BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

COHOMOLOGÍA DE GRUPOIDES ORDENADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

José Antonio Chávez Castillo

DIRECTOR DE TESIS

Prof. Ángel Contreras Pérez

Puebla, Pue. Junio de 2016

A mis padres Victoria y Antonio

Agradecimientos

A mi asesor, el profesor Ángel Contreras Pérez
A mi jurado, el Dr. Hugo Juárez Anguiano y
el M.C. Jaime Badillo Márquez .

Cogito ergo sum.
R. Descartes

Índice general

Introducción

Una de las ideas que persiguen las distintas homotopías abstractas es dar una axiomática en categorías generales de forma que se obtengan categorías homotópicas en el sentido de J. H. C. Whithead con la axiomática clásica para espacios topológicos, donde partiendo de dicha categoría se establece una relación de equivalencia (relación de homotopía) entre los morfismos (aplicaciones continuas) compatible con su composición, de forma que se pueda crear la categoría cociente (categoría de homotopia) en el sentido descrito por S. MacLane en [12]. De esta forma se obtiene una clasificación de los objetos de la categoría (equivalencia de homotopías). Philip Higgins es un pionero de la idea de usar grupoides en topología, y de interpretar ideas de teoría de grupoides en terminos topológicos. Una explicación de su trabajo se encuentra en su libro [6]. El enfoque de Higgins fue desarrollado por Ronnie Brown en [4], en varias direcciones.

En [20] se introduce la noción de homotopía para grupoides ordenados y se muestra que la teoría de homotopía abstracta puede ser usada para definir una noción conveniente de equivalencia homotópica de grupoides ordenados y por tanto de semigrupos inversos. También en [20], como una aplicación de esta teoría, se demuestra un teorema de homomorfismos de semigrupos inversos, el Teorema de Fibración de Steinberg, el cual afirma que cualquier funtor ordenado entre grupoides ordenados se factoriza en una ampliación seguida de un funtor sobreyectivo estrella ordenado. Este teorema es una formulación fuerte de un teorema bien conocido en topología, el cual afirma que cualquier función continua puede factorizarse en una equivalencia homotopica seguida de una fibración. Se demuestra que esta factorización es isomorfa a la construida por Steinberg en su "Teorema de Fibración", originalmente probado usando una generalización de categoría derivada de Tilson ([19]). La clasificación de semigrupos salvo isomorfismo es una proposición más realista que para grupos, porque los semigrupos son justamente más abundantes. Una situación similar aparece en topología, y como un resultado una noción menos rigurosa es usada para clasificar espacios topológicos, a saber, la equivalencia homotópica. En [20] se establece la estructura necesaria para definir el análogo de equivalencia homotópica para semigrupos inversos y se redemuestra el Teorema de Fibración de Steinberg usando únicamente ideas de teoría de homotopía

En el desarrollo de la teoría mencionada se aplican métodos de topología algebraica a semigrupos inveros. Una importante característica de tal teoría, es que ésta no se desarrolla en la cateoría de semigrupos inveros sino en la categoría de grupoides ordenados. Una definición formal de un grupoide ordenado está dado en [10], pero aproximadamente es un grupoide en el sentido de teoría de categorías enriquecidas[1]. La cateoría de semigrupos inversos es isomorfa a la categoría de grupoides inductivos, la contrucción se da en [10]. La existencia de tal isomorfismo sugiere trabajar en la categoría de semigrupos inversos antes que en la de grupoides ordenados. Sin embargo, en [10], Lawson argumenta que muchas construcciones que involucran semigrupos inversos pueden ser incluidas para trabajar en la categoría más grande de grupoides ordenados. Cualquier semigrupo inverso S puede ser considerado como un grupoide ordenado con respecto a su producto restringido ([10], proposición 3.1.4). De esta manera la categoría de semigrupos inversos puede ser encajada en la categoría de grupoides ordenados. Así [20] es una apli-

[1] Se llaman categorías enriquecidas cuando el conjunto de morfismos de cada par de objetos es una categoría pequeña.

cación del enfoque de grupoides ordenados a semigrupos inversos.

La cohomología de semigrupos inversos fue introducida por Lausch [9], quien la utilizó para clasificar extensiones de semigrupos inversos. En [11], Loganathan demuestra que la cohomología de un semigrupo inverso puede ser derivada como la cohomología de una conveniente categoría pequeña. De manera independiente, J. Renault [16] generalizó la cohomologia de grupoides a semigrupos inversos, de esta manera obtuvo una cohomología diferente a la de Lausch y Loganathan.

En esta tesis, siguiendo el enfoque de Loganathan, se muestra que se puede definir la cohomología de un grupoide ordenado G como la cohomología de una conveniente categoría pequeña $\mathbf{C}(G)$, de esta manera se generaliza la cohomología de semigrupos inversos debida a Lausch y Loganathan. Finalmente se generaliza la cohomología de Renault de semigrupos inversos y se muestra que son tipos especiales de las extensiones ya construidas. De esta manera se demuestra que los segundos grupos de cohomología de Renault son subgrupos de los de Lausch. La tesis se desarrolla de la siguiente manera. Con el objetivo de hacer lo más autocontenido posible este trabajo, se agrega el capítulo 1 y un apéndice, en los cuales se citan las definiciones y resultados necesarios concernientes a categorías, categorías abelianas, semigrupos inversos y grupoides ordenados. En el capítulo 2 se muestra como calcular la cohomología de categorías pequeñas. En el capítulo 3 se muestra que la cohomología de un grupoide ordenado G puede definirse como la cohomología de la categoría pequeña $\mathbf{C}(G)$. En el capítulo 4 definimos las extensiones de grupoides ordenados, definimos derivaciones y conjunto de factores, y se muestra que éstos clasifican extensiones. En el capítulo 5 examinamos la cohomología de Renault en un marco de los grupoides ordenados, demostramos que sus extensiones son especiales y que tienen una transversal que preserva orden, de esta manera demostramos que los segundos grupos de cohomología de Renault son subgrupos de los grupos de cohomología obtenidos por Lausch.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene un caracter técnico, para un estudio más profundo sobre los temas el lector puede consultar [3], [5], [13] y [21]. De igual manera, para una mayor comprensión de los conceptos que se presentan a continuación sugerimos al lector revisar el apéndice.

1.1. Funtores exactos

Sugerimos al lector revisar las definiciones de categoría, funtor, categoría abeliana, monomorfismo y epimorfismo entre otras, todas ellas dispuestas en el apéndice.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathbf{A}$. Dado otro morfismo $g : Y \longrightarrow Z$, podemos formar la sucesión

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y \xrightarrow{\quad g \quad} Z\,.$$

Diremos que tal sucesión es *exacta* en Y si $ker(g) = img(f)$.
Supongamos que el morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo, como $ker(f) : Ker(f) \longrightarrow X$ tiene la propiedad $fker(f) = 0$, entonces por la proposición A.2.6, $ker(f) = 0$. Ahora consideremos el morfismo en $\mathbf{A}$

$$u : 0 \longrightarrow X$$

cuyo dominio es el objeto cero, entonces $u = 0$. Luego por la proposición A.2.8 $coker(u) = 1_X$, lo cual implica

$$img(u) = img(0) = ker(coker(u)) = 0\,.$$

Por lo tanto la sucesión

$$0 \xrightarrow{\qquad} X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

es exacta.

Ahora supongamos que la sucesión

$$0 \xrightarrow{\qquad} X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

es exacta, entonces $ker(f) = 0$. Si $g : U \longrightarrow X$ es otro morfismo en $\mathbf{A}$ tal que $fg = 0$, existe una única factorización $\phi : U \longrightarrow Ker(f)$ de tal forma que $ker(f)\phi = g$. Luego $0\phi = g$ y por tanto $g = 0$.

Así que f es un monomorfismo en $\mathbf{A}$.
En resumen hemos obtenido la siguiente caracterización de monomorfismos en una categoría abeliana, $f \in \mathbf{A}$ es un monomorfismo si, y sólo si la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en X.
Dualizando:
$f \in \mathbf{A}$ es un epimorfismo si y sólo si la siguiente sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

es exacta en Y.

Diremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión *exacta corta* si es exacta en cada uno de los objetos de la sucesión.
Notemos que si X es un subobjeto de Y y $Z = Y/X$, entonces f es monomorfismo, g es epimorfismo y $gf = 0$, por tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow X \hookrightarrow Y \longrightarrow Y/X \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Definición 1.1.1. Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Diremos que F es un *funtor exacto* si preserva sucesiones exactas cortas.

Definición 1.1.2. San $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías abelianas y $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor aditivo.
Dada la sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

diremos que:
(1) F es *exacto izquierdo* si la sucesión

$$0 \longrightarrow FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ$$

es exacta.
(2) F es *exacto derecho* si la sucesión

$$FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \longrightarrow 0$$

es exacta.

Observemos que F es exacto precisamente cuando es exacto izquierdo y exacto derecho.

Proposición 1.1.3. Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. F es exacto izquierdo si siempre que la sucesión

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

es exacta en $\mathbf{A}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ$$

es exacta en $\mathbf{B}$

Demostración. Si la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

es exacta en $\mathbf{A}$, u es monomorfismo y $img(u) = ker(v)$. Por tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{coimg(v)} Coimg(v) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$. Luego

$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fcoimg(v)} FCoimg(v)$$

es una sucesión exacta en FX y FY, es decir

$$img(Fu) = ker\,(Fcoimg(v))\,.$$

Por otra parte

$$v = img(v)coimg(v),$$

donde $img(v)$ es un monomorfismo en $\mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned} ker(Fv) &= ker\,(F\,(img(v)coimg(v))) \\ &= ker\,(Fimg(v)Fcoimg(v))\,, \end{aligned}$$

y $Fimg(v)$ es un monomorfismo en $\mathbf{B}$. Luego

$$ker\,(Fimg(v)Fcoimg(v)) = ker\,(Fcoimg(v))\,.$$

Por tanto

$$ker(Fv) = ker\,(Fcoimg(v))\,.$$

De aquí que

$$img(Fu) = ker(Fv)\,.$$

$\square$

La proposición anterior puede ser dualizada para referirse a funtores exactos derechos. Además algunos textos, como: [18] o [3] definen los funtores exactos izquierdos como aquellos que preservan sucesiones exactas del tipo

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow D\,.$$

Sin embargo esta definición es equivalente a la definición 1.1.2 dada anteriormente.

Proposición 1.1.4. Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana, entonces:
Para todo $X \in \mathbf{A}$: $\mathbf{A}(X,-)$ es un funtor exacto izquierdo.

Demostración. (1) Sea $X \in \mathbf{A}$. Comencemos mostrando que el funtor $\mathbf{A}(X,-) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es aditivo.
Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : U \longrightarrow V$ elementos de $\mathbf{A}(U,V)$, entonces

$$\mathbf{A}(X, f+g) : \mathbf{Ab}(X,U) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X,V)$$

es un homomorfismo de grupos abelianos de tal manera que si $h \in \mathbf{Ab}(X,U)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(X, f+g)(h) &= (f+g)h\\ &= fh+gh\\ &= \mathbf{A}(X,f)(h) + \mathbf{A}(X,g)(h)\,.\end{aligned}$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$:

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\ f\ } X_2 \xrightarrow{\ g\ } X_3 \longrightarrow 0\,.$$

Como f es monomorfismo y $\mathbf{A}(X,-)$ preserva monomorfismos ([2], proposición 2.9.4), la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(X,X_1) \longrightarrow \mathbf{A}(X,X_2)$$

es exacta en $\mathbf{A}(X,X_1)$. Resta probar que $Ker(\mathbf{A}(X,g)) = Img(\mathbf{A}(X,f))$, donde $Ker(\mathbf{A}(X,g)) = \{u \in \mathbf{A}(X,X_2) \,:\, gu = 0\}$.
Si $u \in Ker(\mathbf{A}(X,g))$, $gu = 0$, lo cual implica la existencia de un único morfismo $\phi : X \longrightarrow Ker(g)$ tal que $u = ker(g)\phi$, es decir, $u = img(f)\phi$.
Como f es monomorfismo, existe un único isomorfismo $\psi : Img(f) \longrightarrow X_1$ tal que $img(f) = f\psi$. Así que $u = f(\psi\phi)$, es decir, $u = \mathbf{A}(X,f)(\psi\phi)$. Por lo tanto $u \in Img(\mathbf{A}(X.f))$.
Si ahora suponemos que $u \in Img(\mathbf{A}(X,f))$, existe $v \in \mathbf{A}(X,X_1)$ tal que $fv = u$. Ya que$f$ es monomorfismo $f\psi = img(f)$ entonces $f\psi = ker(g)$, es decir, $gf\psi = 0$ y ψ es isomorfosmo por tanto $gf = 0$, con ésto podemos garantizar que $u \in Ker(\mathbf{A}(X,g))$.
De manera similar se garantiza que el funtor representable $\mathbf{A}(-,X)$ es exacto derecho (recordar que el funtor $\mathbf{A}(-,X)$ manda epimorfismos en monomorfismos). □

1.2. Complejos

A continuación estudiaremos sucesiones de morfismos de la forma

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ g\ } Z$$

sobre una categoría abeliana $\mathbf{A}$ de tal manera que $gf = 0$ pero no necesariamente es exacta en Y.

Observación 1.2.1. Si $gf = 0$, $g(img(f)coimg(f)) = 0$, donde $coimg(f)$ es un epimorfismo, $g\,img(f) = 0$, por lo cual existe una única factorización h tal que $img(f) = ker(g)h$. Y como $img(f)$ es monomorfismo, h es monomorfismo; por lo cual podemos formar el objeto cociente $\dfrac{Ker(g)}{Img(f)}$.

Para tener una mayor perspectiva, la siguiente definición puede ser comparada con la defición 1.9.1 en [13]

Definición 1.2.2. En una categoría abeliana $\mathbf{A}$, un *complejo de cocadena* $C^\bullet$ es una sucesión de morfismos y objetos

$$\cdots C^{-1} \xrightarrow{\quad d^{-1} \quad} C^0 \xrightarrow{\quad d^0 \quad} C^1 \xrightarrow{\quad d^1 \quad} C^2 \cdots$$

donde para cualquier $n \in \mathbb{Z} : d^{n+1}d^n = 0$.
Los morfismos $d^n : C^n \to C^{n+1}$ son llamados diferenciales u operadores borde (frontera). Notemos que la sucesión anterior no necesariamente es exacta. Una forma de medir como un complejo es exacto en cada objeto C^n es a través de

$$H^n(C^\bullet) = \frac{Ker(d^n)}{Img(d^{n-1})},$$

el $n-$ésimo objeto de cohomología del complejo de cocadena $C^\bullet$.

Retomando lo que se hizo al inicio de la sección, la definición del concepto, objeto de cohomología, se puede visualizar mejor con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots C^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, bend right, "coimg(d^{n-1})"'] & & C^n \arrow[r, "d^n"] & C^{n+1} \cdots \\
& Img(d^{n-1}) \arrow[ur, bend left, "img(d^{n-1})"] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
& & Ker(d^n) \arrow[uu, "ker(d^n)"'] \arrow[r, "coker(h)"] & \dfrac{Ker(d^n)}{Img(d^{n-1})}.
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior. Si suponemos que para algun $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(C^\bullet) = 0$, entonces el morfismo

$$coker(h) : Ker(d^n) \longrightarrow \frac{Ker(d^n)}{Img(d^{n-1})}$$

es igual al morfismo cero, luego como h es monomorfismo, $h = ker(coker(h))$ y por tanto $h = 1_{Ker(d^n)}$ ([3], proposición 1.1.8). Así $img(d^{n-1}) = ker(d^n)$. Por tanto el complejo de cocadenas es exacto en C^n.
En base a lo anterior, podemos afirmar que $C^\bullet$ es exacto si y sólo si $\forall n \in \mathbb{Z} : H^n(C^\bullet) = 0$.

Si $C^\bullet$ es un complejo y $C^n = 0$ para cada $n < 0$, entonces $C^\bullet$ es llamado un *complejo positivo*. Si $C^n = 0$ para cada $n > 0$, etonces $C^\bullet$ es llamado un *complejo negativo*.
El concepto dual de complejo de cocadena es complejo de cadena, una sucesión de objetos y morfismos en una categoría abeliana $\mathbf{A}$:

$$C_\bullet = \qquad \cdots C_{-1} \xleftarrow{\quad d_{-1} \quad} C_0 \xleftarrow{\quad d_0 \quad} C_1 \xleftarrow{\quad d_1 \quad} C_2 \cdots$$

donde $d_n d_{n+1} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.3. Sean $C^\bullet$ y $D^\bullet$ dos complejos de cocadena definidos sobre la categoría abeliana **A**. Un *morfismo de complejos cocadena* o *aplicación de cocadena*

$$u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$$

es un conjunto de morfismos indexado en $\mathbb{Z}$

$$(u^n : C^n \longrightarrow D^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

de tal manera que para todo $n \in \mathbb{Z}:\ d_D^n u^n = u^{n+1} d_C^n$.

Los complejos de cocadena sobre una categoría abeliana **A** junto con sus morfismos forman una categoría la cual denotaremos por **Ch(A)**.

Proposición 1.2.4. Si **A** es una categoría abeliana, **Ch(A)** es una categoría abeliana.

Demostración. Comenzamos definiendo el complejo cocadena cero:

$$0^\bullet = \qquad \cdots 0^n \longrightarrow 0^{n+1} \longrightarrow 0^{n+2} \cdots$$

donde para todo $n \in \mathbb{Z}:\ 0^n = 0$ (0 es el objeto cero en **A**). Entonces por su forma, $0^\bullet$ es el objeto cero en **Ch(A)**. Si no existe confución denotaremos $0^\bullet = 0$.
Ahora consideremos dos complejos de cocadena $C^\bullet\, y\, D^\bullet \in$ **Ch(A)**. De manera puntual construiremos el producto de $C^\bullet\, y\, D^\bullet$ en **Ch(A)**.
Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $(C^n \prod D^n, \pi_{C^n}, \pi_{D^n})$ es el producto de $C^n\, y\, D^n$. Entonces dada la siguiente terna
$(C^{n-1} \prod D^{n-1}, d_C^{n-1}\pi_{C^{n-1}}, d_D^{n-1}\pi_{D^{n-1}})$, implica la existencia de un único morfismo:

$$d^{n-1} : C^{n-1} \prod D^{n-1} \longrightarrow C^n \prod D^n$$

tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots C^{n-1} \arrow[rr] & & C^n \cdots \\
\cdots C^{n-1}\prod D^{n-1} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, "d^{n-1}"] & & C^n \prod D^n \cdots \arrow[u] \arrow[d] \\
\cdots D^{n-1} \arrow[rr] & & D^n \cdots .
\end{tikzcd}$$

Usando el siguiente diagrama conmutativo y la propiedad del producto en $C^{n+1} \prod D^{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots C^{n-1} \arrow[r] & C^n \arrow[r] & C^{n+11} \cdots \\
\cdots C^{n-1}\prod D^{n-1} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "d^{n-1}"] & C^n \prod D^n \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "d^n"] & C^{n+1}\prod D^{n+1} \cdots \arrow[u] \arrow[d] \\
\cdots D^{n-1} \arrow[r] & D^n \arrow[r] & D^{n+1} \cdots
\end{tikzcd}$$

podemos implicar la existencia de un único morfismo

$$h : C^{n-1} \prod D^{n-1} \longrightarrow C^{n+1} \prod D^{n+1}$$

tal que $\pi_{C^{n+1}} h = d^n_C d^{n-1}_C \pi_{C^{n-1}} = 0$.
En base al diagrama anterior, notemos que $d^n d^{n-1}$ y el morfismo cero también satisfacen la misma condición de unicidad de h, por lo cual $d^n d^{n-1} = 0$. Por tanto hemos formado el complejo de cocadena:

$$C^\bullet \prod D^\bullet = \qquad \cdots C^{n-1} \prod D^{n-1} \xrightarrow{\quad d^{n-1} \quad} C^n \prod D^n \xrightarrow{\quad d^n \quad} C^{n+1} \prod D^{n+1} \cdots$$

Por la construcción puntual del complejo definido arriba, se implica que $C^\bullet \prod D^\bullet$ es el producto de $C^\bullet$ y $D^\bullet$. De manera similar se construye el coproducto de dos objetos en **Ch(A)** .
Pasemos a construir el kernel de un morfismo de complejos de cocadena definidos en **A**. Sea $u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ un morfismo en **Ch(A)**. Definimos el kernel de u de manera puntual, es decir, $ker(u) = (ker(u^n))_{n\in\mathbb{Z}}$, mientras que el objeto kernel

$$Ker(u)^\bullet = \qquad \cdots Ker(u^{n-1}) \xrightarrow{\quad d_K^{n-1} \quad} Ker(u^n) \xrightarrow{\quad d_K^n \quad} Ker(u^{n+1}) \cdots ,$$

donde cada diferenciación se obtiene usando la propiedad universal del kernel. De manera similar se construye el cokernel del morfismo u.
Sea $u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ un monomorfismo en **Ch(A)**, debemos mostrar que u es el kernel de su cokernel. Dada la construcción puntual del kernel, bastara demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z} :$ u^n es un monomorfismo.
Como u es monomorfismo en **Ch(A)**, $ker(u) = 0$ y por tanto $ker(u^n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Luego u^n es un monomofismo en **A** para cada $n \in \mathbb{Z}$. Similarmente, si $v : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es un epimorfismo en **Ch(A)**, v es el cokernel de su kernel. □

Proposición 1.2.5. Sen $C^\bullet$ y $D^\bullet$ complejos de cocadena sobre una categoría abeliana **A** y $u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ un morfismo de complejos.
Para toda $n \in \mathbb{Z}$, existe un morfismo

$$H^n(u) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$$

en **A**, el cual genera un funtor $H^n :$ **Ch(A)** $\longrightarrow$ **A** .

Demostración. Para $n \in \mathbb{Z}$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Img(d^{n-1}) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "img(d^{n-1})"] & Ker(d^n) \arrow[r, two heads, "coker(h)"] \arrow[d, "ker(d^n)"] & H^n(C) \\
\cdots C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "u^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "u^n"] & C^{n+1} \cdots \arrow[d, "u^{n+1}"] \\
\cdots D^{n-1} \arrow[r, "j^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "j^n"] & D^{n+1} \cdots \\
Img(j^{n-1}) \arrow[r, dashed, "h'"'] \arrow[ur] & Ker(j^n) \arrow[r, two heads, "coker(h')"'] \arrow[u, "ker(j^n)"] & H^n(D)\,,
\end{tikzcd}$$

donde $j^n u^n ker(d^n) = u^{n+1} d^n ker(d^n) = 0$, lo cual implica la existencia de la factorización

$$a : Ker(d^n) \longrightarrow Ker(j^n)$$

tal que $ker(j^n)a = u^n ker(d^n)$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
coker(j^{n-1})u^n img(d^{n-1})coimg(d^{n-1}) &= coker(j^{n-1})u^n d^{n-1} \\
&= coker(j^{n-1})\, j^{n-1}u^{n-1} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\big(coker(j^{n-1})u^n img(d^{n-1})\big)coimg(d^{n-1}) = 0$$

luego

$$coker(j^{n-1})u^n img(d^{n-1}) = 0\,.$$

Por tanto existe un único morfismo

$$b : Img(d^{n-1}) \longrightarrow Img(j^{n-1})$$

tal que $img(j^{n-1})b = u^n img(d^{n-1})$.

Notar que $ah = h'b$ por que

$$\begin{aligned} ker(j^n)ah &= u^n img(d^{n-1}) \\ &= img(j^{n-1})b \\ &= ker(j^n)h'b\,. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left(coker(h')a\right)h &= coker(h')h'b \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Por tanto existe un único morfismo

$$H^n(u) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$$

tal que $H^n(u)coker(h) = coker(h')a$.

Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos el funtor

$$H^n : \mathbf{Ch(A)} \longrightarrow \mathbf{A}$$

de la siguiente manera:
Para cada objeto $C^\bullet \in \mathbf{Ch(A)} : H^n(C^\bullet) = H^n(C)$.
Para cada morfismo $u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \in \mathbf{Ch(A)} : H^n(u) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$ es el morfismo que se dedujo arriba. $\square$

Definición 1.2.6. Sean $\mathbf{A}$ una categoría abeliana y $u, v : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ morfismos en $\mathbf{Ch(A)}$. Una *homotopía* s de u a v es un conjunto de morfismos $\mathbb{Z}$-indexado,

$$\left(s^n : C^n \longrightarrow D^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,

$$d_D^{n-1}s^n + s^{n+1}d_C^n = u^n - v^n.$$

Si s es una homotopía de u a v la denotaremos por $s : u \simeq v$.

Definición 1.2.7. Sea $u : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ un morfismo de complejos sobre una categoría abeliana. u es una *equivalencia* si existen un morfismo $\overline{u} : D^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ y homotopías $s : \overline{u}u \simeq 1_{C^\bullet}$, $t : u\overline{u} \simeq 1_{D^\bullet}$.
Si tal equivalencia existe, diremos que $C^\bullet$ y $D^\bullet$ son *homotópicos*.

Proposición 1.2.8. Sean $u, v : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ morfismos en $\mathbf{Ch(A)}$, donde $\mathbf{A}$ es una categoría abeliana. Si existe una homotopía $s : u \simeq v$, entonces

$$H^n(u) = H^n(v) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)\,.$$

Demostración. Comencemos probando la aditividad del funtor H^n. Sean $u,v : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ morfismos en **Ch(A)**, entonces $u+v : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ también es un morfismo en **Ch(A)**. Denotaremos por

$$a : Ker(d^n) \longrightarrow Ker(j^n)$$

al único morfismo con la propiedad

$$(u^n+v^n)ker(d^n) = ker(j^n)a. \tag{1}$$

Similarmente para u y v existen las factorizaciones respectivas

$$\begin{aligned} a_u &: Ker(d^n) \longrightarrow Ker(j^n) \\ a_v &: Ker(d^n) \longrightarrow Ker(j^n)\,, \end{aligned}$$

tales que

$$u^n ker(d^n) = ker(j^n)a_u \tag{2}$$

$$v^n ker(d^n) = ker(j^n)a_v\,. \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) podemos implicar que

$$a = a_u + a_v\,.$$

El morfismo

$$H^n(u+v) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$$

es único con la propiedad

$$H^n(u+v)coker(h) = coker(h')a$$

Mientras que los morfismos

$$H^n(u) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D) \quad y \quad H^n(v) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$$

tienen respectivamente la propiedad

$$\begin{aligned} H^n(u)coker(h) &= coker(h')a_u \\ H^n(v)coker(h) &= coker(h')a_v\,, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} (H^n(u)+H^n(v))\,coker(h) &= coker(h')a_u + coker(h')a_v \\ &= coker(h')a\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto H^n es un funtor aditivo.

Ahora supongamos que existe s talque
$$s : u \simeq v\,.$$
Para concluir la demostración bastara probar $H^n(u-v) = 0\,.$
El morfismo $a : Ker(d^n) \longrightarrow Ker(j^n)$ es único con la propiedad
$$ker(j^n)a = (u^n - v^n)ker(d^n)\,,$$

donde

$$\begin{aligned}(u^n - v^n)ker(d^n) &= j^{n-1}s^n ker(d^n)\\ &= ker(j^n)h' coimg(j^{n-1})s^n ker(d^n)\,.\end{aligned}$$

Luego

$$a = h' coimg(j^{n-1})s^n ker(d^n)\,.$$

Por otra parte
$H^n(u-v) : H^n(C) \longrightarrow H^n(D)$ tiene la propiedad
$$H^n(u-v)coker(h) = coker(h')a\,,$$

es decir,

$$\begin{aligned}H^n(u-v)coker(h) &= coker(h')h' coimg(j^{n-1})s^n ker(d^n)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Por tanto
$$H^n(u-v) = 0.$$

□

Decimos que un complejo $C^\bullet$ es *contraíble* si es homotópico al complejo $0^\bullet$, eqivalentemente, $C^\bullet$ es contraíble si $1_{C^\bullet} \simeq 0$. Así $C^\bullet$ es contraíble si existe una homotopía $s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n = 1_{C^n}$.

Proposición 1.2.9. Sea **A** una categoría abeliana, si $C^\bullet \in$ **Ch(A)** es contraíble entonces $C^\bullet$ es exacto.

Demostración. Si $C^\bullet$ es contraíble, $1_{C^\bullet} \simeq 0$. Por tanto las imágenes bajo el n-ésimo funtor de cohomología son iguales, es decir,
$$H^n(1_{C^\bullet}) = H^n(0)\,.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}H^n(C) &= dom(H^n(1_{C^\bullet}))\\ &= dom(H^n(0))\\ &= H^n(0)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

□

1.3. Resoluciones

Para la siguiente sección se pueden consultar más detalles en [5] y [14] .

Definición 1.3.1. Sea $\mathbf{C}$ una categoría abeliana.
(1) Si I es un objeto en $\mathbf{C}$, decimos que I es *inyectivo* si, para cualquier monomorfismo $m : A' \longrightarrow A$ y cualquier morfismo $u : A' \longrightarrow I$, existe un morfismo $v : A \longrightarrow I$ (no necesariamente único) tal que $vm = u$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[dl, "v"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

(2) Si P es un objeto en $\mathbf{C}$, decimos que P es *proyectivo* si para cualquier epimorfismo $e : B \longrightarrow B'$ y cualquier morfismo $g : P \longrightarrow B'$, existe un morfismo $f : P \longrightarrow B$ (no necesariamente único) tal que $ef = g$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\
B \arrow[r, "e"'] & B' \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Definición 1.3.2. Una categoría abeliana $\mathbf{A}$ tiene *suficientes inyectivos* si, para cualquier objeto $X \in \mathbf{A}$ existen un inyectivo I y un monomorfismo $X \longrightarrow I$. En otras palabras, una categoría abeliana tiene *sufecientes inyectivos* si cualquier objeto es un subobjeto de algun inyectivo.
Una categoría abeliana $\mathbf{A}$ tiene *suficientes proyectivos* si, para cualquier $X \in \mathbf{A}$ existe un proyectivo P y un epimorfismo $P \longrightarrow X$. Equivalentemente, $\mathbf{A}$ tiene *suficientes proyectivos* si cualquier objeto en $\mathbf{A}$ es el objeto cociente de algun proyectivo.

Observación 1.3.3. La definición anterior se puede establecer de manera general para cualquier categoría ([2], definición 4.6.5).

Proposición 1.3.4. Sean $\mathbf{A}$ una categoría abeliana y $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. Si $\mathbf{A}$ es completa y tiene suficientes inyectivos, $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ tiene suficientes inyectivos.

En general toda categoría abeliana es finitamente completa y finitamente cocompleta ([3], proposición 1.5.3). Sin embargo existen categorias abelianas que son completas y/ó cocompletas, por ejemplo $\mathbf{Ab}$ es ambas, completa y cocompleta ([2], ejemplo 2.8.6), también $\mathbf{Mod_R}$ es completa y cocompleta ([2], teorema 2.8.1 , ejemplo 2.1.7.c, ejemplo 2.4.6.a y ejemplo 2.4.6.d) .

Demostración. Fijemos K un objeto en $\mathbf{C}$. Definimos los funtores

$$\begin{array}{rcl} K^\sharp : \mathbf{A}^{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ H & \longmapsto & HK \end{array}$$

y

$$k_* : \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathbf{C}}$$

Definido en objetos: Para $A \in \mathbf{A}$,

$$\begin{array}{rcl} k_*A : \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ C & \longmapsto & \prod\limits_{\mathbf{C}(C,K)} A \\ C_1 \longrightarrow C_2 & \longmapsto & \prod\limits_{\mathbf{C}(C_1,K)} A \longrightarrow \prod\limits_{\mathbf{C}(C_2,K)} A \end{array}$$

Definido en morfismos: Para el morfismo en $\mathbf{A}$,

$$A_1 \longrightarrow A_2\,,$$

se define el morfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$:

$$k_*A_1 \Longrightarrow k_*A_2$$

para cada $C \in \mathbf{C}$:

$$\prod_{\mathbf{C}(C,K)} A_1 \longrightarrow \prod_{\mathbf{C}(C,K)} A_2$$

En la definición del funtor k_*A respecto a morfismos usamos la propiedad universal del producto $\prod\limits_{\mathbf{C}(C_2,K)} A$. De la misma forma para definir cada una de las componentes de la transformación natural $k_*A_1 \Longrightarrow k_*A_2$. Como $\mathbf{A}$ es una categoría completa, tiene sentido la definición del funtor k_*.
$\mathbf{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathbf{A}$ es finitamente completa y finitamente cocompleta ([3], proposición 1.5.3), por lo cual para cualquier sucesión exacta corta en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$,

$$0 \Longrightarrow F \overset{\alpha}{\Longrightarrow} G \overset{\phi}{\Longrightarrow} H \Longrightarrow 0\,,$$

α_K es monomorfismo y ϕ_K es epimorfismo, ésto para todo $K \in \mathbf{C}$ ([2], corolario 2.15.3), también

$$ker(\phi) = img(\alpha)$$

implica que

$$\text{Para todo } K \in \mathbf{C},\, ker(\phi)_K = img(\alpha)_K\,.$$

Por tanto para cualquier $K \in \mathbf{C}$:

$$0 \longrightarrow FK \xrightarrow{\alpha_K} GK \xrightarrow{\phi_K} HK \longrightarrow 0\,,$$

es una sucesión exacta corta, es decir, el funtor $K^\sharp$ es exacto.
Además $K^\sharp \dashv k_*$, debido al siguiente isomorfismo natural en cada una de las variables.

Para $A \in \mathbf{A}$ y $H \in \mathbf{A}^{\mathbf{C}}$,

$$\theta_{A,H} : \mathbf{A}^{\mathbf{C}}(H, k_*A) \longrightarrow \mathbf{A}(K^{\sharp}H, A)$$
$$\alpha : H \Longrightarrow k_*A \longmapsto \pi_{1_K}\alpha_K\,,$$

donde

$$\pi_{1_K} : \prod_{\mathbf{C}(K,K)} A \longrightarrow A\,,$$

es la proyección respecto al índice $1_K \in \mathbf{C}(K,K)$.

Así podemos implicar que k_* preserva inyectivos ([5], proposición 6.3).
Ahora si F es un objeto en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, para cada $K \in \mathbf{C}$ se elige un inyectivo $I_K \in \mathbf{A}$ y el correspondiente monomorfismo $FK \longrightarrow I_K$ en $\mathbf{A}$. Por lo cual tenemos el siguiente conjunto de objetos inyectivos en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$

$$(k_*I_K)_{K\in\mathbf{C}}.$$

Siendo $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ una categoría completa ([2], teorema 2.15.2), existe

$$\prod_{K\in\mathbf{C}} k_*I_K\,,$$

el cual es un objeto inyectivo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ ([5], proposición 6.1). Usando la propiedad universal del producto, existe un monomorfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$,

$$F \Longrightarrow \prod_{K\in\mathbf{C}} k_*I_K\,.$$

□

Observación 1.3.5. Dada cualquier categoría pequeña $\mathbf{C}$, la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}}$ es una categoría con suficientes inyectivos.

Definición 1.3.6. Una *resolución proyectiva* de $A \in \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es una categoría abeliana, es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

en la cual cada P_i es un objeto proyectivo en $\mathbf{A}$, y la denotaremos por :

$$P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A\,.$$

Una *resolución inyectiva* de $A \in \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es una categoría abeliana, es una suceción exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

en la cual cada I^j es un objeto inyectivo en $\mathbf{A}$, y la denotamos por :

$$A \xrightarrow{\delta} I^\bullet\,.$$

El siguiente resultado es conocido como el *Teorema de Comparación para Resoluciones Inyectivas*.

Teorema 1.3.7. Sean

$$A \xrightarrow{\delta} I^\bullet$$

una resolución inyectiva de un objeto A en una categoría abeliana $\mathbf{A}$ y $f : B \longrightarrow A$ un morfismo en $\mathbf{A}$. Para cualquier sucesión exacta

$$B \xrightarrow{\eta} E^\bullet = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{e^0} E^1 \xrightarrow{e^1} E^2 \ldots$$

existe un morfismo de cocadena $f^\bullet : E^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ que extiende a f en el sentido de que

$$\delta f = f^0 \eta .$$

El morfismo $f^\bullet$ es único salvo homotopía.

Demostración. En base a las hipótesis tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & E^0 \arrow[r, "e^0"] & E^1 \arrow[r, "e^1"] & E^2 \ldots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \ldots .
\end{tikzcd}$$

Como I^0 es objeto inyectivo y $\eta : B \longrightarrow E^0$ es monomorfismo, existe $f^0 : E^0 \longrightarrow I^0$ tal que

$$f^0 \eta = \delta f .$$

Implicamos

$$d^0 f^0 \eta = 0 ,$$

donde η se descompone de manera única

$$\eta = img(\eta) coimg(\eta) .$$

Entonces

$$d^0 f^0 \left(img(\eta) coimg(\eta) \right) = 0 .$$

Como $coimg(\eta)$ es epimorfismo,

$$d^0 f^0 img(\eta) = 0$$

y por tanto

$$d^0 f^0 ker(e^0) = 0 .$$

Dado que $coimg(e^0) = coker\left(ker(e^0)\right)$, existe un único morfismo

$$h : Coimg(e^0) \longrightarrow I^1$$

tal que $d^0 f^0 = h\, coimg(e^0)$.

Ahora, tenemos un monomorfismo

$$img(e^0) : Coimg(e^0) \longrightarrow I^1 .$$

y el morfismo

$$h : Coimg(e^0) \longrightarrow I^1 .$$

Como I^1 es inyectivo, existe el morfismo

$$f^1 : E^1 \longrightarrow I^1$$

tal que $h = f^1 img(e^0)$.

Por tanto

$$\begin{aligned} f^1 e^0 &= f^1 img(e^0) coimg(e^0) \\ &= h\, coimg(e^0) \\ &= d^0 f^0 . \end{aligned}$$

De la misma manera como se construyó f^1 se construyen los demás f^i, para $i \geq 2$. Por la forma de cada f^i, $i \geq 0$, el conjunto de morfismos $\left(f^i\right)_{0 \leq i}$ es un morfismo de complejos cocadena de $E^\bullet$ en $I^\bullet$.
Si denotamos $f^\bullet = \left(f^i\right)_{0 \leq i}$, probemos que $f^\bullet$ es único salvo homotopía.
Supongamos que $g^\bullet : E^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ es otro morfismo cocadena tal que

$$g^0 \eta = \delta f .$$

Entonces

$$(g^0 - f^0)\eta = \delta f - \delta f = 0$$

luego

$$(g^0 - f^0) img(\eta) coimg(\eta) = 0$$

lo cual implica

$$(g^0 - f^0) img(\eta) = 0$$

y por tanto

$$(g^0 - f^0) ker(e^0) = 0 .$$

Como $coimg(e^0) = coker(ker(e^o))$, existe un único morfismo

$$j^0 : Coimg(e^0) \longrightarrow I^0$$

tal que $g^0 - f^0 = j^0 coimg(e^0)$

$$\begin{tikzcd}
 & E^0 \arrow[rr, "e^0"] \arrow[dr] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & & E^1 \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] \\
Ker(e^0) \arrow[ur] & & Coimg(e^0) \arrow[dl, dashed, "j^0"] & \\
 & I^0 \arrow[rr, "d^0"'] & & I^1 .
\end{tikzcd}$$

Por otra parte tenemos el monomorfismo

$$img(e^0) : Coimg(e^0) \longrightarrow E^1$$

y el morfismo

$$j^0 : Coimg(e^0) \longrightarrow I^0 ,$$

donde I^0 es proyectivo. Entonces existe el morfismo

$$\begin{aligned} s^1 : E^1 \longrightarrow I^0 \quad &\text{tal que} \\ j^0 = s^1 img(e^0) \, , \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
Coimg(e^0) \arrow[r, "img(e^0)"] \arrow[d, "j^0"'] & E^1 \arrow[dl, "s^1"] \\
I^1 &
\end{tikzcd} ,$$

luego

$$\begin{aligned} s^1 e^0 &= s^1 img(e^0) coimg(e^0) \\ &= j^0 coimg(e^0) \\ &= g^0 - f^0 \, . \end{aligned}$$

Ahora construyamos el morfismo

$$s^2 : E^2 \longrightarrow I^1$$

$$
\begin{aligned}
\left[(g^1 - f^1) - d^0 s^1\right] img(e^0)coimg(e^0) &= (g^1 - f^1)img(e^0)coimg(e^0) - d^0 s^1 img(e^0)coimg(e^0) \\
&= (g^1 - f^1)e^0 - d^0 j^0 coimg(e^0) \\
&= (g^1 - f^1)e^0 - d^0(g^0 - f^0) \\
&= (g^1 - f^1)e^0 - (g^1 - f^1)e^0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$\left[(g^1 - f^1) - d^0 s^1\right] img(e^0) = 0$$

y por tanto

$$\Rightarrow \left[(g^1 - f^1) - d^0 s^1\right] ker(e^1) = 0\,.$$

Además,

$$coimg(e^1) = coker\left(ker(e^1)\right)\,.$$

Así, existe un único morfismo

$$j^1 : Coimg(e^1) \longrightarrow I^1$$

tal que

$$(g^1 - f^1) - d^0 s^1 = j^1 coimg(e^1)\,.$$

Esto implica la existencia del morfismo

$$s^2 : E^2 \longrightarrow I^2$$

tal que

$$j^1 = s^2 img(e^1)$$

luego

$$
\begin{aligned}
(g^1 - f^1) - d^0 s^1 &= s^2 img(e^1)coimg(e^1) \\
&= s^2 e^1\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$g^1 - f^1 = d^0 s^1 + s^2 e^1\,.$$

$$
\begin{tikzcd}
Ker(e^1) \arrow[r] & E^1 \arrow[rr, "e^1"] \arrow[ddl, "s^1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dr] & & E^2 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[ddll, bend left, "s^2"'] \\
& & Coimg(e^1) \arrow[ur] \arrow[dl, dashed] & \\
I^0 \arrow[r, "d^0"'] & I^1 \arrow[rr, "d^1"'] & & I^2\,.
\end{tikzcd}
$$

Similarmente se construyen los demás s^i con $i \geq 3$. $\square$

Dualizando el teorema anterior obtenemos el *Teorema de Comparación para Resoluciones Proyectivas*.

Teorema 1.3.8. Sea **A** una categoría abeliana.

(1) Si **A** tiene suficientes inyectivos, cualquier objeto en **A** tiene una resolución inyectiva. La cual es única salvo homotopía de complejos de cocadena.

(2) Si **A** tiene suficientes proyectivos, cualquier objeto en **A** tiene una resolución proyectiva, la cual es única salvo homotopía de complejos de cadena.

Demostración. Probemos (2). Sea A un objeto en **A**, entonces existen un objeto proyectivo P_0 y un epimorfismo

$$\varepsilon : P_0 \longrightarrow A\,.$$

De igual forma para el objeto $Ker(\varepsilon)$, existen un objeto proyectivo P_1 y un epimorfismo

$$p_1 : P_1 \longrightarrow Ker(\varepsilon)\,.$$

Denotamos por $d_1 = ker(\varepsilon)p_1$.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 \\
& Ker(\varepsilon) \arrow[ur, "ker(\varepsilon)"'] & & .
\end{tikzcd}$$

De manera recursiva construimos la sucesión exacta

$$\ldots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0\,,$$

donde cada P_j es un objeto proyectivo en **A**.

Para el objeto $A \in \mathbf{A}$ hemos construido una resolución proyectiva

$$P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A\,.$$

Supongamos la existencia de otra resolución proyectiva de A,

$$P'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} A\,; \quad \text{y}$$

mostremos que ambas resoluciones son homotópicas.

Usando el teorema de comparación para resoluciones proyectivas, existen morfismos de complejo cadena,

$$f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow P'_\bullet \quad \text{y}$$
$$f'_\bullet : P'_\bullet \longrightarrow P_\bullet$$

los cuales extienden a

$$1_A : A \longrightarrow A\,.$$

Así, $1_{P_\bullet}$ y $f'_\bullet f_\bullet$ son dos morfismos de complejo cadena que extienden a 1_A e implicamos que $1_{P_\bullet}$ y $f'_\bullet f_\bullet$ son homotópicos. Similarmente $1_{P'_\bullet}$ y $f_\bullet f'_\bullet$ son homotopicos.

Por lo tanto las resoluciones proyectivas, $P_\bullet$ y $P'_\bullet$ son homotópicas. $\square$

1.4. Funtores derivados

Definición 1.4.1. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}$ categorías abelianas tal que $\mathbf{A}$ tiene suficientes inyectivos.
Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}$ un funtor exacto izquierdo. Entonces los *funtores derivados derechos* de F son los funtores

$$R^iF : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}, \quad 0 \leq i$$

los cuales, para cualquier objeto $A \in \mathbf{A}$ con una resolución inyectiva única, salvo homotopía,

$$A \longrightarrow I_A^\bullet,$$

son definidos como:

$$\text{Para toda } i \geq 0, R^iF(A) = H^i\left(F(I_A^\bullet)\right).$$

Por otra parte, dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathbf{A}$, donde $A \longrightarrow I_A^\bullet$ y $B \longrightarrow J_B^\bullet$ son dos resoluciones inyectivas de A y B, respectivamente, existe un único (salvo homotopía) morfismo de complejos de cocadena $f^\bullet : I_A^\bullet \longrightarrow J_A^\bullet$, el cual extiende a f. Para cada $i \geq 0$, se define R^iF sobre$f$ como:

$$R^iF(f) = H^i\left(F(f^\bullet)\right).$$

En la definición anterior usamos de manera implícita los dos últimos teoremas, así como la proposición 1.2.8 .
En efecto, para mostrar que los funtores R^iF están bien definidos en objetos supongamos que $A \in \mathbf{A}$ tiene dos resoluciones inyectivas

$$A \longrightarrow I_A^\bullet \quad y \quad A \longrightarrow E_A^\bullet,$$

entonces ambas resoluciones son homotopicas (teorema 1.3.8, (1)), es decir, existen

$$g^\bullet : I_A^\bullet \longrightarrow E_A^\bullet \quad \text{y} \quad h^\bullet : E_A^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$$

morfismos de complejos de cadena tales que, $g^\bullet h^\bullet$ es homotópico a $1_{E_A^\bullet}$ y $h^\bullet g^\bullet$ es homotópico a $1_{I_A^\bullet}$.

Luego

$$H^i\left(F(g^\bullet h^\bullet)\right) = H^i\left(F(1_{E_A^\bullet})\right),$$

lo cual implica que

$$H^i\left(F(g^\bullet)\right) H^i\left(F(h^\bullet)\right) = 1_{H^i\left(F(E_A^\bullet)\right)}.$$

Similarmente se obtiene que

$$H^i\left(F(h^\bullet)\right) H^i\left(F(g^\bullet)\right) = 1_{H^i\left(F(I_A^\bullet)\right)}.$$

Por lo cual

$$H^i\left(F(g^\bullet)\right) : H^i\left(F(I_A^\bullet)\right) \longrightarrow H^i\left(F(E_A^\bullet)\right)$$

es un isomorfismo,

$$H^i\left(F(I_A^\bullet)\right) \cong H^i\left(F(E_A^\bullet)\right).$$

Luego, $R^iF(A)$ no depende de la resolución inyectiva de A.

Proposición 1.4.2. Sean $\mathbf{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $\mathbf{X}$ una categoría abeliana y $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}$ un funtor exacto izquierdo. Entonces

(1) Existe un isomorfismo natural $R^0F \cong F$.

(2) Si A es inyectivo en $\mathbf{A}$, para todo $i \in \omega$[1] $: R^iF(A) = 0$

Demostración. (1) Para $A \in \mathbf{A}$, tenemos uno resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \dots .$$

Como F es un funtor exacto izquierdo, el complejo de cocadena

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\delta} FI^0 \xrightarrow{Fd^0} FI^1 \dots$$

es exacto en FI^0, por lo cual:

$$img(F\delta) = ker(Fd^0)\,.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} FA \cong Img(F\delta) &= dom\,(img(F\delta)) \\ &= dom\left(ker(Fd^0)\right) \\ &= Ker(Fd^0)\,. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} R^0(F)A &= H^0\,(F(I_A^\bullet)) \\ &= Ker(Fd^0), \end{aligned}$$

por tanto

$$FA \cong R^0F(A)\,.$$

[1] $\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Veamos que este isomorfismo es natural. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathbf{A}$ consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FA \arrow[rr, "\delta_A"] \arrow[dr, "\cong_A"'] \arrow[ddd, "Ff"'] & & FI^0 \arrow[r, "Fd^0"] \arrow[ddd, "Ff^0"] & FI^1 \dots \\
& & Ker(Fd^0) \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "a"'] & & \\
& & Ker(Fe^0) \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & FB \arrow[rr, "\delta_B"'] \arrow[ur, "\cong_B"] & & FE^0 \arrow[r, "Fe^0"'] & FE^1 \dots
\end{tikzcd}$$

donde $a : Ker(Fd^0) \longrightarrow Ker(Fe^0)$ es el morfismo mencionado en la proposición 1.2.5, y tiene la propiedad:

$$ker(Fe^0)a = Ff^0 ker(Fd^0)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Ker(Fe^0)a \cong_A &= Ff^0 ker(Fd^0) \cong_A \\
&= Ff^0 \delta_A \\
&= \delta_B Ff \\
&= ker(Fe^0) \cong_B Ff\,,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$ker(Fe^0)a \cong_A = ker(Fe^0) \cong_B Ff$$

y por tanto

$$a \cong_A = \cong_B Ff.$$

(2) Sea A un objeto inyectivo en $\mathbf{A}$. Podemos construir la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1_A} A \dots$$

Como F es un funtor aditivo, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{1_{FA}} FA \xrightarrow{0} FA \xrightarrow{1_{FA}} FA \dots$$

Por tanto para cualquier $i \in \omega$:

$$R^i F(A) = 0.$$

$\square$

De manera dual podemos definir los funtores derivados izquierdos.

Definición 1.4.3. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}$ categorías abelianas tal que $\mathbf{A}$ tiene suficientes proyectivos. Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor exacto derecho. Entonces, los *funtores derivados izquierdos* de F son los funtores:

$$L_iF : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}, \quad 0 \leq i,$$

los cuales, para un objeto $A \in \mathbf{A}$ con una resolución proyectiva $P_{\bullet_A} \longrightarrow A$,única salvo homotopía, son definidos como:

$$L_iF(A) = H_i\left(F(P_{\bullet_A})\right), \text{para} \quad 0 \leq i.$$

Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathbf{A}$, donde

$$P_{\bullet_A} \longrightarrow A \quad y \quad Q_{\bullet_B} \longrightarrow B$$

son dos resoluciones proyectivas de A y B, respectivamente, existe un morfismo de complejos de cadena, único salvo homotopía,

$$f_\bullet : P_{\bullet_A} \longrightarrow Q_{\bullet_B}$$

el cual extiende a f.
Se define

$$L_iF(f) = H_i\left(F(f_\bullet)\right), \quad 0 \leq i.$$

1.5. Objetos simpliciales

Definimos la categoría Δ que tiene por objetos todos los conjuntos finitos no vacios ordenados

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \quad \text{para} \quad n \in \omega$$

y por morfismos las funciones monotonas no decrecientes, es decir, los morfismos

$$\alpha : [n] \longrightarrow [m]$$

son funciones que satisfacen: $\alpha(i) \leq \alpha(j)$ siempre que $i \leq j$.
La composición de morfismos en Δ es la composición usual de funciones.
Dentro de la categoría Δ existen morfismos que desempeñan un papel importante.
Aplicaciones cara:

$$\varepsilon_i : [n-1] \longrightarrow [n]; \; 0 \leq i \leq n$$

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j & ; \quad j < i \\ j+1 & ; \quad j \geq i. \end{cases}$$

Aplicaciones degeneración:

$$\eta_i : [n+1] \longrightarrow [n]; \; 0 \leq i \leq n$$

$$\eta_i(j) = \begin{cases} j & ; \quad j \leq i \\ j-1 & ; \quad j > i. \end{cases}$$

Estas funciones, satisfacen las siguientes reglas para la composición:

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon_j\varepsilon_i & = & \varepsilon_i\varepsilon_{j-1} & \text{si} \quad i < j \\ \eta_j\eta_i & = & \eta_i\eta_{j+1} & \text{si} \quad i \leq j \\ \eta_j\varepsilon_i & = & \varepsilon_i\eta_{j-1|} & \text{si} \quad i < j \\ \eta_i\varepsilon_i & = & \eta_i\varepsilon_{i+1} & = \quad \text{identidad} \\ \eta_j\varepsilon_i & = & \varepsilon_{i-1}\eta_j & \text{si} \quad i > j+1 \end{array}$$

Lema 1.5.1. Cualquier morfismo $\alpha : [n] \longrightarrow [m]$ en Δ tiene una única epi-mono factorización $\alpha = \varepsilon\eta$, donde el monomorfismo ε es únicamente una composición de aplicaciones cara

$$\varepsilon = \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_s} \text{ con } 0 \leq i_s \leq \cdots \leq i_1 \leq m$$

y el epimorfismo η es únicamente una composición de aplicaciones degeneración

$$\eta = \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_t} \text{ con } 0 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_t < n\,.$$

Demostración. La demostración de este lema se encuentra en [21], lema 8.1.2 . □

Definición 1.5.2. Si $\mathbf{A}$ es una categoría, un *objeto simplicial* X definido sobre $\mathbf{A}$ es un funtor contravariante de Δ en $\mathbf{A}$, es decir,

$$X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{A}$$

es un funtor covariante. Para simplificar la notación, escribiremos las imagenes X_n en lugar de $X[n]$.
Similarmente, un objeto cosimplicial C definido sobre $\mathbf{A}$ es un funtor covariante

$$C : \Delta \longrightarrow \mathbf{A}$$

y escribiremos C^n para $C[n]$.

Observemos que la categoría Δ es pequeña, por lo cual podemos formar la categoría $\mathbf{A}^{\Delta^{op}}$, cuyos objetos son precisamente objetos simplicial y cuyos morfismos son transformaciones naturales.
Por otra parte, si en la definición anterior la categoría $\mathbf{A} = \mathbf{Con}^2$, entonces X se llama *conjunto simplicial* ó *conjunto cosimplicial*, según sea el caso. De igual forma si $\mathbf{A} = \mathbf{Mod}_R$ ó $\mathbf{A} = \mathbf{Ab}$, X se llama *R-módulo simplicial* (*cosimplicial*) ó *grupo abeliano simplicial* (*cosimplicial*), respectivamente.

Proposición 1.5.3. Sea $\mathbf{A}$ una categoría. Para dar un objeto simplicial A definido en $\mathbf{A}$, es necesario y suficiente dar una sucesión de objetos $A_0, A_1, \ldots$ junto con morfimos $\partial_i : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ y $\sigma_i : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, los cuales satisfacen las siguientes identidades simpliciales:

$$\begin{array}{rcl} \partial_i\partial_j & = & \partial_{j-1}\partial_i \quad \text{si} \quad i < j \\ \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_{j+1}\sigma_i \quad \text{si} \quad i \leq j \\ \partial_i\sigma_j & = & \begin{cases} \sigma_{j-1}\partial_i & \text{si} \quad i < j \\ Identidad & \text{si} \quad i = j \text{ ó } i = j+1 \\ \sigma_j\partial_{i-1} & \text{si} \quad i > j+1\,. \end{cases} \end{array}$$

Bajo está correspondencia $\partial_i = A\varepsilon_i$ y $\sigma_i = A\eta_i$.

[2] **Con** es la categoría de conjuntos y sus funciones, en algunos textos es donatada por **Set**

Demostración. La demostracion de esta proposición se encuentra en [21], proposición 8.1.3 . □

Considerando la proposición anterior, un conjunto simplicial K es una sucesión de conjuntos $K_n, \quad n \in \omega$, junto con las funciones

$$d_i : K_n \longrightarrow K_{n-1} \quad y \quad s_i : K_n \longrightarrow K_{n+1} \;\; (0 \leq i \leq n)\,, \tag{1.1}$$

las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lrcll} (ss1) & d_i d_j & = & d_{j-1} d_i & \text{si} \quad i < j \\ (ss2) & d_i s_j & = & s_{j-1} d_i & \text{si} \quad i < j \\ (ss3) & d_i s_j & = & Identidad & \text{si} \quad i = j \text{ ó } i = j+1 \\ (ss4) & d_i s_j & = & s_j d_{i-1} & \text{si} \quad i > j+1 \\ (ss5) & s_i s_j & = & s_{j+1} s_i & \text{si} \quad i \leq j\,. \end{array}$$

Los elementos de cada conjunto K_n son llamados $n-$símplices.
A continuación describiremos dos ejemplos de conjuntos simpliciales.

Ejemplo 1.5.4. (1) Un conjunto simplicial formado por un conjunto parcialmente ordenado.
Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Denotamos por $PNer_n(X)$ al conjunto de todos los arreglos ordenados de n elementos de X.
Si $x \in PNer_n(X)$, escribimos

$$x = (x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n)\,.$$

Las aplicaciones cara $d_i : PNer_n(X) \longrightarrow PNer_{n-1}(X)$, $0 \leq i \leq n$, omiten el elemento x_i de x, es decir

$$d_i : (x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n) \longmapsto (x_1 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq x_{i+1} \leq \ldots \leq x_n)\,.$$

Las aplicaciones degeneración $s_i : PNer_n(X) \longrightarrow PNer_{n+1}(X)$ repiten el elemento x_1, es decir,

$$s_i : (x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n) \longmapsto (x_1 \leq \ldots \leq x_1 \leq x_i \leq \ldots \leq x_n)\,.$$

(2) El Nervio de una categoría. Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. Definimos $Ner_0(\mathbf{C}) = C_0$ y

$$Ner_n(\mathbf{C}) = \{(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) : a_i \in \mathbf{C}\, y\, d(a_{i+1}) = r(a_i)\}\,.$$

$Ner_n(\mathbf{C})$ es el conjunto de todas las n-sucesiones determinadas por elementos de $\mathbf{C}$.

Las aplicaciones cara

$$d_0, d_1 : Ner_1(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_0(\mathbf{C})$$

estan dados por:

$$\begin{array}{l} d_0(a) = r(a) \quad \text{y} \\ d_1(a) = d(a)\,. \end{array}$$

Para $n > 1$ y $0 \leq i \leq n$ las aplicaciones cara

$$d_i : (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) \longmapsto \begin{cases} (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2) & \text{si} \quad i = 0 \\ (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{i+1} a_i, \ldots, a_1) & \text{si} \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ (a_{n-1}, \ldots, a_1) & \text{si} \quad i = n\,. \end{cases}$$

Las aplicaciones degeneración

$$s_i : Ner_n(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_{n+1}(\mathbf{C})$$

estan dados por:

$$s_i : (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) \longmapsto \begin{cases} (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, d(a_1)) & \text{si} \quad i = 0 \\ (a_n, a_{n-1}, \ldots, r(a_i), a_i, \ldots, a_1) & \text{si} \quad i = 1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

1.6. Construcción de complejos de cadena y cocadena a partir de objetos simpliciales y cosimpliciales.

Veamos una forma alternativa para contruir complejos de cadena (cocadena) a partir de objetos simpliciales (cosimpliciales) definidos sobre alguna categoría abeliana.

Para una mayor referencia acerca de la sguiente proposición el lector puede consultar [5] .

Proposición 1.6.1. Un complejo de cadena está asociado a cualquier objeto simplicial con valores en una categoría abeliana **C**. Un complejo de cocadena está asociado a cualquier objeto cosimplicial con valores en una categoría abeliana **C**.

Demostración. Consideremos el caso de objetos cosimpliciales. Sea $F : \Delta \longrightarrow \mathbf{C}$ un funtor covariante con valores en una categoría abeliana **C**.

Denotamos por:

$$K^n = F[n]; (n \in \omega)\,,$$

entonces tenemos los morfismos:

$$F\varepsilon_i : K^n \longrightarrow K^{n+1}\,, \quad \text{con } i \in \{0, \ldots, n+1\}\,.$$

Siendo **C** una categoría abeliana podemos definir para cualquier $n \in \omega$ el morfismo:

$$\varepsilon_K^n : K^n \longrightarrow K^{n+1}$$

por

$$\varepsilon_K^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F\varepsilon_i\,.$$

Queremos mostrar que la sucesión de objetos en **C**, $(K^n)_{n\in\omega}$, junto con los morfismos $(\varepsilon_K^n)_{n\in\omega}$ forman un complejo de cocadena, para ello es suficiente mostrar que:

$$\varepsilon_K^{n+1}\varepsilon_K^n = 0\,.$$

En efecto tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_K^{n+1}\varepsilon_K^n &= \left[\sum_{j=0}^{n+2}(-1)^j F\varepsilon_j\right]\left[\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i F\varepsilon_i\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n+2}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{j+i}F(\varepsilon_j\varepsilon_i) \\
&= \sum_{0\le i<j\le n+2}(-1)^{j+i}F(\varepsilon_j\varepsilon_i)\sum_{0\le j\le i\le n+1}(-1)^{j+i}F(\varepsilon_j\varepsilon_i)\,.
\end{aligned}$$

En el primer sumando remplazamos $j-1$ por i e i por j. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_K^{n+1}\varepsilon_K^n &= \sum_{0\le j\le i\le n+1}(-1)^{i+j+1}F(\varepsilon_j\varepsilon_i) + \sum_{0\le j\le i\le n+1}(-1)^{j+i}F(\varepsilon_j\varepsilon_i) \\
&= -\sum_{0\le j\le i\le n+1}(-1)^{i+j}F(\varepsilon_j\varepsilon_i) + \sum_{0\le j\le i\le n+1}(-1)^{j+i}F(\varepsilon_j\varepsilon_i) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

El siguiente desarrollo se basa en la proposición anterior.
Considermos un objeto fijo A en la categoría de grupos abelianos **Ab**. Sean K un conjunto simplicial y el funtor representable (A.1.4 5)

$$\mathbf{Con}(-,A):\mathbf{Con}\longrightarrow\mathbf{Ab}\,.$$

Componiendo los funtores, K y $\mathbf{Con}(-,A)$, obtenemos el grupo abeliano cosimplicial

$$\mathbf{Con}(K-,A):\Delta\longrightarrow\mathbf{Ab}\,.$$

Simplificando la notación, para cada $[n]\in\Delta$, denotaremos por

$$X^n(K,A)=\mathbf{Con}(K[n],A)=\mathbf{Con}(K_n,A)\,.$$

De igual forma para las funciones

$$d_i:K_{n+1}\longrightarrow K_n\,,\quad i\in\{0,\ldots,n+1\}$$

tenemos la siguiente notación

$$\begin{aligned}
d_i^n=\mathbf{Con}(d_i,A):X^n(K,A)&\longrightarrow X^{n+1}(K,A)\\
f&\longmapsto fd_i\,.
\end{aligned}$$

Luego definimos para $n \in \omega$

$$d^n : X^n(K,A) \longrightarrow X^{n+1}(K,A)$$

por

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n \,,$$

esto es,

$$d^n(f) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f d_i$$

para $f \in X^n(K,A)$.

Como consecuencia del desarrollo anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.6.2. Para cualquier grupo abeliano **A** y cualquier conjunto simplicial K,

$$X^\bullet(K,A) = \qquad X^0(K,A) \xrightarrow{\quad d^0 \quad} X^1(K,A) \xrightarrow{\quad d^1 \quad} X^2(K,A) \cdots$$

es un complejo cocadena definido sobre **Ab**.

□

Capítulo 2

Cohomología de categorías

Para más detalles sobre está sección el lector puede consultar [13], [21] .
Nota: En lo subsecuente daremos mayor relevancia a la cohomología sobre la homología. La justificación es la siguiente:

1. Seguiremos una línea paralela a ciertas ideas en la cohomología de grupos.
2. En base a nuestros propósitos es más factible es uso de la cohomología.

Existen variedades de problemas donde la cohomología tiene una mayor importancia sobre la homología, para más detalles sobre esta aseveración el lector puede consultar el capítulo 21 de *History of Topology* editada por I.M. James.

Definición 2.0.3. Sea G un grupo. Un $G-$*módulo* A es un grupo abeliano A (en notación aditiva), equipado con una acción derecha por G para la cual las leyes distributivas se cumplen.

$$\begin{aligned} \cdot : A \times G &\longrightarrow A \\ (a,g) &\longmapsto a \cdot g \end{aligned}$$

tal que para calesquiera $a, b \in A$ y $g, h \in G$:

$$\begin{aligned} &(1)\, a \cdot 1 = a \\ &(2)\, a \cdot (gh) = (a \cdot g) \cdot h \\ &(3)\, (a+b) \cdot g = a \cdot g + b \cdot g\,. \end{aligned}$$

Un morfismo de $G-$módulos

$$f : A \longrightarrow B$$

es un morfismo de grupos abelianos el cual preserva la acción de G, esto es, para cualquier $g \in G$ y cualquier $a \in A$:

$$f(a \cdot g) = f(a) \cdot g\,.$$

Notemos que los $G-$módulos y los morfismos de $G-$módulos forman una categoría abeliana, la cual denotaremos por **G-mod**.
De manera paralela al ejemplo 2.15.7.a, en [2]; podemos ver la categoría **G-mod** como una categoría de funtores. Si A es un $G-$módulo y consideramos el grupo G como una categoría, $\mathbf{G}$, con un sólo objeto $*$ y $\mathbf{G}(*,*) = G$, entonces se define el funtor:

$$\begin{aligned} \widehat{A} : \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ * &\longmapsto A \\ * \xrightarrow{f} * &\longmapsto A \longrightarrow A \\ & \qquad a \longmapsto a \cdot g\,. \end{aligned}$$

Observemos que, debido al axioma (2) en la última definición, el funtor $\widehat{A}$ es contravariante.

Por otra parte si

$$F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

es un funtor contravariante $F*$ es un $G-$módulo bajo la acción

$$\begin{aligned} \cdot : F * \times G &\longrightarrow F* \\ (a,g) &\longmapsto Fg(a)\,. \end{aligned}$$

De manera más concreta, el funtor:

$$\begin{aligned} \phi : \textbf{G-mod} &\longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}} \\ A &\longmapsto \widehat{A} \\ A \xrightarrow{f} B &\longmapsto \widehat{A} \overset{\phi_f}{\Longrightarrow} \widehat{B} \end{aligned}$$

donde $(\phi f)_* = f$, es un isomorfismo de categorías. Por tanto

$$\textbf{G-mod} \cong \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}\,.$$

Además como la categoría **Ab** es una categoría abeliana, completa y con suficientes inyectivos, entonces $\textbf{G-mod} \cong \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$ es una categoría abeliana, completa y con suficientes inyectivos. Este tipo de categorías (abelianas con suficientes inyectivos) representan el mejor lugar para hacer álgebra homológica.

Pasemos a definir un funtor exacto izquierdo de la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$ a la categoría **Ab**. Si **A** es un $G-$módulo, definimos

$$A^G = \{a \in A : \ a \cdot g = a, \text{ para cualquier } g \in G\}$$

el cual es el conjunto de invariantes de A ante la acción de G. Observemos que A^G es un subgrupo de A. Por otra parte si

$$f : A \longrightarrow B$$

es un morfismo de $G-$módulos, f induce un morfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned} f^G : A^G &\longrightarrow B^G \\ a &\longmapsto f(a)\,. \end{aligned}$$

En efecto, para cualquier $a \in A^G$, $f(a)$ es invariante ante la acción de G. Si $g \in G$:

$$f(a)\cdot g = f(a \cdot g) = f(a)\,.$$

Con lo anterior queda definido el funtor

$$(-)^G : \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}\,.$$

Mostremos que este funtor es exacto izquierdo. Sean $f,h : A \longrightarrow B$ morfismos de $G-$módulos y $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} (f+h)^G(a) &= (f+h)(a) \\ &= f(a)+h(a) \\ &= f^G(a)+h^G(a)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-)^G$ es un funtor aditivo.

Ahora sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad h \quad} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$. Veamos que la sucesión en $\mathbf{Ab}$

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{\quad f^G \quad} B^G \xrightarrow{\quad h^G \quad} C^G$$

es exacta.
Notemos que como f es monomorfismo, f^G es monomorfismo, por lo tanto basta probar que

$$Ker(h^G) = Img(f^G)$$

Sea $b \in Ker(h^G)$, entonces $h^G(b) = 0$ y por tanto $h(b) = 0$. Esto implica que $b \in Ker(h) = Img(f)$. Luego existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Si $g \in G$, entonces $f(a \cdot g) = f(a)\cdot g = b \cdot g = b = f(a)$ y por ser f monomorfismo, $a \cdot g = a$. Así que $a \in A^G$ y $f(a) = b$ lo cual implica que $b \in Img(f^G)$.
Si ahora $b \in Img(f^G)$, entonces existe $a \in A^G$ tal que $f^G(a) = b$. Además, por la forma en como se definió f^G,

$$Img(f^G) \subset Img(f) = Ker(h),$$

por tanto $h(b) = 0$. Por otra parte si $g \in G$, entonces $b \cdot g = f^G(a)\cdot g = f(a)\cdot g = f(a \cdot g) = f(a) = b$, es decir, $b \in B^G$. Esto implica que $b \in Ker(h^G)$.
Así tenemos un funtor exacto izquierdo:

$$(-)^G : \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

cuyo dominio es una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Si A es un $G-$módulo, existe una resolución inyectiva

$$A \longrightarrow I_A^{\bullet}\,.$$

La imagen de la sucesión $I_A^\bullet$ bajo el funtor $(-)^G$ es un complejo de cocadena definido en **Ab** al cual le podemos calcular sus grupos de cohomología.
Así definimos

$$H^n(G,A) = R^n(-)^G(A)$$

como el $n-$ésimo grupo de cohomología de G con coeficientes en A.
Recordando el isomorfismo natural de la proposición 1.4.2 (1):

$$R^0(-)^G \cong (-)^G,$$

obtenemos que

$$H^0(G,A) \cong A^G.$$

Los siguientes resultados nos serán útiles para poder hacer generalizaciones.
Si G es un grupo y A es un grupo abeliano, podemos definir una acción trivial de G sobre A de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \cdot : A \times G &\longrightarrow A \\ (a,g) &\longmapsto a\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$a \cdot g = a\,.$$

Al resultante $G-$módulo bajo la acción trivial lo denotaremos por TA .

Por otra parte, si

$$h : A \longrightarrow B$$

es un homomorfismo de grupos abelianos, podemos inducir un homomorfismo de $G-$módulos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Th : TA &\longrightarrow TB \\ a &\longmapsto h(a)\,. \end{aligned}$$

Con lo anterior hemos construido un funtor:

$$T : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}\,.$$

Observemos que para el grupo abeliano A, todos los elementos de TA son invariantes ante la acción de G, esto es

$$(TA)^G = A\,.$$

El resultado anterior, para cualquier $A \in \mathbf{Ab}$: $(TA)^G = A$, es el argumento principal para poder afirmar que

$$T \dashv (-)^G$$

Veamos esto. Usando la definición A.1.21, de funtor adjunto, $T \dashv (-)^G$ si existe una transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{Ab}} \Longrightarrow (-)^G T$$

tal que para cualquier objeto $A \in \mathbf{Ab}$, (TA, η_A) es la reflexión de A a lo largo de $(-)^G$. Probemos esto.
Sea $A \in \mathbf{Ab}$, definimos la transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{Ab}} \Longrightarrow (-)^G T$$

por

$$\eta_A = 1_A\,.$$

Notemos que en la definición de la transformación natural η se usa de manera implícita $(TA)^G = A$.
Mostremos que (TA, η_A) es la reflexión de A a lo largo de $(-)^G$.
Sean $M \in \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$ y $m : A \longrightarrow M^G$ un homomorfismo de grupos abelianos.

Definimos el morfismo

$$\begin{aligned} m' : TA &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto m(a)\,. \end{aligned}$$

Si $g \in G$,

$$\begin{aligned} m'(a \cdot g) &= m'(a) \\ &= m(a) \\ &= m(a) \cdot g \\ &= m'(a) \cdot g \end{aligned}$$

con esto mostramos que m' es un morfismo de $G-$módulos. Además por la forma en como se definió m', éste es el único morfismo con la propiedad

$$(m')^G 1_A = m\,.$$

En $\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$ En $\mathbf{Ab}$

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[d, dashed, "m'"'] \\ M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, dashed, "(m')^G"] \\ A \arrow[ur, "1_A"] \arrow[r, "m"'] & M\,. \end{tikzcd}$$

Por tanto $T \dashv (-)^G$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}} \arrow[d, bend left, "(-)^G"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Ab} \arrow[u, bend left, "T"]
\end{tikzcd}$$

Además, las siguientes proposiciones son equivalentes (teorema A.1.22):

(1) T es adjunto izquierdo a $(-)^G$.

(2) $(-)^G$ es adjunto derecho a T.

(3) Para cualquier $A \in \mathbf{Ab}$ y cualquier $M \in \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$, existe un isomorfismo natural:

$$\mathbf{Ab}(A, M^G) \cong \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}(TA, M)\,.$$

Usamos el tercer enunciado y sustituimos A por el grupo de enteros $\mathbb{Z}$ con la $G-$acción trivial, entonces

$$\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}(\mathbb{Z}, M) \cong \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, M^G)\,.$$

Por otra parte, mostremos que el funtor $\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, (-)^G)$ es naturalmente equivalente al funtor $(-)^G$. Sea $B \in \mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}$, definimos los homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \phi_B : \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B^G) &\longrightarrow B^G \\ m &\longmapsto m(1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi_B : B^G &\longrightarrow \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B^G) \\ b &\longmapsto \psi_B(b) : n \longmapsto nb\,, \end{aligned}$$

los cuales satisfacen:

$$\psi_B \phi_B = 1_{\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B^G)}$$

y

$$\phi_B \psi_B = 1_{B^G}\,.$$

Además, si $f : B_1 \longrightarrow B_2$ es un morfismo de $G-$módulos tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[d, "f"] & \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B_1^G) \arrow[r, "\phi_{B_1}"] \arrow[d] & B_1^G \arrow[d, "f^G"] \\
B_2 & \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B_2^G) \arrow[r, "\phi_{B_2}"] & B_2^G\,.
\end{tikzcd}$$

Sea $m \in \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, B^G)$, entonces

$$\phi_{B_1} : m \longmapsto m(1)$$

implica que

$$f^G : m(1) \longmapsto f^G(m(1)) .$$

Por otra parte

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, f^G) : m \longmapsto f^G m$$

implica que

$$\phi_{B_2} : f^G m \longmapsto (f^G m)(1) .$$

Por lo tanto

$$(f^G m)(n) = f^G(m(1)) .$$

Hemos demostrado que:

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, (-)^G) \cong (-)^G .$$

Por tanto, para cualquier $G-$módulo M:

$$\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}(\mathbb{Z}, M) \cong \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, M^G) \cong M^G .$$

Así obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.0.4. El funtor exacto izquierdo $(-)^G$ es naturalmente isomorfo a $\mathbf{Ab}^{\mathbf{G}^{op}}(\mathbb{Z}, -)$.

2.1. Cohomología de categorías

2.1.1. Definicion del funtor de cohomología

En esta sección generalizaremos la cohomología de grupos para obtener una cohomología de categorías.
Si $\mathbf{J}$ es una categoría pequeña podemos formar la categoría de funtores $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$. Como $\mathbf{Ab}$ es una categoría abeliana completa, $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ es una categoría abeliana completa.
Consideremos el funtor diagonal o funtor constante

$$\Delta : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$$

el cual está definido de la siguiente manera:

En objetos:

$$
\begin{aligned}
A \longmapsto \Delta A : \mathbf{J} &\longrightarrow \mathbf{Ab}\\
j &\longmapsto A\\
j_1 \to j_2 &\longmapsto 1_A : A \to A
\end{aligned}
$$

En morfismos:

$$A_1 \xrightarrow{u} A_2 \longmapsto \Delta A_1 \xrightarrow{\Delta u} \Delta A_2\,,$$

donde para cada $j \in \mathbf{J}$: $\Delta u_j = u$.

De manera similar al capítulo anterior pasamos a construir un funtor de $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ en $\mathbf{Ab}$, el cual sera adjunto derecho al funtor diagonal Δ.
La siguiente construcción es parecida al desarrollo que se hace en la demostración de la proposición 2.15.1 en [2], de [2] también se usará la definición de límite de un funtor ([2], definición 2.6.2).

Dado que la categoría $\mathbf{Ab}$ es completa, la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ es completa. Cada objeto en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ podemos relacionarlo de manera única (salvo isomorfismo) con un objeto en $\mathbf{Ab}$, esto es, si $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor entonces existe el límite de F definido en $\mathbf{Ab}$:

$$\left(\varprojlim F\,,\,(f_j : \varprojlim F \longrightarrow Fj)_{j\in\mathbf{J}}\right).$$

Ahora si $\alpha : F \Longrightarrow H$ es un morfismo en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$, entonces para cada $j \in \mathbf{J}$, $\alpha_j : Fj \longrightarrow Hj$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Por tanto podemos generar un cono sobre H definido en $\mathbf{Ab}$

$$\left(\varprojlim F\,,\,(\alpha_j f_j : \varprojlim F \longrightarrow Hj)_{j\in\mathbf{J}}\right).$$

Por otra parte $\left(\varprojlim H\,,\,(h_j : \varprojlim H \longrightarrow Hj)_{j\in\mathbf{J}}\right)$ es el límite de H, por lo cual existe un único homomorfismo de grupos abelianos

$$\varprojlim \alpha : \varprojlim F \longrightarrow \varprojlim H$$

de tal manera que para cualquier $j \in \mathbf{J}$:

$$h_j \varprojlim \alpha = \alpha_j f_j$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & Hj \\
\varprojlim F \arrow[rru, "\alpha_j f_j"] \arrow[rr, dashed, "\varprojlim\alpha"'] & & \varprojlim H \arrow[u, "h_j"']
\end{tikzcd}
.
$$

Ahora podemos definir el funtor:

$$\varprojlim : \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

de la siguiente manera.

En objetos:

$$F \longmapsto \varprojlim F$$

En morfismos:

$$\alpha : F \Longrightarrow H \longmapsto \varprojlim \alpha : \varprojlim F \longrightarrow \varprojlim H\,.$$

Pasemos a demostrar la siguiente adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}} \arrow[d, bend left, "\varprojlim"] \\ \mathbf{Ab} \arrow[u, bend left, "\Delta"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \end{tikzcd}$$

Antes demostremos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab} \arrow[r, "\Delta"] & \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}} \arrow[r, "\varprojlim"] & \mathbf{Ab} \end{tikzcd}$$

$$A \longmapsto \Delta A \longmapsto \varprojlim \Delta A = A\,.$$

$\varprojlim A = A$ es el argumento principal para poder probar que $\Delta \dashv \varprojlim$ similarmente a lo ocurrido con la adjunción en el capítulo anterior $\big((TA)^G = A \,\text{para cualquier grupo abeliano}\, A\big)$.

Sea A un grupo abeliano, definimos la transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{Ab}} \Longrightarrow \varprojlim \Delta$$

$$\eta_A = 1_A\,.$$

Veamos que $(\Delta A, \eta_A)$ es la reflexión de A a lo largo del funtor $\varprojlim$.

Sean G un objeto en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ y consideremos el siguiente morfismo en $\mathbf{A}$

$$g : A \longrightarrow \varprojlim G\,.$$

Definimos la transformación natural:

$$\phi : \Delta A \Longrightarrow G\,.$$

Para $j \in \mathbf{J}$

$$\phi_j = g_j g\,,$$

donde $g_j : \varprojlim G \longrightarrow Gj$ es el morfismo correspondiente al objeto $j \in \mathbf{J}$ del cono límite $\left(\varprojlim G,\, (g_j \varprojlim G \longrightarrow Gj)_{j\in\mathbf{J}}\right)$. Por tanto $\varprojlim \phi = g$. Además $\phi : \Delta A \Longrightarrow G$ es el único morfismo en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ tal que $g = \varprojlim \phi\, \eta_A$.

En $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ En $\mathbf{Ab}$

$$\begin{tikzcd}
\Delta A \arrow[d, Rightarrow, "\phi"'] \\
G
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \varprojlim \Delta A \arrow[d, "\varprojlim \phi"] \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[r, "g"'] & \varprojlim G
\end{tikzcd}\,.$$

Para probar que los funtores Δ y $\varprojlim$ son exacto derecho y exacto izquierdo respectivamente, bastará demostrar que son aditivos y luego usar la proposición 5.17 de [5].
Empecemos probando que $\Delta : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$ es aditivo. Sean $g, f : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathbf{Ab}$ y j un objeto en $\mathbf{J}$ entonces

$$\begin{aligned}
(\Delta\, g + f)_j &= g + f \\
&= (\Delta g)_j + (\Delta f)_j\,.
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\Delta\, g + f = \Delta g + \Delta f\,.$$

Ahora probemos que el funtor $\varprojlim : \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo. Sean $\alpha, \beta : F \Longrightarrow G$ morfismos en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}$. El homomorfismo de grupos abelianos

$$\varprojlim \alpha + \beta : \varprojlim F \longrightarrow \varprojlim G$$

es único respecto a la propiedad:

$$\text{Para cualquier } j \in \mathbf{J} : g_j : \varprojlim \alpha + \beta = (\alpha+\beta)_j f_j\,,$$

donde

$$g_j : \varprojlim G \longrightarrow Gj$$

y

$$f_j : \varprojlim F \longrightarrow F j$$

son morfismos que pertenecen al cono límite de G y F, respectivamente.

Por la proposición A.2.20

$$(\alpha+\beta)_j = \alpha_j + \beta_j\,,$$

luego si j es un objeto en $\mathbf{J}$:

$$\begin{aligned} g_j(\varprojlim \alpha + \varprojlim \beta) &= g_j \varprojlim \alpha + g_j \varprojlim \beta \\ &= \alpha_j f_j + \beta_j f_j \\ &= (\alpha_j + \beta_j) f_j \\ &= (\alpha+\beta)_j f_j\,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\varprojlim \alpha + \beta = \varprojlim \alpha + \varprojlim \beta$$

y por la proposición 5.17 en [5], el funtor Δ es exacto derecho y el funtor $\varprojlim$ es exacto izquierdo.

Proposición 2.1.1. $\varprojlim : \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor exacto izquierdo y es adjunto derecho al funtor exacto derecho Δ, es decir,

$$\varprojlim \vdash \Delta\,.$$

□

Por el teorema A.1.22, para cualquier grupo abeliano A y cualquier funtor $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, existe un isomorfismo natural

$$\mathbf{Ab}(A, \varprojlim F) \cong \mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}(\Delta A, F)\,.$$

Si sustituimos A por $\mathbb{Z}$, los siguientes homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \phi_F : \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \varprojlim F) &\longrightarrow \varprojlim F \\ m &\longmapsto m(1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi_F : \varprojlim F &\longrightarrow \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \varprojlim F) \\ x &\longmapsto \psi_F(x) : n \longmapsto nx \end{aligned}$$

nos garantizan que los funtores

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \varprojlim -) \quad \text{y} \quad \varprojlim$$

son naturalmente isomorfos, por tanto para cualquier funtor $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Ab}$:

$$\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}(\Delta\mathbb{Z}, F) \cong \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, \varprojlim F) \cong \varprojlim F\,.$$

Así se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.2. El funtor exacto izquierdo $\varprojlim$ es naturalmente isomorfo al funtor $\mathbf{Ab}^{\mathbf{J}}(\Delta\mathbb{Z},-)$.

Definición 2.1.3. Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. Un $\mathbf{C}-$*módulo izquierdo* es un funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Ab}$. Un $\mathbf{C}-$*módulo derecho* es un funtor contravariante de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{Ab}$, es decir, es un funtor de $\mathbf{C}^{op}$ en $\mathbf{Ab}$.
Si A y B son dos $\mathbf{C}-$módulos izquierdos (derechos), un $\mathbf{C}-$*morfismo izquierdo* (derecho) α de A en B es una transformación natural $\alpha : A \Longrightarrow B$.
Denotamos por $\mathbf{Mod}_L(\mathbf{C})$ a la categoría de $\mathbf{C}-$módulos izquierdos y $\mathbf{C}-$morfismos izquierdos, y denotamos por $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$ a la categoría de $\mathbf{C}-$módulos derechos y $\mathbf{C}-$morfismos derechos.

Observemos que $\mathbf{Mod}_L(\mathbf{C})$ es la categoría abeliana $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$ es la categoría abeliana $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$.
El funtor $\varprojlim : \mathbf{Mod}_R(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es un funtor exacto izquierdo aditivo. Definimos

$$H^n(\mathbf{C},A) = R^n\varprojlim(A)$$

como el $n-$ésimo grupo de cohomología de $\mathbf{C}$ con coeficientes en A, donde A es un $\mathbf{C}-$módulo derecho.

2.1.2. C-módulos derechos libres

En está sección definiremos objetos libres en la categoría $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$. Además, para una mejor comprensión del tema sugerimos al lector consultar el Apéndice.

Definición 2.1.4. Sea X un conjunto visto como una categoría discreta $\mathbf{X}$. Un $\mathbf{X}-$*conjunto* es un funtor conjunto-valuado

$$T : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

Si $T,R : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Con}$ son dos $\mathbf{X}-$conjuntos, un $\mathbf{X}-$*morfismo* de T a R es una transformación natural

$$\alpha : T \Longrightarrow R.$$

Denotaremos por $\mathbf{Con}^{\mathbf{X}}$ a la categoría cuyos objetos son $\mathbf{X}-$conjuntos y cuyos morfismos son $\mathbf{X}-$morfismos.
Si $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, observemos que cualquier $\mathbf{C}-$módulo (derecho ó izquierdo) puede inducir un $\mathbf{C_0}-$conjunto, donde C_0 es el conjunto de todos los objetos de $\mathbf{C}$ visto como una categoría. En efecto, si A es un $\mathbf{C}-$módulo derecho, definimos el funtor $A^* : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{Con}$ tal que para cada objeto $e \in \mathbf{C_0}$, A^*e es el conjunto subyacente del grupo abeliano Ae.
Por otra parte dado un $\mathbf{C_0}-$conjunto, T, el problema es construir un $\mathbf{C}-$módulo de tal manera que sea libre sobre T en algún sentido.
Comenzaremos con los objetos libres en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$. Nuestro punto de partida es el funtor que olvida

$$\mathbb{U}' : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \longrightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$$
$$\mathbf{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathbf{Con} \longmapsto \mathbf{C_0} \xrightarrow{\mathbb{U}'F} \mathbf{Con}$$
$$e \longmapsto Fe\,.$$

Necesitamos definir un funtor en dirección opuesta, él cual sea adjunto izquierdo a $\mathbb{U}$.
Construyamos el funtor

$$\mathbb{F} : \mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} \longrightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$$

de la siguiente manera. Para un objeto en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$

$$T : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{Con}\,,$$

definimos

$$\mathbb{F}(T) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}\,.$$

Si $e \in C_0$, entonces

$$\mathbb{F}(T)(e) = \{(t,x) : x \in \mathbf{C} \text{ tal que } d(x) = e \text{ y } t \in T\,(r(x))\}\,.$$

Si $a : f \longrightarrow e$ es un morfismo en $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(T)(a) : \mathbb{F}(T)(e) &\longrightarrow \mathbb{F}(T)(f) \\ (t,x) &\longmapsto (t,xa)\,. \end{aligned}$$

Como $d(x) = e$, entonces $d(xa) = f$ y $r(xa) = r(x)$. Por tanto $t \in T\,(r(xa))$.

Proposición 2.1.5. Para cualquier $\mathbf{C_0}-$conjunto, T, $\mathbb{F}(T) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$ es un funtor.

Demostración. Sea $e \in C_0$, tenemos la función:

$$\mathbb{F}(T)(e) : \mathbb{F}(T)(e) \longrightarrow \mathbb{F}(T)(e)\,.$$

Para $(t,x) \in \mathbb{F}(T)(e)$, $\mathbb{F}(T)(e)(t,x) = (t,xe) = (t,x)$, por tanto $\mathbb{F}(T)(e)$ es una función identidad.
Ahora supongamos que existe $ba \in \mathbf{C}$. Sea $(t,x) \in \mathbb{F}(T)(r(ab)) = \mathbb{F}(T)(r(a))$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(T)(ab)\,[(t,x)] &= (t,x(ab)) \\ &= (t,(xa)b) \\ &= \mathbb{F}(T)(b)\,[(t,xa)] \\ &= \mathbb{F}(T)(b)\,(\mathbb{F}(T)(a)\,[(t,x)]) \\ &= \mathbb{F}(T)(b)\mathbb{F}(T)(a)\,[(t,x)]\,. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{F}(T) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$ es un funtor. □

Hasta aquí hemos probado que el funtor $\mathbb{F} : \mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} \longrightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C^{op}}}$ está bien definido en objetos, pasemos a definirlo en morfismos.

Sean T y R $\mathbf{C_0}-$conjuntos y

$$\alpha : T \Longrightarrow R$$

un morfismo de $\mathbf{C_0}-$conjuntos. Definimos

$$\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}(T) \Longrightarrow \mathbb{F}(R)\,.$$

Para cada objeto $e \in \mathbf{C}$ se define la función

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\alpha)_e : \mathbb{F}(T)(e) &\longrightarrow \mathbb{F}(R)(e) \\ (t,x) &\longmapsto \left(\alpha_{r(x)}(t),x\right)\,. \end{aligned}$$

Si consideramos $a : f \longrightarrow e$ un morfismo en $\mathbf{C}$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "a"'] & \mathbb{F}(T)(e) \arrow[r, "\mathbb{F}(\alpha)_e"] \arrow[d, "\mathbb{F}(T)(a)"'] & \mathbb{F}(R)(e) \arrow[d, "\mathbb{F}(R)(a)"] \\ e & \mathbb{F}(T)(f) \arrow[r, "\mathbb{F}(\alpha)_f"] & \mathbb{F}(R)(f)\,. \end{tikzcd}$$

Sea $(t,x) \in \mathbb{F}(T)(e)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\alpha)_f\left(\mathbb{F}(T)(a)\left[(t,x)\right]\right) &= \mathbb{F}(\alpha)_f\left[(t,xa)\right] \\ &= \left(\alpha_{r(xa)}(t),xa\right) \\ &= \left(\alpha_{r(x)}(t),xa\right) \\ &= \mathbb{F}(R)(a)\left[\left(\alpha_{r(x)}(t),x\right)\right] \\ &= \mathbb{F}(R)(a)\left(\mathbb{F}(\alpha)_e\left[(t,x)\right]\right)\,. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{F}$ está bien definido en morfismos.
Para un $\mathbf{C_0}-$ conjunto, T, podemos construir el siguiente morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$

$$\eta_T : T \Longrightarrow \mathbb{U}'\mathbb{F}(T)\,.$$

Dado $e \in C_0$, definimos la función

$$\begin{aligned} \eta_{T_e} : T(e) &\longrightarrow \mathbb{U}'\mathbb{F}(T)(e) \\ t &\longmapsto (t,e)\,. \end{aligned}$$

Este nuevo morfismo, η_T, es el objeto principal para probar que $\mathbb{F}$ es adjunto izquierdo a $\mathbb{U}'$, además para construir un diagrama similar al de grupo libre como en la definición dada en la página 343 de [17]
Comencemos por probar que $\mathbb{F} \dashv \mathbb{U}'$. Definimos la transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}} \Longrightarrow \mathbb{U}'\mathbb{F}\,.$$

Para T un $\mathbf{C_0}-$conjunto, η_T es el morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$ previamente definido. Verifiquemos que en efecto es una transformación natural. Sean $\alpha : T \longrightarrow R$ un morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$ y $e \in C_0$:

$$\begin{array}{ccc} T(e) & & \\ \Big\downarrow \alpha_e & & \\ R(e) & & \end{array} \qquad \begin{tikzcd} T(e) \arrow[r, "\eta_{T_e}"] \arrow[d, "\alpha_e"'] & \mathbb{U}'\mathbb{F}(T)(e) \arrow[d, "\mathbb{U}'\mathbb{F}(\alpha_e)"] \\ R(e) \arrow[r, "\eta_{R_e}"'] & \mathbb{U}'\mathbb{F}(R)(e)\,. \end{tikzcd}$$

Si $t \in T(e)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{U}'\mathbb{F}(\alpha)_e\left(\eta_{T_e}(t)\right) &= \mathbb{U}'\mathbb{F}(\alpha)_e\,[(t,e)] \\ &= \left(\alpha_{r(e)}(t), e\right) \\ &= \left(\alpha_e(t), e\right) \\ &= \eta_{R_e}\left(\alpha_e(t)\right)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $e \in C_0$ el diagrama de arriba conmuta, implicando que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{c} T \\ \Big\Downarrow \alpha \\ R \end{array} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "\eta_T"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] & \mathbb{U}'\mathbb{F}(T) \arrow[d, Rightarrow, "\mathbb{U}'\mathbb{F}(\alpha)"] \\ R \arrow[r, Rightarrow, "\eta_R"'] & \mathbb{U}'\mathbb{F}(R)\,. \end{tikzcd}$$

Hasta aquí, hemos verificado que η es una transformación natural. Resta probar que para cualquier $\mathbf{C_0}-$conjunto, T, $(\mathbb{F}(T), \eta_T)$ es la reflexión de T a lo largo de $\mathbb{U}'$. Supongamos que existen H un objeto en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ y $\phi : T \Longrightarrow \mathbb{U}'H$ un morfismo de $\mathbf{C_0}-$conjuntos, entonces definimos el morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$:

$$\psi : \mathbb{F}(T) \Longrightarrow H\,.$$

Para $e \in C_0$

$$\begin{aligned} \psi_e : \mathbb{F}(T)(e) &\longrightarrow H(e) \\ (t,x) &\longmapsto H(x)\left(\phi_{r(x)}(t)\right)\,. \end{aligned}$$

Comencemos probando que en efecto ψ es una transformación natural. Sea $a : f \longrightarrow e$ un morfismo en $\mathbf{C}$

$$\begin{array}{c} f \\ \Big\downarrow a \\ e \end{array} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{F}T(e) \arrow[r, "\psi_e"] \arrow[d, "\mathbb{F}(T)(a)"'] & H(e) \arrow[d, "H(a)"] \\ \mathbb{F}(T)(f) \arrow[r, "\psi_f"'] & H(f)\,. \end{tikzcd}$$

Si $(x,t) \in \mathbb{F}(T)(e)$, entonces

$$
\begin{aligned}
H(a)\left(\psi_e\left[(t,x)\right]\right) &= H(a)\left(H(x)\left(\phi_{r(x)}(t)\right)\right) \\
&= H(xa)\left(\phi_{r(x)}(t)\right) \\
&= H(xa)\left(\phi_{r(xa)}(t)\right) \\
&= \psi_f\left[(t,xa)\right] \\
&= \psi_f\left(\mathbb{F}(T)(a)\left[(t,x)\right]\right).
\end{aligned}
$$

Por tanto el diagrama anterior conmuta, es decir, ψ es un morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$. Resta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}(T) \arrow[dd, Rightarrow, "\psi"'] & & \mathbb{U}'\mathbb{F}(T) \arrow[dd, Rightarrow, "\mathbb{U}(\psi)"] \\
& T \arrow[ur, Rightarrow, "\eta_T"] \arrow[dr, Rightarrow, "\phi"'] & \\
H & & \mathbb{U}'(H).
\end{tikzcd}
$$

Sean $e \in C_0$ y $t \in T(e)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}(T)(e) \arrow[dd, "\psi_e"'] & & \mathbb{U}'\mathbb{F}(T)(e) \arrow[dd, "\mathbb{U}'(\psi)_e"] \\
& T(e) \arrow[ur, "\eta_{T_e}"] \arrow[dr, "\phi_e"'] & \\
H(e) & & \mathbb{U}'(H)(e)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}'(\psi)_e\left(\eta_{T_e}(t)\right) &= \mathbb{U}'(\psi)_e\left[(t,e)\right] \\
&= H(e)\left(\phi_{r(e)}(t)\right) \\
&= \phi_e(t).
\end{aligned}
$$

Por tanto para cualquier $e \in C_0$:

$$\mathbb{U}'(\psi)_e \eta_{T_e} = \phi_e .$$

Luego

$$\mathbb{U}'(\psi)\eta_T = \phi .$$

Por último notemos que por la forma en como se definió ψ, éste es el único morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ con la propiedad anterior, $\mathbb{U}'(\psi)\eta_T = \phi$.

Proposición 2.1.6. Tenemos la siguiente adjunción:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[d, bend left, "\mathbb{U}'"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} . \arrow[u, bend left, "\mathbb{F}"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

□

Regresando con la pareja $\left(\mathbb{F}(T), \eta_T\right)$, la cual es la reflexión de T a lo largo del funtor $\mathbb{U}'$, existe una construcción similar a la definición de grupo libre presentada en la página 343 de [17].
Si X es un objeto en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$ entonces para cualquier objeto $G \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ y cualquier morfismo $f : X \Longrightarrow \mathbb{U}'(G)$ en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$, existe un único morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, $\phi : \mathbb{F}(X) \Longrightarrow G$, tal que $\mathbb{U}'(\phi)$ extiende a f a lo largo de η_X.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U}'\mathbb{F}(X) \arrow[drr, Rightarrow, "\mathbb{U}'(\psi)"] & & \\
X \arrow[u, Rightarrow, "\eta_X"] \arrow[rr, Rightarrow, "f"'] & & \mathbb{U}'(G).
\end{tikzcd}$$

Nota: Para la siguiente construcción se sugiere al lector consultar en [2], el ejemplo 3.1.6.c, la proposición 3.2.1 y la proposición 3.2.4 .

Por el ejemplo 3.1.6.c en [2] tenemos los siguientes funtores

$$U : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

y

$$G : \mathbf{Con} \longrightarrow \mathbf{Ab}\,,$$

donde U es el funtor que olvida y G es el funtor que manda cada conjunto X en el grupo abeliano libre generado por X. Además

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab} \arrow[d, bend left, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}. \arrow[u, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Usando la proposición 3.2.4 en [2], podemos implicar la adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[d, bend left, "\mathbb{U}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}, \arrow[u, bend left, "\mathbb{G}"]
\end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña.

Por tanto tenemos las siguientes adjunciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[d, bend left, "\mathbb{U}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[u, bend left, "\mathbb{G}"] \arrow[d, bend left, "\mathbb{U}'"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} \arrow[u, bend left, "\mathbb{F}"]
\end{tikzcd}$$

De la proposición 3.2.1 en [2], implicamos la adjunción

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[d, bend left, "\mathbb{U}'\mathbb{U}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} \arrow[u, bend left, "\mathbb{G}\mathbb{F}"]
\end{tikzcd}.$$

Sean $\mathbb{Z} = \mathbb{G}\mathbb{F}$ y $\mathbb{W} = \mathbb{U}'\mathbb{U}$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[d, bend left, "\mathbb{W}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}} \arrow[u, bend left, "\mathbb{Z}"]
\end{tikzcd},$$

escrito de otra forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C}) \arrow[d, bend left, "\mathbb{W}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C_0} - \text{conjuntos} \arrow[u, bend left, "\mathbb{Z}"]
\end{tikzcd}.$$

Equivalentemente

$$\mathbb{W} \vdash \mathbb{Z},$$

equivalentemente, existen

$$\eta : 1_{\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}} \Longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}$$

y

$$\varepsilon : \mathbb{Z}\mathbb{W} \Longrightarrow 1_{\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})}$$

transformaciones naturales tales que para cualquier objeto F en $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$ y cualquier objeto T en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$, existe un isomorfismo natural en ambas entradas

$$\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}\left(T, \mathbb{W}(F)\right) \cong \mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})\left(\mathbb{Z}(T), F\right) .$$

De las equivalencias anteriores la transformación natural, η, nos sera de gran útilidad en las siguientes proposiciones. Veamos de manera explícita como está definida η.
Sean T un $\mathbf{C_0}-$conjunto y $e \in C_0$, entonces $\mathbb{Z}(T)(e)$ es el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\mathbb{F}(T)(e)$, esto es,

$$\mathbb{Z}(T)(e) = \sum_{(t,x) \in \mathbb{F}(T)(e)} \mathbb{Z} .$$

Denotamos por $f_{(t,x)}$ a los elementos generadores de $\mathbb{Z}(T)(e)$, para algún $(t,x) \in \mathbb{F}(T)(e)$. Notemos que $f_{(t,x)}$ es una función selectora, $f_{(t,x)} : \mathbb{F}(T)(e) \longrightarrow \mathbb{Z}$, tal que asigna 1 al elemento (t,x) y asigna 0 en otro caso.

Si T es un $\mathbf{C_0}-$conjunto, el $\mathbf{C_0}-$morfismo

$$\eta_T : T \Longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}(T)$$

está definido de la siguiente manera.

Para $e \in C_0$:

$$\begin{aligned} \eta_{T_e} : T(e) &\longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}(T)(e) \\ t &\longmapsto f_{(t,e)} . \end{aligned}$$

Definición 2.1.7. Sean $F : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un $\mathbf{C}-$módulo derecho, $T : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{Con}$ un $\mathbf{C_0}-$conjunto y $\eta : T \Longrightarrow \mathbb{W}(F)$ un $\mathbf{C_0}-$morfismo. Decimos que F es un $\mathbf{C}-$*módulo derecho libre sobre* T si para cualquier $\mathbf{C}-$módulo derecho $F' : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ y cualquier $\mathbf{C_0}-$morfismo $\eta' : T \Longrightarrow \mathbb{W}(F')$, existe un único morfismo $\alpha : F \longrightarrow F'$ en $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$ tal que $\mathbb{W}(\alpha)\eta = \eta'$.

En $\mathbf{Mod}_R(\mathbf{C})$ En $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] \\ F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{W}(F) \arrow[dd, Rightarrow, "\mathbb{W}(\alpha)"] \\ T \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta'"'] & \\ & \mathbb{W}(F') \end{tikzcd}$$

Observación 2.1.8. (1) La definición que dimos de $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre T es un caso particular de álgebras libres para una mónada T ([3], definición 4.1.5).

(2) Notemos la similitud de la definición de $\mathbf{C}-$módulo derecho libre con respecto a la definición de reflexión a lo largo de un funtor, debido a está similitud podemos enunciar las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1.9. Sean $F : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un $\mathbf{C}-$módulo derecho, $T : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{Con}$ un $\mathbf{C_0}-$conjunto y $\eta : T \Longrightarrow \mathbb{W}(F)$ un $\mathbf{C_0}-$morfismo. F es un $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre T si y sólo si (F,η) es la reflexión T a lo largo de $\mathbb{W}$.

Proposición 2.1.10. Si T es un $\mathbf{C_0}-$conjunto, entonces existe un $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre T.

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ es adjunto izquierdo a $\mathbb{W}$, existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}} \Longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}$ de tal manera que si T es un objeto en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$ entonces $(\mathbb{Z}(T),\eta_T)$ es la reflexión de T a lo largo de $\mathbb{W}$. Donde $\eta_T : T \Longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}(T)$ es el $\mathbf{C_0}-$morfismo que se definió de la siguiente manera : para $e \in C_0$, $\eta_{T_e} : t \longmapsto f_{(t,e)}$. Por tanto $\mathbb{Z}(T)$ es el $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre T . $\square$

Corolario 2.1.11. Sean $\mathbf{C}$ una categoría pequeña, T un $\mathbf{C_0}-$conjunto, F un $\mathbf{C}-$módulo derecho y $\beta : T \longrightarrow \mathbb{W}(F)$ un $\mathbf{C_0}-$morfismo. El único $\mathbf{C}-$morfismo $\alpha : \mathbb{Z}(T) \Longrightarrow F$ tal que $\mathbb{W}(\alpha)\eta_T = \beta$, es definido sobre los generadores de $\mathbb{Z}(T)(e)$, para cualquier $e \in C_0$, y se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha_e : \mathbb{Z}(T)(e) &\longrightarrow F(e) \\ f_{(t,x)} &\longmapsto F(x)\left(\beta_{r(x)}(t)\right). \end{aligned}$$

Proposición 2.1.12. Los $\mathbf{C}-$módulos derechos libres son proyetivos en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Demostración. Sean P un $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre el $\mathbf{C_0}-$conjunto T. Probemos que P es un objeto proyectivo en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$, para ello tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, Rightarrow, "\beta"] \\ A \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

donde α es un epimorfismo y β es un morfismo, ambos en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$.
Como $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$ es finitamente cocompleta ([3], proposición 1.5.3), para cada $e \in C_0$, α_e es un epimorfismo en $\mathbf{Ab}$ ([2], dual al corolario 2.15.3), entonces si $e \in C_0$ y $x \in T(e)$, existe *(y elegimos)* $y \in \mathbb{W}(A)(e)$ tal que

$$\mathbb{W}(\alpha)_e(y) = \mathbb{W}(\beta)_e\left(\eta_{T_e}(x)\right),$$

donde $\eta_T : T \Longrightarrow \mathbb{W}(P)$ es el morfismo en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C_0}}$ que existe debido a que P es un $\mathbf{C}-$módulo libre sobre T .

Definimos el $\mathbf{C_0}-$morfismo

$$V : T \Longrightarrow \mathbb{W}(A)\,.$$

Para $e \in C_0$

$$V_e : x \longmapsto y\,,$$

donde y tiene la propiedad

$$\mathbb{W}(\alpha)_e(y) = \mathbb{W}(\beta)_e\left(\eta_{T_e}(x)\right)\,,$$

$$\begin{tikzcd}
T(e) \arrow[dr, "\eta_{T_e}"] \arrow[dd, "V_e"'] & \\
& \mathbb{W}(P)(e) \arrow[d, "\mathbb{W}(\beta)_e"] \\
\mathbb{W}(A)(e) \arrow[r, "\mathbb{W}(\alpha)_e"] & \mathbb{W}(B)(e)\,.
\end{tikzcd}$$

Podemos implicar la existencia de un único morfismo $\varphi : P \Longrightarrow A$ en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$ tal que

$$\mathbb{W}(\varphi)\eta_T = V$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, Rightarrow, "\eta_T"] \arrow[dd, Rightarrow, "V"'] & \\
& \mathbb{W}(P) \arrow[dl, Rightarrow, "\mathbb{W}(\varphi)"] \arrow[d, Rightarrow, "\mathbb{W}(\beta)"] \\
\mathbb{W}(A) \arrow[r, Rightarrow, "\mathbb{W}(\alpha)"] & \mathbb{W}(B)\,.
\end{tikzcd}$$

Por tanto para $e \in C_0$ y $x \in T(e)$,

$$\mathbb{W}(\alpha)_e\left(V_e(x)\right) = \mathbb{W}(\beta)_e\left(\eta_{T_e}(x)\right)\,.$$

Así que

$$\mathbb{W}(\alpha)_e\left[\mathbb{W}(\varphi)_e\left(\eta_{T_e}(x)\right)\right] = \mathbb{W}(\beta)_e\left(\eta_{T_e}(x)\right)$$

y por tanto

$$\mathbb{W}(\alpha)\mathbb{W}(\varphi)\eta_T = \mathbb{W}(\beta)\eta_T\,.$$

Por otra parte existe un único morfismo en $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{op}}$,

$$\widehat{V} : P \Longrightarrow B$$

con la propiedad

$$\mathbb{W}(\widehat{V})\eta_T = \mathbb{W}(\alpha)V\,.$$

Notemos que:

$$\mathbb{W}(\beta)\eta_T = \mathbb{W}(\alpha)\mathbb{W}(\varphi)\eta_T = \mathbb{W}(\alpha)V\,,$$

por lo cual

$$\mathbb{W}(\beta) = \mathbb{W}(\alpha)\mathbb{W}(\varphi)\,.$$

Así que si $e \in C_0$,

$$\mathbb{W}(\beta)_e = \mathbb{W}(\alpha)_e\mathbb{W}(\varphi)_e\,.$$

Luego si $e \in C_0$,

$$\beta_e = \alpha_e\varphi_e$$

y por tanto

$$\beta = \alpha\varphi\,.$$

$\square$

2.1.3. Calculando la cohomología de categorías

Definimos el $\mathbf{C}-$módulo derecho trivial

$$\Delta\mathbb{Z} : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

Para $e \in C_0$,

$$\Delta\mathbb{Z}(e) = \mathbb{Z}\,,$$

y para cada $x : e \longrightarrow f$ morfismo en $\mathbf{C}$,

$$\Delta\mathbb{Z}(x) = 1_{\mathbb{Z}}\,.$$

Habíamos definido el nervio de una categoría $\mathbf{C}$ como una sucesión de conjuntos $(Ner_n(\mathbf{C}))_{n\in\omega}$, donde $Ner_0(\mathbf{C}) = C_0$ y para cada $n \in \omega - \{0\}$,

$$Ner_n(\mathbf{C}) = \{(x_n,\ldots,x_2,x_1) :\ x_i \in \mathbf{C} \quad \text{y} \quad d(x_{i+1}) = r(x_i)\}\ .$$

Además teníamos las aplicaciones cara

$$d_0, d_1 : Ner_1(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_0(\mathbf{C})$$

definidos por

$$d_0(x) = r(x)$$

y

$$d_1(x) = d(x)\,,$$

y para $n \geq 1$

$$d_i : Ner_{n+1}(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_n(\mathbf{C})\,; \quad i \in \{0,\ldots,n+1\}$$

$$d_i : (x_{n+1},x_n,\ldots,x_1) \longmapsto \begin{cases} (x_{n+1},x_n,\ldots,x_2) & \text{si} \quad i = 0 \\ (x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_1) & \text{si} \quad i = 1,\ldots,n \\ (x_n,\ldots,x_1) & \text{si} \quad i = n+1\,. \end{cases}$$

Las aplicaciones degeneración:

$$s_i : Ner_n(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_{n+1}(\mathbf{C})\,, \quad 0 \leq i \leq n$$

estan dados por:

$$s_i : (a_n,a_{n-1},\ldots,a_1) \longmapsto \begin{cases} (a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,d(a_1)) & \text{si} \quad i = 0 \\ (a_n,a_{n-1},\ldots,r(a_i),a_i,\ldots,a_1) & \text{si} \quad i = 1,\ldots,n\,. \end{cases}$$

Este concepto, $Ner_n(\mathbf{C})$, lo reformularemos para construir un objeto en la categoría de $\mathbf{C_0}-$conjuntos de la siguiente manera. Sea $n \in \omega$, definimos el funtor

$$Ner_n(\mathbf{C}) : \mathbf{C_0} \longrightarrow \mathbf{Con}\,.$$

Para $e \in C_0$:

$$Ner_n(\mathbf{C})(e) = \{(x_n, \ldots, x_1) \in Ner_n(\mathbf{C}) :\ d(x_1) = e\} .$$

Ahora que $Ner_n(\mathbf{C})$ lo podemos considerar como un $\mathbf{C_0}-$conjunto, $\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))$ es el $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre $Ner_n(\mathbf{C})$. Si $e \in C_0$, $\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))\,(e)$ es el grupo abeliano libre generado por

$$\begin{aligned}\mathbb{F}\,(Ner_n(\mathbf{C}))\,(e) &= \{((x_n, \ldots, x_1), y) \in Ner_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C} :\ y \in \mathbf{C},\, d(y) = e \quad \text{y} \quad (x_n, \ldots, x_1) \in Ner_n(\mathbf{C})\,(r(y))\} \\ &= \{((x_n, \ldots, x_1), y) \in Ner_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C} :\ d(y) = e \quad \text{y} \quad d(x_1) = r(y)\} .\end{aligned}$$

Notemos que si para cada elemento en $\mathbb{F}(Ner_n(\mathbf{C}))(e)$ hacemos el siguiente cambio de notación:

$$((x_n, \ldots, x_1), y) = (x_n, \ldots, x_1, y)\,,$$

tenemos como resultado

$$\mathbb{F}\,(Ner_n(\mathbf{C}))\,(e) = Ner_{n+1}(\mathbf{C})(e)\,.$$

Como $\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))$ es el $\mathbf{C}-$módulo derecho libre sobre $Ner_n(\mathbf{C})$, tenemos el $\mathbf{C_0}$-morfismo

$$\eta_{Ner_n(\mathbf{C})} : Ner_n(\mathbf{C}) \Longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))$$

definido para cada $e \in C_0$ por

$$\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e} : (x_n, \ldots, x_1) \longmapsto f_{((x_n, \ldots, x_1), e)}\,.$$

Usando el cambio de notación introducido lineas arriba y observando que $e = d(x_1)$ tenemos:

$$\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e} : (x_n, \ldots, x_1) \longmapsto f_{(x_n, \ldots, x_1, d(x_1))}\,,$$

para cualquier $e \in C_0$.

Dado un elemento $e \in C_0$ usaremos el morfismo

$$\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e} : Ner_n(\mathbf{C})(e) \longrightarrow \mathbb{W}\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C})(e))$$

junto con los mapeos de cara

$$d_0, d_1, \ldots, d_{n+1} : Ner_{n+1}(\mathbf{C}) \longrightarrow Ner_n(\mathbf{C})$$

para construir un $\mathbf{C_0}-$morfismo de $Ner_{n+1}(\mathbf{C})$ en $\mathbb{W}\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))$ el cual nos será de utilidad más adelante.
Fijemos $n \in \omega$ y $e \in C_0$. Si $(x_{n+1}, \ldots, x_1) \in Ner_{n+1}(\mathbf{C})(e)$, entonces $(x_{n+1}, \ldots, x_1) \in \mathbb{F}\,(Ner_n(\mathbf{C})(e))$ por tanto $f_{(x_{n+1}, \ldots, x_1)} \in \mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))\,(e)$.
Usando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{W}\mathbb{Z}\,(Ner_n(\mathbf{C}))\,(e) \\ Ner_{n+1}(\mathbf{C})(e) \arrow[r, "d_i \quad (0 \le i \le n+1)"'] & Ner_n(\mathbf{C})(e) \arrow[u, "\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}"'] \end{tikzcd}$$

obtenemos la valuaciones:

$$(x_{n+1},\dots,x_1) \overset{d_1}{\longmapsto} (x_{n+1},\dots,x_2x_1) \overset{\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}}{\longmapsto} f_{(x_{n+1},\dots,x_2x_1,d(x_1))}$$

$$(x_{n+1},\dots,x_1) \overset{d_2}{\longmapsto} (x_{n+1},\dots,x_3x_2,x_1) \overset{\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}}{\longmapsto} f_{(x_{n+1},\dots,x_3x_2,x_1,d(x_1))}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(x_{n+1},\dots,x_1) \overset{d_i}{\longmapsto} (x_{n+1},\dots,x_{i+1}x_i,\dots,x_1) \overset{\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}}{\longmapsto} f_{(x_{n+1},\dots,x_{i+1}x_i,\dots,x_1,d(x_1))}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(x_{n+1},\dots,x_1) \overset{d_n}{\longmapsto} (x_{n+1}x_n,\dots,x_1) \overset{\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}}{\longmapsto} f_{(x_{n+1}x_n,\dots,x_1,d(x_1))}$$

$$(x_{n+1},\dots,x_1) \overset{d_{n+1}}{\longmapsto} (x_n,\dots,x_1) \overset{\eta_{Ner_n(\mathbf{C})_e}}{\longmapsto} f_{(x_n,\dots,x_1,d(x_1))}$$

Por tanto definimos el $\mathbf{C_0}-$morfismo

$$\bar{d}_n : Ner_{n+1}(\mathbf{C}) \Longrightarrow \mathbb{WZ}(Ner_n(\mathbf{C}))\ .$$

Para $e \in C_0$:

$$\bar{d}_{n_e} : (x_{n+1},\dots,x_1) \longmapsto f_{(x_{n+1},\dots,x_1)} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\dots,x_{i+1}x_i,\dots,x_1,d(x_1))} + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\dots,x_1,d(x_1))}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{WZ}(Ner_{n+1}(\mathbf{C})) & & \mathbb{WZ}(Ner_n(\mathbf{C})) \\
Ner_{n+1}(\mathbf{C}) \arrow[u, Rightarrow, "\eta_{Ner_{n+1}(\mathbf{C})}"] \arrow[urr, Rightarrow, "\bar{d}_n"'] & &
\end{tikzcd}\ .$$

Por tanto existe un único morfismo de $\mathbf{C}-$módulos derechos

$$d_n : \mathbb{Z}(Ner_{n+1}(\mathbf{C})) \Longrightarrow \mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C}))$$

tal que $\mathbb{W}(d_n)\eta_{Ner_{n+1}(\mathbf{C})} = \bar{d}_n$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{W}\mathbb{Z}(Ner_{n+1}(\mathbf{C})) \arrow[r, Rightarrow, "\mathbb{W}(d_n)"] & \mathbb{W}\mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C})) \\
Ner_{n+1}(\mathbf{C}) \arrow[u, Rightarrow, "\eta_{Ner_{n+1}(\mathbf{C})}"] \arrow[ur, Rightarrow, "\bar{d}_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Este morfismo de $\mathbf{C}-$módulos derechos

$$d_n : \mathbb{Z}(Ner_{n+1}(\mathbf{C})) \Longrightarrow \mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C}))$$

está definido sobre los generadores de $\mathbb{Z}(Ner_{n+1}(\mathbf{C}))(e)$, $e \in C_0$, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
d_{n_e} : \mathbb{Z}(Ner_{n+1}(\mathbf{C}))(e) &\longrightarrow \mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C}))(e) \\
f_{(x_{n+1},\ldots,x_0)} &\longmapsto \mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C}))(x_0)\left[\bar{d}_{n_{r(x)}}(x_{n+1},\ldots,x_1)\right].
\end{aligned}
$$

Esto es:

$$
\begin{aligned}
d_{n_e}\left(f_{(x_{n+1},\ldots,x_0)}\right) &= \mathbb{Z}(Ner_n(\mathbf{C}))(x_0)\Bigg[f_{(x_{n+1},\ldots,x_1)} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_1,d(x_1))} \\
&\qquad + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\ldots,x_1,d(x_1))}\Bigg] \\
&= f_{(x_{n+1},\ldots,x_1x_0)} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_1,d(x_1)x_0)} \\
&\qquad + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\ldots,x_1,d(x_1)x_0)} \\
&= f_{(x_{n+1},\ldots,x_1x_0)} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_1,x_0)} \\
&\qquad + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\ldots,x_1,x_0)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_1,x_0)} + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\ldots,x_1,x_0)}.
\end{aligned}
$$

Por último definimos el $\mathbf{C_0}-$morfismo

$$\bar{\varepsilon} : Ner_0(\mathbf{C}) \Longrightarrow \mathbb{W}(\Delta\mathbb{Z}).$$

Para $e \in C_0$

$$\bar{\varepsilon}_e : b \longmapsto 1_{\mathbb{Z}}.$$

El cual genera el único morfismo de **C**-módulos derechos

$$\varepsilon : \mathbb{Z}\left(Ner_0(\mathbf{C})\right) \Longrightarrow \Delta\mathbb{Z}$$

tal que

$$\varepsilon\eta_{Ner_0(\mathbf{C})} = \bar{\varepsilon}\,.$$

Proposición 2.1.13. Para cualquier categoría pequeña **C**, la sucesión

$$\cdots \mathbb{Z}\left(Ner_2(\mathbf{C})\right) \xrightarrow{\quad d_1 \quad} \mathbb{Z}\left(Ner_1(\mathbf{C})\right) \xrightarrow{\quad d_0 \quad} \mathbb{Z}\left(Ner_0(\mathbf{C})\right) \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} \Delta\mathbb{Z} \xrightarrow{\qquad} 0\,.$$

es un complejo de cadena conformado por objetos proyectivos en la categoría de $\mathbf{C}-$módulos derechos.

Demostración. Sean $e \in C_0$ y $n \in \omega$. Basta demostrar que $d_{n_e} d_{n+1_e} = 0\,.$

Sea $f_{(x_{n+2},\ldots,x_0)}$ un generador en $\mathbb{Z}\left(Ner_{n+2}(\mathbf{C})\right)(e)$, para algún $(x_{n+2},\ldots,x_0) \in \mathbb{F}(Ner_{n+2}(\mathbf{C}))(e) = Ner_{n+3}(\mathbf{C})(e)\,.$ Entonces

$$\begin{aligned}
d_{n_e}\left(d_{n+1_e}(f_{(x_{n+2},\ldots,x_0)})\right) &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_{(x_{n+2},\ldots,x_{j+1}x_j,\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} \\
&\quad + (-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} + (-1)^{2n+2} f_{(x_n,\ldots,x_0)} \\
&\quad + (-1)^{n+2}\left\{\textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} + (-1)^{n+1} f_{(x_n,\ldots,x_0)}\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_{(x_{n+2},\ldots,x_{j+1}x_j,\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} \\
&\quad + (-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} + (-1)^{2n+2} f_{(x_n,\ldots,x_0)} \\
&\quad + (-1)^{n+2}\textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{(x_{n+1},\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} + (-1)^{2n+3} f_{(x_n,\ldots,x_0)} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j} f_{(x_{n+2},\ldots,x_{j+1}x_j,\ldots,x_{i+1}x_i,\ldots,x_0)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Cohomología de grupoides ordenados

En este capítulo mostraremos que la cohomología de un grupoide ordenado puede ser definida como la cohomología de una categoría pequeña. Para una mejor comprensión del tema sugerimos al lector consultar el Apéndice.

3.1. Acciones de semigrupos inversos

El material de está sección proporciona una motivación para la definición de acción de un grupoide ordenado. Sea S un semigrupo. Una acción derecha de S sobre un conjunto X es una función

$$\begin{aligned} \cdot\ : X \times S &\longrightarrow X \\ (x,s) &\longmapsto x \cdot s \end{aligned}$$

tal que para cualquier $s,t \in S$ y $x \in X$:

$$x \cdot (st) = (x \cdot s) \cdot t\,.$$

Si ocurre que S es un semigrupo inverso entonces obtenemos una acción de semigrupo inverso. Sin embargo está definición frecuentemente no es suficiente para semigrupos inversos debido a que no respeta todas las estructuras extras. En particular requerimos de una acción que tome en cuenta el orden parcial natural y la estructura de grupoide asociado.
En está sección definiremos una clase especial de acciones izquierdas las cuales seran la base de nuestra definición de acciones de grupoides ordenados.

Definición 3.1.1. Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado considerado como una categoría en la cual existe un morfismo $x \longrightarrow y$ si $x \leq y$. Una *pregavilla* sobre X con valores en una categoría $\mathbf{C}$ es un funtor

$$\phi : \mathbf{X}^{op} \longrightarrow \mathbf{C}\,.$$

Si $x \leq y$, entonces escribimos

$$\phi_x^y : \phi(y) \longrightarrow \phi(x)\,.$$

Notemos que para cualquier $x \in \mathbf{X}$

$$\phi_x^x = 1_{\phi(x)}\,,$$

y siempre que $w \leq x \leq y$ en X, entonces

$$\phi_w^x \phi_x^y = \phi_w^y .$$

Sea S un semigrupo inverso. Entonces $E(S) = \{e \in S : \ e \cdot e = e\}$ es una semiretícula inferior donde cada par de elementos tiene un ínfimo con respecto al orden parcial natural.
Sea F una pregavilla de conjuntos definida sobre la categoría $\mathbf{E(S)}^{op}$, esto es

$$F : \mathbf{E(S)}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

es un funtor.
Denotamos para cada $e \in E(S)$: $F(e) = X_e$, y definimos el conjunto

$$X = \bigsqcup_{e \in E(S)} X_e .$$

X es la unión ajena de los conjuntos $F(e)$, $e \in E(S)$. Si $e_1, e_2 \in E(S)$ tal que $e_1 \leq e_2$, $F_{e_1}^{e_2} : X_{e_2} \longrightarrow X_{e_1}$ es una función.
Una acción parcial derecha de S sobre la pregavilla F es un conjunto de funciones

$$f_s : X_{r(s)} \longrightarrow X_{d(s)} ,$$

una para cada $s \in S$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(SA1) Si $e \in E(S)$, $f_e = 1_{X_e}$.

(SA2) Si $s, t \in S$ con $d(s) = r(t)$, $f_t f_s = f_{st}$.

(SA3) Si $s, t \in S$ con $t \leq s$, $X_{d(t)}^{d(s)} f_s = f_t X_{r(t)}^{r(s)}$.

Si para cada $x \in X_{r(s)}$ denotamos

$$x \cdot s = f_s(x) ,$$

entonces en la condicion $(SA1)$ tenemos:

Sea $x \in X_e$, para algún $e \in E(S)$:

$$\begin{aligned} x \cdot e &= f_e(x) \\ &= 1_{X_e} \\ &= x , \end{aligned}$$

es decir,

$$x \cdot e = x .$$

En la condición $(SA2)$ tenemos que para $x \in X_{r(s)}$

$$\begin{aligned}(x\cdot s)\cdot t &= f_t(x\cdot s)\\ &= f_t\left(f_s(x)\right)\\ &= f_{st}(x)\\ &= x\cdot(st)\,,\end{aligned}$$

es decir,

$$(x\cdot s)\cdot t = x\cdot(st)\,.$$

La condición $(SA3)$ equivale a que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_{r(s)} \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "X^{r(s)}_{r(t)}"'] & X_{d(s)} \arrow[d, "X^{d(s)}_{d(t)}"] \\ X_{r(t)} \arrow[r, "f_t"'] & X_{d(t)}\,. \end{tikzcd}$$

Si $x \in X_{r(s)}$,

$$\begin{aligned}X^{d(s)}_{d(t)}(x\cdot s) &= X^{d(s)}_{d(t)}\left(f_s(x)\right)\\ &= f_t\left(X^{r(s)}_{r(t)}(x)\right)\\ &= X^{r(s)}_{r(t)}(x)\cdot t\,,\end{aligned}$$

es decir,

$$X^{d(s)}_{d(t)}(x\cdot s) = X^{r(s)}_{r(t)}(x)\cdot t\,.$$

Es importante notar que cada elemento de S actúa parcialmente sobre X. Veamos esto, si $s \in S$:

$$f_s f_{s^{-1}} = f_{s^{-1}s} = f_{d(s)} = 1_{X_{d(s)}} \quad \text{y} \quad f_{s^{-1}} f_s = f_{ss^{-1}} = f_{r(s)} = 1_{X_{r(s)}}\,.$$

Luego cada f_s es una función biyectiva, por tanto cada f_s es una biyección parcial de X .
Observemos que la definición anterior no se parece mucho a una acción de semigrupo. Sin embargo puede ser extendida para que cada $s \in S$ actúe sobre toda la pregavilla X .
Sea $x \in X$ para algún $e \in E(S)$ y $s \in S$. Si denotamos por $k = r(s)\wedge e = r(s)e$, entonces

$$\begin{aligned}r(ks) &= ks(ks)^{-1}\\ &= kss^{-1}k^{-1}\\ &= kr(s)r(s)e\\ &= ke\\ &= k,\end{aligned}$$

es decir,

$$r(ks) = k\,.$$

Además $k \leq r(s)$ y $k \leq e$, por lo cual tenemos la función $X_k^e : X_e \longrightarrow X_k$ y $x \in X_e$. Luego $X_k^e(x) \in X_k$.
Tenemos la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccccc} X_e & \xrightarrow{X_k^e} & X_k & \xrightarrow{\quad f_{ks} \quad} & X_{d(ks)} \\ \\ x & \longmapsto & X_k^e(x) & \longmapsto & f_{ks}\left(X_k^e(x)\right) = X_k^e(x)\cdot ks\,. \end{array}$$

Por tanto definimos

$$x \circ s = X_k^e(x)\cdot ks\,.$$

Notemos que $ks = es$.

Proposición 3.1.2. Dada una acción parcial derecha de un semigrupo S sobre una pregavilla X, la acción de S sobre X definida arriba es una acción derecha en el sentido usual de semigrupo.

Demostración. Sean $x \in X_e$ para algún $e \in E(S)$ y $s,t \in S$ tal que $(x\circ s)\circ t$ y $x\circ(st)$ están definidos. Por demostrar que $x\circ(st) = (x\circ s)\circ t$. Tenemos que

$$x\circ(st) = X^e_{er(st)}(x)\cdot est\,.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
(x\circ s)\circ t &= X^{d(es)}_{d(es)r(t)}\left(X^e_{er(s)}(x)\cdot es\right)\cdot d(es)t \\
&= X^{d(es)}_{d(esr(t))}\left(X^e_{er(s)}(x)\cdot es\right)\cdot d(es)t \\
&= \left[X^{r(es)}_{r(esr(t))}\left(X^e_{er(s)}(x)\right)\cdot esr(t)\right]\cdot d(es)t \\
&= X^{r(es)}_{r(esr(t))}\left(X^e_{er(s)}(x)\right)\cdot esr(t)d(es)t \\
&= X^{r(es)}_{r(esr(t))}\left(X^e_{er(s)}(x)\right)\cdot est \\
&= X^e_{r(esr(t))}(x)\cdot est\,,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
r\left(esr(t)\right) &= esr(t)\left(esr(t)\right)^{-1} \\
&= esr(t)r(t)^{-1}s^{-1}e^{-1} \\
&= esr(t)s^{-1}e \\
&= esr(t)s^{-1} \\
&= estt^{-1}s^{-1} \\
&= est(st)^{-1} \\
&= er(st)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
(x \circ s) \circ t &= X^{e}_{r(esr(t))}(x) \cdot est \\
&= X^{e}_{er(st)}(x) est \\
&= x \circ (st) .
\end{aligned}
$$

□

Las acciones de semigrupos inversos sobre pregavillas de conjuntos son un tipo especial de acciones sobre conjuntos en el sentido usual.

Ejemplo 3.1.3. Sea S un semigrupo inverso. La $\mathcal{L}-$clase en un idempotente $e \in S$ es el conjunto

$$L_e = \{x \in S : \ d(x) = e\} .$$

Notemos que si $e_1, e_2 \in E(S)$ y $e_1 \neq e_2$, la $\mathcal{L}-$clase en e_1 y la $\mathcal{L}-$clase en e_2 son conjuntos ajenos.
Denotamos por $\mathcal{L} = \bigsqcup_{e \in E(S)} L_e$, la union ajena de $\mathcal{L}-$clases.
Si $e, f \in E(S)$ con $f \leq e$ y $x \in L_e$, por una parte existe $k \in E(S)$ tal que $f = ek$ y por otra parte

$$
\begin{aligned}
d(xf) &= (xf)^{-1} xf \\
&= f^{-1} x^{-1} xf \\
&= f^{-1} d(x) f \\
&= d(x) f \\
&= eek \\
&= f ,
\end{aligned}
$$

por lo cual

$$xf \in L_f .$$

Por tanto podemos definir la función

$$
\begin{aligned}
F^{e}_{f} : L_e &\longrightarrow L_f \\
x &\longmapsto xf .
\end{aligned}
$$

Tenemos el funtor:

$$F : \mathbf{E(S)}^{op} \longrightarrow \mathbf{Con} ,$$

donde para cada $e \in E(S)$: $F(e) = L_e$ y si $f \leq e$ tenemos la función F^{e}_{f}. Este funtor, F, hace al conjunto de $\mathcal{L}-$clases una pregavilla de conjuntos sobre $\mathbf{E(S)}$.
Pasemos a definir una acción parcial derecha de S sobre la pregavilla $\mathcal{L}$. Sean $s \in S$ y $x \in L_{r(s)}$, definimos la función

$$
\begin{aligned}
f_s : L_{r(s)} &\longrightarrow L_{d(s)} \\
x &\longmapsto xs .
\end{aligned}
$$

Veamos que satisface las condiciones $(SA1)-(SA3)$.

Si $e \in E(S)$, tenemos que

$$f_e : L_e \longrightarrow L_e\,.$$

Para $x \in L_e$:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= xe \\ &= x \\ &= 1_{L_e}(x)\,. \end{aligned}$$

Sean $s,t \in S$ con $d(s) = r(t)$ y $x \in L_{r(s)}$, entonces

$$\begin{aligned} f_t\left(f_s(x)\right) &= f_t(xs) \\ &= xst \\ &= f_{st}(x)\,. \end{aligned}$$

Por último sean $s,t \in S$ con $t \leq$ y $x \in L_r(s)$, entonces

$$\begin{aligned} F^{d(s)}_{d(t)}\left(f_s(x)\right) &= F^{d(s)}_{d(t)}(xs) \\ &= xsd(t) \\ &= xt \qquad \text{(por el lema B.2.2)} \\ &= xr(t)t \\ &= f_t\left(xr(t)\right) \\ &= f_t\left(F^{r(s)}_{r(t)}(x)\right)\,. \end{aligned}$$

Ahora veamos de qué manera se define la acción global del semigrupo S sobre $\mathcal{L}$. Sean $s \in S$ y $x \in \mathcal{L}$, entonces existe $e \in E(S)$ tal que $d(x) = e$, es decir, $x \in L_e$.

Luego

$$x \circ s = F^e_{r(s)e}(x) \cdot (r(s)e)\, s\,,$$

donde

$$\begin{aligned} F^e_{r(s)e}(x) \cdot (r(s)e)\, s &= F^e_{r(s)e}(x) \cdot es \\ &= f_{es}\left(F^e_{r(s)e}(x)\right) \\ &= f_{es}\left(xr(s)e\right) \\ &= xr(s)ees \\ &= xes \\ &= xs\,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$x \circ s = xs\,.$$

La acción del semigrupo S sobre toda la pregavilla $\mathcal{L}$ es la multiplicación por la derecha.

3.2. La categoría C(G)

Sea G un grupoide ordenado. Denotamos por

$$C(G) = \{(e,g) \in G_0 \times G : \ r(g) \leq e\}$$

Definamos un producto parcial haciendo de $C(G)$ una categoría. Para cualquier $(e,g) \in C(G)$ se definen

$$d((e,g)) = (d(g), d(g)) \quad \text{y} \quad r((e,g)) = (e,e)\,.$$

Si $(e,g),(f,h) \in C(G)$ con $d((e,g)) = r((f,h))$, esto es, $d(g) = f$, entonces se define el producto

$$(e,g)(f,h) = (e,(g|r(h))h)\ .$$

Proposición 3.2.1. *$C(G)$ es una categoría cancelativa izquierda.*

Demostración. Mstremos que $C(G)$ es cancelativa izquierda. Supongamos que $(e,g)(f,h) = (e,g)(f',h')$, entonces $(e,(g|r(h))h) = (e,(g|r(h'))h')$, además $f = d(g)$ y $f' = d(g)$, por lo cual $f = f'$. Usando el criterio de unicidad de $(g|r(h))$, tenemos que $(g|r(h)) = (g|r(h'))$ lo cual implica que $h = h'$. Por lo tanto $(f,h) = (f',h')$ □

3.3. Grupoides ordenados abelianos

Sea A un grupoide ordenado abeliano, es decir, para todo $a \in A: \quad d(a) = r(a)$ y cada componente conexa de A es un grupo abeliano.

Proposición 3.3.1. Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Las pregavillas sobre X con valores en la categoría de grupos abelianos son precisamente aquellos grupoides ordenados cuyo conjunto parcialmente ordenado de identidades es X .

Demostración. Sea $\phi : \mathbf{X}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ una pregavilla sobre X con valores en $\mathbf{Ab}$.
Para cada $x \in X$, sean $A_x = \phi(x)$

y

$$A = \bigsqcup_{x \in X} A_x\,.$$

Si $x,y \in X$ con $x \leq y$, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos

$$\phi_x^y : A_y \longrightarrow A_x\,.$$

Usando estos homomorfismos definimos una relación en A.

Si $a \in A_x$ y $b \in A_y$, entonces

$$a \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad a = \phi_x^y(b)\,.$$

Mostremos que está relación es un orden parcial.
Para cualquier $x \in X$, $x \leq x$ por lo cual $\phi_x^x = 1_{A_x}$. Luego para cualquier $a \in A_x:\ a \leq a$.
Si $a \in A_x$ y $b \in A_y$ son tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ por lo cual, $x = y$. Por tanto $\phi_x^y = \phi_y^x = 1_{A_x}$.
Por tanto $a = b$.
Para verificar que la relación definida sobre A es transitiva basta observar que para $x, y, z \in X$ tal que $x \leq y \leq z$, se satisface la igualdad $\phi_x^y \phi_y^z = \phi_x^z$, por tanto para $a \in A_x$, $b \in A_y$ y $c \in A_z$ tales que $a \leq b \leq c$, $\phi_x^z(c) = \phi_x^y\left(\phi_y^z(c)\right) = \phi_x^y(b) = a$.
Pasemos a verificar las condiciones $(OG1)-(OG3)$. Sean $x, y \in X$ con $x \leq y$ y $a \in A_x$, $b \in A_y$ con $a \leq b$, entonces $\phi_x^y(b) = a$, donde ϕ_x^y es un homomorfismo de grupos abelianos. Luego $\phi_x^y(b^{-1}) = a^{-1}$, lo cual implica que $a^{-1} \leq b^{-1}$.
Sean $x, y \in X$ con $x \leq y$, $a, c \in A_x$ y $b, d \in A_y$ tales que $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces

$$\phi_x^y(b) = a \quad \text{y} \quad \phi_x^y(d) = c\,.$$

Luego

$$\phi_x^y(b)\phi_x^y(d) = \phi_x^y(bd) = ac$$

y por tanto

$$ac \leq bd\,.$$

Ahora sean $y \in X$, $a \in A_y$ y $e \in A_x$, para algún $x \in X$ de tal manera que $e \leq d(a)$. Entonces $\phi_x^y(d(a)) = e$, donde $\phi_x^y : A_y \longrightarrow A_x$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Definimos al elemento en A_x

$$(a|e) = \phi_x^y(a)\,,$$

elemento único que satisface

$$d((a|e)) = e$$

y

$$(a|e) \leq a\,.$$

Por lo tanto $A = \bigsqcup_{x \in X} A_x$ es un grupoide ordenado abeliano, donde cada identidad está indicada de manera unívoca por cada elemento de X.

Por otra parte si A es un grupoide ordenado abeliano, se define para cada $e \in A_0$:

$$\phi(e) = \{a \in A : \ d(a) = e\}.$$

Notese que $\phi(e)$ es un grupo abeliano.
Sean $e, f \in A_0$ tal que $e \leq f$. Se define el homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \phi(f,e) : \phi(f) &\longrightarrow \phi(e) \\ a &\longmapsto (a|e). \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos definir el funtor

$$\phi : \mathbf{A_0}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

el cual es una pregavilla sobre A_0 con valores en $\mathbf{Ab}$.

Hemos probado que cualquier pregavilla de grupos abelianos determina y es determinada por un grupoide ordenado abeliano. Mostremos que está correspondencia es biyectiva.

Sea

$$\phi : \mathbf{X}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

una pregavilla, luego

$$A = \bigsqcup_{x \in X} A_x$$

es el grupoide ordenado abeliano generado por el funtor ϕ.

Sea $e \in A_0$, entonces existe un único elemento $x \in X$ tal que $e \in A_x$. Se define el grupo abeliano

$$\varphi(e) = \{a \in A : \ d(a) = e\}.$$

Notemos que $\varphi(e) = A_x$, es decir, $\varphi(e) = \phi(e)$ para cualquier $e \in A_0$. Ahora si $e, f \in A_0$ son tales que $e \leq f$, existen $x, y \in X$ (únicos) tales que $e \in A_x$ y $f \in A_y$. Supongamos que $x \leq y$ y sea $b \in A_y$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & A_y \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\phi_x^y"'] & A_y \arrow[d, "\varphi(f,e)"] \\ y & A_x \arrow[r, "1"] & A_x \end{tikzcd}$$

Para cada $b \in A_y$, $\phi_x^y(b) = (b|e) = \varphi(f,e)(b)$

Por tanto los funtores ϕ y φ son naturalmente isomorfos.

Por otra parte, si A es un grupoide ordenado abeliano y $\phi : \mathbf{A_0}^{\mathbf{op}} :\longrightarrow \mathbf{Ab}$ es la pregavilla que se genera de A entonces $\bigsqcup_{x \in A_0} A_x$ es en efecto el grupoide ordenado abeliano A . □

Sean X un conjunto parcialmente ordenado y A un grupo abeliano. Denotamos por $\Delta(A)$ la pregavilla de grupos abelianos dada por $\Delta(A)(x) = A$ para cualquier $x \in X$, y $\Delta(A)_x^y(a) = a$ para cualquiera $x \leq y$ en X y $a \in A$. Llamamos a $\Delta(A)$ el grupoide ordenado abeliano constante.

3.4. Acciones de grupoides ordenados

Sean G un grupoide ordenado y A un grupoide ordenado abeliano tales que existe un isomorfismo que preserva el orden $\theta : G_0 \cong A_0$. Las componentes de A son grupos abelianos, uno para cada identidad de G. Escribimos

$$A_e = \{a \in A : \ d(a) = \theta(e)\}\,.$$

Llamamos a A un $G-$*módulo derecho* si para cada par $(a,g) \in A \times G$ tal que $d(a) = \theta(r(g))$, existe un elemento $a \cdot g$ de A con $d(a \cdot g) = \theta(d(g))$, y está operación satisface los siguientes axiomas:

(GM1) Si existe gh en G y existe $a \cdot g$, entonces $(a \cdot g) \cdot h = a \cdot (gh)$.

(GM2) Si a, b son elementos de la misma componente de A, y existe $a \cdot g$, entonces $(a+b) \cdot g = (a \cdot g) + (b \cdot g)$.

(GM3) Si e es una identidad en G, entonces $a \cdot e = a$, para cualquier $a \in A_e$.

(GM4) Para todo $g \in G : \theta(r(g)) \cdot g = \theta(d(g))$.

(GM5) Si existe $a \cdot g$, $b \cdot h$ donde $a \leq b$ y $g \leq h$, entonces $a \cdot g \leq b \cdot h$.

Mientras no exista riesgo de confusión escribiremos 0_e en lugar de $\theta(e)$.
Las siguientes propiedades de $G-$módulos serán de utilidad.

Lema 3.4.1. Sea A un $G-$módulo

(i) Si existe $a \cdot g$, entonces $\exists (-a) \cdot g$ y $(-a) \cdot g = -(a \cdot g)$.

(ii) Si existe $a \cdot g$ y $h \leq g$, entonces $(a \cdot g | 0_{d(h)}) = (a | 0_{r(h)}) \cdot h$.

Demostración. (i) Como existe $a \cdot g$ y $a \in A_{r(g)}$ entonces $-a \in A_{r(g)}$, luego también existe $-a \cdot g \in A_{d(g)}$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}(-a) \cdot g + a \cdot g &= (-a+a) \cdot g \\ &= \theta(r(g)) \cdot g \\ &= \theta(d(g))\end{aligned}$$

es decir,

$$-(a \cdot g) + (a \cdot g) = \theta_{d(g)}\,.$$

Por tanto

$$(-a)\cdot g = -(a\cdot g)\,.$$

(ii) $h \leq g$ implica $d(h) \leq d(g)$ y $r(h) \leq r(g)$, gráficamente

$$\underset{\theta(d(g))}{\bullet} \xrightarrow{\quad a\cdot g \quad} \underset{\theta(d(g))}{\bullet}$$

$$\underset{\theta(d(h))}{\bullet} \overset{(a\cdot g|0_{d(h)})}{\dashrightarrow} \bullet\,.$$

El elemento en $A_{d(g)}$, $(a\cdot g|0_{d(h)})$, es el único que satisface:

1. $(a\cdot g|0_{d(h)}) \leq a\cdot g\,,$ y
2. $d((a\cdot g|0_{d(h)})) = 0_{d(h)}\,.$

Notemos que

$$(a|0_{r(h)}) \leq a \quad \text{y} \quad h \leq g,$$

por lo cual

$$(a|0_{r(h)})\cdot h \leq a\cdot g\,.$$

Además

$$d((a|0_{r(h)})) = 0_{r(h)}\,,$$

es decir,

$$d((a|0_{r(h)})\cdot h) = 0_{d(h)}$$

Por tanto

$$(a|0_{r(h)})\cdot h = (a\cdot g|0_{d(h)})\,.$$

□

Sean G un grupoide ordenado y A, B $G-$módulos con isomorfismos preservadores de orden $\theta : G_0 \cong A_0$ y $\phi : G_0 \cong B_0$, respectivamente. Un funtor ordenado $\alpha : A \longrightarrow B$ es llamado un $G-$*morfismo* si satisface las siguientes condiciones:

(i) $\alpha(\theta(e)) = \phi(e)$ para cualquier $e \in G_0$.

(ii) $\alpha(a\cdot g) = \alpha(a)\cdot g$ para cualquiera $a \in A$ y $g \in G$ con $d(a) = \theta(r(g))$.

Notemos que la condición (i) implica la existencia de $\alpha(a)\cdot g$ en (ii), además los $G-$módulos junto con los $G-$morfismos forman una categoría, la cual denotaremos por $\mathbf{Mod}(G)$.

Teorema 3.4.2. Sea G un grupoide ordenado. Existe un isomorfismo entre la categoría de $G-$módulos y la categoría de $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulos derechos.

Demostración. Sea A un $G-$módulo.

Definimos

$$\mathcal{A} : \mathbf{C}(\mathbf{G})^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

de la siguiente manera: para $e \in G_0$

$$\mathcal{A}(e) = A_e \, ,$$

y para $(e,g) \in C(G)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e,g) : A_e &\longrightarrow A_{d(g)} \\ a &\longmapsto (a|0_{r(g)}) \cdot g \, . \end{aligned}$$

Mostremos que $\mathcal{A}(e,g)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean $a,b \in A_e$, entonces existen $(a+b|0_{r(g)})$, $(a|0_{r(g)})$ y $(b|0_{r(g)})$ elementos de $A_{r(g)}$, donde $(a+b|0_{r(g)})$ es el único con las propiedades :

$$\begin{aligned} d((a+b|0_{r(g)})) &= 0_{r(g)} \\ (a+b|0_{r(g)}) &\leq a+b \, . \end{aligned}$$

Por otra parte como $(a|0_{r(g)}) + (b|0_{r(g)}) \in A_{r(g)}$, $d\left[(a|0_{r(g)}) + (b|0_{r(g)})\right] = 0_{r(g)}$. Además $(a|0_{r(g)}) + (b|0_{r(g)}) \leq a+b$, por lo cual $(a+b|_{r(g)}) = (a|0_{r(g)}) + (b|0_{r(g)})$.

Así

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e,g)(a+b) &= (a+b|0_{r(g)}) \cdot g \\ &= \left[(a|0_{r(g)}) + (b|0_{r(g)})\right] \cdot g \\ &= (a|0_{r(g)}) \cdot g + (b|0_{r(g)}) \cdot g \\ &= \mathcal{A}(e,g)(a) + \mathcal{A}(e,g)(b) \, . \end{aligned}$$

Pasemos a mostrar que $\mathcal{A}$ es funtor contravariante. Sean $(e,g),(f,h) \in C(G)$ y $a \in A_e$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f,h)\mathcal{A}(e,g)(a) &= \mathcal{A}(f,h)\left[\mathcal{A}(e,g)(a)\right] \\ &= \mathcal{A}(f,h)\left[(a|0_{r(g)}) \cdot g\right] \\ &= \left((a|0_{r(g)}) \cdot g|0_{r(h)}\right) \cdot h \\ &= \left((a|0_{r(g)}) \cdot g|0_{d[(g|r(h))]}\right) \cdot h \\ &= \left[\left((a|0_{r(g)})|0_{r[(g|r(h))]}\right) \cdot (g|r(h))\right] \cdot h \quad \text{(por el lema 3.4.1-(ii))} \\ &= \left((a|0_{r(g)})|0_{r[(g|r(h))]}\right) \cdot (g|r(h))\, h \\ &= \left((a|0_{r(g)})|0_{r[(g|r(h))h]}\right) \cdot (g|r(h))\, h \\ &= (a|0_{r[(g|r(h))h]}) \cdot (g|r(h))\, h \qquad \text{(por la unicida del elemento } \left((a|0_{r(g)})|0_{r[(g|r(h))h]}\right)) \\ &= \mathcal{A}\left(e,(g|r(h))h\right)(a) \\ &= \mathcal{A}\left[(e,g)(f,h)\right](a) \, . \end{aligned}$$

Por último, si $e \in G_0$ tenemos el homomorfismo $\mathcal{A}(e,e) : A_e \longrightarrow A_e$, donde para cada $a \in A_e$: $\mathcal{A}(e,e)(a) = (a|0_e) \cdot e = (a|0_e) = a$ (por unicidad de $(a|0_e)$) . Por tanto el funtor $\mathcal{A}$ es un $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulo derecho.

Por otra parte, sea ahora

$$\mathcal{A} : \mathbf{C}(\mathbf{G})^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

un $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulo derecho. Definimos el funtor

$$\phi : \mathbf{G_0}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}\,.$$

Para $e \in G_0$:

$$\phi(e) = \mathcal{A}(e)\,,$$

y si $e \leq f \in G_0$:

$$\begin{aligned} \phi_e^f : \mathcal{A}(f) &\longrightarrow \mathcal{A}(e) \\ a &\longmapsto \mathcal{A}(f,e)(a)\,. \end{aligned}$$

Básicamente ϕ está definido como $\mathcal{A}$ restringido a G_0 .
Por la proposición 3.3.1, $A = \bigsqcup_{e \in G_0} A_e$ es un grupoide ordenado abeliano, donde $A_e = \mathcal{A}(e)$ para cualquier $e \in G_0$.
Además si $e \leq f \in G_0$ y $a \in A_e$ $b \in A_f$ entonces

$$a \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad a = \mathcal{A}(f,e)(b)\,.$$

El elemento $(a|0_e)$ está definido como $(a|0_e) = \mathcal{A}(f,e)(a)$, siempre que $e \leq f \in G_0$ y $a \in \mathcal{A}(f)$.

Pasemos a definir ahora una acción derecha de G sobre A. Sean $g \in G$ y $a \in A_{r(g)}$, definimos la función

$$\begin{aligned} .g : A_{r(g)} &\longrightarrow A_{d(g)} \\ a &\longmapsto a \cdot g = \mathcal{A}\left(r(g), g\right)(a)\,. \end{aligned}$$

Veamos que se cumplen las condiciones $(GM1) - (GM5)$.
Supongamos que existe gh en G y existe $a \cdot g$ en $A_{d(g)}$, entonces

$$\begin{aligned} (a \cdot g) \cdot h &= \mathcal{A}\left(r(h), h\right)\left[\mathcal{A}\left(r(g), g\right)(a)\right] \\ &= \left[\mathcal{A}\left(r(g), g\right)\left(r(h), h\right)\right](a) \\ &= \mathcal{A}\left(r(g), \left(g|r(h)\right)h\right)(a) \\ &= \mathcal{A}\left(r(g), gh\right)(a) \quad \text{(unicidad del elemento } (g|r(h))) \\ &= \mathcal{A}\left(r(gh), gh\right)(a) \\ &= a \cdot (gh)\,. \end{aligned}$$

Supongamos que $a,b \in A_e$, para $e \in G_0$ y que existen $a \cdot g$ y $b \cdot g$, donde $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} a \cdot g + b \cdot g &= \mathcal{A}\,(r(g),g)\,(a) + \mathcal{A}\,(r(g),g)\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,(r(g),g)\,(a+b) \\ &= (a+b) \cdot g\,. \end{aligned}$$

Sean $e \in G_0$ y $a \in A_e$, entonces

$$\begin{aligned} a \cdot e &= \mathcal{A}\,(r(e),e)\,(a) \\ &= \mathcal{A}(e,e)(a) \\ &= 1_{\mathcal{A}(e)}(a) \\ &= a\,. \end{aligned}$$

Sea $g \in G$, entonces $0_{r(g)} \cdot g = \mathcal{A}\,(r(g),g)\,(0_{r(g)}) = 0_{d(g)}$ debido a que $\mathcal{A}\,(r(g),g)$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Supongamos que existen $a \cdot g$ y $b \cdot h$ donde $a \leq b$ y $g \leq h$, entonces

$$\begin{aligned} a \cdot g &= \mathcal{A}\,(r(g),g)\,(a) \\ &= \mathcal{A}\,(r(g),g)\,[\mathcal{A}\,(r(h),r(g))\,(b)] \\ &= [\mathcal{A}\,(r(h),r(g))\,(r(g),g)]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,[r(h),(r(g)|r(g))\,g]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,[r(h),r(g)g]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,[r(h),g]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,[r(h),(h|d(g))]\,(b) \quad \text{(por unicidad de } (h|d(g)) \text{ y } g \leq h) \\ &= \mathcal{A}\,[r(h),(h|d(g))\,d(g)]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,[(r(h),h)\,(d(h),d(g))]\,(b) \\ &= \mathcal{A}\,(d(h),d(g))\,\mathcal{A}\,[\mathcal{A}\,(r(h),h)\,(b)] \\ &= \mathcal{A}\,(d(h),d(g))\,(b \cdot h), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$a \cdot g \leq b \cdot h\,.$$

Por lo tanto A es un $G-$modulo derecho.

Hasta ahora tenemos una relación entre la categoría $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulos derechos y la categoría de $G-$módulos, veamos que está relación es biunívoca.

Definimos el funtor

$$\Gamma : \mathbf{Mod}(G) \longrightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G}))\,,$$

el cual asigna a cada $G-$módulo A, el funtor $\mathcal{A} : \mathbf{C}(\mathbf{G})^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ como se definió anteriormente. Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un $G-$morfismo, debemos definir el morfismo $\Gamma(\alpha) : \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ en $\mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G}))$.

Sea $e \in G_0$ y sea

$$\Gamma(\alpha)_e : A_e \longrightarrow B_e$$

tal que para cada $e \in A_e$:

$$\Gamma(\alpha)_e(a) = \alpha(a)\,.$$

Notemos que por la forma en definir la función $\Gamma(\alpha)_e$, ésta es un homomorfismo de grupos. Sean $(e,g) \in C(G)$ y $a \in A_e$

$$\begin{tikzcd}
(d(g),d(g)) \arrow[d, "(e,g)"'] \\
(e,e)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_{d(g)} \arrow[r, "\Gamma(\alpha)_{d(g)}"] & B_{d(g)} \\
A_e \arrow[u, "\mathcal{A}(e,g)"] \arrow[r, "\Gamma(\alpha)_e"'] & B_e\,. \arrow[u, "\mathcal{B}(e,g)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(e,g)\,[\Gamma(\alpha)_e(a)] &= \mathcal{B}(e,g)\,(\alpha(a)) \\
&= \big(\alpha(a)|0_{r(g)}\big)\cdot g \\
&= \alpha(a|0_{r(g)})\cdot g \quad \text{(por unicidad de } \big(\alpha(a)|0_{r(g)}\big)\text{)} \\
&= \alpha\left[(a|0_{r(g)})\cdot g\right] \\
&= \Gamma(\alpha)_{d(g)}\left[(a|0_{r(g)})\cdot g\right] \\
&= \Gamma(\alpha)_{d(g)}\,[\mathcal{A}(e,g)(a)]\,.
\end{aligned}$$

Sean α, β morfismos en la categoría de $G-$módulos tal que $\beta\alpha$ está definido. Para mostrar que Γ preserva la composición de morfismos basta con lo siguiente: sean $e \in G_0$ y $a \in A_e$, entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma(\beta\alpha)_e(a) &= \beta\alpha(a) \\
&= \beta\,(\alpha(a)) \\
&= \beta\,[\Gamma(\alpha)_e(a)] \\
&= \Gamma(\beta)_e\,[\Gamma(\alpha)_e(a)] \\
&= [\Gamma(\beta)_e\Gamma(\alpha)_e]\,(a)\,.
\end{aligned}$$

Por último sea $1_A : A \longrightarrow A$ un morfismo identidad de $G-$módulos. Si $e \in G_0$ y $a \in A_e$,

$$\Gamma(1_A)_e(a) = 1_A(a) = a\,.$$

Por tanto $\Gamma(1_A) = 1_{\Gamma(A)}$.

Pasemos ahora a definir el funtor

$$\Gamma' : \mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G})) \longrightarrow \mathbf{Mod}(G).$$

Si $\mathcal{A}$ es un objeto en $\mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G}))$, entonces $\Gamma'(\mathcal{A}) = A$ donde A es el $G-$módulo que se definió anteriormente a partir del funtor $\mathcal{A}$. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulos y $\phi : \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ un morfismo de $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulos, para $e \in G_0$ y $a \in A_e$ se define

$$\begin{aligned} \Gamma'(\phi) : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto \phi_e(a). \end{aligned}$$

Está definición por recurrencia nos garantiza que Γ' es un funtor.

Por último notemos que

$$\Gamma'\Gamma = 1_{\mathbf{Mod}(G)} \quad \text{y} \quad \Gamma\Gamma' = 1_{\mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G}))}.$$

□

3.5. La cohomología de un grupoide ordenado

En la última proposición de la sección anterior probamos el isomorfismo entre categorías

$$\mathbf{Mod}(G) \cong \mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G})),$$

donde $\mathbf{Mod}(\mathbf{C}(\mathbf{G})) = \mathbf{Ab}^{\mathbf{C}(\mathbf{G})^{op}}$ y $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}(\mathbf{G})^{op}}$ es una categoría abeliana, por lo cual podemos definir la cohomología de un $G-$módulo a través de su carrespondiente $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulo.
Retomamos la construcción de la sección 2.1.1. Sean A un $G-$módulo y $\mathcal{A}$ su correspondiente $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulo, definimos el $n-$ésimo grupo de cohomología del $G-$módulo A como el $n-$ésimo grupo de cohomología del correspondiente $\mathbf{C}(\mathbf{G})-$módulo $\mathcal{A}$, esto es,

$$H^n(G,A) = H^n(\mathbf{C}(\mathbf{G}), \mathcal{A}) = R^n \varprojlim(\mathcal{A}).$$

Capítulo 4

Extensiones de grupoides ordenados

4.1. Extensiones y transversales

Sean G y H grupoides ordenados. Decimos que un funtor ordenado $\phi : G \longrightarrow H$ es un separador de identidades si induce un isomorfismo ordenado entre G_0 y H_0.

Definición 4.1.1. Sean G un grupoide ordenado y A un grupoide ordenado abeliano. Una *extensión* de A por G es una terna $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ donde

- U es un grupoide ordenado.
- $\sigma : U \longrightarrow G$ es un funtor ordenado sobreyectivo el cual es separador de identidades.
- $\iota : A \longrightarrow U$ es un funtor ordenado inyectivo, tal que la imagen de ι es isomorfo al kernel de σ, $\iota(A) \cong Ker(\sigma)$.

$$A \overset{\iota}{\hookrightarrow} U \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} G\,.$$

Notemos que $Ker(\sigma)$ es un subgrupoide amplio de U, además también es un subgrupoide ordenado normal, y dado que $\iota(A) \cong Ker(\sigma)$, entonces $\iota(A)$ también es un subgrupoide ordenado normal de U. Por lo cual podemos formar el grupoide cociente $U/\iota(A)$ cuyos elementos son clases de equivalencia generadas a partir de la relación de equivalencia dada por

$$u \sim v \quad \text{si y sólo si} \quad u = \iota(a)v\iota(b) \quad \text{para algunos } a, b \in A\,.$$

Si $\exists uv$ en U entonces $\exists [u][v]$ en $U/\iota(A)$ y $[u][v] = [uv]$. El orden en $U/\iota(A)$ es definido como $[u] \leq [v]$ si y soló si para cada $v' \in [v]$ existe $u' \in [u]$ tal que $u' \leq v'$.

Proposición 4.1.2. Sea $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} U \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} G$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G.

(i) El grupoide $\iota(A)$ es un subgrupoide normal ordenado de U.

(ii) Exite un único isomorfismo $\psi : U/\iota(A) \cong G$ tal que $\sigma = \psi\pi$, donde $\pi : U \longrightarrow U/\iota(A)$ es la proyección natural definida por $\pi(u) = [u]$.

Demostración. Sea $[u]$ un elemento de $U/\iota(A)$, donde $u \in U$. Se define

$$\psi([u]) = \sigma(u)\,.$$

Veamos que la definición no depende del representante. Sea $v \in [u]$, $u \sim v$ si y soló si $u = \iota(A)v\iota(b)$ para algún $a, b \in A$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\psi([u]) &= \sigma(u) \\
&= \sigma(\iota(a)v\iota(b)) \\
&= \sigma(\iota(a))\,\sigma(v)\sigma(\iota(b)) \\
&= \sigma(v) \\
&= \psi([v])\,.
\end{aligned}$$

Ahora probemos que ψ es inyectiva. Sean $[u], [v] \in U/\iota(A)$ tales que $\psi([u]) = \psi([v])$, entonces $\sigma(u) = \sigma(v)$, esto es, $\sigma(d(u)) = \sigma(d(v))$. Luego $d(u) = d(v)$ porque σ es separador de identidades.
Por tanto existe $vu^{-1} \in U$ y $vu^{-1} \in Ker(\sigma) = \iota(A)$. Existe $a \in A$ tal que $vu^{-1} = \iota(a)$ lo cual implica que $v = \iota(a)u$.
Por otra parte $d(u) \in Ker(\sigma) = \iota(A)$, luego exite $e \in A$ tal que $\iota(e) = d(u)$. Esto implica que

$$v = \iota(a)u = \iota(a)ud(u) = \iota(a)u\iota(e), \quad \text{para } a, e \in A.$$

Luego

$$u \sim v\,, \quad \text{es decir,} \quad [u] = [v]\,.$$

Si tomamos $g \in G$, como σ es sobreyectivo, existe $u \in U$ tal que $\sigma(u) = g$. Luego $\psi([u]) = \sigma(u) = g$ para $[u] \in U/\iota(A)$, por lo cual ψ es sobreyectivo.

Si suponemos que existe otro isomorfismo $\psi' : U/\iota(A) \longrightarrow G$ tal que $\sigma = \psi'\pi$, para $[u] \in U/\iota(A)$, $\psi'([u]) = \psi'(\pi(u)) = \sigma(u) = \psi([u])$. $\square$

Sean A un grupoide ordenado abeliano y G un grupoide ordenado. Dos extenciones $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ y $\mathcal{E}' = (\iota', U', \sigma')$ son *congruentes* si existe un funtor ordenado $\mu : U \longrightarrow U'$ tal que

$$\iota' = \mu\iota \quad \text{y} \quad \sigma = \sigma'\mu\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dd, "\mu"] \arrow[dr, two heads, "\sigma"] & \\
A \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\iota'"'] & & G \\
 & U' \arrow[ur, two heads, "\sigma'"'] &
\end{tikzcd}$$

Escribimos $\mu : \mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$.

Lema 4.1.3. Si $\mu : \mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$, entonces μ es un isomorfismo.

Demostración. Sean $u, v \in U$ tales que $\mu(u) = \mu(v)$.
Como $\mu(u), \mu(v) \in U'$, $\sigma'(\mu(u)) = \sigma'(\mu(v))$, por tanto $\sigma(u) = \sigma v$. Así que $\sigma(d(u)) = \sigma(d(v))$ y como σ es separador de identidades, $d(u) = d(v)$. Por lo cual existe $vu^{-1} \in U$. Además $\mu\left(vu^{-1}\right) \in U_0$. Esto implica que $\sigma'\left(\mu(vu^{-1})\right) \in G_0$ y por tanto $\sigma(vu^{-1}) \in G_0$. Luego $vu^{-1} \in U_0$ y $d(vu^{-1}) = r(u)$. Entonces existe $vu^{-1}u \in U$ y $vu^{-1}u = u$. Luego $v = u$.

Probemos ahora que μ es sobreyectiva. Sean $u' \in U'$, entonces $sigma'(u') \in G$, por lo cual existe $u \in U$ tal que $\sigma u = \sigma'(u')$, esto es, $\sigma'(\mu(u)) = \sigma'(u')$. Esto implica que $\sigma'(d[\mu(u)]) = \sigma'(d(u'))$ siendo σ' un separador de identidades. Luego $d[\mu(u)] = d(u')$.
Por tanto existe $\mu(u)u'^{-1} \in U$, más aún, $\mu(u)u'^{-1} \in U_0$. Lo cual implica que $\left[\mu(u)u'^{-1}\right]u' = u'$ y por tanto $\mu(u) = u'$. □

Corolario 4.1.4. La congruencia de extensiones de grupoides ordenados es una relación de equivalencia.

Sea $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide G. Dado que σ es sobreyectiva, para cada g en G podemos elegir un elemento $l(e)$ de U con $\sigma(l(g)) = g$. Así para cada extensión $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ de A por G, podemos eligir una función

$$l : G \longrightarrow U$$

tal que $\sigma l = 1_G$. Llaremos a tal función una *transversal para la extensión* $\mathcal{E}$.

Lema 4.1.5. Sea l una transversal para una extensión $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ de A por G. Supongamos que $g, h \in G$ con $r(h) \leq d(g)$. Entonces $r(l(h)) \leq d(l(g))$.

Demostración. Si $r(h) \leq d(g)$, entonces $r[\sigma l(h)] \leq d[\sigma l(g)]$. Esto implica que $\sigma[r(l(h))] = \sigma[d(l(g))]$ y por tanto $r[l(h)] \leq d[l(g)]$. □

Corolario 4.1.6. Si existe gh en G, entonces existe $l(g)l(h)$.

Demostración. Si gh existe en G, $r(h) = d(g)$. Esto implica que $r[l(h)] = d[l(g)]$ y por tanto existe $l(g)l(h) \in U$. □

Lema 4.1.7. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y $l : G \longrightarrow U$ una transversal para $\mathcal{E}$. Sean $u \in U$ y $g = \sigma(u)$. Entonces existe un único $a \in A$ tal que $u = l(g)\iota(a)$.

Demostración. $l[\sigma(u)]$ es un elemento de U, y

$$\begin{aligned}
\sigma(r[l[\sigma(u)]]) &= r(\sigma[l[\sigma(u)]]) \\
&= r[\sigma(u)] \\
&= \sigma[r(u)] .
\end{aligned}$$

Como σ es separador de identidades,

$$r[l[\sigma(u)]] = r(u),$$

por lo cual existe $l\,[\sigma(u)]^{-1}\,u \in U$. Más aún

$$\begin{aligned}\sigma\left(l\,[\sigma(u)]^{-1}\,u\right) &= \sigma\left(l\,[\sigma(u)]^{-1}\right)\sigma(u)\\ &= \left(\sigma l\,[\sigma(u)]^{-1}\,u\right)^{-1}\sigma(u)\\ &= \sigma(u)^{-1}\sigma(u)\,.\end{aligned}$$

Por tanto $l\,[\sigma(u)]^{-1}\,u \in Ker(\sigma) = \iota(A)\,.$

Como ι es monomorfismo, existe un único elemento $a \in A$ tal que $\iota(a) = l\,[\sigma(u)]^{-1}\,u$. Luego $l\,[\sigma(u)]\,\iota(a) = u$. □

Proposición 4.1.8. San $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y $l : G \longrightarrow U$ una transversal para $\mathcal{E}$. Para cada elemento $(g,a) \in G \times A$ que satisface $\sigma\iota\,[d(a)] = r(g)$, se define $a \cdot g$ por

$$\iota(a \cdot g) = l(g)^{-1}\iota(a)l(g)\,.$$

Entonces esto genera en A una estructura de $G-$módulo, la cual es independiente de la elección de la transversal l.

Demostración. Comencemos definiendo

$$\theta : G_0 \longrightarrow A_0$$

por

$$\theta(e) = \iota^{-1}\sigma\,|_{U_0}^{-1}\,(e)$$

Dado que σ es un separador de identidades, θ es un isomorfimo ordenado. Si $a \in A$ y $g \in G$ con $d(a) = \theta\,(r(g))$, entonces $l(g)^{-1}\iota(a)l(g)$ es un elemento de $\iota(A)$, ya que $\iota(A)$ es un subgrupoide normal ordenado de U.
Para probar que la definición es independiente de la elección de la transversal, sea $l' : G \longrightarrow U$ otra transversal. Sean $g \in G$ y $a \in A$ con $d(a) = \theta\,(r(g))$, como $l(g)$ es un elemento de U, existe un único $b \in A$ tal que $l(g) = l'\,[\sigma l(g)]\,\iota(b)$, lo cual implica que $l(g) = l'(g)\iota(b)$, por tanto

$$\begin{aligned}l(g)^{-1}\iota(a)l(g) &= \left[l'(g)\iota(b)\right]^{-1}\iota(a)l'(g)\iota(b)\\ &= \iota(b)^{-1}l'(g)^{-1}\iota(a)l'(g)\iota(b)\\ &= \iota(b)^{-1}\iota(b)l'(g)^{-1}\iota(a)l'(g)\\ &= l'(g)^{-1}\iota(a)l'(g)\,,\end{aligned}$$

donde $l'(g)^{-1}\iota(a)l'(g)$ pertenece a $\iota(A)$.

Probemos que las condiciones $(GM1)-(GM5)$ se cumplen. Sean $g \in G$ y $a \in A$ con $d(a) = \theta\,(r(g))$. Supongamos que gh existe en G y que existe $\iota(a \cdot g)$, entonces

$$\begin{aligned}\iota\,[(a\cdot g)\cdot h] &= l(h)^{-1}\iota(a\cdot g)l(h)\\ &= l(h)^{-1}l(g)^{-1}\iota(a)l(g)l(h)\\ &= [l(g)l(h)]^{-1}\,\iota(a)l(g)l(h)\,.\end{aligned}$$

Como $l(g)l(h) \in U$, existe $k \in A$ tal que

$$\begin{aligned} l(g)l(h) &= l\left[\sigma\left(l(g)l(h)\right)\right]\iota(k) \\ &= l(gh)\iota(k)\,, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \iota\left[(a\cdot g)\cdot h\right] &= \left[l(g)l(h)\right]^{-1}\iota(a)l(g)l(h) \\ &= \left[l(gh)\iota(k)\right]^{-1}\iota(a)l(gh)\iota(k) \\ &= \iota(k)^{-1}l(gh)^{-1}\iota(a)l(gh)\iota(k) \\ &= \iota(k)^{-1}\iota(k)l(gh)^{-1}\iota(a)l(gh) \\ &= l(gh)^{-1}\iota(a)l(gh) \\ &= \iota\left[a\cdot(gh)\right]\,. \end{aligned}$$

Supongamos que a,b son elementos de la misma componente de A, y que existe $a\cdot g$

$$\begin{aligned} \iota\left[(a+b)\cdot g\right] &= l(g)^{-1}\iota(a+b)l(g) \\ &= l(g)^{-1}\iota(a)\iota(b)l(g) \\ &= l(g)^{-1}\iota(a)\left[l(g)l(g)^{-1}\right]\iota(b)l(g) \\ &= \left(l(g)^{-1}\iota(a)l(g)\right)\left(l(g)^{-1}\iota(b)l(g)\right) \\ &= \iota\left(a\cdot g+b\cdot g\right)\,. \end{aligned}$$

Sean e una identidad en G y $a \in A_e$, entonces

$$\iota(a\cdot e) = l(e)^{-1}\iota(a)l(e)\,.$$

Notemos que $\sigma\left[l(e)^{-1}\iota(a)l(e)\right] = \sigma\left[\iota(a)\right] \in G_0$ y σ es separador de identidades, entonces

$$l(e)^{-1}\iota(a)l(e) = \iota(a),$$

es decir,

$$\iota(a\cdot e) = \iota(a)\,.$$

Sea $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \iota(0_{r(g)}\cdot g) &= l(g)^{-1}\iota(0_{r(g)})l(g) \\ &= l(g)^{-1}\iota\left(\theta(r(g))\right)l(g) \\ &= l(g)^{-1}\sigma\mid_{U_0}^{-1}\left(r(g)\right)l(g)\,. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sigma\left[l(g)^{-1}\sigma\mid_{U_0}^{-1}\left(r(g)\right)l(g)\right] &= g^{-1}r(g)g \\ &= g^{-1}g \\ &= d(g)\,. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\sigma\left[l(g)^{-1}\sigma\mid_{U_0}^{-1}(r(g))\,l(g)\right]=\sigma\left[\sigma\mid_{U_0}^{-1}(d(g))\right].$$

Luego

$$l(g)^{-1}\sigma\mid_{U_0}^{-1}(r(g))\,l(g)=\sigma\mid_{U_0}^{-1}(d(g))$$

y

$$\begin{aligned}\sigma\mid_{U_0}^{-1}(d(g))&=\iota\left[\theta\left(d(g)\right)\right]\\&=\iota(0_{d(g)}).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\iota(0_{r(g)}\cdot g)=\iota(0_{d(g)}).$$

Supongamos que existen $a\cdot g$ y $b\cdot h$ donde $a\leq b$ y $g\leq h$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma\left[\iota(a\cdot g)\right]&=\sigma\left[l(g)^{-1}\iota(a)l(g)\right]\\&=g^{-1}\sigma\iota(a)g\\&\leq h^{-1}\sigma\iota(b)h\\&=\sigma\left[l(h)^{-1}\iota(b)l(h)\right]\\&=\sigma\left[\iota(b\cdot h)\right],\end{aligned}$$

pero $\sigma\left[\iota(a\cdot g)\right]$ y $\sigma\left[\iota(b\cdot h)\right]$ pertenecen a G_0.

Por tanto

$$\iota(a\cdot g)\leq\iota(b\cdot h).$$

□

Proposición 4.1.9. Sean $\mathcal{E}=(\iota,U,\sigma)$ y $\mathcal{E}'=(\iota',U',\sigma')$ extensiones congruentes de A por G. Las estructuras de $G-$módulo generadas respectivamente por cada extensión son idénticas.

Demostración. Dado que $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son congruentes, existe un isomorfismo ordenado $\mu:U\longrightarrow U'$. Sean l y l' transversales para las extenciones $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, respectivamente. Sea $g\in G$, entonces $\sigma'(l'(g))=g=\sigma(l(g))=\sigma'\left[\mu\left(l(g)\right)\right]$. Por tanto $d\left[\mu\left(l(g)\right)\right]=d\left[l'(g)\right]$, ya que σ' es separador de identidades. Así, existe $l'(g)\mu\left(l(g)\right)^{-1}$. Más aún, $\sigma'\left(l'(g)\mu\left(l(g)\right)^{-1}\right)=\sigma'\left(l'(g)\right)\sigma\left(l(g)\right)^{-1}=gg^{-1}$. Así $l'(g)\mu\left(l(g)\right)^{-1}\in\iota'(A)$.

Sea $a\in A_{r(g)}$. Mostremos que $\mu\left(l(g)^{-1}\iota(a)l(g)\right)=l'(g)^{-1}\iota'(a)l'(g)$.

$$\begin{aligned}\mu\left(l(g)^{-1}\iota(a)l(g)\right)&=\mu\left(l(g)\right)^{-1}\iota'(a)\mu\left(l(g)\right)\\&=l'(g)^{-1}l'(g)\mu\left(l(g)\right)^{-1}\iota'(a)\mu\left(l(g)\right)\\&=l'(g)^{-1}\iota'(a)l'(g)\mu\left(l(g)\right)^{-1}\mu\left(l(g)\right)\\&=l'(g)^{,1}\iota'(a)l'(g).\end{aligned}$$

□

Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y $l : G \longrightarrow U$ una transversal para $\mathcal{E}$. El siguiente resultado nos dice que un grupoide ordenado U puede recobrarse de A, G y l .

Proposición 4.1.10. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y l una transversal . Se define

$$G * A = \left\{(g,a) \in G \times A : \ d(a) = 0_{d(g)}\right\} .$$

Entonces existe una biyección

$$G * A \longrightarrow U$$

definida por

$$(g,a) \longmapsto l(g)\iota(a) .$$

Si $g,h \in G$ con $r(h) \leq d(g)$, entonces existe un único $\zeta(g,h) \in A$ tal que

$$\iota\zeta(g,h) = l(g \otimes h)^{-1} \otimes l(g) \otimes l(h) .$$

Más aún,

(i) Si $u = l(g)\iota(a), \ v = l(h)\iota(b)$ y existe uv, entonces

$$uv = l(gh)\iota\left[\zeta(g,h) + a \cdot h + b\right] .$$

(ii) Sean $u = l(g)\iota(a)$ y $v = l(h)\iota(b)$, entonces

$$v \leq u \quad \text{sii} \quad h \leq g \quad \text{y} \quad b = (a|0_{d(h)}) + \zeta(g,d(h)) - \zeta\left(d(h),d(h)\right) .$$

Demostración. Para el mapeo

$$G * A \longrightarrow U$$

definido por

$$(g,a) \longmapsto l(g)\iota(a)$$

su mapeo inverso está definido por

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow G * A \\ u &\longmapsto (\sigma(u),a) , \end{aligned}$$

donde $a \in A$ y es único tal que $u = l\left(\sigma(u)\right)\iota(a)$.

En efecto si $(g,a) \in G * A$,

$$(g,a) \longmapsto l(g)\iota(a) \longmapsto \left(\sigma\left(l(g)\iota(a)\right), b\right) ,$$

donde $b \in A$ tal que $l(g)\iota(a) = l\left[\sigma\left(l(g)\iota(a)\right)\right]\iota(b)$. Esto implica que

$$l(g)\iota(a) = l\left[\sigma l(g)\sigma\iota(a)\right]\iota(b),$$

es decir,

$$l(g)\iota(a) = l\left(g\sigma\iota(a)\right)\iota(b)\,.$$

Luego

$$l(g)\iota(a) = l(g)\iota(b)$$

y por tanto

$$\iota(a) = \iota(b),$$

es decir

$$a = b\,.$$

Además $\sigma\left(l(g)\iota(a)\right) = g$ por tanto

$$\left(\sigma\left(l(g)\iota(a)\right), b\right) = (g, a)\,.$$

Ahora si $u \in U$,

$$u \longmapsto (\sigma(u), a) \longmapsto l\left(\sigma(u)\right)\iota(a) = u\,.$$

Por otra parte, sean $g, h \in G$ con $r(h) \leq d(g)$, entonces $r\left[l(h)\right] \leq d\left[l(g)\right]$. Por tanto existe $l(g) \otimes l(h) = \left(l(g) | r\left[l(h)\right]\right) l(h) \in U$.

Luego existe único $\zeta(g,h) \in A$ tal que

$$l(g) \otimes l(h) = l\left[\sigma\left(l(g) \otimes l(h)\right)\right]\iota\zeta(g,h),$$

lo cual implica que

$$l(g) \otimes l(h) = l(g \otimes h)\iota\zeta(g,h).$$

Por tanto

$$\iota\zeta(g,h) = l(g \otimes h)^{-1}\left[l(g) \otimes l(h)\right],$$

es decir,

$$\iota\zeta(g,h) = l(g \otimes h)^{-1} \otimes \left[l(g) \otimes l(h)\right]\,.$$

Ahora pasemos a probar (i). Supongamos que $u = l(g)\imath(a),\ v = l(h)\imath(b)$ y que existe uv, entonces

$$\begin{aligned}
uv &= l(g)\imath(a)l(h)\imath(b) \\
&= l(g)l(h)l(h)^{-1}\imath(a)l(h)\imath(b) \\
&= l(g)l(h)\imath(a\cdot h)\imath(b) \\
&= l(g)l(h)\imath(a\cdot h+b) \\
&= l(gh)\imath\zeta(g,h)\imath(a\cdot h+b) \\
&= l(gh)\imath\left[\zeta(g,h)+a\cdot h+b\right].
\end{aligned}$$

Probemos (ii). Sean $u = l(g)\imath(a)$ y $v = l(h)\imath(b)$. Supongamos $v \leq u$, entonces $l(g)\imath(a) \leq l(h)\imath(b)$, lo cual implica que $\sigma\left[l(g)\imath(a)\right] \leq \sigma\left[l(h)\imath(b)\right]$ y por tanto $g \leq h$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
l(h)\imath(b) &= \left(l(g)\imath(a)|d\left[l(h)\right]\right) \\
&= \left(l(g)|d\left[l(h)\right]\right)\left(\imath(a)|d\left[l(h)\right]\right),
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\imath(b)\left(\imath(a)|d\left[l(h)\right]\right)^{-1} = l(h)^{-1}\left(l(g)|d\left[l(h)\right]\right)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\imath\left(b-(a|0_{d(h)})\right) &= l(h)^{-1}\otimes l(g) \\
&= l\left(g\otimes d(h)\right)^{-1}\otimes l(g) \\
&= \left[\left(l(g)\otimes l\left(d(h)\right)\right)\imath\zeta(g,d(h))^{-1}\right]^{-1}\otimes l(g) \\
&= \imath\zeta\left(g,d(h)\right)\otimes l\left(d(h)\right)^{-1}\otimes l(g)^{-1}\otimes l(g) \\
&= \imath\zeta\left(g,d(h)\right)\otimes l\left(d(h)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

pero $l\left(d(h)\right)\otimes l\left(d(h)\right) = l\left(d(h)\right)\imath\zeta\left(d(h),d(h)\right)$,

así que $\imath\zeta\left(d(h),d(h)\right) = l\left(d(h)\right)$.

Esto implica que

$$\imath\left(b-(a|0_{d(h)})\right) = \imath\zeta\left(g,d(h)\right)\otimes\imath\zeta\left(d(h),d(h)\right)^{-1}$$

y por tanto

$$b = (a|0_{d(h)})+\zeta\left(g,d(h)\right)-\zeta\left(d(h),d(h)\right).$$

□

4.2. Extensiones que se dividen

En está sección estudiaremos la clase más sencilla de extensiones, pero comenzaremos revisando el producto semídirecto de grupoides ordenados. Sea A un $G-$módulo. Definiremos el producto semidirecto de A por G. Pongamos

$$G \ltimes A = \left\{(g,a) \in G \times A : \, d(a) = 0_{d(g)}\right\} .$$

Sean (g,a), $(h,b) \in G \ltimes A$. Si existe gh entonces definimos el producto

$$(g,a)(h,b) = (gh, a \cdot h + b) .$$

Proposición 4.2.1. Sean G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo. Entonces $G \ltimes A$ es un grupoide ordenado con el producto definido anteriormente y el orden heredado de $G \times A$.

Demostración. Comencemos notando que los elementos identidad en $G \ltimes A$ son de la forma $(e, 0_e)$, con $e \in G_0$, por lo cual si $(g,a) \in G \ltimes A$, su identidad derecha es

$$\left(d(g), 0_{d(g)}\right) ,$$

y su identidad izquierda es

$$\left(r(g), 0_{r(g)}\right) .$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(g,a)\left(d(g), 0_{d(g)}\right) &= \left(gd(g), a \cdot d(g) + 0_{d(g)}\right) \\
&= (g,a) \\
\left(r(g), 0_{r(g)}\right)(g,a) &= \left(r(g)g, 0_{r(g)} \cdot g + a\right) \\
&= (g, 0_{d(g)} + a) \\
&= (g,a) .
\end{aligned}$$

Por lo cual definimos

$$d(g,a) = \left(d(g), 0_{d(g)}\right) \quad \text{y} \quad r(g,a) = \left(r(g), 0_{r(g)}\right) .$$

Pasemos a mostrar que el producto definido es asociativo.

Sean $(g,a), (h,b)(i,c) \in G \ltimes A$ de tal manera que existe ghi, entonces

$$\begin{aligned}
(g,a)\left[(h,b)(i,c)\right] &= (g,a)(hi, b \cdot i + c) \\
&= (ghi, a \cdot hi + b \cdot i + c) \\
&= (ghi, (a \cdot h) \cdot i + b \cdot i + c) \\
&= (ghi, (a \cdot h + b) \cdot i + c) \\
&= (gh, a \cdot h + b)(i,c) \\
&= \left[(g,a)(h,b)\right](i,c) .
\end{aligned}$$

Hasta aquí hemos probado que $G \ltimes A$ es una categoría, veamos que es un grupoide.

Sea $(g,a) \in G \ltimes A,$ definimos

$$(g,a)^{-1} = (g^{-1}, -a \cdot g^{-1}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g,a)(g^{-1}, -a \cdot g^{-1}) &= \big(gg^{-1}, a \cdot g^{-1} + (-a) \cdot g^{-1}\big) \\ &= \big(r(g), 0_{d(g)} \cdot g^{-1}\big) \\ &= \big(r(g), 0_{r(g)}\big)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g^{-1}, -a \cdot g^{-1})(g,a) &= \big(g^{-1}g, (-a \cdot g^{-1}) \cdot g + a\big) \\ &= (d(g), -a + a) \\ &= \big(d(g), 0_{d(g)}\big) .\end{aligned}$$

Sean $(g,a), (h,b) \in G \ltimes A$. Definimos el orden parcial heredado de $G \ltimes A$ por

$$(g,a) \leq (h,b) \quad \text{si y sólo si} \quad g \leq h \text{ y } a \leq b$$

Comencemos a verificar los axiomas de grupoide ordenado.

Supongamos que $(g,a) \leq (h,b)$, entonces

$$g \leq h \quad \text{y} \quad a \leq b.$$

Luego

$$g^{-1} \leq h^{-1} \quad \text{y} \quad -a \leq -b.$$

Dado que $a \in A_{d(g)} = A_{r(g^{-1})}$, existe $-a \cdot g^{-1}$ y similarmente existe $-b \cdot h^{-1}$, luego

$$-a \cdot g^{-1} \leq -b \cdot h^{-1}.$$

Por tanto

$$(g^{-1}, -a \cdot g^{-1}) \leq (h^{-1}, -b \cdot h^{-1})$$

equivalente a

$$(g,a)^{-1} \leq (h,b)^{-1}.$$

Ahora supongamos $(g_1,a_1) \leq (h_1,b_1)$ y $(g_2,a_2) \leq (h_2,b_2)$, y que existen los productos $(g_1,a_1)(g_2,a_2),\ (h_1,b_1)(h_2,b_2)$. Entonces tenemos $g_1 \leq h_1,\ g_2 \leq h_2,\ a_1 \leq b_1,\ a_2 \leq b_2$. Esto implica que

$$g_1 g_2 \leq h_1 h_2, \quad \text{y} \quad a_1 \cdot g_2 \leq b_1 \cdot h_2 .$$

Luego

$$a_1 \cdot g_2 + a_2 \leq b_1 \cdot h_2 + b_2,$$

por lo cual $(g_1, a_1)(g_2, a_2) \leq (h_1, b_1)(h_2, b_2)$.

Supongamos que (g,a) es un elemento de $G \ltimes A$ y que $(e, 0_e)$ es un elemento identidad de $G \ltimes A$ tal que $(e, 0_e) \leq d(g,a) = \left(d(g), 0_{d(g)}\right)$, entonces $e \leq d(g)$ y $0_e \leq 0_{d(g)}$, por tanto existen únicos $(g|e)$ y $(a|0_e)$ en G y A, respectivamente. Definimos la restricción de (g,a) respecto a $(e, 0_e)$ como $((g|e), (a|0_e))$.

Dado que $(g|e) \leq g$ y $(a|0_e) \leq a$,

$$((g|e), (a|0_e)) \leq (g,a)$$

y

$$\begin{aligned} d\left[((g|e), (a|0_e))\right] &= \left(d\left[(g|e)\right], 0_e\right) \\ &= (e, 0_e) \end{aligned}$$

además por su forma es único.

$\square$

El producto semidirecto proporciona un ejemplo de una extensión. Sean A un $G-$módulo y $\pi : G \ltimes A \longrightarrow G$ la proyección canónica sobreyectiva en G. Notemos que $\pi\mid_{(G \ltimes A)_0}$ es un isomorfismo, además el kernel de π es $G_0 \ltimes A$. Se define $i : A \longrightarrow G \ltimes A$ por $i(a) = (e,a)$, donde e es el único elemento en G_0 con la propiedad $\theta(e) = 0_e = d(a)$. Inmediatamente

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} G \ltimes A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G$$

es una extensión de A por G.

Una extensión $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G se *divide* o se *escinde* si σ tiene una inversa derecha, esto es, si existe un funtor ordenado

$$\tau : G \longrightarrow U$$

con $\sigma\tau = 1_G$. A tal funtor τ se le llama una *división* para la extensión $\mathcal{E}$. Notemos que τ es un caso particular de una transversal.

El producto semidirecto anterior se divide con la división $\tau : G \longrightarrow G \ltimes A$ dada por $\tau(g) = (g, 0_{r(g)})$.
El siguiente resultado nos dice que los productos semidirectos son precisamente extensiones que se dividen.

Proposición 4.2.2. Cualquier extensión $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ que se divide, es congruente a la extensión de producto semidireto derivada del $G-$módulo A.

Demostración. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G que se divide y τ el divisor.
Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dr, "\sigma"] & \\
A \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "i"'] & & G \arrow[ul, bend left, "\tau"'] \\
& G \ltimes A \arrow[uu, dashed, "\mu"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}.$$

Dado que el conjunto $G * A$ es igual al conjunto $G \ltimes A$, por la proposición 4.1.10, μ es un isomorfismo. Resta verificar que el diagrama es conmutativo.
Sea $a \in A$, entonces $\mu\iota(a) = \mu(e,a) = \tau(e)\iota(a) = \iota(a)$. Sea $(g,a) \in G \ltimes A$, entonces $\sigma\mu(g,a) = \sigma(\tau(g)\iota(a)) = \sigma\tau(g)\sigma\iota(a) = g = \pi(g,a)$. Por tanto ambas extensiones son equivalentes, esto es, cualquier extensión que se divide es equivalente a la extensión que se genera por el grupoide ordenado $G \ltimes A$. $\square$

El anterior resultado nos dice que sólo existe una extensión de A por G que se divide (salvo equivalencia) asociada a la acción dada de G sobre A.
Sin embargo, existe un problema de clasificación que involucra extensiones que se dividen: dada una extensión que se divide, clasificar todas las posibles divisiones.

Definición 4.2.3. Sean G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo. Una *derivación* de A es una función preservadora de orden $\phi : G \longrightarrow A$ tal que:

(D1) $\phi(g) \in A_{d(g)}$ para todo $g \in G$.

(D2) $\phi(gh) = \phi(g) \cdot h + \phi(h)$ para todo $g, h \in G$ tal que gh exista.

Notemos que si $e \in G_0$, entonces $\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e) \cdot e + \phi(e)$. Luego $\phi(e) = 0_e$.
Mostremos ahora que las derivaciones pueden ser usadas para clasificar divisiones.

Lema 4.2.4. Cualquier división de una extensión que se divide determina, y está determinada por una derivación.

Demostración. Basta considerar la extensión generada por el producto semidirecto $G \ltimes A$. Si suponemos que $\phi : G \longrightarrow A$ es una derivación, definimos

$$\begin{aligned}
\tau : G &\longrightarrow G \ltimes A \\
g &\longmapsto (g, \phi(g)).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\tau(gh) &= (gh, \phi(gh)) \\
&= (gh, \phi(g) \cdot h + \phi(h)) \\
&= (g, \phi(g))(h, \phi(h)) \\
&= \tau(g)\tau(h).
\end{aligned}$$

Por lo cual τ es un funtor, además como ϕ preserva orden, τ también.

Ahora supongamos que τ es una división dada, entonces $\pi\tau = 1_G$. Luego $\tau(g) = (g, \tau'(g))$, donde $\tau'(g)$ es un elemento de A que satisface $d[\tau'(g)] = 0_{d(g)}$.

Definimos

$$\begin{aligned} &\phi : G \longrightarrow A \quad \text{por} \\ &\phi(g) = \tau'(g). \end{aligned}$$

Sean $g, h \in G$ tal que gh existe, entonces

$$\begin{aligned} \big(gh, \tau'(gh)\big) &= \tau(gh) \\ &= \tau(g)\tau(h) \\ &= \big(g, \tau'(g)\big)\big(h, \tau'(h)\big) \\ &= \big(gh, \tau'(g)\cdot h + \tau'(h)\big). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= \tau'(gh) \\ &= \tau'(g)\cdot h + \tau'(h) \\ &= \phi(g)\cdot h + \phi(h). \end{aligned}$$

Por tanto ϕ es una derivación. □

Denotemos por $Z^1(G,A)$ al conjunto de todas las derivaciones del $G-$módulo A.

Lema 4.2.5. $Z^1(G,A)$ es un grupo abeliano bajo la suma puntual.

Demostración. Sean $\phi_1, \phi_2 : G \longrightarrow A$ dos derivaciones veamos que la suma $\phi_1 + \phi_2$ es también una derivación.

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 : G &\longrightarrow A \\ g &\longmapsto \phi_1(g) + \phi_2(g). \end{aligned}$$

Notemos que se cumple $(D1)$. Sean $g, h \in G$ tal que existe gh, entonces

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2(gh) &= \phi_1(gh) + \phi_2(gh) \\ &= \phi_1(g)\cdot h + \phi_1(h) + \phi_2(g)\cdot h + \phi_2(h) \\ &= [\phi_1(g) + \phi_2(g)]\cdot h + \phi_1(h) + \phi_2(h) \\ &= \phi_1 + \phi_2\,(g)\cdot h + \phi_1 + \phi_2\,(h). \end{aligned}$$

Como los elementos de $Z^1(G,A)$ son funciones, y la suma está definida de manera puntual, la operación es asociativa en $Z^1(G,A)$.

Definimos $\bar{0} : G \longrightarrow A$ por $\bar{0}(g) = \theta\,(d(g)) = 0_{d(g)}$. Mostremos que $\bar{0}$ es una derivación.

Sean $g,h \in G$ tal que gh existe, entonces

$$\begin{aligned}\bar{0}(gh) &= \theta\,(d(gh))\\ &= \theta\,(d(h))\\ &= \theta\,(r(h))\cdot h\\ &= \theta\,(d(g))\cdot h\\ &= \bar{0}(g)\cdot h\\ &= \bar{0}(g)\cdot h + \bar{0}(h)\,.\end{aligned}$$

Por otra parte si $\phi \in Z^1(G,A)$, se define su inverso por

$$-\phi : G \longrightarrow A \tag{4.1}$$

$$g \longmapsto -\phi(g)\,. \tag{4.2}$$

Supongamos que $g,h \in G$ tal que gh existe, entonces

$$\begin{aligned}-\phi(gh) &= -\left[\phi(g)\cdot h + \phi(h)\right]\\ &= -\left[\phi(g)\cdot h\right] + \left[-\phi(h)\right]\\ &= -\phi(g)\cdot h + \left[-\phi(h)\right]\,.\end{aligned}$$

Por lo cual $-\phi$ pertenece a $Z^1(G,A)$.

Dado que cada elemento de $Z^1(G,A)$ está definido sobre un grupoide abeliano, $Z^1(G,A)$ es abeliano. □

El siguiente resultado proporciona una clase importante de derivaciones.

Lema 4.2.6. Sean A un $G-$módulo y $\delta : G_0 \longrightarrow A$ una función preservadora de orden tal que $\delta(e) \in A_e$.

La función

$$\partial\delta : G \longrightarrow A\,,$$

definida por

$$g \longmapsto \delta\,(r(g))\cdot g - \delta\,(d(g))$$

es una derivación.

Demostración. Comencemos notando que $\partial\delta(g) \in A_{d(g)}$.

Sean $gh \in G$ tal que gh existe, entonces

$$\begin{aligned}\partial\delta(gh) &= \delta\left(r(gh)\right)\cdot gh - \delta\left(d(gh)\right)\\ &= \delta\left(r(g)\right)\cdot gh - \delta\left(d(h)\right).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\partial\delta(g)\cdot h + \partial\delta(h) &= \left[\delta\left(r(g)\right)\cdot g - \delta\left(d(g)\right)\right]\cdot h + \delta\left(r(h)\right)\cdot h - \delta\left(d(h)\right)\\ &= \delta\left(r(g)\right)\cdot gh - \delta\left(d(g)\right)\cdot h + \delta\left(r(h)\right)\cdot h - \delta\left(d(h)\right)\\ &= \delta\left(r(g)\right)\cdot gh - \delta\left(r(h)\right)\cdot h + \delta\left(r(h)\right)\cdot h - \delta\left(d(h)\right)\\ &= \delta\left(r(g)\right)\cdot gh - \delta\left(d(h)\right).\end{aligned}$$

□

A las derivaciones de la forma $\partial\delta$ las llamaremos *derivaciones principales*. Denotamos al conjunto de todas las derivaciones principalesde de un $G-$módulo A por $B^1(G,A)$.

Lema 4.2.7. $B^1(G,A)$ es un subgrupo de $Z^1(G,A)$.

Demostración. Sean $\delta_1, \delta_2 : G_0 \longrightarrow A$ dos funciones preservadoras de orden tales que $\delta_1(e), \delta_2(e) \in A_e$, para cualquier $e \in G_0$. Definimos la suma $\partial\delta_1 + \partial\delta_2 : G \longrightarrow A$ de manera puntual.
Veamos que $\partial\delta_1 + \partial\delta_2$ es una derivación principal.

Sea $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\partial\delta_1 + \partial\delta_2\,(g) &= \partial\delta_1(g) + \partial\delta_2(g)\\ &= \delta_1\left(r(g)\right)\cdot g - \delta_1\left(d(g)\right) + \delta_2\left(r(g)\right)\cdot g - \delta_2\left(d(g)\right)\\ &= \left[\delta_1\left(r(g)\right) + \delta_2\left(r(g)\right)\right]\cdot g - \left[\delta_1\left(d(g)\right) + \delta_2\left(d(g)\right)\right]\\ &= \left[\delta_1 + \delta_2\,\left(r(g)\right)\right]\cdot g - \left[\delta_1 + \delta_2\,\left(d(g)\right)\right]\\ &= \partial(\delta_1 + \delta_2)(g).\end{aligned}$$

Luego para la función $\delta_1 + \delta_2 : G \longrightarrow A$ definida de manera puntual,

$$\partial\delta_1 + \partial\delta_2 = \partial(\delta_1 + \delta_2).$$

Por tanto la suma es cerrada en $B^1(G,A)$.

Mostremos que la derivación identidad, $\bar{0}$, es principal.

Sea $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\partial 0 &= 0_{r(g)}\cdot g - 0_{d(g)}\\ &= 0_{d(g)} - 0_{d(g)}\\ &= 0_{d(g)},\end{aligned}$$

por tanto

$$\partial 0 = \bar{0}\,.$$

Si $\partial\delta$ es una derivación principal, se define

$$\begin{aligned} -\delta : G_0 &\longrightarrow A \\ e &\longmapsto -\delta(e)\,. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\partial(-\delta) = -\partial\delta\,.$$

□

Las derivaciones proporcionan una forma fácil de caracterizar divisiones. Para clasificar divisiones introducimos la noción de $A-$conjugación. Sean $\mathcal{E}$ una extensión que se divide de A por G y τ, λ dos divisiones de $\mathcal{E}$ con correspondiente derivación $\bar{\tau}$ y $\bar{\lambda}$, respectivamente. Decimos que τ y λ son A-conjugados si existe una función preservadora de orden $\delta : G_0 \longrightarrow A$ tal que $\delta(e) \in A_e$ y para toda $g \in G$,

$$\bar{\tau}(g) = \delta\left(r(g)\right) \cdot g + \bar{\lambda}(g) - \delta\left(d(g)\right)\,.$$

El siguiente resultado es evidente.

Lema 4.2.8. Dos derivaciones corresponden a divisiones $A-$conjugadas si y sólo si su diferencia es una derivación principal.

Teorema 4.2.9. Para cualquier grupoide ordenado G y $G-$módulo A, las clases de $A-$conjugación de divisores de la extensión que se divide

$$A \xrightarrow{\ i\ } G \ltimes A \xrightarrow{\ \pi\ } G\,,$$

están en correspondencia biyectiva con los elementos del grupo cociente $\dfrac{Z^1(G,A)}{B^1(G,A)}$.

Demostración. Sea $[\tau]$ una clase de $A-$conjugación, donde τ es una división de la extensión

$$A \xrightarrow{\ i\ } G \ltimes A \xrightarrow{\ \pi\ } G\,.$$

τ está relacionado de manera biunivoca con una derivación $\bar{\tau}$ (lema 4.2.4). $\bar{\tau}$ se relaciona con la clase lateral $\bar{\tau}B^1(G,A)$.
Veamos que la correspondencia biyectiva no depende de la elección del representante en $[\tau]$.
Sea $\lambda \in [\tau]$, entonces por el lema 4.2.4, $\bar{\tau} - \bar{\lambda}$ es una derivación principal. Esto implica que

$$\bar{\tau} - \bar{\lambda} \in B^1(G,A)$$

y por tanto

$$\bar{\tau}B^1(G,A) = \bar{\lambda}B^1(G,A)\,.$$

□

4.3. Conjuntos de factores

En está sección clasificaremos extensiones de grupoides ordenados definiendo conjuntos de factores para $G-$módulos. Sean G un grupoide ordenado y $n \geq 1$. Una $n-$escalera sobre G es una $n-$ada $(g_n, \ldots, g_2, g_1)$, donde $g_i \in G$ y $r(g_i) \leq d(g_{i+1})$, para $i = 1, \ldots, n-1$. Denotamos al conjunto de $n-$escaleras sobre G por $S_n(G)$.

Definición 4.3.1. Sea G un grupoide ordenado. Un conjunto de factores para un $G-$módulo A es una función

$$\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$$

que satisface las siguientes condiciones:

(FS1) $\zeta(g,h) \in A_{d(h)}$ para cualquier $(g,h) \in S_2(G)$.

(FS2) Para todo $(g,h,k) \in S_3(G)$, $\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta(g \otimes h, k) = \zeta(g, h \otimes k) + \zeta(h,k)$.

Lema 4.3.2. Sea ζ un conjunto de factores para un $G-$módulo A. Entonces

(i) $\zeta\left(d(g), d(g)\right) = \zeta\left(g, d(g)\right)$ para toda $g \in G$.

(ii) $\zeta\left(r(g), r(g)\right) \cdot g = \zeta\left(r(g), g\right)$ para toda $g \in G$.

(iii) $\zeta(g, g^{-1}) \cdot g + \zeta\left(r(g), g\right) = \zeta\left(g, d(g)\right) + \zeta(g^{-1}, g)$ para todo $g \in G$.

(iv) Si $e, f \in G_0$ con $f \leq e$, entonces $\left(\zeta(e,e)|0_f\right) = \zeta(e,f)$.

(v) Si $g, h \in G$ con $h \leq g$, entonces $\left(\zeta(g, d(g))|0_{d(h)}\right) = \zeta\left(d(g), d(g)\right)$.

(vi) Si $g, h \in G$ con $h \leq g$, entonces $\zeta\left(g, d(h)\right) \cdot h^{-1} + \zeta(h, h^{-1}) = \zeta(g, h^{-1}) + \zeta\left(d(h), h^{-1}\right)$.

(vii) Si $g, h \in G$ con $h \leq g$, entonces $\left(\zeta(g, g^{-1})|0_{r(h)}\right) + \zeta\left(r(g), r(h)\right) = \zeta(g, h^{-1}) + \zeta\left(g^{-1}, r(h)\right)$.

(viii) Si $g, h, k \in G$ con $k \leq h \leq g$, entonces $\left(\zeta\left(g, d(h)\right)|0_{d(k)}\right) + \zeta\left(h, d(k)\right) = \zeta\left(g, d(k)\right) + \zeta\left(d(h), d(k)\right)$.

(ix) Si $g, g', h, h' \in G$ son tal que existe gg', existe hh', $h \leq g$ y $h' \leq g'$. Entonces $\left(\zeta(g, g')|0_{d(h')}\right) + \zeta\left(gg', d(h')\right) = \zeta(g, h') + \zeta\left(g', d(h')\right)$.

(x) Si $g, g', h, h' \in G$ son tal que existe gg', existe hh', $h \leq g$ y $h' \leq g'$. Entonces $\zeta\left(g, r(h')\right) \cdot h' + \zeta(h, h') = \zeta(g, h') + \zeta\left(r(h'), h'\right)$.

Demostración. (i) Apliquemos $(FS2)$ a la $3-$escalera $(g, d(g), d(g))$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(g, d(g)\right)|0_{d(g)}\right) \cdot d(g) + \zeta\left(g \otimes d(g), d(g)\right) = \zeta\left(g, d(g) \otimes d(g)\right) + \zeta\left(d(g), d(g)\right).$$

Luego

$$\zeta\left(g, d(g)\right) + \zeta\left(g, d(g)\right) = \zeta\left(g, d(g)\right) + \zeta\left(d(g), d(g)\right)$$

y por tanto

$$\zeta\left(g, d(g)\right) = \zeta\left(d(g), d(g)\right).$$

(ii) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera $(r(g), r(g), g)$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(r(g), r(g)\right)|0_{r(g)}\right) \cdot g + \zeta\left(r(g) \otimes r(g), g\right) = \zeta\left(r(g), r(g) \otimes g\right) + \zeta\left(r(g), g\right) .$$

Así que

$$\zeta\left(r(g), r(g)\right) \cdot g + \zeta\left(r(g), g\right) = \zeta\left(r(g), g\right) + \zeta\left(r(g), g\right)$$

y por tanto

$$\zeta\left(r(g), r(g)\right) \cdot g = \zeta\left(r(g), g\right) .$$

(iii) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera (g, g^{-1}, g). Tenemos que

$$\left(\zeta(g, g^{-1})|0_{r(g)}\right) \cdot g + \zeta(g \otimes g^{-1}, g) = \zeta(g, g^{-1} \otimes g) + \zeta(g^{-1}, g) .$$

Así que

$$\zeta(g, g^{-1}) \cdot g + \zeta\left(r(g), g\right) = \zeta\left(g, d(g)\right) + \zeta(g^{-1}, g) .$$

(iv) Aplicamos $(FS2)$ a la 3−cadena (e, e, f). Tenemos que

$$\left(\zeta(e, e)|0_f\right) \cdot f + \zeta(e \otimes e, f) = \zeta(e, e \otimes f) + \zeta(e, f) .$$

Así que

$$\left(\zeta(e, e)|0_f\right) + \zeta(e, f) = \zeta(e, f) + \zeta(e, f)$$

y por tanto

$$\left(\zeta(e, e)|0_f\right) = \zeta(e, f) .$$

(v) Aplicamos $(FS2)$ a la 3−escalera $(g, d(g), d(h))$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(g, d(g)\right)|0_{d(h)}\right) \cdot d(h) + \zeta\left(g \otimes d(g), d(h)\right) = \zeta\left(g, d(g) \otimes d(h)\right) + \zeta\left(d(g), d(h)\right) .$$

Así que

$$\left(\zeta\left(g,d(g)\right)|0_{d(h)}\right)+\zeta\left(g,d(h)\right)=\zeta\left(g,d(h)\right)+\zeta\left(d(g),d(h)\right)$$

y por tanto

$$\left(\zeta\left(g,d(g)\right)|0_{d(h)}\right)=\zeta\left(d(g),d(h)\right).$$

(vi) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera $\left(g,d(h)h^{-1}\right)$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(g,d(h)\right)|0_{d(h)}\right)\cdot h^{-1}+\zeta\left(g\otimes d(h),h^{-1}\right)=\zeta\left(g,d(h)\otimes h^{-1}\right)+\zeta\left(d(h),h^{-1}\right)$$

y por tanto

$$\zeta\left(g,d(h)\right)\cdot h^{-1}+\zeta(h,h^{-1})=\zeta(g,h^{-1})+\zeta\left(d(h),h^{-1}\right).$$

(vii) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera $\left(g,g^{-1},r(h)\right)$. Tenemos que

$$\left(\zeta(g,g^{-1})|0_{r(h)}\right)\cdot r(h)+\zeta\left(g\otimes g^{-1},r(h)\right)=\zeta\left(g,g^{-1}\otimes r(h)\right)+\zeta\left(g^{-1},r(h)\right)$$

y por tanto

$$\left(\zeta(g,g^{-1})|0_{r(h)}\right)+\zeta\left(r(g),r(h)\right)=\zeta(g,h^{-1})+\zeta\left(g^{-1},r(h)\right).$$

$(viii)$ Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera $(g,d(h),d(k))$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(g,d(h)\right)|0_{d(k)}\right)\cdot d(k)+\zeta\left(g\otimes d(h),d(k)\right)=\zeta\left(g,d(h)\otimes d(k)\right)+\zeta\left(d(h),d(k)\right)$$

y por tanto

$$\left(\zeta\left(g,d(h)\right)|0_{d(k)}\right)+\zeta\left(h,d(k)\right)=\zeta\left(g,d(k)\right)+\zeta\left(d(h),d(k)\right).$$

(ix) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−escalera $(g,g',d(h'))$. Tenemos que

$$\left(\zeta(g,g')|0_{d(h')}\right)\cdot d(h')+\zeta\left(g\otimes g',d(h')\right)=\zeta\left(g,g'\otimes d(h')\right)+\zeta\left(g',d(h')\right)$$

y por tanto

$$\left(\zeta(g,g')|0_{d(h')}\right)+\zeta\left(gg',d(h')\right)=\zeta(g,h')+\zeta(g',d(h')).$$

(x) Apliquemos $(FS2)$ a la 3−ecalera $(g,r(h'),h')$. Tenemos que

$$\left(\zeta\left(g,r(h')\right)|0_{r(h')}\right)\cdot h'+\zeta\left(g\otimes r(h'),h'\right)=\zeta\left(g,r(h')\otimes h'\right)+\zeta\left(r(h'),h'\right)$$

y por tanto

$$\zeta\left(r,r(h')\right)\cot h'+\zeta(h,h')=\zeta(g,h')+\zeta\left(r(h'),h'\right).$$

□

Suponga que $\mathcal{E}$ es una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G. Sean l una transversal para $\mathcal{E}$ y $(g,h)\in S_2(G)$, por el lema 4.1.5 los productos $l(g)\otimes l(h)$ y $l\left((g\otimes h)^{-1}\right)\otimes l(g)$ existen, y por el corolario 4.1.6, existe $l(g\otimes h)^{-1}\otimes l(g)$.

Proposición 4.3.3. Sean $\mathcal{E}=(\iota,U,\sigma)$ una extensión de A por G y l una transversal para $\mathcal{E}$. Se define

$$\zeta:S_2(G)\longrightarrow A$$

por

$$\iota\left(\zeta(g,h)\right)=l(g\otimes h)^{-1}\otimes l(g)\otimes l(h).$$

Entonces ζ es un conjunto de factores.

Demostración. Por la proposición 4.1.10, cada $\zeta(g,h)$ es único, por lo cual la función ζ está bien definida.
Si $\iota\left(\zeta(g,h)\right)=l(g\otimes h)^{-1}\otimes l(g)\otimes l(h)$, entonces

$$d\left[\iota\left(\zeta(g,h)\right)\right]=d\left[l(h)\right].$$

Así que

$$\sigma\left(d\left[\iota\left(\zeta(g,h)\right)\right]\right)=\sigma\left(d\left[l(h)\right]\right)$$

y por tanto

$$d\left[\zeta(g,h)\right]=d(h).$$

Por tanto se cumple $(SF1)$.

Para probar $(SF2)$, sea $(g,h,k) \in S_3(G)$. Calculemos $l(g)\otimes l(h)\otimes l(k)$ de dos formas:

$$\begin{aligned}
(l(g)\otimes l(h))\otimes l(k) &= l(g\otimes h)\otimes \iota\zeta(g,h)\otimes l(k)\\
&= l(g\otimes h)\otimes l(k)\otimes l(k)^{-1}\otimes \iota\zeta(g,h)\otimes l(k)\\
&= l(g\otimes h\otimes k)\otimes \iota\zeta(g\otimes h,k)\otimes l(k)^{-1}\otimes \iota\zeta(g,h)\otimes l(k)\\
&= l(g\otimes h\otimes k)\iota\zeta(g\otimes h,k)l(k)^{-1}\left(\iota\zeta(g,h)|\iota 0_{r(k)}\right)l(k)\\
&= l(g\otimes h\otimes k)\iota\zeta(g\otimes h,k)l(k)^{-1}\iota\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right)l(k).
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
l(g)\otimes(l(h)\otimes l(k)) &= l(g)\otimes l(h\otimes k)\otimes \iota\zeta(h,k)\\
&= l(g\otimes h\otimes k)\otimes \iota\zeta(g,h\otimes k)\otimes \iota\zeta(h,k)\\
&= l(g\otimes h\otimes k)\iota\zeta(g,h\otimes k)\iota\zeta(h,k)\,.
\end{aligned}$$

Dado que ambas factorizaciones de $l(g)\otimes l(h)\otimes l(k)$ son iguales, tenemos que

$$\iota\zeta(g\otimes h,k)l(k)^{-1}\iota\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right)l(k) = \iota\zeta(g,h\otimes k)\iota\zeta(h,k)$$

y por tanto

$$\iota\left[\zeta(g\otimes h,k)+\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right)\cdot k\right] = iota\left[\zeta(g,h\otimes k)+\zeta(h,k)\right].$$

Como ι es inyectiva,

$$\zeta(g\otimes h,k)+\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right)\cdot k = \zeta(g,h\otimes k)+\zeta(h,k)\,.$$

□

Notemos que si la transversal l es un funtor ordenado, entonces $l(g\otimes h) = l(g)\otimes l(h)$. Podemos pensar del conjunto de factores construido en la proposición anterior como una medida de como l deja de ser un funtor ordenado. Está idea se hace más precisa en el siguiente lema.

Lema 4.3.4. Sean $\mathcal{E}$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G, l una trasversal para $\mathcal{E}$ y ζ el conjunto de factores definido por

$$l(g)\otimes l(h) = l(g\otimes h)\iota\left[\zeta(g,h)\right].$$

Entonces l es un funtor ordenado si y sólo si para cualquier $(g,h)\in S_2(G),\ \zeta(g,h) = 0_{d(h)}$.

Demostración. Si suponemos que l es un funtor ordenado y (g,h) es una $2-$escalera,

$$\iota\left(\zeta(g,h)\right) = d\left(l(h)\right).$$

Así que

$$\sigma\iota\left(\zeta(g,h)\right) = d(h)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\zeta(g,h) &= \theta\,(d(h)) \\ &= 0_{d(h)}\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos ahora que para todo $(g,h) \in S_2(G),\ \zeta(g,h) = 0_{d(h)}$.

Sea $(g,h) \in S_2(G)$, entonces

$$l(g) \otimes l(h) = l(g \otimes h)\iota(0_{d(h)})$$

y por tanto

$$l(g) \otimes l(h) = l(g \otimes h)\sigma^{-1}\,(d(h))\,.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\sigma\,[d\,(l(g \otimes h))] &= d(g \otimes h) \\ &= d(h)\end{aligned}$$

y por tanto

$$d\,(l\,(g \otimes h)) = \sigma^{-1}\,(d(h))\,.$$

Por lo cual

$$l(g) \otimes l(h) = l(g \otimes h)\,.$$

Por tanto si $g,h \in G$ tal que existe gh, entonces existe $l(g)l(h)$. Además $l(gh) = l(g \otimes h) = l(g) \otimes l(h) = l(g)l(h)$.

Pasemos a mostrar que l preserva orden. Sean $g,h \in G$ tales que $h \leq g$. Entonces

$$\begin{aligned}l(h) &= l\,[(g|d(h))] \\ &= l\,(g \otimes d(h)) \\ &= l(g) \otimes l\,(d(h))\,\iota\,(\zeta\,(g,d(h))) \\ &= l(g) \otimes l\,(d(h)) \\ &= (l(g)|l\,(d(h))) \\ &\leq l(g)\,.\end{aligned}$$

□

La proposición 4.3.3 nos dice que una extensión junto con una transversal determinan un conjunto de factores. Consideremos ahora la relación entre conjuntos de factores dados por diferentes transversales.

Proposición 4.3.5. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y $l, l' : G \longrightarrow U$ transversales para $\mathcal{E}$. Si $\zeta, \zeta' : S_2(G) \longrightarrow A$ son los conjuntos de factor definidos por

$$\iota\zeta(g,h) = l(g \otimes h)^{-1} \otimes l(g) \otimes l(h)$$
$$\iota\zeta'(g,h) = l'(g \otimes h)^{-1} \otimes l'(g) \otimes l'(h)\,,$$

existe una función $\varepsilon : G \longrightarrow A$ definida por

$$\iota\varepsilon(g) = l(g)^{-1} l'(g)\,,$$

y

$$\zeta'(g,h) = \zeta(g,h) - \varepsilon(g \otimes h) + \varepsilon(h) + \left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) \cdot h\,.$$

Demostración. Sea $g \in G$. Dado que $l'(g) \in U$, por el lema 4.1.7, existe un único elemento en A el cual denotaremos por $\varepsilon(g)$, tal que

$$\iota\left(\varepsilon(g)\right) = l\left(\sigma\left(l'(g)\right)\right)^{-1} l'(g),$$

entonces

$$\iota\left(\varepsilon(g)\right) = l(g)^{-1} l'(g)\,.$$

Por tanto definimos la función

$$\varepsilon : G \longrightarrow A\,.$$

Para $g \in G$, $\varepsilon(g)$ es el único elemento en A que satisface

$$\iota\left(\varepsilon(g)\right) = l(g)^{-1} l'(g)\,.$$

Sea $(g,h) \in S_2(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
l'(g) \otimes l'(h) &= l(g) \otimes \iota\left(\varepsilon(g)\right) \otimes l(h) \otimes \iota\left(\varepsilon(h)\right) \\
&= l(g) \otimes \iota\left(\varepsilon(g)\right) \otimes l(h) \otimes l(h)^{-1} \otimes l(h) \otimes \iota\left(\varepsilon(h)\right) \\
&= l(g) \otimes l(h) \otimes l(h)^{-1} \otimes \iota\left(\varepsilon(g)\right) \otimes l(h) \otimes \iota\left(\varepsilon(h)\right) \\
&= l(g) \otimes l(h) \otimes \iota\left(\varepsilon(h)\right) \otimes l(h)^{-1} \iota\left(\varepsilon(g)\right) \otimes l(h) \\
&= l(g \otimes h) \otimes \iota\zeta(g,h) \iota\left(\varepsilon(h)\right) \otimes l(h)^{-1} \otimes \iota\left(\varepsilon(g)\right) \otimes l(h) \\
&= l(g \otimes h) \iota\zeta(g,h) \iota\left(\varepsilon(h)\right) l(h)^{-1} \iota\left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) l(h) \\
&= l(g \otimes h) \iota\zeta(g,h) \iota\left(\varepsilon(h)\right) \iota\left(\left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) \cdot h\right) \\
&= l'(g \otimes h) \iota\left(\varepsilon(g \otimes h)\right)^{-1} \iota\zeta(g,h) \iota\left(\varepsilon(h)\right) \iota\left(\left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) \cdot h\right) \\
&= l'(g \otimes h) \iota\left[\zeta(g,h) - \varepsilon(g \otimes h) + \varepsilon(h) + \left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) \cdot h\right]\,.
\end{aligned}$$

Podemos implicar que

$$\zeta'(g,h) = \zeta(g,h) - \varepsilon(g \otimes h) + \varepsilon(h) + \left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right) \cdot h\,.$$

□

La definición del siguiente resultado está motivado por la proposición 4.1.10 .

Proposición 4.3.6. Sean G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo. Supongamos que ζ es un conjunto de factores definido en A. Sea

$$G*A = \left\{(g,a) \in G \times A : \; d(a) = 0_{d(g)}\right\}.$$

Si $(g,a),(h,b) \in G*A$ y existe gh, entonces se define

$$(g,a)(h,b) = (gh, \zeta(g,h) + a \cdot h + b).$$

Definimos un orden sobre $G*A$ de la siguiente manera:

$$(h,b) \leq (g,a) \quad \text{sii} \quad h \leq g \quad \text{y} \quad b = (a|0_{d(h)}) + \zeta\,(g,d(h)) - \zeta\,(d(h),d(h)).$$

Entonces $G*A$ es un grupoide ordenado. Más aún, si definimos

$$\begin{aligned} &i : A \longrightarrow G*A \quad \text{por} \\ &i : a \longmapsto (e, a - \zeta(e,e)),\; a \in A_e \end{aligned}$$

y

$$\pi : G*A \longrightarrow G$$

es la proyección canónica, entonces

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} G*A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G$$

es una extensión de A por G la cual induce la acción dada de G sobre A.

Demostración. Comencemos mostrando que $G*A$ es un grupoide ordenado. Tenemos una operación parcial definida sobre $G*A$. Veamos que es asociativa.

Sean $(g,a),(h,b),(k,c) \in G*A$ tal que ghk está definido, entonces

$$\begin{aligned} (g,a)\left[(h,b)(k,c)\right] &= (g,a)\,(hk, \zeta(h,k) + b \cdot k + c) \\ &= (g(hk), \zeta(g,hk) + a \cdot hk + \zeta(h,k) + b \cdot k + c) \\ &= ((gh)k, \zeta(g,hk) + \zeta(h,k) + (a \cdot h + b) \cdot k + c) \\ &= ((gh)k, \zeta(gh,k) + \zeta(g,h) \cdot k + (a \cdot h + b) \cdot k + c) \\ &= ((gh)k, \zeta(gh,k) + (\zeta(g,h) + a \cdot h + b) \cdot k + c) \\ &= (gh, \zeta(g,h) + a \cdot h + b)\,(k,c) \\ &= \left[(g,a)(h,b)\right](k,c). \end{aligned}$$

Pasemos a identifiar las identidades en $G*A$. Sean $(g,a),(h,b) \in G*A$ tal que gh está definido. Supongamos que $(g,a)(h,b) = (g,a)$, entonces $(gh, \zeta(g,h) + a \cdot h + b) = (g,a)$ por lo cual $h \in G_0$. Denotemos $h = e$. Luego

$$\begin{aligned} \zeta(g,h) + a \cdot h + b &= \zeta(g,e) + a + b \\ &= \zeta(e,e) + a + b \end{aligned}$$

y por tanto

$$b = -\zeta(e,e)\,.$$

Por tanto los elementos de $(G*A)_0$ tienen la forma

$$(e, -\zeta(e,e))$$

para $e \in G_0$. En base a lo anterior definimos

$$\begin{aligned} d(g,a) &= (d(g), -\zeta\,(d(g), d(g))) \\ r(g,a) &= (r(g), -\zeta\,(r(g), r(g)))\ . \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos probado que $G*A$ es una categoría (definición B.3.3). Pasemos a definir los elementos inversos. Sean $(g,a),(h,b) \in G*A$ y supongamos que $(g,a)(h,b) = (r(g), -\zeta\,(r(g), r(g)))$, entonces

$$(gh, \zeta(g,h) + a\cdot h + b) = (r(g), -\zeta\,(r(g), r(g)))\ .$$

Esto implica que

$$h = g^{-1}, \quad \text{luego} \quad \zeta(g,h) + a\cdot h + b = \zeta(g,g^{-1}) + a\cdot g^{-1} + b$$

y por tanto

$$\zeta(g,g^{-1}) + a\cdot g^{-1} + b = -\zeta\,(r(g), r(g))\,.$$

Así

$$b = -\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\,(r(g), r(g)) - a\cdot g^{-1}\,.$$

Mostremos que en efecto

$$(g,a)^{-1} = \left(g^{-1}, -\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\,(r(g),r(g)) - a\cdot g^{-1}\right)\ .$$

$$\begin{aligned} (g,a)^{-1}(g,a) &= \left(g^{-1}, -\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\,(r(g),r(g)) - a\cdot g^{-1}\right)(g,a) \\ &= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) + \left(-\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\,(r(g),r(g)) - a\cdot g^{-1}\right)\cdot g + a\right) \\ &= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta(g,g^{-1})\cdot g - \zeta\,(r(g),r(g))\cdot g\right) \\ &= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta(g,g^{-1})\cdot g - \zeta\,(r(g),g)\right) \\ &= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta\,(g,d(g)) - \zeta(g^{-1},g)\right) \\ &= (d(g), -\zeta\,(g,d(g))) \\ &= (d(g), -\zeta\,(d(g),d(g))) \\ &= d(g,a)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g,a)(g,a)^{-1} &= \left(r(g), \zeta(g,g^{-1}) + a\cdot g^{-1} - \zeta(g,g^{-1}) - \zeta\,(r(g),r(g)) - a\cdot g^{-1}\right) \\ &= (r(g), -\zeta\,(r(g),r(g))) \\ &= r(g,a)\,. \end{aligned}$$

Dada la relación de orden definida sobre $G*A$, mostremos que es un orden parcial.
Sea $(g,a)\in G*A$, probemos que $a=(a|0_{d(g)})+\zeta\,(g,d(g))-\zeta\,(d(g),d(g))\,.$

$$\begin{aligned}(a|0_{d(g)})+\zeta\,(g,d(g))-\zeta\,(d(g),g(g)) &= (a|0_{d(g)})+\zeta\,(g,d(g))-\zeta\,(g,d(g))\\ &= (a|0_{d(g)})\\ &= a\,.\end{aligned}$$

Por lo cual $(g,a)\leq(g,a)\,.$

Sean $(g,a),(h,b)\in G*A$ tal que $(g,a)\leq(h,b)$ y $(h,b)\leq(g,a)$, entonces $g=b$, además $b=(a|0_{d(g)})$ y $a=(b|0_{d(h)})\,.$

Esto implica que

$$g=h \quad \text{y} \quad a=b$$

y por tanto

$$(g,a)=(h,b)\,.$$

Sean $(g,a),(h,b),(k,c)\in G*A$ tales que $(g,a)\leq(h,b)$ y $(h,b)\leq(k,c)$, entonces $g\leq h,\ h\leq k,\ a=(b|0_{d(g)})+\zeta\,(h,d(g))-\zeta\,(d(g),d(g))$ y $b=(c|0_{d(h)})+\zeta\,(k,d(h))-\zeta\,(d(h),d(h))$. Esto implica que $g\leq k$. Además

$$\begin{aligned}a &= \left((c|0_{d(h)})+\zeta\,(k,d(h))-\zeta\,(d(h),d(h))\,|0_{d(g)}\right)+\zeta\,(h,d(g))-\zeta\,(d(g),d(g))\\ &= \left((c|0_{d(h)})|0_{d(g)}\right)+\left(\zeta\,(k,d(h))\,|0_{d(g)}\right)-\left(\zeta\,(d(h),d(h))\,|0_{d(g)}\right)+\zeta\,(h,d(g))-\zeta\,(d(g),d(g))\\ &= (c|0_{d(g)})+\zeta\,(k,d(g))+\zeta\,(d(h),d(g))-\left(\zeta\,(d(h),d(h))\,|0_{d(g)}\right)-\zeta\,(d(g,d(g)))\\ &= (c|0_{d(g)})+\zeta\,(k,d(g))-\zeta\,(d(g),d(g))\,.\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$(g,a)\leq(k,c)\,.$$

Pasemos a probar los axiomas de grupoide ordenado.
Sean $(g,a),(h,b)\in G*A$ tales que: $(g,a)\leq(h,b)$. Entonces $g\leq h$ y $a=(b|0_{d(g)})+\zeta\,(h,d(g))-\zeta\,(d(g),g(g))\,.$
Por demostrar, $(g,a)^{-1}\leq(h,b)^{-1}$ ó equivalentemente $g^{-1}\leq h^{-1}$ y
$-\zeta(g,g^{-1})-\zeta\,(r(g),r(g))-a\cdot g^{-1}=-\left(\zeta(h,h^{-1})\mid 0_{d(g^{-1})}\right)-\left(\zeta\,(r(h),r(h))\,|0_{d(g^{-1})}\right)-(b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})})$
$+\zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right)-\zeta\left(d(g^{-1},d(g^{-1}))\right).$

$$\begin{aligned}&-\zeta(g,g^{-1})-\zeta\,(r(g),r(g))-a\cdot g^{-1}=\\ &=-\zeta(g,g^{-1})-\zeta\,(r(g),r(g))-(b|0_{d(g)})\cdot g^{-1}-\zeta\,(h,d(g))\cdot g^{-1}+\zeta\,(d(g),d(g))\cdot g^{-1}\\ &=-\zeta(h,g^{-1})-\zeta\left(d(g),g^{-1}\right)-\zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right)-(b|0_{d(g)})\cdot g^{-1}+\zeta\,(d(g),d(g))\cdot g^{-1}\end{aligned}$$

$= -\zeta(h,g^{-1}) - \zeta\left(d(g),g^{-1}\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) + \zeta\left(d(g),d(g)\right)\cdot g^{-1}$
$= -\zeta(h,g^{-1}) - \zeta\left(d(g),g^{-1}\right) + \zeta\left(r(g^{-1}),r(g^{-1})\right)\cdot g^{-1} - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})})$
$= -\zeta(h,g^{-1}) - \zeta\left(d(g),g^{-1}\right) + \zeta\left(r(g^{-1}),g^{-1}\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})})$
$= -\zeta(h,g^{-1}) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h|0_{d(g^{-1})})$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{r(g)}\right) - \zeta\left(r(h),r(g)\right) + \zeta\left(h^{-1},r(g)\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})})$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{d(g^{-1})}\right) + \zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) - \zeta\left(r(h),r(g)\right)$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{d(g^{-1})}\right) + \zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) - \zeta\left(d(h^{-1}),d(g^{-1})\right)$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{d(g^{-1})}\right) + \zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) - \left(\zeta\left(h^{-1},d(h^{-1})\right)|0_{d(g^{-1})}\right)$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{d(g^{-1})}\right) + \zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) - \left(\zeta\left(d(h^{-1}),d(h^{-1})\right)|0_{d(g^{-1})}\right)$
$= -\left(\zeta(h,h^{-1})|0_{d(g^{-1})}\right) + \zeta\left(h^{-1},d(g^{-1})\right) - \zeta\left(d(g^{-1}),d(g^{-1})\right) - (b\cdot h^{-1}|0_{d(g^{-1})}) - \left(\zeta\left(r(h),r(h)\right)|0_{d(g^{-1})}\right).$

Sean $(g,a),(g',a'),(h,b),(h',b')\in G*A$ tales que existe gg', existe hh', $(h,b)\leq(g,a)$ y $(h',b')\leq(g',a')$. Por demostrar que $(h,b)(h',b')\leq(g,a)(g',a')$, es decir, que $(hh',\zeta(h,h')+b\cdot h'+b')\leq(gg',\zeta(g,g')+a\cdot g'+a')$, equivalentemente $hh'\leq gg'$ y $\zeta(h,h')+b\cdot h'+b' = \left(\zeta(g,g')+a\cdot g'+a'|0_{d(hh')}\right)+\zeta\left(gg',d(hh')\right)-\zeta\left(d(hh'),d(hh')\right)$.

Como hipótesis tenemos: $h\leq g$, $h'\leq g'$, $b=(a|0_{d(h)})+\zeta\left(g,d(h)\right)-\zeta\left(d(h),d(h)\right)$ y $b'=(a'|0_{d(h')})+\zeta\left(g',d(h')\right)-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$. Esto implica que
$\Rightarrow \zeta(h,h')+b\cdot h'+b' =$
$= \zeta(h,h')+(a|0_{d(h)})\cdot h'+\zeta\left(g,d(h)\right)\cdot h'-\zeta\left(d(h),d(h)\right)\cdot h'+(a'|0_{d(h')})+\zeta\left(g',d(h')\right)-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \zeta(h,h')+\zeta\left(g,d(h)\right)\cdot h'-\zeta\left(d(h),d(h)\right)\cdot h'+\zeta\left(g',d(h')\right)+(a\cdot g'|0_{d(h')})+(a'|0_{d(h')})-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \zeta(g,h')+\zeta\left(r(h'),h'\right)-\zeta\left(d(h),d(h)\right)\cdot h'+\zeta\left(g',d(h')\right)+(a\cdot g'|0_{d(h')})-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \zeta\left(r(h'),h'\right)-\zeta\left(d(h),d(h)\right)\cdot h'+\left(\zeta(g,g')|0_{d(h')}\right)+\zeta\left(gg',d(h')\right)+(a\cdot g'|0_{d(h')})+(a'|0_{d(h')})-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \zeta\left(r(h'),h'\right)-\zeta\left(r(h'),r(h')\right)\cdot h'+\left(\zeta(g,g')|0_{d(h')}\right)+\zeta\left(gg',d(h')\right)+(a\cdot g'|0_{d(h')})+(a'|0_{d(h')})-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \left(\zeta(g,g')|0_{d(h')}\right)+\zeta\left(gg',d(h')\right)+(a\cdot g'|0_{d(h')})+(a'|0_{d(h')})-\zeta\left(d(h'),d(h')\right)$
$= \left(\zeta(g,g')+a\cdot g+a'|0_{d(hh')}\right)+\zeta\left(gg',d(h')\right)-\zeta\left(d(hh'),d(hh')\right).$

Por último sean $(g,a)\in G*A$ y $(e,-\zeta(e,e))\in(G*A)_0$ tal que $(e,-\zeta(e,e))\leq d(g,a)$. Supongamos que existe $(h,b)\in G*A$ tal que satisface

(1) $d(h,b)=(e,-\zeta(e,e))$.

(2) $(h,b)\leq(g,a)$.

Entonces $d(h)=e$, $-\zeta\left(d(h),d(h)\right)=-\zeta(e,e)$, $h\leq g$ y $b=(a|0_{d(h)})+\zeta\left(g,d(h)\right)-\zeta\left(d(h),d(h)\right)$.
Definimos $h=(g|e)$, luego $b=(a|0_e)+\zeta(g,e)-\zeta(e,e)$.
Así definimos

$$((g,a)|(e,-\zeta(e,e))) = ((g|e)|(a|0_e)+\zeta(g,e)-\zeta(e,e)).$$

Hasta aquí hemos probado que $G*A$ es un grupoide ordenado.

Pasemos a demostrar: $(i,\ G*A,\ \pi)$ es una extensión de A por G.
En efecto $G*A$ es un grupoide ordenado, además π es un funtor ordenado sobreyectivo. Luego

$$\pi\,|_{(G*A)_0}: (e,-\zeta(e,e))\longmapsto e$$

es un isomorfismo ordenado. Por otra parte si $a_1\in A_e$ y $a_2\in A_f$ de tal manera que $i(a_1)=i(a_2)$, se obtiene que

$$(e,a_1-\zeta(e,e))=(f,a_2-\zeta(f,f))$$

y por tanto

$$e = f \quad \text{y} \quad a_1 = a_2\,.$$

Luego

$$i \quad \text{es inyectivo.}$$

Ahora si $a_1 \in A_e$ y $a_2 \in A_f$ tal que $a_1 \leq a_2$, entonces $e \leq f$ y $a_1 - \zeta(e,e) = (a_2|0_e) - (\zeta(f,f)|0_e) + \zeta(f,e) - \zeta(e,e)$, por lo cual $i(a_1) \leq i(a_2)$, es decir, i preserva el orden.
Por último notemos que $i(A) = Ker(\pi)$, por tanto $(i,\ G*A,\ \pi)$ es una extensión de A por G.
Pasemos a mostrar que la extensión $(i,\ G*A,\ \pi)$ induce la acción dada de G sobre A.
Sean $l : G \longrightarrow G*A$ una transversal para la extensión, $g \in G$ y $a \in A_{r(g)}$. Por demostrar que $i(a \cdot g) = l(g)^{-1} i(a) l(g)$.
Dado que $\pi l = 1_G$, $l(g)$ es de la forma $l(g) = (g, \bar{a})$ donde $\bar{a} \in A_{d(g)}$. Entonces
$l(g)^{-1} i(a) l(g) =$

$$\begin{aligned}
&= (g,\bar{a})^{-1} \left(r(g), a - \zeta\left(r(g), r(g)\right)\right)(g,\bar{a}) \\
&= \left(g^{-1}, -\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\left(r(g), r(g)\right) - \bar{a}\cdot g^{-1}\right)\left(r(g), a - \zeta\left(r(g), r(g)\right)\right)(g,\bar{a}) \\
&= \left(g^{-1}, -\zeta(g,g^{-1}) - \zeta\left(r(g), r(g)\right) - \bar{a}\cdot g^{-1}\right)\left(g, \zeta\left(r(g), g\right) + \left(a - \zeta\left(r(g), r(g)\right)\right)\cdot g + \bar{a}\right) \\
&= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta(g,g^{-1})\cdot g - \zeta\left(r(g), r(g)\right)\cdot g - \bar{a} + \zeta\left(r(g), g\right) + a\cdot g - \zeta\left(r(g), r(g)\right)\cdot g + \bar{a}\right) \\
&= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta(g,g^{-1})\cdot g - \zeta\left(r(g), g\right) + \zeta\left(r(g), g\right) + a\cdot g - \zeta\left(r(g), g\right)\right) \\
&= \left(d(g), \zeta(g^{-1},g) - \zeta(g,g^{-1})\cdot g + a\cdot g - \zeta\left(r(g), g\right)\right) \\
&= \left(d(g), a\cdot g - \zeta\left(d(g), d(g)\right)\right) \\
&= i(a\cdot g)\,.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.7. Sea $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide G. Sean l una transversal para $\mathcal{E}$ y ζ el conjunto de factores construido en la proposición 4.3.3. La extensión de A por G

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} G*A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G$$

como el la proposición 4.3.6, es congruente a $\mathcal{E}$.

Demostración. Recordemos que el conjunto de factores

$$\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$$

está definido por

$$l(g) \otimes l(h) = l(g \otimes h)\,\iota\left(\zeta(g,h)\right)\,.$$

Debemos construir el funtor ordenado

$$\mu : U \longrightarrow G*A\,.$$

Por el lema 4.1.7, cada $u \in U$ puede ser escrita de manera única como $u = l(g)\iota(a)$ donde $a \in A$ y $g = \sigma(u)$. Se define la función

$$\begin{aligned} \mu : U &\longrightarrow G * A \\ \mu : l(g)\iota(a) &\longmapsto (g,a). \end{aligned}$$

Por la proposición 4.1.10, está función es biyectiva.

Pasemos a mostrar que μ es un funtor. Sean $u = l(g)\iota(a)$, $v = l(h)\iota(b)$ elementos de U tales que el producto uv existe, equivalentemente, $r(v) = d(u)$. Esto equivale a $r(l(h)\iota(b)) = d(l(g)\iota(a))$, lo cual equivale a $\sigma[r(l(h)\iota(b))] = \sigma[d(l(g)\iota(a))]$, que a su vez equivale a $r(h) = d(g)$.

Por tanto existe gh.

Luego

$$\begin{aligned} uv &= l(g)\iota(a)l(h)\iota(b) \\ &= l(g)\iota(a)l(h)l(h)^{-1}l(h)\iota(b) \\ &= l(g)l(h)l(h)^{-1}\iota(a)l(h)\iota(b) \\ &= l(gh)\iota(\zeta(g,h))\iota(a\cdot h)\iota(b) \\ &= l(gh)\iota[\zeta(g,h) + a\cdot h + b], \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \mu(uv) &= (gh, \zeta(g,h) + a\cdot h + b) \\ &= (g,a)(h,b) \\ &= \mu(l(g)\iota(a))(l(h)\iota(b)) \\ &= \mu(u)\mu(v). \end{aligned}$$

Pasemos a mostrar que μ preserva el orden. Sean $u = l(g)\iota(a)$, $v = l(h)\iota(b)$ elementos de U y supongamos que $u \leq v$. Por demostrar: $(g,a) \leq (h,b)$.
Dado que $\sigma : U \longrightarrow G$ es un funtor ordenado, $\sigma(u) \leq \sigma(v)$. Es decir, $\sigma(l(g)\iota(a)) \leq \sigma(l(h)\iota(b))$. Lo cual implica que $g \leq h$ y por el lema 4.1.5 $d(l(g)) \leq d(l(h))$.

Para probar $(g,a) \leq (h,b)$, resta mostrar

$$a = (b|0_{d(g)}) + \zeta(h, d(g)) - \zeta(d(g), d(g)).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \iota(a) &= l(g)^{-1}u \\ &= l(g)^{-1}(l(h)\iota(b)|d(l(g))) \\ &= l(g)^{-1}(l(h)|d(l(g)))(\iota(b)|d(l(g))) \\ &= l(g)^{-1}[l(h) \otimes (\iota(b)|d(l(g)))] \\ &= l(g)^{-1} \otimes l(h) \otimes (\iota(b)|d(l(g))). \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}
&\iota\left((b|0_{d(g)})+\zeta\left(h,d(g)\right)-\zeta\left(d(g),d(g)\right)\right)=\iota\zeta\left(h,d(g)\right)\iota\zeta\left(d(g),d(g)\right)^{-1}\iota(b|0_{d(g)})\\
&=\left[l\left(h\otimes d(g)\right)^{-1}\otimes l(h)\otimes l\left(d(g)\right)\right]\left[l\left(d(g)\otimes d(g)\right)^{-1}\otimes l\left(d(g)\right)\otimes l\left(d(g)\right)\right]^{-1}\iota(b|0_{d(g)})\\
&=l\left(h\otimes d(g)\right)^{-1}\otimes l(h)\otimes l\left(d(g)\right)l\left(d(g)\right)^{-1}\otimes l\left(d(g)\right)\otimes l\left(d(g)\right)^{-1}\iota(b|0_{d(g)})\\
&=l\left(h\otimes d(g)\right)^{-1}\otimes l(h)\otimes\left(\iota(b)|d\left(l(g)\right)\right)\\
&=l(g)^{-1}\otimes l(h)\otimes\left(\iota(b)|d\left(l(g)\right)\right).
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
&\iota(a)=\iota\left((b|0_{d(g)})+\zeta\left(h,d(g)\right)-\zeta\left(d(g),d(g)\right)\right)\\
&\Rightarrow a=(b|0_{d(g)})+\zeta\left(h,d(g)\right)-\zeta\left(d(g),d(g)\right).
\end{aligned}$$

Pasemos a probar: $\mu\iota=i$ y $\pi\mu=\sigma$, donde

$$A\overset{i}{\hookrightarrow}G*A\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}G$$

es una extensión de A por G con las aplicaciones $i:a\longmapsto(e,a-\zeta(e,e))$, $a\in A_e$ y π la proyección canónica.
Sea $a\in A_e$, $\iota(a)\in U$ por lo cual existe único $b\in A$ tal que $\iota(a)=l\left(\sigma\iota(a)\right)\iota(b)$. Notemos que $\sigma\iota(a)=e$ lo cual implica que $\iota(a)=l(e)\iota(b)$.
Luego $\mu\left(\iota(a)\right)=(e,b)$. Por otra parte $a-\zeta(e,e)\in A$ y

$$\begin{aligned}
l\left(\sigma\left(\iota(a)\right)\right)\iota\left(a-\zeta(e,e)\right)&=l(e)\iota\zeta(e,e)^{-1}\iota(a)\\
&=l(e)\left(l(e)\right)^{-1}\iota(a)\\
&=\iota(a).
\end{aligned}$$

Por tanto $b=a-\zeta(e,e)$.

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\iota(a)\right)&=(e,b)\\
&=(e,a-\zeta(e,e))\\
&=i(a).
\end{aligned}$$

Ahora sea $u\in U$, existe único $a\in A$ tal que

$$u=l(g)\iota(a).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}\pi\mu(u) &= \pi(g,a)\\ &= g\\ &= \sigma\left(l(g)\iota(a)\right)\\ &= \sigma(u)\,.\end{aligned}$$

□

Si G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo, se denota el conjunto de conjuntos de factores por $Z^2(G,A)$. Definimos la adición en $Z^2(G,A)$ puntualmente, esto es, para $\zeta,\eta \in Z^2(G,A)$,

$$\begin{aligned}\zeta+\eta : S_2(G) &\longrightarrow A\\ (g,h) &\longmapsto \zeta(g,h)+\eta(g,h)\,.\end{aligned}$$

Lema 4.3.8. Con la adición puntual, $Z^2(G,A)$ es un grupo abeliano.

Demostración. Sean $\zeta,\eta \in Z^2(G,A)$, mostremos que $\zeta+\eta \in Z^2(G,A)$.
Sea $(g,h) \in S_2(G)$. Como $\zeta(g,h)$, $\eta(g,h) \in A_{d(h)}$, entonces $\zeta(g,h)+\eta(g,h) \in A_{d(h)}$.

Sea $(g,h,k) \in S_3(G)$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\zeta+\eta(g,h)|0_{r(k)}\right)\cdot k+\zeta+\eta(g\otimes h,k) &= \left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right)\cdot k+\left(\eta(g,h)|0_{r(k)}\right)\cdot k+\zeta(g\otimes h,k)+\eta(g\otimes h,k)\\ &= \zeta(g,h\otimes k)+\zeta(h,k)+\eta(g,h\otimes k)+\eta(h,k)\\ &= \zeta+\eta(g,h\otimes k)+\ \zeta+\eta(h,k)\,.\end{aligned}$$

La adición es asociativa y conmutativa en $Z^2(G,A)$ debido a su definición. Se define $0 : S_2(G) \longrightarrow A$ por $0 : (g,h) \longmapsto 0_{d(h)}$. Si $\zeta \in Z^2(G,A)$, entonces $0+\zeta = \zeta = \zeta+0$.

Por último para $\zeta \in Z^2(G,A)$ se define:

$$\begin{aligned}-\zeta &: S_2(G) \longrightarrow A\\ -\zeta &: (g,h) \longmapsto -\left(\zeta(g,h)\right)\,.\end{aligned}$$

□

Por la proposición 4.3.3, cualquier extensión $\mathcal{E}$ de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G, junto con una trasversal l determinan un conjunto de factores para el $G-$módulo A. Sean l y l' dos transversales para $\mathcal{E}$, y ζ, ζ' los resultantes conjuntos de factores. Por la proposición 4.3.5, exite una función

$$\varepsilon : G \longrightarrow A$$

definida por

$$\iota\varepsilon(g) = l(g)^{-1}l'(g)$$

y con la propiedad

$$\zeta'(g,h) = \zeta(g,h) - \varepsilon(g\otimes h) + \varepsilon(h) + \big(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\big)\cdot h\,.$$

En general, para cualquier $G-$módulo A y función $\varepsilon : G \longrightarrow A$ tal que $\varepsilon(g) \in A_{d(g)}$, se define, para cualquier $g \in G$,

$$\partial\varepsilon : S_2(G) \longrightarrow A$$

por

$$\partial\varepsilon(g,h) = \big(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\big)\cdot h + \varepsilon(h) - \varepsilon(g\otimes h)\,.$$

Llamamos a la función $\partial\varepsilon$, *conjunto de factores principal* para A. Denotamos el conjunto de conjuntos de factores principales por $B^2(G,A)$.

Proposición 4.3.9. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G y $l, l' : G \longrightarrow A$ transversales para $\mathcal{E}$. Consideremos los conjuntos de factores $\zeta, \zeta' : S_2(G) \longrightarrow A$ definidos por

$$\iota\zeta(g,h) = l(g\otimes h)^{-1}\otimes l(g)\otimes l(h) \quad \text{y}$$
$$\iota\zeta'(g,h) = l'(g\otimes h)^{-1}\otimes l'(g)\otimes l'(h)\,.$$

Entonces existe un conjunto de factores principal $\partial\varepsilon$ tal que

$$\zeta'(g,h) = \zeta(g,h) + \partial\varepsilon(g,h)\,.$$

□

Lema 4.3.10. $B^2(G,A)$ es un subgrupo de $Z^2(G,A)$.

Demostración. Comencemos verificando que $B^2(G,A) \subset Z^2(G,A)$. Sean $\partial\varepsilon \in B^2(G,A)$ y $(g,h) \in S_2(G)$, entonces $\big(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\big)\cdot h$, $\varepsilon(h)$, $\varepsilon(g\otimes h)$ pertenecen a $A_{d(h)}$, lo cual implica $\partial\varepsilon(g,h) \in A_{d(h)}$. Por tanto se cumple $(FS1)$.

Sea $(g,h,k) \in S_3(G)$, entonces
$\big(\partial\varepsilon(g,h)|0_{r(k)}\big)\cdot k + \partial\varepsilon(g\otimes h,k) =$
$= \big(\big(\varepsilon(g)|0_{r(k)}\big)\cdot h|0_{r(k)}\big)\cdot k + \big(\varepsilon(h)|0_{r(k)}\big)\cdot k - \big(\varepsilon(g\otimes h)|0_{r(k)}\big)\cdot k + \big(\varepsilon(g\otimes h)|0_{r(k)}\big)\cdot k + \varepsilon(k) - \varepsilon(g\otimes h\otimes k)$
$= \big(\big(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\big)\cdot h|0_{r(k)}\big)\cdot k - \varepsilon(g\otimes h\otimes k) + \varepsilon(h\otimes k) + \partial\varepsilon(h,k)$
$= \big[\big(\big(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\big)\,|0_{r(h\otimes k)}\big)\cdot(h|r(k))\big]\cdot k - \varepsilon(g\otimes h\otimes k) + \varepsilon(h\otimes k) + \partial\varepsilon(h,k)$
$= \big(\varepsilon(g)|0_{r(h\otimes k)}\big)\cdot h\otimes k - \varepsilon(g\otimes h\otimes k) + \varepsilon(h\otimes k) + \partial\varepsilon(h,k)$
$= \partial\varepsilon(g,h\otimes k) + \partial\varepsilon(h,k)\,.$

Por tanto se cumple $(FS2)$.

Mostremos que la suma puntual es cerrada en $B^2(G,A)$. Sean $\partial\varepsilon,\ \partial\varepsilon' : S_2(G) \longrightarrow A$ conjuntos de factores principales para $\varepsilon,\ \varepsilon' : G \longrightarrow A$ funciones, respectivamente. Por demostrar que $(\partial\varepsilon + \partial\varepsilon') = \partial(\varepsilon + \varepsilon')$.

Sea $(g,h) \in S_2(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\partial\varepsilon + \partial\varepsilon')(g,h) &= \partial\varepsilon(g,h) + \partial\varepsilon'(g,h) \\
&= \left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right)\cdot h + \varepsilon(h) - \varepsilon(g\otimes h) + \left(\varepsilon'(g)|0_{r(h)}\right)\cdot h + \varepsilon'(h) - \varepsilon'(g\otimes h) \\
&= \left(\varepsilon(g) + \varepsilon'(g)|0_{r(h)}\right)\cdot h + \varepsilon(h) + \varepsilon'(h) - \left(\varepsilon(g\otimes h) + \varepsilon'(g\otimes h)\right) \\
&= \left((\varepsilon + \varepsilon')(g)|0_{r(h)}\right)\cdot h + (\varepsilon + \varepsilon')(h) - (\varepsilon + \varepsilon')(g\otimes h) \\
&= \partial(\varepsilon + \varepsilon')(g,h)\,.
\end{aligned}$$

Supongamos que para cada $g \in G,\ \varepsilon(g) = 0_{d(g)}$, entonces para cada $(g,h) \in S_2(G),\ \partial\varepsilon(g,h) = 0_{d(h)}$. Por tanto $0 : S_2(G) \longrightarrow A$ pertenece a $B^2(G,A)$. $\square$

El siguiente resultado demuestra que las extensiones son clasificadas por conjuntos de factores y conjuntos de factores principales.

Teorema 4.3.11. Sean G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo. Existe una biyección entre el conjunto de todas las clases de congruencia de extensiones de A por G y el grupo cociente $\dfrac{Z^2(G,A)}{B^2(G,A)}$.
Bajo está correspondencia la clase de la extensión del producto semidirecto corresponde a la identidad.

Demostración. Denotemos por $Ext(G,A)$ al conjunto de clases de congruencia de extensiones de A por G. Sean ζ un elemento de $Z^2(G,A)$ y

$$\mathcal{E}_\zeta = \quad A \xhookrightarrow{i_\zeta} (G*A)_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} G$$

la extensión de A por G construida en la proposición 4.3.6.
Se define

$$\psi : \frac{Z^2(G,A)}{B^2(G,A)} \longrightarrow Ext(G,A)$$

por

$$\psi :\ \zeta + B^2(G,A) \longmapsto \left[\mathcal{E}_\zeta\right]\ .$$

Veamos que ψ está bien definida. Sea η un conjunto de factores que está en el mismo cociente que ζ. Entonces $\zeta - \eta \in B^2(G,A)$, es decir, existe $\partial\varepsilon \in B^2(G,A)$ tal que $\zeta = \eta + \partial\varepsilon$. Definimos

$$\mu : (G*A)_\zeta \longrightarrow (G*A)_\eta$$

por

$$\mu(g,a) = (g, a+\varepsilon(g))\ .$$

Por demostrar que μ es una congruencia de extensiones.

Comencemos probando que μ es un funtor.

Sea $(g,a) \in (G*A)_\zeta$, entonces

$$\begin{aligned}
d(\mu(g,a)) &= d(g, a+\varepsilon(g)) \\
&= (d(g), -\eta(d(g), d(g))) \\
&= (d(g), (\partial\varepsilon - \zeta)(d(g), d(g))) \\
&= (d(g), \partial\varepsilon(d(g), d(g)) - \zeta(d(g), d(g))) \\
&= \left(d(g), \left(\varepsilon(d(g))\,|0_{r(d(g))}\right)\cdot d(g) + \varepsilon(d(g)) - \varepsilon(d(g)\otimes d(g)) - \zeta(d(g), d(g))\right) \\
&= \left(d(g), \left(\varepsilon(d(g))\,|0_{d(g)}\right) - \zeta(d(g), d(g))\right) \\
&= (d(g), \varepsilon(d(g)) - \zeta(d(g), d(g)))\ ,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\mu(d(g,a)) &= \mu(d(g), -\zeta(d(g), d(g))) \\
&= (d(g), -\zeta(d(g), d(g)) + \varepsilon(d(g)))\ .
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mu(d(g,a)) = d(\mu(g,a))\ .$$

similarmente se obtiene que

$$\mu(r(g,a)) = r(\mu(g,a))\ .$$

Ahora si $(g,a),(h,b) \in (G*A)_\zeta$ con $d(g) = r(h)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu((g,a)(h,b)) &= \mu(gh, \zeta(g,h) + a\cdot h + b) \\
&= (gh, \zeta(g,h) + a\cdot h + b + \varepsilon(gh)) \\
&= (gh, \eta(g,h) + \partial\varepsilon g, h + a\cdot h + b + \varepsilon(gh)) \\
&= (gh, \eta(g,h) + \varepsilon(g)\cdot h + \varepsilon(h) - \varepsilon(gh) + a\cdot h + b + \varepsilon(gh)) \\
&= (gh, \eta(g,h) + (a+\varepsilon(g))\cdot h + b + \varepsilon(h)) \\
&= (g, a+\varepsilon(g))(h, b+\varepsilon(h)) \\
&= \mu(g,a)\mu(h,b).
\end{aligned}$$

Pasemos a mostrar que μ preserva orden. Sean (g,a), $(h,b) \in (G*A)_\zeta$ tal que $(h,b) \leq (g,a)$. Entonces

$$h \leq g \quad \text{y} \quad b = (a|0_{d(h)}) + \zeta\,(g,d(h)) - \zeta\,(d(h),d(h))\,.$$

De esto se obtiene que

$$\begin{aligned} b &= (a|0_{d(h)}) + \eta\,(g,d(h)) + \partial\varepsilon(g,d(h)) - \eta\,(d(h),d(h)) - \partial\varepsilon\,(d(h),d(h)) \\ &= (a|0_{d(h)}) + \eta\,(g,d(h)) - \eta\,(d(h),d(h)) + \big(\varepsilon(g)|0_{d(h)}\big) + \varepsilon\,(d(h)) - \varepsilon\,(g \otimes d(h)) \\ &- \big(\varepsilon\,(d(h))\,|0_{d(h)}\big) - \varepsilon\,(d(h)) + \varepsilon\,(d(h)) \\ &= \big(a + \varepsilon(g)|0_{d(h)}\big) + \eta\,(g,d(h)) - \eta\,(d(h),d(h)) + \varepsilon\,(d(h)) - \varepsilon(h) - \varepsilon\,(d(h)) \\ &= \big(a + \varepsilon(g)|0_{d(h)}\big) + \eta\,(g,d(h)) - \eta\,(d(h),d(h)) - \varepsilon(h)\,. \end{aligned}$$

Así que

$$b + \varepsilon(h) = \big(a + \varepsilon(g)|0_{d(h)}\big) + \eta\,(g,d(h)) - \eta\,(d(h),d(h))\,,$$

además $h \leq g$. Esto implica que

$$(h, b + \varepsilon(h)) \leq (g, a + \varepsilon(g))$$

y por tanto

$$\mu(h,b) \leq \mu(g,a)\,.$$

Por último mostremos que $\mu i_\zeta = i_\eta$ y $\pi_\eta \mu = \pi_\zeta$.

Sea $a \in A_e$, entonces

$$\begin{aligned} \mu\,\big(i_\zeta(a)\big) &= \mu\,(e, a - \zeta(e,e)) \\ &= (e, a - \zeta(e,e) + \varepsilon(e)) \\ &= (e, a - (\zeta(e,e) - \partial\varepsilon(e))) \\ &= (e, a - \eta(e,e)) \\ &= i_\eta(a)\,. \end{aligned}$$

Sea $(g,a) \in (G*A)_\zeta$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_\eta\,(\mu(g,a)) &= \pi_\eta\,(g, a + \varepsilon(g)) \\ &= g \\ &= \pi_\zeta(g,a)\,, \end{aligned}$$

por tanto

$$\psi\,\big(\zeta + B^2(G,A)\big) = \psi\,\big(\eta + B^2(G,A)\big)\,,$$

es decir, ψ está bien definida.

Probemos que ψ es inyectiva. Sean ζ y η dos conjuntos de factores tales que $[\zeta]=[\eta]$, entonces existe $\mu : \mathcal{E}_\zeta \cong \mathcal{E}_\eta$ una congruencia. Debemos mostrar que ζ y η generan la misma clase lateral.
Sea $g \in G$, entonces $(g, 0_{d(g)}) \in (G*A)_\zeta$. Dado que $\pi_\zeta = \pi_\eta \mu$, tenemos $\mu(g, 0_{d(g)}) = (g, \varepsilon(g))$ para algún $\varepsilon(g) \in A_{d(g)}$.

Sea $(g,a) \in (G,A)_\zeta$ notemos que

$$\begin{aligned}(g,0_{d(g)})\,(d(g),a-\zeta\,(d(g),d(g))) &= (g,\zeta\,(g,d(g))+a-\zeta\,(d(g),d(g)))\\ &= (g,a)\,.\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\mu(g,a) &= \mu(g,0_{d(g)})\mu\,(d(g),a-\zeta\,(d(g),d(g)))\\ &= (g,\varepsilon(g))\,\mu i_\zeta(a)\\ &= (g,\varepsilon(g))\,i_\eta(a)\\ &= (g,\varepsilon(g))\,(d(g),a-\eta\,(d(g),d(g)))\\ &= (g,\eta\,(g,d(g))+\varepsilon(g)+a-\eta\,(d(g),d(g)))\\ &= (g,\varepsilon(g)+a)\;.\end{aligned}$$

Sean (g,a), $(h,b) \in (G*A)_\zeta$ tal que existe gh, entonces

$$\begin{aligned}\mu(g,a)\mu(h,b) &= (g,\varepsilon(g)+a)\,(h,\varepsilon(h)+b)\\ &= (gh,\eta(g,h)+\varepsilon(g)\cdot h+a\cdot h+\varepsilon(h)+b)\\ &= (gh,\eta(g,h)+(\varepsilon(g)+a)\cdot h+\varepsilon(h)+b)\;,\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mu\,[(g,a)(h,b)] &= \mu\,(gh,\zeta(g,h)+a\cdot h+b)\\ &= (gh,\varepsilon(gh)+\zeta(g,h)+a\cdot h+b)\;.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\eta(g,h)+(\varepsilon(g)+a)\cdot h+\varepsilon(h)+b = \varepsilon(gh)+\zeta(g,h)+a\cdot h+b,$$

lo cual implica que

$$\eta(g,h)-\zeta(g,h) = \varepsilon(gh)-\varepsilon(g)\cdot h-\varepsilon h\,.$$

Así que

$$\zeta(g,h)-\eta(g,h) = \varepsilon(g)\cdot h+\varepsilon(h)-\varepsilon(gh)\,.$$

Por lo tanto $\zeta-\eta \in B^2(G,A)$, lo cual es equivalente a

$$\zeta+B^2(G,A) = \eta+B^2(G,A)\,.$$

Sea $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G. Si l es una transversal para $\mathcal{E}$, por la proposición 4.3.3 , $\mathcal{E}$ y l generan el conjunto de factores ζ y por la proposición 4.3.7 , $\mathcal{E}$ es congruente con $\mathcal{E}_\zeta$.
Por la proposición 4.3.9 , si elegimos una diferente transversal, genera una extensión la cual es congruente con $\mathcal{E}_\zeta$.
Así que $\psi\left(\zeta + B^2(G,A)\right) = [\mathcal{E}]$ y por tanto ψ es sobreyectiva.

Sea $\mathcal{E}_{G\ltimes A}$ la extensión que genera el producto semidirecto $G \ltimes A$. Por la proposición 4.2.2 , en $[\mathcal{E}_{G\ltimes A}]$ se encuentran todas las extensiones de A por G que se dividen. Recordemos que una extensión de A por G, $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$, se divide si existe $\tau : G \longrightarrow U$ funtor ordenado tal que $\sigma\tau = 1_G$. Notemos que τ es un caso particular de una transversal. Por lo cual el conjunto de factores que se genera a partir de τ según la proposición 4.3.3 , es el elemento cero en $Z^2(G,A)$. Por lo tanto $\psi\left(B^2(G,A)\right) = [\mathcal{E}_{G\ltimes A}]$. $\square$

Capítulo 5

La cohomología de Renault

En [25], Renault adapta la cohomología de grupoides a semigrupos inversos. La teoría de cohomología resultante difiere del enfoque adoptado por Lausch en varios aspectos importantes. En está sección describiremos las construcciones de Renault de extensiones y conjuntos de factores para semigrupos inversos.

5.1. Un enfoque alternativo para conjuntos de factores

Sea G un grupoide ordenado. Recordemos que

$$\begin{aligned} Ner_2(G) &= \{(h,g) \in G \times G : \quad r(g) = d(h)\} \\ PNer_2(G) &= \{(h,g) \in G \times G : \quad h \leq g\} . \end{aligned}$$

El siguiente resultado proporciona una caracterización alternativa de conjuntos de factores.

Proposición 5.1.1. El grupo de conjuntos de factores de un $G-$módulo A está en correspondencia biyectiva con el conjunto de pares de funciones

$$\zeta_0 : Ner_2(G) \longrightarrow A, \quad \zeta_1 : PNer_2(G) \longrightarrow A$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $\zeta_0(g,h) \in A_{d(h)}$ para todo $(g,h) \in Ner_2(G)$.

(2) $\zeta_1(h,g) \in A_{d(h)}$ para todo $h \leq g$.

(3) Si $(g,h,k) \in Ner_3(G)$, entonces $\zeta_0(g,h) \cdot k + \zeta_0(gh,k) = \zeta_0(g,hk) + \zeta_0(h,k)$.

(4) Si $k \leq h \leq g$ en G, entonces $\left(\zeta_1(h,g)|0_{d(k)}\right) = \zeta_1(k,g) - \zeta_1(k,h)$.

(5) Si $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ con $(h_2,h_1), (g_2,g_1) \in Ner_2(G)$ y $h_2 \leq g_2$, $h_1 \leq g_1$, entonces $\left(\zeta_0(g_2,g_1)|0_{d(h_1)}\right) - \zeta_0(h_2,h_1) = \zeta_1(h_2,g_2) \cdot h_1 + \zeta_1(h_1,g_1) - \zeta_1(h_2h_1, g_2g_1)$.

Demostración. Sea $\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$ un conjunto de factor. Recordemos que ζ satisface las siguientes condiciones.

(FS1) Para cualquier $(g,h) \in S_2(G)$, $\zeta(g,h) \in A_{d(h)}$.

(FS2) Para cualquier $(g,h,k) \in S_3(G)$, $\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta(g \otimes h, k) = \zeta(g, h \otimes k) + \zeta(h,k)$.

Definimos las funciones

$$\begin{aligned} \zeta_0 : Ner_2(G) \longrightarrow A \quad \text{por} \quad & \zeta_0(g_2,g_1) = \zeta(g_2,g_1) \\ \zeta_1 : PNer_2(G) \longrightarrow A \quad \text{por} \quad & \zeta_1(h,g) = \zeta(g,d(h)) - \zeta\left(d(h),d(h)\right). \end{aligned}$$

Probemos que (ζ_0,ζ_1) satisfacen las condiciones $(1)-(5)$. Notemos que (1) y (2) son inmediatas. Para probar (3) basta notar que $(g,h,k) \in Ner_3(G)$, por lo cual existe ghk y se concluye aplicando $(FS2)$ a (g,h,k).

Probemos (4). Sean $k \le h \le g$ en G, entonces

$$\begin{aligned} \left(\zeta_1(h,g)|0_{d(k)}\right) &= \left(\zeta\left(g,d(h)\right)|0_{d(k)}\right) - \left(\zeta\left(d(h),d(h)\right)|0_{d(k)}\right) \\ &= \zeta\left(g,d(k)\right) + \zeta\left(d(h),d(k)\right) - \zeta\left(h,d(k)\right) - \left(\zeta\left(d(h),d(h)\right)|0_{d(k)}\right) \quad \text{(por el lema 4.3.2)} \\ &= \zeta\left(g,d(k)\right) - \zeta\left(d(k),d(k)\right) + \zeta\left(d(k),d(k)\right) + \zeta\left(d(h),d(k)\right) - \zeta\left(h,d(k)\right) - \left(\zeta\left(d(h),d(h)\right)|0_{d(k)}\right) \\ &= \zeta_1(k,g) - \left(\zeta(h,d(k)) - \zeta\left(d(k),d(k)\right)\right) + \zeta\left(d(h),d(k)\right) - \left(\zeta\left(d(h),d(h)\right)|0_{d(k)}\right) \\ &= \zeta_1(k,g) - \zeta_1(k,h) \quad \text{por el lema 4.3.2} \end{aligned}$$

Probemos (5). Sean $g_1,\, g_2,\, h_1,\, h_2 \in G$ con $(h_2,h_1), (g_2,g_1) \in Ner_2(G)$ y $h_2 \le g_2,\ h_1 \le g_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left(\zeta_0(g_2,g_1)|0_{d(h_1)}\right) - \zeta_0(h_2,h_1) &= \left(\zeta(g_2,g_1)|0_{d(h_1)}\right) - \zeta(h_2,h_1) \\ &= \zeta(g_2,h_1) + \zeta\left(g_1,d(h_1)\right) - \zeta\left(g_2g_1,d(h_1)\right) - \zeta(g_2,h_1) - \zeta\left(r(h_1),h_1\right) + \zeta\left(g_2,r(h_1)\right)\cdot h_1 \\ &= \zeta_1(h_1,g_1) + \zeta\left(d(h_1),d(h_1)\right) - \zeta\left(g_2g_1,d(h_1)\right) - \zeta\left(r(h_1),h_1\right) + \zeta\left(g_2,r(h_1)\right)\cdot h_1 \\ &= \zeta_1(h_1,g_1) - \zeta_1(h_2h_1,g_2,g_1) + \zeta_1(h_2,g_2)\cdot h_1 + \zeta\left(d(h_2),d(h_2)\right)\cdot h_1 - \zeta\left(r(h_1),h_1\right) \\ &= \zeta_1(h_1,g_1) + \zeta_1(h_2h_1,g_2g_1) + \zeta_1(h_2,g_2)\cdot h_1 . \end{aligned}$$

Recíprocamente, sean

$$\zeta_0 : Ner_2(G) \longrightarrow A\,, \quad \zeta_1 : PNer_2(G) \longrightarrow A$$

funciones que satisfacen las condiciones $(1)-(5)$.

Definimos

$$\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$$

por

$$\zeta(g,h) = \zeta_1\left((g|r(h)),g\right)\cdot h + \zeta_0\left((g|r(h)),h\right).$$

Notemos que $\zeta(g,h) \in A_{d(h)}$ y probemos la condición $(FS2)$. Sea $(g,h,k) \in S_3(G)$, entonces
$\left(\zeta(g,h)|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta(g \otimes h, k) = \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h|0_{r(k)}\right) \cdot k + \left(\zeta_0\left((g|r(h)), h\right)|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta_1\left((g \otimes h|r(k)), g \otimes h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right)$
$= \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \left[\left(\zeta_0\left((g, r(h)), h\right)|0_{r(k)}\right) + \zeta_1\left((g \otimes h|r(k)), g \otimes h\right)\right] \cdot k$
$= \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), (g|r(h))\right) \cdot (h|r(k))k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), (g|r(h))\right) \cdot h \otimes k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h|0_{r(k)}\right) \cdot k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \left[\zeta_1\left((g|r(h|r(k))), g\right) \cdot h \otimes k - \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right)|0_{r(h \otimes k)}\right) \cdot h \otimes k\right] + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right)|0_{r(h \otimes k)}\right) \cdot (h|r(k))k + \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), g\right) \cdot h \otimes k - \left(\zeta_1\left((g|r(h)), g\right)|0_{r(h \otimes k)}\right) \cdot h \otimes k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \zeta_0\left((g \otimes h|r(k)), k\right) + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), g\right) \cdot h \otimes k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \zeta_0\left((h|r(k)), k\right) + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), h \otimes k\right) - \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), g\right) \cdot h \otimes k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), (h|r(k))\right) \cdot k$
$= \zeta_0\left((h|r(k)), k\right) + \zeta_0\left((g|r(h|r(k))), h \otimes k\right) + \zeta_1\left((g|r(h|r(k))), g\right) \cdot h \otimes k + \zeta_1\left((h|r(k)), h\right) \cdot k$
$= \zeta(g, h \otimes k) + \zeta(h,k)\,.$

Hasta aquí hemos demostrado que cualquier conjunto de factores ζ determina, y es determinado por un par de funciones (ζ_0, ζ_1) que satisfacen $(1)-(5)$. Probemos que está correspondencia es biyectiva.
Sean ζ un conjunto de factores y (ζ_0, ζ_1) el par de funciones generadas a partir de ζ. Si $\eta : S_2(G) \longrightarrow A$ es el conjunto de factores que se define a partir de (ζ_0, ζ_1), entonces

$$\begin{aligned}
\eta(g,h) &= \zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h + \zeta_0\left((g|r(h)), h\right) \\
&= \zeta\left(g, r(h)\right) \cdot h - \zeta\left(r(h), r(h)\right) \cdot h + \zeta\left((g|r(h)), h\right) \\
&= \zeta\left(g, r(h)\right) \cdot h - \zeta\left(r(h), h\right) + \zeta\left((g|r(h)), h\right) \\
&= \zeta(g,h) \quad (\text{por } (FS2))\,.
\end{aligned}$$

Ahora sean (ζ_0, ζ_1) funciones que satisfacen $(1)-(5)$ y $\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$ definido por

$$\zeta(g,h) = \zeta_1\left((g|r(h)), g\right) \cdot h + \zeta_0\left((g|r(h)), h\right)\,.$$

Si (η_0, η_1) son las funciones que se generan a partir de ζ, entonces para $(g_2, g_1) \in Ner_2(G)$

$$\begin{aligned}
\eta_0(g_2, g_1) &= \zeta(g_2, g_1) \\
&= \zeta_1\left((g_2|r(g_1)), g_2\right) \cdot g_1 + \zeta_0\left((g_2|r(g_1)), g_1\right) \\
&= \zeta_1(g_2, g_2) \cdot g_1 + \zeta_0(g_2, g_1) \\
&= \left(\zeta_1(g_2, g_2) - \zeta_1(g_2, g_2)\right) \cdot g_1 + \zeta_0(g_2, g_1) \quad (\text{aplicamos (4) a } g_2 \leq g_2 \leq g_2) \\
&= \zeta_0(g_2, g_1)\,.
\end{aligned}$$

Sean $h \leq g \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta_1(h,g) &= \zeta\,(g,d(h)) - \zeta\,(d(h),d(h)) \\
&= \zeta_1\,((g|d(h))\,,g)\cdot d(h) + \zeta_0\,((g|d(h))\,,d(h)) - \zeta_1\,((d(h)|d(h))\,,d(h))\cdot d(h) - \zeta_0\,((d(h)|d(h))\,,d(h)) \\
&= \zeta_1(h,g) + \zeta_0\,(h,d(h)) - \zeta_1\,(d(h),d(h)) - \zeta_0\,(d(h),d(h)) \\
&= \zeta_1(h,g) + \zeta_0\,(d(h),d(h)) - \zeta_1\,(d(h),d(h)) - \zeta_0\,(d(h),d(h)) \quad \text{(aplicamos (3) a } (h,d(h),d(h))) \\
&= \zeta_1(g,h) \quad \ldots \text{aplicamos (4) a } (d(h),d(h),d(h)) \in PNer_3(G)\,.
\end{aligned}$$

□

Del resultado anterior podemos considerar a un conjunto de factores ζ como un par de funciones. Una función grupoide ζ_0 y una función ordenada ζ_1. Este es el enfoque que tomaremos en el resto del capítulo.

Vimos en la proposición 4.3.3 que cada extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G, junto con una transversal, determina un conjunto factor de un $G-$módulo A. Ahora examinemos la relación con nuestra nueva caracterización de conjunto de factores.
Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión de A por G y $l : G \longrightarrow U$ una transversal para $\mathcal{E}$. Por la proposición 4.3.3, existe un conjunto factor ζ definido por

$$\iota\zeta(g,h) = l(g\otimes h)^{-1}\otimes l(g)\otimes l(h)\,.$$

Consideremos las correspondientes funciones

$$\zeta_0 : Ner_2(G) \longrightarrow A \quad \text{y} \quad \zeta_1 : PNer_2(G) \longrightarrow A$$

construidas en la proposición 5.1.1

Para cualquier $(g,h) \in Ner_2(G)$,

$$\begin{aligned}
\iota\zeta_0(g,h) &= \iota\zeta(g,h) \\
&= l(gh)^{-1}l(g)l(h)\,.
\end{aligned}$$

Para cualquier $(h,g) \in PNer_2(G)$,

$$\begin{aligned}
\iota\zeta_1(h,g) &= \iota\,[\zeta\,(g,d(h)) - \zeta\,(d(h),d(h))] \\
&= \iota\zeta\,(g,d(h))\,\iota\zeta\,(d(h),d(h))^{-1} \\
&= \Big(l\,(g\otimes d(h))^{-1}\otimes l(g)\otimes l\,(d(h))\Big)\Big(l\,(d(h))^{-1}\otimes l\,(d(h))^{-1}\otimes l\,(d(h))\Big) \\
&= l(h)^{-1}\otimes l(g) \\
&= l(h)^{-1}\,(r\,(l(h))\,|l(g))\,.
\end{aligned}$$

Proposición 5.1.2. Sean $\mathcal{E}$ una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G, l una transversal para $\mathcal{E}$ y (ζ_0, ζ_1) el conjunto de factores definido por:

$$\iota(\zeta_0(g,h)) = l(gh)^{-1}l(g)l(h) \quad \text{y}$$
$$\iota(\zeta_1(h,g)) = l(h)^{-1}(r(l(h))|l(g)) \,.$$

Entonces

(i) l es un funtor si y sólo si $\zeta_0(g,h) = 0_{d(h)}$ para cualquier $(g,h) \in Ner_2(G)$.

(ii) l preserva el orden si y sólo si $\zeta_1(h,g) = 0_{d(h)}$ para todo $h \leq g \in G$.

Demostración. (i) Si suponemos que l es un funtor, entonces

$$\iota(\zeta_0(g,h)) = d(l(h))$$

y por tanto

$$\zeta_0(g,h) = 0_{d(h)}\,.$$

Ahora la suficiencia. Sea $(g,h) \in Ner_2(G)$. entonces

$$\iota(\zeta_0(g,h)) = l(gh)^{-1}l(g)l(h)\,.$$

Esto implica que

$$\iota(0_{d(h)}) = l(gh)^{-1}l(g)l(h)$$

y po tanto

$$l(gh) = l(g)l(h)\,.$$

(ii) Supongamos que l preserva el orden, entonces $(r(l(h))|l(g)) = l(h)$, y por tanto $\zeta_1(h,g) = 0_{d(h)}$.
Para la suficiencia sean $g,h \in G$ tal que $h \leq g$ y $\zeta_1(h,g) = 0_{d(h)}$. Entonces $l(h) = (r(l(h))|l(g)) \leq l(g),$. □

Sea (ζ_0, ζ_1) un conjunto de factores para un $G-$módulo A. Consideremos la extensión de A por G construida en la proposición 4.3.6

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} G*A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G\,.$$

Recordemos que

$$G*A = \left\{(g,a) \in G \times A : \; d(a) = 0_{d(g)}\right\}$$

si (g,a), $(h,b) \in G*A$ y existe gh, entonces

$$(g,a)(h,b) = (gh, \zeta(g,h) + a \cdot h + b)\,.$$

El orden en $G*A$ está definido por

$$(h,b) \leq (g,a) \quad \text{sii} \quad h \leq g \quad \text{y} \quad b = (a|0_{d(h)}) + \zeta_1(h,g)\,.$$

Recordemos que los conjuntos de factores forman un grupo abeliano bajo la suma puntual. El siguiente resultado proporciona la adición para nuestra caracterización de conjuntos de factores.

Lema 5.1.3. Sean (ζ_0,ζ_1) y (η_0,η_1) conjuntos factor para un $G-$módulo A. Entonces

$$(\zeta_0,\zeta_1)+(\eta_0,\eta_1)=(\zeta_0+\eta_0,\zeta_1+\eta_0)\ ,$$

donde la suma $\zeta_0+\eta_0$, $\zeta_1+\eta_1$ está definida puntualmente.

Demostración. Sean $\zeta,\eta : S_2(G)\longrightarrow A$ definidos por:

$$\begin{aligned}\zeta(g,h)&=\zeta_1\left((g|r(h)),g\right)\cdot h+\zeta_0\left((g|r(h)),h\right)\\ \eta(g,h)&=\eta_1\left((g|r(h)),g\right)\cdot h+\eta_0\left((g|r(h)),h\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(\zeta+\eta)(g,h)&=\zeta(g,h)+\eta(g,h)\\ &=\zeta_1\left((g|r(h)),g\right)\cdot h+\zeta_0\left((g|r(h)),h\right)+\eta_1\left((g|r(h)),g\right)\cdot h+\eta_0\left((g|r(h)),h\right)\\ &=\left[z_1\left((g|r(h)),g\right)+\eta_1\left((g|r(h)),g\right)\right]\cdot h+\zeta_0\left((g|r(h)),h\right)+\eta_0\left((g|r(h)),h\right)\\ &=(\zeta_1+\eta_1)\left((g|r(h)),g\right)+(\zeta_0+\eta_0)\left((g|r(h)),h\right).\end{aligned}$$

Por la biyección construida en 5.1.1, $(\zeta_1+\eta_1,\zeta_0+\eta_0)$ es un conjunto de factores. □

Concluimos está sección examinando conjuntos de factores principales. Sea $\partial\varepsilon : S_2(G)\longrightarrow A$ un conjunto de factores principal para A. Esto es

$$\partial\varepsilon(g,h)=\left(\varepsilon(g)|0_{r(h)}\right)\cdot h+\varepsilon(h)-\varepsilon(g\otimes h)\,,$$

para algúna función $\varepsilon : G\longrightarrow A$ tal que $\varepsilon(g)\in A_{d(g)}$.
Sea $(\partial\varepsilon_0,\partial\varepsilon_1)$ el correspondiente par de funciones dadas en la proposición 5.1.1. Entonces

$$\partial\varepsilon_0 : Ner_2(G)\longrightarrow A$$

definida por

$$\begin{aligned}\partial\varepsilon_0(g,h)&=\partial\varepsilon(g,h)\\ &=\varepsilon(g)\cdot h+\varepsilon(h)-\varepsilon(gh)\,.\end{aligned}$$

$$\partial\varepsilon_1 : PNer_2(G)\longrightarrow A$$

definida por

$$\begin{aligned}\partial\varepsilon_1(h,g)&=\partial\varepsilon\left(g,d(h)\right)-\partial\varepsilon\left(d(h),d(h)\right)\\ &=\left(\varepsilon(g)|0_{d(h)}\right)-\varepsilon(h)\,.\end{aligned}$$

5.2. G-gavillas

Definición 5.2.1. Sea G un grupoide ordenado. Una $G-$gavilla de grupos abelianos es un par de funtores

$$\rho : \mathbf{G_0}\longrightarrow A\quad \text{y}\quad \phi : G^{op}\longrightarrow A\,,$$

donde $\mathbf{G_0}$ es considerado una categoría en la cual existe un morfismo $f \longrightarrow e$ si $e \leq f$. Escribimos $\rho(e) = A_e$, y denotamos por 0_e a la identidad en A_e .
Aquellos funtores deben satisfacer las siguientes condiciones:

(1) ρ es inyectivo.

(2) Para cualquier $e \in G_0$, $\rho(e) = \phi(e)$.

(3) Si $h \leq g$ en G, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_{r(g)} \arrow[r, "\phi(g)"] \arrow[d, "\rho^{r(g)}_{r(h)}"'] & A_{d(g)} \arrow[d, "\rho^{d(g)}_{d(h)}"] \\ A_{r(h)} \arrow[r, "\phi(h)"] & A_{d(h)} . \end{tikzcd}$$

Mostremos que el enfoque de $G-$módulos y $G-$gavillas son equivalentes.

Proposición 5.2.2. Cualquier $G-$gavilla es caracterizada por un $G-$módulo.

Demostración. Sea (ρ, ϕ) una $G-$gavilla. Notemos que ρ es una pregavilla de grupos abelianos, así

$$A = \bigsqcup_{e \in G_0} A_e = \bigsqcup_{e \in G_0} \rho(e)$$

es un grupoide ordenado abeliano por la proposición 3.3.1, donde $\rho^e_f(a) = (a|0_f)$ para $f \leq e$ en G_0 y $a \in A_e$.
Definimos $\theta : G_0 \longrightarrow A_0$ por $\theta(e) = \rho^e_e(0_e)$, dado que ρ es inyectivo y por la forma en como se definió A, θ es biyección.
Veamos que θ preserva orden. Sean $e \leq f$ en G_0, entonces $f \longrightarrow e$ es un morfismo en $\mathbf{G_0}$, lo cual implica que $\rho^f_e : A_f \longrightarrow A_e$ es un homomorfismo de grupos, luego $\rho^f_e(0_f) = 0_e$, es decir, $0_e \leq 0_f$.
Sean $g : e \longrightarrow f$ un elemento de G y $a \in A_{r(g)}$. Escribimos

$$\phi(g)(a) = a \cdot g\,.$$

Para probar que A es un $G-$módulo debemos garantizar las condiciones $(GM1) - (GM5)$.

$(GM1)$ Supongamos que existen gh y $a \cdot g$, entonces

$$\begin{aligned} (a \cdot g) \cdot h &= \phi(h)\,(\phi(g)(a)) \\ &= \phi(gh)(a) \\ &= a \cdot (gh)\,. \end{aligned}$$

$(GM2)$ Sean $a, b \in A_e$ y supongamos que existe $a \cdot g$, entonces

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot g &= \phi(g)(a+b) \\ &= \phi(g)(a) + \phi(g)(b) \\ &= a \cdot g + b \cdot g\,. \end{aligned}$$

$(GM3)$ Sean $e \in G_0$ y $a \in A_e$, entonces

$$\begin{aligned} a \cdot e &= \phi(e)(a) \\ &= a\,. \end{aligned}$$

$(GM4)$ Sea $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \theta\left(r(g)\right) \cdot g &= \phi(g)\left(\theta\left(r(g)\right)\right) \\ &= \phi(g)\rho^{r(g)}_{r(g)}(0_{r(g)}) \\ &= 0_{d(g)} \\ &= \rho^{d(g)}_{d(g)}(0_{d(g)}) \\ &= \theta\left(d(g)\right)\,. \end{aligned}$$

$(GM5)$ Supongamos que $a \cdot g$ y $b \cdot h$ existen donde $a \leq b$ y $g \leq h$, entonces

$$a = \rho^{r(h)}_{r(g)}(b)\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} a \cdot g &= \phi(g)(a) \\ &= \phi(g)\left(\rho^{r(h)}_{r(g)}(b)\right) \\ &= \rho^{d(h)}_{d(g)}\left(\phi(h)(b)\right) \\ &= \rho^{d(h)}_{d(g)}(b \cdot h) \\ &= (b \cdot h | 0_{d(g)}) \\ &\leq b \cdot h\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto cualquier $G-$gavilla determina un $G-$módulo.

Recíprocamente, sea A un $G-$módulo. Se define

$$\rho : \mathbf{G_0} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

por

$$\rho(e) = A_e\,,$$

y para $f \leq e$ en G_0

$$\rho^e_f(a) = (a|0_f)\,.$$

También se define

$$\phi : G^{op} \longrightarrow A$$

por

$$\phi(e) = A_e$$

para cualquier $e \in G_0$, y

$$\phi(g) : A_{r(g)} \longrightarrow A_{d(g)}$$

por

$$\phi(g)(a) = a \cdot g\,.$$

Notemos que sólo resta demostrar (3) de la definición de $G-$gavillas.
Sean $h \leq g \in G$ y $a \in A_{r(g)}$, entonces

$$\begin{aligned}
\phi(h)\left(\rho^{r(g)}_{r(h)}(a)\right) &= (a|0_{r(h)}) \cdot h \\
&= (a \cdot g|0_{d(h)}) \quad \text{(por el lema 3.4.1-(ii))} \\
&= \rho^{d(g)}_{d(h)}\left(\phi(g)(a)\right)\,.
\end{aligned}$$

□

5.3. Extensiones rígidas de grupoides ordenados

Sea

$$A \overset{\iota}{\hookrightarrow} U \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} G$$

una extensión de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G. Se dice que la *extensión es rígida* si existe una transversal $k : G \longrightarrow U$ la cual preserva el orden.

Lema 5.3.1. Si $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ y $\mathcal{E}' = (\iota', U', \sigma')$ son extensiones congruentes de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G y $\mathcal{E}$ es rígida, entonces $\mathcal{E}'$ es rígida.

Demostración. Sean $\mu : \mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ y $k : G \longrightarrow U$ transversal que preserva el orden. Se define

$$k' = \mu k : G \longrightarrow U'\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma' k' &= \sigma'(\mu k) \\
&= (\sigma' \mu) k \\
&= \sigma k \\
&= 1_G\,.
\end{aligned}$$

k' preserva el orden por la forma en como se definió. $\square$

El siguiente resultado es inmediato.

Proposición 5.3.2. La congruencia de extensiones rígidas es una relación de equivalencia . Para cada grupoide ordenado abeliano A y cada grupoide ordenado G, el conjunto de clases de congruencia de extensiones rígidas de A por G es un subconjunto del conjunto de clases de congruencia de extensiones de A por G .

5.4. Conjuntos de factores rígidos

Hemos visto que los conjuntos de factores corresponden a extensiones. En está sección, examinaremos los conjuntos de factores que corresponden a extensiones rígidas.

Definición 5.4.1. Sea G un grupoide ordenado. Un *conjunto de factores rígidos* para un $G-$módulo A es una función

$$\zeta : Ner_2(G) \longrightarrow A$$

que satisface las siguientes propiedades:

(RFS1) $\zeta(g,h) \in A_{d(h)}$ para cualquier $(g,h) \in Ner_2(G)$.

(RFS2) Si $(g,h,k) \in Ner_3(G)$, $\zeta(g,h)\cdot k + \zeta(gh,k) = \zeta(g,hk) + \zeta(h,k)$.

(RFS3) Si $(h_1,h_2), (g_1,g_2) \in Ner_2(G)$ con $h_1 \leq g_1$ y $h_2 \leq g_2$, entonces $\zeta(h_1,h_2) \leq \zeta(g_1,g_2)$.

Demostraremos que las extensiones rígidas corresponden a conjuntos de factores rígidos, pero primero demostremos que los conjuntos de factores rígidos son en efecto conjuntos de factores.

Proposición 5.4.2. Sea $\zeta : Ner_2(G) \longrightarrow A$ un conjunto de factores rígidos para un $G-$módulo A. Se define

$$0_1 : PNer_2(G) \longrightarrow A$$

por

$$0_1(g,h) = 0_{d(g)} .$$

Entonces $(\zeta, 0_1)$ es un conjunto de factores.
Recíprocamente, si (ζ_0, ζ_1) es un conjunto de factores y $\zeta_1 = 0_1$, entonces ζ_0 es un conjunto de factores rígidos.

Demostración. $(Necesidad)$ Para probar que $(\zeta, 0_1)$ es un conjunto de factores debemos garantizar las condiciones $(1)-(5)$. Notemos que las condiciones (1) y (2) son inmediatas.

Sea $(g,h,k) \in Ner_3(G)$, entonces

$$\zeta(g,h)\cdot k + \zeta(gh,k) = \zeta(g,hk) + \zeta(h,k) \quad \text{(por } (RFS2)\text{)}.$$

Sean ahora $k \leq h \leq g$ en G, entonces

$$\begin{aligned}\left(0_1(h,g)|0_{d(k)}\right) &= (0_{d(g)}|0_{d(k)})\\ &= 0_{d(k)}\\ &= 0_1(k,g)-0_1(k,h)\,,\end{aligned}$$

por tanto se cumple (4) .

Probemos (5). Sean g_1, g_2, h_1, $h_2 \in G$ con (h_2,h_1), $(g_2,g_1) \in Ner_2(G)$ y $h_2 \leq g_2$, $h_1 \leq g_1$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\zeta(g_2,g_1)|0_{d(h)}\right)-\zeta(h_2,h_1) &= \zeta(h_2,h_1)-\zeta(h_2,h_1)\\ &= 0_{d(h_1)} \quad (\text{por } (RFS3)).\\ &= 0_1(h_2,g_2)\cdot h_1+0_1(h_1,g_1)-0_1(h_2h_1,g_2g_1)\,.\end{aligned}$$

(*Suficiencia*) Supongamos que (ζ_0,ζ_1) es un conjunto de factores y $\zeta_1 = 0_1$. Probemos que ζ_0 satisface las condiciones de conjunto de factores rígidos. En efecto para cualquier $(g,h) \in Ner_2(G)$, $\zeta_0(g,h) \in A_{d(h)}$.

Sea $(g,h,k) \in Ner_3(G)$, entonces

$$\zeta_0(g,h)\cdot k+\zeta_0(gh,k) = \zeta_0(g,hk)+\zeta_0(h,k)\,.$$

Por tanto se cumple $(RFS2)$.

Sean (h_1,h_2), $(g_1,g_2) \in Ner_2(G)$ con $h_1 \leq g_1$ y $h_2 \leq g_2$, entonces

$$\left(\zeta_0(g_1,g_2)|0_{d(h_2)}\right)-\zeta_0(h_1,h_2) = 0_1(h_1,g_1)\cdot h_2+0_1(h_2,g_2)-0_1(h_1h_2,g_1g_2)\,.$$

Así que

$$\left(\zeta_0(g_1,g_2)|0_{d(h_2)}\right) = \zeta_0(h_1,h_2)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\zeta_0(h_1,h_2) &= \left(\zeta_0(g_1,g_2)|0_{d(h_2)}\right)\\ &\leq \zeta_0(g_1,g_2)\,.\end{aligned}$$

$\square$

En lo posterior identificaremos cada conjunto de factores rígidos ζ con su correspondiente conjunto de factores $(\zeta,0_1)$. Sea $RZ^2(G,A)$ el conjunto de conjuntos de factores rígidos de un $G-$módulo A. Notemos que, bajo la adición puntual $RZ^2(G,A)$ es un subgrupo de $Z^2(G,A)$.

Proposición 5.4.3. Sean $\mathcal{E} = (\iota, U, \sigma)$ una extensión rígida de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G y $k : G \longrightarrow A$ una transversal preservadora de orden para $\mathcal{E}$. El conjunto de factores construido de $\mathcal{E}$ y k de acuerdo con la proposición 4.3.3 es un conjunto de factores rígidos.
Recíprocamente, sea ζ un conjunto de factores rígidos para un $G-$módulo A. La extensión de A por G construida de ζ, de acuerdo a la proposición 4.3.6 es una extensión rigida.

Demostración. (*Necesidad*) De acuerdo a la proposición 4.3.3 se define

$$\zeta : S_2(G) \longrightarrow A$$

por

$$\iota\zeta(g,h) = k(g\otimes h)^{-1} \otimes k(g) \otimes k(h),$$

el cual es el conjunto de factores que se genera de $\mathcal{E}$ y k.

Dado que k preserva orden, por la proposición 5.1.2-(ii), para cualquier $(h,g) \in PNer_2(G)$, $\zeta_1(h,g) = 0_{d(h)}$.
Por la proposición 5.4.2, ζ_0 es un conjunto de factores rígidos y dado que $\zeta|_{Ner_2(G)} = \zeta_0$, implica que $\zeta : Ner_2(G) \longrightarrow A$ es un conjunto de factores rígidos.

(*Suficiencia*) Sea $\mathcal{E} = (i, G * A, \pi)$ la extensión de A por G construida a partir del conjunto de factores $(\zeta, 0_1)$ como el la proposición 4.3.6, donde ζ es un conjunto de factores principales.
Notemos que si $\eta : S_2(G) \longrightarrow A$ es el conjunto de factores que corresponde a $(\zeta, 0_1)$, entonces $\eta(g,h) = \zeta\left((g|r(h)), h\right)$.

Definimos la función

$$k : G \longrightarrow G * A$$

por

$$k(g) = (g, 0_{d(g)}),$$

entonces $\pi k = 1_G$.

Veamos que k preserva el orden: Sean $h \leq g$ en G, por demostrar $(h, 0_{d(h)}) \leq (g, 0_{d(g)})$, equivalentemente, $h \leq g$ y $0_{d(h)} = (0_{d(g)}|0_{d(h)}) + \zeta\left((g|d(h)), d(h)\right) - \zeta\left((d(h)|d(h)), d(h)\right)$.

$$\begin{aligned}(0_{d(g)}|0_{d(h)}) + \zeta\left((g|d(h)), d(h)\right) - \zeta\left((d(h), d(h)), d(h)\right) &= \zeta\left(h, d(h)\right) - \zeta\left(d(h), d(h)\right) \\ &= 0_{d(h)} \quad \text{(por la proposición 5.1.1-(3)).}\end{aligned}$$

Por lo tanto k preserva el orden.

$\square$

Hemos demostrado que cada conjunto de factores rígidos determina y está determinado por una extensión junto con una transversal que preserva el orden. Consideremos ahora el efecto de cambiar la elección de la transversal. Sea $\mathcal{E}$ una extensión rigida de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G. Sean k y k' transversales preservadoras de orden para $\mathcal{E}$ y denotamos los correspondientes conjuntos de factores rígidos por ζ y ζ', respectivamente. Definimos

$$\varepsilon : G \longrightarrow A$$

por

$$\iota\varepsilon(g) = k(g)^{-1}k'(g)\,.$$

Luego ε preserva el orden y $\varepsilon(g) \in A_{d(g)}$. Vimos en la sección 4.3 que los conjuntos de factores $(\zeta, 0_1)$ y $(\zeta', 0_1)$ difieren por el conjunto de factores principales $(\partial\varepsilon_0, \partial\varepsilon_1)$, donde

$$\partial\varepsilon_0(g,h) = \varepsilon(g)\cdot h + \varepsilon(h) - \varepsilon(gh)$$

y

$$\begin{aligned}\partial\varepsilon_1(h \le g) &= \big(\varepsilon(g)|0_{d(h)}\big) - \varepsilon(h)\\ &= \varepsilon(h) - \varepsilon(h)\\ &= 0_{d(h)}\end{aligned}$$

Por la proposición 5.1.1, $\partial\varepsilon$ es un conjunto de factores rígidos. De manera general definimos un *conjunto de factores principales rígidos* como una función

$$\partial\varepsilon : Ner_2(G) \longrightarrow A\,.$$

Para $(g,h) \in Ner_2(G)$,

$$\partial\varepsilon(g,h) = \varepsilon(g)\cdot h + \varepsilon(h) - \varepsilon(gh)\,,$$

donde

$$\varepsilon : G \longrightarrow A$$

es una función que preserva el orden y $\varepsilon(g) \in A_{d(g)}$.

Por lo tanto el efecto de cambiar la elección de la transversal preservadora de orden genera un conjunto de factores principales. Así llegamos al siguiente resultado.

Teorema 5.4.4. El conjunto de clases de congruencia de extensiones rígidas de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G, está en correspondencia biyectiva con el grupo cociente de conjuntos de factores rígidos módulo conjuntos de factores principales rígidos.

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema 4.3.11 .

5.5. El complejo de cocadena

Concluimos esta sección examinando el complejo de cocadena que Renault usa para su cohomología. En el coralario 1.6.2 vimos que cualquier conjunto simplicial da lugar a un complejo de cocadena. Así para cualquier grupoide ordenado G y $G-$módulo A, podemos usar el conjunto simplicial $Ner(G)$ para obtener un complejo de cocadena.

Comencemos definiendo dos conceptos importantes. Sean G un grupoide ordenado y A un $G-$módulo, una *función* **Ab**$-$*haz* es una función sobreyectiva

$$p : A \longrightarrow G_0$$

tal que para cada $e \in G_0$,

$$p^{-1}(e) = A_e\,,$$

es decir, la fibra de cualquier identidad de G bajo p es un grupo abeliano.

Sea $n \in \omega$, una $n-$*cocadena* es una función

$$\phi : Ner_n(G) \longrightarrow A$$

la cual satisface las condiciones:

(i) $p\,(\phi(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)) = r(g_n)\,.$

(ii) Si para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$, $g_i \in G_0$, entonces $\phi(g_n, \ldots, g_i, \ldots, g_1) \in A_0\,.$

(iii) Sean $(g_n, \ldots, g_1)$, $(h_n, \ldots, h_1) \in Ner_n(G)$ tal que para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$: $g_i \leq h_i$, entonces $\phi(g_n, \ldots, g_1) \leq \phi(h_n, \ldots, h_1)\,.$

Estas cocadenas darán la cohomología del grupoide G sin involucrar el orden en la construcción.

Denotemos por $C^n(G,A)$ el grupo de $n-$cocadenas bajo la adición puntual, entonces el complejo de Renault es:

$$C^0(G,A) \xrightarrow{\partial^0} C^1(G,A) \xrightarrow{\partial^1} C^2(G,A) \xrightarrow{\partial^2} C^3(G,A) \cdots \qquad (*)$$

donde

$$\partial^0\phi(g) = \phi\,(d(g)) - \phi\,(r(g)) \cdot g$$

y

$$\begin{aligned} \partial^n(\phi)(g_n, \ldots, g_1) = {} & \phi(g_n, \ldots, g_2) \cdot g_1 + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \phi(g_n, \ldots, g_{i+1}g_i, \ldots, g_1) + \\ & (-1)^n \phi(g_{n-1}, \ldots, g_1)\,. \end{aligned}$$

El $n-$ésimo grupo de cohomología del complejo es

$$H^n(G,A) = \frac{Ker(\partial^n)}{Img(\partial^{n-1})}.$$

Sea $\varepsilon \in C^1(G,A)$. Así $\varepsilon : G \longrightarrow A$ es una función preservadora de orden tal que $\varepsilon(g) \in A_{d(g)}$. Entonces $\partial^1\varepsilon(g,h) = \varepsilon(g)\cdot h - \varepsilon(gh) + \varepsilon(h)$.
Así las $2-$cofronteras del complejo $(*)$ son precisamente los conjuntos de factores principales rígidos del $G-$módulo A.

Por otra parte sea ϕ una función $2-$cocadena, esto es, $\phi \in C^2(G,A)$ tal que $\partial^2\phi = 0$, entonces para cualquier $(g,h,k) \in Ner_3(G)$,

$$\begin{aligned} 0_{d(k)} &= \partial^2\phi(g,h,k) \\ &= \phi(g,h)\cdot k - \phi(g,hk) + \phi(gh,k) - \phi(h,k). \end{aligned}$$

Luego

$$\phi(g,h)\cdot k + \phi(gh,k) = \phi(g,hk) + \phi(h,k).$$

Además ϕ preserva el orden y $\phi(g,h) \in A_{d(h)}$, por tanto $Ker(\partial^2) = RZ^2(G,A)$ es el grupo de conjuntos de factores rígidos.

De lo anterior podemos inferir que el segundo grupo de cohomología, $H^2(G,A) = \dfrac{RZ^2(G,A)}{RB^2(G,A)}$, es igual al grupo cociente de conjuntos de factores rígidos módulo conjuntos de factores principales rígidos, y en base al teorema 5.4.4, podemos implicar que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de congruencia de extensiones rígidas de un grupoide ordenado abeliano A por un grupoide ordenado G y el segundo grupo de cohomología $H^2(G,A)$.
Pon lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1. El conjunto de clases de congruencia de extensiones rigidas de A por G está en correspondencia biyectiva con el segundo grupo de cohomología del complejo cocadena $(*)$.

Conclusión

(1) Por medio de la teoría de categorías abelianas se construyó la cohomología de categorías , en ella definimos conceptos como **C**-módulo derecho y **C**-módulo derecho libre. La similitud de la definición de **C**-módulo derecho libre con respecto a la definición de reflexión a lo largo de un funtor generó resultados inmediatos y un mayor entendimiento sobre el tema.
En un posterior estudio se puede retomar el complejo de cadena de la proposición 2.1.13, si el complejo de cadena es una resolución proyectiva, entonces podemos hacer caracterizaciones de su primer y segundo grupo de cohomología usando las extensiones de grupoides ordenados.

(2) En el capítulo 3 se desarrolló una forma indirecta para calcular los grupos de cohomología de un G-módulo, es decir, como consecuencia del teorema 3.4.2 los grupos de cohomología de un G-módulo son los grupos de cohomología de su correspondiente $\mathbf{C}(\mathbf{G})$-módulo. Esta técnica se puede retomar en un posterior trabajo para calcular los grupos de cohomología de un G-módulo de tal manera que no dependan del orden definido sobre G.

(3) En el capítulo 4 se generó teoría a partir de otra ya establecida, es decir, notemos las analogias de las extensiones de grupoides ordenados con las extensiones de módulos sobre un anillo.
La conclusión de capítulo 4 se concreta en el teorema 4.3.11 .

(4) Por último la cohomología de Renault nos permite caracterizar los conjuntos de factores principales rígidos de un G-módulo A, $RB^2(G,A)$, a traves de las 2-cofronteras del complejo

$$C^0(G,A) \xrightarrow{\partial^0} C^1(G,A) \xrightarrow{\partial^1} C^2(G,A) \xrightarrow{\partial^2} C^3(G,A)\cdots \quad .$$

Además de la correspondencia biyectiva entre $\dfrac{RZ^2(G,A)}{RB^2(G,A)}$ y la clase de congruencias de extensiones rígidas de A por G (teorema 5.5.1) .

Apéndice

Apéndice A

Categorías y categorías abelianas

A.1. Categorías

En esta sección se da la definición de categoría, funtor y algunos resultados elementales. Para la discusión de algunos aspectos de las definiciones y también para una variedad de otras proposiciones el lector puede consultar: [1], [2], [5], [8] y [15] .

Definición A.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de dos colecciones, $Ob(\mathcal{C})$, cuyos elementos son los *objetos* de $\mathcal{C}$, y $Mor(\mathcal{C})$, los *morfismos* de $\mathcal{C}$. A cada morfismo se le asigna una pareja de objetos, llamados el *dominio* y el *codominio* del morfismo. La notación $f : A \longrightarrow B$ significa que f es un morfismo con dominio A y codominio B. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos morfismos, existe un morfismo $g \circ f : A \longrightarrow C$ llamado la *composición* de g y f. La composición no está definida de otra manera. Usualmente escribiremos gf en lugar de $g \circ f$ cuando no exista riesgo de confusión. Para cada objeto A existe un morfismo 1_A, llamado la *identidad* de A, cuyo dominio y codominio es A. Aquella información satisface los siguientes axiomas:

1. Para $f : A \longrightarrow B,\ f1_A = 1_B f = f$.
2. Para $f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D,\ h(gf) = (hg)f$.

Decimos que una categoría es *pequeña* cuando su colección de morfismos es un conjunto.
Si A y B son objetos de $\mathcal{C}$, usualmente supondremos que la colección de morfismos con dominio A y codominio B es un conjunto. Este conjunto es denotado por $\mathcal{C}(A, B)$ ó $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Aquellas categorías que satisfacen la condición anterior son llamadas *localmente pequeñas*.

La siguiente definición es extraída de [2], notemos que es un caso particular de la definición anterior.

Definición A.1.2. Una *categoría* $\mathbf{C}$ consiste de lo siguiente:

(1) Una clase $|\mathbf{C}|$, cuyos elementos son llamados objetos de la categoría.

(2) Para cualquier par A, B de objetos, un conjunto $\mathbf{C}(A,B)$, cuyos elementos son llamados morfismos de A en B , además si los pares de objetos $(A,B) \neq (A',B')$, entonces $\mathbf{C}(A,B)$ y $\mathbf{C}(A',B')$ son ajenos.

(3) Para cualquier terna A, B, C de objetos, una ley de composición

$$\mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) \longrightarrow \mathbf{C}(A,C),$$

la composición de la pareja (f,g) será escrita por concatenación gf .

(4) Para cualquier objeto A, un morfismo $1_A \in \mathbf{C}(A,A)$, llamado la identidad sobre A.

(1), (2), (3) y (4) están sujetos a los siguientes axiomas:

(i) Axioma de Asociatividad: Dados los morfismos $f \in \mathbf{C}(A,B)$, $g \in \mathbf{C}(B,C)$ y $h \in \mathbf{C}(C,D)$ la siguiente igualdad se cumple:

$$h(gf) = (hg)f\,.$$

(ii) Axioma de Identidad: Dados los morfismos $f \in \mathbf{C}(A,B)$ y $g \in \mathbf{C}(B,C)$ las siguientes igualdades se cumplen:

$$1_B f = f \quad \text{y} \quad g1_B = g\,.$$

Nota:
A lo largo de la tesis usaremos la definición A.1.2 ó equivalentemente la definición de categoría localmente pequeña. Cuando no exista ambigüedad un objeto A de la categoría $\mathbf{C}$ será denotado por $A \in \mathbf{C}$. Similarmente si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{C}$ lo denotaremos por $f : A \longrightarrow B \in \mathbf{C}$ ó $f \in \mathbf{C}$

Definición A.1.3. Un *funtor* F de una categoría $\mathbf{A}$ en una categoría $\mathbf{B}$ consiste de lo siguiente:

(1) Una función

$$|A| \longrightarrow |B|$$

entre las clases de objetos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, la imagen de $A \in \mathbf{A}$ es escrita por FA.

(2) Para cualquier par de objetos $A, A' \in \mathbf{A}$, una función

$$\mathbf{A}(A,A') \longrightarrow \mathbf{B}(FA,FA')\,.$$

La imagen de $f \in \mathbf{A}(A,A')$ es escrita por Ff.

Estos enunciados están sujetos a los siguientes axiomas:

(i) Para cualquier par de morfismos $f \in \mathbf{A}(A,A')$ y $g \in \mathbf{A}(A',A'')$,

$$F(gf) = FgFf\,.$$

(ii) Para cualquier objeto $A \in \mathbf{A}$,

$$F1_A = 1_{FA}\,.$$

Dados dos funtores $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, una composición puntual produce inmediatamente un nuevo funtor $GF : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$. Está ley de composición es obviamente asociativa.

Ejemplo A.1.4. Mencionamos algunos ejemplos de categorías y funtores con la notación carrespondiente.

(1) Conjuntos y funciones: **Con** .

(2) Grupos y homomorfismos de grupos: **Grp** .

(3) Grupos abelianos y homomorfismos de grupos: **Ab** .

(4) Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ puede ser visto como una categoría, $\mathbf{X}$, cuyos objetos son los elementos de X y para $x, y \in \mathbf{X}$, el conjunto $\mathbf{X}(x,y)$ se define por:

$$\mathbf{X}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{si} \quad x \leq y \\ \\ \emptyset & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(5) Dada una categoría $\mathbf{C}$ y un objeto fijo $C \in \mathbf{C}$, definimos un funtor

$$\mathbf{C}(C,-) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

de $\mathbf{C}$ en la categoría de conjuntos por

$$\mathbf{C}(C,-)A = \mathbf{C}(C,A),$$

para cualquier $A \in \mathbf{C}$. Ahora si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, la correspondiente función

$$\mathbf{C}(C,-)f \equiv \mathbf{C}(C,f) : \mathbf{C}(C,A) \longrightarrow \mathbf{C}(C,B)$$

está definida por la formula:

$$\mathbf{C}(C,f)g = fg\,,$$

para un morfismo $g \in \mathbf{C}(C,A)$.

Tal funtor es llamado *funtor representable.*

Definición A.1.5. Considere dos funtores $F, G : \mathbf{A} \rightrightarrows \mathbf{B}$ de la categoría $\mathbf{A}$ en la categoría $\mathbf{B}$. Una *transformación natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ de F en G es una clase de morfismos $(\alpha_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \mathbf{A}}$ de $\mathbf{B}$ indexada por los objetos de $\mathbf{A}$ de tal manera que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathbf{A}$, $\alpha_{A'} Ff = Gf\alpha_A$.

Notemos que, cuando F, G, H son funtores de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y $\alpha : F \Longrightarrow G$, $\beta : G \Longrightarrow H$ son transformaciones naturales la fórmula

$$(\beta\alpha)_A = \beta_A \alpha_A$$

define una nueva transformación natural $\beta\alpha : F \Longrightarrow H$. Esta composición es asociativa y posee una unidad para cada funtor F, ésta es la transformación natural 1_F cuya $A-$componente es 1_{FA} .
La siguiente proposición es evidente.

Proposición A.1.6. Sean $\mathbf{A}$ un categoría pequeña y $\mathbf{B}$ una categoría arbitraria. Los funtores de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y las transformaciones naturales entre ellos constituyen una categoría, $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Esta categoría es pequeña siempre que $\mathbf{B}$ lo sea.

Definición A.1.7. Un *funtor contravariante* F de una categoría $\mathbf{A}$ en una categoría $\mathbf{B}$ consiste de los siguiente:

(1) Una función
$$|A| \longrightarrow |B|$$
entre las clases de objetos. La imagen de $A \in \mathbf{A}$ es escrita por FA;

(2) Para cualquier par de objetos $A, A' \in \mathbf{A}$, una función
$$\mathbf{A}(A, A') \longrightarrow \mathbf{B}(FA, FA').$$
La imagen de $f \in \mathbf{A}(A, A')$ es escrita por Ff.

(1) y (2) están sujetos a los siguientes axiomas:

(i) Para cualquier par de morfismos $f \in \mathbf{A}(A,A')$, $g \in \mathbf{A}(A',A'')$,
$$F(gf) = FfFg\,.$$

(ii) Para cualquier objeto $A \in \mathbf{A}$,
$$F1_A = 1_{FA}\,.$$

Dada una categoría $\mathbf{A}$ y un objeto $A \in \mathbf{A}$ definimos un funtor contravariante
$$\mathbf{A}(-,A) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Con}.$$
Para cualquier objeto $B \in \mathbf{A}$,
$$\mathbf{A}(-,A)B = \mathbf{A}(B, A).$$
Para cualquier morfismo $f : B \longrightarrow C$ en $\mathbf{A}$,
$$\mathbf{A}(-,A)f : \mathbf{A}(C,A) \longrightarrow \mathbf{A}(B,A),$$
$$\mathbf{A}(-,A)f(g) = gf\,.$$

Definición A.1.8. Considere dos funtores contravariantes $F, G : \mathbf{A} \rightrightarrows \mathbf{B}$ de una categoría $\mathbf{A}$ en una categoría $\mathbf{B}$. Una *transformación natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ de F en G es una clase de morfismos $(\alpha_A FA \Longrightarrow GA)_{A\in\mathbf{A}}$ de $\mathbf{B}$ indexados por los objetos de $\mathbf{A}$ de tal manera que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow A'$ en $\mathbf{A}$, $Gf\alpha_{A'} = \alpha_A Ff$

Definición A.1.9. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathbf{C}$ es llamado un *monomorfismo* cuando, para cualquier objeto $C \in \mathbf{C}$ y cualquier par de morfismos $g, h : C \rightrightarrows A$, la siguiente propiedad se cumple:
$$[fg = fh] \Rightarrow [g = h]\,.$$

La siguiente proposición es evidente.

Proposición A.1.10. En una categoría $\mathbf{C}$:

(1) Cualquier morfismo identidad es un monomorfismo.

(2) La composición de dos monomorfismos es un monomorfismo.

(3) Si la composición kf de dos morfismos es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.

Definición A.1.11. Considere un funtor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. F *preserva monomorfismos* cuando, para cualquier morfismo $f \in \mathbf{A}$,

$$f \quad \text{es monomorfismo implica } Ff \quad \text{es monomorfismo}.$$

Definición A.1.12. Un morfismo $f : B \longrightarrow A$ en una categoría $\mathbf{C}$ es llamado un *epimorfismo* cuando, para cualquier objeto $C \in \mathbf{C}$ y cualquier par de morfismos $g, h : A \rightrightarrows B$, la siguiente propiedad se cumple:

$$[gf = hf] \Rightarrow [g = h].$$

La siguiente proposición es evidente.

Proposición A.1.13. En una categoría $\mathbf{C}$:

(1) Cualquier morfismo identidad es un epimorfismo.

(2) La composición de dos epimorfismos es un epimorfismo.

(3) Si la composición fk de dos morfismos es un epimorfismo , entonces f es un epimorfismo.

Definición A.1.14. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathbf{C}$ es llamado un *isomorfismo* cuando existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ en $\mathbf{C}$ el cual satisface las relaciones

$$fg = 1_B, \quad gf = 1_A.$$

El siguiente resultado es inmediato.

Proposición A.1.15. En una categoría:

(1) Cualquier identidad es un isomorfismo.

(2) La composición de dos isomorfismos es un isomorfismo.

(3) Un isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo.

(4) Cualquier funtor preserva isomorfismos.

Definición A.1.16. Dada una categoría $\mathbf{A}$, la *categoría dual*, $\mathbf{A}^{op}$, es definida de la siguiente manera:

(1) $|\mathbf{A}^{op}| = |\mathbf{A}|$.

(2) Para todo $A, B \in \mathbf{A}^{op}$, $\mathbf{A}^{op}(A,B) = \mathbf{A}(B,A)$.

(3) La ley de composición de $\mathbf{A}^{op}$ es dada por $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$.

Principio de Dualidad A.1.17. Supongamos la validez, en cualquier categoría, de un enunciado declarando la existencia de algunos objetos o morfismos o la igualdad de algunas composiciones. Entonces el enunciado dual también es valido en cualquier categoría; este enunciado dual se obtiene invirtiendo la dirección de cualquier morfismo y remplazando cualquer composición fg por la composición gf .

Notemos que la noción dual de monomorfismo es epimorfismo, y recíprocamente. Mientras que la noción de isomorfismo es autodual.

A.1.1. Funtores adjuntos

En esta sección daremos una somera introducción a uno de los conceptos más relevante en teoría de categorías, funtores adjuntos. Para un estudio más profundo sobre el tema el lector puede consultar [2], [5], [15], [1].

Definición A.1.18. Sean $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor y $B \in \mathbf{B}$. Una *reflexión de B a lo largo de F* es una pareja (R_B, η_B) donde

1. $R_B \in \mathbf{A}$ y $\eta_B : B \longrightarrow FR_B$ es un morfismo en $\mathbf{B}$.
2. Si $A \in \mathbf{A}$ y $b : B \longrightarrow FA$ es un morfismo en $\mathbf{B}$, entonces existe un único morfismo $a : R_B \longrightarrow A$ en $\mathbf{A}$ tal que $Fa\eta_B = b$.

$$\begin{tikzcd} R_B \arrow[dd, dashed, "a"] & & FR_B \arrow[dd, "Fa"] \\ & B \arrow[ur, "\eta_B"] \arrow[dr, "b"'] & \\ A & & FA \, . \end{tikzcd}$$

Proposición A.1.19. Sean $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor y $B \in \mathbf{B}$. Cuando la reflexión de B a lo largo de F existe esta es única salvo isomorfismo.

Proposición A.1.20. Considere un funtor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y supongamos que, para cualquier objeto $B \in \mathbf{B}$, la reflexión de B a lo largo de F existe y tal reflexión (R_B, η_B) *ha sido elegida*. En este caso, existe un único funtor $R : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ satisfaciendo la siguientes propiedades

1. Para cualquier $B \in \mathbf{B}$: $RB = R_B$.

2. $(\eta_B : B \longrightarrow FRB)_{B\in\mathbf{B}}$ es una transformación natural.

Definición A.1.21. Un funtor $R : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es *adjunto izquierdo* al funtor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ cuando existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{B}} \Longrightarrow FR$ tal que para cualquier $B \in \mathbf{B}$, $(RB,\, \eta_B)$ es la reflexión de B a lo largo de F.

Como consecuencia de la proposición A.1.19 en la definición anterior R y η están definidos de manera única salvo isomorfismo.

El concepto dual de reflexión a lo largo de un funtor es *correflexión a lo largo de un funtor* $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. Explícitamente una *correflexión* de $B \in \mathbf{B}$ es una pareja $(R_B,\, \varepsilon)$ donde R_B es un objeto en $\mathbf{A}$ y $\varepsilon_B : FR_B \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{B}$ de tal manera que para cualquier pareja (A, b) con $A \in \mathbf{A}$ y $b : FA \longrightarrow B$, existe un único morfismo $a : A \longrightarrow R_B$ tal que $\varepsilon_B Fa = b$. En forma análoga un funtor $R : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es adjunto derecho a F cuando existe una transformación natural $\varepsilon : FR \Longrightarrow 1_{\mathbf{B}}$ tal que para cualquier $B \in \mathbf{B}$, $(RB,\, \varepsilon_B)$ es la correflexión de B a lo largo de F.

Teorema A.1.22. Considere dos funtores $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. G es adjunto izquierdo a F.

2. Existen transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{B}} \Longrightarrow FG$ y $\varepsilon : GF \Longrightarrow 1_{\mathbf{A}}$ tal que $(F * \varepsilon)(\eta * F) = 1_F$ y $(\varepsilon * G)(G * \eta) = 1_G$.

3. Existen biyecciones $\theta_{AB} : \mathbf{A}(GB, A) \cong \mathbf{B}(B, FA)$ para cualesquiera objetos $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ y aquellas biyecciones son naturales en ambas variables A y B.

4. F es adjunto derecho a G.

Escribiremos $G \dashv F$ para denotar que G es adjunto izquierdo a F y en consecuencia F es adjunto derecho a G.

A.2. Categorías abelianas

La teoría de categorías abelianas está estrechamente relacionada con la teoría de grupos abelianos, la cual representa el más importante modelo para categorías abelianas. Este capítulo contiene las nociones basicas y resultados de la teoría de categorías abelianas; estas nociones y resultados se usaron frecuentemente en las secciones anteriores. Para un estudio más profundo sobre el tema el lector puede consultar [3], [5], [8], [14] .

A.2.1. Objeto cero y kernel

Definición A.2.1. Un *objeto cero* en una categoría **C** es un objeto en **C** que es objeto inicial y terminal a la vez, y se denota por 0.

Notemos que la noción de objeto cero es autodual, además un objeto cero en una categoría **C** es único salvo isomorfismo.

Definición A.2.2. Sea **C** una categoría con objeto cero. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en **C** es llamado un *morfismo cero* o *cero-morfismo* cuando se factoriza a travéz del objeto cero, es decir, cuando el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\ & 0 \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} .$$

En este caso $f : A \longrightarrow B$ se denota por $0 : A \longrightarrow B$.

Proposición A.2.3. Sea **C** una categoría con objeto cero, entonces existe sólo un morfismo cero de cada objeto A a cada objeto B .

Observemos que la composición de un morfismo cero con algún otro morfismo es de nuevo un morfismo cero.

Definición A.2.4. En una categoría C con objeto 0, el *kernel* o *núcleo* de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es, cuando éste existe, el igualador de f y el cero-morfismo $0 : A \longrightarrow B$. Se define el *cokernel* de f o *conúcleo* de f de manera dual.

$$Ker(f) \xrightarrow{ker(f)} A \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

$(Ker(f), ker(f))$ es el igualdor de $(f, 0)$.

$$A \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{coker(f)} Coker(f)$$

$(Coker(f), coker(f))$ es el coigualdor de $(f, 0)$.

Observación A.2.5. Cualquier kernel es un igualador,por lo cual cualquier kernel es un monomorfismo. Si suponemos que tenemos una categoría con objeto cero, un monomorfismo o igualador, en general, no es un kernel. Veamos esto con más detalle.
En la categoría de Grupos, **Grp**, el objeto cero es el grupo cero y el morfismo cero es el homomorfismo constante cero:

$$0 : A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto 0_B$$

En cualquier categoría un kernel, cuado éste existe, es un monomorfismo. Ahora qué pasa con el reciproco.
En la categoría **Grp** para el morfismo $f : A \longrightarrow B$, el $Ker(f)$ (como objeto) es un subgrupo normal de A y cualquier otro objeto en **Grp** isomorfo a $Ker(f)$ también será un subgrupo normal de A. Por tanto si es un kernel, entonces es un subgrupo normal.
Bastará considerar un subgrupo $H \subset A$ tal que H no es normal, de este modo tenemos un monomorfismo él cual no es un kernel.

El siguiente resultado es evidente.

Proposición A.2.6. Sea f un monomorfismo en una categoría con objeto cero. Si $fg = 0$ para algún morfismo g, entonces $g = 0$.

Proposición A.2.7. En una categoría con objeto cero, el kernel de un monomorfismo

$$f : A \longrightarrow B$$

es el morfismo cero $0 : 0 \longrightarrow A$.

Demostración. Si $ker(f) : Ker(f) \longrightarrow A$ es el kernel de f entonces $f ker(f) = 0$ y f es monomorfismo, por lo cual $ker(f) = 0$. El morfismo $ker(f)$ se factoriza a través de 0, donde $Ker(f) \longrightarrow 0$ es único con la propiedad de factorizar a $ker(f)$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, dashed] & & A \arrow[r, "f"] & B \\
& Ker(f) \arrow[ur, "ker(f)"'] & &
\end{tikzcd},$$

donde $0 \longrightarrow Ker(f)$ es único con la propiedad de factorizar al morfismo cero. Por tanto $Ker(f) \cong 0$. □

Dualizando la proposición anterior, el cokernel de un epimorfismo es el cero-morfismo.

Proposición A.2.8. En una categoría con objeto cero, el kernel de un cero morfismo $0 : A \longrightarrow B$ es, salvo isomorfismo, la identidad sobre A.

Demostración. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}.$$

□

Equivalente a la definición A.2.4 podemos considerar el kernel de un morfismo

$$g : A \longrightarrow B$$

como el producto fibrado o pullback de g y el morfismo $0 \longrightarrow B$.

$$\begin{tikzcd} Ker(g) \arrow[r] \arrow[d, "ker(g)"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}.$$

Notemos que $0 \longrightarrow B$ es un monomorfismo, por lo cual $ker(g)$ también es un monomorfismo ([2], proposición 2.5.3) .

A.2.2. Categorías aditivas y biproductos

Definición A.2.9. Por una *categoría preaditiva* entendemos una categoría $\mathbf{C}$ junto con una estructura de grupo abeliano en cada conjunto $\mathbf{C}(A,B)$ de morfismos, de tal manera que las funciones composición

$$\begin{aligned} c_{ABC} : \mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) &\longrightarrow \mathbf{C}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto gf \end{aligned}$$

son homomorfismos de grupo en cada variable. Escribiremos la estructura de grupo aditivamente.

Si la composición

$$\begin{aligned} c_{ABC} : \mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) &\longrightarrow \mathbf{C}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto gf \end{aligned}$$

es un homomorfismos de grupos en la primera variable:

$$g(f+h) = gf + gh\,.$$

De igual forma en la segunda variable:

$$(f+h)g = fg + hg\,.$$

Notemos que cualquier subcategoría plena de una categoría de módulos o grupos abelianos es preaditiva también.

Proposición A.2.10. La noción de categoría preaditiva es autodual

Proposición A.2.11. En una categoría preaditiva $\mathbf{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathbf{C}$ tiene un objeto inicial.

(2) $\mathbf{C}$ tiene un objeto final.

(3) $\mathbf{C}$ tiene un objeto cero.

En este caso, los morfismos que se factorizan a través del objeto cero son exactamente las identidades para las estructuras de grupo.

Demostración. $(3) \Rightarrow (1)$ y $(3) \Rightarrow (2)$ son inmediatas. Mostremos $(1) \Rightarrow (3)$.
Supongamos que 0 es el objeto inicial en $\mathbf{C}$, para el objeto $A \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}(A,0)$ tiene almenos un morfismo, el morfismo cero (respecto a la estructura de grupo). Supongamos que $g : A \longrightarrow 0$ es otro morfismo en $\mathbf{C}(A,0)$, entonces la función composición

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(A,0) \times \mathbf{C}(0,0) &\longrightarrow \mathbf{C}(A,0) \\ (g, 1_0) &\longmapsto 1_0 g \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos en ambas variables por tanto $g = 1_0 g$ es el morfismo identidad en $\mathbf{C}(A,0)$, esto es, $g = 0$. Por tanto 0 es el objeto cero en $\mathbf{C}$.
Por el principio de dualidad categórica, si $(1) \Rightarrow (3)$ es cierto, entonces $(2) \Rightarrow (3)$ es cierto.

Supongamos que la categoría $\mathbf{C}$ tiene objeto cero. Sean C y D dos objetos en $\mathbf{C}$, los grupos $\mathbf{C}(C,0)$, $\mathbf{C}(0,D)$ están únicamente constituidos respectivamente por sus elementos identidad, luego la composición de dos elementos identidad $C \longrightarrow 0 \longrightarrow D$ es el elemento identidad de $\mathbf{C}(C,D)$ y dado que este elemento identidad se factoriza a travez del objeto cero, entonces es igual al morfismo cero, es decir, el morfismo cero en $\mathbf{C}(C,D)$ es igual al morfismo identidad respecto a la estructura de grupo. $\square$

Proposición A.2.12. Sean A, B dos objetos en una categoría preaditiva $\mathbf{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) El producto (P, π_A, π_B) de A y B existe.

(2) El coproducto (P, s_A, s_B) de A y B existe.

(3) Existen un objeto P y morfismos $\pi_A : P \longrightarrow A$, $\pi_B : P \longrightarrow B$, $s_A : A \longrightarrow P$ y $s_B : B \longrightarrow P$ con las propiedades: $\pi_A s_A = 1_A$, $\pi_B s_B = 1_B$, $\pi_A s_B = 0$, $\pi_B s_A = 0$ y $s_A \pi_A + s_B \pi_B = 1_P$.

Más aún; bajo esas condiciones:

$$\begin{aligned} s_A &= ker(\pi_B), \quad & s_B &= ker(\pi_A) \\ \pi_A &= coker(s_B), \quad & \pi_B &= coker(s_A) . \end{aligned}$$

Demostración. Por el principio de dualidad categórica, es suficiente mostrar $(1) \Leftrightarrow (3)$ ó $(2) \Leftrightarrow (3)$. Probemos $(1) \Leftrightarrow (3)$.
(*Necesidad*) Supongamos que el producto de A y B, (P, π_A, π_B), existe. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
A \arrow[urr, bend left, "1_A"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & P \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B\,.
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un único morfismo $s_A : A \longrightarrow P$ tal que

$$\pi_A s_A = 1_A \quad \text{y} \quad \pi_B s_A = 0$$

De la misma manera, existe el único morfismo $s_B : B \longrightarrow P$ tal que

$$\pi_B s_B = 1_B \quad \text{y} \quad \pi_A s_B = 0\,.$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
P \arrow[urr, bend left, "\pi_A"] \arrow[drr, bend right, "\pi_B"'] & P \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B\,.
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $1_P : P \longrightarrow P$ hace conmutar el diagrama y $s_A\pi_A + s_B\pi_B$ también lo hace conmutar, como la solución es única entonces $s_A\pi_A + s_B\pi_B = 1_P$.

(*Suficiencia*) Mostremos que (P, π_A, π_B) es el coproducto de A y B. Sean Q un objeto en $\mathbf{C}$ y $u : Q \longrightarrow A$, $v : Q \longrightarrow B$ morfismos en $\mathbf{C}$.
Tenemos que el morfismo $s_A u + s_B v : Q \longrightarrow P$ hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
Q \arrow[urr, bend left, "u"] \arrow[drr, bend right, "v"'] \arrow[r, dashed, "s_A u + s_B v"] & P \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & B\,.
\end{tikzcd}$$

Ahora supongamos que existe otro morfismo $h : Q \longrightarrow P$ tal que $u = \pi_A h$ y $v = \pi_B h$, entonces

$$\begin{aligned}
s_A u + s_B v &= s_A \pi_A h + s_B \pi_B h \\
&= h 1_P \\
&= h\,.
\end{aligned}$$

Por tanto (P, π_A, π_B) es el coproducto de A y B.

Asumamos las condiciones (1)-(3) y probemos que $s_A = ker(\pi_B)$. En efecto se cumple $\pi_B s_A = 0$. Supongamos que existe otro morfismo $x : X \longrightarrow P$ tal que $\pi_B x = 0$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s_A"] & P \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
X . \arrow[u, dashed, "\pi_A x"] \arrow[ur, "x"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces el morfismo $\pi_A x : X \longrightarrow A$ satisface:

$$\begin{aligned} s_A \pi_A x &= [1_P - s_B \pi_B] x \\ &= x - s_B \pi_B x \\ &= x . \end{aligned}$$

Supongamos la existencia de otro morfismo $y : X \longrightarrow A$ tal que $s_A y = x$ tal que $s_A y = x$, entonces $s_A y = s_A \pi_A x$ y s_A es monomorfismo, lo cual implica que $y = \pi_A x$. Por tanto $\pi_A x$ es el único morfismo en $\mathbf{C}$ tal que $s_A(\pi_A x) = x$. Similarmente se muestra que $s_B = ker(\pi_A)$.

Notemos que si existe el producto de dos objetos en $\mathbf{C}$, existe el coproducto de dos objetos en $\mathbf{C}^{op}$ y $\mathbf{C}^{op}$ también es una categoría preaditiva, por lo cual las 3 condiciones de la proposición también son equivalentes en $\mathbf{C}^{op}$. Si (P, s_A, s_B) y (P, π_A, π_B) son el producto y coproducto de A y B respectivamente en $\mathbf{C}^{op}$, se satisface:

$$\pi_A = ker(s_B) \quad \text{y} \quad \pi_B = ker(s_A)$$

Dualizando, (P, s_A, s_B) y (P, π_A, π_B) son el coproducto y producto de A, B en $\mathbf{C}$ respectivamente, además

$$\pi_A = coker(s_B) \quad \text{y} \quad \pi_B = coker(s_B) .$$

$\square$

Definición A.2.13. Dados dos objetos A, B en una categoría preaditiva, una quinteta

$$(P, \pi_A, \pi_B, s_A, s_B)$$

como en (3) de la proposición A.2.12, es llamado un *biproducto* de A y B y P se denota por $A \oplus B$.

Observemos que dadas las condiciones que cumplen los morfismos π_A, π_B, s_A, s_B en la proposición A.2.12, podemos implicar que π_A, π_B son epimorfismos y s_A, s_B son monomorfismos.

Definición A.2.14. Por una *categoría aditiva* entendemos una categoría preaditiva con objeto cero y biproductos.

A.2.3. Funtores aditivos

Definición A.2.15. Dadas dos categorías preaditivas **A** y **B**, un funtor $F : A \longrightarrow B$, es *aditivo* cuando para cualquier $A, A' \in \mathbf{A}$ la función

$$F_{A,A'} : \mathbf{A}(A, A') \longrightarrow \mathbf{B}(FA, FA')$$
$$f \longmapsto Ff$$

es un homomorfismo de grupos.

Observemos que la composición de funtores aditivos es de nuevo aditivo.
El siguiente resulatdo se prueba de una forma estandar. Para mayor información el lector puede consultar: [2], definición 2.7.2, proposición 2.15.1 y teorema 2.15.2 .

Proposición A.2.16. Considere una categoría aditiva **B** y una categoría preaditiva pequeña **A** . La categoría $\mathbf{Add}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de funtores aditivos de **A** en **B** y transformaciones naturales entre ellos es aditiva y los biproductos son calculados puntualmente. Más aun si **B** es finitamente completa (cocompleta), $\mathbf{Add}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es finitamente completa (cocompleta) y los límites finitos son calculados puntualmente.

A.2.4. Definición de categoría abeliana

Historicamente, el estudio de categorías abelianas desempeñan un importante papel en el desarrollo de teorías. topología algebraica y álgebra homológica hacen un amplio uso de ella.

Definición A.2.17. Una categoría **C** es *abeliana* cuando satisface las siguientes propiedades:

(1) **C** tiene objeto cero.

(2) Cualquier par de objetos de **C** tiene un producto y un coproducto.

(3) Cualquier morfismo de **C** tiene un kernel y un cokernel.

(4) Cualquier monomorfismo de **C** es un kernel; cualquier epimorfismo de **C** es un cokernel.

Observemos que el dual de cada axioma es el axioma mismo, concluimos que:

Proposición A.2.18 (Principio de dualidad abeliano)**.** La noción dual de categoría abeliana es de nuevo categoría abeliana.

La proposición previa es fundamental, implica que cuando una propiedad es probada para categorías abelianas, también queda probada la propiedad dual. Esto significa que si una proposición **S** es válida para cualquier categoría abeliana, la proposición $\mathbf{S}^*$ también es válida para cualquier categoría abelana.

Si **S** es válida para **A**, entonces **S** es válida para $\mathbf{A}^{op}$. Luego

$$\mathbf{S}^* \quad \text{es válida para} \quad (\mathbf{A}^{\mathbf{op}})^{\mathbf{op}} \quad \text{y por tanto}$$
$$\mathbf{S}^* \quad \text{es válida para} \quad \mathbf{A}\,.$$

Notemos de manera inmediata que las categorías **Grp** y **Top** no son categorías abelianas; la primera no satisface el cuarto axioma de la definición (observación A.2.5), mientras que en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas no existe objeto cero.

Proposición A.2.19. La Categoría **Ab** de grupos abelianos es una categoría abeliana.

Demostración. 1. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en **Ab**. Se define el $ker(f) = (K, i)$, donde $K = \{a \in A : f(a) = 0_B\}$ e $i : K \hookrightarrow A$ es el homomorfismo inclusión, notemos que K por su forma es un grupo abeliano.
Se define tambien $Coker(f) = (\frac{B}{Img(f)}, \pi)$, donde $\frac{B}{Img(f)} = \{bImg(f) : b \in B\}$ y $\pi : B \longrightarrow \frac{B}{Img(f)}$ es el homomorfismo proyección.
2. Mostremos que cualquier monomorfismo en **Ab** es el kernel de su cokernel.
Si $g : A \longrightarrow A'$ un monomorfismo, $\pi : A \longrightarrow \frac{A'}{Img(g)}$ es el cokernel de g. Sea $g' : B \longrightarrow A'$ un homomorfismo de grupos abelianos tal que $\pi g' = 0$, como $Img(g') \subset Img(g)$, se define

$$\begin{aligned} \phi : B &\longrightarrow A \\ b &\longmapsto g^{-1}(g'(b)) \,. \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & A' \arrow[r, "\pi"] & \frac{A'}{Img(g)} \\ B \arrow[u, dashed, "\phi"] \arrow[ur, "g'"'] & & \end{tikzcd}$$

3. Ahora mostremos que cualquier epimorfismo en **Ab** es el cokernel de su kernel.
Sea $h : A \longrightarrow B$ un epimorfismo, el kernel de h está dado por el morfismo inclusión $i : K \hookrightarrow A$. Probemos que (h, B) es el cokernel de i.
En efecto $hi = 0$. Supongamos que existe otro morfismo $f : A \longrightarrow B'$ tal que $fi = 0$. Dado que $K \subset \{a \in A : f(a) = 0\}$, podemos definir el homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : B &\longrightarrow B' \\ h(a) &\longmapsto f(a) \,, \end{aligned}$$

además, por su forma, ϕ es el único morfismo en **Ab** que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & & B' . \end{tikzcd}$$

□

Proposición A.2.20. Sean $\mathbf{A}$ una categoría abeliana y $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. La categoría de funtores $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ es una categoría abeliana.

Demostración. Comencemos verificando que $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ es una categoría preaditiva. Para F y G objetos en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ tenemos el conjunto $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}(F,G),$ si $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : F \Longrightarrow G$ son transformaciones naturales se define la suma $\alpha+\beta : F \Longrightarrow G$ de la siguiente manera, para $C \in \mathbf{C}$: $(\alpha+\beta)_C = \alpha_C + \beta_C$.
Veamos que en efecto $\alpha+\beta : F \Longrightarrow G$ es una transformación natural.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "u"'] & FC \arrow[r, "(\alpha+\beta)_C"'] \arrow[d, "Fu"'] & GC \arrow[d, "Gu"] \\ C' & FC' \arrow[r, "(\alpha+\beta)_{C'}"'] & GC' \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)_{C'}Fu &= (\alpha_{C'}+\beta_{C'})Fu \\
&= \alpha_{C'}Fu + \beta_{C'}Fu \\
&= Gu\alpha_C + Gu\beta_C \\
&= Gu(\alpha_C+\beta_C) \\
&= Gu(\alpha+\beta)_C\,.
\end{aligned}$$

Por la forma en como se definió la suma de transformaciones naturales, la operación es asociativa y conmutativa.
Se define la transformación natural $0 : F \Longrightarrow G$, para $C \in \mathbf{C} : 0_C = 0_{\mathbf{A}(FC,GC)}$ donde $0_{\mathbf{A}(FC,GC)}$ es el elemento identidad en el grupo $\mathbf{A}(FC,GC)$.

Ahora sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ morfismos en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ de tal manera que tiene sentido la suma y la composición

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2).$$

Si $C \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}
((\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2))_C &= (\alpha_1+\alpha_2)_C(\beta_1+\beta_2)_C \\
&= (\alpha_{1_C}+\alpha_{2_C})(\beta_{1_C}+\beta_{2_C}) \\
&= \alpha_{1_C}\beta_{1_C} + \alpha_{1_C}\beta_{2_C} + \alpha_{2_C}\beta_{1_C} + \alpha_{2_C}\beta_{2_C} \\
&= (\alpha_1\beta_1)_C + (\alpha_1\beta_2)_C + (\alpha_2\beta_1)_C + (\alpha_2\beta_2)_C \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)_C\,.
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ es una categoría preaditiva.

Se define el funtor $Z : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ de la siguiente manera: para cualquier $C \in \mathbf{C} : ZC = Z_{\mathbf{A}}$ donde $Z_{\mathbf{A}}$ es el objeto cero en $\mathbf{A}$. Si $v : C \longrightarrow C'$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, se define $Zv : ZC \longrightarrow ZC'$ como el morfismo cero en $\mathbf{A}$.
Veamos que Z es el objeto cero en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$. Sean F y $G \in \mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, se define $\alpha : Z \Longrightarrow F$ de la siguiente manera:
para $C \in \mathbf{C} : \alpha_C : ZC \longrightarrow FC$ es el único morfismo en $\mathbf{A}$ donde ZC es el objeto inicial. En efecto, α es el único

morfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}(Z,F)$, por lo cual Z es el objeto inicial en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$. Similarmente, Z es el objeto final en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, es decir, Z es el objeto cero en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$.

Ahora sean F y $G \in \mathbf{A}^{\mathbf{C}}$. Definimos el funtor

$$F \oplus G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$$

En objetos: si $C \in \mathbf{C} : F \oplus GC = FC \oplus GC$.
En morfismos: si $u : C \longrightarrow C' \in \mathbf{C}$, entonces $F \oplus Gu : FC \oplus GC \longrightarrow FC' \oplus GC'$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "Fu"] & FC' \\
FC \oplus GC \arrow[u, "\pi_{1_C}"] \arrow[d, "\pi_{2_C}"'] \arrow[r, dashed, "F \oplus Gu"] & FC' \oplus GC' \arrow[u, "\pi_{1_{C'}}"'] \arrow[d, "\pi_{2_{C'}}"] \\
GC \arrow[r, "Gu"] & GC'
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que el funtor $F \oplus G$ preserva composiciones consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "Fu"] & FC' \arrow[r, "Fv"] & FC'' \\
FC \oplus GC \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "F \oplus Gu"] & FC' \oplus GC' \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed, "F \oplus Gv"] & FC'' \oplus G'' \arrow[u] \arrow[d] \\
GC \arrow[r, "Gu"'] & GC' \arrow[r, "Gv"'] & GC''.
\end{tikzcd}$$

y para mostrar que preserva identidades consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[rr, "1_{FC}"'] & & FC \\
FC \oplus GC \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, "1_{FC\oplus GC}"] & & FC \oplus GC \arrow[u] \arrow[d] \\
GC \arrow[rr, "1_{GC}"'] & & GC\,.
\end{tikzcd}$$

Hasta aquí hemos probado que $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ es una categoría aditiva.

Sea $\alpha : F \Longrightarrow G$ un morfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, veamos que α tiene kernel y cokernel.
Para el objeto $C \in \mathbf{C}$ tenemos el morfismo en $\mathbf{A}$ $\alpha_C : FC \longrightarrow GC$, el cual tiene kernel (KC, k_C), y para el morfismo en $\mathbf{C}$, $u : C \longrightarrow C'$, existe un único morfismo en $\mathbf{A}$, $KC \longrightarrow KC'$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
KC \arrow[r, dashed] \arrow[d, "k_C"'] & KC' \arrow[d, "k_{C'}"] \\
FC \arrow[r, "Fu"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & FC' \arrow[d, "\alpha_{C'}"] \\
GC \arrow[r, "Gu"] & GC'
\end{tikzcd}$$

$$C \xrightarrow{u} C'\,.$$

Hemos construido una pareja, (K, k), donde K es un objeto y $k : K \Longrightarrow F$ es un morfismo, ambos en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ de tal manera que $\alpha k = 0$. Mostremos que en efecto (K, k) es el kernel del morfismo α en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$.
Si (H, h) es otra pareja formada por un objeto H y un morfismo $h : H \Longrightarrow F$ en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ de tal manera que $\alpha h = 0$, entonces definimos la transformación natural $\phi : H \Longrightarrow K$ de la siguien forma:
Para $C \in \mathbf{C}$ existe un único morfismo en $\mathbf{A}$, $\phi_C : HC \to KC$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
HC \arrow[d, dashed, "\phi_C"'] \arrow[dr, "h_C"] & & \\
KC \arrow[r, "k_C"'] & FC \arrow[r, "\alpha_C"'] & GC\,.
\end{tikzcd}$$

Por tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, Rightarrow, "\phi"'] \arrow[dr, Rightarrow, "h"] & & \\
K \arrow[r, Rightarrow, "k"'] & F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & G\,.
\end{tikzcd}$$

De igual forma se construye el cokernel del morfismo α.

Ahora supongamos que $\alpha : F \Longrightarrow G$ es un monomorfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, y sea (K^*, k^*) el cokernel de α

$$F \overset{\alpha}{\Longrightarrow} G \overset{k^*}{\Longrightarrow} K^*\,.$$

Mostremos que (F,α) es el kernel de k^*. Sea (H,h) una pareja formada por un objeto H y un morfismo $h : H \Longrightarrow G$ en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ tal que $k^*h = 0$

Observemos lo siguiente, dado que $\mathbf{A}$ es una categoría abeliana, $\mathbf{A}$ es una categoría finitamente completa y finitamente cocompleta ([3], proposición 1.5.3) por tanto $\mathbf{A}$ tiene productos. Dado que α es un monomorfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$, para cada $C \in \mathbf{C}$, α_C es un monomorfismo en $\mathbf{A}$ ([2], corolario 2.15.3). Por lo cual existe un único morfismo en $\mathbf{A}$, $\phi_C : HC \longrightarrow FC$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\alpha_C"] & GC \arrow[r, "k^*_C"] & K^*C \\
H \arrow[u, dashed, "\phi_C"] \arrow[ur, "h_C"] & &
\end{tikzcd}$$

Obteniendo una única transformación natural $\phi : H \Longrightarrow F$ que factoriza a h a través de α.
De igual forma se muestra que cualquier epimorfismo en $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ es el cokernel de su kernel. $\square$

De aquí en adelante denotaremos el kernel de un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ por $ker(f) : Ker(f) \longrightarrow X$, y el cokernel de f por $coker(f) : Y \to Coker(f)$.

Proposición A.2.21. En una categoría abeliana $\mathbf{A}$, cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ tiene una única factorización $f = me$ donde m es un monomorfismo y e es un epimorfismo, más aún $m = ker(coker(f))$ y $e = coker(ker(f))$.

De la factorización anterior, la imagen de f es definida como

$$m = img(f) : Img(f) \longrightarrow Y$$

y e es llamado la coimagen de f.

Apéndice B

Semigrupos inversos y grupoides

Daremos algunas definiciones y resultados básicos acerca de la teoría de semigrupos inversos. Para un estudio más profundo acerca del tema el lector puede referir a: [10] .

B.1. Semigrupos inversos

Un conjunto S junto con una operación binaria, la cual llamaremos producto y denotaremos por concatenación, es un *semigrupo* si la operación es asociativa; esto es para cualquier $x,y,z \in S:\ (xy)z = x(yz)$. Un elemento $e \in S$ es llamado un *idempotente* si $ee = e$. Denotamos al conjunto de idempotentes de S por $E(S)$. Si un semigrupo S contiene un elemento, 1, con la propiedad $1x = x = x1$ para cualquier $x \in S$, entonces S es llamado un *monoide*.
Un subconjunto no vacio T de un semigrupo S es llamado un subsemigrupo de S, si es cerrado bajo el producto. Sean S y T semigrupos. Se define un *homomorfismo de semigrupos* como una funcion $f : S \longrightarrow T$, con la propiedad de preservar productos, esto es, para cualquier $x,y \in S:\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Definición B.1.1. Un semigrupo S es un *semigrupo inverso*, si:

(1) S es *regular*, esto significa que para cada $s \in S$ existe un elemento $t \in S$, llamado un inverso, el cual satisface $s = sts$ y $t = tst$.

(2) Los idempotentes de S conmutan.

Consideremos el siguiente teorema.

Teorema B.1.2. Sea S un semigrupo regular, entonces los idempotentes de S conmutan si, y sólo si, cualquier elemento de S tiene un inverso único.

Como consecuencia del teorema anterior, cualquier elemento s de un semigrupo inverso S tiene un único inverso, el cual lo denotaremos por s^{-1}, en S. Además s^{-1} satisface: $s = ss^{-1}s$ y $s^{-1} = s^{-1}ss^{-1}$.
Un subconjunto de un semigrupo inverso S es llamado un *subsemigrupo inverso* de S, si es un semigrupo inverso

con respecto al producto de S.

Destacamos algunas propiedades del elemento s^{-1} . Para un estudio más amplio sugerimos:

Proposición B.1.3. Sea S un semigrupo inverso.

(1) Para cualquier $s \in S$, $s^{-1}s$ y ss^{-1} son idempotentes, además $s(s^{-1}s) = s$ y $(ss^{-1})s = s$.

(2) $(s^{-1})^{-1} = s$ para cualquier $s \in S$.

(3) Para cualquier idempotente $e \in S$ y cualquier $s \in S$, el elemento $s^{-1}es$ es un idempotente.

(4) Si e es un idempotente en S, entonces $e^{-1} = e$.

(5) $(s_1 \dots s_n)^{-1} = s_n^{-1} \dots s_1^{-1}$ para todo $s_1, \dots, s_n \in S$, donde $n \geq 2$.

Notemos que el idempotente ss^{-1} se comporta como una identidad izquierda para el elemento s, mientras que $s^{-1}s$ se comporta como una identidad derecha para s. Escribiremos $d(s) = s^{-1}s$ y $r(s) = ss^{-1}$.

Proposición B.1.4. Un grupo, es un semigrupo inverso con sólo un idempotente.

B.2. El orden parcial natural

Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in X$. Si el ínfimo de $\{x, y\}$, bajo la relación de orden $\leq$, existe, lo denotaremos por $x \wedge y$. Análogamente, denotamos el supremo de $\{x, y\}$ (cuando esté existe) como $x \vee y$. Una *semirretícula inferior* es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualquier par de elementos tiene un ínfimo. Una *semirretícula superior* es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualquier par de elementos tiene un supremo. Una *retícula* es una semirretícula inferior y superior.
Sean X y Y conjuntos parcialmente ordenados. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es*preservadora de orden* si $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$, para cualquier $a, b \in X$.
Definimos un orden parcial, $\leq$, sobre el semigrupo inverso S. Sean $s, t \in S$:

$$s \leq t \quad \text{si, y sólo si,} \quad s = te$$

para algún idempotente e. Este orden definido es llamdo el *orden parcial natural* sobre S .
Tenemos los siguientes resultados.

Proposición B.2.1. Sea S un semigrupo inverso.

(1) La relación $\leq$ es un orden parcial sobre S .

(2) Para cualesquiera idempotentes $e, f \in S$: $e \leq f$ si, y sólo si, $e = ef = fe$.

(3) Si $s \leq t$ y $u \leq v$ entonces $su \leq tv$.

(4) Si $s \leq t$ entonces $d(s) \leq d(t)$ y $r(s) \leq r(t)$.

(5) $E(S)$ es una semirretícula inferior .

El siguiente resultado ofrece diferentes caracterizaciones con respecto al orden parcial natural sobre S.

Proposición B.2.2. Sea S un semigrupo inverso. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) $s \leq t$.

(2) $s = ft$ para algún idempotente f.

(3) $s^{-1} \leq t^{-1}$.

(4) $s = r(s)t$.

(5) $s = td(s)$.

B.3. Grupoides

Iniciaremos está sección retomando una definición en la teoría de semigrupos inversos. Para un estudio posterior sobre grupoides el lector puede consultar los siguientes textos: [10] y [6]

Definición B.3.1. Sea S un semigrupo inverso. Definimos un producto parcial $\cdot$ sobre S. Sean $s, t \in S$, el *producto restringido* $s \cdot t$ existe unicamente cuando $s^{-1}s = tt^{-1}$, en cuyo caso es igual a st. Así $s \cdot t$ existe precisamente cuando $d(s) = r(t)$.

Lema B.3.2. Sea S un semigrupo inverso. Si $s \cdot t$ existe entonces $d(s \cdot t) = d(st) = d(t)$ y $r(s \cdot t) = r(st) = r(s)$ para cualquier $s, t \in S$.

El producto restringido es importante debido a que permite generar de cada semigrupo un subyacente grupoide. Categorías son usualmente consideradas como categorías de estructuras con morfismos. Sin embargo, pueden también ser consideradas como estructuras algebraicas no diferentes de grupos y anillos, con la excepción de que la operación binaria es únicamente definida de manera parcial. A continuación definimos categorías desde un punto de vista puramente algebraico, cabe mensionar que esta definición es equivalente a la definición A.1.2.

Definición B.3.3. Sea C un conjunto equipado con una operación parcial la cual denotaremos por $\cdot$ ó por concatenación. Si $x, y \in C$ y el producto xy está definido, lo denotamos por existe xy. Un elemento $e \in C$ es llamado una identidad si, existe ex e implica $ex = x$ y existe xe e implica $xe = x$. El conjunto de identidades de C es denotado por C_0. El par $(C, \cdot)$, o simplemente $\mathbf{C}$, se dice que es una *categoría* si satisface los siguientes axiomas:

(1) $x(yz)$ existe si, y sólo si, $(xy)z$ existe, en cuyo caso son iguales.

(2) $x(yz)$ existe si, y sólo si, xy y yz existen.

(3) Para cualquier $x \in C$ existen identidades e y f tales que existe xe y existe fx.

Como consecuencia del axioma (3), las identidades e y f están unívocamente determinadas por x.
Escribimos $e = d(x)$ y $f = r(x)$, donde $d(x)$ es la identidad dominio y $r(x)$ es la identidad rango. Observemos que existe xy si, y sólo si, $d(x) = r(y)$.
Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ categorías, entonces una función $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es un funtor si

$$F(d(x)) = d(F(x)) \quad \text{y} \quad F(r(x)) = r(F(x))$$

para todo $x \in \mathbf{C}$, y $F(xy) = F(x)F(y)$ para todo $x, y \in \mathbf{C}$, siempre que existe xy.

Definición B.3.4. Una categoría G es un *grupoide* si, para cualquier $x \in G$ existe un elemento $x^{-1} \in G$ tal que $x^{-1}x = d(x)$ y $xx^{-1} = r(x)$.

Proposición B.3.5. Cualquier semigrupo inverso S es un grupoide con respecto a su producto restringido. A este grupoide lo llamaremos el grupoide asociado de S.

Un grupoide con una identidad es un grupo. Un morfismo entre dos grupoides es un funtor. Los grupoides junto con sus morfismos forman una categoría, la cual denotaremos por **Grpd**.

Definición B.3.6. Sean G un grupoide y $\leq$ un orden parcial definido sobre G. Entonces $(G, \leq)$ es un *grupoide ordenado* si satisface los siguientes axiomas:

(1) $x \leq y$ implica $x^{-1} \leq y^{-1}$, para todo $x, y \in G$.

(2) Para todo $x, y, u, v \in G$, si $x \leq y$, $u \leq v$, existe xu y existe yv, entonces $xu \leq yv$.

(3) Sean $x \in G$ y e una identidad tal que $e \leq d(x)$, entonces existe un único elemento $(x|e)$, llamado la *restricción* de x a e, tal que $(x|e) \leq x$ y $d((x|e)) = e$.

(4) Sean $x \in G$ y e una identidad tal que $e \leq r(x)$, entonces existe un único elemento $(e|x)$, llamado la *correstricción* de x a e, tal que $(e|x) \leq x$ y $r((e|x)) = e$.

Un grupoide ordenado es *inductivo* si el conjunto parcialmente ordenado de sus identidades forma una semirreticula inferior.

Proposición B.3.7. Sea G un grupoide ordenado.

(1) Si $x \leq y$, entonces $d(x) \leq d(y)$ y $r(x) \leq r(y)$.

(2) Si $x, y \in G$, con $x \leq y$, $d(x) = d(y)$ y $r(x) = r(y)$, entonces $x = y$.

(3) Si $x, y \in G$ y $e \in G_o$ tal que existe xy y $e \leq d(y)$, entonces $(xy|e) = (x|r((y|e)))(y|e)$.

Sean G y H grupoides ordenados, con $\theta : G \longrightarrow H$ un funtor. Entonces θ es un funtor ordenado si para cualquier $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1 \leq g_2$ implica $\theta(g_1) \leq \theta(g_2)$. Si un funtor ordenado $\theta : G \longrightarrow H$ es una inclusión de subconjuntos, entonces decimos que G es un subgrupoide ordenado de H.
Sean G un grupoide ordenado y A un subgrupoide ordenado de G. Entonces A es un subgrupoide ordenado normal de G si satisface las siguientes condiciones:

(i) $G_o = A_o$ y para todo $a \in A$: $d(a) = r(a)$.

(ii) $gag^{-1} \in A$ para todo $g \in G$ y $a \in A$ con $d(g) = d(a)$.

Definición B.3.8. Un *prehomomorfismo* es una función , $\theta : S \longrightarrow T$, entre semigrupos inversos tal que para cualquier $s,t \in S$, $\theta(st) \leq \theta(s)\theta(t)$.

El siguiente teorema implica que cualquier prehomomorfismo entre semigrupos inversos induce un funtor entre sus grupoides asociados. La prueba se encuentra en [10], teorema 3.1.5 .

Teorema B.3.9. Sea $\theta : S \longrightarrow T$ una función entre semigrupos inversos. Entonces θ es un prehomomorfismo si, y sólo si, preserva el producto restringido y el orden parcial natural. La compisición de dos prehomomorfismos es un prehomomorfismo.

Semigrupos inversos junto con prehomomorfismos forman una categoría. El siguiente resultado prueba como el producto usual puede ser reconstuido a partir del producto restringido y el orden parcial natural.

Teorema B.3.10. Sea S un semigrupo inverso.

(i) Sean $s \in S$ y $e \in E(S)$ tales que $e \leq s^{-1}s$, entonces $a = se$ es el único elemento de S tal que $a \leq s$ y $a^{-1}a = e$.

(ii) Sean $s \in S$ y $e \in E(S)$ tales que $e \leq ss^{-1}$, entonces $a = es$ es el único elemento de S tal que $a \leq s$ y $aa^{-1} = e$.

(iii) Sean $s,t \in S$, entonces $st = s' \cdot t'$, donde $s' = se$, $t' = et$ y $e = s^{-1}stt^{-1}$.

Demostración. La demostracion se encuentra en el teorema 3.1.2 de [10] .

Proposición B.3.11. Sea S un semigrupo inverso. Entonces el grupoide asociado con S es un grupoide inductivo con respecto al orden parcial natural.

Los grupoides inductivos asociados con un semigrupo inverso S son denotados por $\mathcal{G}(S)$.
Sean G un grupoide ordenado y $g, h \in G$ tal que $e = d(g) \wedge r(h)$ existe. Denotamos por

$$g \otimes h = (g|e)(e|h)$$

y llamamos al elemento $g \otimes h$ el *seudoproducto* de g y h.

Proposición B.3.12. Sea G un grupoide inductivo.

(1) $(G, \otimes)$ es un semigrupo inverso, el cual denotaremos por $\mathcal{S}(G)$.

(2) $\mathcal{G}(\mathcal{S}(G)) = G$.

(3) Para cualquier semigrupo inverso S, $\mathcal{S}(\mathcal{G}(S)) = S$.

Por último, el siguiente teorema relevante que se encuentra en [10], teorema 4.1.7 .

Teorema B.3.13 (Ehresmann-Schein-Nambooripad)**.** La categoría de semigrupos inversos y prehomomorfismos es isomorfa a la categoría de grupoides inductivos y funtores ordenados, y la categoría de semigrupos inversos y homomorfismos es isomorfa a la categoría de grupoides inductivos y funtores inductivos.

Bibliografía

[1] Barr, Michael y Wells, Charles, *Toposes, Triples and Theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 1, (2005).

[2] Borceux, Francis, *Handbook of Categorical Algebra vol. 1*, Cambridge University Press (1994).

[3] Borceux, Francis, *Handbook of Categorical Algebra vol. 2*, Cambridge University Press (1994).

[4] Brown, R., *Topology and Groupoids*, http://groupoids.org.uk/ (2006).

[5] Bucur, Ion y Deleanu, Aristide , *Introduction to the Theory of Categories an Functors*, John Wiley and Sons (1968).

[6] Higgins, Philip J., *Notes on Categories and Grupoids*, Van Nostrand Reinhold (1971).

[7] Howie, John M., *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press (1995).

[8] Kashiwara, Masaki y Schapira, Pierre, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).

[9] Lausch, Hans, *Cohomology of Inverse Semigroups*, Journal Algebra, 35, 273-303 (1974).

[10] Lawson, Mark V., *Inverse Semigroups the Theory of Partial Symmetries*, World Scientific (1998).

[11] Loganathan, M., *Cohomology of Inverse Semigroups*, Journal Algebra, 70, 375-393 (1981).

[12] MacLane, S., *Homology*, Springer-Verlag (1963).

[13] Moerdijk, Ieke, *Notes on Homological Algebra*, University of Utrecht (2008).

[14] Popescu, Nicolae, *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, Academic Press, London (1973).

[15] Popescu, Nicolae y Popescu, Liliana, *Theory of Categories*, Academie Republicii Socialiste *România* (1979).

[16] Renault, J., *A Grupoid Approach to C^*-Algebras*, no. 783 in Lecture Notes in Mathematic, Springer-Verlag (1980).

[17] Rotman, J.J., *Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag New York (1995).

[18] Rotman, J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, Springer-Verlag (2009).

[19] Steinberg, B., *Factorisation Theorems for Morphisms of Ordered Groupoids and Inverse Semigroups*, Proc. Edinburgh Math. Soc, 44, 549-569 (2001).

[20] Torres, J. Amalia, *Teoría de Homotopía de Semigrupos Inversos*, Tesis de la FCFM-BUAP (2007).

[21] Weibel, Charles A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press (1994).