BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Teoremas sobre el intercambio en el orden de integración

T E S I S

que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Jorge Luis Pérez Cordero

Director de tesis:

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

PUEBLA, PUE. *FEBRERO DE 2013*

Teoremas sobre el intercambio en el orden de integración

Dedicado a
mis padres

“La originalidad de las matemáticas
consiste en el hecho de que en la ciencia
matemática se exhiben conexiones entre cosas que,
aparte de por la acción de la razón
humana, son extraordinariamente poco obvias.”
-A.N. Whitehead.

Agradecimientos

A mis padres, a mis hermanos, a mis profesores de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y a mis amigos.

Índice general

Prólogo

En la Teoría de Integración de Riemann el problema de calcular integrales dobles se resuelve, en cierta forma, por el Teorema de Fubini. La idea que encierra este teorema se puede ilustrar de la siguiente manera. Consideremos una función continua positiva $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y se divide $[a, b] \times [c, d]$ en n bandas por medio de los segmentos $\{t_i\} \times [c, d]$. Si g_x se define por $g_x(y) = f(x, y)$, entonces el área de la región debajo del gráfico de f y por encima de $\{x\} \times [c, d]$ es:

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y)dy.$$

El volumen de la región debajo de la gráfica de f y por encima de $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$ es aproximadamente igual a $(t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x, y)dy$, para cada $x \in [t_{i-1}, t_i]$.

Así,

$$\int_a^b \int_c^d f = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_c^d f$$

es aproximadamente igual a

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x_i, y)dy,$$

donde x_i está en $[t_{i-1}, t_i]$.

Por otra parte, sumas análogas a ésta aparecen en la definición de

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Si se define una función h como $h(x) := \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$, es de esperarse que h sea integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_a^b \int_c^d f = \int_a^b h = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Esto efectivamente es cierto si la función f es continua en el rectángulo compacto $[a,b] \times [c,d]$. La cuestion que ahora se presenta es la siguiente: ¿Se puede tener un resultado análogo debilitando la hipótesis de continuidad de la función f en $[a,b] \times [c,d]$ a sólo integrabilidad sobre $[a,b] \times [c,d]$? La respuesta es no. Podemos ver inmediatamente que es imposible evitar ciertas dificultades. Por ejemplo, la integral interior $\int_c^d f(x,y)dy$ puede no existir para ciertos valores de x, aún cuando la integral doble exista. La hipótesis de integrabilidad no es lo suficientemente fuerte para asegurar la existencia de la integral de Riemann $\int_c^d f(x,y)dy$.

Esta dificultad no se presenta en la Teoría de Integración de Lebesgue. El Teorema de Fubini para esta integral se cumple con la única hipótesis de que f sea integrable en el sentido de Lebesgue sobre el rectángulo compacto $[a,b] \times [c,d]$. Aún más, el resultado sigue siendo válido si f es Lebesgue integrable sobre $\mathbb{R}^2$.

En la Teoría de Integración de Henstock-Kurzweil sucede algo similar, el teorema se cumple con únicamente pedir que la función f sea Henstock-Kurzweil integrable, no sólo sobre rectángulos compactos $[a,b] \times [c,d]$, sino también sobre $J \times K$, donde J y $K \subset \overline{\mathbb{R}}$.

La cuestión que ahora surge es la siguiente: ¿Existen algunas otras hipótesis, diferentes a la continuidad y a la integrabilidad, para obtener teoremas tipo Fubini? Si los hay ¿Qúe relación guardan con respecto al Teorema de Fubini? La respuesta a la primera interrogante es afirmativa. Sin embargo como se mostrará en este trabajo estos teoremas, ni generalizan al Teorema de Fubini ni se deducen a partir de él. Estos teoremas son también objeto de nuestro estudio y, de igual forma los analizamos en las distintas integrales arriba mencionadas.

El resultado principal de esta tesis es el Teorema 2.10 donde se utiliza la integral de Henstock-Kurzweil. Este resultado fue publicado en 2009 ([8]). Lo incluimos aquí ya que da respuesta a la interrogantes que acabamos de mencionar.

El desarrollo de este trabajo está dividido en dos capítulos, en el primero se establecen los conceptos básicos de integración, en cada una de las integrales. Los teoremas que se exponen en este capítulo son resultados principales de cada una de las teorías, que permitirán llevar a cabo nuestro objetivo. En el segundo capítulo se hace la exposición sobre teoremas que posibilitan el intercambio en el orden de integración.

Capítulo 1

Conceptos generales de integración

En este capítulo exponemos conceptos básicos de distintas integrales como son: la integral de Riemann, la de Riemann-Stieltjes, la de Lebesgue y por último la de Henstock-Kurzweil. Estos conceptos nos ayudarán a desarrollar el tema principal de la tesis, el cual abordaremos en el capítulo siguiente.

1.1. Integral de Riemann

Una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a, b]$ que incluye a los extremos. **Una partición** $\mathcal{P}$ la representamos ordenando sus puntos de menor a mayor, comenzando en a y terminando en b:

$$\mathcal{P} = \{t_i\}_{i=0}^{n} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ lo indicamos como $\mathcal{P}([a, b])$. Una partición como la indicada divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, cada uno de longitud $t_i - t_{i-1}$.

Sea f una función acotada definida en $[a, b]$, y sea $\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])$. Para cada $i = 0, ..., n$, definimos

$$M_i = sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

La **suma inferior** de f asociada a $\mathcal{P}$ se define como:

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

y la **suma superior** de f asociada a $\mathcal{P}$ es:

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Una función f acotada sobre $[a,b]$ es **Riemann integrable** sobre $[a,b]$ si:

$$sup\{\underline{S}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}([a,b])\} = inf\{\overline{S}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

En este caso, este número recibe el nombre de integral de f sobre $[a,b]$ y se denota por:

$$\int_a^b f.$$

En el análisis matemático es frecuente considerar integrales en las cuales el integrando depende de un parámetro. En tal caso uno desea tener condiciones que aseguren la integrabilidad de la función en cuestión. En esta sección estableceremos las condiciones necesarias para lograr este objetivo.

Teorema 1.1 (Continuidad Uniforme)**.** *Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.*

Teorema 1.2. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$.*

Teorema 1.3 (Del valor medio para integrales)**.** *Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

Consideremos el siguiente rectángulo D en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido como:

$$D = \{(x,t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}. \tag{1.1}$$

Teorema 1.4. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Si definimos una función F como*

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)dx, \tag{1.2}$$

para $t \in [c,d]$, entonces F es continua en $[c,d]$.

Demostración. El Teorema de la Continuidad Uniforme implica que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si t y t_0 están en $[c,d]$ y $|t - t_0| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x,t) - f(x,t_0)| < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_0)| &= \left| \int_a^b f(x,t) - f(x,t_0)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx \\ &\leq \epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Por tanto F es continua de $[c,d]$ a $\mathbb{R}$. □

1.2. Integral de Riemann-Stieltjes

La integral de Riemann-Stieltjes es una modificación a la integral de Riemann obtenida por el reemplazo de la longitud $x_i - x_{i-1}$ de los subintevalos $[x_{i-1}, x_i]$ que aparecen en las sumas de Riemann, por las diferencias $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, donde $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una función dada. Así la integral de Riemann-Stieltjes permite considerar una función longitud para mayor generalidad. Fue introducida por el matemático Thomas J. Stieltjes (1856-1894). Esta integral involucra dos funciones f y α. El símbolo que utilizaremos es $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ o alguno similar. Cabe resaltar que la integral de Riemann se obtiene como caso particular cuando $\alpha(x) = x$. Si α tiene derivada continua, la definición es tal que la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ se convierte en al integral de Riemann $\int_a^b f(x)\alpha\prime(x)dx$. Sin embargo, la integral de Riemann-Stieltjes tiene mayor sentido en el caso en que α es no diferenciable e incluso cuando no es continua. De hecho, al tratar con funciones discontinuas α, es cuando se hace patente la importancia de la integral de Riemann-Stieltjes. Esta modificación de la integral de Riemann ha probado ser de considerable utilidad en problemas físicos como los que consideran la distribución de masas que son en parte discretas y en parte continuas; también en la teoría matemática de la probabilidad y la estadística esta integral es una herramienta muy útil que hace posible la consideración simultánea de variables aleatorias continuas y discretas.

Definamos algunos conceptos que nos serán de utilidad para la exposición de esta sección. Si $\mathcal{P} = \{I_i : i = 1, ..., n\}$ es partición del intervalo $I = [a, b]$, e $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, ..., n$, una **etiqueta** de I_i es un punto $t_i \in I_i$. Si para cada i existe $t_i \in I_i$ se dice que la **partición es etiquetada** y se escribe $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$.

Sean f,$\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas sobre un intervalo compacto $I = [a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de I, entonces una **suma de Riemann-Stieltjes** de f con respecto a α para la partición $\dot{\mathcal{P}}$ es:

$$S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})].$$

Se dice que f es **Riemann-Stieltjes integrable** con respecto a α sobre $[a, b]$ si existe un número real B tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\zeta_\epsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición con $\mu(\dot{\mathcal{P}}) := max_i\{x_i - x_{i-1}\} \leq \zeta_\epsilon$, entonces

$$|S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}) - B| \leq \epsilon.$$

En este caso, se escribe $B = \int_a^b f d\alpha$. A la funcion f se le llama el **integrando**, y a la función α el **integrador**.

Otro concepto que utilizaremos es el de variación acotada de una función. Si α esta definida en $[a, b]$, y si existe un número positivo M tal que para cualquier partición $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leq M,$$

entonces se dice que α **es de variación acotada en** $[a, b]$**.**

El siguiente resultado es conocido como el Criterio de Cauchy para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.5. *Sean f y α funciones acotadas sobre $I := [a, b]$. Entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\theta_\epsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_1$ y $\dot{\mathcal{P}}_2$ son cualesquiera particiones etiquetadas de $[a, b]$ que cumplen que $\mu(\dot{\mathcal{P}}_1) \leq \theta_\epsilon$ y $\mu(\dot{\mathcal{P}}_2) \leq \theta_\epsilon$, entonces*

$$|S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_2)| \quad \leq \quad \epsilon.$$

El siguiente es un teorema de existencia para la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.6. *Si f es continua en $[a, b]$ y α es de variación acotada en $[a, b]$, entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$.*

Demostración. Como f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si t y $s \in [a, b]$ y $|t - s| \leq 2\delta_\epsilon$, entonces $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon$.

Suponga que $\dot{\mathcal{P}}_1 := \{([x_{i-1} - x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ y $\dot{\mathcal{P}}_2 := \{([y_{j-1} - y_j], s_j)\}_{j=1}^m$ son particiones etiquetadas de $[a, b]$ que cumplen que $\mu(\dot{\mathcal{P}}_1) \leq \delta_\epsilon$ y $\mu(\dot{\mathcal{P}}_2) \leq \delta_\epsilon$, y sea $\mathcal{P}_3 := \{[z_{k-1}, z_k]\}_{k=1}^r$ la partición (no etiquetada) que se obtiene al usar todos los puntos x_i y y_j de $\dot{\mathcal{P}}_1$ y de $\dot{\mathcal{P}}_2$. Así cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[y_{j-1}, y_j]$ es unión de un número finito de los subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$, por tanto si $[z_{k-1}, z_k]$ está contenido en la intersección $[x_{i-1}, x_i] \cap [y_{j-1}, y_j]$, entonces las etiquetas t_i, s_j satisfacen $|t_i - s_j| \leq 2\delta_\epsilon$, luego $|f(t_i) - f(s_j)| \leq \epsilon$.

La suma Riemann-Stieltjes $S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_1)$ puede escribirse como una suma sobre los subintervalos en $\mathcal{P}_3$, esto es

$$\begin{aligned} S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_1) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{r} f(t_i)[\alpha(z_k) - \alpha(z_{k-1})], \end{aligned}$$

donde t_i es la etiqueta en $\dot{\mathcal{P}}_1$ correspondiente al único subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que contiene $[z_{k-1}, z_k]$. De igual forma, $S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_2)$ pude escribirse como una suma sobre $\mathcal{P}_3$, usando ahora puntos s_j que son etiquetas correspondientes al único subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ que contiene $[z_{k-1}, z_k]$. Se puede ver que

$$S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_2) = \sum_{k=1}^{r} [f(t_i) - f(s_j)][\alpha(z_k) - \alpha(z_{k-1})].$$

Por tanto tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f, \alpha, \dot{\mathcal{P}}_2)| &\leq \sum_{k=1}^{r} \epsilon |\alpha(z_k) - \alpha(z_{k-1})| \\ &\leq \epsilon \cdot Var(\alpha, [a, b]). \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, el Teorema 1.5 implica que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$. $\square$

Teorema 1.7. *Sea f una función continua en $\mathcal{D} := \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Supongamos que α es de variación acotada en $[a,b]$ y sea F la función definida en $[c,d]$ por medio de la relación*

$$F(y) \quad = \quad \int_a^b f(x,y)d\alpha(x). \tag{1.3}$$

Entonces F es continua en $[c,d]$. En otras palabras, si $y_0 \in [c,d]$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)d\alpha(x) &= \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)d\alpha(x) \\ &= \int_a^b f(x,y_0)d\alpha(x). \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que α es monótona creciente en $[a,b]$. Dado que $\mathcal{D}$ es un conjunto compacto, f es uniformemente continua en $\mathcal{D}$. Así dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada par de puntos $z = (x,y)$ y $z\prime = (x\prime, y\prime)$ de $\mathcal{D}$ tales que $|z - z\prime| < \delta$, tenemos $|f(z) - f(z\prime)| < \epsilon$. Si $|y - y\prime| < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y\prime)| &\leq \int_a^b |f(z) - f(z\prime)|d\alpha(x) \\ &\leq \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

Esto establece la continuidad de F en $[c,d]$. □

Cabe resaltar que, cuando $\alpha(x) = x$, este resultado se convierte en un teorema de continuidad para las integrales de Riemann que dependen de un parámetro.

En la integral de Riemann-Stieltjes existe una notable relación entre el integrando y el integrador. La existencia de $\int_a^b f d\alpha$ implica la existencia de $\int_a^b \alpha df$, y el recíproco también es cierto. Además, entre ambas integrales se verifica una relación interesante que expresa una cierta ley de reciprocidad para la integral, se le conoce con el nombre de **integración por partes**.

Teorema 1.8 (Integración por partes)**.** *Sean $f, \alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$ si y sólo si α es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a f en $[a, b]$ y se tiene que*

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df \quad = \quad f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a). \tag{1.4}$$

El siguiente lema será de gran utilidad para probar que en la integral de Riemann-Stieltjes se cumple un teorema del valor medio.

Lema 1.1. *Sea α función monótona creciente en $[a, b]$ y suponga que f es integrable con respecto a α en $[a, b]$. Entonces $|f|$ es integrable con respecto a α en $[a, b]$ y*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| [\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{1.5}$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f d\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{1.6}$$

Teorema 1.9 (Del valor medio para la integral de Riemann-Stieltjes)**.** *Supongamos que α es monótona creciente y que f es Rieman-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$. Si M y m designan, respectivamente, el sup y el inf del conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Entonces existe un número real c que satisface $m \leq c \leq M$ tal que*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{1.7}$$

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces $c = f(x_0)$ para algún x_0 en $[a, b]$.

Demostración. Si $m = inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ por Lema 1.1 se tiene que

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f d\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Si $\alpha(b) = \alpha(a)$, entonces la relación (1.7) es inmediata; si $\alpha(b) > \alpha(a)$, entonces aplicando el Teorema del Valor Intermedio de Bolzano, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f d\alpha}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

$\square$

1.3. Integral de Lebesgue

La integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ es frecuentemente motivada por el concepto geométrico de área, esto es, dada una función continua, no negativa sobre el intervalo $[a, b]$ y una consideración de rectángulos inscritos y circunscritos para la curva; las sumas de las áreas de estos rectángulos generan estimaciones superiores e inferiores para el área bajo la curva. Conforme la partición llega a ser más fina esas estimaciones aproximan mejor el área bajo la curva. La integral de Riemann es el límite común de estas estimaciones cuando la longitud de la partición tiende a cero. Las dificultades surgen cuando este proceso trata de ser aplicado a funciones que no son continuas. No hay problema para funciones que son continuas a trozos, pero no así con funciones de pésima discontinuidad tal como $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ (la función característica de los números racionales) que no tiene integral de Riemann en $[0, 1]$. La interpretación de área llega a ser poco clara, pero no es difícil convencerse que el área bajo $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ deberá ser cero. La incapacidad para enfrentarse con funciones discontinuas es una de las deficiencias de la integral de Riemann. La integral de Riemann también tiene otras severas deficiencias, no cubre con todas las necesidades de un ánalisis superior. En esta sección trataremos una extensión de la integral de Riemann, la integral de Lebesgue. Esta integral fue introducida en 1902 por el matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) con el objetivo de “corregir” ciertos defectos en la integral de Riemann. La integral de Lebesgue permite integrar funciones más generales, trata simultáneamente funciones acotadas y no acotadas y permite reemplazar el intervalo $[a, b]$ por conjuntos más generales. Esta integral es una de las más usadas en investigaciones modernas de matemáticas.

Definiremos algunos conceptos acerca de esta integral que utilizaremos en esta sección. Una función s, definida en un intervalo compacto $[a, b]$ se dice **función escalonada** si existe una partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada subintervalo abierto, por ejemplo:

$$s(x) = c_k \qquad \text{si} \qquad x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Una función escalonada es Riemann integrable en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y su integral sobre el mismo está dada por

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s(x)dx = c_k(x_k - x_{k-1}),$$

independientemente de los valores de s en los extremos.
La integral de Riemann de s en $[a,b]$ es por consiguiente igual a la suma

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}). \tag{1.8}$$

Hay que señalar que la suma en (1.8) es independiente de la elección de $\mathcal{P}$ mientras s sea constante en los subintervalos abiertos de $\mathcal{P}$.

Es conveniente eliminar la restricción que supone exigir que el dominio de una función escalonada sea compacto, esto es, supongamos que I denota un intervalo cualquiera (acotado, no acotado, abierto, cerrado o semiabierto). Una función s es **una función escalonada en** I si existe un subintervalo compacto $[a,b]$ de I en el que s sea una función escalonada en $[a,b]$, si además $s(x) = 0$ para $x \in I - [a,b]$. La integral de s en I, designada por $\int_I s(x)dx$ o por $\int_I s$, es la integral de s en $[a,b]$, dada por (1.8). Existen muchos intervalos compactos fuera de los cuales la función s se anula, pero la integral de s es independiente de la elección de $[a,b]$.

Un subconjunto $T \in \mathbb{R}$ tiene **medida cero** si, para cada $\epsilon > 0$, es posible recubrir a T por medio de una colección numerable de intervalos, la suma de cuyas longitudes es menor que ϵ. Se dice que una propiedad se verifica **casi en todo un conjunto** S, lo abreviaremos c.e.t S, si se verifica en todo S salvo en un conjunto de medida cero.

Una función real f definida en un intervalo I se dice **función superior en** I, y se denota $f \in \mathcal{U}(I)$, si existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que:

(a) s_n converge a f c.e.t I

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n$ es finito.

Si existe una sucesión que cumpla con las condiciones anteriores se dice que la sucesión s_n genera a f. La integral de f en I se define como:

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n.$$

Observe que $\{\int_I s_n\}$ es una sucesión de números reales creciente, la condición (b) equivale a afirmar que la sucesión $\{\int_I s_n\}$ está acotada superiormente.

Denotamos por $\mathcal{L}(I)$ al conjunto de todas las funciones f de la forma $f = u - v$, donde u, $v \in \mathcal{U}(I)$. Cada función f de $\mathcal{L}(I)$ se llamará **función Lebesgue integrable en** I**,** y su integral se define por medio de la relación:

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v.$$

Toda función $f \in \mathcal{L}(I)$ se puede escribir como diferencia de dos funciones superiores y no necesariamente de forma única.

Toda función f Lebesgue integrable en un intervalo I es el límite, c.e.t. I, de una cierta sucesión de funciones escalonadas. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función constante $f = 1$ es un límite de funciones escalonadas sobre la recta real $\mathbb{R}$, pero esta función no está en $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Por tanto la clase de funciones que son límites de funciones escalonadas es más amplia que la clase de funciones que son Lebesgue integrables. Las funciones de esta clase más amplia se llaman funciones medibles.

Una función f definida en I se dice **medible en** I, y se denota $f \in \mathcal{M}(I)$, si existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ en I tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \qquad c.e.t. \qquad I.$$

Teorema 1.10. *Supongamos que $f \in \mathcal{L}(I)$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces:*

(a) Existen funciones u y v de $\mathcal{U}(I)$ tales que $f = u - v$, donde v es no negativa c.e.t. I e $\int_I v < \epsilon$.

(b) Existe una función escalonada s y una función g en $\mathcal{L}(I)$ tales que $f = s + g$, donde $\int_I |g| < \epsilon$.

Demostración. (a) Dado que $f \in \mathcal{L}(I)$, podemos escribir $f = u_1 - v_1$, donde u_1, v_1 son funciones de $\mathcal{U}(I)$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión que genere a v_1. Ya que $\int_I t_n \to \int_I v_1$, podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $0 \leq \int_I (v_1 - t_N) < \epsilon$. Sea $v = v_1 - t_N$ y $u = u_1 - t_N$. Así $u, v \in \mathcal{U}(I)$ y $u - v = u_1 - v_1 = f$. Además v es no negativa *c.e.tI* y se tiene que $\int_I v < \epsilon$.

(b) Para este inciso utilizaremos la parte (a) del teorema para elegir u y v de $\mathcal{U}(I)$ de tal manera que $0 \leq v \quad c.e.t.I$,

$$f = u - v$$

y

$$0 \leq \int_I v < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora elegimos una función escalonada s tal que $0 \leq \int_I (u - s) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$f = u - v = s + (u - s) - v = s + g,$$

donde $g = (u - s) - v$. Luego $g \in \mathcal{L}(I)$ y

$$\int_I |g| \leq \int_I |u - s| + \int_I |v| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

Teorema 1.11. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{L}(I)$ tal que*

(a) $\{f_n\}$ es creciente casi en todo I,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n$ existe.

Entonces $\{f_n\}$ converge casi en todo I hacia una función límite $f \in \mathcal{L}(I)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Teorema 1.12 (Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Lebesgue integrables en un intervalo I. Supongamos que:*

(a) $\{f_n\}$ converge casi en todo I hacia una función f, y

(b) existe una función no negativa g de $\mathcal{L}(I)$ tal que, para cada $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad c.e.t.\ I.$$

Entonces $f \in \mathcal{L}(I)$, la sucesión $\{\int_I f_n\}$ converge y además

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \tag{1.9}$$

Demostración. La prueba de este resultado esta estructurada de la siguiente manera:

- Obtener cotas superiores e inferiores de la forma:

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq G_n(x) \tag{1.10}$$

  donde la sucesión $\{g_n\}$ sea creciente y la sucesión $\{G_n\}$ sea decreciente casi en todo I hacia la función límite f.

- Utilizaremos el Teorema 1.11 para mostrar que $f \in \mathcal{L}(I)$ y que

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \lim_{n\to\infty} \int_I G_n,$$

para así obtener (1.9).

Para construir $\{g_n\}$ y $\{G_n\}$, utilizamos repetidas veces el Teorema 1.11.

Definimos una sucesión $\{G_{n,1}\}$ como sigue:

$$G_{n,1}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}.$$

Notar que cada función $G_{n,1} \in \mathcal{L}(I)$, y que la sucesión $\{G_{n,1}\}$ es creciente en I. Dado que $|G_{n,1}| \leq g(x)$ casi en todo I, tenemos

$$\left|\int_I G_{n,1}\right| \leq \int_I |G_{n,1}| \leq \int_I g. \tag{1.11}$$

Así la sucesión $\{\int_I G_{n,1}\}$ es creciente y acotada superiormente por $\int_I g$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I G_{n,1}$ existe.

Aplicando el Teorema 1.11, la sucesión $\{G_{n,1}\}$ converge casi en todo I hacia una función $G_1 \in \mathcal{L}(I)$ y además

$$\int_I G_1 = \lim_{n\to\infty} \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

Dado que se cumple (1.11) tenemos también la desigualdad $-\int_I g \leq \int_I G_1$. Notemos que si $x \in I$ para el que $G_{n,1}(x) \to G_1(x)$, entonces tenemos también que

$$G_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\}.$$

Así mismo, para cada $r \geq 1$ consideramos

$$G_{n,r}(x) = \max\{f_r(x), f_{r+1}(x), ..., f_n(x)\}$$

para $n \geq r$. Entonces la sucesión $\{G_{n,r}\}$ es creciente y converge casi en todo I hacia una función límite G_r de $\mathcal{L}(I)$ con

$$-\int_I g \leq \int_I G_r \leq \int_I g.$$

Además, en todos los puntos en los que $G_{n,r}(x) \to G_r(x)$, tenemos

$$G_r(x) = \sup\{f_r(x), f_{r+1}(x), ...\},$$

luego

$$f_r(x) \leq G_r(x)$$

casi en todo I.

Examinemos ahora las propiedades de la sucesión $\{G_n(x)\}$. La sucesión $\{G_r(x)\}$ es decreciente casi en todo I, por tanto converge casi en todo I. Ahora notemos que $G_n(x) \to f(x)$ siempre que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{1.12}$$

Si se verifica (1.12), entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un natural N tal que

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

para cada $n \geq N$.

Luego, si $m \geq N$ tenemos

$$f(x) - \epsilon \leq \sup\{f_m(x), f_{m+1}(x), ...\} \leq f(x) + \epsilon.$$

En otras palabras, $m \geq N$ implica que

$$f(x) - \epsilon \leq G_m(x) \leq f(x) + \epsilon,$$

es decir

$$\lim_{m\to\infty} G_m(x) = f(x), \tag{1.13}$$

casi en todo I.

Por otro lado, la sucesión $\{\int_I G_n\}$ está acotada inferiormente por $-\int_I g$, por tanto converge. Por (1.13) y el Teorema 1.11, vemos que $f \in \mathcal{L}(I)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I G_n = \int_I f.$$

Si aplicamos el mismo tipo de razonamiento a la sucesión

$$g_{n,r}(x) = \min\{f_r(x), f_{r+1}(x), ..., f_n(x)\},$$

para $n \geq r$, obtenemos que $\{g_{n,r}\}$ decrece y converge casi en todo I hacia una función límite g_r de $\mathcal{L}(I)$, donde

$$g_r(x) = \inf\{f_r(x), f_{r+1}(x), ...\}$$

casi en todo I. Además, se tiene que $g_r(x) \leq f_r(x)$ casi en todo I, $\{g_r\}$ es creciente, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n = \int_I f.$$

Dado que (1.10) se verifica casi en todo I, tenemos que

$$\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq \int_I G_n.$$

Si $n \to \infty$ tendremos que $\{\int_I f_n\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

□

El siguiente teorema es de utilidad para hallar funciones que son Lebesgue integrables.

Teorema 1.13. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{L}(I)$ que convergen c.e.t I a una función f. Supongamos que existe una función no negativa g de $\mathcal{L}(I)$ tal que*

$$|f(x)| \leq g(x) \;\; c.e.t.I.$$

Entonces $f \in \mathcal{L}(I)$.

Demostración. Para la prueba definamos una sucesión de funciones $\{g_n\}$ en I de la siguiente manera

$$g_n = \text{máx}\{\text{mín}(f_n, g), -g\}.$$

Geométricamente la función g_n, se obtiene a partir de la función f_n cortándole la parte de la gráfica que se halla por encima de g y la que se halla por debajo de $-g$. (Ver Figura 1.1). Entonces se tiene que $|g_n(x)| \leq g(x)$ c.e.t. I, así $g_n \to f$ c.e.t. I. Luego, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, $f \in \mathcal{L}(I)$. □

Hemos señalado que toda función de $\mathcal{L}(I)$ es medible en I y que el recíproco es falso. El teorema que sigue proporciona un recíproco parcial.

Teorema 1.14. *Si $f \in \mathcal{M}(I)$ y $|f(x)| \leq g(x)$ c.e.t. I para la función no negativa g de $\mathcal{L}(I)$, entonces $f \in \mathcal{L}(I)$.*

Demostración. Existe una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que $s_n(x) \to f(x)$ c.e.t. I. Luego, por el Teorema 1.13, $f \in \mathcal{L}(I)$. □

Los siguientes corolarios muestran algunas de las propiedades de las funciones medibles.

Corolario 1.1. *Si $f \in \mathcal{M}(I)$ y $|f| \in \mathcal{L}(I)$, entonces $f \in \mathcal{L}(I)$.*

Corolario 1.2. *Si f es medible y acotada en un intervalo acotado I, entonces $f \in \mathcal{L}(I)$.*

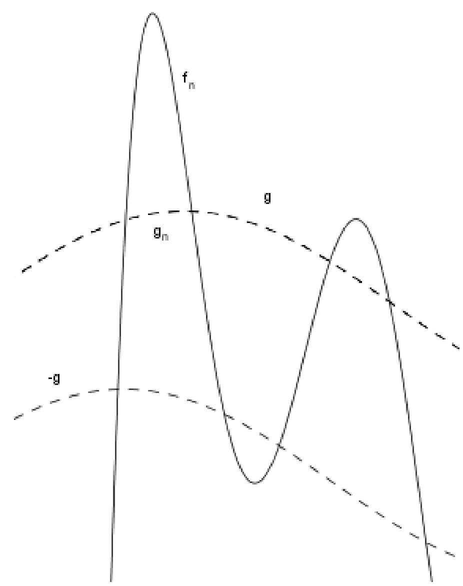

Figura 1.1: Del Teorema 1.13.

Teorema 1.15. *Sean X e Y dos subintervalos de $\mathbb{R}$ y sea f una función definida en $X \times Y$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $y \in Y$, la función f_y definida en X por medio de la relación

$$f_y(x) = f(x, y)$$

es medible en X.

(b) Existe una función no negativa $g \in \mathcal{L}(X)$ tal que, para cada $y \in Y$,

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

casi en todo X.

(c) Para casi todo $x \in X$, $f(x, y)$ es una función de y continua en Y.

Entonces la integral de Lebesgue

$$\int_X f(x, y)dx$$

existe para cada $y \in Y$, y la función F definida por la relación

$$F(y) = \int_X f(x, y)dx$$

es continua en Y. Esto es, si $y \in Y$ tenemos

$$\lim_{t \to y} \int_X f(x, t)dx = \int_X \lim_{t \to y} f(x, t)dx.$$

Demostración. Como f_y es medible en X y dominada casi en todo X por una función no negativa $g \in \mathcal{L}(X)$, el Teorema 1.14 prueba que $f_y \in \mathcal{L}(X)$, es decir la integral de Lebesgue $\int_X f(x, y)dx$ existe para cada $y \in Y$.

Ahora elegimos un punto fijo $y \in Y$. Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Probaremos que $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(y)$. Sea $G_n(x) = f(x, y_n)$, cada $G_n(x) \in \mathcal{L}(X)$, luego por (c) $G_n(x) \to f(x, y)$ casi en todo X. Notar que $F(y_n) = \int_X G_n(x)$. Por la hipótesis (b) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que $\{F(y_n)\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \int_X f(x, y)dx = F(y).$$

□

Para el resto de esta sección vamos a considerar lo siguiente:
La función $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto f(x, t)$ es medible en X para cada $t \in [a, b]$.

Teorema 1.16. *Suponga que para algún $t_0 \in [a,b]$, $f(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} f(x,t)$ para cada $x \in X$ y que existe una función integrable g sobre X tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$.*

Entonces

$$\lim_{t\to t_0} \int f(x,t)d\mu(x) = \int f(x,t_0)d\mu(x).$$

Demostración. Sea $\{t_n\}$ en $[a,b]$ tal que $t_n \to t_0$, así $f_n(x) = f(x,t_n)$ para $x \in X$, luego $\lim_{n\to\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0)$, por la hipótesis existe g función integrable sobre X tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t\to t_0} \int f(x,t)d\mu(x) = \int f(x,t)d\mu(x).$$

□

Teorema 1.17. *Si la función $t \mapsto f(x,t)$ es continua en $[a,b]$ para cada $x \in X$ y si existe g función integrable sobre X tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$, entonces la función F definida por*

$$F(t) = \int f(x,t)d\mu(x)$$

es continua para $t \in [a,b]$.

Demostración. Como $t \mapsto f(x,t)$ es continua en $[a,b]$ para cada $x \in X$, se tiene que $\lim_{x\to x_0} f(x,t) = f(x_0,t)$, luego como $|f(x,t)| \leq g(x)$, por el Teorema 1.16

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \int f(x,t)d\mu(x) &= \int f(x,t)d\mu \\ F(t) &= \lim_{x\to x_0} \int f(x,t)d\mu(x). \end{aligned}$$

Por tanto F es continua. □

Teorema 1.18. *Suponga que para algún $t_0 \in [a,b]$ la función $x \mapsto f(x,t_0)$ es integrable sobre X, que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe sobre $X \times [a,b]$, y que existe una función integrable g sobre X tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$. Entonces la función*

$$F(t) = \int f(x,t_0)d\mu(x)$$

es diferenciable sobre $[a,b]$ y

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

Demostración. Sea $t_0 \in [a,b]$, $\{t_n\}$ una sucesión en $[a,b]$ tal que $t_n \to t_0$, $t_n \neq t_0$.

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}, x \in X.$$

Así, $\frac{\partial f}{\partial}(x,t)$ es medible.

Si $x \in X$ y $t \in [a,b]$ por el Teorema del Valor Medio, existe s_1 tal que $t_0 < s_1 < t$ y,

$$\begin{aligned} f(x,t) - f(x,t_0) &= (t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1) \\ f(x,t) &= (t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1) + f(x,t_0) \\ f(x,t) &= f(x,t_0) + (t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1) \\ |f(x,t)| &\leq |f(x,t_0)| + |t-t_0|g(x). \end{aligned}$$

Lo cual muestra que la función $x \mapsto f(x,t)$ es integrable para cada $t \in [a,b]$.

Luego si $t_n \neq t$

$$\begin{aligned}
\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \frac{\int f(x,t_n)d\mu - \int f(x,t)d\mu}{t_n - t} \\
&= \frac{\int f(x,t_n) - f(x,t)d\mu}{t_n - t} \\
&= \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu.
\end{aligned}$$

Nótese que:

$$\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_n) \leq g(x),$$

por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \\
&= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu \\
&= \frac{d}{dt}\int f(x,t)d\mu.
\end{aligned}$$

□

1.4. Integral de Henstock-Kurzweil

Iniciaremos desarrollando algunas ideas fundamentales sobre la integral de Henstock-Kurzweil. Los conceptos y teoremas expuestos en esta sección pueden consultarse en [2]. Si $\mathcal{P} := \{I_i : i = 1, ..., n\}$ es una partición del intervalo $I = [a, b]$ tal que, para cada subintervalo I_i existe un punto $t_i \in I_i$, entonces decimos que t_i es una **etiqueta** de I_i. En este caso, decimos que la **partición es etiquetada** y se escribe $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$. Dado $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces una función $\delta : I \to \mathbb{R}$ es una **función medidora** sobre I, si $\delta(t) > 0$ para toda $t \in I$. Al intervalo $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ se le dice **controlado por una función medidora**. Sea $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ y δ es una función medidora sobre $I = [a, b]$, entonces decimos que $\dot{\mathcal{P}}$ es $\delta -$ **fina** si $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para toda $i = 1, ..., n$.

Una función $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es **Henstock-Kurzweil integrable sobre** I, si existe un número $A \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \epsilon > 0$, existe una función medidora δ_ϵ sobre I tal que si $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de I que es $\delta_\epsilon - fina$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \epsilon.$$

El número A será la integral de f sobre $I := [a, b]$ y se denotará como:

$$A = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_I f dx.$$

Se puede mostrar que A es único ([2]). La colección de todas las funciones que son Henstock-Kurzweil Integrables sobre un intervalo I las denotaremos por $HK(I)$.

Se puede definir esta integral sobre intervalos no acotados, esto es, se define la integral de una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde puede ser de la siguiente forma: $[-\infty, \infty], [-\infty, a] o [a, \infty]$. Primeramente definiremos algunos conceptos de utilidad. **Una partición etiquetada** $\dot{\mathcal{P}}$ del intervalo $[a, \infty]$ en $\bar{\mathbb{R}}$: se define como:

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_0, x_1], t_1), ..., ([x_{n-1}, x_n], t_n), ([x_n, x_{n+1}], t_{n+1})\}$$

de tal forma que: $x_0 = a$ y $x_{n+1} = \infty$. Se define $f(\infty) := 0$. También definimos una partición $\delta-$fina, $\dot{\mathcal{P}}$ de tal manera que la etiqueta final $t_{n+1} = \infty$, así el término final en la suma de Riemann $S(f, \dot{\mathcal{P}})$ es $f(\infty)(\infty - x_n)$ el cual es igual a cero. Se define también una **función medidora** sobre $[a, \infty]$ como una función real valuada que es estrictamente positiva, δ, definida sobre $[a, \infty]$. Se dice que la partición $\dot{\mathcal{P}}$ es $\delta-$fina si los subintervalos finitos satisfacen:

$$[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$$

para $i = 1, ..., n$, y si el subintervalo finito $[x_n, \infty]$ satisface $[x_n, \infty] \subset [\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty]$ o de manera equivalente $\frac{1}{\delta(\infty)} \leq x_n$. Como el subintervalo final $[x_n, \infty]$ es el único subintervalo en $\dot{\mathcal{P}}$ que contiene a ∞, la condición de que $\dot{\mathcal{P}}$ sea $\delta-$fina obliga que la etiqueta $t_{n+1} = \infty$. Ahora ya que $f(\infty) = 0$, entonces para cualquier partición $\dot{\mathcal{P}}$ que sea $\delta-$fina, la suma de Riemann queda como:

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

y todos los términos son números reales finitos. Con esto en mente podemos definir la integral de Henstock-Kurzweil de una función $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ que suponemos se ha ampliado como $f(\infty) := 0$. Si $I := [a, \infty]$ y $f : I = [a, \infty) \to \mathbb{R}$, entonces se dice que f es **Henstock-Kurzweil integrable sobre** $[a, \infty]$ si existe un número $C \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una función medidora δ_ϵ sobre $[a, \infty)$, entonces

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - C| \leq \epsilon.$$

Al conjunto de todas las funciones Henstock-Kurzweil integrables sobre $[a, \infty]$ lo denotamos por $HK([a, \infty))$. Si f es $HK([a, \infty))$ escribiremos:

$$C = \int_I f = \int_a^\infty f = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Se obtienen definiciones análogas para el resto de los casos.

En la Integral desarrollada por Henstock y Kurzweil se tienen Teoremas de Convergencia similares a los existentes en la Teoría de Integración de Lebesgue. A continuación exponemos el Lema de Fatou y el Teorema de la Convergencia Dominada en esta integral.

Lema 1.2 (Fatou)**.** *Sean* $f_k, \alpha \in HK(I)$ *tal que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \tag{1.14}$$

para cada $x \in I, k \in \mathbb{N}$. *Además suponga que*

$$\liminf_{k\to\infty} \int_I f_k < \infty. \tag{1.15}$$

Entonces $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k \in HK(I)$ *y*

$$-\infty < \int_I \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k < \infty. \tag{1.16}$$

El siguiente resultado es una extensión a la integral de Henstock-Kurzweil del Teorema 1.12, probado en 1908 por Lebesgue, este resultado es clave en la Teoría de Integración.

Teorema 1.19 (Convergencia Dominada)**.** *Sea* $\{f_k\}$ *una sucesión de funciones* $HK(I)$ *donde* $\lim f_k = f(x)$ *para cada* $x \in I := [a, b]$. *Suponga que existen funciones* $\alpha, w \in KH(I)$ *tal que:*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \leq w(x), \tag{1.17}$$

para $x \in I, k \in \mathbb{N}$. *Entonces* $f \in HK(I)$ *y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f_k = \int_I f. \tag{1.18}$$

Demostración. La hipótesis implica que $f(x) = \text{lím}\, f_k(x) = \text{lím inf}\, f_k(x) \in \mathbb{R}$ para cada $x \in I$. De (1.17) se tiene que

$$\int_I \alpha \leq \int_I f_k \leq \int_I w$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, dado que $\text{lím inf} \int_I f_k$ y $\text{lím sup} \int_I f_k$ existen. Por el Lemma 1.2, se tiene entonces que $f \in HK(I)$ y que

$$\int_I f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{1.19}$$

Si aplicamos el Lema de Fatou a la sucesión $\{-f_k\}$, junto con el hecho de que $\text{lím inf}(-x_k) = -\text{lím sup}(x_k)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} -\int_I f &= \int_I (-f) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_I (-f_k) \\ &= -\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k \leq \int_I f. \tag{1.20}$$

Las ecuaciones (1.19) y (1.20) implican que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_I f_k = \int_I f.$$

□

Teorema 1.20. *Suponga que f es medible sobre $I := [a, b]$, entonces $f \in HK(I)$ si y sólo si existen $\alpha, w \in HK(I)$ tal que*

$$\alpha(x) \leq f(x) \leq w(x) \ \textit{para casi toda}\ x \in I. \tag{1.21}$$

Demostración. Si $f \in HK(I)$, basta con tomar $\alpha = w = f$.
Sea $\{s_n\}$ una sucesión de funciones escalonadas tal que $\{s_n\} \to f(x)$ para casi todo $x \in I$ y sea $\bar{s_n} = mid\{\alpha, s_n, w\}(x)$ [1], por tanto $\alpha(x) \leq \bar{s_n}(x) \leq w(x)$ para $x \in I$. Ahora como $\bar{s_n}(x) \to f(x)$ casi en todo I, aplicando el Teorema 1.19 se tiene que $f \in HK(I)$. □

Teorema 1.21. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{M}(I)$ y si $f_n \to f$ casi en todo $I := [a, b]$, entonces $f \in \mathcal{M}(I)$.*

Teorema 1.22. *Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in T := [c, d]$ la función $x \mapsto f(x, t)$ es medible sobre $I := [a, b]$ y suponga que:*

(i) Existe $t_0 \in T$ tal que $f(x, t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} f(x, t)$ para cada $x \in I$.

(ii) Existen funciones $\alpha, w \in HK(I)$ tal que $\alpha(x) \leq f(x, t) \leq w(x)$ para cada $x \in I, t \in T$.

Entonces la función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(t) := \int_a^b f(x, t)dx \tag{1.22}$$

existe sobre T y $F(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} F(t)$, esto es:

$$\int_a^b f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f(x, t)dx. \tag{1.23}$$

Demostración. Como la función $x \mapsto f(x, t)$ es medible sobre $I := [a, b]$ y además existen funciones $\alpha, w \in HK(I)$ tal que $\alpha(x) \leq f(x, t) \leq w(x)$ para cada $x \in I, t \in T$, el Teorema 1.20 implica que $x \mapsto f(x, t) \in HK(I)$ para cada $t \in T$. Por tanto la función F está definida sobre T. Ahora sea $\{t_n\}$ una sucesión en T que converja

[1] Aquí $mid\{\alpha, s_n, w\}(x)$ denota el medio de los números reales $\alpha(x), s_n(x), w(x)$; mid por su abreviatura en inglés middle.

a t_0. Si definimos $\widehat{f}_n(x) := f(x, t_n)$ y $\widehat{f}(x) := f(x, t_0)$ para $x \in I$, por la hipótesis (i),(ii) y el Teorema 1.19, tenemos que

$$F(t_0) = \int_a^b \widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widehat{f}_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Como $\{t_n\}$ es una sucesión arbitraria en T que converge a t_0, se tiene entonces que $F(t_0) = \lim_{t\to t_0} F(t)$. □

Teorema 1.23. *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $t \in T := [c,d]$, la función $x \mapsto f(x,t)$ es medible sobre $I := [a,b]$ y suponga que:*

(i) La función $t \mapsto f(x,t)$ es continua sobre T para cada $x \in I : [a,b]$.

(ii) Existen funciones $\alpha, w \in HK(I)$ tal que:

$$\alpha(x) \le f(x) \le w(x) \text{ para casi toda } x \in I, t \in T.$$

Entonces la función $F : T \to \mathbb{R}$ definida como:

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$$

es continua sobre T.

Demostración. Basta con aplicar el Teorema 1.22 a cada punto de T. □

Teorema 1.24. *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $t \in T := [c,d]$, la función $x \mapsto f(x,t)$ es medible sobre $I := [a,b]$ y suponga que:*

(i) Existe $t_0 \in T$ tal que la función $x \mapsto f(x,t_0) \in HK(I)$.

(ii) La derivada parcial $f_t := \frac{\partial f}{\partial t}$ existe sobre $I \times T$.

(iii) Existen $\alpha, w \in HK(I)$ tal que:

$$\alpha(x) \le f_t(x,t) \le w(x)$$

para cada $x \in I, t \in T$.

Entonces se concluye que:

(a) La función $x \mapsto f(x,t) \in HK(I)$ *para cada* $t \in T$.

(b) La función $x \mapsto f_t(x,t) \in HK(I)$ *para cada* $t \in T$.

(c) La función $F : I \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ *está definida y es diferenciable sobre* T *y*

$$F'(t) = \int_a^b f_t(x,t)dx \tag{1.24}$$

para cada $t \in T$.

Demostración. (a) Sea t_0 como en (i). Si $x \in I$ y $t \in T$, $t \neq t_0$, son fijos, entonces por la hipótesis (ii) y el Teorema del Valor Medio existe un punto s entre t y t_0 tal que

$$f(x,t) - f(x,t_0) = (t - t_0)f_t(x,s).$$

Luego, si $t \geq t_0$, la hipótesis (iii) implica que

$$f(x,t_0) + (t-t_0)\alpha(x) \leq f(x,t) \leq f(x,t_0) + (t-t_0)w(x),$$

mientras que si $t \leq t_0$, entonces la hipótesis (iii) implica que

$$f(x,t_0) + (t-t_0)w(x) \leq f(x,t) \leq f(x,t_0) + (t-t_0)\alpha(x).$$

Dado que f es medible, a las desigualdades anteriores podemos aplicarles el Teorema 1.20, así para cada $t \in T$, la función $x \mapsto f(x,t) \in HK(I)$.

(b) Sean $t \in T$ fijo y $\{t_n\}$ cualquier sucesión en T con $t_n \neq t$,tal que $t_n \to t$. Por la hipótesis (ii)

$$f_t(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \text{ para } x \in I.$$

Dado que f es medible, el Teorema 1.21 implica que la función $x \mapsto f_t(x,t)$ es medible sobre I. De la hipótesis (iii) y el Teorema 1.20, se concluye que para cada $t \in T$ la función $x \mapsto f_t(x,t) \in HK(I)$.

(c) Si $t \in T$ es fijo y $\{t_n\}$ es como antes, la hipótesis (ii) y otra aplicación del Teorema del Valor Medio implican que:

$$\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} = f_t(x, s_n),$$

donde $s_n = s_n(x, t_n, t)$ se encuentra entre t_n y t, así la hipótesis (ii) implica que

$$\alpha(x) \leq \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \leq w(x).$$

Ahora como

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_a^b \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} dx,$$

entonces aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que:

$$\lim_{n\to} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_a^b f_t(x,t)dx.$$

Como $\{t_n\}$ es una sucesión arbitraria que converge a t con $t_n \neq t$, se tiene que $F'(t)$ existe y además para cada $t \in T$

$$F'(t) = \int_a^b f_t(x,t)dx.$$

$\square$

Para que una función f sea HK-integrable sobre $I = [a, b]$ se requiere que, dado $\epsilon > 0$ exista una función medidora δ_ϵ sobre I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición δ_ϵ-fina de I, entonces la suma de Riemann $S(f, \dot{\mathcal{P}})$ satisface la desigualdad $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| \leq \epsilon$. El Lema de Sacks-Henstock, que veremos a continuación, asegura que el mismo grado de aproximación es válido para la diferencia entre cualquier subconjunto de términos de esta suma de Riemann y de la suma de la integral de f sobre los correspondientes subintervalos. Este hecho puede no parecer sorprendente cuando los subintervalos en el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ consiste de intervalos colindantes.

Así, no es del todo obvio que el resultado siga siendo verdadero para una colección arbitraria de subintervalos. Incluso sucede algo más, podemos reemplazar el valor absoluto de la suma de esas diferencias por la suma de los valores absolutos y todavía tener esencialmente el mismo grado de aproximación. Pero antes necesitamos algunas definiciones.

Sea $I := [a, b]$ un intervalo compacto no degenerado. Una **subpartición de** I es una colección $\{J_j\}_{j=1}^{s}$ de intervalos cerrados no traslapados en I.

Una **subpartición etiquetada** de I es una colección $\dot{\mathcal{P}}_0 := \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^{s}$ de pares ordenados, consistentes de intervalos $\{J_j\}_{j=1}^{s}$ que forman una subpartición de I, y etiquetas $t_j \in J_j$ para $j = 1, ..., s$.

Si δ es una función medidora sobre I, se dice que la subpartición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}_0$ es δ**-fina** si $J_j \subseteq [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ para $j = 1, ..., s$.

Lema 1.3 (Sacks-Henstock). *Sea $f \in HK(I)$ y para $\epsilon > 0$ sea δ_ϵ una función medidora sobre I tal si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ_ϵ-fina, entonces*

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f \right| \leq \epsilon. \tag{1.25}$$

Si $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(J_j, t_j) : j = 1, ..., s\}$ es cualquier subpartición de I que es δ_ϵ-fina, *entonces*

$$\Big|\sum_{j=1}^{s}\Big[f(t_j)l(J_j)-\int_{J_j}f\Big]\Big| = \Big|S(f,\dot{\mathcal{P}}_0)-\int_{U(\dot{\mathcal{P}})}f\Big| \leq \epsilon. \tag{1.26}$$

Corolario 1.3. *Con las mismas hipótesis del Lema 1.3 se tiene que*

$$\sum_{j=1}^{s}\Big|f(t_j)l(J_i)-\int_{J_j}f\Big| \leq 2\epsilon. \tag{1.27}$$

Teorema 1.25 (Hake). *Sean $I := [a,b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces la función $f \in HK(I)$ si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $c \in (a,b)$ la restricción de f a $[a,c]$ es integrable y*

$$A = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f. \tag{1.28}$$

En este caso,

$$A = \int_a^b f.$$

A continuación enunciamos el Teorema de Hake, ahora para intervalos no acotados.

Teorema 1.26 (Hake). *Sean $I := [a,\infty]$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in KH([a,\infty])$ si y sólo si $f \in HK([a,c])$ para cada intervalo compacto $[a,c]$ con $c \in [a,\infty]$, y existe $A \in \mathbb{R}$ tal que*

$$A = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f. \tag{1.29}$$

En este caso,

$$A = \int_a^\infty f.$$

El siguiente teorema conocido como el Criterio de Cauchy para funciones HK(I) cuando se trata de un intervalo no acotado de la forma $I := [a, \infty]$.

Teorema 1.27. *Sean $I := [a, \infty]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \in HK([a, c])$ para cada $a \leq c$. Entonces $f \in HK(I)$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $K(\epsilon) \geq a$ tal que si $q > p \geq K(\epsilon)$, entonces*

$$\left| \int_p^q f \right| \leq \epsilon. \tag{1.30}$$

Demostración. Supongamos que $f \in HK([a, \infty])$. Por el Teorema 1.26 el límite $J := \lim\limits_{c \to \infty} \int_a^c f$ existe. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $K_\epsilon > a$ tal que si $p \geq K_\epsilon$, entonces

$$\left| J - \int_a^p f \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

De esta manera, si $q > p$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f \right| &= \left| \int_a^q f - J \right| + \left| J - \int_a^p f \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

El próximo teorema muestra como es que el producto de una función que es HK-integrable y una función arbitraria de variación acotada es HK-integrable, cabe señalar que para la prueba de este resultado interviene la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.28 (Multiplicador)**.** *Si $f \in HK(I)$ y g es de variación acotada sobre I, entonces el producto $fg \in HK(I)$ y*

$$\int_a^b fg = \int_a^b g dF = F(b)g(b) - \int_a^b F dg, \tag{1.31}$$

donde F es la integral indefinida $F(x) := \int_a^x f$ sobre I y la segunda y tercera integral son integrales de Riemann-Stieltjes.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b = \infty$, entonces el producto $fg \in HK((a, \infty])$ y (1.31) tiene la siguiente forma

$$\int_a^{\infty} fg = \lim_{b \to \infty} \int_a^b g dF = \lim_{b \to \infty} \left[F(b)g(b) - \int_a^b F dg \right], \tag{1.32}$$

donde, nuevamente, $F(x) := \int_a^x f$ para $x \in (a, \infty]$ y las integrales de lado derecho son Riemann-Stieltjes integrables.

Demostración. Como F es continua sobre I, el Teoremas 1.6 y el Teorema 1.8 implican que las integrales anteriores existen. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $\zeta_\epsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de I con $\mu(\dot{\mathcal{P}}) \leq \zeta_\epsilon$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n g(t_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b g dF \right| \leq \epsilon.$$

Ahora g es de acotada, esto es, $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in I$. Como f es $HK(I)$, existe una función medidora δ_ϵ sobre I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ-fina, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n \{ f(t_i)(x_i - x_{i=1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \} \right| \leq \frac{\epsilon}{2K}$$

luego por Corolario 1.3 se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \left| f(t_i)(x_i - x_{i-1} - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| \leq \frac{\epsilon}{K}.$$

Podemos suponer que $\delta_\epsilon \leq \zeta_\epsilon$ para cada $x \in I$, luego tenemos lo siguiente:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g dF \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(t_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]\right| \\
&\quad + \left|\sum_{i=1}^{n} g(t_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b gdF\right| \\
&\leq K\sum_{i=1}^{n}\left|f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})]\right| + \epsilon \\
&\leq K(\frac{\epsilon}{K}) + \epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $fg \in HK(I)$ y por tanto la primera igualdad en (1.31) se cumple. Para obtener la segunda igualdad en (1.31) aplicamos el Teorema de Integración por Partes (Ver Teorema 1.8).
Omitimos la prueba de la segunda parte de este teorema y remitimos al lector a la referencia [2]. $\square$

Un concepto que utilizaremos es el de función regulada, esto es, una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es **regulada sobre** $I := [a, b]$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión escalonada $s_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - s_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in I$.

Observaciones.

1. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces una función f es regulada si y sólo si existe una sucesion $\{s_n\}$ de funciones escalonadas, $s_n : I \to \mathbb{R}$, que convergen uniformemente a f sobre I.

2. Si $f \in HK(\mathbb{R})$, definamos la siguiente función: $F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(y)dy$, entonces

(i) Si F es continua, entonces F es regulada.

(ii) $F(-\infty) := \lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Esto quiere decir dado $\varepsilon > 0$ existe $M_1 > 0$ tal que si $t < -M_1$, entonces $|F(t)| \leq \varepsilon$.

(iii) $F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $M_2 > 0$ tal que si $t > M_2$, entonces $|F(t) - \alpha| \leq \varepsilon$.

3. Con lo anterior tenemos que:

Dado $\varepsilon > 0$, existe una función escalonada $s_\varepsilon : [-M_1, M_2] \to \mathbb{R}$ tal que

$$|F(t) - s_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$$

para cada $t \in [-M_1, M_2]$.

Definimos la siguiente función como:

$$\sigma(t) := \begin{cases} s_\varepsilon & \text{si } t \in [-M_1, M_2] \\ \alpha & \text{si } t > M_2 \\ 0 & \text{si } t < -M_1. \end{cases}$$

σ es una función escalonada, así para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $|F(t) - \sigma(t)| \leq \varepsilon$, luego $||F(t) - \sigma_n(t)||_\infty \to 0$ si $n \to \infty$.

Ahora veamos algunas definiciones para la Integral de Henstock-Kurzweil en $\overline{\mathbb{R}}^2 = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}}$ denota a los números reales extendidos. Un **intervalo** I en $\overline{\mathbb{R}}^2$ es un producto $I_1 \times I_2$ donde I_1 e I_2 son intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que I es un intervalo **cerrado** (abierto) si I_1 e I_2 son cerrados (abiertos). El **interior** de I, denotado por int$I$, es el producto de los interiores I_1 e I_2. Si I es un intervalo cerrado, una **partición** de I es una colección finita de subintervalos cerrados de I, $\{I_k : k = 1, ..., m\}$, tal que int$I_k \cap$ int$I_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y $I = \bigcup_{k=1}^m I_k$. Una **partición etiquetada** $\mathcal{P}$ de I es una colección finita de parejas $\{(x_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ tales que $\{I_i : 1 \leq i \leq m\}$ es una partición de I y $x_i \in I_i$ para $1 \leq i \leq m$, al I_i se les llama subintervalos de $\mathcal{P}$ y x_i las etiquetas asociadas al respectivo I_i. Una **función medidora** γ sobre I es una función definida sobre I tal que $\gamma(x)$ es un intervalo abierto conteniendo a x para cada $x \in I$. Una partición etiquetada $\mathcal{P} = \{(x_i, I_i) : 1 \leq i \leq m\}$ es **γ-fina** si $x_i \in I_i \subset \gamma(x_i)$ para $1 \leq i \leq m$.

Sean I un intervalo cerrado en $\overline{\mathbb{R}}^2$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces f es **Henstock-Kurzweil integrable sobre** I si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una función medidora γ sobre I tal que $|S(f, \mathcal{P}) - A| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada γ-fina.

El siguiente lema garantiza la existencia de una partición etiquetada γ-fina, este lema será usado para probar el Teorema de Fubini en la Integral de Henstock-Kurzweil. (Ver Teorema 2.8). Pero antes hagamos algunas precisiones.

Sean J y K intervalos cerrados en $\overline{\mathbb{R}}$, e $I := J \times K$. Sea γ una función medidora sobre I. Si P_1 y P_2 son las proyecciones de $\overline{\mathbb{R}}^2$ sobre la primera y segunda coordenada, respectivamente, entonces $\gamma_1(x, y) = P_1\gamma(x, y)$ y $\gamma_2(x, y) = P_2\gamma(x, y)$ tienen la propiedad de que:

1. $\gamma_1(\cdot, y)$ define una función medidora sobre J, para cada $y \in K$ y

2. $\gamma_2(x, \cdot)$ define una función medidora sobre K, para cada $x \in J$.

Lema 1.4. *Para $y \in K$, sea $\mathcal{P}_y$ una partición etiquetada $\gamma(\cdot, y)$-fina de J.*

(i) Si $\gamma_2'(y) = \bigcap\{\gamma_2(x, y) : (x, I) \in \mathcal{P}_y\}$, entonces $\gamma_2'(y)$ es una función medidora sobre K.

(ii) Si $\mathcal{K} = \{(y_j, K_j) : 1 \leq j \leq m\}$ es una partición etiquetada γ_2'-fina de K y si

$$\mathcal{P}_y = \{(p_j^y, P_j^y) : 1 \leq j \leq p_y\},$$

entonces

$$\mathcal{D} = \{((p_i^{y_j}, y_j), P_i^{y_j} \times K_j) : 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq p_{y_j}\}$$

es una partición etiquetada γ-fina de I. $\mathcal{D}$ es llamada la partición etiquetada compuesta, generada por $\{\mathcal{P}_y : y \in K\}$ y $\mathcal{K}$.

Como se trabajarán sobre subintervalos arbitrarios de $\overline{\mathbb{R}}$, se necesita un resultado que nos permita tratar el caso de intervalos no acotados. El siguiente lema nos permite hacer esto.

Lema 1.5. *Existen una función estrictamente positiva $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ la cual es integrable sobre $\mathbb{R}$ y una función medidora γ tal que $0 \leq S(\varphi, \mathcal{D}) \leq 1$ para cada partición etiquetada $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ que sea γ-fina.*

Ahora se verá la estrecha relación que hay entre las funciones absolutamente continuas y la integral de Henstock-Kurzweil, obteniendo así los Teoremas Fundamentales del Cálculo en una versión fuerte, el uso de estos teoremas se hará explícito en los teoremas de intercambio de integrales para la integral de Henstock-Kurzweil.

Consideremos una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Se dice que F es **absolutamente continua**, AC, sobre un conjunto $E \subseteq [a, b]$ si para cada $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{N} |F(x_i) - F(y_i)| < \epsilon$ para todo conjunto finito de intervalos abiertos disjuntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ con puntos finales en E y $\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i) < \delta$.

Se dice que F es **absolutamente continua en el sentido restringido**, AC_*, si en cambio se tiene $\sum_{i=1}^{N} \sup_{x,y \in [x_i, y_i]} |F(x_i) - F(y_i)| < \epsilon$ bajo las mismas condiciones como con AC.

Se dice que F es **absolutamente continua generalizada en el sentido restringido**, ACG_*, si F es continua y E es unión numerable de conjuntos sobre cada uno de los cuales F es AC_*.

Teorema 1.29 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces $\int_a^b f$ existe y $F(x) = \int_a^x f$ para todo $x \in [a, b]$ si y sólo si F es ACG_* sobre $[a, b]$, $F(a) = 0$, y $F' = f$ casi donde sea sobre (a, b).*
Si $\int_a^b f$ existe y f es continua en $x \in (a, b)$, entonces $\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$.

Teorema 1.30 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Entonces* F *es* (ACG_*) *si y sólo si* F' *existe casi donde sea sobre* (a, b), F' *es Henstock-Kurzweil integrable sobre* $[a, b]$, *y* $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ *para todo* $x \in [a, b]$.

Capítulo 2

Teoremas de Intercambio de integrales

En este capítulo analizaremos diversas condiciones que nos permiten intercambiar el orden de integración con las diferentes integrales que analizamos en el capítulo anterior, siguiendo el mismo orden.

2.1. En la integral de Riemann

En el Teorema 1.4 probamos que F, definida como en (1.2), es continua y por tanto Riemann integrable en $[c, d]$. El siguiente teorema muestra que esta hipótesis de continuidad es suficiente para asegurar que se puede intercambiar el orden de integración.

Teorema 2.1. *Si* $f : D \to \mathbb{R}$, *donde* $D = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$, *es continua, entonces*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)dxdt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)dtdx.$$

Demostración. El Teorema 1.4 y el Teorema 1.2 implican que las dos integrales iteradas existen, resta probar que se cumple la igualdad. Como f es uniformemente continua en D, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|x - x\prime| < \delta(\epsilon)$ y $|t - t\prime| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x,t) - f(x\prime, t\prime)| < \epsilon$.

Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta(\epsilon)$, $\frac{d-c}{n} < \delta(\epsilon)$ y dividamos a D en rectángulos iguales dividiendo $[a,b]$ y $[c,d]$ en n partes iguales.

Para $j = 0, 1, ..., n$ sean $x_j = a + j(\frac{b-a}{n})$, $t_j = c + j(\frac{d-c}{n})$; la integral de la izquierda se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x,t)dxdt.$$

Aplicando dos veces el Teorema del Valor Medio para Integrales, se tiene que existen $x_{j}\prime \in [x_{j-1}, x_j]$ y $t_{k}\prime \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x,t)dxdt = f(x_{j}\prime, t_{k}\prime)(x_j, x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Así que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)dxdt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j}\prime, t_{k}\prime)(x_j, x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

De la misma manera se hace para la otra integral, luego existen $x_{j}\prime\prime \in [x_{j-1}, x_j]$ y $t_{k}\prime\prime \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t)dxdt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j}\prime\prime, t_{k}\prime\prime)(x_j, x_{j-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Dado que $x_{j}\prime, x_{j}\prime\prime \in [x_{j-1}, x_j]$ y $t_{k}\prime, t_{k}\prime\prime \in [t_{k-1}, t_k]$, por la continuidad uniforme de f se concluye que las dos sumas dobles y por tanto las dos integrales iteradas, difieren, a lo más en $\epsilon(b-a)(d-c)$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se tiene la igualdad. $\square$

2.2. En la integral de Riemann-Stieltjes

En el Teorema 1.7 se estableció que la continuidad de la función f junto con la hipótesis adicional de que α sea de variación acotada asegura que la función F, definida en (1.3), es continua. Estas hipótesis como veremos en el siguiente teorema son suficientes para poder intercambiar el orden de integración.

Teorema 2.2. *Supongamos que α es de variación acotada en $[a, b]$, β de variación acotada sobre $[c, d]$ y f continua en $\mathcal{D} := \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Si $(x, y) \in \mathcal{D}$, definimos:*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x);$$

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) d\beta(y).$$

Entonces F es Riemann-Stieltjes integrable respecto de β en $[c, d]$, G es Riemann-Stieltjes integrable respecto de α en $[a, b]$, y

$$\int_c^d F(y) d\beta(y) = \int_a^b G(x) d\alpha(x).$$

En otras palabras, podemos intercambiar el orden de integración como sigue:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) d\beta(y) d\alpha(x) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y).$$

Demostración. Por el Teorema 1.7, F es continua en $[c, d]$ y por tanto F es Rieman-Stieltjes integrable con respecto a β en $[c, d]$. Análogamente G es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$. Sólo resta probar la igualdad.
Para probar la igualdad, consideremos el caso cuando α y β son monótonas crecientes en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente. Como f es uniformemente continua en $\mathcal{D}$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $z = (x, y)$, $z\prime = (x\prime, y\prime) \in \mathcal{D}$ con

$|z - z\prime| < \delta$, se tiene $|f(z) - f(z\prime)| < \epsilon$.

Ahora subdividamos el rectángulo en n^2 rectángulos iguales, subdividiendo $[a, b]$ y $[c, d]$ en n partes iguales cada uno, en donde n se ha elegido de tal forma que

$$\frac{(b-a)}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{(d-c)}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Tomemos

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \qquad \text{y} \qquad y_k = c + \frac{k(d-c)}{n},$$

para $k = 0, 1, ..., n$, tenemos

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)d\beta(y)d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)d\beta(y)d\alpha(x).$$

Aplicando dos veces el Teorema 1.9, la doble suma se convierte en

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_k\prime, y_j\prime)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

donde $(x_k\prime, y_j\prime)$ está en el intervalo $\mathcal{D}_{k,j}$ que tiene por vértices opuestos los puntos (x_k, y_j) y (x_{k+1}, y_{j+1}).

Análogamente obtenemos

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)d\alpha(x)d\beta(y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_k\prime\prime, y_j\prime\prime)[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

donde $(x_k\prime\prime, y_j\prime\prime) \in \mathcal{D}_{k,j}$. Pero $|f(x_k\prime, y_j\prime) - f(x_k\prime\prime, y_j\prime\prime)| < \epsilon$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b G(x)d\alpha(x) - \int_c^d F(y)d\beta(y)\right| < \\
&< \epsilon \sum_{j=0}^{n-1}[\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] \sum_{k=0}^{n-1}[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] \\
&= \epsilon[\beta(d) - \beta(c)][\alpha(b) - \alpha(a)].
\end{aligned}
$$

Como ϵ es arbitrario, esto implica la igualdad entre ambas integrales. $\square$

2.3. En la integral de Lebesgue

Con esta integral abordaremos algunos teoremas sobre intercambio en el orden de integración. Veremos en estos teoremas que las hipótesis que permiten realizar el intercambio ya no sólo son de continuidad, aparecen condiciones tales como integrabilidad y medibilidad.

Teorema 2.3. *Sean X e Y dos subintervalos de $\mathbb{R}$ y k una función definida, continua y acotada en $X \times Y$, de modo que $|k(x,y)| \leq M$ para todo $(x,y) \in X \times Y$. Supongamos que $f \in \mathcal{L}(X)$ y $g \in \mathcal{L}(Y)$.*

Entonces tenemos:

(a) Para cada $y \in Y$, la integral de Lebesgue

$$\int_X f(x)k(x,y)dx$$

existe, y la función F definida en Y, por medio de la relación

$$F(y) = \int_X f(x)k(x,y)dx$$

es continua en Y.

(b) Para cada $x \in X$, la integral de Lebesgue

$$\int_Y g(y)k(x,y)dy$$

existe, y la función G definida en X por medio de la relación

$$G(x) = \int_Y g(y)k(x,y)dy$$

es continua en X.

(c) Las dos integrales de Lebesgue

$$\int_Y g(y)F(y)dy \qquad y \qquad \int_X f(x)G(x)dx$$

existen y son iguales.

Esto es:

$$\int_X f(x)\int_Y g(y)k(x,y)dydx = \int_Y g(y)\int_X f(x)k(x,y)dxdy. \tag{2.1}$$

Demostración. (a) Para cada y fijo de Y, sea $f_y(x) = f(x)k(x,y)$. Entonces f_y es medible en X y satisface la siguiente desigualdad

$$|f_y(x)| = |f(x)k(x,y)| \leq M|f(x)|$$

para cada $x \in X$. Además, dado que k es continua en $X \times Y$ se cumple

$$\lim_{t\to y} f(x)k(x,t) = f(x)k(x,y)$$

para todo $x \in X$. Luego, por el Teorema 1.15, para cada $y \in Y$, la integral de Lebesgue

$$\int_X f(x)k(x,y)dx$$

existe y,

$$F(y) = \int_X f(x)k(x,y)dx$$

es continua en Y.

(b) La prueba es similar a la del inciso (a).

(c) Ahora el producto $f \cdot G$ es medible en X y satisface la siguiente desigualdad

$$|f(x)G(x)| \leq |f(x)| \int_Y |g(y)||k(x,y)|dy \leq M \int_Y |g(y)|dy$$

luego por el Teorema 1.14 $f \cdot G \in \mathcal{L}(X)$.

De forma similar se prueba que $g \cdot F \in \mathcal{L}(Y)$.

Para obtener la igualdad (2.1) observamos lo siguiente:

Si f y g son ambas funciones escalonadas, la igualdad es válida, ya que tanto f como g se anulan fuera de un intervalo compacto, así cada una es Riemann integrable en ese intervalo.

De no ser así, por el Teorema 1.10 podemos aproximar f y g por medio de funciones escalonadas. Dado $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas s y t tales que

$$\int_X |f - s| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad \int_Y |g - t| < \epsilon.$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_X fG &= \int_X G(s - s + f) \\ &= \int_X sG + (f - s)G \\ &= \int_X sG + \int_X (f - s)G. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea

$$|A_1| := \left| \int_X (f - s)G \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_X |f-s| \int_X |g(y)||k(x,y)|dy \\ &< \epsilon M \int_Y |g|dy. \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_Y g(y)k(x,y)dy \\ &= \int_Y k(x,y)(t-t+g)dy \\ &= \int_Y t(y)k(x,y)+(g-t)k(x,y)dy \\ &= \int_Y t(y)k(x,y)dy + \int_y (g-t)k(x,y)dy. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} |A_2| &:= \left| \int_Y (g-t)k(x,y)dy \right| \\ &\leq M \int_Y |g-t| \\ &< \epsilon M. \end{aligned}$$

Así

$$\int_X sG = \int_X s(x) \left[\int_Y t(y)k(x,y)dy \right] dx + A_3$$

donde

$$\begin{aligned} |A_3| &= \left| A_2 \int_X s(x)dx \right| \\ &\leq \epsilon M \int_X |s| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \epsilon M \int_X |s-f| + |f| \\ &< \epsilon^2 M + \epsilon M \int_X |f|. \end{aligned}$$

Así (2.2) se convierte en

$$\int_X fG = \int_X s(x) \left[\int_Y t(y)k(x,y)dy \right] dx + A_1 + A_3. \tag{2.3}$$

De la misma manera obtenemos:

$$\int_Y gF = \int_Y t(y) \left[\int_X s(x)k(x,y)dx \right] dy + B_1 + B_3 \tag{2.4}$$

donde

$$|B_1| < \epsilon M \int_X |f|$$

y

$$\begin{aligned} |B_3| &\leq \epsilon M \int_Y |t| \\ &< \epsilon^2 M + \epsilon M \int_Y |g|. \end{aligned}$$

Notemos que las integrales reiteradas que aparecen en (2.3) y (2.4) son iguales, por lo que resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_X fG - \int_Y gF \right| &\leq |A_1| + |A_3| + |B_1| + |B_3| \\ &< 2\epsilon^2 M + 2\epsilon M \left[\int_X |f| + \int_Y |g| \right]. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\int_X fG = \int_Y gF.$$

Que es justamente lo queríamos probar. $\square$

Una versión más general de este teorema es el siguiente.

Teorema 2.4 (De Fubini)**.** *Supongamos que f es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^2$. Entonces tenemos:*

(a) Existe un conjunto $\mathcal{T}$ de medida cero tal que la integral de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$$

existe para cada $y \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{T}$.

(b) La función G definida en $\mathbb{R}$ por medio de la relación

$$G(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx & si \quad y \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{T} \\ 0 & si \quad y \in \mathcal{T} \end{cases}$$

es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}$.

(c)

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} G(y)dy,$$

esto es,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy.$$

Un resultado análogo afirma que:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dydx.$$

Demostración. (a) Si $f \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^2)$ existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_n\}$ tal que $s_n(x,y) \to f(x,y)$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ S donde S es un conjunto bidimensional de medida cero, luego

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} s_n(x,y)d(x,y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y).$$

Ahora $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ si y sólo si $x \in \mathbb{R} \setminus S_y$.

Por tanto,

$$s_n(x,y) \to f(x,y) \ \text{ si } \ x \in \mathbb{R} \ S_y. \tag{2.5}$$

Sea $t_n(y) = \int_{\mathbb{R}} s_n(x,y)dx$. Esta integral existe para cada número real y y es una función integrable con respecto de y.

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t_n(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,y)dxdy \\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} s_n(x,y)d(x,y) \\ &\leq \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Puesto que la sucesión $\{t_n\}$ es creciente, esta última desigualdad prueba que existe $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t_n(y)dy$. Por tanto, aplicando el Teorema , existe una función t de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que $t_n \to t$ casi en todo $\mathbb{R}$. Es decir, existe un conjunto unidimensional $\mathcal{T}_1$ de medida cero tal que $t_n(y) \to t(y)$ si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}_1$.

Además,

$$\int_{\mathbb{R}} t(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t_n(y)dy.$$

Puesto que $\{t_n\}$ es creciente, tenemos de nuevo que

$$t_n(y) = \int_{\mathbb{R}} s_n(x,y)dx \leq t(y) \text{ si } y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}_1.$$

Aplicando el Teorema a $\{s_n\}$ vemos que si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}_1$ existe una función g de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que $s_n(x,y) \to g(x,y)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus A$ donde A es un conjunto unidimensional de medida cero que depende sólo de y.

Comparando este resultado con (2.5) vemos que si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}_1$, entonces

$$g(x,y) = f(x,y) \text{ si } \; x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup S_y). \tag{2.7}$$

Pero A tienen medida unidimensional cero y S_y tiene medida unidimensional cero para casi todo y, es decir para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}_2$, donde $\mathcal{T}_2$ tienen medida unidimensional cero. Sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. Entonces $\mathcal{T}$ tiene medida unidimensional cero y (2.7) se satisface. Dado que existe la integral $\int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx$ si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$, tenemos que, si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$, existe también la integral $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

(b) Si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx &= \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,y)dx \\
&= t(y).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Puesto que $t \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, (b) queda demostrado.

(c) Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} t(y) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} t_n(y)dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t_n(y)dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,y)dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} s_n(x,y)d(x,y) \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y).
\end{aligned}
$$

Comparando este resultado con (2.8) obtenemos (c).

Hasta aquí hemos probado el teorema para funciones superiores, para demostrarlo para funciones Lebesgue integrables escribimos $f = u - v$, donde $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} u - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} v \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x,y)dxdy - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [u(x,y) - v(x,y)]dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy.
\end{aligned}
$$

□

El teorema que sigue proporciona una condición suficiente de integrabilidad muy útil, su demostración hace uso del Teorema de Fubini.

Teorema 2.5 (De integrabilidad de Tonelli)**.** *Supongamos que f es medible en $\mathbb{R}^2$ y que existe al menos una de las dos integrales reiteradas*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dxdy$$

ó

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dydx.$$

Entonces tenemos:

(a) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(b)

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dydx.$$

Demostración. (a) Supongamos que existe la integral reiterada $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dxdy$. Designamos por $\{s_n\}$ la sucesión creciente de funciones escalonadas no negativas definida por medio de la siguiente relación

$$s_n(x,y) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \leq n \text{ e } |y| \leq n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $f_n(x,y) = \min\{s_n(x,y), |f(x,y)|\}$. Tanto s_n como $|f|$ son medibles, luego f_n es medible. Además, tenemos $0 \leq f_n(x,y) \leq s_n(x,y)$, luego f_n esta dominada por una función Lebesgue integrable. Por consiguiente, $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Entonces podemos aplicar el Teorema de Fubini a f_n junto con la desigualdad $0 \leq f_n(x,y) \leq |f(x,y)|$ para obtener

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_n &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_n(x,y)dxdy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dxdy. \end{aligned}$$

Puesto que $\{f_n\}$ es creciente, esto muestra la existencia del límite $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f_n$. Por el Teorema ? $\{f_n\}$ converge casi en todo $\mathbb{R}^2$ hacia una función límite de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Pero $f_n(x,y) \to |f(x,y)|$ cuando $n \to \infty$, luego $|f| \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Puesto que f es medible, tenemos que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

La demostración es análoga si existe la otra integral reiterada.

(b) Esta parte se sigue de (a) y aplicando el Teorema de Fubini. □

Teorema 2.6. *Si la función $t \mapsto f(x,t)$ es continua en $[a,b]$ para cada $x \in X$ y si existe g función integrable sobre X tal que $|f(x,t)| \le g(x)$, entonces*

$$\begin{aligned} \int_a^b F(t)dt &= \int_a^b \int f(x,t)d\mu dt \\ &= \int \int_a^b f(x,t)dtd\mu, \end{aligned}$$

donde las integrales con respecto a t son Riemann-integrables.

Demostración. Definamos una función $h : X \times [a,b]$ tal que $h(x,t) = \int_a^t f(x,s)ds$. Ahora $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$. Como ésta integral de Riemann existe, ésta es límite de una sucesión de sumas de Riemann; así que $x \mapsto h(x,t)$ es medible para cada t. Luego como $|f(x,t)| \le g(x)$, se tiene que $|h(x,t)| \le g(x)(b-a)$ de esta manera la función $x \mapsto h(x,t)$ es integrable para cada $t \in [a,b]$.

Sea H definida sobre $[a,b]$ como $H(t) := \int h(x,t)d\mu$ por el teorema 1.18

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(t) &= \int \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)d\mu \\ &= \int f(x,t)d\mu \\ &= F(t). \end{aligned}$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\int_a^b F(t)dt &= H(b) - H(a) \\
&= \int h(x,b) - h(x,a)d\mu \\
&= \int \int_a^b f(x,t)dtd\mu.
\end{aligned}
$$

$\square$

2.4. En la integral de Henstock-Kurzweil

En este apartado abordaremos otros teoremas para el intercambio de integrales iteradas, para esto utilizamos la integral de Henstock-Kurzweil. También en este apartado se enuncia y se demuestra el Teorema 2.10. El teorema puede consultarse en ([8]). Este teorema es el resultado principal de esta tesis.

Teorema 2.7. *Sean $g, \gamma : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in T := [c,d]$ la función $x \mapsto \gamma(x,t)$ es medible sobre $I := [a,b]$ y suponga que:*

(i) Existe $t_0 \in [c,d]$ tal que la función $x \mapsto \gamma(x,t_0)$ es $HK(I)$.

(ii) La derivada parcial $\gamma_t(x,t) = g(x,t)$ para cada $x \in [a,b], t \in [c,d]$.

(iii) Existen $\alpha, w \in HK(I)$ tal que $\alpha(x) \leq g(x,t) \leq w(x)$ para cada $x \in [a,b], t \in [c,d]$.

Entonces la función $x \mapsto g(x,t)$ es $HK(I)$ para cada $t \in [c,d]$ así que

$$G(t) := \int_a^b g(x,t)dx \tag{2.9}$$

está definida sobre $[c,d]$, por tanto $G \in HK(I)$ y

$$\int_c^d G(t)dt = \int_a^b \int_c^d g(x,t)dtdx. \tag{2.10}$$

Demostración. Para la prueba de este resultado vamos a hacer uso del Teorema 1.24 varias veces.

En el Teorema 1.24 reemplazamos la función f por γ y como se tienen las mismas hipótesis se concluye que la función $x \mapsto \gamma(x,t) \in HK(I)$ para cada $t \in T$.

Definimos $\Gamma(t) = \int_a^b \gamma(x,t)dx$ para $t \in T$. Del Teorema 1.24 (b) se obtiene que $x \mapsto g(x,t) = \gamma_t(x,t) \in HK(I)$ para cada $t \in T$, y tenemos que $G : T \to \mathbb{R}$ esta definida como en (2.9) para cada $t \in T$. Ahora por (c) del Teorema 1.24 Γ es diferenciable sobre T, y ademas $\Gamma'(t) = G(t)$ para cada $t \in T$, por tanto $G \in HK(T)$ y

$$\int_c^d G(t)dt = \Gamma(d) - \Gamma(c). \tag{2.11}$$

Por otro lado, como $g(x,t) = \gamma_t(x,t)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $t \mapsto g(x,t) \in HK(T)$ para cada $x \in I$ y

$$\int_c^d g(x,t)dt = \gamma(x,d) - \gamma(x,c).$$

Luego como $x \mapsto \gamma(x,t) \in HK(I)$ para cada $t \in T$, entonces por lo precedente $x \mapsto \int_c^d g(x,t) \in HK(I)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d g(x,t)dtdx &= \int_a^b [\gamma(x,d) - \gamma(x,c)]dx \\ &= \Gamma(d) - \Gamma(c) \\ &= \int_c^d \int_a^b g(x,t)dxdt.\end{aligned}$$

□

Ahora vamos a establecer el Teorema de Fubini, de forma más general que la que se estableció en el Teorema 2.4. Para esto consideremos lo siguiente: J, K denotarán intervalos cerrados en $\overline{\mathbb{R}}$ e $I := J \times K$.

Teorema 2.8 (De Fubini)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ HK-integrable sobre I. Definamos*

$$F(y) := \int_J f(x,y)dx$$

para cada $y \in K$. Entonces F es HK-integrable sobre K y además

$$\int_I f = \int_K F(y)dy = \int_K \int_J f(x,y)dxdy. \tag{2.12}$$

Demostración. Dado que $f \in HK(I)$, existe una función $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ c.t.p. I, $f(\cdot, y) = g(\cdot, y)$ siempre que $f(\cdot, y)$ es HK-integrable sobre J, $g(\cdot, y)$ es HK-integrable sobre J para cada $y \in K$ y $F(y) = \int_J g(x, y)dx$ para $y \in K$. De esta manera, tenemos que $f(\cdot, y)$ es integrable para cada $y \in K$.

Sea $\epsilon > 0$ y elijamos una función medidora γ sobre I tal que $|S(f, \mathcal{Q}) - \int_I f| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{Q}$ sea una partición etiquetada γ-fina de I. Por el Lema 1.5 podemos elegir, una función $\varphi : K \to (0, \infty)$ la cual es HK-integrable sobre K y una función medidora γ_φ sobre K tal que $0 \leq S(\varphi, \mathcal{P}) \leq 1$ siempre que $\mathcal{P}$ sea partición etiquetada γ_φ-fina de K. Para cada $y \in K$ elegimos una partición etiquetada, $\mathcal{P}_y$, de J que sea $\gamma_1(\cdot, y)$-fina y tal que

$$\left| S(f(\cdot, y), \mathcal{P}_y) - \int_J f(x, y)dx \right| < \epsilon\varphi(y)$$

esto es por la hipótesis de que $f(\cdot, y)$ es HK-integrable.

Pongamos

$$h(y) := \int_J f(x, y)dx - S(f(\cdot, y), \mathcal{P}_y).$$

Definamos $\gamma_2'(y) = \cap\{\gamma(x, y) : (x, P) \in \mathcal{P}_y\}$ como en el Lema 1.4, y el conjunto $\gamma_2^* = \gamma_\varphi \cap \gamma_2'$. Notemos que $\gamma_2'(y)$ es una función medidora sobre K, ya que la intersección es finita. Hay que probar: $|S(F, \mathcal{K}) - \int_I f| < \epsilon$ simpre que $\mathcal{K}$ sea partición etiquetada γ_2^*-fina de K. Sea $\mathcal{Q}$ la partición etiquetada γ-fina compuesta, generada por $\mathcal{K}$ y $\{\mathcal{P}_y : y \in K\}$ como en el Lema 1.4. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| S(F, \mathcal{K}) - \int_I f \right| &= \left| S(F, \mathcal{K}) - S(f, \mathcal{Q}) + S(f, \mathcal{Q}) - \int_I f \right| \\
&\leq |S(F, \mathcal{K}) - S(f, \mathcal{Q})| + \left| S(f, \mathcal{Q}) - \int_I f \right| \\
&< \left| \sum_{(y,K)\in\mathcal{K}} [F(y)\ell(K) - S(f(\cdot, y), \mathcal{P}_y)\ell(K)] \right| + \epsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{(y,K)\in\mathcal{K}} h(y)\ell(K) \right| + \epsilon \\
&\leq \sum_{(y,K)\in\mathcal{K}} \epsilon\varphi(y)\ell(K) + \epsilon \\
&= \epsilon S(\varphi, \mathcal{K}) + \epsilon \\
&\leq 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Como se queria probar. □

Teorema 2.9. *Sea* $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{R}$*. Suponga que* $f(\cdot, y)$ *es* ACG_* *sobre* $[\alpha, \beta]$ *para casi todo* $y \in (a, b)$*. Entonces* $F := \int_a^b f(\cdot, y)dy$ *es* ACG_* *sobre* $[\alpha, \beta]$ *y* $F'(x) = \int_a^b f_1(x, y)dy$ *para casi todo* $x \in (\alpha, \beta)$ *si y sólo si*

$$\int_{x=s}^{t} \int_{y=a}^{b} f_1(x, y)dydx = \int_{y=a}^{b} \int_{x=s}^{t} f_1(x, y)dxdy, \tag{2.13}$$

para todo $[s, t] \subseteq [\alpha, \beta]$*.*

Demostración. Suponga que F es ACG_* y $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b f_1(x, y)dy$. Sea $[s, t] \subseteq [\alpha, \beta]$. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, aplicado primero a F y luego a $f(\cdot, y)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{x=s}^{t} \int_{y=a}^{b} f_1(x, y)dydx &= F(t) - F(s) &(2.14)\\
&= \int_{y=a}^{b} [f(t, y) - f(s, y)]dy &(2.15)\\
&= \int_{y=a}^{b} \int_{x=s}^{t} f_1(x, y)dxdy.
\end{aligned}
$$

Ahora suponga (2.13). Sea $x \in (\alpha, \beta)$y $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in (\alpha, \beta)$. Entonces aplicando la el Segundo Teorema Fundamental a $f(\cdot, y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{x'=x}^{x+h}\int_{y=a}^{b} f_1(x',y)dydx' &= \int_{y=a}^{b}\int_{x'=x}^{x+h} f_1(x',y)dx'dy \\
\int_{y=a}^{b}[f(x+h,y)-f(x,y)]dy &= \int_{y=a}^{b} f(x+h,y)dy - \int_{y=a}^{b} f(x,y)dy \quad (2.16)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x'=x}^{x+h}\int_{y=a}^{b} f_1(x',y)dydx' \\
&= \int_{a}^{b} f_1(x,y)dy \quad \text{para casi todo } x\in(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene a partir del Primer Teorema Fundamental del Cálculo. Repitiendo el mismo argumento en (2.14) se obtiene que $\int_\alpha^x F' = F(x) - F(\alpha)$ para todo $x\in[\alpha,\beta]$. Por tanto, F es ACG_* sobre $[\alpha,\beta]$. $\square$

Notemos que si $f(x,y)=\int_\alpha^x g(u,y)du$, entonces $f(\cdot,y)$ es ACG_*. Así, obtenemos también condiciones necesarias y suficientes para el intercambio de integrales iteradas, como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Sea $g:[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$. Suponga que $g(\cdot,y)$ es integrable sobre $[\alpha,\beta]$ para casi todo $y\in(a,b)$. Defina $G(x):=\int_a^b\int_\alpha^x g(x',y)dx'dy$. Entonces G es ACG_* sobre $[\alpha,\beta]$ y $G'(x)=\int_a^b g(x,y)dy$ para casi todo $x\in(\alpha,\beta)$ si y sólo si*

$$\int_{x=s}^{t}\int_{y=a}^{b} g(x,y)dydx = \int_{y=a}^{b}\int_{x=s}^{t} g(x,y)dxdy, \quad (2.17)$$

para todo $[s,t]\subseteq[\alpha,\beta]$.

Demostración. Para la prueba de este corolario basta con hacer $F(x) = G(x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y)$ en el Teorema 2.9. $\square$

El teorema que sigue es el resultado principal de esta tesis.

Teorema 2.10. *Sean $f \in HK(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función medible. Suponga que:*

(i) para cada $x \in \mathbb{R}$ la función $y \mapsto g(x,y) \in BV(\mathbb{R})$

(ii) la función $x \mapsto V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

(iii) existe $M \in \mathcal{L}^1$ tal que para cada $y \in \mathbb{R}$, se tiene $|g(x,y)| \leq M(x)$.

Entonces las integrales iteradas existen y son iguales, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x,y)dxdy. \tag{2.18}$$

Demostración. Como $f \in HK(\mathbb{R})$, definamos $F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(y)dy$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x,y)dy = F(\infty)g(x,\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} F(y)d_2g(x,y) \tag{2.19}$$

aplicando el Teorema del Multiplicador.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\infty)g(x,\infty)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)d_2g(x,y)dx \\
&= F(\infty)\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\infty)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)d_2g(x,y)dx
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Notemos que: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\infty)dx$ existe, ya que:

- $\lim\limits_{y\to\infty} g(x,y) = g(x,\infty)$.
- $|g(x,y)| \leq M(x)$, para cada $y \in \mathbb{R}$ y $M(x) \in \mathcal{L}^1$.
- Por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\infty)dx.$$

Ahora

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y) \right| dx$$

además

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y) \right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} |F(y)| V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y)$$

así

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y) \right| dx \leq ||F||_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y) dx.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x,y) dy dx$$

existe.

Veamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x,y) dx dy \quad \text{también existe.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) dx dy. \tag{2.21}$$

Afirmamos que la función:

$$y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx \in BV(\mathbb{R}).$$

En efecto, sea $\{(s_i,t_i)\}_{i=1}^{n}$ intervalos disjuntos en $\mathbb{R}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x,s_i)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t_i)dx \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [g(x,s_i) - g(x,t_i)]dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x,s_i) - g(x,t_i)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} |g(x,s_i) - g(x,t_i)|dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y)dx \quad \text{(por la hipótesis (i) y (ii)).}
\end{aligned}$$

Así

$$y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx \in BV(\mathbb{R}).$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy$$

existe.

Integramos por partes (2.21)

$$F(\infty)\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\infty)dx - \int_{-\infty}^{\infty} F(y)d\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx\right]. \tag{2.22}$$

Veamos que (2.20) y (2.22) son iguales.

- Si $F = \mathcal{X}_{(a,b)}$ para algún intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ entonces (2.20) se transforma en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{a}^{b} d_2 g(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x,b) - g(x,a)]dx.$$

Y (2.22) se transforma en

$$\begin{aligned} \int_a^b d\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x,b)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x,a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x,b) - g(x,a)]dx. \end{aligned}$$

Por tanto (2.20) y (2.22) son iguales si $F = \mathcal{X}_{(a,b)}$ para algún intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

- Si F es una función escalonada, entonces $F(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{I_i}(y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ son intervalos disjuntos y $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ son números reales. Entonces se cumple que (2.20) y (2.22) son iguales en este caso.

Ya hemos visto que $\sigma_n \to F$ uniformemente en $\mathbb{R}$, entonces $||\sigma_n(t)||_\infty - ||F(t)||_\infty \leq ||F(t) - \sigma_n(t)||_\infty < \varepsilon$, entonces $||\sigma_n(t)||_\infty < \varepsilon + ||F||_\infty$, entonces $|\sigma_n(t)| < \varepsilon + ||F||_\infty$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $n > N$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(y) d_2 g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y).$$

Ahora

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(y) d_2 g(x,y)\right| &\leq ||\sigma_n(y)||_\infty V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y) && (2.23) \\ &\leq (\varepsilon + ||F||_\infty) V_{y\in\mathbb{R}} g(x,y). && (2.24) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(y) d_2 g(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) d_2 g(x,y)dx. \quad (2.25)$$

De la misma manera se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_n(y)d\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dx\right]=\int_{-\infty}^{\infty}F(y)d\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)dx\right].$$

Ya que $\{\sigma_n\}$ converge a F uniformemente en $\mathbb{R}$.

$\square$

Conclusiones

Los teoremas que se estudiaron en el capítulo dos, expusieron diversas condiciones que permitieron intercambiar el orden de integración. Resumiendo tenemos que:

- Para la integral de Riemann una condición suficiente es que la función a integrar sea una función continua en todo su dominio.

- Para la integral de Riemann-Stietljes una condición suficiente es que el integrando sea una función continua en todo su dominio y el integrador una función de variación acotada.

- Para la integral de Lebesgue se obtuvieron varios resultados, en el Teorema 2.3 se pide que las funciones f y g sean Lebesgue integrables sobre su dominio X e Y respectivamente y que la función k fuese continua y acotada en $X \times Y$, notemos que aquí la integración se llevó a cabo sobre subintervalos de $\mathbb{R}$, pero bien puede hacerse sobre todo $\mathbb{R}$, como se mostró en el Teorema 2.4. De igual forma que en las integrales anteriores, estas condiciones son suficientes. El Teorema 2.5 proporcionó una condición suficiente de integrabilidad, esto es, si la función a integrar es medible en $\mathbb{R}^2$ y existe al menos una de las dos integrales iteradas, entonces se tiene que la función es Lebesgue integrable y se puede intercambiar el orden de integración. Otro resultado que se analizó es el Teorema 2.6, aquí las condiciones que se pidieron fueron que la función a integrar fuese continua con respecto del parámetro t además de pedir la existencia de una función Lebesgue integrable que la domine.

- Para la integral de Henstock-Kurzweil en el Teorema 2.7 las hipótesis que destacan son: medibilidad, y la dominación por funciones que sean integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil. Se desarrolló un Teorema de Fubini más general que el que se estableció para la integral de Lebesgue, ver Teorema 2.8. En el Teorema 2.9 y su Corolario 2.1, se pide que la función a integrar sea Absolutamente Continua Generalizada en el sentido restringido (ACG_*). El resultado principal de esta tesis es el Teorema 2.10 donde se establecen condiciones suficientes para el intercambio de integrales, las hipótesis que resaltan son: que el producto de una función que es Henstock-Kurzweil integrable sobre $\mathbb{R}$ por una función medible, que la función medible sea de variación acotada y su variación Lebesgue integrable, además de ser dominada por otra función que sea Lebesgue integrable. Este resultado es de reciente aparición y está demostrado en un contexto distinto, pero lo hemos adaptado para la integral de Henstock-Kurzweil.

Bibliografía

[1] T.M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts, 1974.

[2] R.G. Bartle, A Modern Theory of Integration, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[3] R.G. Bartle, Introducción al análisis matemático, Editorial Limusa, 1987.

[4] R.G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library, 1966.

[5] F.J Mendoza Torres, On pointwise inversion of the Fourier transform of BV_o functions, Annals of Functional Analysis, 2010, Vol. 1, N 2, pp. 112-120.

[6] E. Talvila, Necessary and Sufficient Conditions for Differentiating Under the Integral Sign, Amer. Math. Monthly 108 (2001), pp. 544-548.

[7] E. Talvila, Henstock-Kurzweil Fourier transforms, Illinois J. Math., 46 (2002), pp. 1207-1226.

[8] E. Talvila, Convolutions with the Continuous Primitive Integral, Abstract and Applied Analysis, 2009, pp. 1-18.

Índice alfabético