



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Tesis

que para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

José Antonio Cariño Ortega

Asesor

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

José Antonio Cariño Ortega

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

PUEBLA, PUE.

Mayo 2013

*A mis padres,
Silverio Cariño Balbuena
y Margarita Ortega Benítez.*

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

José Antonio Cariño Ortega

Mayo 2013

Prólogo

En este trabajo de tesis se desarrolla un tema clásico de estudio en el análisis de Fourier. La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$, además de ser objeto de estudio para las matemáticas, es también tema de interés en disciplinas como la ingeniería, la electrónica, la física entre otras.

La teoría expuesta en este trabajo contiene muchos de los resultados más conocidos de la transformada de Fourier. Uno de ellos es el Teorema de Inversión, donde la idea del teorema es que dada una función f , la transformada de Fourier inversa aplicada a la transformada de Fourier de f resulta en la función original. Este teorema da pauta a los métodos de sumabilidad que también estudiaremos en esta tesis.

La presente tesis tuvo como referencia principal el libro “Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier” de J. Duoandikoetxea [4]. Sin embargo demostraciones como el Lema 2.4, el Teorema de Inversión entre otros resultados, son propios de este trabajo de tesis. La teoría se desarrolla en 6 capítulos. En el Capítulo 1 se da una introducción de la transformada de Fourier a través de la serie. Esto es, se relacionan los coeficientes de Fourier con la transformada y la convergencia de la serie con la transformada inversa.

En el Capítulo 2 se define la transformada de Fourier de manera formal y se estudian las primeras propiedades algebraicas y analíticas.

En el Capítulo 3 se evalúan algunas transformadas de funciones elementales en el Análisis de Fourier, pero más aún estas funciones serán útiles en el desarrollo de la teoría de los capítulos siguientes.

En el Capítulo 4 se exponen definiciones y resultados fundamentales del Análisis de Fourier, además de un teorema de inversión para intentar recuperar la función, conocida su transformada de Fourier. Sin embargo $\hat{f}$ podría no ser integrable, y puede haber un problema con la inversión, como veremos más adelante. En este trabajo la demostración del Teorema de Inversión tiene cierta originalidad.

En el Capítulo 5 se estudian los núcleos de sumabilidad. La importancia de éstos, reside en intentar recuperar la función de manera alternativa al

II

teorema de inversión, el principio de estos núcleos está basado en estudiar la convergencia de la integral dada en el Teorema de Inversión. En esta tesis se desarrollan 3 de estos núcleos y es uno de los temas principales del trabajo.

Finalmente en el Capítulo 6, se expone una aplicación de la Transformada de Fourier aplicado en la difracción y formación de imágenes.

Índice general

Prólogo	I
1. Introducción al análisis de Fourier	1
1.1. Desarrollo histórico	1
1.2. De las series de Fourier a la transformada de Fourier	2
1.3. Forma compleja de la serie de Fourier.	3
1.4. Motivación de la transformada y formula de inversión.	5
2. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$	7
2.1. Propiedades algebraicas	7
2.2. Propiedades analíticas	10
3. Evaluación de transformadas de Fourier	17
4. Resultados y teoremas fundamentales	29
4.1. Modos de Convergencia	29
4.2. Kernel de Dirichlet y Sumas Parciales Simétricas	31
4.3. Lema de Riemann-Lebesgue	34
4.4. Un Teorema de Inversión	36
4.5. Teorema de Dini	39
4.6. Convolución	40
5. Métodos de sumabilidad	42
5.1. Sumabilidad Cesàro.	42
5.2. Sumabilidad de Abel-Poisson.	43
5.3. Sumabilidad de Gauss - Weierstrass.	48
5.4. Resultados de los núcleos de Fejér, Poisson y Gauss	49
6. Una aplicación	56

Conclusión	59
Anexo	60
A. Sucesiones de funciones	60
A.1. Convergencia uniforme y continuidad	61
A.2. Convergencia uniforme e integración	61
A.3. Convergencia uniforme de series de funciones	63
B. Teoremas de convergencia en la integral de Lebesgue	65
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción al análisis de Fourier

1.1. Desarrollo histórico

Fourier en su libro titulado *Théorie analytique de la chaleur* y publicado en 1822, expone la teoría matemática de las leyes de propagación del calor, además, desde el punto de vista físico, Fourier fue el primero en deducir la ecuación diferencial que describe la difusión del calor e inventó el método de separación de variables para su resolución, reconoció la potencia de este método. Fue también conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas ahora series de Fourier.

El problema de la representación de una función en serie trigonométrica tenía precedentes en el siglo XVIII. Fue con los intentos de resolver el problema de la cuerda vibrante donde la influencia de la teoría de las series trigonométricas repercutió más tarde en la clarificación de conceptos como: función, continuidad, integral, serie, convergencia etc. Por ello las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. En épocas más recientes, la integral de Lebesgue se desarrolló en estrecha conexión con la teoría de series de Fourier y la teoría de funciones generalizadas con las integrales de Fourier.

1.2. De las series de Fourier a la transformada de Fourier

Las series de Fourier representan funciones definidas en un intervalo de la recta o, equivalentemente funciones periódicas de la recta. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas, debemos introducir los conceptos de transformada y transformada inversa de Fourier. Podemos deducir estos conceptos, a partir de la serie de Fourier.

Se llama serie trigonométrica de periodo 2π a la serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \quad (1.1)$$

Dada una función periódica de periodo 2π buscamos una serie trigonométrica que coincida con ella. Supongamos que la serie (1.1) converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a la función f , por lo que se tiene la igualdad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \quad (1.2)$$

Luego, si integramos en $[-\pi, \pi]$, por la convergencia uniforme y considerando que las integrales de $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ son cero, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

Multiplicando la igualdad (1.1) por $\cos kx$ e integrando en $[-\pi, \pi]$, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi a_k.$$

Haciendo algo semejante para $\operatorname{sen} kx$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \pi b_k.$$

Así, los valores de los coeficientes de la serie en (1.2) son los siguientes

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, & \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. & \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definición 1.1. Dada una función integrable f , los números $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ y $\{b_k, k = 1, 2, \dots\}$ dados en (1.3) se llaman coeficientes de Fourier de f . La serie trigonométrica (1.1) construida con estos coeficientes se llama serie de Fourier de f .

Consideramos funciones periódicas de periodo 2π . Si el periodo es $2l$, la serie trigonométrica toma la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{\pi kx}{l} \right). \quad (1.4)$$

Los coeficientes también se adaptan y quedan expresados como

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi kx}{l} \, dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi kx}{l} \, dx. \quad (1.5)$$

1.3. Forma compleja de la serie de Fourier.

La forma trigonométrica de la serie de Fourier de una función f , periódica de periodo l puede adoptar otra expresión en términos de funciones exponenciales como mostraremos a continuación. Haciendo

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi kx}{l} &= \frac{e^{\pi ikx/l} + e^{-\pi ikx/l}}{2}, \\ \sin \frac{\pi kx}{l} &= \frac{e^{\pi ikx/l} - e^{-\pi ikx/l}}{2i}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 a_k \cos \frac{\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{\pi kx}{l} &= a_k \left(\frac{e^{\pi i kx/l} + e^{-\pi i kx/l}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{\pi i kx/l} - e^{-\pi i kx/l}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} [a_k(e^{\pi i kx/l} + e^{-\pi i kx/l}) - ib_k(e^{\pi i kx/l} - e^{-\pi i kx/l})] \\
 &= \frac{1}{2} [a_k e^{\pi i kx/l} + a_k e^{-\pi i kx/l} - ib_k e^{\pi i kx/l} + ib_k e^{-\pi i kx/l}] \\
 &= \frac{1}{2} [(a_k - ib_k)e^{\pi i kx/l} + (a_k + ib_k)e^{-\pi i kx/l}].
 \end{aligned}$$

Ahora definiendo $b_0 = 0$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ y siendo a $\overline{c_k}$ su conjugado, la serie de Fourier tiene la siguiente forma

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{\pi i kx/l} + \overline{c_k} e^{-\pi i kx/l}).$$

Luego, como $\sin \frac{kx}{l}$ es impar y $\cos \frac{kx}{l}$ es par, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $c_{-k} = \overline{c_k}$. Por lo que

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{\pi i kx/l} + c_{-k} e^{-\pi i kx/l}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\pi i kx/l}.$$

Esta última expresión se conoce como la forma compleja de la serie de Fourier.

1.4. Motivación de la transformada y formula de inversión.

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier para $f \in L_1[-l, l]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\pi i k x / l} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - i b_k) e^{\pi i k x / l} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx - \frac{i}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \right) e^{\pi i k x / l} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \left[\int_{-l}^l \left(f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} - i f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \right) dx \right] e^{\pi i k x / l} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \pi k x / l} dx \right] e^{\pi i k x / l} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{i \pi k x / l},
 \end{aligned}$$

donde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \pi k x / l} dx.$$

Si suponemos, que la serie converge uniformemente a la función f , y asumiendo que el limite existe cuando $l \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{\pi i k x / l} \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \pi k x / l} dx \right] e^{\pi i k x / l}.
 \end{aligned}$$

Haciendo $\xi_k = \frac{k\pi}{l}$ ($k \in \mathbb{Z}$) y $\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k = \pi/l$, tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \pi k x / l} dx \right] e^{i \pi k x / l} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\Delta \xi_k \int_{-l}^l f(x) e^{-i \xi_k x} dx \right] e^{i \xi_k x}.$$

Definiendo $h(\xi) = \int_{-l}^l f(x)e^{-i\xi x} dx$ tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\Delta \xi_k \int_{-l}^l f(x)e^{-i\xi_k x} dx \right] e^{i\xi_k x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(\xi_k) e^{i\xi_k x} \Delta \xi_k.$$

Debido a que $\Delta \xi_k = \pi/l \rightarrow 0$ cuando $l \rightarrow \infty$, tenemos que la suma de la derecha de la igualdad anterior es una suma de Riemann para $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{i\xi x} d\xi$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right] e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para cualquier $f \in L_1(\mathbb{R})$, la integral interior $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy$ existe, y definimos así la transformada de Fourier de f como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dx.$$

Con esta notación la ecuación (1.6) se convierte en la fórmula de inversión y se define de la siguiente manera

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Esta última integral puede no existir en el sentido de Lebesgue. Es por este hecho que el problema de inversión de la transformada de Fourier es uno de los más importantes en el análisis de Fourier.

La teoría de la transformada de Fourier se puede desarrollar con la integral de Riemann, pero ahora resulta mejor razonar con la de Lebesgue y es precisamente lo que vamos a hacer en este trabajo.

Recordemos que el espacio $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mu_L, m)$, donde μ_L es la sigma álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y m es la medida de Lebesgue. Se define como el espacio de todas las clases μ_L equivalentes de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (ó $\mathbb{R}$) tales que $|f|$ tiene integral finita con respecto a m bajo $\mathbb{R}$.

Así, de ahora en adelante si nos referimos a una función integrable, lo entenderemos en el sentido de Lebesgue.

Capítulo 2

La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definición 2.1. Sea f una función integrable definida en $\mathbb{R}$. Su transformada de Fourier será la función definida también en $\mathbb{R}$, que representamos como $\hat{f}$, dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Definición 2.2. La transformada inversa de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ esta definida por

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Inicialmente repasamos las propiedades básicas de la transformada para después abordar nuestro tema principal.

2.1. Propiedades algebraicas

Teorema 2.3. Sean $\alpha, \beta, \lambda, h \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se satisfacen las siguientes propiedades

1. Linealidad: $(\alpha f + \beta g)^{\wedge} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.
2. Conjugación: $(\bar{f})^{\wedge}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.
3. Traslación: si $\tau_h f(x) = f(x+h)$, entonces $(\tau_h f)^{\wedge}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$.
4. Modulación: si $g(x) = f(x)e^{2\pi i h x}$, entonces $\hat{g}(\xi) = (\tau_{-h}\hat{f})(\xi)$.
5. Dilatación: si $g(x) = \lambda^{-1}f(\lambda^{-1}x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$.

Demostración. 1) Se sigue de la definición y de la linealidad de la integral.

2) Sean f_1 y f_2 funciones reales definidas en $\mathbb{R}$ tales que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$. Se tiene que $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. La demostración de la conjugación la realizamos a continuación

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{f}(-\xi)} &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) + if_2(x)) e^{2\pi i x \xi} dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) + if_2(x)) (\cos 2\pi x \xi + i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) (\cos 2\pi x \xi + i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) + if_2(x) (\cos 2\pi x \xi + i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cos 2\pi x \xi + if_1(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi + if_2(x) \cos 2\pi x \xi - f_2(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cos 2\pi x \xi - f_2(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi + i \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi + f_2(x) \cos 2\pi x \xi dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cos 2\pi x \xi - f_2(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi - i \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \operatorname{sen} 2\pi x \xi + f_2(x) \cos 2\pi x \xi dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) - if_2(x)) \cos 2\pi x \xi - i(f_1(x) - if_2(x)) \operatorname{sen} 2\pi x \xi dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) - if_2(x)) (\cos 2\pi x \xi - i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) - if_2(x)) e^{-2\pi i x \xi} dx} \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-2\pi i x \xi} dx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{f})^{\wedge}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

3) Sean $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Por la definición de la transformada de Fourier tenemos:

$$(\tau_h f)^{\wedge}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = x + h$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\tau_h f)^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i(u-h)\xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u \xi + 2\pi i h \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u \xi} e^{2\pi i h \xi} dx \\
&= \hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}.
\end{aligned}$$

4) Sea $g(x) = f(x)e^{2\pi i h x}$, luego aplicando la transformada de Fourier a g , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)e^{2\pi i h x}) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x(\xi-h)} dx \\
&= \hat{f}(\xi - h) \\
&= (\tau_{-h} \hat{f})(\xi).
\end{aligned}$$

5) Sea $g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x)$ y $\lambda > 0$, haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}
u &= \lambda^{-1} x, \\
x &= u \lambda, \\
dx \lambda^{-1} &= du,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u(\lambda \xi)} du \\
&= \hat{f}(\lambda \xi).
\end{aligned}$$

□

2.2. Propiedades analíticas

Antes de pasar a las propiedades analíticas (Teorema 2.5) proporcionamos un lema que será necesario para la demostración de la segunda propiedad analítica del teorema siguiente. La demostración es original.

Lema 2.4. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Demostración. La prueba se hace por contradicción, como $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, entonces podemos considerar los 3 casos siguientes.

Caso 1. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b < \infty$, donde $b \neq 0$, entonces dado $\epsilon = \frac{|b|}{2}$ existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{si } x > M.$$

Esto nos dice que

$$|b| - |f(x)| < \frac{|b|}{2} \quad \text{si } x > M.$$

Por lo que

$$\frac{|b|}{2} < |f(x)| \quad \text{si } x > M.$$

Por lo tanto

$$\infty = \int_M^\infty \frac{|b|}{2} dx < \int_M^\infty |f(x)| dx.$$

Llegamos a que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, lo cual es una contradicción.

Caso 2. Ahora supongamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, entonces para cada número positivo M existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(x) > M \quad \text{si } x > \alpha.$$

Entonces

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\infty} M dx = \infty \quad \text{si } x > \alpha.$$

Llegamos a que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, lo cual es una contradicción.

Caso 3. Si suponemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, entonces para cada número positivo M existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(x) < -M \quad \text{si } x > \alpha.$$

Entonces

$$-\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\infty} M dx = \infty \quad \text{si } x > \alpha.$$

Llegamos a que $f \notin L^1(\mathbb{R})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. $\square$

En $L^1(\mathbb{R})$ las siguientes propiedades tienen diversas aplicaciones. Por ejemplo en la solución de ecuaciones diferenciales, o apoyo para obtener otros resultados dentro de la propia teoría de Fourier.

Teorema 2.5 (Propiedades analíticas). *La transformada de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R})$, tiene las siguientes propiedades.*

1. $\hat{f}$ es una función (uniformemente) continua y $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.
2. Si f y f' son integrables, $(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.
3. Si $xf(x)$ es integrable, $\hat{f}$ es derivable y $(-2\pi i x f)^{\wedge}(\xi) = (\hat{f})'(\xi)$.
4. Si f y g son integrables, $\int f(\xi) \hat{g}(\xi) = \int \hat{g}(x) f(x)$.

Demostración. 1) Si $\|f\|_1 = 0$ entonces $\hat{f}(\xi)$ cumple con la continuidad uniforme, veamos entonces el otro caso.

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-2\pi i x \xi}| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i x \xi}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ahora veamos la continuidad uniforme de $\hat{f}$. Sean ξ, h en $\mathbb{R}$ con $h > 0$.

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| &= |\hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi} - \hat{f}(\xi)| \\
&= |\hat{f}(\xi) (e^{2\pi i h \xi} - 1)| \leq \|f\|_1 |e^{2\pi i h \xi} - 1|.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Observemos: $\lim_{h \rightarrow 0} e^{2\pi i h \xi} = 1$. Así, dado $\frac{\epsilon}{\|f\|_1} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|e^{2\pi i h \xi} - 1| < \frac{\epsilon}{\|f\|_1} \quad \text{si } |h| < \delta.$$

Es decir, de (2.2) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 |e^{2\pi i h \xi} - 1| &< \|f\|_1 \frac{\epsilon}{\|f\|_1} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{f}(\xi)$ es una función uniformemente continua.

2) Como f es derivable entonces f es continua. Sean a_n y b_n sucesiones que tienden respectivamente a $-\infty$ y $+\infty$. Haciendo tender n a infinito aplicamos el Lema (2.4) e integramos por partes para obtener

$$\begin{aligned}
(f')^\wedge(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(b_n) e^{-2\pi i b_n \xi} - f(a_n) e^{-2\pi i a_n \xi} + 2\pi i \xi \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right) \\
&= 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

3) Para calcular la derivada de $\hat{f}$ lo hacemos derivando bajo el signo de la integral. La integrabilidad de $xf(x)$ es suficiente para ello.

La función $f(x, \xi) = f(x)e^{-2\pi i x \xi}$ está definida en $\mathbb{R} \times (-\infty, \infty)$. Para cada ξ , la función $f(x, \xi)$ es integrable en $\mathbb{R}$ y definimos

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, \xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \end{aligned}$$

Vemos que la función $f(x, \xi)$ es derivable en un entorno de ξ_0 , además

$$\frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} = -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi},$$

y

$$|-2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi}| = |2\pi x f(x)| \quad c.t.p.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada podemos derivar bajo el signo de la integral, entonces F es derivable y

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= (-2\pi i x f(x))^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

4) Tenemos, por definición, que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx d\xi, \end{aligned}$$

Luego si $h(\xi, x) = f(\xi)g(x)e^{-2\pi i \xi x}$, observamos que para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, $h(\xi, x) \in L^1(\mathbb{R})$ como una función de x , así también $\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, x) d\xi$

es integrable como una función de ξ . Podemos aplicar el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x)e^{-2\pi i\xi x} dx d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2\pi i\xi x} d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\hat{f}(x) dx \end{aligned}$$

□

A continuación proporcionamos un lema que será necesario para el teorema 2.7.

Lema 2.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-a}} = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. (Como corolario de este hecho, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.)*

El teorema siguiente nos proporciona una propiedad bajo la cual la transformada de Fourier no solo es continua sino a la vez analítica. Recordemos que significa que una función sea analítica.

Definición 2.7. *Sea I un intervalo abierto $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ función, decimos que f es analítica en $x_0 \in I$, si existe $r > 0$ y $\{a_n\}$ sucesión de números reales tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \text{para} \quad |x - x_0| < r,$$

donde $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$.

Definición 2.8. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Decimos que f tiene soporte compacto si la cerradura de $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es compacto.*

Este concepto lo emplearemos en el siguiente teorema. En el capítulo 4 lo usaremos nuevamente para describir otras propiedades de la transformada de Fourier.

Teorema 2.9. *Si f es de soporte compacto, $\hat{f}$ es analítica.*

Demostración. Supongamos que f se anula fuera de $[-A, A]$ entonces

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Sean $h(\xi) = e^{-2\pi i x \xi}$ y $a \in [-A, A]$. La serie de Taylor de h alrededor de a , se define como

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n(a)}{n!} (\xi - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{n!} e^{-2\pi i x a} (\xi - a)^n, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_A^A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{n!} e^{-2\pi i x a} (\xi - a)^n f(x) dx \\ &= \int_{-A}^A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i (\xi - a))^n}{n!} f(x) e^{-2\pi i x a} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i (\xi - a))^n}{n!} \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x a} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\xi - a)^n, \end{aligned}$$

donde

$$C_n = \frac{(2\pi i)^n}{n!} \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x a} x^n dx.$$

Observemos

$$\begin{aligned} |C_n| &\leq \left| \frac{(2\pi i)^n}{n!} \right| \int_{-A}^A |f(x) e^{2\pi i x a} x^n| \\ &\leq \frac{(2\pi)^n}{n!} \int_{-A}^A |f(x) A^n| dx \\ &= \frac{(2\pi A)^n}{n!} \int_{-A}^A |f(x)| dx \\ &= \frac{(2\pi A)^n}{n!} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Entonces el radio de convergencia es: $+\infty$, ya que

$$\begin{aligned}
 R^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2\pi A)^n \|f\|_1}{n!}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2\pi A)^n} \sqrt[n]{\|f\|_1}}{\sqrt[n]{n!}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi A \sqrt[n]{\|f\|_1}}{\sqrt[n]{n!}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Nuestra última igualdad es consecuencia del Lema 2.6 por tanto tenemos así una serie de potencias que converge en todo $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Evaluación de transformadas de Fourier

En este capítulo calculamos la transformada de Fourier de algunas funciones que tienen cierta importancia en el análisis de Fourier.

Ejemplo 3.1. Sea f la función característica del intervalo $[-1/2, 1/2]$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\text{sen } \pi \xi}{\pi \xi}.$$

Utilizando una función adecuada se puede deducir la transformada de Fourier de la función característica del intervalo $[a, b]$, veamos la prueba de ello.

Demostración. Calculamos la transformada de Fourier de la función característica.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (3.1)$$

Haciendo el cambio de variable $u = -2\pi i x \xi$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{u(-1/2)}^{u(1/2)} e^u \frac{du}{-2\pi i \xi} \\
&= \frac{1}{-2\pi i \xi} \int_{\pi i \xi}^{-\pi i \xi} e^u du \\
&= \frac{1}{2\pi i \xi} [e^u]_{-\pi i \xi}^{\pi i \xi} \\
&= \frac{1}{2\pi i \xi} (e^{\pi i \xi} - e^{-\pi i \xi}) \\
&= \frac{1}{2\pi i \xi} [\cos \pi \xi + i \sin \pi \xi - (\cos -\pi \xi - i \sin \pi \xi)] = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Ahora veamos como deducir a partir de aquí la transformada de Fourier de la función característica del intervalo $[a, b]$. Definimos la función biyectiva $x : [a, b] \rightarrow [-1/2, 1/2]$ como $x(t) = \frac{b-t}{a-b} + \frac{1}{2}$, observemos que $x(a) = -1/2$, $x(b) = 1/2$ y $\forall t \in [a, b]$, $x(t) \in [-1/2, 1/2]$.

Haciendo el cambio de variable, $x = \frac{b-t}{a-b} + \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{x(a)}^{x(b)} f\left(\frac{b-t}{a-b} + \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi i \left(\frac{b-t}{a-b} + \frac{1}{2}\right) \xi} \frac{1}{b-a} dt \\
&= \frac{1}{b-a} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \left(\frac{b-t}{a-b} + \frac{1}{2}\right) \xi} dt \\
&= \frac{1}{b-a} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \left(\frac{b}{a-b} - \frac{t}{a-b} + \frac{1}{2}\right) \xi} dt \\
&= \frac{e^{-2\pi i \left(\frac{b}{a-b} + \frac{1}{2}\right) \xi}}{b-a} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i t \frac{\xi}{b-a}} dt.
\end{aligned}$$

Por (3.1) y (3.2) sustituyendo ξ por $\frac{\xi}{b-a}$ tenemos, por lo tanto que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{-2\pi i \left(\frac{b}{a-b} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\xi}{b-a}\right)} \sin \pi \left(\frac{\xi}{b-a}\right)}{b-a} \frac{1}{\pi \left(\frac{\xi}{b-a}\right)}.$$

□

En el caso particular del intervalo $[-1/2, 1/2]$, tenemos $a = -1/2$ y $b = 1/2$ es decir:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\xi) &= \frac{e^{-2\pi i(\frac{b}{a-b} + \frac{1}{2})(\frac{\xi}{b-a})} \operatorname{sen} \pi(\frac{\xi}{b-a})}{b-a} = \frac{e^{-2\pi i(\frac{1/2}{-1/2-1/2} + \frac{1}{2})\xi} \operatorname{sen} \pi(\frac{\xi}{1/2-(-1/2)})}{1/2 - (-1/2)} \frac{1}{\pi(\frac{\xi}{1/2-(-1/2)})} \\
 &= \frac{e^{-2\pi i(\frac{1/2}{-1} + \frac{1}{2})\xi} \operatorname{sen} \pi(\frac{\xi}{1})}{1} \frac{1}{\pi(\frac{\xi}{1})} \\
 &= \frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\xi} \operatorname{sen} \pi(\xi)}{1} \frac{1}{\pi(\xi)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \pi(\xi)}{\pi(\xi)}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. Sea $f(x) = e^{-\pi|x|}$; entonces,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Demostración. Por definición, la transformada de Fourier de la función f viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} (\cos 2\pi x \xi - i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) dx + \\
 &\quad \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} (\cos 2\pi x \xi - i \operatorname{sen} 2\pi x \xi) dx \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \cos 2\pi x \xi dx}_a - i \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \operatorname{sen} 2\pi x \xi dx}_b \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \xi dx}_c - i \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \operatorname{sen}(-2\pi x \xi) dx}_d. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Etiquetamos a cada uno de estos últimos 4 términos como (a), (b), (c) y (d) con el fin de poder referenciarlos para el cálculo de (3.3). Evaluemos cada uno de ellos.

(a)

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \cos 2\pi x \xi \, dx.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = 2\pi x$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \cos 2\pi x \xi \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du,$$

ahora sean $u_1 = \cos u \xi$ y $v_1 = e^u$ e integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du &= \frac{1}{2\pi} \left[e^u \cos u \xi \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^u (-\xi \sin u \xi) \, du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + \xi \int_{-\infty}^0 e^u \sin u \xi \, du \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nuevamente integrando por partes se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^u \sin u \xi \, du &= e^u \sin u \xi \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^u \xi \cos u \xi \, du \\ &= 0 - \xi \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du \\ &= -\xi \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Retomando (3.4) y usando (3.5) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + \xi \left(-\xi \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[1 - \xi^2 \left(\int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} - \frac{\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u \xi \, du. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u\xi \, du = \frac{1}{2\pi} - \frac{\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u\xi \, du,$$

por lo que

$$\frac{1}{2\pi} (1 + \xi^2) \int_{-\infty}^0 e^u \cos u\xi \, du = \frac{1}{2\pi},$$

así

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u\xi \, du = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \xi^2} \right), \quad (3.6)$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \cos 2\pi x\xi \, dx = \frac{1}{2\pi(1 + \xi^2)}.$$

(b) Evaluemos la integral

$$-i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \operatorname{sen} 2\pi x\xi \, dx.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = 2\pi x$, se tiene que

$$-i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \operatorname{sen} 2\pi x\xi \, dx = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \operatorname{sen} u\xi \, du, \quad (3.7)$$

ahora, sean $u_1 = \operatorname{sen} u\xi$ y $v = e^u$, haciendo integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \operatorname{sen} u\xi \, du &= -\frac{i}{2\pi} \left[e^u \operatorname{sen} u\xi \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^u \xi \cos u\xi \, du \right] \\ &= \frac{i\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \cos u\xi \, du, \end{aligned}$$

usando (3.6) se sigue que:

$$= \frac{i\xi}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \xi^2} \right)$$

y por lo tanto

$$-i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x} \operatorname{sen} 2\pi x\xi \, dx = \frac{i\xi}{2\pi(1 + \xi^2)}.$$

(c) Evaluemos la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \xi \, dx.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = -2\pi x$, se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \xi \, dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} e^u \cos u \xi \, du,$$

luego usando (3.6)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} e^u \cos u \xi \, du = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \xi^2} \right)$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \cos 2\pi x \xi \, dx = \frac{1}{2\pi(1 + \xi^2)}.$$

(d) Evaluemos la integral

$$i \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \operatorname{sen}(-2\pi x \xi) \, dx.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = -2\pi x$, se tiene que

$$\begin{aligned} i \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \operatorname{sen}(-2\pi x \xi) \, dx &= -\frac{i}{2\pi} \int_0^{-\infty} e^u \operatorname{sen} u \xi \, du \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \operatorname{sen} u \xi \, du \\ &= -\left(-\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u \operatorname{sen} u \xi \, du \right) \end{aligned}$$

luego usando (3.7) se sigue que

$$= -\frac{i\xi}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \xi^2} \right),$$

y por lo tanto

$$i \int_0^{\infty} e^{-2\pi x} \operatorname{sen}(-2\pi x \xi) \, dx = -\frac{i\xi}{2\pi(1 + \xi^2)}.$$

Ahora sustituyendo los valores de **(a)**, **(b)**, **(c)** y **(d)** en (3.3)

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)} + \frac{i\xi}{2\pi(1+\xi^2)} + \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)} - \frac{i\xi}{2\pi(1+\xi^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)} + \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)} \\ &= \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3. *Utilizando la propiedad algebraica 5 podemos calcular la transformada de $e^{-\lambda|x|}$.*

Sea

$$g(x) = e^{-\lambda|x|} \quad \text{con} \quad \lambda > 0,$$

observemos que:

$$g(x) = e^{-2\pi|(2\pi\lambda^{-1})^{-1}x|},$$

por lo que

$$(2\pi\lambda^{-1})^{-1}g(x) = (2\pi\lambda^{-1})^{-1}e^{-2\pi|(2\pi\lambda^{-1})^{-1}x|}.$$

Sea

$$\eta = (2\pi\lambda^{-1}),$$

entonces

$$\eta^{-1}g(x) = \eta^{-1}f(\eta^{-1}x).$$

Luego por la propiedad algebraica 5,

$$\eta^{-1}\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\eta\xi).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\pi} \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (\eta\xi)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi\xi}{\lambda}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2\xi^2}{\lambda^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}{\lambda^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{g}(\xi) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

Ejemplo 3.4. Sea $f(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces $2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = -i \hat{f}'(\xi)$.

Observamos que

$$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x). \quad (3.8)$$

Como f y f' son integrables, sabemos por las propiedades analíticas de la transformada que:

$$(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi). \quad (3.9)$$

Por las mismas propiedades, si $xf(x)$ es integrable, $\hat{f}$ es derivable y

$$(-2\pi i x f)^\wedge(\xi) = (\hat{f})'(\xi). \quad (3.10)$$

Usando (3.9) tenemos:

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = (f')^\wedge(\xi).$$

Por (3.8) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) &= (-2\pi x f(x))^{\wedge}(\xi) \\
 &= \frac{(-2\pi i x f(x))^{\wedge}(\xi)}{i} \\
 &= \frac{(\hat{f})'(\xi)}{i} \\
 &= \left(\frac{-i}{-i} \right) \frac{(\hat{f})'(\xi)}{i} \\
 &= \frac{-i(\hat{f})'(\xi)}{-i^2} \\
 &= -i(\hat{f})'(\xi).
 \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que $\hat{f}$ satisface una ecuación diferencial lineal de primer orden que se resuelve por el factor integrante, a continuación se presenta la solución a dicha ecuación.

Tenemos que:

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) + i(\hat{f})'(\xi) = 0. \quad (3.11)$$

Si hacemos

$$y = \hat{f}(\xi) \quad \text{y} \quad p(\xi) = 2\pi \xi,$$

entonces (3.11) es una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + p(\xi)y = 0. \quad (3.12)$$

Obtenemos el factor integrante $\mu(\xi)$

$$\begin{aligned}
 \mu(\xi) &= e^{\int p(\xi) d\xi} \\
 &= e^{\int 2\pi \xi d\xi} \\
 &= e^{2\pi \int \xi d\xi} \\
 &= e^{2\pi \frac{\xi^2}{2}} \\
 &= e^{\pi \xi^2}.
 \end{aligned}$$

Luego, multiplicando (3.12) por el factor integrante tenemos que:

$$\mu(\xi) [y' + p(\xi)y = 0],$$

de lo cual se sigue

$$\begin{aligned}
 \hat{f}'(\xi)e^{\pi\xi^2} + 2\pi\xi\hat{f}(\xi)e^{\pi\xi^2} &= 0 \\
 \left(\hat{f}(\xi)e^{\pi\xi^2}\right)' &= 0 \\
 \hat{f}(\xi)e^{\pi\xi^2} &= c \quad \text{con } c \text{ constante} \\
 \hat{f}(\xi) &= \frac{c}{e^{\pi\xi^2}} \\
 \hat{f}(\xi) &= c e^{-\pi\xi^2}.
 \end{aligned}$$

Si hacemos $\xi = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 c &= \hat{f}(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{(-2\pi ix)0} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Procedemos a calcular esta última integral usando coordenadas polares. Llamemos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable a coordenadas polares y utilizando el teorema de cambio de variable para integrales dobles, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta, \\
 y &= r \sin \theta,
 \end{aligned}$$

y calculando el determinante jacobiano

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Tenemos que

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-\pi r^2} d\theta dr.$$

Haciendo el cambio de variable: $u = -\pi r^2$

$$\begin{aligned} I^2 &= 2\pi \int_0^{-\infty} e^u \left(-\frac{du}{2\pi} \right) \\ &= - \int_0^{-\infty} e^u du \\ &= \int_{-\infty}^0 e^u du \\ &= e^u \Big|_{-\infty}^0 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I = \sqrt{1} = 1.$$

Retomando (3.13) tenemos $c=1$, entonces la solución a la ecuación diferencial (3.12) es:

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

Ejemplo 3.5. *Utilizando la propiedad algebraica de dilatación de la transformada podemos deducir:*

$$\left(\frac{1}{\lambda} e^{-\pi x^2 / \lambda^2} \right)^\wedge(\xi) = e^{-\pi \lambda^2 \xi^2}. \quad (3.14)$$

Demostración.

$$\left(\frac{1}{\lambda} e^{-\pi x^2 / \lambda^2} \right)^\wedge(\xi) = (\lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x))^\wedge(\xi),$$

usando la propiedad antes mencionada

$$\begin{aligned}(\lambda^{-1}f(\lambda^{-1}x))^{\wedge}(\xi) &= \hat{f}(\lambda\xi) \\ &= ce^{-\pi(\lambda\xi)^2} \\ &= e^{-\pi\lambda^2\xi^2}\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Resultados y teoremas fundamentales

En este capítulo, comenzamos recordando algunos conceptos de convergencia para sucesiones de funciones medibles. Veremos la representación del operador suma parcial por medio del núcleo de Dirichlet, así también damos algunos resultados que son necesarios en teoremas y lemas de convergencia, como lo son el Lema Riemann - Lebesgue y un teorema de inversión. Este ultimo nos brinda información de la reconstrucción de f a partir de $\hat{f}$.

4.1. Modos de Convergencia

Consideremos (X, Σ, μ) un espacio de medida, donde μ es una medida positiva y recordemos que $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es Σ -medible si la preimagen de abiertos es medible. Estos teoremas serán usados en la siguiente sección.

Definición 4.1. *La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f si para cada $\epsilon > 0$ y $x \in X$ hay un número natural $N(\epsilon, x)$, tal que si $n \geq N(\epsilon, x)$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definición 4.2. *La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $N(\epsilon)$, tal que si $n \geq N(\epsilon)$ y $x \in X$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Definición 4.3. La sucesión $\{f_n\}$ converge casi donde sea a f si existe un conjunto M en X con $\mu(M) = 0$, tal que para todo $\epsilon > 0$ y $x \in X \setminus M$ existe un número natural $N(\epsilon, x)$, tal que si $n \geq N(\epsilon, x)$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Denotaremos por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$ la colección de funciones Lebesgue integrables de valores reales definidas sobre X , con respecto a la medida μ .

Consideramos en seguida el espacio de Lebesgue $L^1(X)$ como el conjunto de clases de equivalencia correspondientes, esto es

$$L^1(X) = \{[f] : f \in \mathcal{L}(E)\};$$

donde $[f]$ denota la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{L}(E)$. Es decir

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(E) : f = g \text{ c.t.p.}\}.$$

Definición 4.4. Se define el espacio $L^p(X)$, con $1 \leq p < \infty$, como el espacio de todas las clases μ equivalentes de funciones definidas en X tales que $|f|^p$ es integrable con respecto a μ ; en particular, $L^1(X)$ es el espacio de funciones integrables. Si $f \in L^p(X)$ su norma se define como

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Definición 4.5. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(X)$ y $f \in L^p(X)$. Diremos que $\{f_n\}$ converge a f en $L^p(X)$ si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \epsilon, \quad N \leq n.$$

Teorema 4.6 ([3]). Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(X)$, la cual converge casi donde sea a una función medible f . Si existe g en $L^p(X)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}$$

Entonces $f \in L^p(X)$ y f_n converge en $L^p(X)$ a f .

Lema 4.7. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{L}(X)$, $f, g \in \mathcal{L}(X)$. Si $f_n \rightarrow f$ y $f_n \rightarrow g$ en L^1 , entonces $f = g$ c.t.p.

4.2. Kernel de Dirichlet y Sumas Parciales Simétricas

El operador suma parcial aplicado a $f \in L^1(\mathbb{R})$ para $M > 0$ está definido por

$$S_M f(x) := \int_{-M}^M \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (4.1)$$

Donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f .

Ahora reescribimos la ecuación (4.1), haremos lo que se llama la representación explícita via el Kernel de Dirichlet. Para hacer esto, hacemos uso del teorema de Fubini pues para casi todos los puntos fijos $\xi \in \mathbb{R}$, $f(y) e^{-2\pi i \xi y} \in L_1(\mathbb{R})$, como una función de y . También $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy$ es integrable como una función de ξ entonces.

$$\begin{aligned} S_M f(x) = \int_{-M}^M \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi &= \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi y} f(y) dy \right) e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-M}^M e^{2\pi i \xi(x-y)} d\xi \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = 2\pi \xi(x-y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-M}^M e^{2\pi i \xi(x-y)} d\xi \right) f(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-2M(x-y)}^{2M(x-y)} e^{ui} \frac{du}{2\pi(x-y)} \right) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi(x-y)} \int_{-2M(x-y)}^{2M(x-y)} \cos u + i \sin u du \right) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi(x-y)} [\sin u - i \cos u]_{-2\pi M(x-y)}^{2\pi M(x-y)} \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi(x-y)} [\operatorname{sen} u - i \cos u]_{-2\pi M(x-y)}^{2\pi M(x-y)} \right) f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(x-y)} [(\operatorname{sen} 2\pi M(x-y) - i \cos 2\pi M(x-y)) - \\
&\quad (\operatorname{sen} -2\pi M(x-y)) - i \cos -2\pi M(x-y)] f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(x-y)} (\operatorname{sen} 2\pi M(x-y) - \operatorname{sen}(-2\pi M(x-y))) f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} 2\pi M(x-y)}{2\pi(x-y)} f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi M(x-y)}{\pi(x-y)} f(y) dy. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

El anterior cálculo se resume haciendo el cambio de variable $x - y = z$, es decir

$$S_M f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi M z}{\pi z} f(x - z) dz. \tag{4.3}$$

La función $D_M(z) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi M z}{\pi z}$ se llama el Kernel de Dirichlet. Observemos que esta es una función par pues

$$\begin{aligned}
F(-z) &= \frac{\operatorname{sen} 2\pi M(-z)}{\pi(-z)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\pi M(-z)}{\pi(-z)} \\
&= \frac{-\operatorname{sen} 2\pi M z}{-\pi z} \\
&= F(z).
\end{aligned}$$

Equivalentemente la ecuación (4.3), ya que el Kernel es par, es

$$S_M f(x) = \int_0^{\infty} [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\operatorname{sen} 2\pi M z}{\pi z} dz. \tag{4.4}$$

Antes de exponer el lema de Riemann-Lebesgue, daremos una definición y mencionaremos algunos resultados que nos brindan una importante herramienta para la demostración de algunos teoremas de convergencia en $L^1(\mathbb{R})$.

Definición 4.8 (Funciones Continuas con Soporte Compacto $C_c(\mathbb{R})$). Una función $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula fuera de un intervalo cerrado se dice ser de soporte compacto. El espacio de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ con soporte compacto se denota por $C_c(\mathbb{R})$.

Definición 4.9. Sea $D \subset L^1(\mathbb{R})$. Diremos que D es denso en $L^1(\mathbb{R})$ si, para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{h_n\} \subset D$ tal que $h_n \rightarrow f$ en L^1 . Es decir, si cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se puede aproximar en L^1 mediante elementos de D .

Teorema 4.10 ([7]). Para todo $1 \leq p \leq \infty$, $C_c(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$, y $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $L_p(\mathbb{R})$.

Teorema 4.11 ([1]. Heine, Continuidad Uniforme Sobre Conjuntos Compactlyos). Sea $f : S \rightarrow T$ una función definida entre dos espacios métricos (S, d_s) y (T, d_r) . Sea A un subconjunto compacto de S y supongamos que f es continua en A . Entonces f es uniformemente continua en A .

Lema 4.12. Para f en $L^1(\mathbb{R})$ se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, por el Teorema 4.10 existe una función continua g definida sobre $\mathbb{R}$ con soporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon/3$. Asumiendo que g se anula fuera de $[-b, b]$. Por el teorema 4.11, g es uniformemente continua, entonces existe un δ , $0 < \delta < 1$, tal que si $|h| < \delta$ se tiene que

$$|g(t+h) - g(t)| < \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{1}{2(b+1)} \right).$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t+h) - g(t)| dt &= \int_{-(b+1)}^{b+1} |g(t+h) - g(t)| dt \\ &< \int_{-(b+1)}^{b+1} \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{1}{2(b+1)} \right) dt = \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

es decir

$$\|g_h - g\|_1 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por otro lado bajo el cambio de variable $x = t + h$, obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \|f_h - g_h\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+h) - g(t+h)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \|f - g\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto para $h < \delta$

$$\begin{aligned} \|f_h - f\|_1 &= \|f_h - g_h + g_h - g + g - f\|_1 \\ &\leq \|f_h - g_h\|_1 + \|g_h - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Con esto terminamos la demostración. □

4.3. Lema de Riemann-Lebesgue

Uno de los resultados más importantes y estudiados en el análisis de Fourier es el Lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.13 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Para f en $L^1(\mathbb{R})$*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0. \quad (4.5)$$

Demostración. Multiplicamos $\hat{f}(\xi)$ por $-e^{i\pi}$, y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (-e^{i\pi})\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i u \xi} dx (-e^{i\pi}) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i u \xi} e^{i\pi} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i \xi(u - \frac{1}{2\xi})} dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, $x = u - \frac{1}{2\xi}$, tenemos que

$$(-e^{i\pi})\hat{f}(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i x \xi} du$$

Entonces, si le sumamos $\hat{f}(\xi)$, obtenemos por un lado que:

$$\begin{aligned} |-e^{i\pi}\hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi)| &= |\hat{f}(\xi)||1 - e^{i\pi}| \\ &= |\hat{f}(\xi)||1 - (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)| \\ &= |\hat{f}(\xi)||2| \\ &= 2|\hat{f}(\xi)|. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} &|-e^{i\pi}\hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ahora, sustituyendo (4.6) en (4.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2|\hat{f}(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx \\ |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx, \end{aligned}$$

Haciendo ξ tender a ∞ y usando el Lema (4.12) obtenemos

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

□

Denotando $C_0(\mathbb{R})$ como el espacio de funciones continuas, en $\mathbb{R}$, que tienden a cero en $\pm\infty$, y tomando en cuenta el lema anterior y el inciso 1) del teorema 2.5, podemos completar el enunciado del lemma de Riemann-Lebesgue como: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

4.4. Un Teorema de Inversión

El siguiente resultado es un Teorema de Inversión clásico. Se pueden hallar otros teoremas o plantear condiciones diferentes para obtener la recuperación de la función. Desde luego esta teoría no la desarrollamos en esta tesis.

Teorema 4.14. *Si f y $\hat{f}$ son integrables, entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad c.t.p.$$

Demostración. Sea $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Por el ejemplo (3.5) del capítulo anterior se tiene que

$$e^{-\pi y^2 n^2} = \left(\frac{1}{n} e^{(-\pi z^2)/n^2} \right) \wedge(y).$$

Usando la igualdad anterior y las propiedades analítica 4 y algebraica 3, obtenemos

$$\begin{aligned} n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2 n^2} dy &= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \left(\frac{1}{n} e^{(-\pi z^2)/n^2} \right) \wedge(y) dy \\ &= \frac{n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x+\xi) e^{(-\pi \xi^2)/n^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} e^{(-\pi \xi^2)/n^2} d\xi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sea $h_n(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} e^{(-\pi \xi^2)/n^2}$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-\pi \xi^2)/n^2} = 1$, dado $\epsilon \in (0, 1)$ existe $M > 0$ tal que si $n > M$,

$$1 - \epsilon < e^{(-\pi \xi^2)/n^2} < 1 + \epsilon.$$

Esto es:

$$\frac{1}{e^{(-\pi \xi^2)/n^2}} < \frac{1}{1 - \epsilon}$$

Entonces

$$|h_n(\xi)| = \frac{\hat{f}(\xi)}{e^{(-\pi \xi^2)/n^2}} < \frac{|\hat{f}(\xi)|}{1 - \epsilon} \quad \text{siempre que } n > M,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada, y (4.8), se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2 n^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (4.9)$$

Por otro lado, veamos la convergencia en $L^1(\mathbb{R})$ la primera igualdad de (4.8). Haciendo el cambio de variable $w = y \cdot n$ donde $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2 n^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{w}{n}\right) e^{-\pi w^2} dw.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{w}{n}\right) e^{-\pi w^2} dw - f(x) \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{w}{n}\right) e^{-\pi w^2} dw - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} dw \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} \left(f\left(x + \frac{w}{n}\right) - f(x) \right) dw \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\pi w^2} \left(f\left(x + \frac{w}{n}\right) - f(x) \right) \right| dw dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{w}{n}\right) - f(x) \right| dx \right) dw. \end{aligned}$$

Por el Lema(4.12) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{w}{n}\right) - f(x) \right| dx = 0.$$

Como, además $\left| f\left(x + \frac{w}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2 \|f\|_1$ y $e^{-\pi w^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces por el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2 n^2} dy - f(x) \right\|_1 = 0.$$

Por (4.8) y empleando el Teorema 4.6, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| n \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2 n^2} dy - \hat{f}(\xi) \right\|_1 = 0.$$

Por lo tanto, usando el Lema 4.7

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \quad c.t.p.$$

□

Observación 4.15. Para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$, existe su transformada de Fourier, sin embargo, $\hat{f}$ podría no ser integrable, así puede no ser aplicable en algunos casos el Teorema de Inversión; por ejemplo, la función indicadora de $-1 \leq x \leq 1$ es integrable, pero su transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} = \frac{\text{sen } 2\pi \xi}{\pi \xi}$$

no lo es.

Teorema 4.16. Si f es una función integrable que se anula en $(x - \delta, x + \delta)$ para algún $x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M f(x) = 0$.

Demostración. Por la expresión (4.2) se tiene que

$$S_M f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\text{sen } 2\pi M(x_0 - t)}{\pi(x_0 - t)} dt.$$

Como $f(t)$ es integrable,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ \frac{f(t)}{\pi(x_0 - t)}, & \text{si } t \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \end{cases}$$

es integrable y usando el lema de Riemann-Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M f(x_0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\text{sen } 2\pi M(x_0 - t)}{\pi(x_0 - t)} dt.$$

□

Antes de pasar a nuestro siguiente resultado es necesario dar la siguiente observación respecto al Kernel de Dirichlet el cual fue definido al inicio de este capítulo.

Observación 4.17.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N D_M(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Hacemos el cambio de variable, $u = 2\pi Mt$ y tenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{u(0)}^{u(N)} \left(\frac{\sin u}{\frac{\pi u}{2\pi M}} \right) \frac{du}{2\pi M} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi MN} \frac{2M \sin u}{2\pi M u} du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi NM} \frac{\sin u}{u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

4.5. Teorema de Dini

Teorema 4.18. *Sea f una función integrable. Si para algún x y algún A la función*

$$h(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2A}{t}$$

es integrable en $0 < t < \delta$, entonces $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M f(x) = A$

Demostración. Teniendo la observación (4.17), podemos afirmar lo siguiente

$$\begin{aligned} S_M f(x) - A &= \int_0^N [f(x-t) + f(x+t) - 2A] D_M(t) dt \\ &+ \int_N^\infty [f(x-t) + f(x+t)] D_M(t) dt \\ &+ \left(1 - 2 \int_0^N D_M(t) dt \right) A, \end{aligned}$$

pues dado $\epsilon/3 > 0$ elegimos N_1 de modo que

$$\left| 1 - 2 \int_0^{N_1} D_M(t) dt \right| |A| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

ahora elegimos N_2 de modo que

$$\int_{N_2}^{\infty} \frac{|f(x-t) + f(x+t)|}{\pi t} D_M(t) dt < \frac{\epsilon}{3}.$$

Esto ultimo tiene sentido por ser f una función integrable, ahora tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$ y como que $h(t)$ es integrable en $(0, N)$, el Lema de Riemann-Lebesgue implica que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2A}{\pi t} \sin 2\pi M t dt = 0.$$

Eligiendo M_0 tal que si $M > M_0$ esta integral es en valor absoluto menor que $\epsilon/3$, resulta que para $M > M_0$ se tiene que $|S_M f(x) - A| < \epsilon$. $\square$

4.6. Convolución

A continuación damos el concepto de convolución y observaremos en un primer teorema, la aplicación de la convolución en la transformada de Fourier, más adelante veremos como la convolución es útil en el proceso de obtención de los núcleos de sumabilidad estudiados en esta tesis.

Definición 4.19. Sean f y g funciones integrables, se define su convolución $f * g$ como la función integrable dada por

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \quad (4.10)$$

Teorema 4.20. *Si f y g son integrables, entonces $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$*

Demostración.

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) \, dy \, e^{-2\pi i x \xi} \, dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)e^{-2\pi i (x - y)\xi} \, dx \right) \, dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} \, dx \right) \, dy \\&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Métodos de sumabilidad

La importancia de estos métodos radica en intentar recuperar la función, como en el caso de las series de Fourier en donde el problema planteado fue: conocidos los coeficientes de Fourier de una función integrable, ¿Es posible recuperar la función? En algunos casos la respuesta es afirmativa con la limitación de que la series de Fourier representan sólo funciones periódicas de la recta. Así pues para representar funciones en toda la recta, no periódicas, se sustituye por la Transformada de Fourier y como ocurría con las series de Fourier intentamos recuperar la función, utilizando métodos de sumabilidad. A continuación presentamos tres de los más conocidos.

5.1. Sumabilidad Cesàro.

Recordemos que, para el caso de las series de Fourier, el método de Cesàro consiste en hacer promedio de sus sumas parciales. En analogía, para la Transformada de Fourier, debemos hacer el promedio del operador suma parcial, así tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \int_0^M S_m f(x) dm &= \frac{1}{M} \int_0^M \left(\int_{-m}^m \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right) dm \\ &= \frac{1}{M} \int_0^M \left(\int_{-m}^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi(x-y)} f(y) dy \right) d\xi \right) dm \quad (5.1) \\ &= \frac{1}{M} \int_0^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } 2m\pi(x-y)}{\pi(x-y)} f(y) dy \right) dm \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^M \frac{\text{sen } 2m\pi(x-y)}{\pi(x-y)} f(y) dm \right) dy \end{aligned}$$

Por el cambio de variable: $u = 2\pi m(x - y)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{M} \int_0^M S_m f(x) dm &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi M(x-y)} \frac{\sin u}{\pi(x-y)2\pi(x-y)} du \right) f(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - [\cos u]_0^{2\pi M(x-y)}}{(x-y)^2} f(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi M(x-y)}{(x-y)^2} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2M\pi(x-y))}{2M\pi^2(x-y)^2} f(y) dy
 \end{aligned}$$

El calculo de la doble integral interior de (5.1) es la representación del operador suma parcial vial el kernel de Dirichlet. En nuestra ultima igualdad hemos llegado a lo que es el Núcleo de Fejér.

El kernel de Fejer esta definido por $K_M(0) = M$, si $x = 0$ y

$$K_M(x) = \frac{1 - \cos(2M\pi x)}{2M\pi^2 x^2}, \quad x \neq 0$$

5.2. Sumabilidad de Abel-Poisson.

En esté método estudiamos la convergencia de la integral dada en el teorema de inversión, y tratamos que sea convergente intoduciendo el factor $e^{-2\pi t|\xi|}$ y haciendo tender t a cero por la derecha, es decir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

En seguida mostramos el proceso para reescribir esta integral como una convolución de f con la transformada inversa de $e^{-2\pi t|\xi|}$, esto con el propósito de obtener el núcleo de sumabilidad

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right] e^{2\pi i x \xi} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} f(y) e^{-2\pi i y \xi} e^{2\pi i x \xi} dy d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} f(y) e^{2\pi i \xi(x-y)} d\xi dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi(x-y)} d\xi dy \quad (5.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \check{g}_t(x-y) dy \\
&= f * \check{g}_t(x). \quad (5.3)
\end{aligned}$$

En (5.2) estamos implícitamente definiendo $\hat{g}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$ para luego en (5.3) emplear la convolución de f con la transformada inversa de $e^{-2\pi t|\xi|}$, el cálculo de esta transformada inversa nos dará como resultado el núcleo de Poisson y a continuación mostramos el proceso

$$\begin{aligned}
\check{g}_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi(t+ix)} d\xi + \int_0^{\infty} e^{2\pi \xi(ix-t)} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi t} e^{2\pi \xi i x} d\xi + \int_0^{\infty} e^{2\pi \xi i x} e^{-2\pi \xi t} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi t} (\cos 2\pi \xi x + i \operatorname{sen} 2\pi \xi x) d\xi + \int_0^{\infty} e^{-2\pi \xi t} (\cos 2\pi \xi x + i \operatorname{sen} 2\pi \xi x) d\xi \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi t} \cos 2\pi \xi x d\xi}_{\alpha} + i \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi t} \operatorname{sen} 2\pi \xi x d\xi}_{\beta} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\pi \xi t} \cos 2\pi \xi x d\xi}_{\gamma} + i \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\pi \xi t} \operatorname{sen} 2\pi \xi x d\xi}_{\theta}.
\end{aligned}$$

En nuestra última igualdad hemos etiquetado los 4 términos que conforman la integral principal, con el propósito de poder referenciarlos en el cálculo de cada uno de estos que realizamos a continuación.

(α)

Integrando por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \left[\cos 2\pi\xi x \frac{1}{2\pi t} e^{2\pi\xi t} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\pi t} e^{2\pi\xi t} (-2\pi x \operatorname{sen} 2\pi\xi x) \, d\xi \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi t} - 0 \right) + \int_{-\infty}^0 \frac{x}{t} e^{2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi t} + \frac{x}{t} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Hacemos nuevamente integración por partes a fin de calcular la integral (5.4), tenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \left[\operatorname{sen} 2\pi\xi x \frac{1}{2\pi t} e^{2\pi\xi t} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\pi t} e^{2\pi\xi t} 2\pi x \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \left[\operatorname{sen} 2\pi\xi x \frac{1}{2\pi t} e^{2\pi\xi t} \right]_{-\infty}^0 - \frac{x}{t} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= 0 - \frac{x}{t} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Para el finalizar el cálculo de la integral (α) retomamos (5.4) y (5.5) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi &= \frac{1}{2\pi t} + \frac{x}{t} \left[0 - \frac{x}{t} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi t} - \frac{x^2}{t^2} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi
 \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\left(1 + \frac{x^2}{t^2} \right) \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi = \frac{1}{2\pi t},$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi = \frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)}. \quad (5.6)$$

(β)

$$i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi.$$

Para el cálculo de esta integral retomamos la información ya obtenida anteriormente en (5.5) y (5.6)

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi &= i \left[-\frac{x}{t} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \right] \\ &= \frac{-ix}{t} \left[\frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)} \right] \\ &= -\frac{ix}{2\pi(t^2 + x^2)}. \end{aligned}$$

(γ)

$$\int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\ &= \left[\cos 2\pi\xi x \frac{e^{-2\pi\xi t}}{-2\pi t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi\xi t}}{-2\pi t} (-2\pi x \operatorname{sen} 2\pi\xi x) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi t} - \int_0^{\infty} \frac{x}{t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, e^{-2\pi\xi t} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi t} - \frac{x}{t} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nuevamente integramos por partes para calcular la integral en (5.7) y

tenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \left[\operatorname{sen} 2\pi\xi x \frac{e^{-2\pi\xi t}}{-2\pi t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi\xi t}}{-2\pi t} 2\pi x \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= 0 + \frac{x}{t} \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi\xi t}}{2\pi t} 2\pi x \cos 2\pi\xi x \, d\xi \\
 &= \frac{x}{t} \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Luego, usando (5.7) y (5.8), tenemos que la integral (γ) está dada por

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi &= \frac{1}{2\pi t} - \frac{x}{t} \left[\frac{x}{t} \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi t} - \frac{x^2}{t^2} \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi &= \frac{1}{2\pi t} \\
 \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi &= \frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

(θ)

$$i \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi.$$

Para evaluar esta integral utilizamos la información ya obtenida en (5.8) y (5.9).

$$\begin{aligned}
 i \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \operatorname{sen} 2\pi\xi x \, d\xi &= i \left[\frac{x}{t} \int_0^\infty e^{-2\pi\xi t} \cos 2\pi\xi x \, d\xi \right] \\
 &= i \left[\frac{x}{t} \left(\frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)} \right) \right] \\
 &= \frac{ix}{2\pi(t^2 + x^2)}.
 \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\check{g}_t(x) &= \frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)} - \frac{ix}{2\pi(t^2 + x^2)} + \frac{t}{2\pi(t^2 + x^2)} + \frac{ix}{2\pi(t^2 + x^2)} \\ &= \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.\end{aligned}$$

Esta última expresión es el núcleo de Poisson y por convención lo denotaremos como $P_t(x)$, es decir:

$$P_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

5.3. Sumabilidad de Gauss - Weierstrass.

Análogamente, como realizamos el proceso de la sumabilidad anterior ahora emplearemos el factor $e^{-\pi t \xi^2}$ en lugar de $e^{-2\pi t |\xi|}$ con la intención de estudiar la convergencia de la integral dada en el Teorema de Inversión, es decir estudiaremos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

La integral anterior se puede expresar como una convolución, pues

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt \right] e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} f(t) e^{2\pi i \xi(x-t)} dt d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} f(t) e^{2\pi i \xi(x-t)} d\xi dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} e^{2\pi i \xi(x-t)} d\xi dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \check{h}_t(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \check{h}_t(x) dt = f * \check{h}(t),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\check{h}_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} e^{2\pi i \xi(x)} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi x^2/t} = W_t(x).\end{aligned}$$

A $W_t(x)$ le llamaremos núcleo de Gauss.

5.4. Resultados de los núcleos de Fejér, Poisson y Gauss

Teorema 5.1 (Propiedades).

1. Los tres núcleos son pares y no negativos.
2. Los tres núcleos tiene integral 1.
3. Fijado $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|y| > \delta} K_M(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} P_t(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} W_t(y) dy = 0.$$

Demostración. 1. El kernel de Fejer está dado por

$$K_M(x) = \frac{1 - \cos(2M\pi x)}{2M\pi^2 x^2}, \quad x \neq 0.$$

Donde estamos considerando que $M > 0$. Veamos que es una función par

$$\begin{aligned}K_M(-x) &= \frac{1 - \cos(-2M\pi x)}{2M\pi^2(-x)^2} \\ &= \frac{1 - \cos(2M\pi x)}{2M\pi^2 x^2} = K_M(x).\end{aligned}$$

Es también una función no negativa, pues

$$\begin{aligned}K_M(x) &= \frac{1 - \cos(2M\pi x)}{2M\pi^2 x^2} \\ &= \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi M x}{\pi x} \right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

El Kernel de Poisson viene dado por

$$P_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.$$

Es una función par ya que la función cuadrática también lo es. Así también, como $t > 0$ $P_t(x) \geq 0$.

El Kernel de Gauss - Weierstrass está dado por

$$W_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi x^2/t}.$$

Claramente también es una función par y no negativa.

2. Para demostrar esta propiedad, lo más sencillo es observar que la integral de una función, en todo $\mathbb{R}$, coincide con el valor de su transformada de Fourier en 0. Así, tenemos que el valor de la integral para el núcleo de Fejer viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_M(x) dx = K_M^{\wedge}(0), \quad (5.10)$$

donde cuya transformada de Fourier de $K_M(\xi)$ es

$$K_M^{\wedge}(\xi) = 1 - \frac{|\xi|}{M}$$

por lo tanto de (5.10)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_M(x) dx &= 1 - \frac{|0|}{M} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, siguiendo la misma idea para la integral del núcleo de Poisson tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_t(x) dx = P_t^{\wedge}(0), \quad (5.11)$$

donde la transformada de Fourier de $P_t(x)$ es

$$P_t^{\wedge}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|},$$

así por (5.11) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_t(x) dx = e^{-2\pi t|0|} = 1$$

Finalmente la integral del núcleo de Gauss - Weierstrass es

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_t(x) dx = \hat{W}_t(0) \quad (5.12)$$

y sabemos que la transformada de $W_t(x)$ es

$$\hat{W}_t(\xi) = e^{-\pi t \xi^2},$$

entonces por (5.12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_t(x) dx = e^{-\pi t 0^2} = 1. \quad (5.13)$$

3.

Para estimar la integral del núcleo de Fejér para $|x| > \delta$. Reemplazamos el $\text{sen}(\pi My)$ por 1, para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|y| > \delta} K_M(y) dy &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{|y| > \delta} \frac{\text{sen}^2 \pi My}{M \pi^2 y^2} dy \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_{\delta}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 \pi My}{M \pi^2 y^2} dy + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\text{sen} \pi My^2}{M \pi^2 y^2} dy \right) \\ &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{M \pi^2} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{M \pi^2} \left[\frac{-1}{y} \right]_{\delta}^{\infty} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{M \pi^2 \delta} = 0. \end{aligned}$$

De manera similar estimamos la integral de núcleo de Poisson

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} P_t(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} \frac{t}{\pi(t^2 + y^2)} dy \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\int_{\delta}^{\infty} \frac{t}{\pi(t^2 + y^2)} dy + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{t}{\pi(t^2 + y^2)} dy \right) \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\pi} \left[\frac{-1}{y} \right]_{\delta}^{\infty} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{\pi \delta} = 0.
\end{aligned}$$

Se calcula la integral del núcleo de Gauss - Weierstrass y se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} W_t(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi y^2/t} dy \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi y^2/t} dy + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi y^2/t} dy \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\pi y^2/t} dy.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = y/\sqrt{t}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\pi y^2/t} dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{4\pi} t} \int_{\delta/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\pi u^2} du \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{4\pi} t} e^{-\delta^2/t} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado el Teorema 5.1. □

Teorema 5.2. Si f es integrable, $K_M * f$, $P_t * f$, y $W_t * f$ convergen a f en L^1 , es decir,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|K_M * f - f\|_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|P_t * f - f\|_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|W_t * f - f\|_1 = 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \| K_M * f - f \|_1 \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_m(y) f(x-y) dy - f(x) \right| dx \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_M(y) f(x-y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_M(y) dy \right| dx \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_M(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi M y}{\pi y} \right)^2 (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = My$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right) du \right| dx \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right) du \right| dx \\
&\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right) \right| du dx \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right| dx \right) du.
\end{aligned}$$

Luego acotamos el término entre paréntesis por $2 \| f \|_1$, para aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, terminamos la demostración con el Lema 4.12 pues

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right| dx \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi^2 u^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x - \frac{u}{M}\right) - f(x) \right| dx \right) du = 0.
\end{aligned}$$

Continuando con el siguiente núcleo tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \| P_t * f - f \|_1 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) f(x-y) dy - f(x) \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) f(x-y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) f(x) dy \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} P_t(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\pi(t^2 + y^2)} (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u_1 = \frac{y}{t}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\pi(t^2 + u_1^2 t^2)} (f(x - u_1 t) - f(x)) du_1 \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + u_1^2)} (f(x - u_1 t) - f(x)) du_1 \right| dx \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi(1 + u_1^2)} (f(x - u_1 t) - f(x)) \right| du_1 dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + u_1^2)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - u_1 t) - f(x)| dx \right) du_1.
\end{aligned}$$

Luego acotamos el término entre paréntesis por $2 \| f \|_1$, para aplicar el teorema de convergencia dominada y así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi(1 + u_1^2)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - u_1 t) - f(x)| dx \right) du_1.$$

Ahora por el lema (4.12) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi(1 + u_1^2)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - u_1 t) - f(x)| dx \right) du_1 = 0.$$

Finalmente veamos la convergencia con el núcleo de Gauss - Weierstrass

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \| w_t * f - f \|_1 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} w_t(y) f(x-y) dy - f(x) \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} w_t(y) f(x-y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} w_t(y) f(x) dy \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} w_t(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi y^2/t} (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx,
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u_2 = \frac{y}{\sqrt{t}}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi y^2/t} (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi u_2^2} \sqrt{t} (f(x - u_2 \sqrt{t}) - f(x)) du_2 \right| dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\pi u_2^2} (f(x - u_2 \sqrt{t}) - f(x)) du_2 \right| dx \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\pi u_2^2} (f(x - u_2 \sqrt{t}) - f(x)) \right| du_2 dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\pi u_2^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - u_2 \sqrt{t}) - f(x)| dx \right) du_2,
\end{aligned}$$

hacemos el mismo proceso como en los casos anteriores, es decir acotamos el término entre paréntesis por $2 \| f \|_1$ para aplicar el teorema de convergencia dominada, luego usamos el lema 4.12 a fin de obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\pi u_2^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - u_2 \sqrt{t}) - f(x)| dx \right) du_2 = 0$$

Por lo tanto se verifica la tercera propiedad y con ello el teorema queda demostrado. $\square$

Capítulo 6

Una aplicación

Difracción y formación de imágenes

En física, la difracción es un fenómeno característico de las ondas, éste se basa en el curvado y esparcido de las ondas cuando encuentran un obstáculo o al atravesar una rendija. La difracción ocurre en todo tipo de ondas, desde ondas sonoras, ondas en la superficie de un fluido y ondas electromagnéticas como la luz y las ondas de radio. También sucede cuando un grupo de ondas de tamaño finito se propaga; por ejemplo, por causa de la difracción, un haz angosto de ondas de luz de un láser debe finalmente divergir en un rayo más amplio a una cierta distancia del emisor. A continuación damos algunos conceptos sobre este tema.

El patrón de difracción de la pantalla, está definido como la relación de la onda resultante en la dirección θ a la onda incidente, se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = F(k), \quad (6.1)$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{sen } \theta, \quad (6.2)$$

λ es la longitud de onda y $f(x)$ es la función característica de transmisión, es decir es la amplitud de la luz transmitida por la rendija, además *el cuadrado de la amplitud de este patrón de difracción es proporcional a la distribución de intensidad de la luz difractada I .*

El patrón de difracción consiste en una banda central brillante, que puede ser mucho más amplia que el ancho de la ranura, bordeada de bandas oscuras cuya intensidad decrece rápidamente. Alrededor del 85 % de la potencia del haz transmitido se encuentra en la banda central brillante.

Por otro lado la función característica de transmisión $f(x)$ y el patrón de difracción $F(k)$, forman un par de transformadas de Fourier, pues se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk.$$

Ahora presentamos una aplicación de la transformada de Fourier en relación a lo anterior.

Considérese la difracción de una rendija que se extiende desde $x = -\frac{1}{2}a$, hasta $x = \frac{1}{2}a$, supongase que la amplitud de la luz transmitida por la rendija es A veces la magnitud de la onda incidente, y que la pantalla es completamente opaca en las otras regiones. Hallar la distribución de la intensidad de la luz, difractada en la dirección θ .

Solución: Según la hipótesis planteada la función característica está dada por

$$f(x) = Ap_a(x),$$

donde $p_a(x)$ se define como

$$p_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}a \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}a, \end{cases}$$

primero debemos hallar el patrón de difracción de la pantalla

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} Ap_a(x) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} A(\cos kx - i \operatorname{sen} kx) dx \\ &= A \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \cos kx dx - iA \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \operatorname{sen} kx dx, \end{aligned} \quad (6.3)$$

haciendo el cambio de variable, $u = kx$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \frac{A}{k} \int_{-\frac{1}{2}ak}^{\frac{1}{2}ak} \cos u \, du - \frac{iA}{k} \int_{-\frac{1}{2}ak}^{\frac{1}{2}ak} \operatorname{sen} u \, du \\
 &= \frac{A}{k} \operatorname{sen} u \Big|_{-\frac{1}{2}ak}^{\frac{1}{2}ak} + \frac{iA}{k} \cos u \Big|_{-\frac{1}{2}ak}^{\frac{1}{2}ak} \\
 &= \frac{A}{k} \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2}ak - \operatorname{sen} \left(-\frac{1}{2}ak \right) + i \left(\cos \frac{1}{2}ak - \cos \left(-\frac{1}{2}ak \right) \right) \right] \\
 &= \frac{A}{k} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}ak \right),
 \end{aligned}$$

entonces

$$F(k) = \frac{A}{k} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}ak \right).$$

Luego por (6.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \frac{A}{\frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{2a\pi}{2\lambda} \operatorname{sen} \theta \right) \\
 &= \frac{A\lambda}{\pi \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \left(\frac{a\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right).
 \end{aligned}$$

Como la intensidad de la luz difractada I es proporcional al cuadrado de la amplitud del patrón de difracción, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I &= \left[\frac{A\lambda}{\pi \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \left(\frac{a\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right) \right]^2 \\
 &= \frac{(A\lambda)^2}{\pi^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{a\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right),
 \end{aligned}$$

donde a es el ancho de la rendija y λ la longitud de onda.

Conclusión

La importancia de la transformada de Fourier no se limita a una sola rama de la ciencia pero sus aplicaciones diversas casi siempre tienen el mismo objetivo, a saber la representación de una función en términos de la frecuencia, esto parece obvio de la definición de transformada pero no en la aplicación de la misma, conocer estos conceptos nos permiten conocer también que representación matemática le damos a fenómenos físicos, esto nos ayuda a su vez resolver problemas de una manera más analítica. La parte física explicada anteriormente, da pauta de la importancia del análisis de Fourier.

Finalmente se puede concluir que los conceptos aquí expuestos son base en el estudio de la transformada de Fourier.

Anexo A

Sucesiones de funciones

Una familia numerable de funciones $\{f_n\}$, donde f_n es una función, real o compleja, definida en un dominio común D para todo $n \in \mathbb{N}$, se llama sucesión de funciones. Para cada punto x del dominio común D , $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números cuyos términos son los correspondientes valores imágenes, luego podemos pensar en la convergencia o divergencia de la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$. Si para todo $x \in D$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge, se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente en D . La notación usual es

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Así, la función f es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$, esto equivale a la siguiente definición formal.

Definición A.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) una función. Decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente hacia una función límite f , si para cada punto $x \in D$ y para cada $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ (que depende a la vez de x y de ϵ) tal que si $n > N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Si un mismo N sirve para todo punto de D , la convergencia se llama uniforme en D , esto sugiere la siguiente definición.

Definición A.2. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente a f en el conjunto D si, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ (que depende solo de ϵ) tal que $n > N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \text{para cada } x \in D$$

Expresamos esto simbólicamente escribiendo

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente en } D.$$

A.1. Convergencia uniforme y continuidad

Teorema A.3. Sea $D = [a, b]$. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$. Si f_n es continua en $c \in [a, b]$ para todo n , entonces la función límite f es continua en c .

Demostración. Por hipótesis dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } x \in D.$$

Como f_n es continua en c , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Luego, si $|x - c| < \delta$ tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función límite f es continua en c . □

A.2. Convergencia uniforme e integración

Teorema A.4. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$ entonces:

- i) f es integrable en $[a, b]$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$

Demostración. i) Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Es decir

$$f_n(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}. \quad (\text{A.1})$$

Como $f_n(x)$ es integrable en $[a, b]$, existe una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma

$$a = x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = b \quad (\Delta_k x = x_k - x_{k-1})$$

tal que

$$\left| \sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x - \int_a^b f_n(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{4}, \quad (\text{A.2})$$

donde t_k es cualquier punto del k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

De la desigualdad (A.1) tenemos:

$$\sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x - \frac{\epsilon}{4} < \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x < \sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x + \frac{\epsilon}{4}. \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, de (A.2) se tiene que

$$\int_a^b f_n(x) dx - \frac{\epsilon}{4} < \sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x < \sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x + \frac{\epsilon}{4}. \quad (\text{A.4})$$

Luego usando (A.3) y (A.4) se obtiene

$$\int_a^b f_n(x) dx - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{k=1}^n f_n(t_k) \Delta_k x < \int_a^b f_n(x) dx + \frac{\epsilon}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Sean $U(f)$ y $L(f)$ las sumas superior e inferior, respectivamente, definimos:

$$U(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k x, \quad M_k = \sup \left\{ \frac{f(t)}{t} \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$

$$L(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k x, \quad m_k = \inf \left\{ \frac{f(t)}{t} \in [x_{k-1}, x_k] \right\}.$$

De (A.5) se tiene que

$$\int_a^b f_n(x) dx - \frac{\epsilon}{2} \leq L(f) \leq U(f) \leq \int_a^b f_n(x) dx + \frac{\epsilon}{2},$$

es decir

$$U(f) - L(f) \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, la función f satisface la condición de Riemann, es decir que f es integrable Riemann en $[a, b]$.

ii) Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a, b].$$

Luego, como f es integrable en $[a, b]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

□

A.3. Convergencia uniforme de series de funciones

Definición A.5. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, para cada x en D se considera

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Si existe una función f tal que $s_n \rightarrow f$ uniformemente en D , se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Teorema A.6 (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme). *La serie infinita $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en $D \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$ entonces*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{para } p = 1, 2, \dots \text{ y cada } x \in D.$$

Teorema A.7 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $\{M_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que*

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \text{ y cada } x \in D.$$

Entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en D si $\sum M_n$ converge.

Anexo B

Teoremas de convergencia en la integral de Lebesgue

En esta sección consideramos (X, m, μ) un espacio de medida, donde X es un conjunto, m es una σ -álgebra en X , y μ es una medida sobre μ .

Teorema B.1 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea f_n una sucesión de funciones medibles. Si $f_n \rightarrow f$ puntualmente y $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, entonces f es medible, y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

Teorema B.2 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X , tal que*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para cada $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(X)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \in X)$$

entonces $f \in L^1(X)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Teorema B.3 (Fubini). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ esta definida, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy < \infty$; en otras palabras, para casi todo $x \in \mathbb{R}$ fijo, $f(x, y) \in L_1(\mathbb{R})$ como una función de y ; también, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ es integrable como una función de x , y

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx.$$

Teorema B.4 (Continuidad y derivabilidad). Sea $f(x, t)$ una función definida en $E \times (a, b)$ donde E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada t la función $f(x, t)$ es integrable en E y definimos

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx.$$

1. Si la función $t \rightarrow f(x, t)$ es continua en t_0 para cada $x \in E$ y existe g integrable en E tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E para t en un entorno de t_0 , entonces F es continua en t_0 .
2. Si la función $t \rightarrow f(x, t)$ es derivable en un entorno de t_0 y existe g integrable en E tal que $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq g(x)$ en casi todo punto de E para t en un entorno de t_0 , entonces F es derivable en t_0 y

$$F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Bibliografía

- [1] Apostol Tom M., *Mathematical Analysis*, 2^a edition, Addison Wesley Publishing Company, 1974.
- [2] Bachman George, Narici Lawrence, Beckenstein Edward, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag, New York. Inc. 1991.
- [3] Bartle Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jhon Wiley and Sons, 1995.
- [4] Duoandikoetxea Javier, *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*, UNAN-MANAGUA, 2003.
- [5] Pinsky Mark A., *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Brooks/Cole, Pacific Grove, C.A., 2002.
- [6] Rudin Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Vol. 3, 1987.
- [7] Stromberg, K. *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Belmont, California, 1981.