BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

"¿EXISTEN EN UN SALÓN DE CLASES ELEMENTOS QUE PERMITAN MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS?"

Tesis que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas

Presenta:
José Antonio Robles Pérez

Dr. José Luis Fernández Muñíz
M.C. Juan Carlos Piceno Rivera
Asesores

Puebla, Pue., Mayo 2011

ÍNDICE.

1.- INTRODUCCIÓN

"La capacidad de soslayar una dificultad, de seguir el camino indirecto cuando el directo no aparece, es lo que coloca al animal inteligente sobre el torpe, lo que coloca al hombre por encima de los animales más inteligentes, y a los hombres de talento por encima de sus compañeros, los otros hombres"
George Polya

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es uno de los problemas fundamentales en la educación, no sólo en nuestro país, sino en todo el mundo, pues la enseñanza de tal materia en los diferentes niveles de educación, no siempre proporciona a los alumnos la capacidad de emplear el conocimiento adquirido, para entender y acceder a situaciones problemáticas de ésta y otras materias.

Es un hecho que, la manera en que se ha venido abordando la enseñanza de las matemáticas debe mejorarse, tratando de no limitar la resolución de problemas y ejercicios de la materia con la idea de "como lo hace el maestro", sino de desarrollar la intuición, refutación, inducción y crítica por parte del estudiante. Así lo sugieren diferentes corrientes psicológicas con los últimos cuarenta años, como lo son la Asociacionista, la Guestáltica, la Psicología Piagetiana, así como los trabajos de los matemáticos G. Polya, H. Shoenfeld y L. S. Trigo, entre otros, que en su búsqueda en dirección a mejorar la enseñanza de la matemática, han contribuido a dar respuesta a la interesante tarea de aprender y enseñar tal materia. Sin embargo, el trabajo que falta hacer, requiere de la participación de todos los involucrados en el proceso, y el docente es una pieza fundamental en ello.

En este sentido el presente trabajo plantea una propuesta metodológica, que sin pretender modificar el currículum vigente, puede ayudar a resolver dicho problema. Como área de estudio hemos seleccionado la Aritmética, enfocada al tema de divisibilidad, y tiene como base una encuesta que realizamos para reconocer los conceptos elementales que tiene un alumno, conceptos que se usan en el enunciado de un problema matemático; y el análisis de las respuestas que el estudiante da en la solución de un problema. Finalmente sugerimos una serie de ejercicios para ser usados en la enseñanza a través de la solución de problemas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

Históricamente el desarrollo de cualquier ciencia, ha estado sustentado por la necesidad de resolver una problema específico del área, sin embargo, la transmisión del conocimiento adquirido de esta experiencia, no siempre se ha caracterizado por seguir este lineamiento, tal es el caso de la enseñanza de las matemáticas, actividad que ha pasado en los últimos treinta años por diversos movimientos, como lo fue el Conjuntista (años 60) y el denominado movimiento "Regreso a la Matemática Básica", corrientes orientadas hacia la enseñanza de las estructuras fundamentales de la matemática, cuyos conceptos y principios instruccionales al ser incorporados en la currícula de la educación básica de nuestro país, no tuvieron resultados satisfactorios, pues al parecer las condiciones previas para entender un lenguaje simbólico formal como lo es la matemática, aún no estaban dadas, sin embargo, tales corrientes ratificaron algunos de los elementos propios de la matemática en su aprendizaje: la argumentación formal, el cálculo mental y la estimación de resultados fueron algunos de ellos.

En los esfuerzos que se han realizado en nuestro país a partir de 1980, por incorporar en los programas de matemáticas a nivel medio básico y superior, ideas que pueden ayudar a lograr un mejor aprendizaje de la materia, se nota el interés por dirigir el trabajo a que el estudiante adquiera un pensamiento productivo y crítico, y como consecuencia un aprendizaje más significativo; pero en la mayoría de los casos la actividad en las aulas se ha quedado en una enseñanza que deja al alumno un aprendizaje repetitivo, de aquello que observa hace el profesor.

En la búsqueda por mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, el trabajo se suma al movimiento constructivista, expresado bajo la idea de que: *"el descubrimiento de resultados importantes se ha hecho por la necesidad práctica o por retos intelectuales y no sobre la base de un proceso axiomático-deductivo, sino a base de experimentación, inducción, analogías e intuición, puntos que en el proceso de adquirir el conocimiento para metas a largo plazo, influyen de forma determinante"*[5].

Lo anterior se plantea en los trabajos más relevantes de G. Polya, A. Shoenfeld, L. M. Santos Trigo, entre otros, que en su propuesta de enseñar matemáticas a través de resolver problemas, y conjugada con la idea de I. Lakatos, contraponen su concepción sobre las matemáticas formales, percibiendo a éstas como informales y cuasi-empíricas en el proceso de su aprendizaje, las cuales no se desarrollan mediante el monótono aumento del número de teoremas perfectamente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de conjeturas, gracias a la especulación y la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones.

a) G. Polya: *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la resolución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto, pero, si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por medios propios, se puede experimentar el* *encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo a una edad conveniente, pueden determinar una afición por el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y el carácter"*[2].

b) Shoenfeld: *"En el proceso de aprender matemáticas, se requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas, que guíen a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas, y que colaboren a identificar las posibles conexiones que puedan darse entre ellas"*[9].

c) L.M. Santos Trigo: *"La propuesta de aprender matemáticas a través de la solución de problemas, a estado presente en el ambiente educativo en la última década, pero presentada de manera muy diversa, como unidad al final de un tema, como enfoque a través del curso, o como actividad artística en la que se discutan conjeturas, ejemplos, contra ejemplos y diversos métodos que resuelven un problema".*[9]

2.2 Consideración de carácter epistemológico.

El conocimiento matemático surge de la necesidad de entender las propiedades y relaciones cuantitativas y espaciales, que el hombre percibe de la realidad inmediata; cuando ésta es trascendida, la Matemática adquiere una cierta autonomía sobre la realidad misma.

La construcción del conocimiento matemático combina dos procesos complementarios, uno formal- estructurado (deductivo), y otro informal a través de observación, experimentación, inducción, analogía, intuición, entre otros. El segundo proceso es el que se utiliza en la fase productiva del conocimiento matemático, para formular problemas interesantes y descubrir resultados importantes, mientras que el primer proceso se utiliza para validar o rechazar los resultados descubiertos mediante el segundo.

2.3 Consideraciones de carácter psicológico.

Como elementos teóricos de la Psicología, éste trabajo toma algunos planteamientos hechos por la psicología genética de Jean Piaget. Para Piaget *"Los conocimientos derivan de la acción no como simples respuestas asociativas, sino en sentido mucho más profundo, la asimilación de lo real a las coordinaciones necesarias y generales de la acción. Conocer un objeto es operar sobre él, y transformarlo para captar los mecanismos de esta transformación en relación con las acciones transformadoras. Es en esta actividad donde pueden ser frecuentes los errores, pero estos forman parte del intento del que adquiere el conocimiento por desentrañar el sentido de los conceptos que ello involucra".* [10]

Para Piaget el aprendizaje no es un simple proceso lineal y acumulativo de información, sino que debe ser un proceso que se reorganiza en cada ocasión que se adquiere un nuevo conocimiento. Si referimos lo anterior a la adquisición del conocimiento matemático, no se trata de acumular teoremas, fórmulas, conceptos, sino de crear una red entre ellos que nos permita construir nuevos resultados reorganizando éstos, *"ésta reorganización requiere una actividad personal, ya que se interpretan dentro de las estructuras del conocimiento lógico-matemático, el cual es elaborado internamente por el sujeto. Las acciones coordinadas de! sujeto sobre objetos externos, requieren de procesos de razonamiento. El sujeto construye relaciones internas entre objetos externos basándose en estas interacciones".*[10]

Con respecto a la educación Piaget afirma que: " *Si se desea formar individuos capacitados para la invención y hacer progresar la sociedad del mañana, y esta necesidad se hace sentir cada vez más, está claro que una educación basada en el descubrimiento activo de la verdad, es superior a una educación que se limite a fijar por voluntades ya formadas lo que hay que querer, y mediante verdades simplemente aceptadas lo que hay que saber...el principio fundamental de los métodos activos en el aprendizaje no se pueden inspirar mas que en la historia de las ciencias, y puede expresarte de la forma siguiente: "entender es inventar o reconstruir por invención, y no habrá mas remedio que doblegarse a este tipo de necesidades si se pretende de cara al futuro modelar individuos capaces de producir y crear, y no sólo de repetir"*[10.]

Como la teoría de Piaget da al sujeto un papel tan activo, se le conoce como una posición constructivista e interaccionista.

Polya, Lakatos y Piaget coinciden en cuanto al carácter constructivo del conocimiento, y el papel que juega el descubrimiento por parte del sujeto para su adquisición. Lo anterior es contrario a la idea predominante en la metodología didáctica tradicional, de que el conocimiento puede ser transmitido a los alumnos mediante una buena exposición por parte del maestro y los libros.

3. ENCUESTA

3.1 Metodología:

Fueron dos los objetivos que se plantearon al aplicar la encuesta:

1. Detectar los conceptos matemáticos que el estudiante posee para entender el enunciado de un problema de Aritmética.
2. Detectar el uso de estrategias o procesos algorítmicos para resolver un problema de matemáticas.

En base a dichos objetivos, la encuesta fue aplicada a tres grupos de estudiantes de primero de preparatoria de diferentes instituciones de la región de Atlixco, Pue.

Con la finalidad de distribuir el trabajo que implicaba contestar la encuesta, se siguieron dos etapas:

a) Aplicación de un cuestionario de 8 preguntas de opción múltiple, que nos permitiera cuantificar el índice de conceptos que posee el alumno para entender el enunciado de un problema de divisibilidad.

El tiempo en que se contestó dicho cuestionario fue de 10 a 15 minutos, y se muestra a continuación:

Instrucciones: En los siguientes enunciados tacha la respuesta correcta:

1. Son divisores del número 12
a) 3, 6, 4, b) 12, 24,36 c) 10,5, 7,
2. Los números 6, 12, 18 son:
a) Divisores del 6 b) divisores del 18 c) múltiplos del 6
3. Son tres números primos
a) 2, 9, 15 b) 2, 5, 13 c) 5, 15, 27
4. La expresión 2^3 es equivalente a:
a) 3x3 b) 2x3 c) 2x2x2
5. Una factorización del número 20 es:
a) 15+5 b) 5x4 c) 60/30
6. Es un entero menor que -3
a) –(-3)) b) -1 c)-5
7. Al dividir 27 entre 4 el residuo es:
a) 6 b) 4 c) 3
8. Son tres expresiones que representan números pares
a) 5, 8, 11 b) 4, 8, 2n, n ϵ N c) 1, 7, 9

b) Resolución de un problema por parte de los estudiantes con la finalidad de usar estrategias. El tiempo que te permitió para resolver el problema fue de una hora, con la opción del uso de calculadora. Fueron cuatro problemas diferentes, el cuarto con una variante a causa de no haber llegado algunos alumnos el día de la aplicación, y se enuncian a continuación:

1. Carlos preocupado le platicaba a Alberto, “sabes, Juana acepta ser mi novia si le resuelvo su tarea”
   En qué consiste respondió Alberto
   - pues en encontrar cuantos ceros aparecen después del último dígito diferente de cero, en el resultado de multiplicar los números enteros del 1 al 50
   - ¡ah, pues fácil! responde Alberto, son tres ceros
   La afirmación de Alberto es cierta o falsa
   Si es falsa, entonces explique cuántos son:

2. Una vez terminada su tarea que consistía en multiplicar dos números enteros, Juan sale a la tienda, y al regresar nota que accidentalmente su hermanita borró todo el procedimiento de su trabajo, dejando solo sin borrar el resultado que era el número 10000. Al intentar reproducir Ia multiplicación, Juan sólo recuerda que los dos números que se multiplicaban eran enteros positivos, y no tenían ceros en su representación, pero como ya se dijo el resultado era 10000
   ¿Cuáles fueron los dos números que le dejaron multiplicar a nuestro amigo Juan?

3. En una clase de matemáticas la maestra pregunta ¿cuáles son los divisores del número 3OOO?
   "Son 2, 5 y 10 maestra" responde Pitagoritas.
   ¿Es cierta o falsa la contestación de Pitagoritas?
   Si es falsa, explica cuáles son todos los divisores de 3000

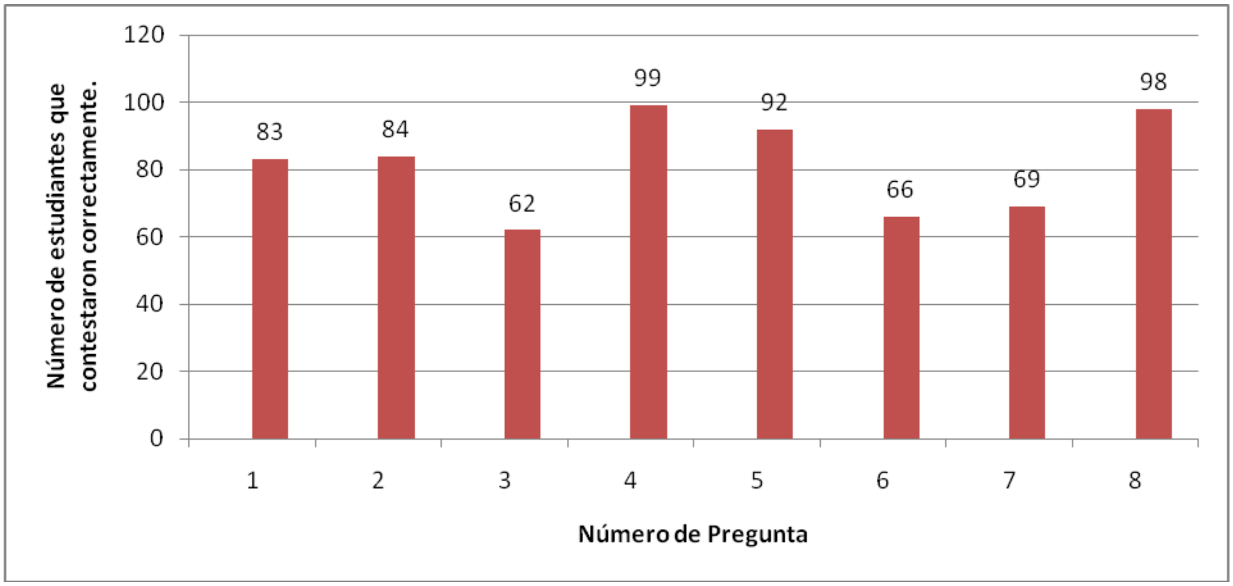
4. a) Chana, Hermelinda, Juana, María y Tomasita cuentan los asistentes a una junta de maestros. Al preguntarles cuantos contaron cada una contestaron:
   Chana: "no me acuerdo cuantos son, pero hay más de 100 y menos de 400"
   Hermelinda: "yo conté filas de 24, no sobraron ni faltaron en cada fila"
   Juana: "yo conté filas de 18 maestros, y no sobraron ni faltaron"
   María "yo conté de 15 en 15 y tampoco sobraron ni faltaron"
   Tomasita " pues yo conté de 7 en 7 y me sobraron 3 maestros"
   Si nadie se equivoco ¿cuántos maestros hay en la junta?

   b)Pepito tiene un costal con naranjas, al embolsarlas de 3 en 3 no le sobran, lo mismo sucede si las embolsa de 4 en 4, 5 en 5, 6 en 6 o 7 en 7. Pero si las agrupa de 8 en 8 le sobran 4, y si hace bolsas de 9 naranjas le quedan sin embolsar 6 naranjas. Determina la cantidad máxima de naranjas en el costal, si sabemos que al costal no le caben más de 500 naranjas.

4. RESULTADOS

4.1 Cuestionario.

A continuación se muestran los datos obtenidos de la encuesta, de un total de 102 alumnos con los que se trabajó.

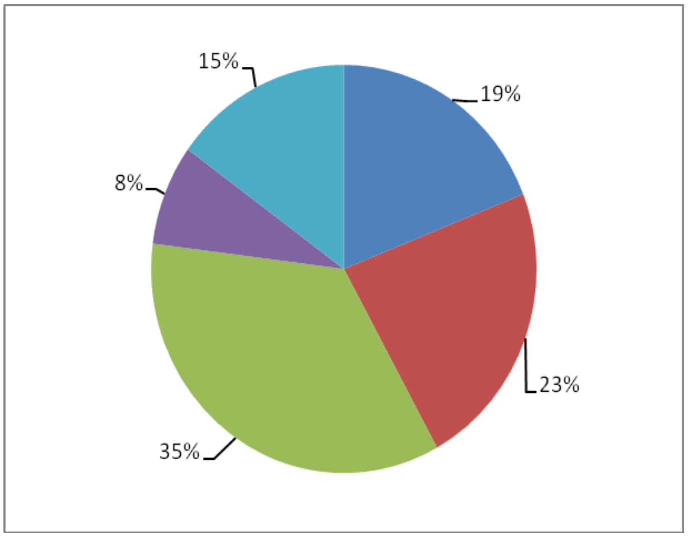


4.2 Resolución del Problema

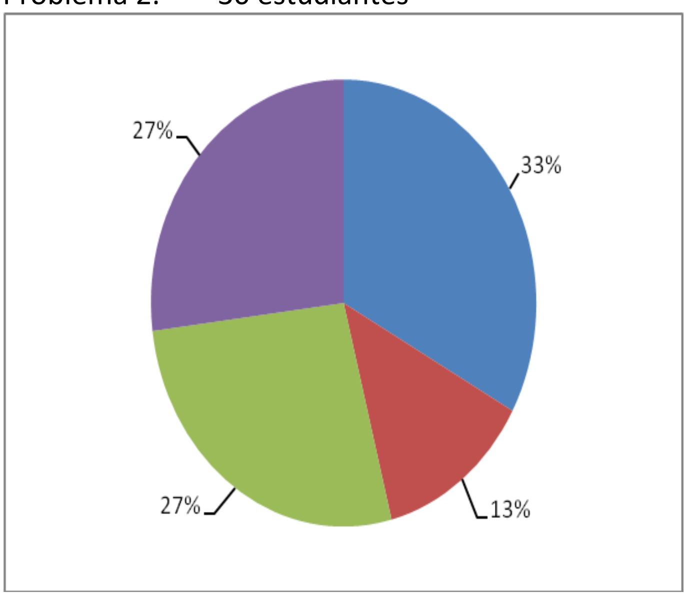
Los resultados de esta parte los clasificamos de acuerdo al trabajo que entregó el estudiante en la hoja donde resolvió el problema, y se dio bajo los siguientes puntos:

1. Da una solución pero sin mostrar procedimiento
2. Usa los datos pero su estrategia no es clara.
3. Da un plan para resolverlo pero este es incompleto o pobremente implementado.
4. Da la solución completa y correcta.

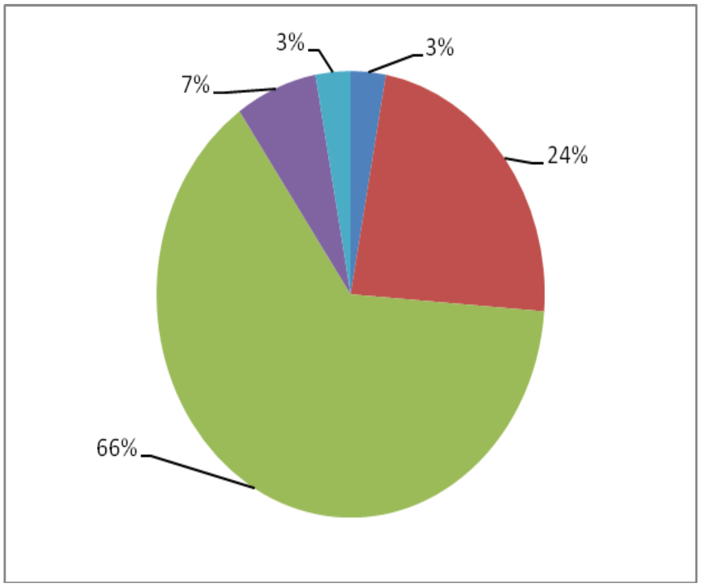
Problema 1. 22 alumnos.



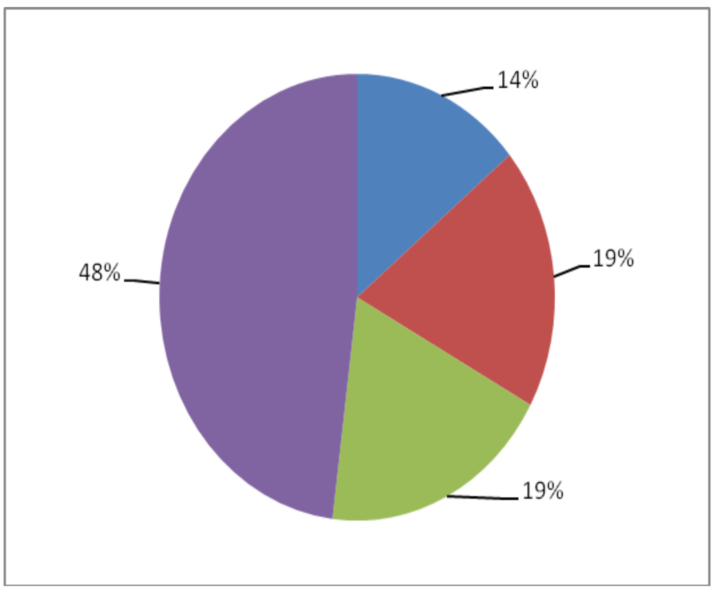
Problema 2. 30 estudiantes

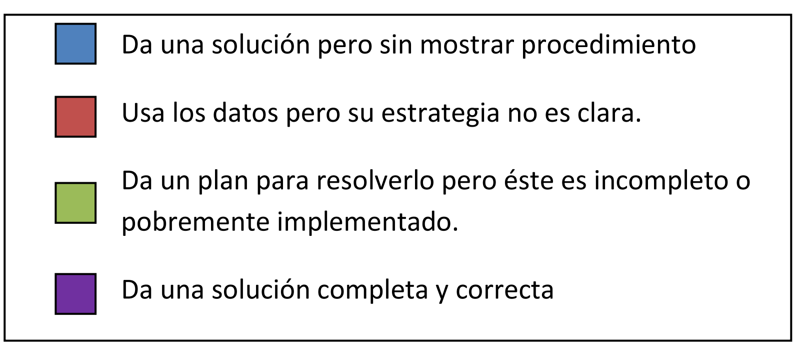


Problema 3. 29 estudiantes



Problema 4. 21 alumnos.



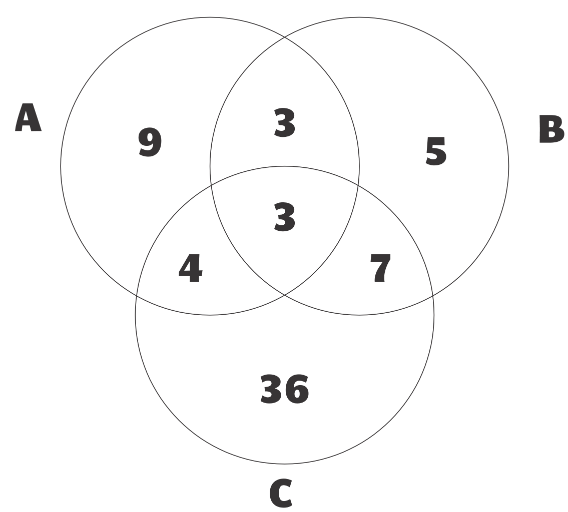


5. OBSERVACIONES A LOS RESULTADOS OBTENIDOS

5.1 Cuestionario

En cuanto a la importancia que tienen los conceptos evaluados para el tema de divisibilidad, los resultados obtenidos en la encuesta son aceptables, sin embargo las respuestas incorrectas que se dieron principalmente en las preguntas I, 2 y 3 muestran confusión por parte de los alumnos para comprender y manipular los conceptos de divisor, múltiplo y número primo, conceptos clave en el estudio de la Aritmética. Una de las causas a lo mencionado anteriormente es la forma en cómo se ha abordado la enseñanza y uso de tales definiciones.
Como una alternativa para mejorar tal hecho, sugerimos a los interesados consultar la sección de problemas y ejercicios del presente trabajo.

El siguiente diagrama muestra como se distribuyen las respuestas incorrectas a las preguntas 1, 2 y 3.



A: Alumnos que contestaron incorrectamente la pregunta 1
B: Alumnos que contestaron incorrectamente la pregunta 2
C: Alumnos que contestaron incorrectamente la pregunta 3

Elegimos la observación a las preguntas 1, 2 y 3, pues son las que consideran los conceptos utilizados en el enunciado de los problemas.

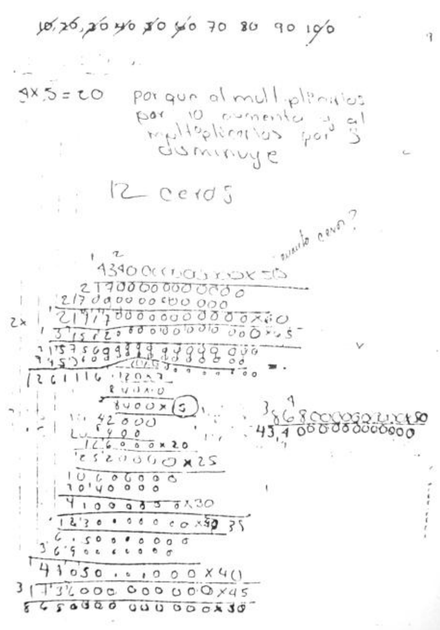
5.2 Problemas.

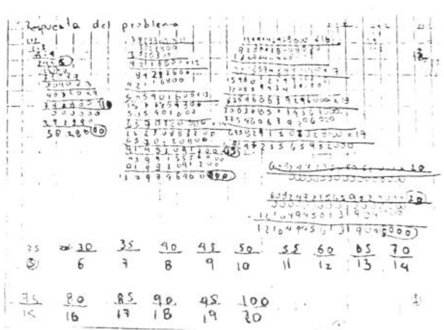
Aclaración: Por los objetivos que se persiguen en el presente trabajo, nos dedicamos a observar con más detalle la respuesta que dieron los alumnos cuya estrategia para resolver el problema fue incompleta o pobremente implementada, así como aquellos que lo resolvieron.

Con la finalidad de ampliar el abanico de posibilidades que resuelven el problema, o para ayudar a avanzar hacia la solución, sugerimos en cada estrategias mostrada, una(s) pregunta(s) que pueden ser planteadas bajo el contexto de discusión del procedimiento que se muestra.

PROBLEMA 1

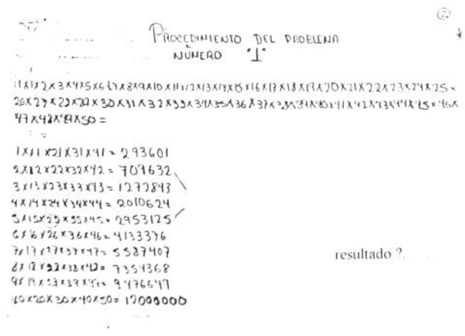
Existen problemas de matemáticas, que para hallar su solución se requiere que en el proceso queden resueltos ciertos problemas o ejercicios intermedios, que, bajo una observación adecuada ayudan a avanzar hacia la solución del problema original. Sin embargo, sucede muy frecuente que la solución de estos problemas parciales se toma como la solución del planteamiento inicial, dejando inconclusa una buena estrategia que puede ser continuada o mejorada con una serie de cuestionamientos que permitan continuar hacia la solución.





En los procedimientos que se muestran, nótese que al tomar solo los múltiplos de 5 simplifican el problema, sin embargo no se observa los casos especiales del 25 y 50.

Pregunta: ¿Cuáles son los múltiplos de 5 que al ser tomados como factores generan más de un cero al final del resultado?

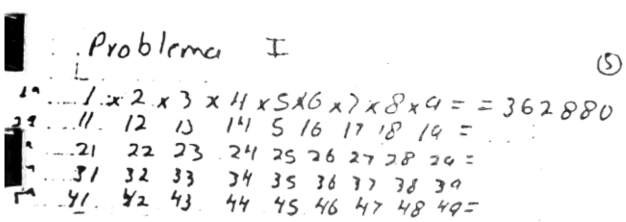


El procedimiento que se muestra, parecido al anterior, salvo por las multiplicaciones que se realizan, le permite inferir, pero de manera equivocada, el comportamiento del problema, cometiendo el mismo error de no observar los casos de 25, 50, 75 y 100.

Pregunta: Al multiplicar el último resultado que obtuviste * por 25, notarás que al final del resultado no aparecen cinco ceros sino seis ¿a qué lo atribuyes?

Además de abrir la puerta a los enteros modulo 10, la estrategia anteriormente mostrada permite plantear la ***pregunta***: ¿cuál pareja de los productos obtenidos anteriormente, al multiplicarse generan ceros al final del resultado?

El primer producto de este caso, permite ver que las multiplicaciones por 10, o por alguno de sus múltiplos, no son los únicos casos que generan ceros en el resultado.



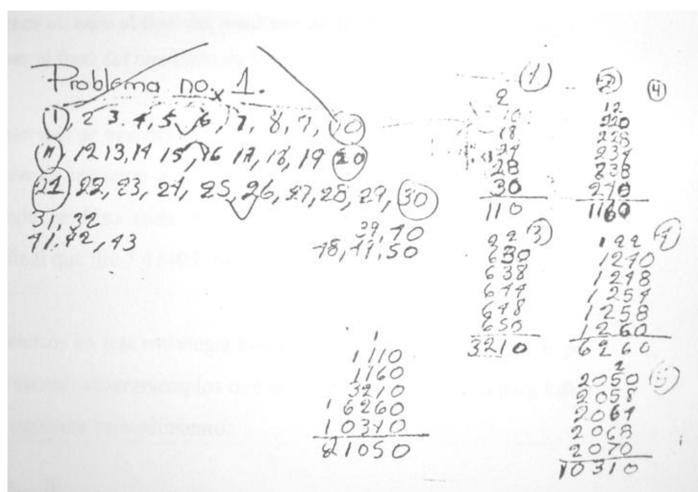
En las operaciones realizadas en el primer caso, ***pregunta***: ¿en qué multiplicación aparece el cero que está en el resultado?

Pregunta: ¿Cuáles serían los únicos factores que habría que considerar para saber el total de ceros?

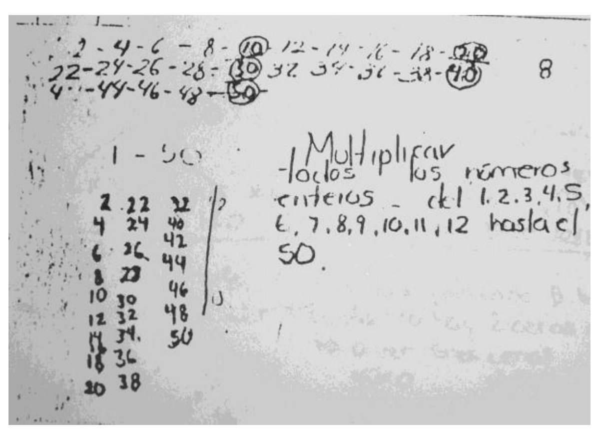
A pesar de la falla que se comete, pues se suman los resultados, la siguiente estrategia nos da la idea de que el número de ceros depende de los factores que son múltiplos de 5.

Pregunta: ¿A qué atribuyes que en las multiplicaciones 5X6. 15X16, 25X26 etc. aparezca al menos un cero al final del resultado?

¿Sera la misma cantidad de ceros que aparecen al final del resultado de 25X26 que de 24X25?

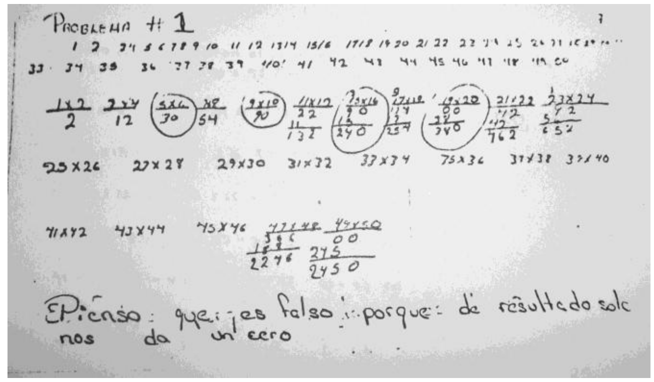


Como importantes son los aciertos en una estrategia, muchas veces lo son más los errores, por la oportunidad que dan de presentar contraejemplos que enriquezcan la discusión para hallar un resultado. Por ejemplo el siguiente procedimiento.

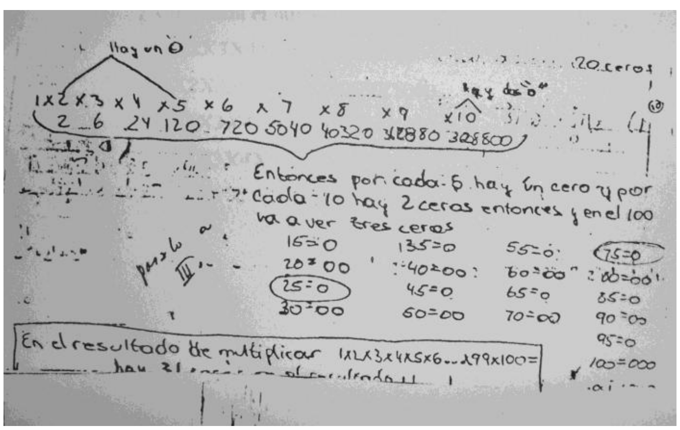


Pregunta: ¿el número de ceros dependerá solo de los múltiplos pares de 5, que ocurre en los casos de 5x6, 15x16 donde un factor es impar?

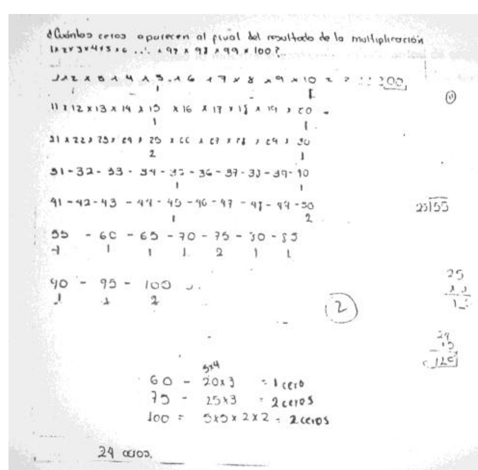
Pregunta: ¿cuántas y cuáles son las parejas de enteros consecutivos que al multiplicarse generan un cero al final del resultado?
¿Qué propiedad tiene uno de los factores en cada pareja?



Notando las diferencias y similitudes entre las ideas que resuelven un problema, es muy importante establecer posibles relaciones entre ellas, mostrando así una integración del conocimiento. Así pues, algunas ideas de los procedimientos anteriores pondrían ayudar a corregir la afirmación de que los múltiplos pares de 5 generan más de un cero al final del resultado, como lo hace el siguiente trabajo:



No se puede descartar la idea brillante que casi siempre existe en una clase de matemáticas, que de igual manera puede ser utilizada para complementar, enriquecer o contradecir a otras también importantes.
¿Cuál sería el número de ceros al final del resultado de :
1X2X3X4X5….X999X100
1X2X3X4X5….X9999X1000
1X2X3X4X5….X99999X10000
1X2X3X4X5….X(10^{n-i})X10^n?

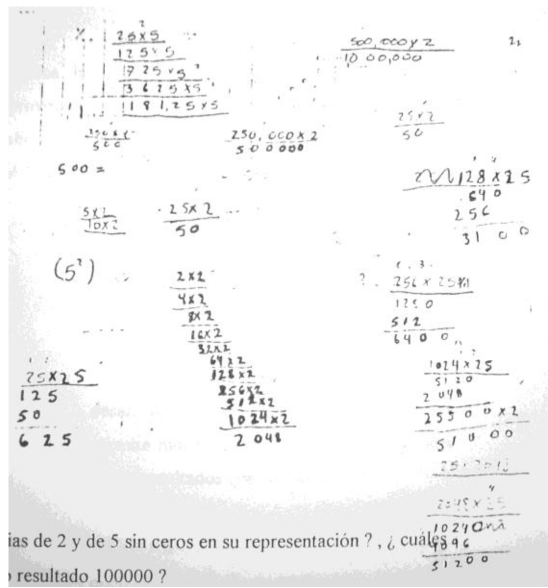


Como lo muestra la gráfica I hubo un grupo de estudiantes que dieron una solución pero sin procedimiento, en este caso el resultado que se dio fue 3.41409364 lo que muestra una limitante por parte de los alumnos para leer notación científica.

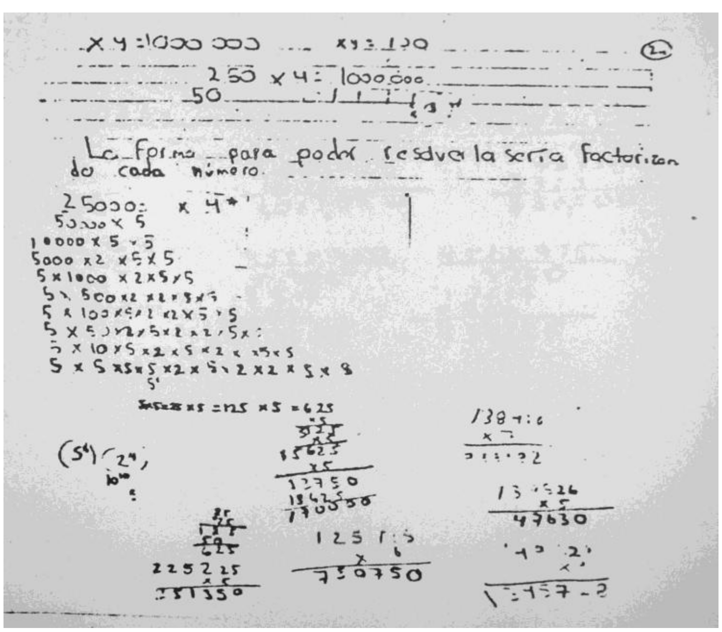
La diversidad de estrategias para resolver el problema I, nos permite plantear una serie de ejemplos y contraejemplos a fin de enriquecer el conocimiento que se adquiere al intentar resolver el problema, y nos da la oportunidad de hacer ver las relaciones que pueden darse entre ellas, mostrando con ello una integración del conocimiento matemático.

PROBLEMA 2

La intuición juega un papel importante en la solución de problemas, solo que en muchos casos el desarrollo de los procedimientos no considera todas las condiciones del problema, provocando con ello una dispersión o trabajo infructuoso, como lo muestra este caso.

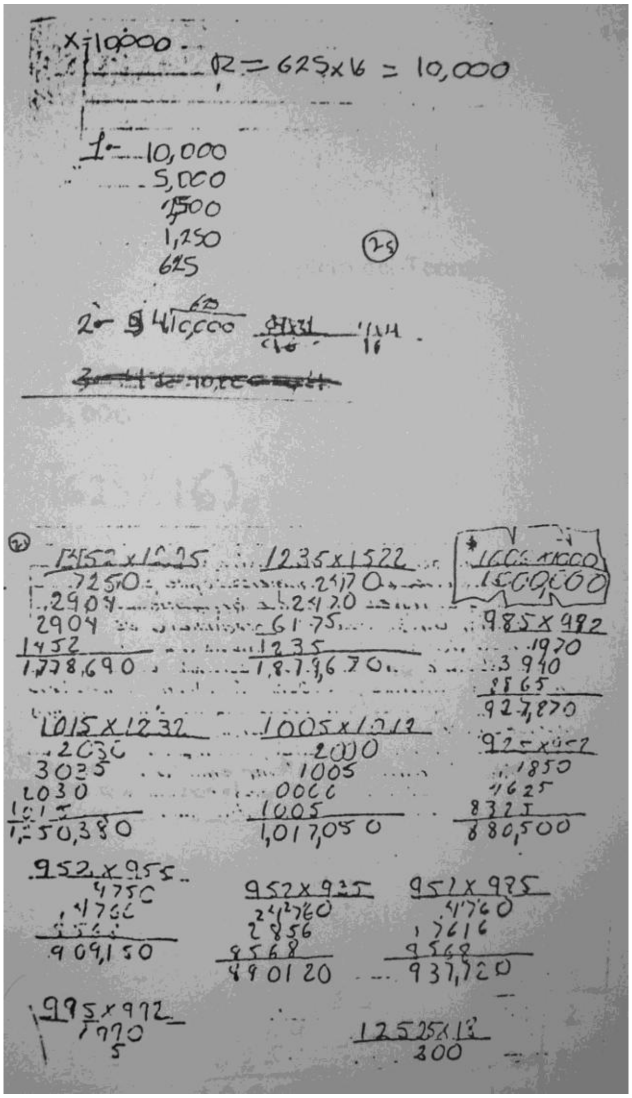


Pregunta: ¿Cuáles son las respectivas potencias de 2 y de 5 sin ceros en su representación?, ¿cuáles de ellas al multiplicarse darán como resultado 100000?



A diferencia del caso anterior, el presente desarrollo deja " casi" resuelto el problema, solo que no se supo como usar los últimos factores para hallar la solución, además no se esta considerando la factorización del 4 que inicialmente obtuvo.

Pregunta: ¿Habrá una manera de agrupar los últimos factores en dos partes, de tal forma que los números que buscas sean el resultado de la multiplicación de cada grupo?



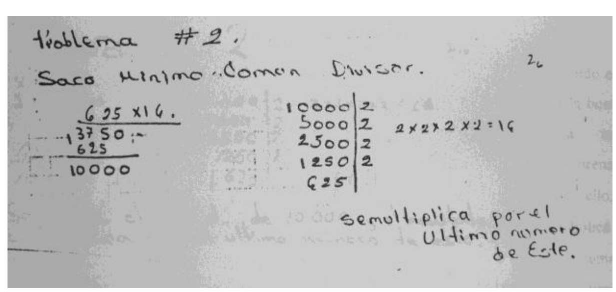
El uso limitado de resultados importantes en la divisibilidad debido a su incomprensión o desconocimiento, provoca cierta inseguridad aun después de haber resuelto el problema, expresiones como ¡Salió el resultado pero no te como le hice! ¡lo importante es resultado y no como llegue a el! son muy frecuentes en un salón de clases donde la enseñanza ha sido más a través de la aplicación de recetas, que por medio del entendimiento y como consecuencia mejor utilización de ellas.

Una revisión de la estrategia y su desarrollo a través de forma retrospectiva, permite muchas veces observar más alcances de las ideas que se usaron para resolver el problema.

Nótese en el primer caso la falta de continuidad en el procedimiento al dividir entre 4.

El trabajo infructuoso en el segundo desarrollo provoca una dispersión pues no se deduce que si 1000 X 1000 = 1000000, la disminución de un factor provoca que el otro se incremente, si mantenemos el mismo producto. Sin embargo podemos tomar algunas de las multiplicaciones para hacer ver que: **una propiedad que tienen los números que se buscan es que uno de ellos es par y el otro múltiplo de 5.**

Los siguientes trabajos por el tipo de representación y argumentación que usan, muestran el uso y entendimiento incompleto del Teorema Fundamental del Aritmética: **"Todo número entero se puede expresar como producto de números primos"**, así

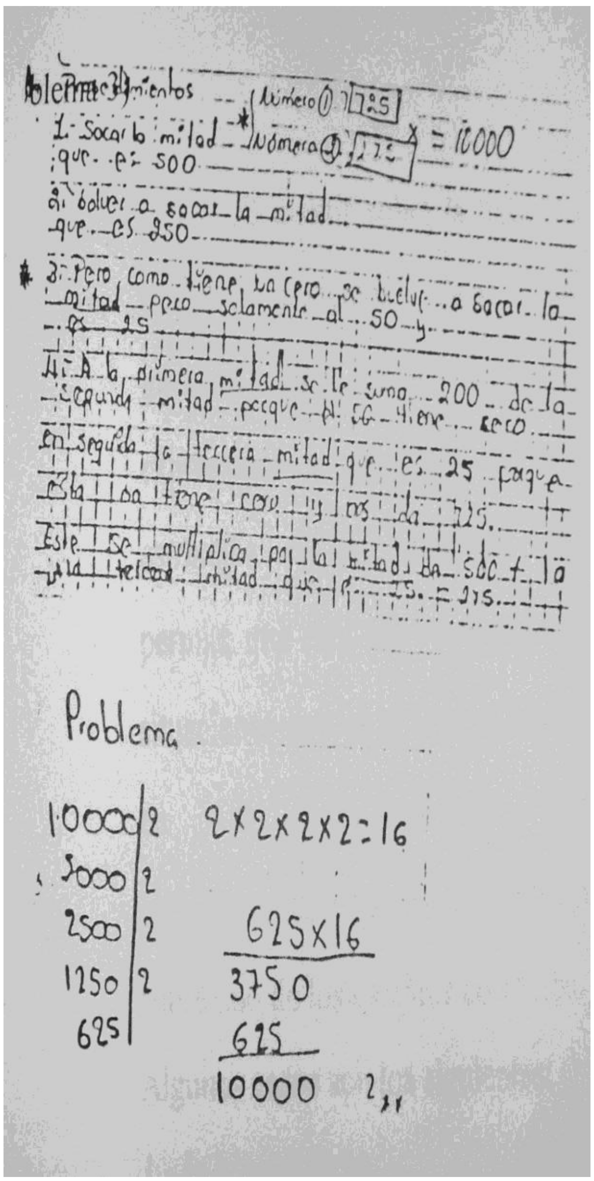


como el concepto de máximo común divisor. En palabras de L. M. Santos Trigo **"Esa matemática informal que ocasionalmente hacen los estudiantes, la tarea del profesor es acercarla cada ves más a una matemática mas estructurada, donde se haga ver el potencial del pensamiento matemático".**

Lo anterior si lo referimos a la forma en como resolvieron el problema los alumnos cuya estrategia se muestra, da pauta a la siguiente

Pregunta: ¿Cuántos y cuáles divisores de 10000 están implícitos en el procedimiento que usas? ¿Cuáles de ellos son números primos?

Véase también observaciones del problema 3.


Procedimientos (Número 1) 125

1.- Sacar la mitad que es 500 (Número 2) 125 = 10000

2.- Volver a sacar la mitad que es 250

3.- Pero como tiene un cero se vuelve a sacar la mitad pero solamente al 50 y es 25

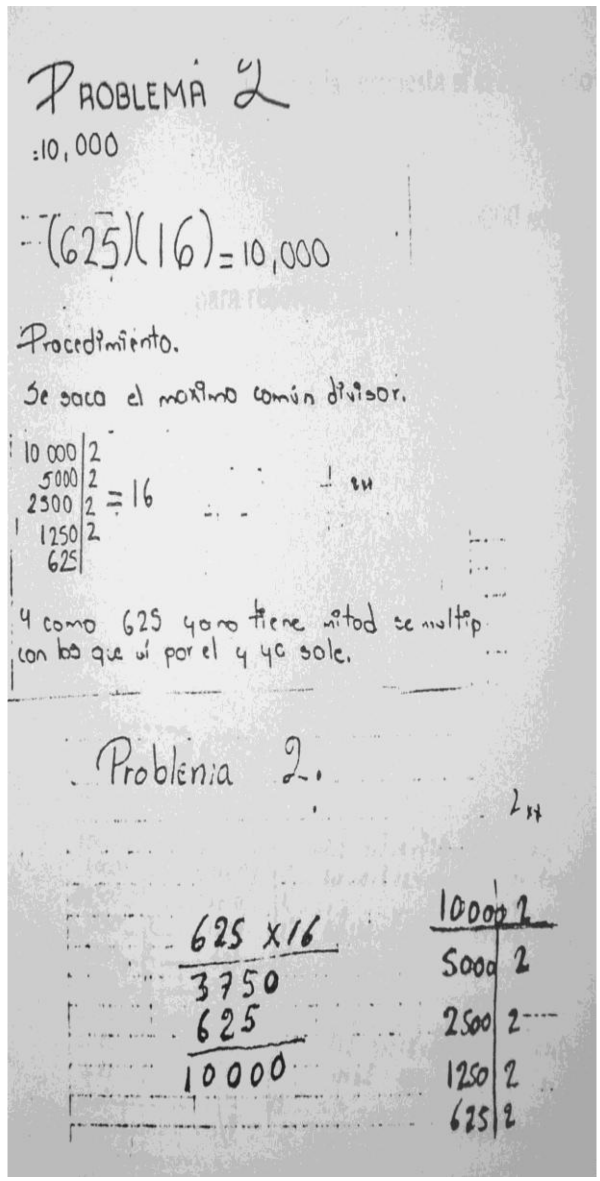
4.- A la primera mitad se le suma 200 de la segunda mitad porque no se tiene cero. En seguida la tercera mitad que es 25 porque esta no tiene cero y nos da 125. Este se multiplica por la mitad da 500 + la tercera mitad que es 25 = 125.

Problema.

10000 | 2
5000 | 2
2500 | 2
1250 | 2
625 |

2×2×2×2=16

625×16
3750
625
10000


PROBLEMA 2

:10,000

(625)(16) = 10,000

Procedimiento.

Se saca el máximo común divisor.

10 000 | 2
5000 | 2
2500 | 2
1250 | 2
625 |

= 16

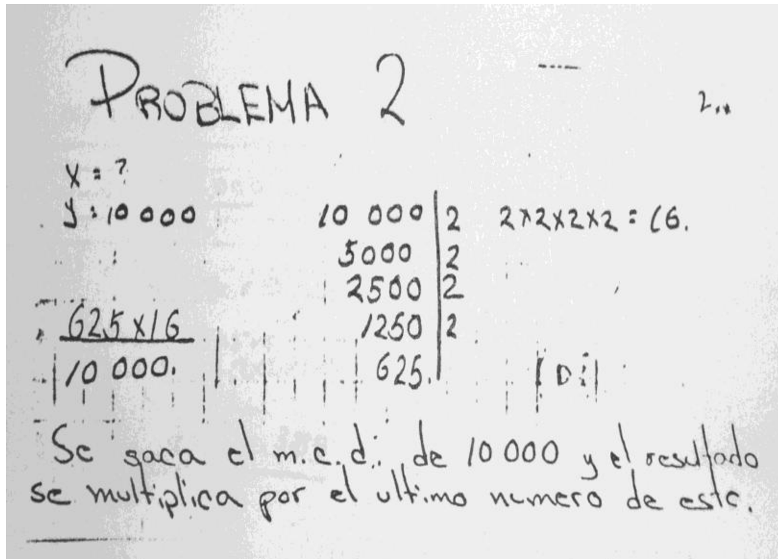
Y como 625 ya no tiene mitad se multiplico con lo que sí por el 4 y ya sale.

Problema 2.

625 ×16
3750
625
10000

10000 | 2
5000 | 2
2500 | 2
1250 | 2
625 | 2

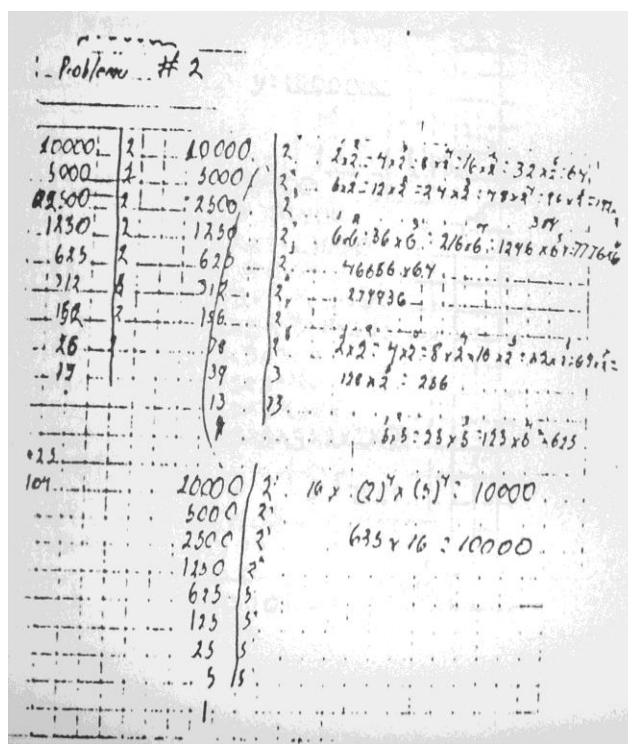
Cuando el uso de una notación en la búsqueda de un resultado esta antecedido por la comprensión de los conceptos que ello involucra, la parte simbólica pasa a ser un buen complemento necesario del aprendizaje, sin embargo el manejo de diagramas, tablas o gráficas sin previa discusión de conveniencia para su uso provoca un proceso mecánico en la adquisición del conocimiento, esto seguido de una memorización de casos pero sin una actitud reflexiva.



Pregunta: ¿Cuál sería la respuesta si el resultado hubiese sido 100,1000.1000000.100000000?

Dos divisores de 10000 son 40 y 100 ¿cómo los obtendrías del desarrollo que hiciste para resolver el problema?

Al insistir sobre la notación, también podemos decir que, mientras la forma en que expresamos el desarrollo de una estrategia o un resultado nos permita que esta sea reutilizada en situaciones nuevas que se presenten en la construcción del conocimiento, estamos instruyendo sobre uno de los caminos correctos. Algunos casos son los siguientes:



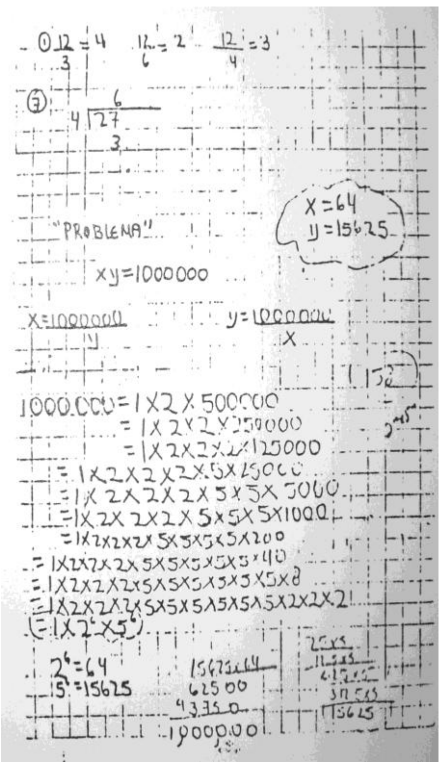
1. Si a,b son dos enteros, entonces **[a,b|=axb/(a.b)**, siendo [a,b| la notación para el mínimo común múltiplo de los enteros a y b, y (a,b) la notación para el máximo común divisor.

   Pregunta: ¿Cómo determinarías al máximo común divisor, y al mínimo común múltiplo de 16 y 625, haciendo uso de la notación que utilizaste en tu desarrollo?

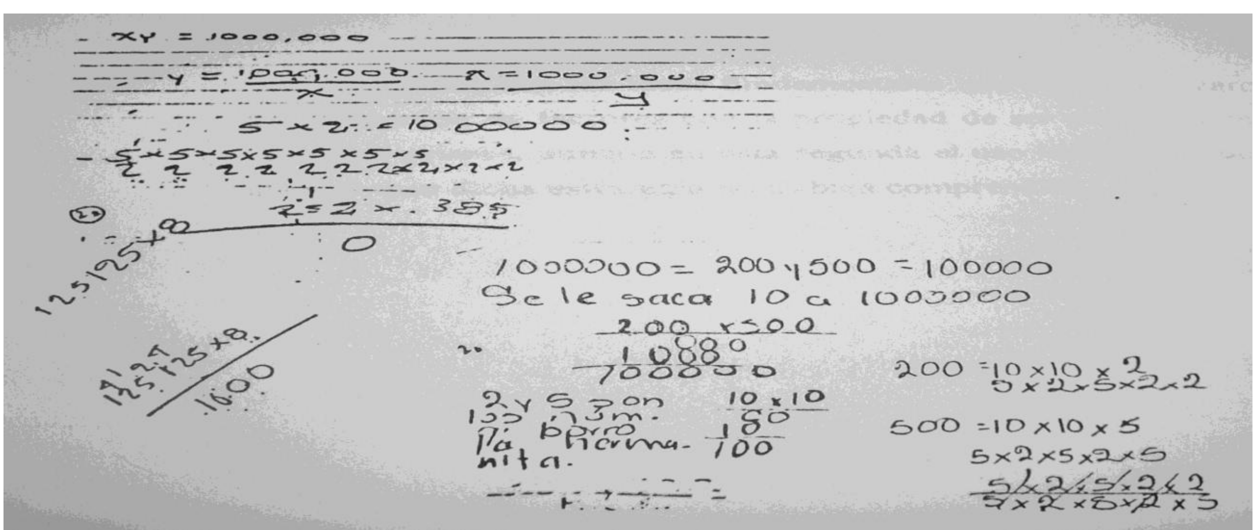
2.-El algoritmo

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

no siempre permite ver con claridad la divisibilidad del 20 entre 4, a menos que se haga ver que, todos los divisores del 20 están implícitos en los productos de números primos obtenidos en su desarrollo.



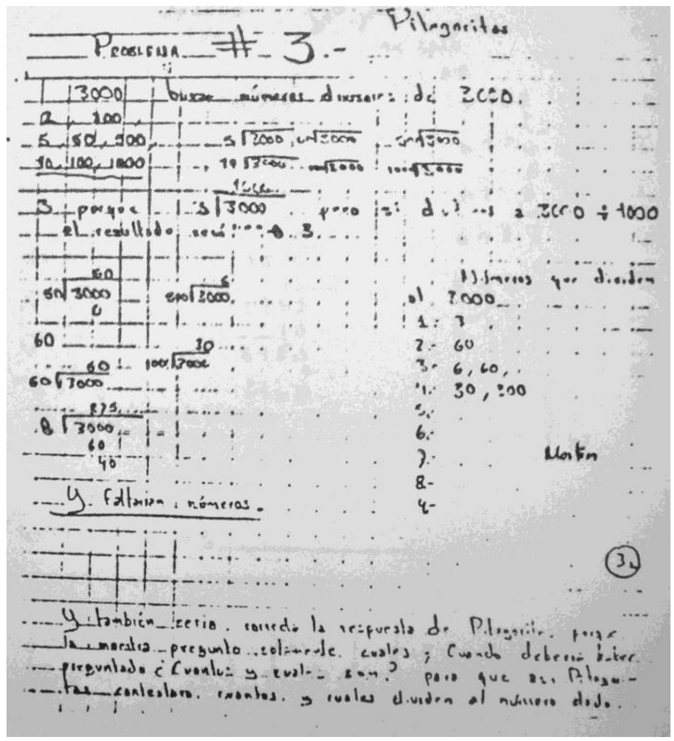
La forma en que se intenta o resuelve el problema en estos tres últimos casos, da pauta a una de las tareas importantes en la construcción del conocimiento matemático, que es el establecimiento de relaciones entre tales estrategias, y la identificación de los conceptos fundamentales que se usan en ellas. Esto puede llevar al estudiante al enunciado de conjeturas, que al ser tratadas adecuadamente, aterrizan a lo deseado por todo matemático, el enunciado de un teorema, el del Aritmética, por ejemplo.

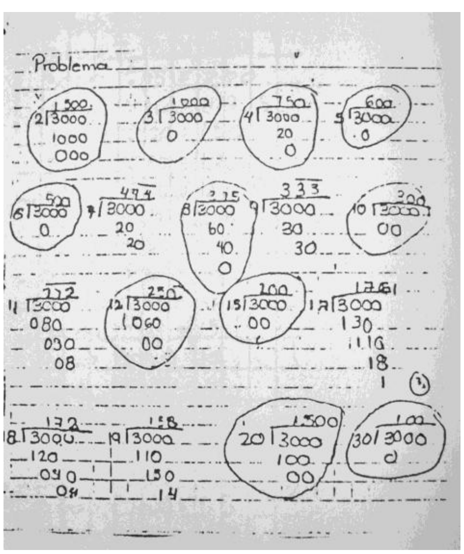


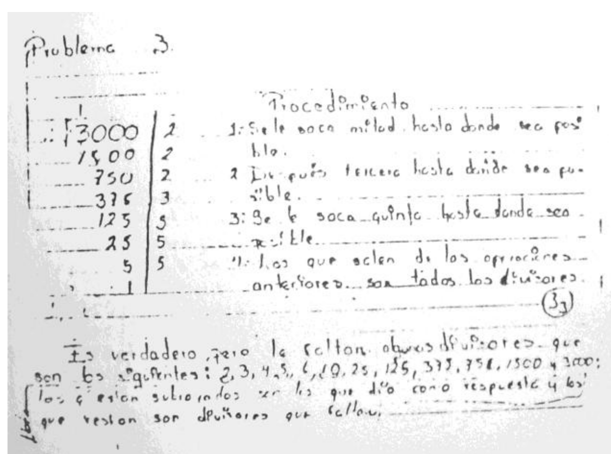
Fueron dos las ideas fundamentales que se utilizaron para resolver el problema 2: la elección de factores con la propiedad de ser potencies de 5 y 2, y factorización en números primos, aunque en esta segunda, el uso inadecuado de algunos conceptos nos hace afirmar que dicha estrategia no es bien comprendida.

PROBLEMA 3

El descubrimiento de un resultado o ley, que describa el comportamiento de algún fenómeno o solución de un problema, casi siempre viene antecedido por un registro de operaciones, la observación de las posibles relaciones que puedan darse entre ellas, además de una visión retrospectiva al desarrollo que involucra tales operaciones; lo nos da la posibilidad de ampliar los alcances del conocimiento que se obtiene, y que puede ser utilizado en casos análogos al que se trata.



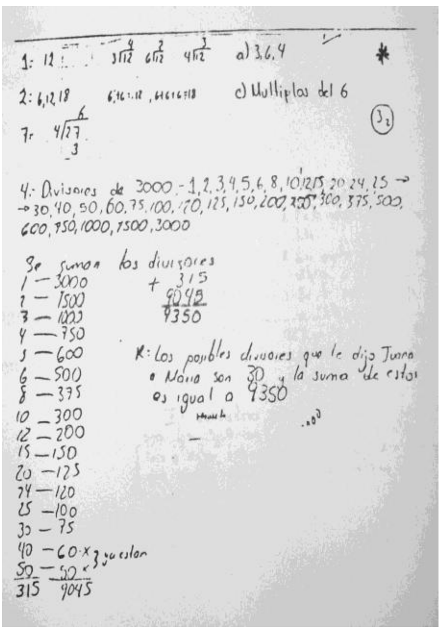


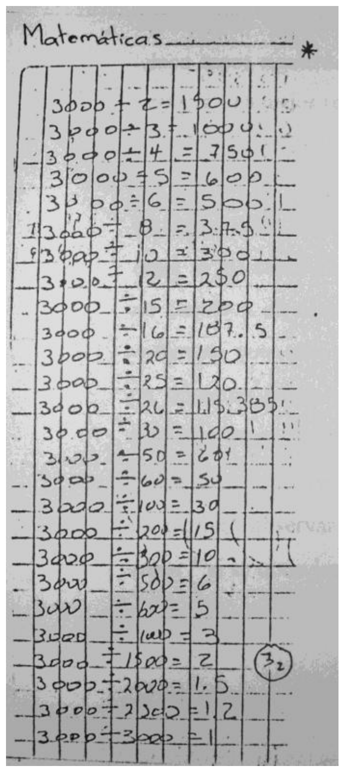


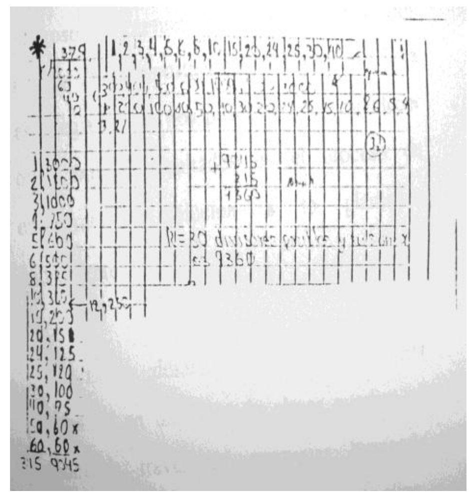
Cabe mencionar en esta parte de la tesis que: Al resaltar las operaciones significativas en el desarrollo de una estrategia, se permite plantear una serie de preguntas con la finalidad de mejorar el conocimiento que de ello se adquiere, y en el caso de que esto se presente ante un desarrollo más acabado, pero no siempre bien comprendido, tenemos la oportunidad de crear un cosmos de actividad matemática en el salón de clase.

Lo anterior lo referimos a los diferentes desarrollos que presentaron los alumnos al resolver el problema tres.

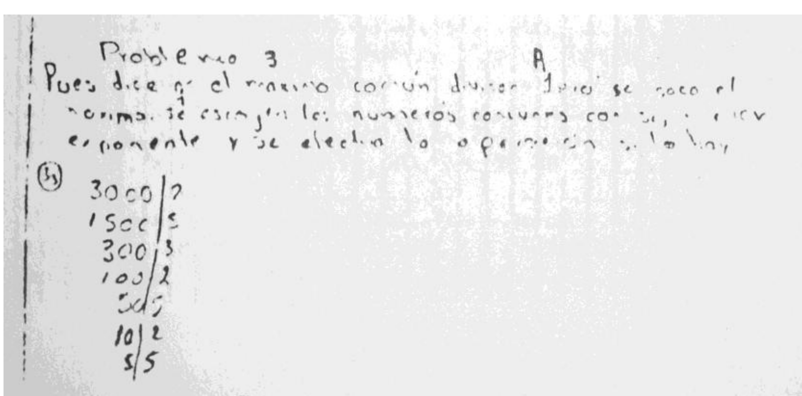
Caso 1: Realizando divisiones.

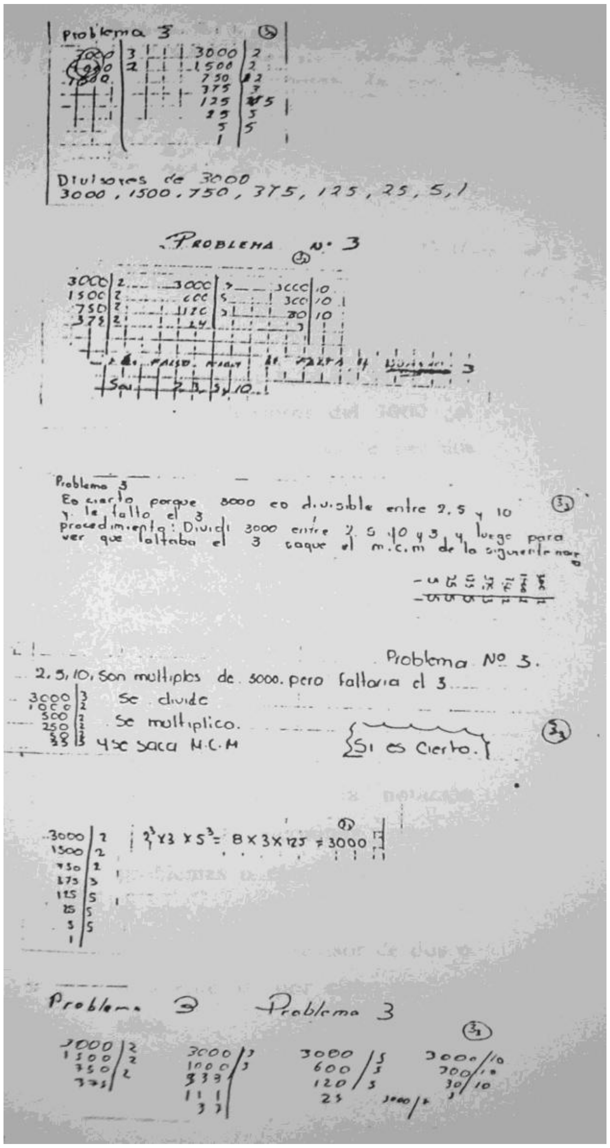


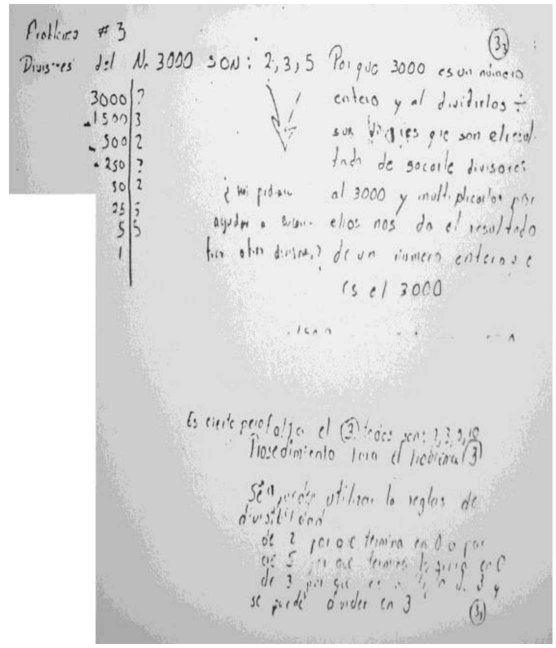




Caso 2: "Técnica de la rayita para encontrar divisores"



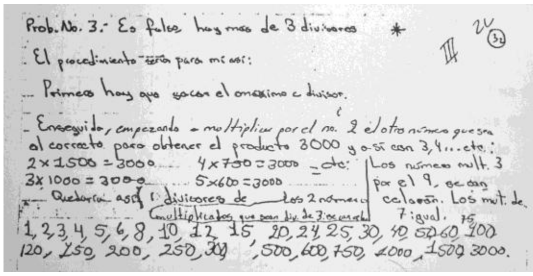




Nótese que el trabajo realizado en el caso 1, presenta un desarrollo que da una respuesta incompleta, pero que al compararse con los desarrollos del caso 2, se observa una mejor respuesta originada por una mayor cantidad de operaciones.

Es importante señalar que la respuesta dada en el caso 1, supera en cuanto a efectividad a la del caso 2 que utilizaron descomposición en números primos, pero de forma muy limitada, pues la notación usada en el desarrollo por nueva cuenta mencionamos no permite observar divisores que en el caso 1 si se obtuvieron.

Esta diferencia de desarrollos, uno que involucra más trabajo operativo y otro más sintetizado, pero en este caso no bien comprendido, muestra que el aprendizaje con mucha frecuencia ha sido más a través de una sintetización de conceptos, sin pasar previamente por un análisis del trabajo operativo. Esta reflexión la compartimos con la idea de G. Polya, “en el aprendizaje de contenidos matemáticos, no puede haber atajos”



Prob. No. 3.- Es falso hay más de 3 divisores

El procedimiento será para mí así:

Primero hay que sacar el máximo divisor.

Enseguida, empezando a multiplicar por el no. 2 el otro número que sea el correcto para obtener el producto 3000 y así con 3, 4, ... etc.:

2×1500 = 3000 ... 4×750 = 3000 etc.

3×1000 = 3000 ... 5×600 = 3000

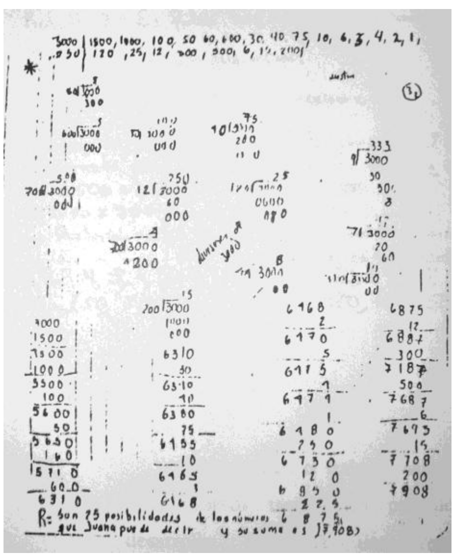
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 100, 120, 150, 200, 250, 300, 500, 600, 750, 1000, 1500, 3000.

No nos referimos a un análisis riguroso conceptual, sino a un esfuerzo por resaltar datos importantes en el desarrollo de la estrategia, lo que nos puede llevar a establecer otros buenos resultados en el proceso de encontrar la solución a lo planteado inicialmente.

Estos desarrollos en caso de ser planteados en un salón de clases pueden ser guiados a través de preguntas buscando complementar las ventajas de cada uno de ellos.

Pregunta: Los números 8, 24, 40 y 75 son también divisores del 3000 ¿el desarrollo que usas te permite encontrarlos? ¿Cómo?

Pregunta: De la lista de divisores que obtuviste ¿cuáles crees son los más importantes que te permitan expresar a los demás en términos de éstos?

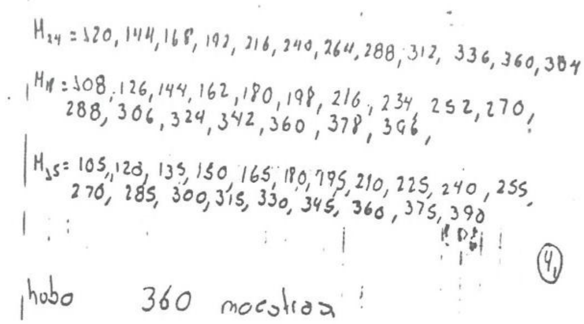


Pregunta: ¿El desarrollo y la notación usada te permiten resolver problemas o ejercicios análogos al que se trata? por ejemplo: el máximo común divisor de dos o más enteros, por citar uno de ellos.

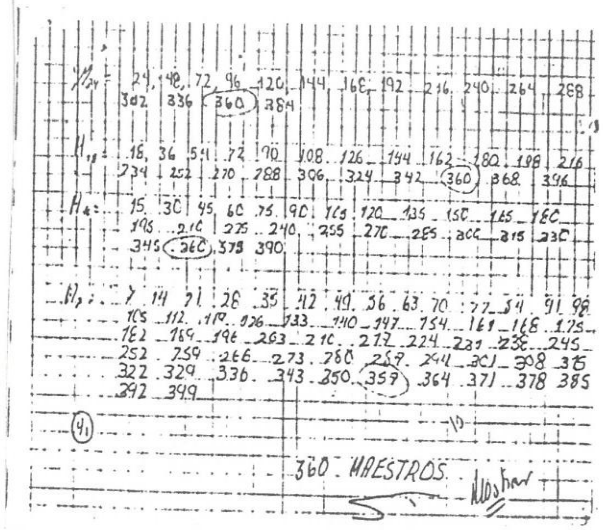
La factorización en primos fue también una estrategia muy utilizada al resolver el ejercicio tres, aunque no aprovechada de la mejor manera, pues en la mayoría de los casos se tiene la idea de que los únicos divisores de 3000, son los números primos que lo dividen y los cocientes que se obtienen al dividirlo entre estos, dejando fuera a otros divisores que no son contemplados en el procedimiento

PROBLEMA 4.

Ocurre frecuentemente en la enseñanza de las Matemáticas, que la calificación de los buenos métodos para su aprendizaje están respaldados por el hecho de dar la respuesta correcta a un problema, en un número reducido de pasos, casi siempre sin tomar en cuenta que en la síntesis de un proceso se deben resaltar las ideas fundamentales que permiten que una propiedad, ley o teorema dé respuesta satisfactoria a un planteamiento en un mínimo de pasos.

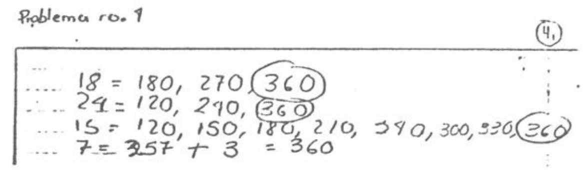


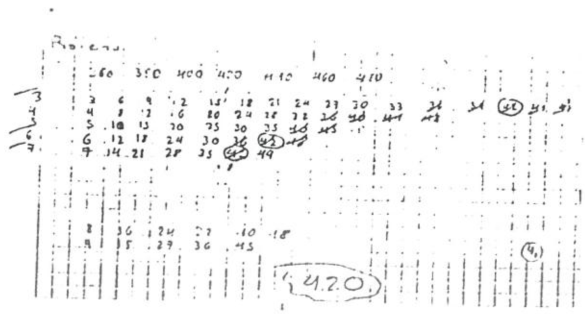
Al hablar de la generalización de una propiedad, que al conjeturarse, y posteriormente demostrarse dando pie a un teorema, podemos pensar en la síntesis de un proceso que ha sido comprendido anteriormente, y que siempre implica nuevos aprendizajes que tienen más valor que aquellos que se adquiere por el simple hecho de enunciar y repetir, sin descubrir.



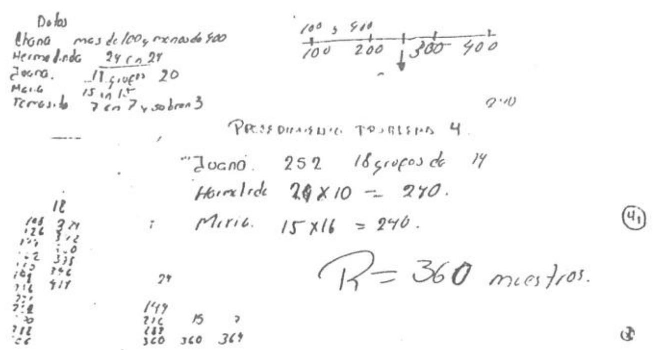
Al insistir sobre el descubrimiento y generalización de resultados, se puede lograr que el aprendizaje sea más permanente que en el caso de un aprendizaje pasivo, haciendo menos, escuchando y repitiendo más, permanencia que posibilita la transferencia del conocimiento a situaciones parecidas a la que se trata, haciendo más significativo el pensamiento matemático que de ello se deriva.

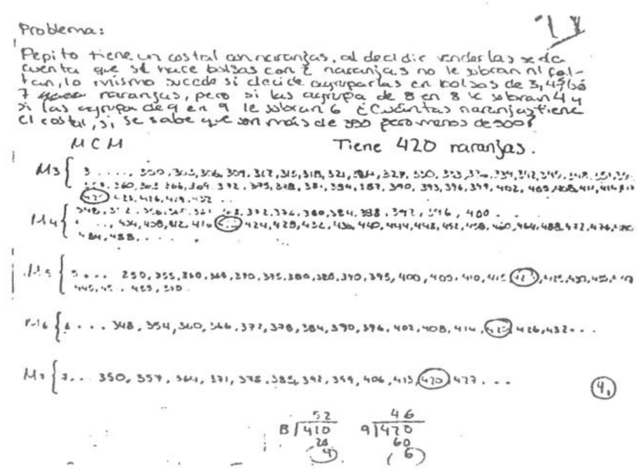
Si la síntesis a la cual nos referimos es complementada con una serie de preguntas a la respuesta o a la estrategia utilizada, seguramente con esto fomentaremos en el estudiante la capacidad de usar el conocimiento en la construcción de nuevos conceptos y procesos, lo que no ocurre mientras la formación del estudiante se quede con la simple posesión de resultados.

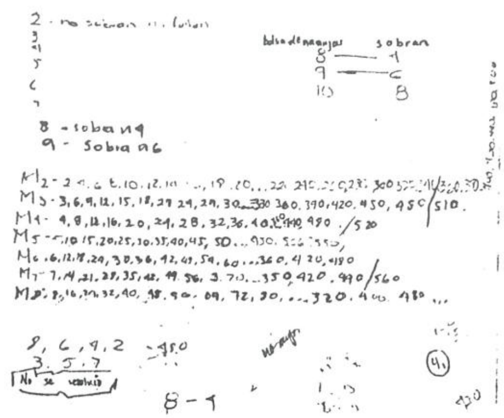


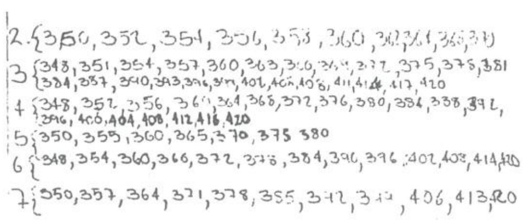


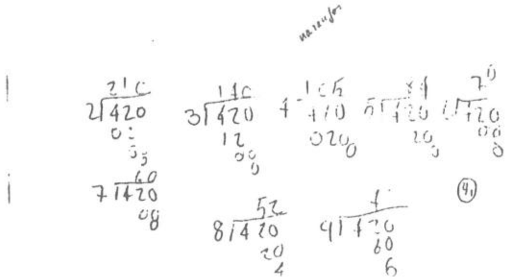
Si referimos lo anterior al trabajo que se realizó en los ocho primeros casos que intentaron resolver el problema cuatro, notaremos condiciones aceptables para cuestionar el desarrollo de la estrategia que se está usando, esto con la finalidad de guiar al estudiante al encuentro de una ley o teorema, que pueda dar la respuesta utilizando un desarrollo más productivo, pero, sin negar la importancia del trabajo prolongado no disperso, donde seguramente existen buenas ideas, que discutidas alrededor de ciertas preguntas, sirven para detectar limitantes y dificultades para avanzar hacia otros descubrimientos, permitiendo además que el estudiante adquiera una actitud reflexiva hacia el trabajo realizado mejorando así sus ideas matemáticas en la solución de problemas.

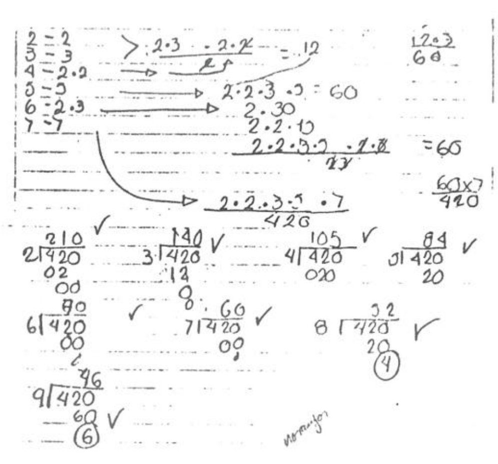










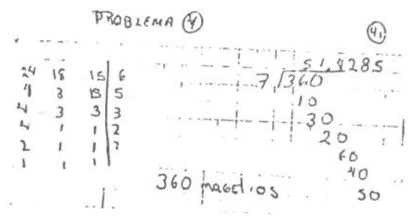


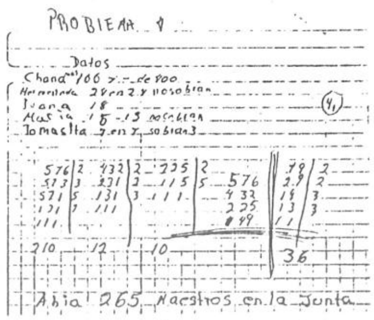
Pregunta: ¿Cuál es el concepto fundamental involucrado en la solución del ejercicio?

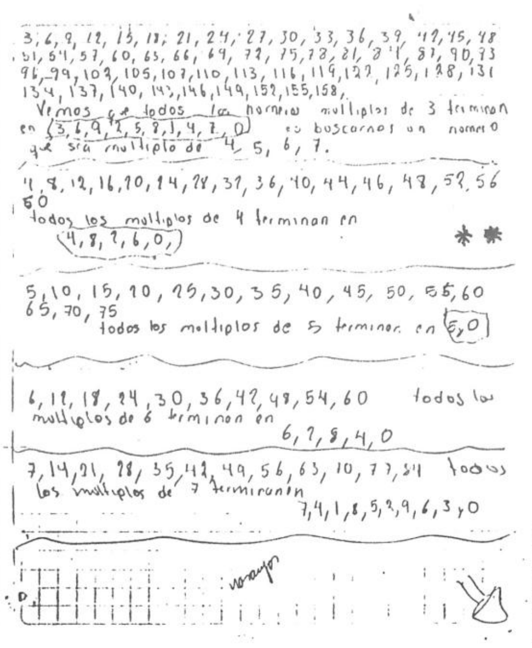
Pregunta: ¿Qué relación habrá entre tu procedimiento y la estrategia donde se caracteriza al último digito de los múltiplos de 4 o 5?

Pregunta: ¿Será necesario escribir todos los múltiplos que hallaste para dar con la solución del ejercicio?

Es importante hacer ver la oportunidad de discusión que se tendría en el salón de clases al presentarse la estrategia utilizada en los casos marcados con *, oportunidad que nos permite establecer ideas complementarias a todos los casos que intentaron resolver el ejercicio.







Una deliberación guiada al resolver un problema, a veces da al alumno la posibilidad de explorar una gama de conceptos relacionados con los que utiliza en el desarrollo de su estrategia, y también colabora a tener una visión más amplia de los recursos matemáticos que se utilizan al resolver problemas. Véase el caso del trabajo donde el dígito de las unidades abre la puerta a los enteros modulo 10.

Pregunta: ¿Habrá un múltiplo de 6 u 8 que sea impar?

Pregunta: ¿En qué dígito termina un múltiplo común de 3,4,5,6,7? ¿cuál crees que sea?

6. CONCLUSIONES

6.1 RESUMEN

1.- Existe una confusión en el manejo de los conceptos de divisor, múltiplo, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, y número primo entre otros, al resolver los problemas de divisibilidad.

2.- A pesar de la confusión en el uso de conceptos, la diversidad de estrategias en su mayoría incompletas o no bien utilizadas, muestran condiciones aceptables para abordar la enseñanza a través de la resolución de problemas.

3.- Se ha desaprovechado la cultura matemática que flota en un salón de clases, limitando así el potencial matemático que en la mayoría de los casos existe en un grupo de estudiantes.

4.- Se ha usado de manera muy limitada el Teorema Fundamental de la Aritmética, en la solución de problemas de múltiplos y divisores.

5.- Es necesario que al abordar la enseñanza a través de la solución de problemas se conozca lo que se va a enseñar y un poco más.

6.3 PROPUESTA METODOLÓGICA

Sin abandonar la currícula vigente, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede mejorase si consideramos los siguientes puntos:

- Búsqueda y elección de ejercicios y problemas adecuados, en cuyo procedimiento para resolverlos surja la necesidad de incorporar los temas del programa.

- Abrir la discusión entre los diferentes grupos de trabajo buscando posibles relaciones entre las estrategias que resuelven el problema.

- Aprovechar de la mejor manera los errores cometidos por el alumno, a través de la presentación de contraejemplos.

- Considerar que la matemática es un lenguaje que nos permite modelar situaciones concretas, y como tal debería enseñarse

Se tiene recopilado el trabajo que realizaron los estudiantes en lo que respecta a la encuesta y a la solución.

6.2 PROPUESTA DE EJERCICIOS y PROBLEMAS.

PROBLEMAS

1. Pepito tiene 8 años y su mamá tiene menos de 50. al pedirle el papá a Pepito y a su hermana que escriban la edad de su mamá, la hermana lo hace bien pero Pepito lo hace intercambiando el orden de los dígitos que son diferentes de cero, ambos dan su número a papá que los resta obteniendo, como resultado 27.¿Cuál es la edad de la mamá?
2. Un faro emite tres colores distintos:
- Rojo cada 16 segundos
- Verde cada 45 segundos
- Blanco cada 2 minutos 20 segundos

  Suponiendo que los tres colores se emiten simultáneamente a las 12 pm Indique los instantes del día en que:
- Se emiten rojo y verde
- Se emiten rojo y blanco
- Se emiten verde y blanco
- Se emiten los tres colores

3. Dos enteros x, y, son llamados equivalentes, y se denota x~y, si ellos son divisibles por los mismos primos. Ejemplos:
   a) 2 ~ 4
   b) 12 ~ 6
   c) 10 ~ 50.

Demostrar que:

a) 10~80
b) 10 no es equivalente a 90
c) Si x ~ y entonces $x^n \sim y^n$

4. Se llaman múltiplos consecutivos de 3 a los que vienen uno después del otro en el orden natural. Ejemplo 12 y 15 son múltiplos consecutivos de 3.

a) Encuentre tres múltiplos consecutivos de 3 cuya suma sea igual a 333.
b) ¿Existen tres múltiplos consecutivos de 3 cuya suma sea igual a 1997?

5. Dos atletas recorren una pista circular. Ambos parten simultáneamente de la salida que llamaremos M. El tiempo que tarda el primero en dar una vuelta es 6 minutos menos del tiempo que larda el segundo. Si se encuentran por primera vez en M a 56 minutos de haber partido de M., encuentre el tiempo que tarda cada uno en dar una vuelta a la pista.

6. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la siguiente ecuación 2x + 5y = 11?
7. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a 100!?
   Nota: 100! = 1x2x3x4...x98x99x100.

8. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (x, y) satisfacen la ecuación x/19 + y/95 = 1?
9. ¿Cuántos divisores tiene el número 10800?
10. Demuestre que n4 – n2 siempre es divisible por 12 para cualquier entero positivo.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Sugerencias para resolver problemas
   National Council of Teachers of Mathematics
   Temas de Matemáticas. No. 17.
   Ed. Trillas
2. Como Plantear y Resolver Problemas
   G. Polya
   Serie de Matemáticas
   Trillas
3. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas.
   Luz M. Santos Trigo
   CINVESTAV
   Departamento de Matemática Educativa México 1995.
4. La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos
   L. Resnik y W. Ford
   Editorial Paidos.
5. La utilización de analogías en el proceso didáctico.
   Juan Manuel Nole.
   Universidad de Panamá, Dpto. de Matemática Educativa.
   Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe para la formación de profesores.
   Cuernavaca, Morelos. México. Julio 1992.
6. La división, su sentido y significado. Un estudio experimental desde la óptica constructivista.
   Eva Moreno Sánchez.
   DIE-CINVESTAV.
   Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe para la formación de profesores.
   Cuernavaca, Morelos. México. Julio 1992.
7. Poniendo el constructivismo a trabajar, llenando el boquete entre la teoría y la práctica.
   Edward Dubinsky.
   Congreso Nacional de la SMM. Universidad de Aguascalientes.
   México. 1997.
8. Resolución de problemas, metodología en la enseñanza.
   Juan Carlos Piceno Rivera.
   Congreso Nacional de la SMM. Universidad de Aguascalientes.
   México. 1997.
9. Introducción a Piaget.
   Pensamiento-Enseñanza-Aprendizaje.
   E. Labinowics.

Editorial Addison-Wesley-Iberoamericana.