustedes lo calcularon hace rato", o realiza la misma pregunta muchas veces como "¿quién es el radio?" lo cual hace que los alumnos en efecto vayan creando por si "solos" lo que se desea, pero a cuesta de una guía muy marcada por parte de la profesora, además de que durante la discusión, la profesora solamente acepta las respuestas correctas y las incorrectas, o aquellas que no esperaba las ignora por completo, esto ocasiona que la discusión no pierda el objetivo y evite desviarse en alguna discusión a partir de un error.

Al término de la discusión anterior, la profesora le pide a sus alumnos que apliquen lo ya concluido en los sólidos de la actividad previa, cabe recalcar que esta actividad no está marcada en el diseño de la situación, consideramos que la profesora la propone para poder corroborar la comprensión de lo ya institucionalizado, dentro esta situación la profesora recorre los equipos en auxilio de aquellos alumnos que lo soliciten o solamente con el propósito de revisar el avance de los equipos y es en estos momentos donde podemos encontrar lo siguiente:

> **Profesora:** ¿De dónde a donde te dijeron que hicieras esta?
> **A26:** De [-2,5]
> **Profesora:** De [-2,5]
> **A26:** Pero que no se supone que en la función estamos sustituyendo por 10
> **Profesora:** Lo hicimos, estaba fuera de nuestro dominio ¿no?, o sea lo hicimos nada más por poner un ejemplo, pero en realidad aquí nada más llegamos hasta 5
> **A26:** Entonces seria este, o ¿en qué función sustituimos?, yo lo que quiero saber es que sustituimos aquí
> **Profesora:** ¿de dónde a dónde vas a hacer el barrido?
> **A26:** De [-2,5]
> **Profesora:** De [-2,5], ahí vas a hacer tu barrido, integra en esa parte ¿no?, cuidado al sustituir los números negativos, acuérdense que no es lo mismo sustituir -2 a cuadrado que -2 al cubo.

Como podemos observar al inicio de extracto la profesora se acerca con un alumno puesto que al alumno tiene dudas sobre los límites de integración, y dicha duda surgió por un ejemplo que la profesora comentó durante la explicación, a dicha duda la profesora contesta que en efecto solamente agarro dicho número (el 10) para el ejemplo, seguido de esta aclaración la confusión continua, por lo que la profesora pregunta "de dónde a dónde vas hacer el barrido?" y al recibir la respuesta solamente contesta "integra en esa parte ¿no?", lo cual para nosotros genera un **efecto Topaze**, puesto que la profesora en lugar de satisfacer la duda, ella completamente realiza una pregunta para que la respuesta de dicha pregunta, le dé respuesta también a lo que debe realizar el alumno, sin que el alumno comprenda por completo la razón por la cual esa respuesta ayuda, al finalizar la intervención la profesora realiza el siguiente comentario "cuidado al sustituir los números negativos, acuérdense que no es lo mismo sustituir -2 a cuadrado que -2 al cubo", con lo que la profesora predispone al alumno en tener cuidado con las operaciones que realiza, cayendo de nueva cuenta en un **efecto Topaze**.

Continuando con el recorrido en los equipos, podemos llegar a observar que los alumnos comienzan a tener problemas con la forma de resolver la integral que necesitan para terminar la actividad, la profesora al observar esto, acude a la ayuda de los alumnos, esto lo podemos ver a continuación.

Pr: ¿Cómo van acá? [se acerca a E5], A27
A26: Profa aquí se sustituye la función
Pr: Si, ¿Quién es la función?, aguas al elevar un binomio al cuadrado, ¿Cómo elevo un binomio al cuadrado?, a+b al cuadrado ¿qué es?
A26: $a^2 + ab + b^2$
Pr: Le falta algo
A26: $a^2 + 2ab + b^2$
Pr: ¿Cómo van?, ya se le olvido, que barbaros, ¿Cuánto es (a+b) al cuadrado?
As: $a^2 + 2ab + b^2$
Pr: $a^2 + 2ab + b^2$, nada más están haciendo $a^2 + b^2$ ¿qué les pasa?

En este episodio, podemos observar que la profesora se acerca a A26, quien se percata que ha cometido un error al momento de desarrollar un binomio al cuadrado, lo que ocasiona que la profesora comente "aguas, al elevar un binomio al cuadrado, a+b al cuadrado ¿qué es?", a lo que un alumno responde "$a^2 + ab + b^2$" lo que claramente es un error, y la profesora se percata de ello, por lo que le comenta "le falta algo", logrando así que el alumno de la respuesta correcta, de donde podemos decir que el alumno cambió su respuesta gracias a la intervención de la profesora, es por esta razón que clasificamos dicho evento como **efecto Topaze**.

Más adelante encontramos el siguiente evento, ahora la profesora se acerca a otro alumno para revisar la producción que tiene.

Pr: Si está bien, ¿y el radio quién es?
A23: 3
Pr: 3, siempre es 3 ¿no?, porque tu función…

A23: Es constante
Pr: Exacto, entonces aquí tu función ¿cómo se llama?
A23: Sería la fórmula
Pr: Porque vienen todos por sin ningún lado, vienen todos como que…
A28: Es la fórmula, ¿Dónde está la fórmula?
Pr: ¿Cuál fórmula?, hasta aquí van bien, pero ¿Cómo se llama tu función?
AE3: y=3
Pr: Aja, o sea aquí es 3 al cuadrado
A28: Sin f verdad
Pr: Exacto, entonces qué te queda, la integral de [1,9] de 3π, ¿Cuál es esa integral?, hace rato hicimos ese ejercicio, ¿cuál es la integral de 5?
A28: 5x
A23: π3x
Pr: Es π3x, oigan que bárbaros ustedes ya sabían integrar bien y ahora resulta que ya no saben hacer integrales de constantes, si les pongo 5, la integral 5x, si les pongo 3/2 y ya se espantan, y no se diga si les pongo raíz de 5, estoy impactada, ¿Qué paso con eso?

En este evento claramente se puede notar al inicio que la profesora en su intervención guía de manera directa la manera de proceder de los alumnos, puesto que podría decirse que ella iba dictando los pasos que tenían que seguir para resolver la integral. Al término de dicha actividad, la profesora les pide a sus alumnos que en su casa deben repasar cómo integrar puesto que su desempeño durante la actividad le dejó mucho que desear a la profesora, seguido de esto la profesora le da la actividad ocho, marcada como tarea en la secuencia diseñada.

Para la actividad nueve, la profesora, da la indicación a los auxiliares que comiencen a repartir el material que se ocupará, seguido de esto, comienza con las indicaciones, recordemos que en esta actividad se les proporciona a los alumnos distintos objetos y ellos tendrán como objetivo calcular de diferentes maneras (una de ellas usando la integral) el volumen de dichos objetos. Dentro de estas indicaciones encontramos el siguiente momento.

Pr: (…) ¿Qué función me va a generar esto [recipiente en forma de jícara]?, se acuerdan de ese ejercicio que hicimos que dibujábamos el contorno, ¿y qué función es la que me va a generar esto [recipiente en forma de jícara]?
As: Una línea
Pr: Una línea, solo que hay que checar bien cuál es la pendiente [Realiza la simulación de una pendiente], en este como que no hay tanto problema, a lo mejor podrían tener problemas con esta [recipiente de cristal en forma de esfera], en este caso unos me dicen que es una parte de una esfera y tienen razón, pero como le hago para saber… ¿si es una esfera cual debería ser la función?
A6: Podría ser raíz de lo que mida al cuadrado

Pr: Exacto, lo que mida ¿Quién?
A6: El radio
Pr: ¿y cómo le hago para saber el radio?
A3: Midiendo
Pr: Midiendo, ¿de dónde a dónde?
A3: [Un alumno señala el contorno del recipiente en forma de esfera]
Pr: Puedo medir el contorno desde el centro, del más gordo, y voy a obtener el diámetro, pero yo quiero el radio ¿Qué hago?
A3: Lo dividimos entre 2
A1: Lo dividimos entre π
Pr: Entre π ¿y?
A1: Obtenemos el radio
Pr: No, ¿Qué tenemos ahí?, pues escriban su fórmula, ¿el perímetro a qué es igual?
A1: π por diámetro
Pr: π por diámetro, pero ustedes ya van a tener esto, entonces si lo dividen entre π ¿Qué van a obtener?
A3: El diámetro
Pr: El diámetro, y ustedes quieren ¿el?
As: El radio
A1: Lo dividimos entre 2
Pr: Exacto, eso es, por un lado, todavía no acabamos, por otro lado, hay que identificar, si ya sacaron cuanto es lo que mide el diámetro entonces vamos a acomodar bien la regla y vamos a sacar nuestro intervalo, de dónde a dónde vamos a integrar ¿sí o no?, ¿ya vieron?, dependiendo si hasta acá, se supone que hasta acá hubiera llegado mi esfera, y hasta acá, necesito saber cuándo mide el diámetro ¿sí o no?, entonces de donde a donde voy a integrar ¿sí o no?, ¿ya les quedo claro lo que van a hacer?

Dentro del extracto anterior podemos encontrar dos momentos donde se percibe el **efecto Topaze**, el primero, lo tenemos, durante la discusión de la manera en la que se procedería con la jícara[2], pues la profesora sugiere la manera en la que se haría, comenzando por la pregunta "¿qué función me va a generar esto?", seguido de la manera en la que se calcularía lo que necesitan después de que los alumnos identificaron como dicha función a una recta, esto se nota cuando la profesora comenta "hay que checar bien cuál es la pendiente", en el segundo momento sucede lo mismo con el siguiente objeto, el recipiente de cristal muy similar a una esfera, la profesora nuevamente da ideas de cómo poder calcular la cosas necesarias para generar la función, desde cómo calcularían el radio, hasta cómo obtener el intervalo con respecto al cual integraría.

[2] Recipiente de arcilla o bien, elaborado a partir del fruto del jícaro. En su definición más antigua aparece como "vasija pequeña de loza" empleada para tomar chocolate.

Al término de lo anterior, la profesora continúa ayudando a los alumnos con las ideas para poder resolver la actividad, y otro momento donde se nota demasiado su guía se presenta a continuación.

Pr: ¿Cómo se calcula la pendiente? ¿Quién me dice?, recuerden
A24: Incremento en "y" sobre el incremento en "x"
Pr: Incremento en "y" sobre el incremento en "x", eso sería ubicando dos puntos, otra forma ¿Quién me dice?, ¿Qué es la pendiente?
A24: La inclinación
Pr: La inclinación de una recta, y si hay inclinación por ahí ¿qué hay también?
A24: Un ángulo
Pr: Un ángulo, y si conozco el ángulo ¿Cómo calculo la pendiente de una recta?
A1: Funciones trigonométricas
Pr: Esa ya me la dijeron, ¿y la otra conociendo el ángulo?
A6: No se formaría un triángulo rectángulo
Pr: Ya mero [Hace la seña de que la respuesta está cerca], acuérdense lo que dijo A24. Incremento en "y" sobre el incremento en "x", y/x, ¿Qué función trigonométrica anda por ahí?
A9: Tangente
Pr: Tangente exacto, entonces otras se acuerdan de que decíamos, la pendiente es igual a esto y como sacábamos, si ya conocíamos la pendiente como sacábamos el ángulo ¿se acuerdan?, pues ahora es al revés tienen el ángulo y van a sacar la pendiente ¿Cómo?
A6: Tangente del ángulo
Pr: Tangente del ángulo, esa sería otra

En este extracto, podemos observar que la profesora continúa con la ayuda de manera muy clara sobre la manera de proceder para la solución de la actividad, en este caso, la profesora ayuda pidiendo la forma de calcular la pendiente, y al recibir una respuesta que para ella es correcta aunque no la más efectiva para esta situación ("incremento en y sobre incremento en x"), continúa pidiendo otra forma, logrando recibir la otra respuesta al mencionar "si hay inclinación, ¿qué hay también?", esto a partir de la respuesta de A24, continuando así con la idea de la pendiente como la tangente de un ángulo, es por esta razón que catalogamos esta situación como **efecto Topaze**.

3.2 Efecto Jourdain

Recordemos que para nosotros el efecto Jourdain se presenta en aquel momento en el cual, la profesora sobrevalora las acciones y respuestas de los alumnos.

A continuación, presentamos los eventos que durante las cinco sesiones decidimos clasificar como efecto Jourdain, o como causa de este.

Dentro de la primera actividad durante el momento en el que el video les pide a los alumnos dibujar el sólido de revolución, que se genera a partir de rotar un triángulo rectángulo con respecto a un eje vertical ubicado en el vértice que comparte la base y la hipotenusa, la profesora detiene el video, y con esto un equipo discute la posible solución, ocasionando tener un diálogo con la profesora y sus demás compañeros, dicho diálogo se presenta a continuación.

Pr: Ultima vez, [Repite y pausa el video mientras murmuran los estudiantes], no los escucho, ¿qué dijeron?
A6: Decimos que es como un cilindro, pero con un cono adentro
Pr: ¿Ya les cayó el veinte a los demás?
As: Ya
Pr: ¿Siguiente ya? Ya todo mundo siguió la sugerencia de A6

Durante el diálogo anterior, aparece este efecto, pues como ya se mencionó en el capítulo 2, este efecto puede ser generado cuando un alumno manipula un objeto y el profesor ve en ese objeto lo que se quiere enseñar, en este caso, el objeto que el alumno manipula es el triángulo y el eje de rotación y lo que se quiere enseñar es el resultado de dicha rotación, y puesto que un alumno ya dio una idea, y además explicó lo que se puede generar, la profesora ve en esa acción la oportunidad de preguntar "¿ya les cayó el veinte a los demás?", pues para ella la explicación es aceptable para que todos los alumnos lo comprendan, y al recibir la respuesta "ya" por parte la mayoría de los alumnos, la profesora cae en el **efecto Jourdain**, puesto que, ya no continúa con la discusión, con lo cual sobrevalora el que todos los alumnos hayan comprendido toda la idea.

Más adelante, durante la puesta en común de esta actividad, en el momento en el cual la profesora pide que digan que dibujaron al rotar un circulo con eje de rotación igual a su eje de simetría vertical se presenta la siguiente situación.

Pr: ¿Dibujaron eso?, ok vamos a ver, ¿ese no tiene pierde verdad? [Refiriéndose al sólido que se genera de rotar un circulo sobre su propio eje de simetría vertical]
As: No
Pr: ¿Qué figura se obtiene?
As: Una esfera
Pr: Una esfera, ok

La razón por la cual la situación anterior es catalogada como una muestra de un **efecto Jourdain**, es similar a la anterior, puesto que en este caso el objeto que el alumno manipula es el circulo con el eje de rotación y la profesora al preguntar "¿ese no tiene pierde verdad?" de cierta forma está afirmando que todos los alumnos comprenden el resultado, lo cual es confirmado por el "no" que dan por respuesta la mayoría de los alumnos, por lo que la profesora ya no se mete en alguna otra discusión, logrando así sobrevalorar el conocimiento de los alumnos, pues no es muy claro que los alumnos que no llegaron a contestar, en efecto tengan noción de lo que se concluye.

Dentro de la misma puesta en común de la actividad uno, cuando se está discutiendo el resultado de rotar una parábola horizontal con eje de rotación tangente a la parábola en su vértice se observa la siguiente situación

Pr: ¿Cuál otra fue?, la que era esta misma [Refiriéndose a la parábola horizontal], pero cambiamos el eje, ¿se acuerdan?, entonces era algo así, que A1 me dijo ¿qué era que A1?
A1: Como un reloj de arena
Pr: Como un reloj de arena, exacto, ahora la giramos sobre este eje [Haciendo referencia al eje vertical que es tangente al vértice de la parábola], sale, y entonces, ¿si les dio algo como esto?, déjenme hacer algo simétrico, bueno, tampoco, lo bueno que no me dedico a la pintura, o algo así, ¿si les dio eso?
As: Si

La situación anterior la catalogamos como una causa de **efecto Jourdain**, puesto que como lo dice Brousseau, en esta situación la profesora desvió la problemática principal en otra, puesto que para esta situación la problemática principal es la de averiguar el sólido que se genera al rotar la figura en cuestión, y la profesora al usar una expresión "déjenme hacer algo simétrico" mientras dibuja el resultado, desvía la problemática ya explicada a comprender la razón del porque el dibujar algo simétrico nos ayuda a generar un sólido de revolución.

Durante la actividad tres, cuando se pide que observen las diferencias entre ambos conos se presenta la siguiente situación.

Pr: ¿Alguien que me diga algo más?, acuérdense donde está el eje de rotación, y como son sus cortes, estamos analizando este [Refiriéndose al mismo cono]
A5: Son verticales y no proporcionales
Pr: Son verticales, ¿qué quiere decir no proporcionales A5?
A5: Que no tienen el mismo volumen
Pr: Ah, ok, ya está hablando de volumen, ¿todo mundo sabe que es volumen?
As: Si
Pr: Entonces cuando ella dice, quiero entender que lo que dice no son proporcionales como que no están cortados a igual distancia como pareciera en

el otro, que tampoco están exactamente a la misma distancia ¿no?, pero bueno, ella tiene esa idea ok, dijo algo muy importante, ¿cómo son los cortes?, ¿quién me dice?

A5: Verticales

Este evento lo clasificamos como **efecto Jourdain** pues muestra la idea estructuralista que dice Brousseau que es uno de los generadores de este efecto, esto puesto que la profesora interpreta la respuesta A5 a conveniencia para poder continuar con el objeto de enseñanza.

Durante la puesta en común de la actividad seis, dentro de la discusión que se lleva a cabo sobre el sólido de revolución generado por la función $y = \sqrt{36 - x^2}$,la profesora cuestiona la razón por la cual dibujó (al momento de graficar) solamente un cuarto de la circunferencia, este es el extracto de dicha situación

Pr: Y si me dio aquí treinta y seis menos cero, me dio treinta y seis, ¿Cuál es la raíz de 36?

As: Seis [La profesora realiza un gesto de desaprobación]

A3: Seis y menos seis

Pr: Ajá, Pero como es una ¿qué? ¿por qué no grafiqué más seis y menos seis?, o sea esto lo obtuve porque roté,

A3: Ah porque lo está rotando al revés

Pr: Pero yo porque no hice mi gráfica desde un inicio así, ¿por qué nada más hice esta parte?

A21: Porque primero están los números, y cuando están primero los números solo es un cuarto [La profesora contestan que no con su cabeza y además hace un gesto de desaprobación].

A6: Por el intervalo de cero a seis [La profesora contestan que no con su cabeza y además hace un gesto de desaprobación].

A15: Por la raíz cuadrada

Pr: Aja, pero la raíz cuadrada es seis y menos seis, porque seis al cuadrado me da treinta y seis y menos seis al cuadrado igual y aquí cuando sustituyo el cero me da treinta y seis y la raíz de treinta y seis es seis y menos seis, eso es cierto, ¿qué paso A22?

A22: Porque ahí especifica que "x" pertenece de cero a seis

Pr: ¿"x" ?, y para este "x" [Refiriéndose a x=0] si yo hiciera la gráfica sacando la raíz me da este resultado positivo y este negativo y me hubiera dado esto, y entonces que pasa, ¿por qué? hay una palabra clave

A6: Por la función

Pr: Exacto, ¿por qué es qué?

A6: Porque la función nada más da medio circulo o media circunferencia y el intervalo nada más pide la mitad de esa circunferencia, bueno la mitad de la mitad de esa circunferencia, bueno un cuarto [La profesora dice que no con su cabeza]

Pr: No, pensé que ya lo habían dicho, tiene que ver con función, ¿cuál es la definición de función?, qué dice para que sea una función, ¿qué diferencia hay entre una función y una ecuación?, ¿ya se les olvido?

A24: Que la ecuación es una igualdad y la función tienes que poner un valor (inaudible)

Pr: Aja y ¿qué más?, falta la palabra clave

A22: Que las funciones son pares de coordenadas

Pr: La función la puedo representar como un par de coordenadas, ¿qué más?, hay una cosa, ¿por qué a este valor madamas estoy…?

A6: La derivación

Pr: No, no se vayan tan lejos, es más sencillo, bueno no nos vamos a detener

En la situación anterior podemos identificar dos momentos en los cuales la profesora recurre al **efecto Jourdain**, el primero, es al cambiar la problemática principal de la discusión por otra, en este caso la problemática de la situación está enfocada en discutir el tipo de sólido de revolución que es generado al rotar la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ con respecto al eje "x", pero la profesora al preguntar "¿por qué no grafiqué más seis y menos seis?", comienza a cambiar la problemática a la de recordar la definición formal de función, seguido de ésta pregunta comienza una nueva discusión, y dentro de dicha discusión encontramos el segundo momento donde se presenta un **efecto Jourdain**, pues durante la participación de A6 seguida de la pregunta "¿por qué? hay una palabra clave" que hace la profesora, A6 contesta "por la función", lo que la profesora da como respuesta correcta, pero al pedir que A6 reafirme su respuesta la profesora se da cuenta que la manera en la que ella interpretó la respuesta fue incorrecta, logrando sobrevalorar el conocimiento del alumno, seguido de esto la profesora decide regresar a la problemática inicial, concluyendo así la presentación del efecto en esta situación.

3.3 Uso excesivo de la analogía

Recordemos ahora que para efectos este trabajo, entendemos por uso excesivo de la analogía, aquellos momentos en los cuales se hace **uso de analogías**, para poder explicar algún objeto matemático, dichas analogías se pueden presentar de dos formas, con problemas u objetos matemáticos similares o con objetos de la vida cotidiana.

Comenzaremos con la siguiente situación, durante la actividad uno, mientras la profesora pausaba el video correspondiente, y los alumnos hacían comentarios sobre los posibles resultados se presentó lo siguiente.

Pr: Ustedes me dicen, ¿qué fue? [Refiriéndose a un alumno] ¿qué fue?
A2: Como un medio círculo
Pr: Como un medio circulo [Realiza con sus manos un gesto dado a entender que está cerca de la respuesta] algo parecido ¿verdad?
A3: Un plato
A4: Como una media esfera
Pr: Algo parecido [Dirigiéndose a A3], tú también dijiste algo [Refiriéndose a A4]
A4: Igual como una media esfera
Pr: Tal vez un poquito menos [Realiza con sus manos un movimiento para dar a entender que es más delgado a una media esfera]
A3: Como un plato
Pr: Como un plato, ¿de cuáles?
A3: Como un plato hondo
Pr: Ándale, eso como que se parece más [Muestra emoción] ¿pozolero no?, [Reproduce del video] (…) [Pausa el video] ¿otra vez?

La **analogía** que la profesora realiza en esta situación es la de comparar el sólido de revolución que se genera al rotar una parábola con un plato, en particular uno pozolero.

Al término de la reproducción del video y al comenzar con la puesta en común de la actividad, durante el análisis de los sólidos resultantes a la rotación de la parábola, pero con eje de rotación distinto se presenta lo siguiente.

Pr: Déjenme checar es que no me acuerdo [Revisa la producción de una alumna para recordar la figura], , estaba en el eje de las “x”, era algo así, ¿sí o no?
As: Sí
Pr: Ok, y la giraron, se supone que éste es el eje, la giran, ¿y qué fue lo que se les formó?
As: Un plato pozolero
Pr: Aja, o sea algo así, se parece más a una de esas de cocos que se ponen las hawaianas, ok, ¿cuál otra fue?, la que era esta misma, pero cambiamos el eje, ¿se acuerdan?, entonces era algo así, que A1 me dijo ¿qué era que A1?
A1: Como un reloj de arena
Pr: Como un reloj de arena, exacto, ahora la giramos sobre este eje [Haciendo referencia al eje vertical que es tangente al vértice de la parábola], sale, y entonces, ¿si les dio algo como esto?, déjenme hacer algo simétrico, bueno, tampoco, lo bueno que no me dedico a la pintura, o algo así, ¿si les dio eso?

En este caso, podemos observar que se realizan dos **analogías**, la primera la que se realiza entre la parábola horizontal que es rotada con respecto a un eje horizontal que pasa por su vértice, con unos cocos, y la segunda con la misma parábola, pero ahora con el eje tangente y vertical tangente a la parábola y tangente se realiza la **analogía** con un reloj de arena.

Continuando con la discusión, la profesora propone cambiar la ubicación del eje de rotación en la misma parábola, dicho eje se encontraría de manera vertical y tangente a los dos vértices de la parábola.

Pr: Oigan, y que pasa si ahora fíjense, aquí estaba el eje en esta posición, después con la misma parábola pusimos el eje acá, ¿y qué pasa si ahora ponemos el eje acá? [Ubica el eje de manera vertical de manera que sea tangente a los extremos de la parábola].
As: Una esfera
Pr: No, ¿apoco es esfera?, ¿apoco es circunferencia? [Lo pregunta con un tono de tal manera que se entiende que ninguna es la respuesta correcta]
As: No, [hablan al mismo tiempo, y se logra percibir que algunos alumnos se acercan a la respuesta] [La profesora hace un gesto con la mano de manera que se entiende que se acercan a la respuesta].
A6: Como un balón de futbol americano
Pr: Como un balón de futbol americano, verdad

En esta situación se presenta la **analogía** entre el sólido que se genera y un balón de futbol americano, lo cual ayuda a que los alumnos tengan más idea sobre lo que será el resultado.

En la actividad seis, durante el momento en el cual, los alumnos comienzan a dibujar los sólidos correspondientes, surge una duda con respecto a cuál eje usar para rotar la función y=3, y observamos los siguiente:

A20: Una línea, 8 cm supongamos
Pr: Lo vas a rotar alrededor de, pero a lo mejor estas escogiendo mal tu centro de donde estas rotando, y solo es una línea
A20: Entonces si solo va a ser
Pr: ¿Qué va a ser? [Hace un gesto de duda]
A20: Como un platito
Pr: A ver ejercicio para todos, ayúdenle a su compañero, suponiendo que se equivocó de eje, entonces la de la línea recta, ahorita ya A15 ya la cachó, supongan que lo roto, pero utilizando el eje de las "y" entonces lo que va a rotar ahora es este segmento de línea alrededor del eje de las "y", A15 ¿qué obtuviste?, no, ¿todavía no?, sin miedo…
A2: Profa, ¿no es como una dona?
A9: Ah sí, sale como una dona
Pr: Exacto, dice A9 ¿Qué?
A9: Es una dona plana
Pr: Una dona plana, entonces dice que se les va a generar una dona plana, ¿cuánto va a medir?, si es una dona plana ¿Cuánto va a medir?
A9: De diámetro serian 2 y radio 1

En la situación anterior observamos que, la **analogía** lo realizan los alumnos, para poder buscar una guía para poder tener una idea de cómo será el sólido resultante.

Otro ejemplo similar lo observamos durante la misma actividad seis, durante el momento en el cual tratan de averiguar el sólido resultante al rotar la parábola.

Pr: Ok, y por último esta que estaba medio extraña, por ahí A10 vamos a checar esto, dicen que es una parábola que está definida para las "x" entre menos dos y cinco, nada más en ese pedacito me voy a fijar y me decían que era una parábola con vértice ¿en dónde?
A9: Cero con uno
Pr: Y entonces ¿aquí cuanto mide?
A9: Cinco
Pr: Ok, ¿y por acá es hasta?
As: Veintiséis
Pr: Por acá es cinco con veintiséis y acá es menos dos con cinco, y entonces es este pedacito de gráfica, lo vamos a girar con relación a este eje, [A1 dice "ya entendí"], ya le cayó el veinte, entonces hagan de cuenta que se sale este pedacito de grafica de curva del pizarrón [Realiza la rotación con sus manos], lo roto y entonces va a ser algo como así, ¿cómo qué es esto?
As: Como una copa
Pr: Como una copa, algunos dicen que es como una copa, por ejemplo, de esta parte me acuerdo como de las trompetas de ceremonia etc., ok, ¿dudas hasta aquí?
As: No

Aquí los alumnos ocasionan la **analogía**, al realizarla entre el sólido resultante de rotar la función $y = x^2 + 1$ en [-2, 5] con una copa.

Durante la actividad siete, seguido de la discusión del video que en esta actividad se produce, la profesora sugiere calcular por el método de la integral el volumen de dos sólidos de revolución que se obtuvieron en la actividad seis y durante este proceso, se presenta lo siguiente:

Pr: [Se acerca a E1 y ayuda a los alumnos a resolver a integral] [Se dirige a todo el grupo] ¿cuál es la integral de cinco?
A3: Cinco equis sobre uno
Pr: Cinco equis, ¿cuál es la integral de nueve?
As: Nueve equis
Pr: ¿Cuál es la integral de raíz de dos?
As: Equis a la tres medios
Pr: No es cierto, a ver yo no dije…
A6: Raíz cuadrada de dos
Pr: [la profesora señala al alumno que respondió], ¿cuál es la integral de siete?
As: Siete equis
Pr: ¿De tres medios?
A6: Raíz cuadrada de tres, [Realiza un gesto de desaprobación]¿ya se les olvido?
A3: Tres medios de equis
Pr: Tres medios de equis, ok, ¿cuál es la integral de menos diez?
A3: Menos diez equis

Pr: Menos diez por equis, ¿la integral de menos cien tercios?
As: Menos cien tercios de equis
Pr: Y ¿raíz de cinco?
As: Cinco por equis
A1: No, no me acuerdo
Pr: ¿Por qué? [Realiza un gesto de desaprobación]
As: [hablan al mismo tiempo]
Pr: Qué diferencia… a ver, ¿pi que numero es?
As: Irracional
Pr: ¿Cuál es la integral de pi por equis?
A6: pi por equis
Pr: pi por equis, [Lo dice con un tono, que da a pensar que se desesperó al no recibir la respuesta correcta] ¿Cuál es la integral de raíz de dos?
As: Raíz de dos por equis
A6: Raíz de dos a la x
Pr: ¿A la x? [lo pregunta con un tono de desaprobación].
A6: Raíz de dos por equis
Pr: Raíz de dos por equis, ¿cuál es la integral de raíz de cinco por cuatro?
A21: Raíz de cinco por cuatro equis
Pr: Raíz de cinco por cuatro equis

En el extracto anterior, se presenta la **analogía**, puesto que la profesora, al darse cuenta de que los alumnos no pueden calcular una integral que incluye a pi en su integrando, comienza a preguntar el resultado de algunas otras funciones, por ejemplo, pide calcular la integral de números enteros, a lo que los alumno responden correctamente, seguido de esto la profesora pide calcular la integral de pi por equis, pero los alumnos responden de manera incorrecta, a lo que la profesora reacciona preguntando de nuevo el valor de la integral de números irracionales, llegando así al uso de la analogía, puesto que ocupa problemas similares para que los alumnos puedan dar la respuesta por seguir un patrón.

Otro momento más adelante durante esta misma actividad se presenta a continuación

Pr: Acuérdate que tu raíz es hasta acá, entonces como lo quitas para poder…
A30: Para poder quitar esto [señala una parte de la resolución de la integral] seria…
Pr: No, no es esto [señala la misma parte de la resolución de la integral], por ejemplo, si tú tienes nuevo, y luego al cuadrado, ¿Cuánto es raíz de nueve?
A30: Tres
Pr: ¿Al cuadrado?
A30: Nueve
Pr: Entonces si fuera, por ejemplo, ocho y luego al cuadrado ¿Cuánto seria?
A30: Cuatro
Pr: No, no es cuatro [lo menciona en tono de desaprobación]
A30: Perdóneme
Pr: Bueno 16

A30: Seria 16, ah ya, entonces se regresaría…
Pr: Pues sí, muchas veces hemos hecho eso, ¿y entonces?
A30: Entonces regresaría a lo mismo solo que sin la raíz
Pr: ¿Cuánto te quedaría entonces?
A30: Sería nada mas $36 - x^2$,
Pr: Exacto, ya nada más integrar eso
A30: Ah ok, gracias

En el extracto anterior al igual que en la previa, la **analogía** es creada por la profesora, para que A30, pueda comprender el resultado de elevar al cuadrado una raíz cuadrada, en este caso para calcular $\left(\sqrt{36 - x^2}\right)^2$, para esto la profesora comienza a preguntar el cuadrado de algunas raíces de números, entre ellos la del nueve, ocho, dieciséis, logrando así poner la analogía con problemas similares y esperar que la alumna encuentre el patrón y así lograr que de la respuesta correcta, que al final del extracto se muestra que en efecto, esta técnica usada por la profesora funcionó.

Así concluimos con el análisis de las situaciones en las cuales se presenta un uso excesivo de analogías, dando un total de siente situaciones durante cinco sesiones.

3.4 Envejecimiento de situaciones de enseñanza

Este efecto, se presentó, en muy pocas ocasiones, y para nosotros es considerado un envejecimiento de situaciones de enseñanza, cuando la profesora recae en acciones que se llevaban a cabo en la práctica docente tradicional (Brousseau, 1986).

La siguiente situación se lleva a cabo cuando en el video de la actividad uno, se pide a los alumnos que dibujen el sólido que se genera al rotar un triángulo rectángulo con eje de rotación vertical y tangente al vértice que tienen en común la hipotenusa y la base del dicho triángulo.

Pr: Ultima vez, [Repite y pausa el video mientras murmuran los estudiantes], no los escucho, ¿qué dijeron?
A6: decimos que es como un cilindro, pero con un cono adentro
Pr: ¿Ya les cayó el veinte a los demás?
As: Ya
Pr: ¿Siguiente ya? Ya todo mundo siguió la sugerencia de A6, ya tiene la idea verdad, pero no lo sabe dibujar

Nosotros catalogamos la situación anterior como un **envejecimiento de situaciones de enseñanza** puesto que consideramos que una de las prácticas tradicionales dentro del salón de clases, es sugerir a los demás alumnos que sigan la respuesta que otro alumno dio y que además es aquella que la profesora espera, esto con el propósito de continuar con la clase y no caer en alguna discusión que no se tenga planificada.

3.5 Devolución

A continuación, presentaremos, las situaciones que para nosotros corresponden a un momento en el cual se presentó una **devolución**, antes de esto, nos gustaría aclarar que en los siguientes eventos se puede debatir la razón por la cual es considerada como **devolución** puesto que esta no se percibe de manera clara, pero al no existir durante las sesiones un evento claro de **devolución**, al discutir las razones en cada uno de los eventos se decidió colocar en este apartado a los siguientes.

La siguiente situación se presenta durante la puesta en común de la actividad dos, justo en el momento en el que la profesora pregunta sobre si la botella de jugo es o no un sólido de revolución.

Pr: Pero bueno, vamos a empezar con este [refiriéndose a la botella de jugo], ¿este es o no?
As: [Dan respuestas divididas].
Pr: ¿Por qué? ¿de qué parte?
As: De abajo
Pr: Lo de abajo, me estaban comentando que lo de abajo, ¿por qué?, ¿qué tiene lo de abajo?, ¿qué pasa con lo de abajo?
A8: No es uniforme
Pr: No es uniforme, ¿qué más?, quien me puede explicar mejor, A1.
A1: Nosotros opinamos que si
Pr: Tú piensas que sí, a pesar de la parte de abajo
A1: Pero si quitamos la parte de abajo
A5 Yo lo que digo es que no tiene como una forma regular constante que pueda reproducir esta figura
Pr: ¿Qué es esa forma regular constante?, en algún equipo me habían hecho ese comentario, en particular en el equipo de A1, pueden platicarles a sus compañeros la idea que tienen de esa figura regular, A1 les puedes comentar a tus compañeros lo que me comentaste
A6: Que la botella puede formarse en base a varias figuras que tengan un giro de revolución, dibujar un sólido de revolución, entonces al juntarlas todas nos van dando la forma de toda la botella completa.
Pr: Ajá, tu consideras que son uno, dos y tres figuras diferentes, ellos como consideraron que esto si era un sólido de revolución despreciaron la parte de abajo, porque si toman la parte de abajo dijeron entonces, no es, y no le hicieron caso a la base, sin embargo, acá me dicen, tomando a la base, no

es sólido de revolución, pero no me han podido decir exactamente porque, en aquel equipo ya lo habían comentado un poco.

A1: Es que, si tomáramos en cuenta la base, hay que destacar que un sólido de revolución en su base siempre va a tener un punto en la circunferencia, como en esta figura tiene una circunferencia.

Pr: ¿Entienden eso todos? [Los alumnos contestan que si] ¿por qué se forma esa circunferencia en la base? Por ejemplo, suponiendo que aquí fuera plano [Refiriéndose a la base de la botella], ¿por qué se forma esa circunferencia en la base?

A1/A6: Por el eje de rotación

Pr: Por el eje de rotación, ok, y entonces considerando lo que acaban de decir y considerando esta parte [Señalando la base de la botella], ¿este sería o no un sólido de revolución?

As: No sería

Pr: Ok, muy bien

En el extracto anterior podemos observar que mientras un alumno (A1) justifica la razón del porque en su equipo clasificaron una botella como un sólido de revolución, la profesora comienza una discusión con todo el grupo, en donde usando las respuestas dadas, les regresa la responsabilidad a los demás alumnos de continuar sacando características y así ellos puedan al final decidir si el objeto en cuestión es o no un sólido de revolución, es decir, la **devolución** es realizada por la profesora a partir de las respuestas y al pedir que los alumnos se expliquen entre sí las decisiones tomadas, con el propósito de continuar determinando características sobre los sólidos de revolución.

Otro momento similar se presenta durante la misma discusión, pero ahora con un nuevo objeto, en este caso con la botella de Aloe.

Pr: Esta parte, perdón este sólido, tiene un parte que me dice que tampoco puede ser la de un sólido de revolución, como que en algunos pedacitos si y en otros no, me estaban indicando, en particular ¿en qué partes son las que no corresponde a un sólido de revolución?

A1: En las sumergibles

Pr: En estas que están sumidas, en las grequitas que les decía, ok, ¿por qué?

A2: Porque no encuentro una figura que al momento de rotar te genere eso

Pr: Porque no encuentras una figura que al momento de rotar te genere ¿esto? [Refiriéndose a la parte central de la botella de Aloe]

A2: Y a la vez que sea, porque hay unas partes donde si está sumido y hay otras donde no

A10: Entonces no es continua ahí, y la figura tiene que ser continua, ahí es una, se quita y después continua y no tiene que ser continua

Pr: O sea que esta continuidad que tu mencionas debe cubrir esta parte [Refiriéndose a la misma parte de la botella de Aloe]

A10: Sí

Al igual que en el extracto previo, en este la **devolución** es creada por la profesora al regresar la responsabilidad a los alumnos usando sus propias preguntas en particular con el uso de la pregunta "¿por qué?", esto con el propósito de poder continuar buscando características que justifiquen la razón de ser un sólido de revolución o no.

Continuando con esta misma discusión ahora con respecto al estuche de cepillo de dientes se presenta lo siguiente.

Pr: Y a ver el del millón, porque con este estaba observando que hay mucha confusión, ¿este es o no es? [Refiriéndose al estuche de cepillo de dientes]
As: [Contestan de manera dividida, un gran porcentaje dice que no y el otro dice que si]
Pr: No es, ¿por qué?
A6: Porque no cumple con lo de tener una circunferencia o un circulo que pueda determinar que tiene una rotación. [la profesora con su dedo señala un circulo en la base del estuche de cepillo de dientes y A6 señala la base de la botella que tiene en su mano] [A1 dice, no cumple mis reglas].
Pr: No cumple las reglas de A1, A6 dice que porque no tiene una base como habían mencionado de forma circular.
A6: Porque, por ejemplo, esto tiene más una forma como si tuviéramos un rectángulo, pero en lugar de las esquinas son la parte [Lo interrumpen los integrantes de E6 (inaudible)]
Pr: Como si hubieran limado las aristas del otro cuadradito que tienen por ahí
A6: Tampoco tiene un punto así donde como tal todo se intercepte o se pueda formar por así decirlo.

Al igual que en las situaciones previas, en este momento, consideramos que la profesora realiza una **devolución**, puesto que al usar las respuestas hacer preguntas como "¿por qué?", les regresa la responsabilidad a los alumnos de decidir si un sólido es o no de revolución.

Más adelante durante la discusión de la actividad tres, en donde se pretende que los alumnos continúen en la búsqueda de características suficiente y necesarias para clasificar sólidos como solidos de revolución o no, usando para este propósito los conos que se les proporcionó a los equipos.

Pr: ¿Qué más observaron? Ya observaron cortes…
A5: Que todos generan otros sólidos de revolución
Pr: Todos generan otros solidos de revolución más pequeños ¿verdad?, ¿qué más observaron?, ¿cómo son entre ellos?
A1: Iguales
A3: Entre ellos los cortes que tienen así, vendrían siendo paralelos

Pr: Todos los cortes son paralelos, por lo tanto, ¿todos son?, ¿que dijimos con relación al eje de rotación?
As: Perpendiculares
Pr: Perpendiculares, aja, y ¿qué más observaron?
A9: Bueno en estos cortes todas sus bases son redondas y en el otro no
Pr: ¿Cómo son entre ellos?
A19: Proporcionales
As: No
Pr: No, ¿por qué no?, no tienen el mismo tamaño, no tienen el mismo volumen, parece que no tienen un orden los cortes, ok, no tienen un patrón ¿verdad?, ¿qué más?, acá este equipo no ha participado [Se dirige a E1], ¿Qué más observan?
A15: Que uno es complemento del otro
Pr: Son complementarios, uno es complemento del otro, ¿qué más?
Pr: Eso en el dibujito que hicieron, ¿dónde lo ven?, en el dibujito hicieron que les pedí ahorita que dibujaran su figura que generaba el cono, pero con los cortes, ¿dónde ven esa diferencia de tamaños en los círculos?, ¿dónde lo ven?
A3: Seria en la altura del triángulo, no, perdón, si, es que es un triángulo rectángulo [Refiriéndose a la parte del sólido que queda entre dos cortes].
Pr: Mira él está siendo así más preciso, es un triángulo rectángulo lo que te genera el cono, ah, tú le llamas altura a (…) ok, esta línea dice el que es la altura [Señala a lo que para el alumno es la altura del triángulo], en tu circulo ¿qué es?
A3: El diámetro, bueno el radio

En esta situación, nosotros consideramos que se presenta una **devolución** por parte de la profesora, al continuar cuestionando a los alumnos seguido de una respuesta, por ejemplo, cuando A19 contesta que los cortes son "proporcionales", y los demás alumnos contestan "no", ella pregunta "¿por qué no?", lo que ocasiona regresarle a los alumnos la responsabilidad de continuar aceptando o no las respuestas de sus compañeros y a la par justificando dicho rechazo o aceptación, de igual manera esto último la profesora lo logra al preguntar de manera constante "¿qué más?", es decir en esta situación la profesora realiza la **devolución** al pedirle a los alumnos que acepten o no y a la par justifiquen las respuestas y criterios que entre ellos van dando.

Durante la puesta en común de la actividad cuatro, en la cual usando las características que se concluyeron en la actividad tres, se reclasifican los sólidos de revolución de la actividad dos, se presenta la siguiente discusión.

Pr: Ya tomaron el radio y ya midieron, ¿ya midieron?, traten de hacer un esquemita y marquen el radio, así como la vez pasada porfa, marquen el radio y díganme ¿de qué depende el tamaño del radio?
A3: Ah, el tamaño del radio depende de donde hagas el corte…
Pr: Depende de donde hagas el corte…

A6: Pero también depende de qué tipo de figura, por ejemplo, en el caso de un cono, pues si varía el tamaño del diámetro del circulo que se forma
Pr: ¿Mmm y por ejemplo en ese? [Refiriéndose a la botella en forma de pesa]
A6: Por ejemplo, estas que son iguales pues no varía mucho, es casi similar, en esta a lo mejor si puede variar, pero por lo mismo de la figura que está aquí en medio
Pr: Entonces como que puedes resumir, ¿en dónde sí y en donde no?
A6: Pues es que le digo que yo considero que también depende que tanto difiera el diámetro del circulo que se forma en el corte de una figura que pasa de forma perpendicular por el eje de rotación, por ejemplo, en este caso de estas dos figuras es algo similar, en esta a lo mejor difiere por que viene siendo una figura totalmente diferente, lo mismo con el cono y otras figuras

En esta situación podemos encontrar la **devolución**, cuando la profesora pregunta si en la botella con forma de pesa se cumple lo que A6 está afirmando, puesto que, al realizar dicho cuestionamiento, les regresa la responsabilidad a los alumnos de aceptar o no el argumento de A6 para así poder dar una respuesta a dicha pregunta.

Continuando con la discusión y comenzando esta nueva, a partir de la última respuesta de A6 en el ejemplo anterior, se presenta lo siguiente.

Pr: Están de acuerdo en que las dos "las figuras" [Las comillas las realiza con sus manos la profesora] que generan su sólido de revolución ese es ¿"totalmente diferentes"? [La profesora realiza las comillas con sus manos y lo pregunta con un tono de desaprobación] ¿están de acuerdo en esa afirmación?, dice que la figura que genera el sólido de revolución, las figuras… porque son dos figuras, dice que son totalmente diferentes, ¿qué figura rotan para formar eso? [Simula la rotación con sus dedos], o ¿qué figuras rotan para formar eso? ¿cómo?
A5: Dos rectángulos
Pr: Dos rectángulos, entonces no son tan diferentes, solo varían ¿en qué?
As: En tamaño
Pr: En tamaño, pero está muy bien la observación que él dice, en toda la parte de arriba, los radios van a tener más o menos el mismo radio, o sea digo más o menos porque bueno aquí está un poquito metido ¿verdad?, si lo imaginamos liso entonces sucedería eso, ok, entonces dice su compañero que ¿de qué depende el tamaño del radio?, A3, de que depende…
A3: En caso de otra figura, por ejemplo, un cono, en la parte donde no se corte, pero, por ejemplo, si es un cilindro perfecto se podría decir, pues daría el mismo radio donde hagas el corte
Pr: Exacto, ¿y en un cono?
A3: En un cono no
Pr: ¿Y por ejemplo en este? [Refiriéndose a la botella de jugo del valle]
A3: Igual son dos figuras
Pr: Son dos figuras las que generan, ok, podemos verlo, así como una figura y otra ¿verdad?, por ejemplo, en esta parte [Refiriéndose al inicio de la botella], ¿todos van a tener el mismo radio?
A3: No, porque se va haciendo como que gorda y se va haciendo chiquita (inaudible)
Pr: Ok, muy bien

Aquí podemos observar que, de nueva cuenta, la profesora utiliza la **devolución** para que los alumnos acepten o no el razonamiento de A6, esto al preguntar "¿están de acuerdo en esa afirmación?", y seguido de esto aparece de nuevo la **devolución**, en el momento en el que la profesora pregunta "¿y en un cono?", puesto que esto ayudaría a que los alumnos decidan si el razonamiento de A6 es válido o no.

Durante la puesta en común de la actividad cinco, la cual recordemos tiene que objetivo que los alumnos concluyan que los sólidos de revolución son generados al rotar una función, se presenta la siguiente situación.

Pr: Del lugar donde se haga el corte [La profesora realiza en el aire los cortes], esto [Señala el contorno de la figura] la figura o el contorno de la figura que genera mi solido de revolución, ¿a qué se parece?
A4: A un cono
Pr: No, el contorno de la figura que genera mi solido de revolución, ¿a qué se parece?, esto de acá, ¿a qué se parece? [Señalando la figura dibujada]
As: Una parábola
Pr: ¿Una parábola? [Realiza un gesto de desaprobación], como una recta ¿no?, a lo mejor si esta así poquito… por ejemplo aquí tiene una curvita ¿no?, ¿pero hay alguno donde haya sido una recta?
As: No
Pr: A3 ¿con cuál trabajaron ustedes?
A4: Con este [Refiriéndose al vaso de café]
Pr: Me lo puedes enseñar, se lo puedes enseñar a tus compañeros
Pr: Ok, a lo mejor no lo ven, esto es una recta, otro que sea diferente, ¿quién me dice más o menos a que se parece? [Dibuja en el aire una función], a que se parece, aquí, a ver préstame este, el contorno de la figura en esta parte ¿qué es?, sin miedo
A23: Una recta
Pr: Una recta, ¿en esta parte que es?
A23: Igual una recta
Pr: ¿En esta parte?
A23: Como una curvita
Pr: Es como más curvito, y por ejemplo ¿en esta parte? [Señalando el dibujo que le proporcionaron correspondiente al vaso de yogurt]
A23: Como una semi parábola
Pr: Como una semi parábola, ¿habían escuchado es?, muy poquito ¿no?, ok, entonces a ver, conclusión, ya midieron, ya vieron que el tamaño del radio depende del lugar donde hagan el corte, ya identificaron el contorno, eso es más o menos lo que me está generando esa figura [Hace con sus manos la rotación], eso es lo que me está generando mi solido de revolución, ¿dudas hasta aquí?
As: No

En este momento nosotros decidimos que existe una **devolución**, puesto que, al preguntar en los distintos sólidos que aparecen en este extracto, "¿a qué se parece?", la profesora regresa la responsabilidad de buscar las respuestas, logrando que los alumnos al querer dar la respuesta vuelvan a una situación a-didáctica de acción, esto puesto que la profesora solamente realiza la pregunta sin intervenir de alguna otra forma.

Al concluir el video de la actividad siete, se lleva a cabo la puesta en común para analizar con todo el grupo lo que el video explica, es en este momento en el que encontramos lo siguiente.

Pr: Platíquenme sobre el video, ¿quién quiere decir algo?
A2: Que si es buen método para solidos de revolución que no tienen alguna fórmula como tal como es el cilindro…
Pr: ¿El cilindro? [La profesora hace un gesto de desaprobación]
A2: El cilindro si tiene, pero unos que no tienen como …
Pr: Por ejemplo, este ¿tendrá fórmula?, ¿habrá fórmula para calcular?, ¿no?, y entonces que les sugiere el video
A2: Y entonces dice que como al cilindro si lo podemos sacar, podemos sacar varios cilindros para que se forme el triángulo en el (inaudible), pueden ser diferentes para formar otros
Pr: Ok
A2: Cuando vimos lo de la parábola, lo de sacar el área de la parábola de abajo con los rectángulos, con los ejes de rotación
Pr: O sea que, ¿si les resulta familiar ese método?
As: Si
A24: Yo había investigado un método de integración de los sólidos de revolución, se llama método de discos, y era, por ejemplo, si teníamos un cilindro era como dividirlo en rebanadas infinitamente delgadas y sumarlas todas para obtener el volumen
Pr: ¿Y eso a que se parece?
A24: A la integración la normal
Pr: A la integración la normal… o sea es obvio para todos, a ver A4 y luego A6
A4: En vez de hacer rectángulos podemos hacer cilindros y tendríamos que sacar el limite
Pr: Íbamos que sacar un limite
A4: A los cilindros para poder sacar el limite al infinito y poder sacar el área del volumen
Pr: Ok A6
A6: Es casi lo mismo que acaba de decir A4 porque pues con las figuras hicimos los rectángulos y los trapecios muy pequeños que se acercaban cada vez más al área exacta de la figura, por lo que tuvimos que poner un límite al infinito para que ya encontráramos el área exacta de la figura, y en este caso van a ser con cilindros pequeñitos infinitos
Pr: Cilindros
A6: Para acercarnos al volumen de la figura

Aquí encontramos la **devolución**, a partir del momento en el que la profesora pregunta "¿si les resulta familiar ese método?", puesto que, a partir de ese momento, los alumnos comienzan a recordar lo visto cuando se calcularon áreas y además comienzan a buscar la relación con los sólidos de revolución, es decir la responsabilidad de hallar la similitud recae completamente en los alumnos.

Durante la actividad seis, en la puesta en común, al momento de analizar la gráfica de $y = \sqrt{36 - x^2}$ encontramos lo siguiente.

Pr: ¿Cuánto mide de aquí acá?
A15: Seis
Pr: Ok, ¿cómo lo calculamos?
A6: Sustituyendo
Pr: Sustituyendo que valor
A2: Seis [La profesora hace un gesto de desaprobación]
As: Cero
Pr: Sustituyo cero y esto me dio seis, muy bien, ¿dudas hasta aquí?
As: No
Pr: Y si me dio aquí treinta y seis menos cero medio treinta y seis, ¿cuál es la raíz de 36?
As: Seis [La profesora realiza un gesto de desaprobación]
A3: Seis y menos seis
Pr: Aja, Pero como es una ¿qué? ¿por qué no grafique más seis y menos seis?, o sea esto lo obtuve porque rote,
A3: Ah porque lo está rotando al revés
Pr: Pero yo porque no hice mi grafica desde un inicio así, ¿por qué nada más hice esta parte?
A21: Porque primero están los números, y cuando están primero los números solo es un cuarto [La profesora contestan que no con su cabeza y además hace un gesto de desaprobación].
A6: Por el intervalo de cero a seis [La profesora contestan que no con su cabeza y además hace un gesto de desaprobación].
A15: Por la raíz cuadrada
Pr: Aja, pero la raíz cuadrada es seis y menos seis, porque seis al cuadrado me da treinta y seis y menos seis al cuadrado igual y aquí cuando sustituyo el cero me da treinta y seis y la raíz de treinta y seis es seis y menos seis, eso es cierto, ¿qué paso A22?
A22: Porque ahí especifica que "x" pertenece de cero a seis
Pr: ¿"x" ?, y para este "x" [Refiriéndose a x=0] si yo hiciera la gráfica sacando la raíz me da este resultado positivo y este negativo y me hubiera dado esto, y entonces que pasa, ¿por qué? hay una palabra clave
A6: Por la función
Pr: Exacto, ¿por qué es qué?
A6: Porque la función nada más da medio circulo o media circunferencia y el intervalo nada más pide la mitad de esa circunferencia, bueno la mitad de la mitad de esa circunferencia, bueno un cuarto [La profesora dice que no con su cabeza]
Pr: No, pensé que ya lo habían dicho, tiene que ver con función, ¿cuál es la definición de función?, qué dice para que sea una función, ¿qué diferencia hay entre una función y una ecuación?, ¿ya se les olvido?

A24: Que la ecuación es una igualdad y la función tienes que poner un valor (inaudible)
Pr: Aja y ¿qué más?, falta la palabra clave

Esta situación es considerada como una **devolución**, puesto que la profesora, al realizar preguntas como "¿por qué nada más hice esta parte?" y al comentar "si yo hiciera la gráfica sacando la raíz me da este resultado positivo y este negativo y me hubiera dado esto, y entonces que pasa", trata de regresar la responsabilidad a los alumnos de usar el conocimiento previo de la definición de función, para poder dar respuesta a lo que se cuestiona, pero al darse cuenta que recibe una respuesta que mal interpreta como correcta, puesto que supone que el alumno comprende la definición, la profesora decide terminar esa discusión cambiando de tema.

Durante la misma actividad seis, mientras la profesora, trata de llegar a la conclusión de que el radio de las circunferencias que se forman al realizar cortes perpendiculares al eje de rotación es igual a la evaluación de la función en el punto de corte, se presenta las siguientes situaciones

A14: Nos dimos cuenta de que el radio podía ser de uno
Pr: ¿En qué parte?
A14: En esta, por ejemplo, en el punto nos dimos cuenta de que era de uno
Pr: De uno exacto
A14: Entonces pues se complementa…
Pr: ¿Y acá?, por ejemplo, ¿es de?
A14: De seis
Pr: Aja, ok, y, por ejemplo, aquí este punto, ¿lo midieron con la regla?
A14: Si
Pr: Pero ¿qué tal si no está bien hecha la gráfica?, si no es muy precisa…
A14: Por medio de puntos, por tabulación
Pr: Por ejemplo, ¿qué "x" es?, qué "x" escogieron, uno, dos, tres, aja y entonces ¿cuál sería?, por medio de puntos, así como tú me dijiste, ¿en?
A14: [Señala el numero 3]
Pr: En tres, ¿cuánto les dio?
A27: Diez
A14: Es que la escala es diferente
Pr: Ok, muy bien, pequeño detalle ¿verdad?

Como podemos observar la profesora, cuestiona la manera en la que averiguaron la medida de los radios, y al recibir que fue con una regla, ella comienza a hacer visible la posibilidad de que el dibujo se encuentre mal, ocasionando así la **devolución** con la forma en la que se puede medir dicho radio, logrando que ellos lo relacionen con una tabulación.

Continuando con esta misma discusión, la profesora continúa recorriendo los equipos y en uno de ellos sucede lo siguiente.

Pr: Claro, y tengo curiosidad en este [solido en forma de copa], ah ya les salió mejor, y también en este [Esfera], tengo curiosidad en estos, ah ya lo hiciste ¿cuánto te dio?
A10: 5.15
Pr: ¿Cómo lo calculaste? ¿midiendo?
A10: Si
Pr: ¿Y de que otra forma?, imagínate que porque no usaste un compás ¿verdad que no?, entonces seguramente no es exacto, cuál sería la otra forma de
A10: Con el transportador
Pr: ¿Cuál sería la otra forma para calcular el radio?
A10: ¿el radio?
Pr: Aja, porque dice que no uso un compás, entonces seguramente no está muy bien hecho, no es así preciso
Pr: Esta en equis igual a dos
A3: Pues mide dos ¿no?
Pr: No
A10: ¿Dos con qué?,
Pr: ¿Dos con qué? es el que quiero, ¿cómo lo obtengo?, por ejemplo, acá…
A10: Sustituyendo en la función
Pr: Exacto, [Se acerca a E2], ¿ya estuvo?, a ver
A18: Aquí en equis igual a dos nos da cinco.
Pr: En dos ¿por qué?
A18: Lo hice a escala, no es a escala centímetros
Pr: Aja, en equis igual a dos te da cinco de radio, en equis igual a cuatro te da diecisiete, ¿cómo lo hiciste?, mediste o
A18: También puedo ocupar la formula
Pr: Ah claro, muy bien, ¿y en la circunferencia?, por ejemplo, en dos cuánto vale
A8: En equis igual a dos, vale cinco punto siete
Pr: ¿Cómo lo calcularon?
A8: Pues midiendo
Pr: Aja, y una forma más exacta
A8: Ah sí, usando la función
Pr: Ok, entonces calcúlenlo a ver si es cierto, [Se acerca a E1], enséñenme la del círculo, la de la esfera o semiesfera, bueno esta [solido parecido a una copa], ¿aquí no hicieron cortes?
A12: No

Al igual que en el ejemplo previo, en esta situación, al profesora se acerca a dos equipos, en los cuales realiza la **devolución** al cuestionar de que otra forma podrían medir los radios, puesto que los dibujos, en el caso del primer equipo, no se realizó con compás y en el caso del segundo se hizo a escala, lo cual la posibilidad de medirlo con regla no es aceptable, logrando al final que ambos equipos concluyan que la mejor manera es con el uso de la función.

3.6 Uso didáctico del error

Para los efectos de este trabajo, entenderemos como uso didáctico del error, a aquel momento en el cual el profesor identifica algún obstáculo o error dentro de la participación del alumno, usando este hecho a favor de la situación didáctica del momento.

Durante la actividad cinco, mientras los alumnos dibujan funciones y el sólido de revolución que generan al ser rotados con respecto al eje "x", la profesora se acerca a E1 y se presenta la siguiente situación.

Pr: ¿Cómo van?
As: Bien [Se acerca a E1]
A20: Ya formamos los que nos pide la ecuación
Pr: Ahora rótalo y obtén tu solido de revolución, tú especifica bien de dónde a donde
A20: Pero nada más es una línea, si lo roto solo esto [Realiza un movimiento con su lapicero].
Pr: No, porque van a rotar con respecto al eje de las "x"
A20: Ah ya
Pr: Acuérdense, que bueno que me dijo A20, estamos utilizando el eje "x", en la actividad que hicimos en la hoja de papel milimétrico elegimos el eje "x" para empezar a rotar ese contorno de la figura y ya obtener nuestro sólido, ok, entonces ahora vamos a tomar otra vez como eje de rotación a nuestro eje "x" para que se acomoden en su hojita, ¿qué ibas a obtener si escogías el otro eje? [Le pregunta a A20].
A20: Voy a obtener un cilindro, pero más pequeño, no a ver, [La profesora simula la rotación de la función y=3 con una regla], si lo escojo de manera hacia el eje voy a obtenerlo, pero va a ser el diámetro más largo, pero va a estar, así como de esta altura
Pr: ¿Y qué más?
A20: Va a ser como esto [Agarra su libreta].
Pr: A ver checa bien, [Mueve su cabeza diciendo que no] ¿qué vas a rotar?, ¿una qué?
A20: Una línea, 8 cm supongamos
Pr: Lo vas a rotar alrededor de, pero a lo mejor estas escogiendo mal tu centro de donde estas rotando, y solo es una línea
A20: Entonces si solo va a ser
Pr: ¿Qué va a ser? [Hace un gesto de duda]
A20: Como un platito
Pr: A ver ejercicio para todos, ayúdenle a su compañero, suponiendo que se equivocó de eje, entonces la de la línea recta, ahorita ya A15 ya la cacho, supongan que lo roto, pero utilizando el eje de las "y" entonces lo que va a

rotar ahora es este segmento de línea alrededor del eje de las "y", A15 ¿qué obtuviste?, no, ¿todavía no?, sin miedo

A2: Profa, ¿no es como una dona?
A9: Ah sí, sale como una dona
Pr: Exacto, dice A9 ¿qué?
A9: Es una dona plana
Pr: Una dona plana, entonces dice que se les va a generar una dona plana, ¿cuánto va a medir?, si es una dona plana ¿cuánto va a medir?
A9: De diámetro serian 2 y radio 1
Pr: ¿Y radio?... piensen, acá, pero ¿hasta acá?
A20: Serian 9, así toda 18
Pr: ¿La mitad?
A20: Nueve

En esta situación, podemos observar que la profesora identifica un error con respecto al eje con el cual fue rotado la función y=3, y usa este hecho como oportunidad de aprendizaje, puesto que al principio, trata de preguntarle a A20, qué se hubiera generado con la rotación original, y observar que necesita apoyo, le pide a todo el grupo que lo imagen, logrando con esto que los alumnos se den cuenta de el sólido de revolución generado no es el mismo si se cambia el eje.

Continuando con esta misma actividad la profesora sigue recorriendo los equipos y en otro de ellos se presenta la siguiente situación.

Pr: A7, ¿lo giraste alrededor del eje "x" o "y"?
A7: "y"
Pr: Exacto, y ¿alrededor de donde era?
A15: Hacia el otro lado
Pr: Hacia acá ¿no?, ¿entonces?, bueno el que generó es ¿más gordo o más flaco?
A7: Es lo mismo ¿no?
Pr: No creo, hay que checar
A15: Es más delgado, como una dona
Pr: ¿Dona?, a ver ayúdenle a su compañera chicos
A15: Delgada por el centro, como dos platos así

En esta situación al igual que en la previa, la profesora observa un error en el eje de rotación y de nueva cuenta lo ve como oportunidad para que los alumnos de ese quipo se den cuenta de que no es lo mismo rotar una función con respecto al eje "x" que con el respecto al eje "y".

Capítulo 4 Conclusiones

En este capítulo presentaremos las diversas conclusiones a las cuales llegamos después de realizar el análisis acerca de los efectos del contrato teórico, así como de otros elementos de la teoría de situaciones didácticas que aparecieron durante la aplicación de la situación didáctica diseñada.

Para esto, las conclusiones serán presentadas por elemento teórico, en el mismo orden en el que fueron analizados, seguido de la presentación de la conclusión general de la investigación, así como las posibles formas de uso de dicha investigación, para el desarrollo o complemento de otras teorías.

Con todas estas conclusiones pretendemos dar respuesta a nuestra pregunta de investigación la cual es:

¿Cómo repercuten los efectos del contrato didáctico en los que incide el profesor en la gestión de una situación didáctica diseñada para el cálculo del volumen de un sólido de revolución?

4.1 Efecto Topaze

Como se pudo observar durante nuestro análisis (Capítulo 3) este efecto es el que en más ocasiones aparece durante la aplicación de la situación didáctica diseñada. Y a partir de dichas apariciones podemos concluir lo siguiente:

- Dicho efecto aparece en situaciones en los momentos en los cuales los alumnos muestran no haber comprendido la indicación que se dio para alguna actividad.
- Podemos decir que este efecto aparece cuando es necesario usar algún conocimiento previo para poder dar solución a alguna actividad, puesto que la profesora se ve en la necesidad de guiar a los alumnos para poder recordar dicho conocimiento.
- Otra cosa que podemos llegar a concluir es que dicho efecto aparece normalmente en el momento de la puesta en común de todas las actividades, y nosotros le atribuimos este hecho a que los alumnos en dichas puestas en común comienzan a darle vueltas, llegan un momento en el cual la profesora siente que ya se han llevado mucho tiempo y cree necesario apresurar dicha discusión.
- Podemos asegurar que, para este caso, dicho efecto está fuertemente basado en los gestos o mímica que la profesora realiza durante sus intervenciones.
- De igual manera podemos concluir que este efecto aparece gracias a la falta de tiempo para poder llevar una buena discusión sobre los resultados obtenidos en una actividad.
- También podemos decir que este efecto aparece en momentos en los cuales la profesora, o alguna actividad, recibe respuestas divididas por parte de los alumnos, ya que esta situación obliga a la profesora a decidir sobre una de ellas, siendo dicha decisión siempre la correcta, dejando a un lado la oportunidad didáctica del uso de los errores o dificultades.

Usando las conclusiones anteriores estamos en posición ahora de poder decir que la aparición de este efecto realmente afecta directamente en la gestión de una situación, puesto que a partir de este el ritmo de la clase puede ser modificado, llegando así a apresurar específicamente la adquisición de los conocimientos por parte de los alumnos.

4.2 Efecto Jourdain

Durante la aplicación de la situación didáctica diseñada, en el análisis pudimos observar que este es otro efecto que aparece de manera constante, aunque no más que el efecto Topaze, a partir de dichas observaciones podemos concluir que:

- Este efecto aparece en la mayoría de las veces cuando la profesora intuye que algo que se está discutiendo es *trivial,* es decir, que todos los alumnos deberían de saber si es correcto o no. Dicha discusión puede ser acerca de alguna formulación a la que se está llegando entre todo el grupo o acerca de alguna idea aportada por algún alumno. Generalmente esto lo notamos cuando se hacen preguntas como "¿ya les cayó el veinte?" o "ese no tiene pierde".
- Podemos decir que este efecto es ocasionado en momentos donde la profesora usa una explicación extra para alguna actividad que ella misma realiza de manera auxiliar, lo cual ocasiona que, en caso de que los alumnos no la comprendan, se desvíe la problemática principal a la de comprender dicha explicación.
- De igual manera podemos concluir que este efecto aparece durante los momentos en los cuales la profesora requiere o ve necesario recordar las características de algún objeto matemático, por ejemplo, cuando la profesora pide que recuerden la definición de función cuando graficó $y = \sqrt{36 - x^2}$, ocasionando así que los alumnos desvíen su atención en otra problemática secundaria.
- También podemos concluir que el efecto Topaze y el efecto Jourdain en nuestro caso tienen alguna relación puesto que en los últimos momentos en donde este efecto apareció también apareció el efecto Topaze, u ocasionó la aparición del efecto Jourdain. Los momentos donde observamos el efecto Jourdain son clasificados así, porque alguna acción desvió la atención del alumno a otra problemática que no era la principal, y la profesora, al querer regresar dicha atención, se ve en la necesidad de guiar las discusiones.

Gracias a estas conclusiones ya descritas, podemos asegurar que también el efecto Jourdain afecta la gestión de una situación didáctica diseñada, puesto que, de alguna forma, puede hacer que el avance sea lento, ya que, al mal interpretar las ideas de los alumnos, se ocasiona confusión y por tanto un retraso con respecto a la planeación.

4.3 Uso excesivo de la analogía

Durante la aplicación de nuestra situación didáctica pudimos observar que este efecto es uno de los que menos aparece. A partir de nuestro análisis acerca de este efecto podemos llegar a concluir lo siguiente:

- Este efecto apareció de las dos formas en las que consideramos una analogía, con objetos reales y matemáticos y con procedimientos matemáticos, con el propósito de recordar el algoritmo y así poder lograr generalizarlo.
- Podemos decir, que las analogías entre objetos reales y matemáticos se presentan en los momentos en los cuales la profesora, e incluso el propio *medio*, creen necesario realizarlas para poder ayudar a los alumnos a realizar una gráfica.
- También podemos concluir que las analogías entre procedimientos aparecen gracias a la necesidad de la generalización de algún procedimiento o de algún algoritmo necesario en ciertas situaciones, o incluso para hacer notar algún patrón para resolver algún ejercicio.
- Otra cosa que podemos concluir es que este tipo de efecto, en su versión de analogía con otros objetos matemáticos, llega a aparecer por el olvido de los alumnos de algún algoritmo o definición que anteriormente ya fue generalizado.

Gracias a estas conclusiones particulares ya descritas, podemos llegar a concluir que este efecto no tiene una gran relación con respecto a la gestión de una situación didáctica, puesto que la aparición de éste se encuentra directamente relacionado con el olvido de conocimientos previamente ya adquiridos, o incluso con acciones que ayudan a mejorar la imaginación gráfica de los alumnos.

4.4 Envejecimiento de situaciones de enseñanza

Como pudimos observar en nuestro capítulo 3, este efecto, solamente apareció una vez dentro de toda la aplicación de la situación didáctica.

Y como se explicó en la sección correspondiente, este efecto fue ocasionado cuando la profesora dio la indicación de seguir la sugerencia de uno de los alumnos, y esto permitió que los alumnos pudieran imaginarse el gráfico correspondiente, ocasionando que la profesora no entre en una discusión que podría ser o no benéfica para la situación que se estaba presentando.

Por lo anterior, podemos decir que este efecto contribuye en la gestión de la situación, puesto que ocasiona que no haya una discusión que aporte, de forma negativa o positiva al objetivo establecido en la actividad.

4.5 Devolución

Durante la presentación de los momentos de la situación didáctica que para nosotros son parte o generan una devolución, se explicó que todos estos ejemplos podrían llegar a ser discutidos, puesto que la devolución no es muy clara en primera instancia, incluso, tal vez después de una discusión más profunda se podrían llegar a eliminar algunos ejemplos.

La razón que creemos que ocasiona que las devoluciones no sean muy claras, es la falta de práctica por parte de la profesora con respecto a la manera de generarla o incluso a la falta de participación objetiva por parte de los alumnos, la cual creemos es ocasionada por la desesperación que se genera al no poder dar una respuesta correcta.

Después del análisis realizado en el capítulo 3, podemos llegar a concluir lo siguiente:

- Las devoluciones que en este trabajo se presentan son realizadas en su mayoría por la profesora, debido a que son ocasionadas por comentarios particulares dentro de cada equipo y la profesora, al identificar dichos comentarios como oportunidades de enseñanza, comienza el intento de devolución.

- Todas las devoluciones que presentamos son generadas a partir de preguntas por parte de la profesora, por ejemplo, "¿están de acuerdo con esa afirmación?", "¿a qué se parece?", "¿por qué sí?, ¿por qué no?".
- Por la forma en la que la profesora concluye cada momento presentado como devolución, podemos concluir que esta herramienta funcionó para el objetivo u objetivos que se querían alcanzar en cada actividad en las cuales se encontraron dichos eventos.

Es así como, gracias a los puntos anteriores, logramos concluir que la devolución tiene dos formas de afectar al desarrollo de una situación didácticas. La primera, puede ser de manera positiva, puesto que la devolución consigue generar alguna discusión rica en contenido didáctico para el aprendizaje, lo cual ocasionaría poder cumplir con los objetivos e incluso llegar más allá de lo planeado. Dicho de otra forma, la discusión podría llegar a generar una génesis en los conocimientos matemáticos en los alumnos. Segunda, de manera negativa, puesto que en caso de que la devolución no funcione, ya sea por una mala elección de las acciones por parte de la profesora o por la falta de participación objetiva de los alumnos, la situación se puede encontrar en un momento en el cual no se desarrolle ningún tipo de aprendizaje.

También podemos decir, que llegar a ocasionar o generar una devolución que sea clara, se convierte en una actividad compleja, puesto que esta depende de la habilidad de la profesora, así como de su planificación y de la forma en la que los alumnos participan.

4.6 Uso didáctico del error

Dentro de nuestro análisis pudimos notar que la profesora usa de manera didáctica algún error en dos ocasiones, y la manera en la que lo usa, es preguntarle a todo el grupo lo que ocurriría si el error sucediera, logrando así crear una discusión rica didácticamente para la generación de conocimientos o incluso generar una génesis en algún conocimiento matemático.

La razón por la cual consideramos que hubo muy poco uso del error, es por los efectos Jourdain y Topaze, puesto que al caer la profesora en varias ocasiones en estos dos efectos, evitó por completo discusiones en las cuales se podían llegar a notar más errores o incluso dificultades y así poder convertir dicha discusión en una situación a-didáctica, donde los alumnos podrían llegar a pasar por todos los tipos de situaciones a-didácticas que Brousseau define en su teoría, logrando así una situación rica en aprendizaje y generando con esto una génesis que ayudara a los alumnos a desarrollar de manera más general su forma de ver los objetos matemáticos.

4.7 Conclusiones generales

A continuación, presentaremos las conclusiones generales de toda nuestra investigación, para esto nos basaremos en las conclusiones ya desarrolladas en los seis puntos anteriores, con estas conclusiones pretendemos dar una respuesta general a nuestra pregunta de investigación, puesto que en los puntos anteriores se le dio respuesta, pero de manera particular.

Una de las conclusiones que podemos dar de manera directa es que los efectos del contrato didáctico siempre se encontrarán presentes en el desarrollo de una situación didáctica, aunque ésta haya sido diseñada con el mayor detenimiento posible, pensado en las distintas formas de reaccionar de los alumnos en cada una de las actividades.

La aparición de los efectos, tienen distintas causas, una de ellas, es el propio *medio*, puesto que la forma en la que se desenvuelven los alumnos depende de manera directa con la forma en la que ellos interactúan con lo que los rodea, ya sean los comentarios de los compañeros del grupo, los materiales que se les proporciona o incluso con los mismos problemas, personas y deficiencias en varios ámbitos.

Otra causa que podemos observar es la forma en la que en cursos anteriores aprendieron conceptos necesarios para el desarrollo del nuevo conocimiento que se encuentra en desarrollo, puesto que esto marcará de manera importante el desarrollo de toda la situación, e incluso la generación de los propios efectos.

Y la causa restante, la cual creemos una de las más importantes es, el tiempo, puesto que este marcará de manera definitiva el desarrollo de toda la situación ocasionado así la mayor creación de momentos en los cuales aparezca algún efecto, puesto que es necesario en varios momentos acelerar el proceso de aprendizaje para lograr todos o la mayoría de los objetivos planificados.

De igual manera nos encontramos con la comprobación de que los efectos no necesariamente son perjudiciales para la adquisición del conocimiento, puesto que, como lo pudimos observar en diversas ocasiones, dichos efectos ayudaron al mejor desarrollo de las actividades, en particular, encontramos esta virtud en el efecto Topaze y en el uso de las analogías.

Por otro lado, el efecto Jourdain, al menos, en los momentos en los cuales este efecto apareció, podemos decir que afectó de manera negativa, puesto que su mayoría ocasionó la desviación de las problemáticas principales a estudiar, lo cual generó discusiones que no aportaron nada a los planificado.

También podemos decir que el desarrollo o generación de momentos en los cuales sea posible el uso de la devolución aporta de manera importante al buen desarrollo de las actividades, así como a mejorar el proceso de aprendizaje, puesto que a partir de dichos momentos se pueden llegar a crear saltos informativos para así poder generar situaciones a-didácticas. Al mismo tiempo, podemos decir que la aplicación efectiva de la devolución depende de la buena planeación por parte del profesor, así como de la participación de los alumnos, lo cual, desde nuestro punto de vista es posible formar, a partir de intentos de devolución que seguramente fallarán.

Por otro lado, podemos afirmar, que la aparición de obstáculos y errores pueden ayudar a generar algún efecto, en particular el Topaze, o incluso pueden generar una oportunidad donde se pueda hacer uso de una devolución. Es por eso por lo que, creemos importante que el profesor durante una clase, este atento a los errores o dificultades que se presenten en los alumnos y por tanto no ignorar respuestas que no se planificó recibir por parte de los alumnos.

Es así como concluimos, que la aparición de los efectos y de otros elementos de la teoría de las situaciones didácticas, como la devolución y los obstáculos, si repercuten en la gestión de una situación, y dicha repercusión puede ser identificada como positiva o negativa. Positiva, puesto que al usarlos de manera correcta y planificada, generarían nuevas situaciones donde el enriquecimiento del conocimiento matemático en juego es producido por los propios alumnos y sus diversas participaciones, es decir, la diversidad de pensamiento matemático que se puede encontrar en un grupo de alumnos queda al descubierto y al ser usado se puede producir una génesis importante para el desarrollo del conocimiento, y más aún, se puede comenzar a desarrollar otras aptitudes necesarias para el buen desempeño matemático. Por otro lado, sería una repercusión negativa, si estos elementos teóricos, no son usados con intención didáctica, puesto que esto puede ocasionar más dificultades y desviaciones grandes de los objetivos planificado, evitando así la adquisición y desarrollo de nuevo conocimiento matemático.

Es decir, durante el desarrollo de una clase de matemáticas, no ignoremos ni evitemos la aparición de cualquier elemento teórico de las situaciones didácticas, sino, al contrario, busquemos generarlas de manera planificada o en caso de su aparición usarlas con intención didáctica, para crear mejores situaciones de aprendizaje e incluso llevar una situación didáctica a una situación a-didáctica.

Por último, podemos decir que a partir de esta investigación surgen nuevas preguntas, las cuales proponemos para su análisis, discusión e investigación futura; ¿El conocimiento especializado del profesor de matemáticas tiene alguna relación con la aparición de los efectos del contrato didáctico?, ¿Este conocimiento especializado repercute en el uso didáctico de los efectos?, ¿Qué tipo de relación existe entre el desarrollo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y el conocimiento de los efectos en los cuales recae de manera constante el profesor?, ¿El desarrollo de una trayectoria hipotética de aprendizaje, ayuda a mejorar la gestión y uso de los elementos de la teoría de las situaciones didácticas?

Se espera que en un futuro exista la posibilidad de realizar un trabajo conjunto de investigación para poder darle respuesta a algunas o todas las preguntas planteadas anteriormente, esto con el propósito de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

Referencias

Ávila, A. (2001a). El maestro y el contrato en la teoría brousseauniana. *Educación matemática*, *13*(3), 5-21.

Ávila, A. (2001b). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar*. Tesis de doctorado inédita. México: UNAM.

Baptista, P., Fernández, C., y Hernández, R. (2010). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México: Mc Graw Hill.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz (coords). (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Argentina: Paidós.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, *12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2003). Glosario de conceptos de la teoría de situaciones didácticas. Recuperado de: *http://guy-brousseau.com/* el 22 de octubre de 2018.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study* (Vol. 7). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (1992). Concept fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

D'Amore, B., y Fandiño, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación matemática*, *14*(1), pp. 48-61.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I. Sáiz (coords). (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Argentina: Paidós.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.

González, J. (2001). *El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. Cuestiones pedagógicas*, (15), pp. 227-246.

Macías, J. (2015). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos.* Tesis de doctorado inédita. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. *Recuperado de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf el 22 de octubre de 2018.*

Piña, C., Rodríguez M., y Soto M. (2012). Las situaciones (didácticas) de formación matemática o las competencias del saber "enseñado". En F. España y M. Sepúlveda (eds.). *Diversidad y matemáticas* (pp. 58-67), Málaga, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Rosales, B. (2018). *Instrumento para explorar la caracterización que hace el profesor de matemáticas del aprendizaje basado en proyectos* Tesis de maestría inédita. Puebla, México: BUAP.

Rincón, A., Salinas, S., Guanina, T., y Hurtado, C. (2002). Fenómenos de la didáctica de las matemáticas en la educación básica. *Informe de investigaciones educativas*, *16*(1), 1-28.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, *5*, 13-66.

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. USA: SAGE.

Strauss, A. L., Corbin, J., y Zimmerman, E. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.