Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Sobre los Hiperespacios $C(p, X)$

Tesis presentada al
Colegio de Matemáticas
como requisito para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas
por

Jorge Enrique Osorio Pérez

Directores de tesis

Dr. Raúl Escobedo Conde
Dr. Javier Sánchez Martínez
Dr. Hugo Villanueva Méndez

Puebla, Pue.
Diciembre 2016

Introducción

El contenido de la presente tesis pertenece a una rama de la Topología General, la denominada Teoría de Continuos y sus Hiperespacios. Particularmente estudiamos algunas propiedades topológicas de los hiperespacios anclados de un continuo y su relación con dicho continuo. Se espera que el lector posea conocimientos básicos de topología y conjuntos.

A lo largo de este documento un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Para un continuo X el hiperespacio de subcontinuos de X lo denotamos por $C(X)$. Para un punto $p \in X$, la colección de todos los elementos $A \in C(X)$ tales que $p \in A$ la denotamos por $C(p, X)$ y decimos que es el hiperespacio anclado en p de X. El hiperespacio de los hiperespacios anclados a un punto de X lo denotamos por $K(X)$.

Nuestro trabajo se desarrolla en 4 capítulos. En la medida de lo posible tratamos de evitar ir más allá de estas páginas para comprender todo lo que se menciona en esta tesis. Como es costumbre, incluimos en el Capítulo 1 preliminares, donde se tratan algunos conceptos y hechos relacionados con topología, dimensión, continuos e hiperespacios. Además, acordamos la notación que usamos en los capítulos siguientes para evitar confusiones y hacer una lectura más fluida. Este puede ser omitido en la lectura, si el lector está familiarizado con la teoría de continuos y sus hiperespacios, aunque se recomienda, en caso de requerirlo, revisar el índice analítico que se incluye en las páginas finales si algún enunciado o concepto parece extraño en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 explicamos, construimos y representamos los modelos para los hiperespacios anclados en un punto de ciertos continuos conocidos, tomando como un texto base [8] y apoyandonos en un par de resultados para hacer las cosas más sencillas. La idea de hacer esto, es tener un acercamiento visual para comenzar a comprender algunas de las propiedades que pueden poseer estos hiperespacios.

El Capítulo 3, a diferencia de los anteriores, es más complejo y en él se presentan propiedades que nos parecieron interesantes sobre los hiperespacios anclados en un punto, algunas de ellas están incluidos en los artículos [13], [14] y [15] (los cuales motivaron gran parte de este trabajo). Existen 4 secciones en este capítulo, la primera está dedicada a mostrar que $C(p, X)$ es un continuo siempre que X es un continuo y $p \in X$. La siguiente sección es breve y muestra que se pueden definir funciones de Whitney en $C(p, X)$. En la sección 3, mostramos una caracterización del intervalo $[0, 1]$ y que los hiperespacios anclados en un punto son AR entre los resultados más importantes; para la cuarta sección hacemos algunas comparaciones entre la frontera y la semi-frontera del hiperespacio en cuestión.

Para terminar, el Capítulo 4 esta compuesto por 2 secciones. La primera está relacionada directamente con el hiperespacio $K(X)$, tomando como base [14]; en ella mencionamos algunas propiedades (compacidad, conexidad o conexidad local) que puede tener $K(X)$, bajo ciertas restricciones. Cabe resaltar que en la última sección de este capítulo fueron plasmadas las ideas resultantes del trabajo que realizamos en el afán de responder un cuestionamiento planteado en [13]: *"Si T es el triodo simple, ¿existe un continuo $X \neq T$ tal que $K(X)$ coincide con $K(T)$?, si es así, ¿debe X ser indescomponible?"*, que aunque no se concretó una respuesta definitiva, generó nuevas interrogantes que abren la posibilidad de continuar en la misma dirección en un futuro.

Sin más retrasos, comencemos a recorrer el camino…

Índice General

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el presente capítulo, damos las bases para el desarrollo de esta tesis. Algunos resultados los presentamos de manera diferente a como aparecen en los textos originales, por ello, ponemos la referencia de éstos por si el lector desea revisarlos desde un punto de vista diferente. Además, algunas de las pruebas son omitidas pero también pueden consultarse en textos básicos. En la medida de lo posible, tratamos de explicar de manera simple y clara el contenido aquí presentado.

Se espera que el lector posea conocimientos básicos de topología y conjuntos, pues aunque este capítulo está dedicado a sentar los conceptos y resultados básicos relacionados con estas páginas, no damos detalles exactos de algunas afirmaciones por razones relacionadas con la extensión del mismo documento (aunque se intentó).

1.1. Conjuntos

Para comenzar, hacemos algunas convenciones para evitar ambigüedades en lo que sigue. Recomendamos al lector consultar [1, Apéndice A] para complementar la información relacionada con conjuntos, pues esta sección no tiene otro propósito diferente al de convenir el uso de ciertos símbolos.

Definición 1.1. Dado un conjunto X, definimos el **conjunto potencia** de X como la colección de todos los subconjuntos de X, denotado por:

$$\mathbb{P}(X) = \{A|\ A \text{ es un conjunto y } A \subset X\}$$

En algunos textos el símbolo empleado para denotar el conjunto potencia de X es 2^X, para nuestra conveniencia lo reservamos para referirnos a un hiperespacio en particular (del cual hablamos más adelante).

Definición 1.2. Sea X un conjunto y $\leq$ una relación en X. Decimos que $(X, \leq)$ es **linealmente ordenado** si para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Escribiremos que $x < y$ si es cierto que $x \leq y$ y $x \neq y$, en este caso diremos que x es menor que y.

Definición 1.3. Sean X un conjunto linealmente ordenado y $a, b \in X$. A los siguientes conjuntos les llamamos **intervalos**, con puntos extremos a y b:

1. (abierto) $(a, b)_X = \{x \in X | \ a < x < b\}$;
2. (cerrado) $[a, b]_X = \{x \in X | \ a \leq x \leq b\}$;
3. (semi-abierto por derecha) $[a, b)_X = \{x \in X | \ a \leq x < b\}$;
4. (semi-abierto por izquierda) $(a, b]_X = \{x \in X | \ a < x \leq b\}$.

En el caso de 3 y 4 de la definición anterior, también son llamados semi-cerrados por izquierda y derecha, respectivamente. La definición anterior es válida incluso cuando hablamos de los números reales, que por comodidad y familiaridad, omitimos el subíndice, escribiendo sólamente los delimitadores, en otros casos es necesario hacer la distinción colocando dicho subíndice. Otra aclaración que hacemos es que cuando un intervalo cerrado contiene un sólo elemento, coincide con el singular de ése elemento, es decir, $[x, x] = \{x\}$. En ocasiones este particular caso no es considerado, pues en algunos lugares se acostumbra que los intervalos tengan más de un punto, para nuestros fines, cualquier intervalo cerrado tiene uno o más puntos.

Definición 1.4. Decimos que una relación $\sim$ en X es una **relación de equivalencia** en X si cumple que:

1. (reflexiva) $x \sim x$ para cada $x \in X$;
2. (simétrica) $x \sim y$ implica $y \sim x$, para cualesquiera $x, y \in X$;
3. (transitiva) $x \sim y$ y $y \sim z$ implican que $x \sim z$, para cualesquiera $x, y, z \in X$.

El conjunto de números reales lo denotamos por $\mathbb{R}$. Los conjuntos $\mathbb{R}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denotan el conjunto de números reales positivos y no negativos, respectivamente. Para el caso de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La cardinalidad del conjunto ω la denotaremos por $\aleph_0$, es decir, $|\omega| = \aleph_0$.

Para un conjunto A y $\alpha \in \omega$, A^α denota el producto cartesiano del conjunto A, α veces; por elemplo, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ y $[0, 1]^n = \{(t_1, \ldots, t_n) | \ t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]\}$.

Definición 1.5. Decimos que dos conjuntos A y B son **comparables** si cumplen que $A \subset B$ o $B \subset A$.

1.2. Espacios Topológicos

Esta sección está pensada para recordar al lector algunos conceptos de Topología, aclarando que no es todo el conocimiento que se adquiere en un curso básico de esta disciplina, pero recomendamos [1] para ampliar la teoría aquí presentada, pues la mayor parte de ésta se basa en la referencia mencionada. Además, a lo largo de la sección hacemos referencia a otros textos cuando los conceptos no estén incluidos en [1], en el caso de los resultados, hacemos la referencia exacta o damos la demostración para no complicarle las cosas al lector.

Antes de comenzar a estudiar el concepto de espacio topológico, damos la definición de espacio métrico, pues nos interesa conocer esta noción que está presente a lo largo de este documento.

Definición 1.6. Dado un conjunto X, decimos que una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ es una **métrica** para X si cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
2. para cualesquiera puntos $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$;
3. para cualesquiera puntos $x, y, z \in X$ se cumple que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la pareja (X, d) le llamamos **espacio métrico**. A $d(x, y)$ le llamamos la distancia entre los puntos x y y en X.

Cuando hablamos de un espacio métrico X, d_X denota la métrica usual asociada a X en caso de poseerla, como sucede con los espacios Euclidianos. En caso de requerirlo, hacemos la distinción con alguna otra métrica que se asocie a X.

Una **bola abierta** en un espacio métrico (X, d), es un conjunto de la forma $B_r^d(x) = \{a \in X |\ d(a, x) < r\}$, donde $r \in \mathbb{R}_{>0}$ es el radio y $x \in X$ es el centro de la bola, es decir, $B_r^d(x)$ es una bola abierta centrada en x y de radio r.

Ahora vamos a definir los espacios topológicos, pues la teoría a partir de aquí gira en torno a estos últimos. Para profundizar en el estudio de espacios métricos, recomendamos al lector consultar [9], donde podrá encontrar una gran cantidad de información al respecto.

Definición 1.7. Dado un conjuto X, decimos que $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(X)$ es una **topología** para X si cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$;
3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

A la pareja $(X, \mathcal{T})$ le llamamos **espacio topológico** y a los elementos de $\mathcal{T}$ les llamamos **conjuntos abiertos**.

Cuando hablamos de un espacio topológico X, $\mathcal{T}_X$ denota la topología usual asociada a X en caso de tener una, por ejemplo, los espacios métricos tienen la topología que genera su métrica, de lo cual hablamos más adelante. En caso de requerirlo, hacemos la distinción con alguna otra topología que se asocie a X. En lo que sigue, usamos la palabra *espacio* para referirnos a un espacio topológico, siempre que no se acompañe de algún otro término.

Definición 1.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un **conjunto cerrado** en X si se cumple que $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Proposición 1.9. [1, Proposición 1.14] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados de X, entonces $\mathcal{F}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$;
2. si $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$;
3. para cualquier $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, con $\mathcal{G} \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$

Proposición 1.10. [1, Proposición 1.30] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\mathcal{T}|_A = \{U \cap A |\ U \in \mathcal{T}\}$ es una topología para A.

Definición 1.11. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$. Decimos que la topología descrita en la Proposición 1.10 es la **topología relativa** en A respecto de $(X, \mathcal{T})$ y que A es un **subespacio** de X.

De lo anterior podemos notar que $\mathcal{T}|_A$ es una topología "natural" para A, entonces tiene mucho sentido escribir $\mathcal{T}_A$ en lugar de $\mathcal{T}|_A$, de esta manera se espera que la notación resulte más comoda. No es difícil darse cuenta que X también es un subespacio de X, por ello, las definiciones dadas en términos de algún subespacio, valen para X haciendo un par de ajustes.

Definición 1.12. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Decimos que:

1. x es un **punto interior** de A en X, si existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subset A$;
2. el **interior** de A en X es el conjunto $\{a \in X |\ a$ es punto interior de $A\}$ y es denotado por $int_X(A)$ o $\mathring{A}$;
3. x es un **punto frontera** de A en X, si para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$;
4. la **frontera** de A en X es el conjunto $\{a \in X |\ a$ es punto frontera de $A\}$ y es denotado por $Fr_X(A)$;

5. x es un **punto de adherencia** de A en X, si para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$;

6. la **cerradura** de A en X es el conjunto $\{a \in X | \ a \text{ es punto de adherencia de } A\}$ y es denotado por $Cl_X(A)$ o $\overline{A}$.

A veces, en lugar de $Fr_X(A)$ y $Cl_X(A)$ escribimos simplemente $Fr(A)$ y $\overline{A}$ respectivamente, ésto siempre que sea claro que estamos trabajando en un determinado espacio X y no hay lugar para la ambigüedad.

Proposición 1.13. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un conjunto cerrado en X;

2. $Fr(A) \subset A$.

Demostración. ($1 \Longrightarrow 2$) Como A es un cerrado en X, se tiene que $X \setminus A \in \mathcal{T}$. Si $x \in X \setminus A$, $X \setminus A$ es un abierto que no intersecta a A y tiene a x como elemento, por lo que x no puede estar en la frontera de A, así, $Fr_X(A) \subset A$.

($2 \Longrightarrow 1$) Si $x \in X \setminus A$, entonces existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $U_x \cap A = \emptyset$, pues $Fr_X(A) \subset A$. Luego $X \setminus A = \left(\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x \right) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto A es un conjunto cerrado en X. ■

Observación 1.14. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $A \subset Cl_X(A)$, $Fr_X(A) = Cl_X(A) \cap Cl_X(X \setminus A)$ y $Cl_X(A)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Se deduce inmediatamente de las definiciones de frontera y cerradura. ■

Proposición 1.15. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $Fr(A)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Por la Observación 1.14, se tiene que $Fr(A)$ es la intersección de dos conjuntos cerrados, por la Proposición 1.9 se concluye que $Fr(A)$ es un conjunto cerrado en X. ■

Lo que hacemos ahora, es definir los conceptos de base y sub-base de una topología, así como vecindad de un punto y base de vecindades, pues las usamos como herramientas que simplifican las pruebas de algunos resultados posteriores, además, hay definiciones que se ponen en términos de estos conceptos, por lo que su conocimiento juega un papel importante a lo largo de estas páginas.

Primero introducimos el concepto de vecindad de un punto de un espacio topológico, para posteriormente abordar las definiciones de base, sub-base y base de vecindades.

Definición 1.16. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $V \subset X$ es una **vecindad** de x si existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subset V$. El conjunto de vecindades de x lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

Definición 1.17. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que:

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una **base** para $\mathcal{T}$ si para cada $U \in \mathcal{T}$ existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}'$.
2. $\delta \subset \mathcal{T}$ es **sub-base** para $\mathcal{T}$ si $\mathcal{B} = \{\bigcap \delta' | \ \delta' \subset \delta$ y δ' es finito$\} \cup \{X\}$ es una base para $\mathcal{T}$.
3. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ es una **base de vecindades** para x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_x \subset V$.

Notemos que si X es un conjunto, entonces a X se le puede asociar una topología a partir de una base $\mathcal{B}$ (sub-base δ), en este caso decimos que la base $\mathcal{B}$ (sub-base δ) genera una topología en X. Para ilustrar lo anterior, tenemos la siguiente:

Proposición 1.18. [1, Proposición 1.35] Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface:

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$;
2. si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X | \ \exists \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}\}$ es una topología para X tal que contiene a $\mathcal{B}$ como base.

Es sencillo notar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $\mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$, por lo que la existencia de bases, dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, está garantizada. Una manera de identificar bases para una topología es la siguiente:

Proposición 1.19. [1, Proposición 1.18] Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es una base para $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Es útil encontrar una base que genere una topología para un espacio métrico, de esta manera, todas las definiciones y resultados para espacios topológicos son válidos para espacios métricos, incluyendo los anteriores. A continuación, enunciamos un resultado que nos permite generar un espacio topológico partiendo de un espacio métrico.

Proposición 1.20. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\mathcal{B} = \{B_r^d(x) | \ x \in X \ \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ es una base para una topología para X.

Demostración. No es complicado darse cuenta que $\mathcal{B}$ cumple las condiciones de la Proposición 1.18. ■

Definición 1.21. La topología generada por la base mencionada en la Proposición 1.20 es llamada la **topología inducida** en X por la métrica d y la denotamos por $\mathcal{T}_d$.

Las sucesiones y la continuidad de funciones son realmente importantes cuando estudiamos topología, aunque hay diferentes maneras de definir cada concepto, nosotros optamos por elegir las siguientes, además, enunciamos algunos resultados que empleamos más adelante.

Definición 1.22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Una **sucesión** en X es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Denotamos a f por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ siempre que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$.

2. Una sucesión en X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, **converge** a x_0 en X, si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in V$. Lo anterior lo denotamos por $x_n \xrightarrow{X} x_0$.

En ocasiones, cuando no haya duda del espacio en el que trabajamos, $x_n \longrightarrow x_0$ denota la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ al punto x_0, de lo contrario usaremos $x_n \xrightarrow{X} x_0$ para indicar que el espacio donde la sucesión converge es X.

Observación 1.23. Notemos que si X es un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in A$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A tal que $x_n \xrightarrow{X} x$, entonces x es un punto de adherencia de A en X, más aún, como A es un subespacio de X (los abiertos de A se obtienen a partir de abiertos de X), se tiene que $x_n \xrightarrow{A} x$.

Proposición 1.24. [9, Corolario 2', pag. 107] Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x_0.

Proposición 1.25. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in A$. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X \setminus A$ tal que $x_n \longrightarrow x$, entonces $x \in Fr_X(A)$.

Demostración. Se deduce de la definición de frontera y de la Observación 1.23. ■

Definición 1.26. Sean X y Y dos espacios topológicos.

1. Decimos que una función $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ es una **función continua** en $x \in X$ si para cada $V \in \mathcal{T}_2$ tal que $f(x) \in V$, existe $U \in \mathcal{T}_1$, con $x \in U$, tal que $f[U] \subset V$.

2. Decimos que f es **continua** en $A \subset X$ si f es continua en cada punto de A.

Un resultado que es útil e importante en los cursos de topología es la siguiente:

Proposición 1.27. [1, Teorema 3.4] Si X, Y son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. f es continua en X;

2. para cualquier abierto V de Y, $f^{-1}[V]$ es abierto en X;
3. para cualquier cerrado F en Y, $f^{-1}[F]$ es un cerrado en X.

Proposición 1.28. [1, Corolario 3.9] Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y A es un subespacio de X, entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ es una función continua.

La siguiente proposición nos dice que, bajo ciertas condiciones, existe una manera de "pegar" dos funciones continuas y sus dominios sin perder la continuidad, es decir, podemos extender ambas funciones a una función continua definida en la unión de los dominios de las funciones originales.

Proposición 1.29. [11, Teorema 18.3 (Lema del pegado)] Sean X, Y espacios topológicos y conjuntos cerrados $A, B \subset X$ tales que $X = A \cup B$. Si $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ son funciones continuas, entonces $h : X \longrightarrow Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$$

es una función continua en X, siempre que para cada $x \in A \cap B$ se cumple que $f(x) = g(x)$.

Los homeomorfismos son de gran utilidad cuando queremos simplificar el estudio de cierto espacio, pues nos permiten llevar determinados problemas a espacios más familiares y posteriormente regresar al espacio original, pero ahora con la información adicional que se obtiene en el proceso.

Definición 1.30. Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos es una función continua, biyectiva y que tiene función inversa continua.

En caso de que exista un homeomorfismo entre X y Y, decimos que X y Y son homeomorfos, denotándolo por $X \approx Y$.

La definición a continuación es posible que no se mencione en un curso básico de topología, por lo que en caso de que el lector quiera indagar un poco más sobre la homogeneidad, recomendamos la consulta de [7, Seccción 48].

Definición 1.31. Decimos que un espacio topológico X es **homogéneo** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(x) = y$.

El concepto que hemos mencionado puede no ser conocido para alguien que tiene nociones básicas de topología, pero podemos decir que tiene un buen propósito para ser mencionado. Para familiarizarnos un poco con la homogeneidad tenemos el siguiente par de observaciones:

Observación 1.32. Algo que podemos notar es que cualquier circunferencia en el plano $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2})$, es un espacio topológico homogéneo, pues cualquier punto en ella se puede llevar a cualquier otro, haciendo una rotación sobre el centro de ella, donde $\mathcal{T}_{d_2}$ es la topología inducida por la métrica $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, que es la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$).

Observación 1.33. Aunque el intervalo real $[0,1]$ suele tener muchas propiedades interesantes, resulta ser un espacio topológico no homogéneo. La razón es que no existe un homeomorfismo que lleve alguno de sus extremos, $\{0,1\}$, a cualquier otro punto $x \in (0,1)$.

Una manera de construir nuevos espacios topológicos es usando funciones, con la condición de que éstas relacionen un espacio topológico con algún otro conjunto. Para los fines que nos interesan, hacemos uso de las llamadas topologías débiles y fuertes inducidas por funciones.

Observación 1.34. Sean un conjunto X y un espacio topológico Y. Dada cualquier función $f : X \longrightarrow Y$, $\mathbb{P}(X)$ es una topología en X que hace continua a la función f, pues la pre-imagen de cualquier abierto en Y es un subconjunto de X, además, $\mathbb{P}(X)$ cumple las condiciones de la definición de topología de manera evidente.

La observación anterior nos dice que siempre existe una topología que hace continua a cualquier función. El siguiente resultado hace una generalización del hecho antes mencionado.

Proposición 1.35. [1, Teorema 4.5] Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)|\ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow X_j|\ j \in J\}$ una familia de funciones definidas en un conjunto X. Denotemos por ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ a la menor (más débil) topología que convierte a cada función $f \in \mathcal{F}$ en una función continua. Entonces $\{f_j^{-1}[A]|\ j \in J \text{ y } A \in \mathcal{T}_j\}$ es una sub-base para la topología ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$.

Al decir que "${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ es la menor topología..." nos referimos a que para cualquier topología $\mathcal{T}$ que cumpla la propiedad dada, se tiene que ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$.

Definición 1.36. Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)|\ j \in J\}$ una colección de espacios topológicos, X un conjunto y $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow X_j|\ j \in J\}$ una familia de funciones. A ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ le llamamos **topología débil inducida** en X por $\mathcal{F}$.

Definición 1.37. Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j)|\ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in J$ definimos la función $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \longrightarrow X_i$ como $\pi_i(f) = f(i)$, para cada $f \in \prod_{j\in J} X_j$. A π_i le llamamos la **proyección** sobre el i-ésimo factor.

Con lo anterior ya podemos definir lo que se conoce como topología producto y el espacio topológico producto.

Definición 1.38. Sean $\{(X_j, \mathcal{T}_j)|\ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{FP} = \{\pi_j|\ j \in J\}$ la familia de proyecciones del producto cartesiano $\prod_{j\in J} X_j$. A la topología débil inducida por $\mathcal{FP}$ le llamamos la **topología producto** y a $\left(\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{FP}}\mathcal{T}\right)$ le llamamos **espacio producto**.

A partir de ahora, cuando aparezca un producto cartesiano lo consideramos como un espacio topológico con la correspondiente topología producto.

Un resultado útil para convergencia de sucesiones en espacios producto, es la siguiente:

Proposición 1.39. [1, Proposición 4.18] Una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\prod_{j\in J} X_j$ converge a x en $\prod_{j\in J} X_j$ si y sólo si la sucesión $\{\pi_j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\pi_j(x)$ en X_j para cada $j \in J$.

Es turno de pasar al estudio de las llamadas topologías fuertes definidas por funciones, connenzando con la siguiente:

Proposición 1.40. [1, Teorema 4.20] Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función, entonces $\mathcal{T}_f = \{A \subseteq Y |\ f^{-1}[A] \in \mathcal{T}\}$ es una topología en Y y es la mayor (más fuerte) topología que hace continua a la función f.

Cuando decimos que "$\mathcal{T}_F$ es la mayor topología que hace continua a la función f", nos referimos a que cualquier topología $\mathcal{T}$ que hace continua a f cumple que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$.

Definición 1.41. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función. A $\mathcal{T}_f$ le llamamos **topología fuerte inducida** en Y por f y $(X, \mathcal{T})$.

Las topologías fuertes inducidas crean la oportunidad de "transformar" un espacio topológico en algún espacio posiblemente más interesante a través de funciones, como es el caso de los "conos topológicos", los cuales estudiamos en breve; para ello es necesario tener presentes las siguientes definiciones y resultados:

Definición 1.42. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. A la pareja $(Y, \mathcal{T}_f)$ le llamamos **espacio cociente** determinado por $(X, \mathcal{T})$ y f. A la función f le llamamos **función cociente**.

Definición 1.43. Sea X un conjunto.

1. Una **partición** de X es una colección $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{D}$, con $A \neq B$, se cumple que $A \cap B = \emptyset$;

2. a la función $q : X \longrightarrow \mathcal{D}$ que asocia a cada $x \in X$ con el único elemento en $\mathcal{D}$ que lo contiene, le llamamos **proyección natural**;

3. al espacio topológico $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ le llamamos **espacio partición** de X, donde $\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} |\ \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}_X\}$.

Proposición 1.44. [1, Proposición 4.30] Para una partición $\mathcal{D}$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ es la topología cociente inducida por la proyección natural $q : X \longrightarrow \mathcal{D}$.

Observación 1.45. [1, Observación 4.32 (2)] Si X es un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en X, entonces $\sim$ induce una partición en X.

Por lo anterior, podemos notar que si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces existe un espacio cociente de X construido a partir de $\sim$, el cual denotamos por $X/\sim$. Dicho esto, tiene sentido enunciar la siguiente:

Definición 1.46. Sea X un espacio topológico. Consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en $X \times [0,1]$ dada por $(x,t) \sim (y,s) \leftrightarrow (x = y \text{ y } t = s)$ o $(t = s = 1)$. Decimos que el **cono topológico** de X es el espacio $X/\sim$ y será denotado por $Cono(X)$.

Creemos conveniente definir ahora lo que es una retracción, que aunque no la usamos por ahora, es necesario incluirla en algún momento. También, anexamos un pequeño resultado, omitimos su prueba, pero dejamos la referencia para ser consultada.

Definición 1.47. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Una **retracción** de X en A es una función continua $r : X \longrightarrow A$ tal que para cada $a \in A$ se cumple que $r(a) = a$. Decimos que A es **retracto** de X si existe una retracción de X en A.

Definición 1.48. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **retracto absoluto** (AR) si para cualquier espacio topológico Y que contiene un cerrado X' tal que $X' \approx X$ se cumple que X' es retracto de Y.

Proposición 1.49. [5, Capítulo III, Proposición 7.7] Si X es un AR y Y es retracto de X, entonces Y es un AR.

Para conocer más a cerca de los espacios AR, sugerimos al lector revisar [5], donde encontrará información muy completa sobre el tema.

Los conceptos que ahora abordamos no tienen utilidad inmediata, pero su necesidad se hace presente en la siguiente sección, cuando definimos la "Dimensión".

Definición 1.50. Sea X un espacio topológico. Decimos que $D \subset X$ es **denso** en X si $Cl_X(D) = X$.

Definición 1.51. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es:

1. **separable** si existe $D \subset X$ tal que $|D| \leq \aleph_0$ y D es denso en X;

2. **primero numerable** si para cada $x \in X$ exsite una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ para x tal que $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$;

3. **segundo numerable** si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

Ahora enunciamos un par de resultados, relacionados con la propiedad de ser primero numerable:

Proposición 1.52. Todo espacio métrico es primero numerable.

Demostración. Para cada punto x_0 en el espacio basta tomar la base de vecindades formada por las bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 1.53. [1, Proposición 3.40] Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre los espacios topológicos X y Y. Si X es primero numerable y $x \in X$, entonces f es continua en x si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \xrightarrow{X} x$ se tiene que $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x)$.

A continuación definimos lo que se conoce como **axiomas de separación** en topología, pues es común hablar de espaciós en términos de éstos, por ello aquí los incluimos, advirtiendo que en otros textos se pueden encontrar diferencias en los enunciados, pero nosotros seguiremos tomando como base [1].

Definición 1.54. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x, y \in X$ y $F, G \subset X$ cerrados ajenos tales que $x \neq y$ y $x \notin F$. Decimos que X es un espacio:

1. T_0 si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que ($x \in U$ y $y \notin U$) o ($x \notin U$ y $y \in U$);
2. T_1 si existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$;
3. T_2 (**Hausdorff**) si existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ y $y \in V$;
4. T_3 (**regular**) si X es T_1 y existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ y $F \subset V$;
5. $\mathrm{T}_{3.5}$ (**completamente regular**) si X es T_1 y existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g(F) \subset \{1\}$;
6. T_4 (**normal**) si X es T_1 y existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $F \subset U$ y $G \subset V$;

Las observaciones siguientes son resultados conocidos y pueden consultarse en la referencia dada, por ello no las probamos.

Observación 1.55. [1, Teorema 5.20 (1)] Todo subespacio de un espacio T_2 es T_2.

Observación 1.56. [1, Ejemplo 6.2 (1)] Si X es un espacio métrico, entonces X es T_4.

La conexidad es un elemento que no debemos omitir, los espacios topológicos que llamamos conexos son realmente importantes para los fines de este trabajo.

Definición 1.57. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que:

1. X es **disconexo** si existen $S, T \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tales que $S \cap T = \emptyset$ y $X = S \cup T$. Para tal caso decimos que S y T forman una **disconexión** para X, lo denotamos por $X = S|T$;
2. X es **conexo** si X no es disconexo;
3. A es conexo (disconexo) en X si el subespacio A es conexo (disconexo).

Observación 1.58. Notemos que si $X = S|T$, entonces $X \setminus S$ y $X \setminus T$ son cerrados en X, pero $T = X \setminus S$ y $S = X \setminus T$, por lo cual S y T son espacios abiertos y cerrados en X. Por lo tanto, en la Definición 1.57 (1), se puede cambiar la condición de abiertos por cerrados sin perder la esencia de lo que es una disconexión.

Las dos proposiciones siguientes están relacionadas con la conexidad y son vitales para el desarrollo de resultados posteriores, omitimos las pruebas, pero pueden consultarse en el texto citado.

Proposición 1.59. [1, Proposición 8.10] Si $X = S|T$ y A es conexo en X, entonces $A \subset S$ o $A \subset T$.

Proposición 1.60. [1, Proposición 8.12] Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X. Si $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo en X.

A continuación enunciamos dos definiciones que no son tan comunes, pero pueden encontrarse fácilmente en [7], donde hay información más extensa.

Definición 1.61. Sea X un espacio topológico conexo. Decimos que X es **unicoherente** si para cualesquiera conjuntos cerrados $A, B \subset X$ tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es un conjunto conexo.

Definición 1.62. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es **monótona** si para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

Dentro de la conexidad, existen algunos tipos que vale la pena estudiar, el primero que presentaremos es aquel que está relacionado con los puntos del espacio y sus “alrededores”. Posteriormente mencionamos otros dos de estos tipos.

Definición 1.63. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que:

1. X es **localmente conexo** en x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe un conexo $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V_x \subset V$;

2. X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Las dos definiciones siguientes se parecen un poco, pero su diferencia se vuelve importante cuando queremos estudiar propiedades de los subconjuntos de un espacio, pues la estructura que aporta cada tipo de conexidad agrega o quita características que pueden llegar a ser un punto clave.

Definición 1.64. Sea X un espacio topológico. Decimos que:

1. $T \subset X$ es una **trayectoria** en X si existe una función continua y sobreyectiva $f : [0,1] \longrightarrow T$.

2. X es **conexo por trayectorias** si para cualesquiera $x, y \in X$, existe una trayectoria T en X tal que $x, y \in T$.

3. $\alpha \subset X$ es un **arco** en X si existe un homeomorfismo $f : [0,1] \longrightarrow \alpha$;

4. X es **arco-conexo** si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un arco α en X tal que $x, y \in \alpha$. En caso de que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$ decimos que x y y son los puntos extremos de α y que α es un arco que va de x a y.

Observación 1.65. No es complicado darse cuenta que si X es un espacio topológico arco-conexo, entonces X es un espacio conexo por trayectorias.

Definición 1.66. [12, Definición 8.24] Sea X un espacio topológico. Decimos que:

1. X es **localmente arco-conexo** en x si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe un arco-conexo $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V_x \subset V$;

2. X es **localmente arco-conexo** si es localmente arco-conexo en cada uno de sus puntos.

La compacidad de un espacio topológico es lo que falta tratar para poder iniciar nuestro camino hacia los continuos, pues junto con la conexidad, son la base para desarrollar dicha teoría.

Definición 1.67. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ es una **cubierta abierta** para (de) A si $A \subset \bigcup \mathcal{C}$

2. A es un **conjunto compacto** en X si para cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de A, existe $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S}$ es cubierta abierta para A y $|\mathcal{S}| < \aleph_0$. Por simplicidad diremos que $\mathcal{S}$ es una subcubierta abierta finita para A.

Cuando se trate de todo el espacio topológico X, sólo decimos que X es un espacio conexo o que X es un espacio compacto. Además, si no hay motivo de duda, decimos que A es conexo (localmente conexo, conexo por trayectorias, arco-conexo, compacto) en lugar de A es conexo en X (localmente conexo en X, conexo por trayectorias en X, arco-conexo en X, compacto en X).

Proposición 1.68. [1, Proposición 7.5] Sean X un espacio topológico compacto y $A \subset X$. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto en X.

Proposición 1.69. [1, Corolario 7.9 (1)] Si X es un espacio topológico T_2 y K es un subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.

Las proposiciones que colocamos abajo son resultados muy conocidos en topología y nos facilitan la prueba de otros resultados más complejos. Con ellos finalizamos la sección y pasamos a hablar sobre la Teoría de la Dimensión.

Definición 1.70. Sea f una función definida del espacio topológico X en el espacio topológico Y. Decimos que f es **abierta** (**cerrada**) si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de X es un subconjunto abierto (cerrado) en Y.

Proposición 1.71. Sean X, Y espacios topológicos y consideremos $A \subset X$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces:

1. [1, Proposición 7.7] A compacto $\Longrightarrow f[A]$ es compacto en Y;
2. [1, Proposición 8.6] A conexo $\Longrightarrow f[A]$ es conexo en Y;
3. [1, Prosición 8.25] A localmente conexo y f abierta $\Longrightarrow f[A]$ es localmente conexo en Y.

Proposición 1.72. [1, Corolario 7.10] Sean X, Y espacios topológicos y A un compacto en X. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua e inyectiva y Y es T_2, entonces $g : A \longrightarrow f[A]$, dada por $g(a) = f(a)$, es un homeomorfismo.

Proposición 1.73. Si X es un espacio topológico conexo por trayectorias (arco-conexo), entonces X es conexo.

Demostración. Por la Observación 1.65, basta mostrar que conexidad por trayectorias implica conexidad. Sea $x \in X$. Para cualquier $y \in X$ existe T_y una trayectoria que tiene tanto a x como a y. Consideremos $\mathcal{A} = \{T_y |\ y \in X\}$. Notemos que $x \in \bigcap \mathcal{A}$, por tanto $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, se sigue, por la Proposición 1.60, que $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo. Además, $X = \bigcup \mathcal{A}$, lo que concluye la prueba. ■

1.3. Dimensión

Cuando hablamos de dimensión, es natural pensar en los espacios Euclidianos que tienen “dimensión” n o $n-$*dimensionales*, pero para ser un poco más generales, tomamos como base [6] para tratar con el concepto de dimensión. En dicho texto, para hablar de la dimensión de un espacio, es necesario que él y sus subespacios sean separables, pero esto no siempre ocurre, pero los siguientes resultados nos muestran una clase de espacios suficientemente amplia para trabajar.

Proposición 1.74. [4, Teorema 2-39] Todo espacio métrico separable es segundo numerable.

Proposición 1.75. [4, Teorema 2-40] Todo espacio segundo numerable es separable.

Proposición 1.76. [4, Teorema 2-41] Si X es un espacio segundo numerable, entonces todo subespacio de X es segundo numerable, por tanto todo subespacio es separable.

Por lo anterior, podemos concluir que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable, así, tiene sentido hablar de la dimensión de tal subespacio. Además, sin esta información adicional, es probable que surjan dudas respecto a la validez de las definiciones que estamos por enunciar.

De manera inductiva, tomando en cuenta las condiciones necesarias, definimos la dimensión de un espacio métrico separable como sigue:

Definición 1.77. El conjunto vacío y sólo el conjunto vacío tiene dimensión -1.

Definición 1.78. Sean X un espacio métrico separable y $p \in X$. Decimos que:

1. X tiene dimensión $\leq n$ en p ($dim_p(X) \leq n$) si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuya frontera tiene dimensión $\leq n-1$.
2. X tiene dimensión $\leq n$ ($dim(X) \leq n$) si tiene dimensión $\leq n$ en cada uno de sus puntos.
3. X tiene dimensión n en p si es verdad que $dim_p(X) \leq n$ y falso que $dim_p(X) \leq n-1$.
4. X tiene dimensión n si es verdad que $dim(X) \leq n$ y falso que $dim(X) \leq n-1$.

Las siguientes proposiciones posiblemente se conocen para algunos espacios en particular (espacios Euclidianos), pero aquí las presentamos de manera más general.

Proposición 1.79. [6, Teorema III 1] Sean X un espacio métrico separable, $Y \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $dim(X) \leq n$, entonces $dim(Y) \leq n$.

Proposición 1.80. Si X es un espacio métrico separable y $Y \subset X$, entonces se cumple que $dim(Y) \leq dim(X)$.

Demostración. Sea m el menor entero tal que $dim(X) \leq m$. Si $dim(Y) > dim(X)$, entonces por la Proposición 1.79 se tiene que $dim(X) < dim(Y) \leq m$, en consecuencia $dim(X) \leq m-1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $dim(Y) \leq dim(X)$. ■

Proposición 1.81. [6, Teorema IV 1] Si $X \in \{\mathbb{R}^n, [0,1]^n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $Y \approx X$, entonces $dim(Y) = dim(X) = n$.

A continuación veremos que es suficiente pedirle compacidad a un espacio métrico para poder hablar de su dimensión:

Definición 1.82. Decimos que un espacio métrico (X, d) es **precompacto** si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon^d(x_i)$

Proposición 1.83. [9, Teorema 2, pag. 93] Todos espacio métrico compacto es precompacto.

Proposición 1.84. [9, Teorema 4, pag. 90] Todo espacio métrico precompacto es separable.

Para finalizar la sección, recordamos al lector que la brevedad de ésta se debe a que no estamos interesados en desarrollar toda la teoría relacionada con dimensión topológica, pues nuestro objetivo se centra en acercar la información que utilizamos a lo largo de este trabajo, esperando que esto sea suficiente para entender las páginas restantes.

1.4. Continuos

Los continuos son espacios con los que se puede trabajar cómodamente, pues tienen varias propiedades interesantes. Esta sección tiene como base principal [12], pues es un texto dedicado completamente a la llamada Teoría de Continuos, por lo que nos parece adecuado para comenzar a hablar de ellos. Como es costumbre, lo que enunciamos aquí, no es igual a lo que aparece en la obra citada, por lo que insistimos al lector que consulte los conceptos originales en caso de no adaptarse a los nuestros.

La mayor parte de esta tesis usa topologías y evitamos hacer uso explícito de métricas, por lo que, aunque digamos "espacio métrico", lo tratamos con su topología inducida por la métrica.

Definición 1.85. Un **continuo métrico** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Definición 1.86. Un **continuo de Hausdorff** es un espacio topológico T_2 compacto, conexo y no vacío.

No es difícil notar que un continuo métrico resulta ser un continuo de Hausdorff, por ello algunas veces enunciamos definiciones o resultados en términos de continuos de Hausdorff, para hacerlos más generales, pero se entiende que funcionan para los continuos métricos.

En lo que sigue, la palabra *continuo* se refiere a un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío, de lo contrario haremos la aclaración, diciendo "un continuo de Hausdorff".

Definición 1.87. Sean X un continuo y A es un subconjunto de X. Decimos que A es un **subcontinuo** de X si se cumple que A es un continuo. Si $A \neq X$ decimos que A es un **subcontinuo propio** de X. Si A tiene más de un punto, decimos que es **no degenerado**.

Por ahora nos limitaremos a dar definiciones y resultados sobre continuos, dejando de lado los ejemplos, dando por hecho que el lector puede imaginar algunos de estos, incluso sin la necesidad de salir de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.88. Sean Y un continuo y $Z \approx (0,1]$. Decimos que $X = Y \cup Z$ es una **compactación del rayo con residuo** Y, si Z es un conjunto denso en X y $Y \cap Z = \emptyset$.

Definición 1.89. Sea n un número entero positivo. Decimos que X es una $\mathbf{n-celda}$ si $X \approx [0,1]^n$.

Los continuos de Peano, descomponibles e indescomponibles no podemos apartarlos de nuestro trabajo, pues tienen una fuerte relación con los hechos más importantes que presentamos en el capítulo 3, por ello no podían faltar en la parte correspondiente a continuos.

Definición 1.90. Sea X un continuo. Decimos que X es un **continuo de Peano** si X es localmente conexo.

Proposición 1.91. [12, Teorema 8.23] Todo continuo de Peano no degenerado es arcoconexo.

Definición 1.92. Sea X un continuo. Decimos que:

1. X es **descomponible** si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$.
2. X es **hereditariamente descomponible** si cada uno de sus subcontinuos es descomponible.
3. X es in **indescomponible** si X no es descomponible.
4. X es **hereditariamente indescomponible** si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

Existen resultados muy interesantes relacionados con los continuos indescomponibles, algunos de ellos estan relacionados con la "irreducibilidad", que definimos en lo que sigue, pero antes damos otro concepto que será de vital importancia, el de composante.

Definición 1.93. Sean X un continuo y $p \in X$. Al conjunto $\{x \in X|$ existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, x \in A\}$ le llamamos la **composante** de p en X y lo denotamos por $\kappa_X(p)$. En ocasiones, si no hay razones para confundirnos, escribiremos simplemente $\kappa(p)$.

Definición 1.94. Sean X un continuo, $A \subset X$ y $p, q \in X$. Decimos que:

1. X es **irreducible** en A si no existe un subcontinuo propio de X que contenga a A;
2. X es **irreducible entre** p y q si X es irreducible en $\{p, q\}$.

Observación 1.95. Sean un continuo X y puntos $p, q \in X$. Entonces ($p \notin \kappa(q)$ o $q \notin \kappa(p)$) si y sólo si X es irreducible entre p y q.

A continuación presentamos algunos resultados que relacionan los continuos indescomponibles con la propiedad de ser irreducible.

Proposición 1.96. [12, Teorema 11.15] Si X es un continuo indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.

Proposición 1.97. [12, Teorema 11.17] Si X es un continuo indescomponible, entonces sus composantes son disjuntas o coincidentes dos a dos.

Proposición 1.98. [12, Teorema 11.18] Si X es un continuo indescomponible y $p \in X$, entonces existe $q \in X$ tal que X es irreducible entre p y q. Más aún, existe un conjunto no numerable $J \subset X$ tal que X es irreducible entre cualesquiera dos de sus puntos.

Una propiedad que posee el intervalo $[0, 1]$ es que tiene exactamente dos puntos que al quitarselos no desconectan el espacio, es decir, tiene dos puntos que no son de corte. Este hecho puede extenderse a sus imágenes bajo homeomorfismos. Los tres lemas a continuación, junto con sus pruebas, pueden encontrarse en las referencias citadas, pero antes damos la definición de punto de corte.

Definición 1.99. Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que:

1. x es un **punto de corte** para X si $X \setminus \{x\}$ es disconexo
2. x es un **punto de no corte** para X si x no es punto de corte para X.

Lema 1.100. [12, Proposición 6.3] Sean X un espacio topológico y C un conjunto conexo de X tales que $X \setminus C = A|B$, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Por lo tanto, si X y C son continuos, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.

Lema 1.101. [12, Teorema 6.6] Sea X un continuo de Hausdorff tal que $c \in X$ es un punto de corte de X. Si $X \setminus \{c\} = S|T$, entonces existen $x \in S$ y $y \in T$ puntos de no corte para X, es decir, X tiene al menos dos puntos que no son de corte.

Lema 1.102. [12, Teorema 6.17] Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.

Con lo anterior finalizamos la sección, pues consideramos que es tiempo de pasar al estudio de los hiperespacios.

1.5. Hiperespacios de Continuos

Un **hiperespacio** H de un conjunto X, es una familia de subconjuntos de X, es decir, $H \subset \mathbb{P}(X)$. Los hiperespacios en los que nos interesamos a lo largo de este documento son aquellos en los que el conjunto en cuestión es un continuo, por lo que las siguientes definiciones están dadas en términos de espacios compactos y conexos, pero algunas no necesitan tantas condiciones para existir. La parte de hiperespacios puede complementarse con [7].

Definición 1.103. Dado X un continuo, definimos el **hiperespacio de cerrados** de X, denotado por 2^X, como:

$$2^X = \{A \subset X |\ A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

Al hiperespacio 2^X le podemos aosciar una topología natural proveniente de la llamada métrica de Hausdorff, pero nosotros usamos una topología definida para espacios topológicos T_2, llamada topología de Vietoris, pero que coincide con la inducida por la métrica de Hausdorff [7, Teorema 3.1]. Justo ahora damos las definiciones correspondientes, que aunque se pueden enunciar pidiendo menos condiciones al espacio X, no lo hacemos así puesto que nuestro interés va de la mano de los continuos. Posteriormente, agregamos las definiciones de los hiperespacios que ocupamos a lo largo de este documento.

Definición 1.104. Sean X es un continuo y $A, B \in 2^X$. Definimos:

1. La **nube** de radio $r > 0$ y centrada en A como $N_X(r, A) = \{x \in X |$ existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < r\}$.
2. [7, Teorema 2.2] La **métrica de Hausdorff** como la función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 |\ A \subset N_X(r, B) \text{ y } B \subset N_X(r, A)\}$.

Definición 1.105. Sean $(X, \mathcal{T})$ un continuo de Hausdorff y $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$.

1. Un **vietórico** en 2^X es un conjunto de la forma
$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{2^X} = \left\{ A \in 2^X \ |\ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$
2. [7, Teorema 1.2] La **topología de Vietoris** es la topología generada por la base
$$\mathcal{T}_V = \{\langle V_1, \dots, V_m \rangle_{2^X} |\ V_1, \dots, V_m \in \mathcal{T} \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$$

Por lo mencionado en el párrafo anterior, no hay complicaciones al utilizar la topología inducida por la métrica de Hausdorff o la topología de Vietoris en 2^X.

Los siguientes hiperespacios están definidos en términos del hiperespacio de cerrados, 2^X, por lo que los tratamos como subespacios de él, siendo válida la topología de Vietoris para éstos. Además, si no hay motivo para la confusión, omitimos el subíndice en los vietóricos.

Definición 1.106. Dado un continuo X, definimos el hiperespacio $F_1(X)$ como:

$$F_1(X) = \{A \in 2^X | \ |A| = 1\}.$$

Definición 1.107. Dado un continuo X, definimos el **hiperespacio de continuos** de X, denotado por $C(X)$, como:

$$C(X) = \{A \in 2^X | \ A \text{ es conexo en } X\}.$$

Definición 1.108. Dados un continuo X y A un subcontinuo de X, definimos el **hiperespacio de continuos anclados** en A, denotado por $C(A, X)$, como:

$$C(A, X) = \{B \in C(X) | \ A \subset B\}.$$

Para simplificar la notación de la definición anterior, cuando el subcontinuo en cuestión sea el singular de un punto $p \in X$, escribimos $C(p, X)$ en lugar de $C(\{p\}, X)$ y decimos que $C(p, X)$ es el hiperespacio anclado en el punto p.

Definición 1.109. Dados X un continuo, $A \subset X$ y un punto $p \in A$, definimos el **hiperespacio de los hiperespacios anclados en puntos de** A, denotado por $K(A, X)$, como:

$$K(A, X) = \{C(p, X) | \ p \in A\}.$$

Por simplicidad, escribimos $K(X)$ en lugar de $K(X, X)$.

El siguiente par de proposiciones son bastante útiles, sus pruebas no son extensas, pero hemos decidido no incluirlas porque consideramos que no son difíciles de hacer, de hecho, para el primero, con las herramientas que aparecen en [8, Teorema 4.2], [8, Corolario 4.3], [8, Corolario 6.11] y [8, Corolario 6.12], debe ser suficiente para convencerse de su validez.

Proposición 1.110. Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos también.

Proposición 1.111. [8, Lema 2.3, caso $n = 1$] Si X es un continuo, entonces $F_1(X) \approx X$.

Anteriormente ya hemos hablado de convergencia de sucesiones, pero en los hiperespacios, existe un tipo de convergencia puesto en términos de conjuntos, donde aparecen los llamados límites inferiores y límites superiores.

Definición 1.112. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el **límite inferior** , denotado por $\liminf A_i$, y el **límite superior**, denotado por $\limsup A_i$, como sigue:

1. $\liminf A_i = \{x \in X |$ para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $A_n \cap U \neq \emptyset\}$

2. $\text{lím sup}\, A_i = \{x \in X |$ para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que $|J| \geq \aleph_0$ y para cada $i \in J$, $A_i \cap U \neq \emptyset\}$

Definición 1.113. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Decimos que A es el **límite** de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\text{lím}\, A_i = A$, siempre que $\text{lím inf}\, A_i = \text{lím sup}\, A_i$.

Observación 1.114. No es complicado ver que $\text{lím inf}\, A_i \subset \text{lím sup}\, A_i$, basta hacer $J = \{n \in \mathbb{N} | \, n \geq N\}$ como en sus respectivas definiciones.

Proposición 1.115. [7, Lema 4.3] Si X es un espacio topológico, $A \subset X$ y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, entonces $\text{lím}\, A_i = A$ si y sólo si $\text{lím sup}\, A_i \subset A \subset \text{lím inf}\, A_i$.

El resultado a continuación es muy útil cuando hablamos de convergencia, pues nos dice que la convergencia en 2^X con la topología de Vietoris es equivalente a la definida en términos de límites.

Proposición 1.116. [7, Teoremas 4.4 y 4.6] Si X es un continuo y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, entonces $A_i \xrightarrow{2^X} A$ con la topología $\mathcal{T}_V$ si y sólo si $\text{lím}\, A_i = A$.

Observación 1.117. Por las Proposiciones 1.111 y 1.116 podemos deducir que para cualquier continuo X, $p \in X$ y cualquier sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $p_n \xrightarrow{X} p$, se tiene que $\{p_n\} \xrightarrow{F_1} \{p\}$, en consecuencia $\text{lím}\{p_n\} = \{p\}$.

La observación anterior nos permite modificar un poco la notación. Para un continuo X, $p \in X$ y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p_n \xrightarrow{X} p$, escribimos $\text{lím}\, p_n = p$ en lugar de $\text{lím}\{p_n\} = \{p\}$.

Proposición 1.118. Sean $(X, \mathcal{T})$ un continuo y $A, B \in 2^X$. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ son sucesiones en 2^X tales que $\text{lím}\, A_i = A$ y $\text{lím}\, B_i = B$, entonces $\text{lím}(A_i \cup B_i) = A \cup B$.

Demostración. Sea $x \in \text{lím inf}\, A_i$. Como para cada $U \in \mathcal{T}$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$ se tiene que $A_n \cap U \neq \emptyset$, esto es, para cada $n \geq N_1$ se cumple que $(A_i \cup B_i) \cap U \neq \emptyset$. Se sigue $A \subset \text{lím inf}(A_i \cup B_i)$. De manera similar $B \subset \text{lím inf}(A_i \cup B_i)$. Por lo tanto $(A \cup B) \subset \text{lím inf}(A_i \cup B_i)$.

Si $x \in \text{lím sup}(A_i \cup B_i)$, entonces para cada $V \in \mathcal{T}$, existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que $|J| = \aleph_0$ y para cada $n \in J$ se tiene que $(A_n \cup B_n) \cap V \neq \emptyset$, luego, si existe $K \subset J$ tal que $|K| = \aleph_0$ y $A_n \cap V \neq \emptyset$ para cada $n \in K$. En consecuencia tenemos que $\text{lím sup}(A_i \cup B_i) \subset \text{lím sup}\, A_i = A$. Por otro lado, si existe $L \subset J$ tal que $|L| = \aleph_0$ y $B_n \cap V \neq \emptyset$ para cada $n \in L$, podemos concluir que $\text{lím sup}(A_i \cup B_i) \subset \text{lím sup}\, B_i = B$. Así, $\text{lím sup}(A_i \cup B_i) \subset (A \cup B)$.

Finalmente, por la Proposición 1.115, se cumple que $\text{lím}(A_i \cup B_i) = A \cup B$. ■

La proposición que sigue aparece en la referencia dada y es útil cuando hablamos de sucesiones de conjuntos cerrados, pues nos garantiza la convergencia de al menos una parte de ella.

Proposición 1.119. [12, Corolario 4.14] Si X es un espacio topológico compacto, entonces para cada sucesión en 2^X existe una subsucesión convergente.

Ahora presentamos un resultado que toma fuerza en la prueba de algunos teoremas importantes de este documento, incluimos su demostración pues no es fácil encontrar un texto que la desarrolle, por ello lo creimos necesario.

Proposición 1.120. Sean $(X, \mathcal{T})$ un continuo, $A \subset X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Si $A_n \xrightarrow{2^X} A$, entonces $p \in A$ si y sólo si existe $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, p_n = p$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $p \in A$. Por la Proposición 1.52, existe una base numerable $\mathcal{B}(x) = \{U_1(x), U_2(x), U_3(x), \ldots\}$ de vecindades de x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_n \subset U_n(x)$, luego, consideramos $V_n = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Si $U_x \in \mathcal{V}(x)$, entonces existe $U_j(x) \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U_j(x) \subset U_x$, se sigue que $x \in V_j \subset U_j \subset U_j(x) \subset U_x$, esto es, $\mathcal{C} = \{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de vecindades de x, cuyos elementos son todos conjuntos abiertos y cumplen que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $p \in A$. Como $\text{lím}\, A_n = A$, en particular $p \in \text{lím ínf}\, A_n$, por lo que para cada V_i existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq M_i : A_n \cap V_i \neq \emptyset$. Sea $N_j = \text{máx}\{M_1, \ldots, M_j\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $(p_1, \ldots, p_{N_1-1}) \in A_1 \times \ldots \times A_{N_1-1}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideremos $p_i \in A_{N_j} \cap V_{N_j}$ para $i \in \{N_j, \ldots, N_{j+1} - 1\}$ siempre que $N_j < N_{j+1}$; en caso de que $N_k = N_l$, con $k < l$, tomemos $p_i \in A_{N_l} \cap V_{N_l}$, donde $i \in \{k, k+1, \ldots, l\}$. La construcción anterior asegura que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $p_n \in A_n \cap V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Basta probar que $\text{lím}\, p_n = p$. Si $U \in \mathcal{T}$ es tal que $x \in U$, entonces $U \in \mathcal{V}(x)$. Como $\mathcal{C}$ es una base de vecindades de x, existe $V_j \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V_j \subset U$, por la manera en que elegimos los N_i, existe N_{j_0} tal que $V_{j_0} \subset V_j$, luego para cada $n \geq N_{j_0}$ se tiene que $p_n \in V_n \subset V_{j_0} \subset V_j \subset U$ lo que nos dice que $\text{lím}\, p_n = p$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, p_n = p$. Si $p \notin A$, entonces existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $\{p\} \subset U$ y $A \subset V$, pues X es T_4 (Observación 1.56). Como $\text{lím}\, A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $A_n \in \langle V \rangle$. Puesto que $\text{lím}\, p_n = p$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_2$, $p_n \in U$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. En particular, $A_N \subset V$ y $p_N \in U$, lo cual es una clara contradicción. ■

Hay un cierto tipo de continuos que tienen una estructura curiosa, pues al quitarles un “pedazo” (continuo), el espacio se parte en varias “componentes”, además, en el capítulo 3 se vuelven “populares” cuando describimos las propiedades de los hiperespacios anclados. El siguiente par de definiciones le dan sentido y formalidad a lo que acabamos de decir.

Definición 1.121. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Consideremos la colección de todos los conjuntos conexos de X que contiene a x, por la Proposición 1.60, la unión de todos ellos es un conjunto conexo, digamos C_x. Decimos que C_x es la **componente conexa** de x en X. Por simplicidad, a veces decimos que C_x es la **componente** de x en X.

Definición 1.122. Sea n un número natural.

1. Decimos que un continuo X es un $\mathbf{n-odo}$ si existe $A \in C(X)$ tal que $X \setminus A$ tiene al menos n componentes. Al continuo A le llamamos **corazón** del n-odo.

2. Decimos que un continuo X es un $\mathbf{n-odo}$ **simple** si es el cono topológico sobre exactamente n puntos. Al vértice del cono se le denomina vértice del n-odo.

Para el caso $n = 3$ en la parte (2) de la definición anterior el espacio en cuestión lo conocemos como **triodo simple**, $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$.

Proposición 1.123. [12, Corolario 5.9] Sean X un continuo y $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Si C es una componente de $X \setminus A$, entonces $A \cup C$ es un continuo.

Proposición 1.124. Sean X un continuo, $B, D \in C(X)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $B \setminus D$ tiene n componentes, digamos $C_1, \ldots, C_n$. Entonces $B \cup D$ es un *n-odo* con corazón D.

Demostración. Por la Proposición 1.9, $B \cup D$ es cerrado en X, se sigue de la Proposición 1.68 que $B \cup D$ es un compacto en X. Notemos que $B \cup D = (B \cup C_1) \cup \ldots \cup (B \cup C_n)$. De la Proposición 1.123 se tiene que $B \cup C_i$ es un continuo para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por la Proposición 1.60, $B \cup D$ es un conexo. Por lo tanto $B \cup D$ es un continuo. Como $(B \cup D) \setminus D = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, se concluye que $B \cup D$ es un *n-odo* cuyo corazón es D. ■

Un continuo que es muy importante dentro de la teoría de continuos es el denominado **cubo de Hilbert**, que en palabras, puede ser descrito como el producto del intervalo $[0, 1]$ una cantidad infinita numerable de veces. Cada autor tiene una notación particular para el ya mencionado, pero por conveniencia, nosotros lo denotamos por I^ω.

Con lo dicho hasta ahora sobre hiperespacios, nos parece suficiente para concluir esta sección, pero no sin antes enunciar tres resultados fuertemente relacionados con el cubo de Hilbert.

Proposición 1.125. [7, 11.3 Teorema de Curtis-Schori(1)] Si X es un continuo de Peano no degenerado, entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert, I^ω.

Proposición 1.126. [8, Teorema 1.2] Si X es un continuo, entonces existe una función f de X en I^ω tal que $f : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.127. [5, Capítulo III, Proposición 6.3] Un continuo X es un espacio AR si y sólo si existe $Y \subset I^\omega$ tal que $Y \approx X$ y Y es retracto de I^ω.

1.6. Funciones y Conjuntos Especiales

Esta sección sirve para presentar algunas funciones y conjuntos que pensamos son de importancia en los próximos capítulos, pero que por comodidad consideramos darles un lugar especial dentro de los preliminares. Algunos de los resultados más interesantes de este trabajo tienen relación con los conceptos y resultados que a continuación aparecen.

Definición 1.128. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \longrightarrow X$ funciones. Una **homotopía** entre f y g es una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Si existe una homotopía entre f y g decimos que f es **homotópica** a g.

Definición 1.129. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **contráctil** si existe una homotopía entre la función identidad en X y una función constante de X en X.

Proposición 1.130. [5, Capítulo III, Teorema 7.1] Si X es un espacio AR, entonces X es contráctil.

Definición 1.131. Sean X un continuo y $U \subset X$. Definimos las siguientes familias de subcontinuos de X:

1. $\Gamma_{2^X}(U) = \{A \in 2^X |\ A \cap U \neq \emptyset\}$.
2. $\Lambda_{2^X}(U) = \{A \in 2^X |\ A \subset U\}$.
3. $\Upsilon_{2^X}(U) = \{A \in 2^X |\ U \subset A\}$.

Los conjuntos anteriormente definidos nos ayudan a probar ciertos resultados de manera más simple que si lo hacemos con la métrica de Hausdorff. Además, son utiles cuando hablamos de la topología de Vietoris, pues algunos de ellos forman una sub-base para dicha topología en 2^X. Para formalizar lo anterior, tenemos lo siguiente:

Proposición 1.132. [12, Teorema 4.5] Sea $(X, \mathcal{T})$ un continuo. El conjunto $\delta = \{\Gamma_{2^X}(U) |\ U \in \mathcal{T}\} \cup \{\Lambda_{2^X}(U) |\ U \in \mathcal{T}\}$ forma una sub-base para la topología de Vietoris en 2^X.

Observación 1.133. Sea $(X, \mathcal{T})$ un continuo. Si $U \subset X$, entonces $\Gamma_{2^X}(U) \cap C(X) = \{A \in C(X) |\ A \cap U \neq \emptyset\}$. De manera similar $\Lambda_{2^X}(U) \cap C(X) = \{A \in C(X) |\ A \subset U\}$ y $\Upsilon_{2^X}(U) \cap C(X) = \{A \in C(X) |\ U \subset A\}$.

De la Observación 1.133, para simplificar un poco las cosas, escribimos $\Gamma(U)$, $\Lambda(U)$ y $\Upsilon(U)$ en lugar de $\Gamma_{2^X}(U) \cap C(X)$, $\Lambda_{2^X}(U) \cap C(X)$ y $\Upsilon_{2^X}(U) \cap C(X)$, respectivamente.

Proposición 1.134. Sean $(X, \mathcal{T})$ un continuo y $U, F \subset X$. Si $U, X \setminus F \in \mathcal{T}$, entonces:

1. $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U)$ son abiertos en $C(X)$.

2. $\Gamma_{2^X}(U)$ y $\Lambda_{2^X}(U)$ son abiertos en 2^X.

3. $\Gamma(F)$, $\Lambda(F)$ y $\Upsilon(F)$ son cerrados en $C(X)$.

4. $\Gamma_{2^X}(F)$, $\Lambda_{2^X}(F)$ y $\Upsilon_{2^X}(F)$ son cerrados en 2^X.

Demostración. 1. Por la Proposición 1.132 y la Observación 1.133 es inmediato.

2. Se deduce de la Proposición 1.132.

3. Notemos que $\Gamma(F) = C(X) \setminus \Lambda(X \setminus F)$. Pero $X \setminus F \in \mathcal{T}$, luego, por (1), $\Lambda(X \setminus F)$ es un abierto en $C(X)$. De manera similar $\Lambda(F) = C(X) \setminus \Gamma(X \setminus F)$, así, $\Lambda(F)$ es cerrado en $C(X)$. Sean $A \in \overline{\Upsilon(F)}$ y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\Upsilon(F)$ tal que $A_n \longrightarrow A$. Supongamos que $A \notin \Upsilon(F)$, es decir, $F \nsubseteq A$, por lo que existe $x \in F \setminus A$, luego $x \notin A$, se sigue que $A \subset X \setminus \{x\}$. Recordemos que $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto en X, por (1) tenemos que $\Lambda(X \setminus \{x\})$ es un abierto en $C(X)$ que tiene a A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $A_n \in \Lambda(X \setminus \{x\})$, así, $A_n \subset X \setminus \{x\}$ para cada $n \geq N$. Esto último en particular nos dice que $x \notin A_N$, en consecuencia $A_N \notin \Upsilon(F)$, lo cual es una clara contradicción. Por lo tanto $A \in \Upsilon(F)$. Concluimos que $\overline{\Upsilon(F)} \subset \Upsilon(F)$, es decir, $\Upsilon(F)$ es cerrado en $C(X)$.

4. Es similar a la prueba de (3).

■

La siguiente definición puede parecer que no tiene argumentos para ser enunciada, pero el resultado posterior nos convence de que tiene solidez.

Definición 1.135. Sea X un continuo. La **función unión** $\mathbb{U} : 2^{2^X} \longrightarrow X$, para 2^{2^X}, está dada por $\mathbb{U}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.

Observación 1.136. La función unión, que mencionamos en la Definición 1.135, está bien definida.

Demostración. Consideremos $\mathcal{F} \in 2^{2^X}$, entonces $\mathcal{F} \subset 2^X$ y es un conjunto cerrado no vacío ahí, luego, $A \in \mathcal{F}$ implica que $A \in 2^X$, es decir, A es un cerrado no vacío en X, lo que nos dice que $\bigcup \mathcal{F} \subset X$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{F}$ es cerrado en 2^X, por la Proposición 1.24 existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\lim A_i = A$, por la Proposición 1.120, se sigue que existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \in A_n$ y $\lim x_n = x$, pero para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \bigcup \mathcal{F}$, así, nuevamente por la Proposición 1.24, $\bigcup \mathcal{F}$ es cerrado en X. ■

Hasta ahora sólo hemos mencionado la arco-conexidad en un espacio, pero no hemos profundizado en ella, aunque estamos convencidos de que hay mucho que decir al respecto. De momento, reforzamos los lazos que existen entre ella y algunos continuos, anexando a los arcos una propiedad interesante:

Definición 1.137. Sea X un continuo. Decimos que $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ es un **arco ordenado** en $C(X)$ si α es un arco tal que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ siempre que $s < t$. Si $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$ decimos que α es una arco ordenado desde A hasta B en $C(X)$.

En el caso de que X sea un compacto, la existencia de arcos ordenados está garantizada en $C(X)$:

Proposición 1.138. [7, Teorema 14.6] Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subsetneq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1.

Proposición 1.139. [7, Proposición 18.4] Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Si $\mathcal{A}$ es un arco desde A_0 hasta A_1 en $C(X)$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, donde $\mathcal{A}_0$ es un arco ordenado desde A_0 hasta $\bigcup \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_1$ es un arco ordenado desde A_1 hasta $\bigcup \mathcal{A}$.

El concepto a continuación, nos pone al alcance una forma de "medir" los subcontinuos de un continuo, en el hiperespacio correspondiente. En el capítulo 3, volvemos a hablar de las llamadas funciones de Whitney, pero nuestro interés está puesto en aquellas que involucran un hiperespacio anclado.

Definición 1.140. Sea X un continuo. Una **función de Whitney** para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$,
2. $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$ y
3. $\mu(X) = 1$

El resultado a continuación fue extraido de [7], aunque en el texto original aparece de manera más general, nosotros decidimos enunciarlo como sigue:

Proposición 1.141. [7, Teorema 13.4] Si X un continuo, entonces existe una función de Whitney para $C(X)$.

Definición 1.142. Dados un continuo X y una función de Whitney μ para $C(X)$, un **nivel de Whitney** es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para $t \in (0, 1)$.

Definición 1.143. Dados un continuo X y una función de Whitney μ para $C(X)$, un **bloque de Whitney** es un conjunto de la forma $\mu^{-1}([a, b])$ para $[a, b] \subset [0, 1]$.

En lo que resta de esta sección, asumimos que X es un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$.

Lema 1.144. [8, Lema 8.2] Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney. Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe una trayectoria en $\mathcal{A}$ que une a A con B. Además, si elegimos un punto $p \in A \cap B$, entonces se puede pedir que todos los elementos de la trayectoria contengan al punto p.

Definición 1.145. Sea $E \in C(X)$ y $t \in [0,1]$ tales que $\mu(E) \leq t$. Definimos el conjunto $C_E(X,t) = \{A \in \mu^{-1}(t) |\ E \subset A\}$.

La definición anterior puede consultarse en [12, pag.314]. La prueba de la proposición a continuación puede ser consultada en la referencia dada.

Lema 1.146. [12, Teorema 66.4] Si $\mathcal{A} = C_E(X,t)$, entonces $\mathcal{A}$ es un AR.

Con esto concluimos lo correspondiente a los preliminares, creemos que lo que hemos dicho hasta ahora es suficiente para comenzar el desarrollo de esta tesis. Esperamos que no queden dudas de lo que se ha mencionado a lo largo del capítulo. Sin más preámbulos, pasemos a la etapa siguiente.

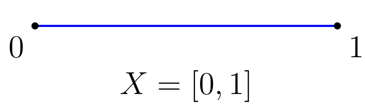
CAPÍTULO 2

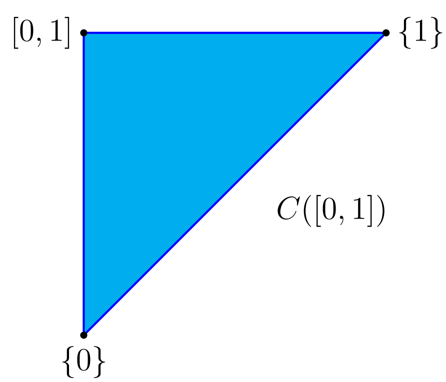
Modelos de los Hiperespacios $C(p, X)$

A lo largo de este capítulo, damos ejemplos de los hiperespacios anclados en un punto p para ciertos continuos conocidos X. Algunos de los modelos aquí presentados están basados en las ideas presentadas en [8, Cap. 3], el resto son construcciones hechas con ayuda de resultados que "facilitan" su comprensión.

2.1. Hiperespacios $C(p, [0, 1])$

Uno de los continuos más sencillos que existen, es el intervalo $[0, 1]$, por ello, es natural comenzar con el estudio de los hiperespacios anclados a un punto de este espacio.





En el caso del intervalo $[0, 1]$ podemos notar que sus subcontinuos son intervalos cerrados de la forma $[a, b]$, donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. Para obtener el hiperespacio $C([0, 1])$, podemos asignarle una relación natural con un subconjunto del plano (figura arriba a la derecha) como sigue:

$$C([0, 1]) = \{[a, b] \subset [0, 1] |\ 0 \leq a \leq b \leq 1\} \approx \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

No es complicado darse cuenta que los dos últimos conjuntos son homeomorfos ([8, Ejemplo 3.1]) y por tanto el hiperespacio $C([0,1])$ corresponde al triángulo previamente ilustrado, donde el segmento que une a los puntos $\{0\}$ y $\{1\}$ corresponde a los singulares de cada uno de los puntos del intervalo $[0,1]$.

Lo siguiente es apoyarnos del hiperespacio de subcontinuos, $C([0,1])$, para construir los correspondientes hiperespacios anclados. Para ello, lo analizamos en tres casos como sigue:

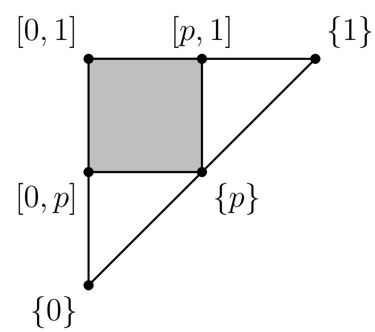
1. Si $p = 0$, entonces los subcontinuos que contienen a p son de la forma $[0,b]$, donde $0 \leq b \leq 1$.
2. Si $p = 1$, entonces los subcontinuos que contienen a p son de la forma $[a,1]$, donde $0 \leq a \leq 1$.
3. Si $0 < p < 1$, entonces los subcontinuos que contienen a p son de la forma $[a,b]$, donde $0 \leq a \leq p \leq b \leq 1$.

De lo anterior, podemos representar cada $C(p,[0,1])$ como alguno de los siguientes tres modelos:

(1) $C(0,[0,1])$

(2) $C(1,[0,1])$

(3) $C(p,[0,1])$ para $p \in (0,1)$

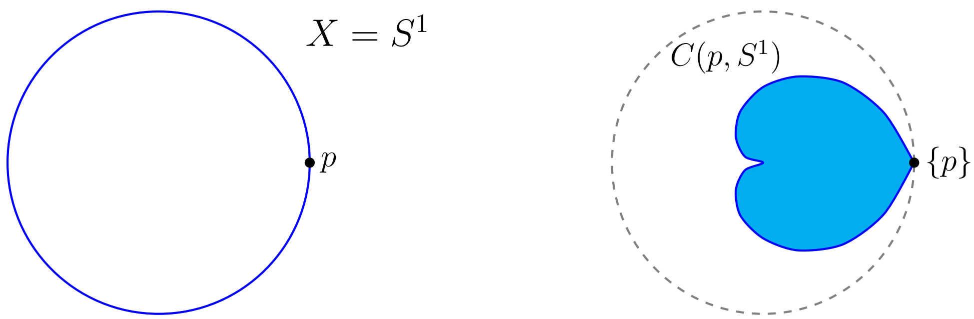


De manera general, podemos decir que para cada punto p en $[0,1]$, la función $h_p : C(p,[0,1]) \longrightarrow [0,p] \times [p,1]$ dado por $h_p([a,b]) = (a,b)$, hace que $C(p,[0,1]) \approx [0,p] \times [p,1]$.

2.2. Hiperespacios $C(p, S^1)$

Un continuo que no puede pasarse por alto, es la circunferencia unitaria, S^1. De manera precisa, se define como el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^2 | \ ||v||_{\mathbb{R}^2} = 1\}$, donde $||\cdot||_{\mathbb{R}^2}$ es la norma usual en $\mathbb{R}^2$.

Para este caso, en lugar de construir el hiperespacio $C(S^1)$ y luego deducir el hiperespacio anclado en algún punto, lo hacemos directamente, es decir, no nos apoyamos en el hiperespacio de subcontinuos de S^1, puesto que la idea para construirlo, nace de fijarse en los subcontinuos que contienen a un punto en particular.



En la figura anterior se muestra el espacio en consideración (a la izquierda), S^1, y el correspondiente hiperespacio anclado para un punto p en S^1. Notemos que p no necesariamente es un punto particular (podríamos pensar que corresponde al punto $(0, 1)$), pues al rotarse la circunferencia, podemos obtener cualquier punto de ella en esa posición particular. Aclarado esto, vamos a describir la manera de construir el dibujo de la derecha, $C(p, S^1)$.

Primero, notemos que cada subcontinuo propio no degenerado A de S^1 es un arco (pedazo de circunferencia) que tiene una longitud $0 < l(A) < 2\pi$ y un punto medio $m(A)$. Ahora consideremos la función $f : C(p, S^1) \longrightarrow D$, donde $D = \{v \in \mathbb{R}^2 | \ ||v||_{\mathbb{R}^2} \leq 1\}$, dada por:

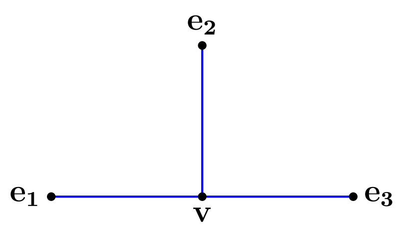
$$f(A) = \begin{cases} (0,1) & si \quad A = \{p\} \\ \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A) & si \quad \{p\} \subsetneq A \subsetneq S^1 \\ (0,0) & si \quad A = S^1 \end{cases}$$

No es difícil darse cuenta que la función anterior es un homeomorfismo, más aún, podemos observar que el modelo obtenido corresponde a una 2-celda (con su debido homeomorfismo). Pero esto sucede para cada punto de la circunferencia, por lo que de manera general decimos que $C(p, S^1) \approx [0, 1] \times [0, 1]$, para cada $p \in S^1$.

2.3. Hiperespacios $C(p, T)$

Para el valor $n = 3$, de la Definición 1.122, el continuo en cuestión comúnmente le llamamos **triodo** y **triodo simple**, respectivamente. El triodo simple juega un papel importante en este trabajo, pues gran parte de la teoría que se presenta y desarrolla a lo largo de este documento tiene como objetivo estudiar de manera detallada lo relacionado a éste. Abajo se presenta una manera particular de representar este espacio.

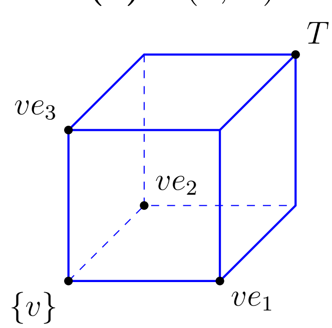
$X = T$, triodo simple



Para modelar sus hiperespacios anclados, hay que resaltar que existen 3 tipos de puntos; el vértice(v), los extremos(e_1, e_2, e_3) y todos los que son parte de él, pero que no son de los dos anteriores mencionados.

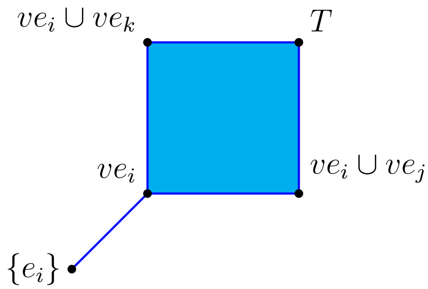
Notemos primero que T es la unión de tres arcos principales ve_1, ve_2 y ve_3. Si cada uno de estos lo comparamos con el intervalo $[0, 1]$, hay una manera simple de meter a T en $\mathbb{R}^3$ con cada una de sus "patas" sobre uno de los ejes, es decir, ver el triodo como los arcos que unen el punto $v = (0, 0, 0)$ con los puntos $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$, llamando L_1, L_2 y L_3 a los segmentos construidos, respectivamente.

(1) $C(v, T)$



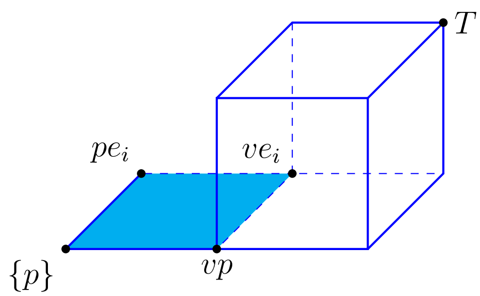
Para construir el hiperespacio anclado en v, basta con fijarnos que para cada subcontinuo A de T que contiene a v, $A = (A \cap L_1) \cup (A \cap L_2) \cup (A \cap L_3)$, además, si consideramos que a_i es la longitud del segmento $A \cap L_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces le podemos asignar a A un único punto (a_1, a_2, a_3). De esta manera, se puede observar que $C(v, T) \approx [0, 1]^3$, como se muestra en la figura anterior.

(2) $C(e_i,T)$ para $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$



Para el caso de los extremos del triodo simple, basta considerar que existen dos tipos de continuos que los contienen, los que tienen a v y los que no. Otras dos cosas que podemos notar es que los que no contienen a v, están contenidos propiamente en ve_i respectivamente para cada e_i y los que tienen a v, contienen a ve_i. Por lo anterior, ve_i es un continuo clave en esta situación y podemos escribir que $C(e_i)=C(e_i,ve_i)\cup C(ve_i,T)$. Puesto que ve_i es un arco, ya conocemos el comportamiento de $C(e_i,ve_i)$. Si somos un poco observadores nos daremos cuenta que $C(ve_i,T)$ es una de las caras del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^3$ que es paralela a alguno de los planos. En conclusión, un modelo para $C(e_i,T)$ es la figura de arriba.

(3) $C(p,T)$ para $p\in T\setminus\{v,e_1,e_2,e_3\}$



Sea $p\in T\setminus\{v,e_1,e_2,e_3\}$ y supongamos que $p\in ve_j$. De manera similar al caso anterior, pensamos en dos partes los hiperespacios anclados, lo que tiene a v y los que no, pero no es difícil ver que los que tienen a v deben contener a vp y los que no lo tienen, deben estar contenidos en ve_j, donde vp es el segmento que une a v y a p en ve_j, es decir, podemos escribir $C(p,T)=C(p,ve_j)\cup C(vp,T)$ y además que $C(p,ve_j)\cap C(vp,T)=\{A\in C(p,T)|\ vp\subset A\subset ve_j\}=\{(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3|\ b_i=0 \text{ si } i\neq j \text{ y } b_j\geq l_p\}\approx[l_p,1]$, donde l_p es la longitud del segmento vp. Adicionalmente sabemos que $C(vp,T)=[s_1,t_1]\times[s_2,t_2]\times[s_3,t_3]$ donde $(s_i,t_i)=(0,1)$ si $i\neq j$ y $(s_j,t_j)=(l_p,1)$. Finalmente, la figura anterior da una idea geométrica del modelo descrito.

2.4. Hiperespacios de la compactación del rayo

Dentro de los modelos que estudiamos en un principio se encontraba una de las compactaciones del rayo con residuo un arco, posteriormente notamos que hay una manera un tanto más general de tratar los hiperespacios anclados en un punto de este tipo de continuos, incluso si el residuo era un continuo cualquiera. Como consecuencia de nuestras pesquisas, tenemos lo siguiente:

Proposición 2.1. Sea Y un continuo y $X = Y \cup Z$ la compactación del rayo con residuo Y, donde $Z \approx (0, 1]$ bajo un homeomorfismo $h : Z \longrightarrow (0, 1]$.

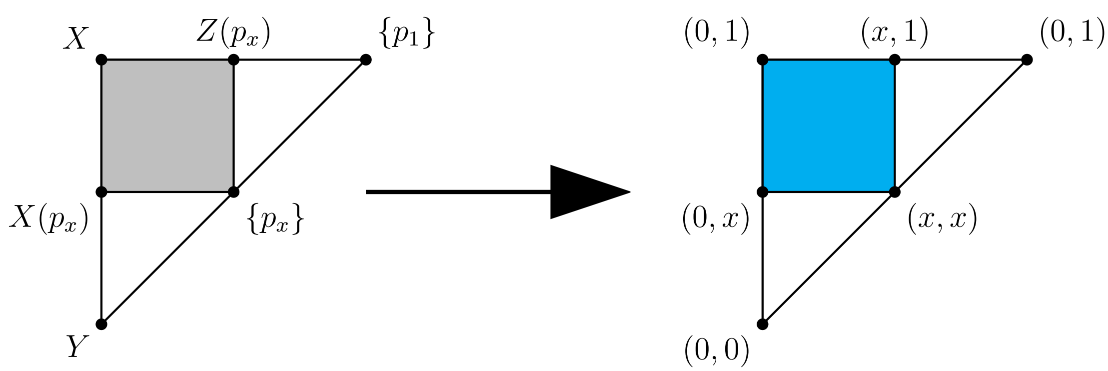
Para cada $x \in (0, 1]$ sean $p_x = h^{-1}(x)$, $X(p_x) = Cl_X(h^{-1}((0, x]))$ y $Z(p_x) = h^{-1}([x, 1])$. Notemos que $X(p_1) = X$ y que $Z(p_1) = \{p_1\}$.

Hay tres tipos principales de $C(p, X)$ dependiendo de donde se encuentre el punto p.

1. Si $p = p_1$, entonces el hiperespacio en cuestión es un arco con puntos extremos $\{p\}$ y X.

2. Si $p \in Y$, entonces $C(p, X) = C(p, Y) \cup C(Y, X)$ y $C(p, Y) \cap C(Y, X) = \{Y\}$. Además, $C(Y, X)$ es un arco con puntos extremos Y y X.

3. Si $p \in Z \setminus \{p_1\}$, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.



Demostración. 1. Como $p = p_1$, los subcontinuos de X que contienen a p son $Z(p_x)$, con $x \in (0, 1]$, o bien X. Además, para cualesquiera $a, b \in (0, 1]$ tales que $a \le b$ se tiene que $Z(p_b) \subseteq Z(p_a)$. Notemos que $f : [0, 1] \longrightarrow C(p, X)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} Z(p_x) & si \quad 0 < x \le 1 \\ \\ X & si \quad x = 0 \end{cases}$$

está bien definida, es biyectiva y continua (el único problema para la continuidad es en 0, pero no es difícil ver que las imágenes de una sucesión que converge a 0, convergen a X por la densidad del rayo). Por la Proposición 1.72, f es un homeomorfismo, con $f(0) = X$ y $f(1) = \{p_1\}$.

2. Si $p \in Y$, entonces los únicos subcontinuos de X que contienen a p son aquellos que están contenidos en Y y los $X(p_x)$, con $x \in (0,1]$. Para ver lo anterior basta tomar $A \in C(p,X)$ tal que $A \nsubseteq Y$, luego existe $t \in (0,1]$ tal que $p_t \in A$. Si para algún $x \in (0,t)$ se tiene que $X(p_x) \nsubseteq A$ entonces $X(p_x)\backslash\{p_x\}$ y $X(p_t)\backslash X(p_x)$ forman una disconexión de $X(p_t)\backslash\{p_x\}$, pero ambos contienen puntos de A, lo cual no puede ocurrir desde que A es conexo. En consecuencia $A = \bigcup_{p_x \in A} X(p_x) = X(p_y)$, donde $y = \text{máx}\{x \in (0,1] | \ p_x \in A\}$. Así, $C(p,X) = C(p,Y) \cup C(Y,X)$. Además, si $C \in C(p,Y) \cap C(Y,X)$, entonces $C \subset Y$ y $Y \subset C$, por lo tanto $C = Y$. Notemos que para cualesquiera $a, b \in (0,1]$ tales que $a \leq b$, se cumple que $X(p_a) \subseteq X(p_b)$. Para ver que $C(Y,X)$ es un arco basta considerar la función $g : [0,1] \longrightarrow C(Y,X)$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} X(p_x) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ Y & si \quad x = 0 \end{cases}$$

pero nuevamente es una función bien definida, biyectiva y continua. De igual manera, por la Proposición 1.72, g es un homeomorfismo tal que $g(0) = Y$ y $g(1) = X$.

3. Primero notemos que si $p = p_x$, con $x \in (0,1)$, entonces para cada $A \in C(p,X)$ se tiene que $A \in \{X(p_v), Z(p_u)\}$ o bien $A = X(p_v) \cap Z(p_u)$, para algún $v \in [x,1]$ y $u \in (0,x]$.

   Consideremos $\varphi : C(p,X) \longrightarrow [0,x] \times [x,1]$ la función definida por

$$\varphi(A) = \begin{cases} (0,v) & si \quad A = X(p_v) \\ \\ (u,1) & si \quad A = Z(p_u) \\ \\ (u,v) & si \quad A = X(p_v) \cap Z(p_u) \end{cases}$$

   Notemos que φ es biyectiva, pues para cada $(u,v) \in [0,x] \times [x,1]$ simplemente hay que elegir entre los continuos $X(p_v)$, $Z(p_u)$ o $X(p_v) \cap Z(p_u)$ para que su imagen sea tal punto, obteniendo de esta manera la sobreyectividad de la función. Además, si $(s,t) = (u,v)$, para $u = 0$ o $v = 1$ la inyectividad es inmediata. En caso de que $u \neq 0$ y $v \neq 1$, se tiene la inyectividad, pues $X(p_v) = X(p_t)$ y $Z(p_u) = Z(p_s)$ implican que $X(p_v) \cap Z(p_u) = X(p_t) \cap Z(p_s)$. Al estar definida sobre un compacto a un espacio T_2, es suficiente probar la continuidad de φ para garantizar que es un homeomorfismo (Proposición 1.72). Para ello, basta con mostrar que las preimágenes de los abiertos $[0,a) \times (b,1]$, $(a,x] \times (b,1]$, $[0,a) \times [x,b)$ y $(a,x] \times [x,b)$, con $a \in (0,x)$ y $b \in (x,1)$, son conjuntos abiertos en $C(p,X)$ (Proposición 1.27), pues cualquier abierto en $[0,x] \times [x,1]$ se obtiene como intersección de los anteriores.

   Recordemos que si F es un conjunto cerrado en $C(X)$, entonces $C(p,X) \cap (C(X) \setminus F)$ es un conjunto abierto en $C(p,X)$, también, para $U \subset X$ tenemos que $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U)$ son cerrados (abiertos) en $C(X)$ si U es cerrado (abierto) en X.

(i) $\varphi^{-1}([0,a)\times(b,1]) = \{\varphi^{-1}(u,v)|\ 0\leq u<a$ y $b<v\leq 1\}$
$= C(p,X)\cap(C(X)\setminus[A_1\cup B_1])$, donde $A_1=\Lambda(X(p_b))$ y $B_1=\Lambda(Z(p_a))$.

De manera similar:

(ii) $\varphi^{-1}((a,x]\times(b,1]) = C(p,X)\cap(C(X)\setminus[A_2\cup B_2])$, donde $A_2=\Lambda(X(p_b))$ y $B_2=\Gamma(X(p_a))$.

(iii) $\varphi^{-1}([0,a)\times[x,b)) = C(p,X)\cap(C(X)\setminus[A_3\cup B_3])$, donde $A_3=\Lambda(Z(p_a))$ y $B_3=\Gamma(Z(p_b))$.

(iv) $\varphi^{-1}((a,x]\times[x,b)) = C(p,X)\cap(C(X)\setminus[A_4\cup B_4])$, donde $A_4=\Gamma(X(p_a))$ y $B_4=\Gamma(Z(p_b))$.

Por lo anterior, se tiene que cada una de las preimágenes consideradas es un abierto en $C(p,X)$, así, φ es continua en $C(p,X)$.

Por lo tanto φ es un homeomorfismo. Finalmente $C(p,X)\approx[0,x]\times[x,1]\approx[0,1]^2$.

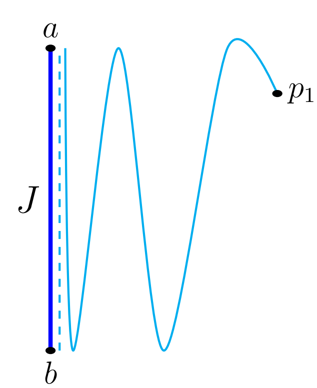
■

2.4.1. Hiperespacios $C(p,\mathbb{S})$

El continuo que presentamos ahora tiene la suficiente importancia para haber sido mencionado antes, pero la contrucción de su hiperespacio $C(X)$ no es tan fácil de realizar como en otros continuos, por ello es que recurrimos al uso de otra técnica para describir sus hiperespacios anclados. Más específicamente, nos apoyamos de la Proposición 2.1, pues para nuestra fortuna, el espacio en cuestión es una compactación del rayo con residuo un arco.

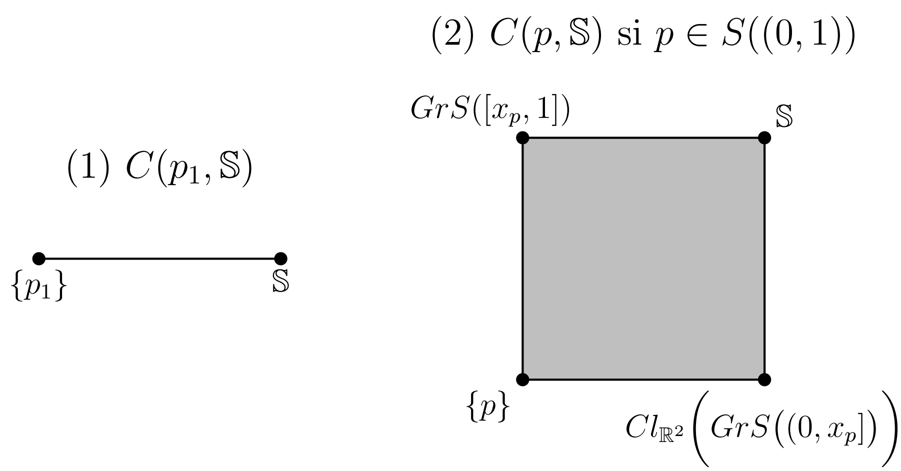
El dibujo siguiente representa lo que se conoce como el **continuo sen** $\left(\mathbf{\frac{1}{x}}\right)$, $\mathbb{S}$, que no es otra cosa que la cerradura en $\mathbb{R}^2$ de la gráfica de la función *sen* $\left(\frac{1}{x}\right)$ definida en el intervalo $(0,1]$, donde al arco J se le conoce como la barra límite con $a=(0,1)$ y $b=(0,-1)$ como sus puntos extremos.

$X=\mathbb{S}$



Como ya hemos podido apreciar, los hiperespacios anclados, correspondientes al espacio que se muestra arriba, son de tres tipos esencialmente, pero puesto que el residuo es un arco (del cual ya conocemos sus hiperespacios anclados) nos encontramos modelos extras. Sea $S : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $S(s) = sen\left(\frac{1}{s}\right)$. Si $W \subset (0,1]$, entonces $GrS(W)$ denota la gráfica de la función S evaluada en W.

Primero presentamos dos tipos de modelos para puntos que pertenecen al rayo de la compactación, es decir, la gráfica del la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Notemos que $C(p_1, \mathbb{S}) \approx [0,1]$, pues la Proposición 2.1 lo garantiza. En el caso de los puntos $p = (x_p, y_p)$ que están en el rayo pero que son diferentes de p_1, $C(p, \mathbb{S}) \approx [0,1]^2$.

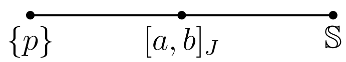


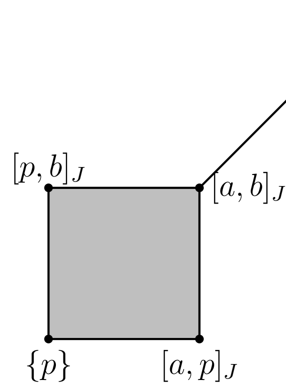
En el caso en que el punto p pertenece al arco J, debemos recordar que $C(p, X) = C(p, \mathbb{S}) \cup C(J, \mathbb{S})$. Ahora notemos que $\varphi : [0,1] \longrightarrow C(J, \mathbb{S})$ dada por $\varphi(t) = Cl_{\mathbb{R}^2}\Big(GrS\big((0,t]\big)\Big)$ es un homeomorfismo, donde $S(s) = sen\left(\frac{1}{s}\right)$ y $GrS\big((0,t]\big)$ es la gráfica de la función S sobre el intervalo $(0,t]$. Además, $C(p, X) \approx [a,p]_J \times [p,b]_J$ pues J es un arco y la sección 2.1 lo señala.

Por lo observado previamente, podemos ya presentar los modelos restantes como sigue:

(4) $C(p, \mathbb{S})$ si $p \in (a,b)_J$

(3) $C(p, \mathbb{S})$ si $p \in \{a,b\}$





2.5. Hiperespacios $C(p,[0,1]^n)$, $n \geq 2$

Para construir los modelos referentes a la n-celda para $n \geq 2$, empleamos un resultado que está contenido en [3], pero para facilitar al lector las cosas, lo enunciamos a continuación:

Teorema 2.2. [3, Teorema 2.2] Supongamos que Y es un espacio métrico compacto con una cantidad infinita de puntos. Entonces $C(v, X) \approx I^{\omega}$, donde X es el cono sobre Y y v es el vértice de X.

Observación 2.3. Sean $n \in \mathbb{N}$, $X = [0,1]^{n+1}$ y $\prod_{i=1}^{n+1}\{x_i\} \in X$. Notemos que:

1. si existe $i \in \{1, \ldots, (n+1)\}$ tal que $x_i = 1$, entonces $X \approx Cono(Y)$, donde $Y \approx [0,1]^n$.

2. si para cada $i \in \{1, \ldots, (n+1)\}$ se tiene que $x_i \neq 1$, entonces $X \approx Cono(Y)$, donde $Y \approx S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \; ||v||_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1\}$ y $|| \cdot ||_{\mathbb{R}^{n+1}}$ es la norma usual en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposición 2.4. Si $n \in \mathbb{N}$ y X es una $(n+1)$-celda, entonces para cada $p \in X$ se tiene que $C(p, X) \approx [0,1]^{\omega}$.

Demostración. Como $[0,1]^n$ y S^n son conjuntos infinitos, del Teorema 2.2 y la Observación 2.3 se tiene que $C(p, X) \approx [0,1]^{\omega}$. ■

CAPÍTULO 3

El Hiperespacio $C(p, X)$

En este capítulo nos centramos en el estudio del hiperespacio $C(p, X)$. Primero demostramos que $C(p, X)$ es efectivamente un continuo. Luego mostramos que se pueden definir funciones de Whitney en $C(p, X)$. Posteriormente damos condiciones bajo las cuales un continuo de dimensión 1 puede ser un Hiperespacio anclado $C(p, X)$ para algún continuo X y un punto p en X. Además, exhibimos propiedades que poseen los continuos del tipo $C(p, X)$. Para finalizar, hablamos un poco sobre la frontera y la semi-frontera de los hiperespacios $C(p, X)$.

3.1. El continuo $C(p, X)$

Hasta ahora hemos visto algunos modelos del hiperespacio $C(p, X)$ para algunos continuos X conocidos. Una de las preguntas que podemos hacernos de manera inmediata es, como con $C(X)$, ¿bajo que condiciones $C(p, X)$ es un continuo? Enseguida respondemos la cuestión anterior.

Teorema 3.1. Si X es un continuo y p es un punto de X, entonces $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$.

Demostración. Sea $A \in \overline{C(p, X)}$. Consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(p, X)$ tal que $A_n \xrightarrow{C(X)} A$. Supongamos que $A \notin C(p, X)$, luego $p \notin A$, se sigue que $A \subset X \setminus \{p\}$. Notemos que $X \setminus \{p\}$ es un conjunto abierto en X, la Proposición 1.134 implica que $\Lambda(X \setminus \{p\})$ es un abierto en $C(X)$ que tiene a A como elemento, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $A_n \in \Lambda(X \setminus \{p\})$, así, $A_n \subset X \setminus \{p\}$ para cada $n \geq N$. Esto último en particular nos dice que $p \notin A_N$, en consecuencia $A_N \notin C(p, X)$, lo cual es una clara contradicción. Por lo tanto $A \in C(p, X)$. Concluimos que $\overline{C(p, X)} \subset C(p, X)$, es decir, $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$. ■

Corolario 3.2. Si X es un continuo y p un punto de X, entonces $C(p, X)$ es compacto en $C(X)$.

Demostración. Sabemos $C(X)$ es un continuo, en particular un espacio compacto. Por el Teorema 3.1 se tiene que $C(p, X)$ es cerrado, luego, por la Proposición 1.68 se concluye que $C(p, X)$ es un compacto en $C(X)$. ■

Teorema 3.3. Si X es un continuo y p un punto de X, entonces $C(p, X)$ es conexo por trayectorias en $C(X)$.

Demostración. Sean $A, B \in C(p, X)$ tales que $A \neq B$. Si $A \in \{\{p\}, X\}$ o $B \in \{\{p\}, X\}$, ya acabamos. Supongamos que $A, B \notin \{\{p\}, X\}$. Como $p \in A \cup B$, por la Proposición 1.138, existen $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow C(p, X)$ y $\alpha_2 : [0,1] \longrightarrow C(p, X)$ dos arcos ordenados en $C(p, X)$ tales que $\alpha_1(0) = A$, $\alpha_2(0) = B$ y $\alpha_1(1) = A \cup B = \alpha_2(1)$. Consideremos la función $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ \alpha_2(2-2t) & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Notemos que, por la Proposición 1.29, α es una función continua y en consecuencia una trayectoria de A a B en $C(p, X)$. Por lo tanto $C(p, X)$ es conexo por trayectorias en $C(X)$. ■

Corolario 3.4. Si X es un continuo y p un punto de X, entonces $C(p, X)$ es conexo en $C(X)$.

Demostración. Se deduce inmediatamente de la Proposición 1.73 y el Teorema 3.3. ■

Teorema 3.5. Si X es un continuo y p un punto de X, entonces $C(p, X)$ es un subcontinuo de $C(X)$ y de 2^X.

Demostración. En el caso de $C(X)$, es inmediato de los Corolarios 3.2 y 3.4. Como $C(p, X)$ es conexo por trayectorias en $C(X)$ y $C(X) \subset 2^X$, se tiene que $C(p, X)$ es conexo por trayectorias en 2^X. Como $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$ y $C(X)$ es un cerrado en 2^X, es evidente que $C(p, X)$ es cerrado en 2^X y por la Proposición 1.68 un compacto en 2^X. Se tiene entonces que $C(p, X)$ es un continuo de 2^X. ■

Hasta ahora hemos dado un par de resultados que garantizan que el hiperespacio $C(p, X)$ es un continuo, pero aún quedan propiedades interesantes por discutir, las cuales son estudiadas en otra sección, pero antes, revisamos algunas funciones importantes que tienen que ver con los hiperespacios $C(p, X)$.

3.2. Funciones de Whitney en $C(p, X)$

Algo que puede destacarse de los hiperespacios anclados a un punto es que, para ciertas funciones cuyo dominio es $C(X)$, la restricción a $C(p, X)$ conserva varias propiedades que posee la función original. Tal es el caso de las funciones de Whitney.

Observación 3.6. Si γ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\mu = \gamma|_{C(p,X)}$ cumple las propiedades de una función de Whitney, pero restringida a $C(p, X)$.

Demostración. La continuidad se deduce de la Proposición 1.28. Las propiedades (1) a (3) de la Definición 1.140 se conservan evidentemente, por lo que la función $\mu = \gamma|_{C(p,X)}$ cumple las propiedades de una función de Whitney. ■

La obsevación anterior sienta bases para poder definir funciones de Whitney, pero ahora para el hiperespacio $C(p, X)$, pudiendo así explotar un poco más este hiperespacio. Además, la existencia de estas funciones está garantizada por la Proposición 1.141.

Definición 3.7. Decimos que una función continua $\mu : C(p, X) \longrightarrow [0, 1]$ es una **función de Whitney** para $C(p, X)$, si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mu(X) = 1$.
2. $\mu(\{x\}) = 0$.
3. $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

De manera similar que con $C(X)$, podemos definir niveles y bloques de Whitney, pero ahora en $C(p, X)$.

Definición 3.8. Dada una función de Whitney μ para $C(p, X)$, un **nivel de Whitney** es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para $t \in (0, 1)$.

Definición 3.9. Dados un continuo X y una función de Whitney μ para $C(p, X)$, un **bloque de Whitney** es un conjunto de la forma $\mu^{-1}([a, b])$ para $[a, b] \subset [0, 1]$.

La restricción de una función monótona no siempre conserva esta propiedad, en el caso de las funciones de Whitney definidas en $C(p, X)$ no ocurre esto último, es decir, sí son monótonas.

Teorema 3.10. Si μ es una función de Whitney en $C(p, X)$, entonces μ es una función monótona.

Demostración. Sea $t \in (0, 1)$. Consideremos $A, B \in \mu^{-1}(t)$. El Lema 1.144 nos garantiza que existe una trayectoria α que une a A con B en $C(X)$ tal que para cada $s \in [0, 1]$ se cumple que $p \in \alpha(s)$ y $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$, es decir, $\mu^{-1}(t)$ es conexo por trayectorias en $C(p, X)$. Puesto que $\{t\}$ es cerrado en $[0, 1]$ y μ es continua, por la Proposición 1.27 se tiene que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(p, X)$, luego, por la Proposición 1.68 es un compacto. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, se sigue que μ es monótona. ■

En lo que resta del documento, μ es una función de Whitney definida en el hiperespacio $C(p, X)$.

Lema 3.11. Si $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney, entonces $\mathcal{A}$ es un AR.

Demostración. Consideremos $E = \{p\}$. Notemos que $\mu(E) < t$ y que $\mu^{-1}(t) = C_E(X, t)$, así, por el lema 1.146, se cumple que $\mathcal{A}$ es un AR. ■

3.3. Propiedades de $C(p, X)$

Ahora investigamos y mostramos algunas de las propiedades que poseen los hiperespacios anclados en un punto. Empezamos por exhibir que el único continuo de dimensión 1 que puede ser un hiperespacio anclado es el arco, para ello, primero damos algunas definiciones y lemas en los que nos apoyaremos para tal objetivo.

Lema 3.12. [13, Lema 3.5] Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces ni $\{p\}$ ni X son puntos de corte de $C(p, X)$.

Demostración. Sean $A, B \in C(p, X) \backslash \{X, \{p\}\}$. Tomando arcos ordenados de $\{p\}$ a A y de $\{p\}$ a B, es fácil ver que $C(p, X) \setminus \{X\}$ es conexo por trayectorias. Similarmente, tomando arcos ordenados de A a X y de B a X, se tiene que $C(p, X) \setminus \{\{p\}\}$ es conexo por trayectorias. ■

Definición 3.13. Sean X un continuo, $p \in X$ y $A \in C(p, X)$. Decimos que A es **terminal en p** si para cada $B \in C(p, X)$ tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Decimos que A es **terminal** siempre que A es terminal en a para cada $a \in A$.

Las pruebas de los siguientes 3 resultados las incluimos y desarrollamos como en las referencias dadas. En el caso del Lema 3.16, el resultado original es una bicondicional, pero a nosotros sólo nos interesa una de las implicaciones, que es la que incluimos.

Lema 3.14. [13, Lema 3.7] Sean X un continuo y $p \in X$. Supongamos que $A \in C(p, X)$ es tal que $\{p\} \subsetneq A \subsetneq X$. Entonces A es terminal en p si y sólo si A es punto de corte de $C(p, X)$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si A es terminal en p, entonces $C(p, X) = \Lambda(A) \cup \Upsilon(A)$. Notemos que $\Lambda(A) \cap \Upsilon(A) = \{A\}$. Además, como $p \subsetneq A \subsetneq X$ se tiene que $\{p\} \in \Upsilon(A)$ y $X \in \Lambda(A)$, lo que nos dice que $\Upsilon(A) \setminus \{A\} \neq \emptyset \neq \Lambda(A) \setminus \{A\}$. Luego, $\Upsilon(A) \setminus \{A\}$ y $\Lambda(A) \setminus \{A\}$ al ser cerrados en $C(p, X) \setminus \{A\}$, hacen que $C(p, X) \setminus \{A\}$ sea disconexo. Por lo tanto A es punto de corte de $C(p, X)$.

($\Longleftarrow$) Si A no es terminal en p, existe $K \in C(p, X)$ tal que $A \setminus K \neq \emptyset$ y $K \setminus A \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{A} = \{B \in C(p, X) |\ A \nsubseteq B\}$. Notemos que $K \in \mathcal{A}$ y que cada elemento en

$\mathcal{A}$ puede ser conectado con $\{p\}$ por un arco ordenado en $\mathcal{A}$. Sea $B \in C(p, X) \setminus \{A\}$. Basta conectar a B con K por una trayectoria contenida en $C(p, X) \setminus \{A\}$ para concluir la prueba. Como $\mathcal{A}$ es arco-conexo, podemos suponer que $B \notin \mathcal{A}$, así, $A \subsetneq B$. Consideremos arcos ordenados α y β desde K hasta X y desde B hasta X, respectivamente. Finalmente, $\alpha \cup \beta$ es una trayectoria en $C(p, X) \setminus \{A\}$ que conecta a K y a B. Luego $C(p, X) \setminus \{A\}$ es conexo por trayectorias y por la Proposición 1.73 es conexo. Por lo tanto A no es punto de corte de $C(p, X)$. ■

Lema 3.15. [15, Lema 3.4] Sean $B, D \in C(p, X)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si p no está contenido en el corazón de un k-odo, entonces $B \setminus D$ y $B \cap D$ tienen a lo más $k - 1$ componentes.

Demostración. Sean $B, D \in C(p, X)$. Si $B \setminus D$ tiene al menos k componentes, por la Proposición 1.124, $B \cup D$ es un k-odo con corazón D, pero esto es una contradicción. Supongamos que $B \cap D$ tiene al menos k componentes distintas $D_1, \ldots D_k$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, consideremos α_i un arco ordenado desde D_i hasta B. Como X es T_4, existen abiertos $U_1, \ldots U_k$ tales que $D_1 \subset U_1, \ldots, D_k \subset U_k$ (pues cada D_i es cerrado al obtenerse de una intersección de cerrados) y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por la continuidad de cada α_i existen $s_1, \ldots, s_k \in [0, 1)$ tales que $\alpha_1(s_1) \in U_1, \ldots, \alpha_k(s_k) \in U_k$. Sea $s = \min\{s_1, \ldots, s_k\}$. Luego $\alpha_i(s) \cap \alpha_k(s) = \emptyset$ si $i \neq j$. Notemos que por la Proposición 1.123, $D \cup \alpha_i(s) \in C(p, X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, pues $\alpha_i(s) \cap D_j = \emptyset$ si $j \neq i$, con lo que $D \cup \alpha_i(s) = D \cup D_i$. Se sigue que $D \cup \alpha_1(s) \cup \cdots \cup \alpha_j(s) \in C(p, X)$. Luego tenemos que $[D \cup \alpha_1(s) \cup \cdots \cup \alpha_k(s)] \setminus D$ tiene al menos k componentes, otra vez una contradicción. ■

Lema 3.16. [15, Corolario 3.12] Si el punto p está contenido en el corazón de un k-odo, entonces $C(p, X)$ contiene una k-celda.

Demostración. Supongamos que p está contenido en el corazón M de un k-odo Y. Entonces $Y \setminus M$ tiene al menos k componentes, digamos $M_1, \ldots, M_k$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, consideremos α_i un arco ordenado desde M hasta $M \cup M_i$. Definamos $g : [0, 1]^k \longrightarrow C(p, X)$ dada por $g(x_1, \ldots, x_k) = \alpha_1(x_1) \cup \cdots \cup \alpha_k(x_k)$. Notemos que g está bien definida. Veamos que g es continua. Supongamos que $(t_1, \ldots, t_k) \in [0, 1]^k$ y que la sucesión $\{(t_1(n), \ldots, t_k(n))\}_{n=1}^{\infty}$, en $[0, 1]^k$, es tal que $\lim(t_1(n), \ldots, t_k(n)) = (t_1, \ldots, t_k)$. Por la Proposición 1.39, $\lim t_i(n) = t_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, además, por la continuidad de cada α_i y por la Proposición 1.118, se tiene que $\lim \alpha_i(t_i(n)) = \alpha(t_i)$ y $\lim(\alpha_1(t_1(n)) \cup \cdots \cup \alpha_k(t_k(n))) = \alpha_1(t_1) \cup \cdots \cup \alpha_k(t_k)$, es decir, $\lim g(t_1(n), \ldots, t_k(n)) = g(t_1, \ldots, t_k)$. Así, por la Proposición 1.53, g es continua. Sean $(r_1, \ldots, r_k), (s_1, \ldots, s_k) \in [0, 1]^k$ tales que $r_i < s_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $\alpha_i(r_i) \subsetneq \alpha_(s_i)$, en consecuencia $g(r_1, \ldots, r_k) \neq g(s_1, \ldots, s_k)$, de lo que obtenemos que g es inyectiva. Sea $h : [0, 1]^k \longrightarrow g([0, 1]^k)$ dada por $h(x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$. Por la Proposición 1.72 se concluye que h es un homeomorfismo. Por lo tanto $C(p, X)$ contiene una k-celda. ■

Para llegar a nuestra meta, primero evidenciamos que el intervalo $[0, 1]$, como hiperespacio anclado a un punto, se puede obtener de otros continuos que no son arcos, es decir, existen muchos continuos con hiperespacios anclados que son el intervalo $[0, 1]$.

Lema 3.17. Si $C(p,X)$ es un arco y $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(p,X)$ es un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta X, entonces $\alpha([0,1]) = C(p,X)$. En consecuencia, cualesquiera dos elementos de $C(p,X)$ son comparables.

Demostración. Desde que $C(p,X)$ es un arco, podemos suponer que existe un homeomorfismo $\beta : [0,1] \longrightarrow C(p,X)$, en particular β^{-1} es una función continua. Como α es una función continua sobre el intervalo $[0,1]$, por la Proposición 1.71 (2), $\alpha([0,1])$ es un conexo que tiene a los puntos $\{p\}$ y a X, luego $\beta^{-1}(\alpha([0,1]))$ es un conexo. Por el Lema 3.12, ni $\{p\}$ ni X son puntos de corte, se sigue que $\{\beta^{-1}(\{p\}), \beta^{-1}(X)\} = \{0,1\}$, pues $\beta^{-1}(C(p,X) \setminus \{\{p\},X\})$ es conexo en $[0,1] \setminus \{\beta^{-1}(\{p\}), \beta^{-1}(X)\}$ y los únicos puntos de no corte de $[0,1]$ son 0 y 1 (Lema 1.102). Finalmente $\beta^{-1}(\alpha([0,1]))$ es un conexo en $[0,1]$ que contiene sus puntos extremos, es decir, $\beta^{-1}(\alpha([0,1])) = [0,1]$, así, al aplicarle la función β a la igualdad anterior, se tiene que $\alpha([0,1]) = \beta([0,1]) = C(p,X)$. ■

La prueba del siguiente resultado se basa en una más general, que puede encontrarse en [13, Lema 3.9]. Para nuestros propósitos, es suficiente enunciar tal lema como sigue:

Lema 3.18. Sea X un continuo. Si $p \in X$ es tal que para cualesquiera $A, B \in C(p,X)$, A y B son comparables, entonces $C(p,X)$ es un arco.

Demostración. Sea $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow C(p,X)$ un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta X. Supongamos que $C(p,X)$ no es un arco. Sea $K \in C(p,X) \setminus \alpha_1([0,1])$ y consideremos un arco ordenado de p hasta K y otro desde K hasta X, entonces tenemos un nuevo arco ordenado, digamos α_2, desde p hasta X que pasa por K. Consideremos además una función de Whitney γ en $C(X)$. Sea $s \in [0,1]$ tal que $\alpha_1(s) \notin \alpha_2([0,1])$ y $r = \gamma(\alpha_1(s))$. Sea $t \in [0,1]$ tal que $r = \gamma(\alpha_2(t))$. Por la definición de función de Whitney, se tiene que $\alpha_1(s) \setminus \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) \setminus \alpha_1(s) \neq \emptyset$, luego, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$ no son comparables pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $C(p,X)$ es un arco. ■

Lema 3.19. Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si para cada $p \in X$ se tiene que $C(p,X)$ es un arco.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que existe $p \in X$ tal que $C(p,X)$ no es un arco. Por el Lema 3.18, existen $A, B \in C(p,X)$ tales que A y B no son comparables, es decir, $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$. Como $p \in A \cap B$, se sigue que $A \cup B \in C(X)$, más aún, $A \cup B$ es descomponible. Por lo tanto X no es hereditariamente indescomponible.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $C(p,X)$ es un arco para cada $p \in X$. Sea $Y \in C(X)$. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $Y = A \cup B$. Como Y es conexo en X, se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $p \in A \cap B$, entonces $C(p,X)$ es un arco y por el Lema 3.17, $A \subset B$ o $B \subset A$, así, $Y = A$ o $Y = B$. Por lo tanto X es hereditariamente indescomponible. ■

El Lema anterior asegura que no sólo del intervalo $[0,1]$ o copias homeomorfas de él (arcos), pueden obtenerse hiperespacios anclado que son arcos, incluso, para los continuos hereditariamente indescomponibles, resulta que no se puede obtener un $C(p,X)$ que no sea un arco.

Lema 3.20. Si Y es un continuo, X es una compactación del rayo con residuo Y y $C(p, Y)$ es un arco, entonces $C(p, X)$ es un arco.

Demostración. Sean $A, B \in C(p, X)$. Por la Proposición 2.1 (2), $C(p, X) = C(p, Y) \cup C(Y, X)$ y los continuos que contienen a Y son de la forma $X(p_x)$. Si $A, B \subset Y$, entonces, por el Lema 3.17, A y B son comparables. Si $A \subset Y$ y $Y \subset B$, entonces $A \subset B$. Por último, si $Y \subset A$ y $Y \subset B$, entonces existen $s, t \in (0, 1]$ tales que $A = X(p_s)$ y $B = X(p_t)$, esto es, $A \subset B$ si $s < t$ o $B \subset A$ si $t < s$. Se sigue, del Lema 3.18, que $C(p, X)$ es una arco. ■

Ahora sabemos que existe una gran cantidad de continuos que tienen al intervalo $[0, 1]$ como hiperespacio anclado en alguno de sus puntos, pero es válido preguntarnos si es el único de dimensión 1 que tiene tal propiedad. Llegados a este punto, ya somos capaces de demostrar el siguiente:

Teorema 3.21. Si $C(p, X)$ no es un arco, entonces $C(p, X)$ contiene una 2-celda.

Demostración. Supongamos que p no está contenido en el corazón de un 2-odo, de lo contrario, por el Lema 3.16 ya terminamos. Si $C(p, X)$ no es un arco, entonces, por Lemas 1.101 y 1.102, $C(p, X)$ tiene por lo menos tres puntos que no son puntos de corte. Por el Lema 3.12 se sigue que existe $A \in C(p, X)$ tal que $\{p\} \subsetneq A \subsetneq X$ y A no es punto de corte de $C(p, X)$. Luego, del Lema 3.14, A no es terminal en p. Esto significa que existe un elemento $B \in C(p, X)$ tal que $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$.

Por Lema 3.15, se obtiene que $A \cap B$ es conexo. Consideremos $M = A \cup B$ y $K = A \cap B$. Se tiene que M es un sucontinuo de X, K es un subcontinuo de M y $p \in K$. También, se tiene que $M \setminus K = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Como $A \setminus B = M \setminus B$ y $B \setminus A = M \setminus A$, observamos que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son abiertos, ajenos y no vacíos en M. Así, $M \setminus K$ no es conexo, es decir, tiene por lo menos dos componentes. Se sigue que M es un 2-odo que contiene a p en su corazón. Puesto que X contiene un 2-odo que tiene a p en su corazón, del Lema 3.16 se concluye que $C(p, X)$ contiene una 2-celda. ■

Teorema 3.22. Si $C(p, X)$ no es un arco, entonces $dim(C(p, X)) \geq 2$.

Demostración. Si $C(p, X)$ no es un arco, por el Teorema 3.21, existe $\mathcal{D} \subset C(p, X)$ tal que $\mathcal{D} \approx [0, 1]^2$. Por las Proposiciones 1.80 y 1.81 se tiene que $2 = dim([0, 1]^2) = dim(\mathcal{D}) \leq dim(C(p, X))$. Así, $dim(C(p, X)) \geq 2$. ■

El resultado anterior nos dice que el único continuo de dimesión 1 que puede ser un hiperespacio anclado es el arco, que es la imagen, bajo algún homeomorfismo, del intervalo $[0, 1]$.

Los hiperespacios anclados en un punto son localmente conexos, por tanto continuos de Peano. Está propiedad es de gran ayuda para demostrar que estos hiperespacios resultan ser *AR*.

Teorema 3.23. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p \in X$ se tiene que $C(p, X)$ es localmente conexo.

Demostración. Basta probar que todo abierto básico de $C(p,X)$ es arco-conexo. Para ello, vamos a considerar el vietórico $\langle U_1,\dots U_n\rangle$, donde $U_1,\dots,U_n$ son abiertos en X y $n\in\mathbb{N}$. Sean $A,B\in\langle U_1,\dots U_n\rangle$ con $A\neq B$, notemos que $A\cup B\in\langle U_1,\dots U_n\rangle$. Si $C_1\in C(p,X)$ es tal que $A\subset C_1\subset A\cup B$, entonces $C_1\in\langle U_1,\dots U_n\rangle$, puesto que $A\cap U_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ y $(A\cup B)\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$. De manera similar, si $C_2\in C(p,X)$ es tal que $B\subset C_2\subset A\cup B$ se tiene que $C_2\in\langle U_1,\dots U_n\rangle$. Luego, podemos considerar dos arcos ordenados $\alpha : A\longrightarrow(A\cup B)$ y $\beta : B\longrightarrow A\cup B$ cuyas imágenes están contenidas en $\langle U_1,\dots U_n\rangle$. Además, si $B\subset\alpha(s)$ o $A\subset\beta(t)$ con $s,t\in[0,1]$, entonces $(A\cup B)\subset(\alpha(s)\cap\beta(t))\subset(A\cup B)$, es decir, los arcos α y β sólo se intersectan en $A\cup B$, por lo que $\gamma : A\longrightarrow B$ dada por:

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & si \quad 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \\ \beta(2-2t) & si \quad \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

es un arco de A a B que está contenido en $\langle U_1,\dots U_n\rangle$. Se sigue que $\langle U_1,\dots U_n\rangle$ es arco-conexo y en consecuencia de la Proposición 1.73, es conexo. Así, $C(p,X)$ es localmente conexo. ■

Observación 3.24. Si X es un continuo y $p\in X$, entonces $C(p,X)$ es localmente arco-conexo.

Demostración. En la prueba del teorema anterior, se puede notar que para probar la conexidad del vietórico se prueba que éste es arco-conexo, así, $C(p,X)$ es localmente arco-conexo, pues todo abierto básico es arco-conexo. ■

Sin importar que un $C(p,X)$ provenga de un continuo indescomponible X, el hiperespacio anclado es descomponible. Para demostrarlo, requerimos el siguiente lema.

Lema 3.25. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p\in X$ se tiene que $C(p,X)$ es arco-conexo.

Demostración. Por el Teorema 3.23 ya sabemos que $C(p,X)$ es un continuo de Peano, luego de la Proposición 1.91 se sigue que $C(p,X)$ es arco-conexo. ■

Teorema 3.26. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p\in X$ se tiene que $C(p,X)$ es un continuo descomponible.

Demostración. Por el Lema 3.25 sabemos que $C(p,X)$ es un continuo arco-conexo, si $C(p,X)$ fuera indescomponible, por las Proposiciones 1.96 y 1.97 podemos tomar dos puntos en diferentes composantes de X, así, no existe un continuo que contenga a tales puntos, pero claramente nos contradice la arco-conexidad. Por tanto, $C(p,X)$ debe ser descomponible. ■

Otra propiedad que se puede sumar a la lista es la contractilidad de los hiperespacios anclados, la prueba del siguiente resultado aparece originalmente como parte de [2, Teorema 2] por si el lector desea consultarla.

Teorema 3.27. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p \in X$ se tiene que $C(p, X)$ es contráctil.

Demostración. Consideremos un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \longrightarrow C(p, X)$ de $\{p\}$ a X, es decir, $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = X$. Sea $H : C(p, X) \times [0, 1] \longrightarrow C(p, X)$ dada por $H(A, t) = \alpha(t) \cup A$. Vemos que H es una homotopía, pues $H(A, 0) = \alpha(0) \cup A = \{p\} \cup A = A$ y que $H(A, 1) = \alpha(1) \cup A = X \cup A = X$ para cada $A \in C(p, X)$. Para la continuidad, consideremos $(A, t) \in C(p, X) \times [0, 1]$ y una sucesión $\{(A_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(p, X) \times [0, 1]$ tal que $\lim(A_n, t_n) = (A, t)$. Como α es una función continua y por la Proposición 1.39, $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t)$ y $\lim A_n = A$, de la Proposición 1.118, se sigue que $\lim(\alpha(t_n) \cup A_n) = \alpha(t) \cup A$, esto es, $\lim H(A_n, t_n) = H(A, t)$. Por la Proposición 1.53, se tiene que la función H es continua. Así, $C(p, X)$ es contráctil. ■

Corolario 3.28. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p \in X$ se tiene que $C(p, X) \setminus \{\{p\}\}$ es contráctil.

Demostración. De la Proposición 1.28 y usando la misma función definida en la prueba del teorema anterior, pero restringida a $C(p, X) \setminus \{\{p\}\}$, se deduce el resultado. ■

Continuando nuestro camino hacia el resultado de que los hiperespacios anclados en un punto son AR, recordemos algunas cosas de la llamada función unión.

Lema 3.29. La funcion unión $\mathbb{U} : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ es continua.

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{U}$ está bien definida (Proposición 1.136). Sean $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}_X$ tales que $\bigcup \mathcal{A} \in \langle U_1, \ldots U_n \rangle_{2^X}$. Para cada $A_0 \in \mathcal{A}$ existen $V_1(A_0), \ldots, V_{n_o}(A_0)$ $\in \{U_1, \ldots, U_n\}$ tales que $A \in \langle V_1(A_0), \ldots, V_{n_o}(A_0) \rangle_{2^X}$. Denotemos por $W(A_0)$ al vietórico $\langle V_1(A_0), \ldots, V_{n_o}(A_0) \rangle_{2^X}$. Notemos que $W(A_0) \in W = \{\langle V_1, \ldots, V_k \rangle_{2^X} | \, V_1, \ldots, V_k \in \{U_1, \ldots, U_n\}$ y $k \leq n\}$, además, $|W| \leq 2^n$, luego existen $A_1, \ldots A_m \in \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A} \in \langle W(A_1), \ldots, W(A_m) \rangle_{2^{2^X}}$, más aún, podemos pedir que:

$$(*)\{U_1, \ldots, U_n\} = \{V_1(A_1), \ldots V_{n_1}(A_1), V_1(A_2), \ldots V_{n_2}(A_2), \ldots, V_1(A_m), \ldots, V_{n_m}(A_m)\}$$

.

Dicho lo anterior, ahora nos centramos en mostrar que la función unión es continua, para ello, consideremos $\mathcal{B} \in \langle W(A_1), \ldots, W(A_m) \rangle_{2^{2^X}}$ y veamos que $\bigcup \mathcal{B} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{2^X}$. Si $x \in \bigcup \mathcal{B}$, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x$. Como $\mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} W(A_i)$ y $\mathcal{B} \cap W(A_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se sigue que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $B_x \in W(A_j)$, en consecuencia, $B_x \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_j} V_i(A_j)$, lo que nos dice que $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, pues $\bigcup\limits_{i=1}^{n_j} V_i(A_j) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

Sea $U \in \{U_1, \ldots, U_n\}$. Por (*), se tiene que $U = V_{j_r}(A_r)$ para algún $r \in \{1, \ldots, m\}$ y algún $j_r \in \{1, \ldots, n_r\}$, además, existe $B(U) \in \mathcal{B} \cap W(A_r)$. Como $B(U) \in W(A_r)$, se tiene en particular que $B(U) \cap U \neq \emptyset$. Si $x_0 \in B(U) \cap U$, entonces $x_0 \in \bigcup \mathcal{B} \cap U$. Así, $\bigcup \mathcal{B} \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Finalmente tenemos que $\bigcup \mathcal{B} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{2^X}$, lo que nos muestra que la función $\mathbb{U}$ es continua, usando la Definición 1.26. ■

El siguiente resultado se encuentra en [7, Ejercicio 11.8], pero la prueba fue construida por nosotros, siguiendo la sugerencia que dan los autores en dicho texto.

Lema 3.30. Sea $\mathcal{P}$ es un subcontinuo de Peano de 2^X o $C(X)$. Asumiendo que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{P}$ para cada subcontinuo $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ es un AR.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{P}$ es subcontinuo de Peano de 2^X, entonces $2^{\mathcal{P}} \subset 2^{2^X}$. Consideremos la restricción de la función unión $\mathbb{U}$ a $2^{\mathcal{P}}$, es decir, $\mathbb{U}_{|_{2^{\mathcal{P}}}} : 2^{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{P}$ es una función bien definida y continua. Notamos que $\mathbb{U}_{|_{2^{\mathcal{P}}}}$ es suprayectiva porque para cada $A \in \mathcal{P}$ se tiene que $\{A\} \in 2^{\mathcal{P}}$ y $\bigcup\{A\} = A$.

Consideremos la función inclusión $i : \mathcal{P} \longrightarrow 2^{\mathcal{P}}$, dada por $i(A) = \{A\}$, esta es una función continua cuyo rango es $F_1(\mathcal{P})$, así, $i \circ \mathbb{U}_{|_{2^{\mathcal{P}}}} : 2^{\mathcal{P}} \longrightarrow F_1(\mathcal{P})$ es una función continua y suprayectiva.

Además, $F_1(\mathcal{P}) \subset 2^{\mathcal{P}}$. Si $A \in F_1(\mathcal{P})$ entonces $i \circ \mathbb{U}_{|_{2^{\mathcal{P}}}}(\{A\}) = i\left(\bigcup\{A\}\right) = i(A) = \{A\}$, se sigue que $i \circ \mathbb{U}_{|_{2^{\mathcal{P}}}}{}_{|_{F_1(\mathcal{P})}} : F_1(\mathcal{P}) \longrightarrow F_1(\mathcal{P})$ es la función identidad. Esto significa que $F_1(\mathcal{P})$ es retracto de $2^{\mathcal{P}}$.

Por el Teorema 1.125 sabemos que $2^{\mathcal{P}} \approx I^{\omega}$. Luego $F_1(\mathcal{P})$ es un retracto de I^{ω}. Como $\mathcal{P} \approx F_1(\mathcal{P})$, por la Proposición 1.127 se conluye que $\mathcal{P}$ es un AR. ■

Lema 3.31. Si X es un continuo y $\mathcal{F}$ es un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{F} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F} \in C(X)$.

Demostración. Por la Observación 1.136 sabemos que $\bigcup \mathcal{F} \in 2^X$. Supongamos que $\bigcup \mathcal{F}$ no es conexo. Así, por la Observación 1.58, $\bigcup \mathcal{F} = H \cup K$, donde $H, K \in 2^X$ y tales que $H \cap K = \emptyset$. Sea $E \in \mathcal{F} \cap C(X)$, entonces $E \subset H \cup K$. Sin perder generalidad, por la Proposición 1.59, podemos suponer que $E \subset H$. Como $K \neq \emptyset$, exite un punto $x \in K \cap \bigcup \mathcal{F}$, luego, hay un $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$ y por tanto $F \cap K \neq \emptyset$. Denotemos $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{F} | A \subset H\}$ y $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{F} | \ A \cap K \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{H} = \Lambda_{2^X}(H) \cap \mathcal{F}$ y $\mathcal{K} = \Gamma_{2^X}(K) \cap \mathcal{F}$. Como H y K son cerrados en X, por la Proposición 1.134 se tiene que $\Lambda_{2^X}(H)$ y $\Gamma_{2^X}(K)$ son cerrados en 2^X, así, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados en $\mathcal{F}$. Además, es claro que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$ y $\mathcal{H} \neq \emptyset \neq \mathcal{K}$, contradiciendo la conexidad de $\mathcal{F}$. Finalmente, $\bigcup \mathcal{F}$ debe ser conexo y por consecuencia $\bigcup \mathcal{F} \in C(X)$. ■

Ahora ya podemos probar el resultado que tanto hemos mencionado:

Teorema 3.32. Para todo continuo no degenerado X y para todo punto $p \in X$ se tiene que $C(p, X)$ es AR.

Demostración. Por el Lema 3.31, se tiene que para cada subcontinuo $\mathcal{A}$ de $C(p, X)$ se cumple que $\bigcup \mathcal{A} \in C(X)$. Como $\mathcal{A} \subset C(p, X)$, se sigue que $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Por 3.23, se tiene que $C(p, X)$ es localmente conexo. Basta tomar $\mathcal{P} = C(p, X)$ para que el Lema 3.30 nos garantice que $C(p, X)$ es un AR. ■

Algo que también atrajo nuestra atención fue el comportamiento de los bloques de una función de Whitney μ, por ello nos pareció interesante poner un par de cosas al respecto:

Teorema 3.33. Si μ es una función de Whitney, entonces $\mu^{-1}([a, b])$ es AR para $0 < a < b < 1$.

Demostración. Como $0 < a < b < 1$, por Lema 3.11 existen $r_a : \mu^{-1}([0, a]) \longrightarrow \mu^{-1}(a)$ y $r_b : \mu^{-1}([b, 1]) \longrightarrow \mu^{-1}(b)$ retracciones. Definamos $r : \mu^{-1}([0, 1]) \longrightarrow \mu^{-1}([a, b])$ como:

$$r(A) = \begin{cases} r_a(A) & si \quad \mu(A) \leq a \\ \\ A & si \quad a \leq \mu(A) \leq b \\ \\ r_b(A) & si \quad b \leq \mu(A) \end{cases}$$

Notemos que r es continua pues cumple las condiciones de la Proposición 1.29. Además, $r(\mu^{-1}([a, b])) = \mu^{-1}([a, b])$, por lo que r es una retracción, de esta manera se tiene que $\mu^{-1}([a, b])$ es retracto de $\mu^{-1}([0, 1])$. Puesto que $\mu^{-1}([0, 1]) = C(p, X)$, por el Teorema 1.49 se sigue que $\mu^{-1}([a, b])$ es AR. ■

Corolario 3.34. Si μ es una función de Whitney en $C(p, X)$, entonces $\mu^{-1}([a, b])$ es contráctil para $0 < a < b < 1$.

Demostración. Aplicando el Lema 1.130, se deduce de inmediato del teorema anterior. ■

Las siguientes dos proposiciones nos dicen mucho sobre el comportamiento de los hiperespacios anclados de dos continuos cuando están relacionados por un homeomorfismo, aunque cabe destacar que los recíprocos no necesariamente son ciertos, pues se requieren algunas propiedades adicionales que no discutimos aquí, pero que pueden encontrarse en [14].

Proposición 3.35. [13, Lema 3.4] Sean X, Y continuos y $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces $C(p, X) \approx C(h(p), Y)$.

Demostración. Consideremos la función $H : C(p, X) \longrightarrow C(h(p), Y)$ dada por $H(A) = h(A)$. Veamos que H está bien definida pues h es continua y para cada $A \in C(p, X)$, por la Proposición 1.71, se tiene que $h(A)$ es un subcontinuo de Y que contiene a $h(p)$. Veamos primero que H es biyectiva. Notemos que para cada $D \in C(h(p), Y)$, puesto que h^{-1} es continua, se tiene que $C = h^{-1}(D)$ es compacto y conexo, además, por la biyectividad de h, $h^{-1}(h(p)) \in h^{-1}(D)$, luego, $C \in C(p, X)$. Por lo tanto H es sobreyectiva, pues $H(C) = h(C) = h(h^{-1}(D)) = D$. Para la inyectividad de H, consideremos

$A, B \in C(p, X)$ tales que $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in A \setminus B$, entonces $h(x) \in h(A \setminus B)$, pero $h(A \setminus B) = h(A) \setminus h(B)$, se sigue que $h(x) \notin h(B) = H(B)$, lo que nos muestra que $H(A) \neq H(B)$, pues $h(x) \in h(A) = H(A)$. En consecuencia, la función H inyectiva. Por lo tanto, H es biyectiva.

Por la Proposición 1.72, nos basta con mostrar que H es continua para que H sea un homeomorfismo. Sea $A_0 \in C(p, X)$ y consideremos un abierto $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle_Y$ tal que $H(A_0) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_Y$, entonces $H(A_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y $H(A_0) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Llamemos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i = h^{-1}(V_i)$, como h es continua se tiene que $U_i \in \mathcal{T}_X$. Sean $y_i \in H(A_0) \cap V_i$ y $x_i = h^{-1}(y_i)$. Vemos que $x_i \in A_0 \cap U_i$ pues $H(A_0) = h(A_0)$ y $y_i \in V_i$. Se sigue que $A_0 \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, si $x \in A_0$ y $y = h(x)$, entonces $y \in V_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, luego $h^{-1}(y) \in U_j$, lo cual implica que $x \in U_j$. Así $A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto $A_0 \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_X$. Si $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_X$, entonces $h(B) \subset h\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$ y $h(B) \cap h(U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es fácil ver que $h(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} h(U_i)$ y $h(B) \cap V_i \neq \emptyset$ $\Longrightarrow H(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y $H(B) \cap V_i \neq \emptyset \Longrightarrow H(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_X) \subset \langle V_1, \ldots, V_n \rangle_Y$. Finalmente H es continua y por tanto un homeomorfismo. ■

Proposición 3.36. Si X es un continuo homogéneo, entonces para todo par de puntos $a, b \in X$ se tiene que $C(a, X) \approx C(b, X)$.

Demostración. Sean $a, b \in X$ tales que $a \neq b$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que $f(a) = b$, así, por la Proposición 3.35 se tiene que $C(a, X) \approx C(b, X)$. ■

3.4. Frontera y semi-frontera de $C(p, X)$

Ahora es turno para estudiar un poco la frontera de un hiperespacio anclado en $C(X)$, posteriormente hacemos aparecer un concepto similar, pero que no es tan conocido y mostramos algunas de sus diferencias.

Algo que resulta natural preguntarse es, ¿cuándo la frontera del hiperespacio anclado tiene condiciones suficientes para ser todo el hiperespacio? En breve respondemos a tal cuestión, para ello, consideremos la función $C^* : C(X) \longrightarrow C(C(X))$ dada por $C^*(A) = C(A)$.

Proposición 3.37. Si $X \in Fr(C(p, X))$ y la función $C^* : C(X) \longrightarrow C(C(X))$ es continua, entonces $Fr(C(p, X)) = C(p, X)$.

Demostración. Como $X \in Fr(C(p, X)) \subset Cl_{C(X)}(C(X) \setminus C(p, X))$, por las Proposiciones 1.14 y 1.24, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = X$ y $A_n \subset X \setminus \{p\}$, luego, por la continuidad de C^* se sigue que $\lim C^*(A_n) = C^*(X)$, es decir, $\lim C(A_n) = C(X)$. Si $B \in C(p, X)$, entonces, por la Proposición 1.120, existe $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim B_n = B$ y $B_n \in C(A_n)$, así, $B_n \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por consecuencia, $B \in Fr(C(p, X))$. Finalmente, $C(p, X) \subset Fr(C(p, X))$, y de la Proposición 1.13 tenemos que $Fr(C(p, X)) \subset C(p, X)$ (pues $C(p, X)$ es cerrado), lo que prueba que $Fr(C(p, X)) = C(p, X)$. ■

Teorema 3.38. Para todo continuo X y todo punto p en X, se cumple que $Fr(C(p, X))$ es conexo.

Demostración. Sean $A \in Fr(C(p, X))$ y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X) \setminus C(p, X)$ tal que $\lim A_n = A$. Por la Proposición 1.120, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim a_n = p$ y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos un arco ordenado α_n desde a_n hasta A_n. Notemos que $\alpha_n \subset C(X) \setminus C(p, X)$. Como $C(C(X))$ es compacto, podemos suponer que existe $\alpha \in C(C(X))$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$ y $\{p\}, A \in \alpha$. Si $E, F \in \alpha$, entonces existen $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim E_n = E$ y $\lim F_n = F$, con $E_n, F_n \in \alpha_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.25, $\alpha \subset Fr(C(p, X))$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ ($E_n \subset F_n$ o $F_n \subset E_n$), en consecuencia, existe una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, ($E_{n_k} \subset F_{n_k}$ o $F_{n_k} \subset E_{n_k}$), por la Proposición 1.119 se tiene que $E \subset F$ o $F \subset E$. Por lo tanto α es un arco ordenado, así, α conecta a $\{p\}$ con A en $Fr(C(p, X))$, lo que prueba que $Fr(C(p, X))$ es conexo (en consecuencia de la Proposición 1.73). ■

Corolario 3.39. Para todo continuo X y todo punto p en X, $Fr(C(p, X))$ es un subcontinuo de $C(p, X)$.

Demostración. Del teorema anterior se deduce la conexidad. Por 1.15, $Fr(C(p, X))$ es cerrado en $C(p, X)$, de esta manera se concluye el resultado. ■

Un concepto que es similar al de frontera, es el que a continuación presentamos:

Definición 3.40. Definimos la **semi-frontera** para $C(p, X)$ en C(X) como $SF(C(p, X)) = \{B \in C(p, X) \mid \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ continua tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(t) \in C(X) \setminus C(p, X)$ para cada $t \in (0, 1]\}$.

Dicho lo anterior es común preguntarse la diferencia que existe entre la frontera y la semi-frontera, cosiderándolas en el hiperespacio $C(X)$. Por ello tenemos lo siguiente:

Teorema 3.41. Si X es un continuo y p un punto en X, entonces $SF(C(p, X)) \subset Fr(C(p, X))$.

Demostración. Sea $A \in SF(C(p, X))$. Por definición, $A \in C(p, X)$ y existe $\alpha : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(t) \in C(X) \setminus C(p, X)$ para cada $t \in (0, 1]$. Consideremos $A_n = \alpha\left(\frac{1}{n}\right)$, entonces $A_n \longrightarrow A$, pero cada $A_n \notin C(p, X)$, por 1.25 se tiene que $A \in Fr(C(p, X))$. Por lo tanto $SF(C(p, X)) \subset Fr(C(p, X))$. ■

El resultado anterior simplemente nos dice una parte de lo que queremos saber. Para dar más ideas, debemos esperar un poco, pues los continuos hereditariamente indescomponibles nos muestran que no tienen la obligación de ser iguales las anteriormente mencionadas. Las proposiciones que estamos por enunciar nos dan algunas particularidades, pero no terminan de respondernos sobre la relación que existe entre la frontera y la semi-frontera, aunque antes de mostrarlas enunciamos la definición de "punto orilla", pues necesitamos de tal concepto.

Definición 3.42. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un **punto orilla** de X si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = X$ y $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La prueba de la siguiente proposición la omitimos, pero puede consultarse en la referencia dada, así como una equivalencia de la definición previa ([10, Definición 2.1]). Aunque hay indicios más antiguos del concepto de punto orilla, no se habían considerado continuos en general, como se hace en [10].

Proposición 3.43. [10, Proposición 2.5] Si X es un continuo y $X \setminus \{p\}$ no es conexo, entonces p no es un punto orilla de X.

Proposición 3.44. Sean X un continuo no degenerado y p un punto en X, entonces:

1. $\{p\} \in Fr(C(p, X))$.
2. $X \in Fr(C(p, X))$ si y sólo si p es punto orilla en X.
3. Si p es punto de corte en X, entonces $X \notin Fr(C(p, X))$.

Demostración.

1. Como X es compacto, existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $X \setminus \{p\}$ tal que $p_n \xrightarrow{X} p$. Notemos que $\{\{p_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que está contenida en $F_1(X)$, puesto que $F_1(X) \approx X$, se sigue que $\{p_n\} \xrightarrow{F_1(X)} \{p\}$, finalmente $\{p_n\} \xrightarrow{C(X)} \{p\}$. Así, por 1.25, $\{p\} \in Fr(C(p, X))$.
2. Es inmediato de la definición de punto orilla.
3. Supongamos que $X \in Fr(C(p, X))$, entonces p es punto orilla de X, luego, por 3.43, se tiene que $X \setminus \{p\}$ es conexo.

■

Proposición 3.45. Si X es un continuo indescomponible y p un punto en X, entonces $X \in SF(C(p, X))$.

Demostración. Supongamos que X no pertenece a $SF(C(p, X))$, entonces cualquier arco que tenga a X como extremo intersecta a $C(p, X)$ en al menos dos puntos. Consideremos un punto $q \in X$ de tal manera que $q \notin \kappa(p)$, es decir, q no pertenece a la misma composante de p en X. Por la Proposición 1.95, X es irreducible entre p y q. Sea $\alpha : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ un arco ordenado desde q hasta X. Entonces existe $t \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t) \in C(p, X)$ pero esto no puede pasar pues $\{q\} \subsetneq \alpha(t) \subsetneq X$ y X es irreducible en $\{p, q\}$. Por lo tanto X debe pertenecer a $SF(C(p, X))$. ■

Lema 3.46. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, $p \in X$ y α es un arco en $C(X)$ tal que $\{p\} \in \alpha$, entonces $\alpha \cap C(p,X) \setminus \{\{p\}\} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que existe $A \in \alpha$ tal que $p \notin A$, entonces $\{p\} \cap A = \emptyset$. Sea $\beta \subset \alpha$ el arco que une a $\{p\}$ con A, por la Proposición 1.139, existe $\alpha_1 \subset \alpha$ un arco ordenado desde $\{p\}$ a $\bigcup \alpha$, luego $\bigcup \alpha \in (C(p,X) \setminus \{\{p\}\})$, con lo que concluimos la prueba. ■

Teorema 3.47. Si X es un contino hereditariamente indescomponible y p un punto en X, entonces $C(p,X) \setminus \{\{p\}\} = SF(C(p,X))$.

Demostración. Sea $A \in C(p,X) \setminus \{\{p\}\}$. Como A es indescomponible, por la Proposición 1.98, existe un punto $q \in A$ tal que A es irreducible entre p y q. Consideremos $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(A)$ un arco ordenado desde $\{q\}$ hasta A. Si $t \in [0,1)$ es tal que $p \in \alpha(t)$, entonces existe un continuo propio de A que contiene a p y a q, lo cual no puede pasar pues A es irreducible entre p y q. Se sigue que para cada $t \in [0,1)$ se cumple que $p \notin \alpha(t)$, luego $A \in SF(C(p,X))$. Bastará mostrar que $\{p\}$ no pertenece a la semi-frontera del hiperespacio anclado en p, para que el resultado esté completo. Supongamos que $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ es un arco tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) \notin C(p,X)$, por el Lema 3.46, existe $B \in \alpha \cap C(p,X)$ tal que $\{p\} \subsetneq B$, lo que nos dice que α no cumple las condiciones para que $\{p\}$ sea un elemento de la semi-frontera, pero eso pasa para cualquier arco en $C(X)$ que salga de $\{p\}$. Por lo tanto $\{p\} \notin SF(C(p,X))$ y en consecuencia $C(p,X) \setminus \{\{p\}\} = SF(C(p,X))$. ■

Hasta aquí llega nuestro trabajo realizado con los hiperespacios $C(p,X)$. Seguramente hay muchas cosas por descubrir de estos hiperespacios, por lo que invitamos al lector a formular sus propias preguntas y conjeturas.

CAPÍTULO 4

El Hiperespacio $K(X)$

Ya hemos revisado propiedades y resultados sobre los hiperespacios anclado, ahora toca el turno de hablar un poco sobre el hiperespacio de hiperespacios anclados, $K(X)$. Este capítulo está dedicado a discutir hechos relacionados con $K(X)$ y $K(B,X)$ si $B \subset X$. También, incluimos ideas abordadas para el estudio de lo que denominamos "continuos T-similares".

4.1. Propiedades de $K(X)$

Hasta ahora hemos trabajado con hiperespacios que resultan ser continuos, el caso de $K(X)$ es diferente, pues no necesariamente tiene tal propiedad. En esta parte exhibimos algunas condiciones que debe cumplir un continuo X para que el hiperespacio $K(X)$ sea compacto o conexo, además, aparecen propiedades que poseen los hiperespacios de la forma $K(B,X)$ cuando B es un subespacio de X. Lo primero es estudiar las condiciones bajo las cuales el hiperespacio $K(X)$ resulta ser un compacto.

Definición 4.1. Para un continuo X y $A \subset X$, sea $\tau_A : A \longrightarrow K(A,X)$ dada por $\tau_A(p) = C(p,X)$. Por comodidad, denotamos τ_X simplemente por τ.

Observación 4.2. La función τ_A definida arriba es biyectiva, pues a cada $p \in A$ le asocia el único $C(p,X)$.

Lema 4.3. Si X es un continuo y $A \subset X$, entonces ${\tau^{-1}}_A : K(A,X) \longrightarrow A$ es una función continua.

Demostración. Sean $C(p,X) \in K(A,X)$ y $\{C(p_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $K(A,X)$ tales que $\lim C(p_n,X) = C(p,X)$. Por la Proposición 1.119, existe una subsucesión de $\{\{p_n\}\}_{n=1}^{\infty}$, digamos $\{\{q_n\}\}_{n=1}^{\infty}$, que converge en 2^X. Sea $B = \lim\{q_n\}$. Por la Proposición 1.120, $B \in C(p,X)$. Como $F_1(X)$ es cerrado en 2^X, B no tiene más de un punto, se sigue que $B = \{p\}$, por lo que $\lim p_n = p$. Finalmente, por la Proposición 1.53, τ^{-1} es continua. ■

Lema 4.4. Si X es un continuo, $p \in X$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tales que $\lim p_n = p$, entonces $\limsup C(p_n, X) \subset C(p,X)$.

Demostración. Notemos que $\limsup C(p_n,X) = \{B \in C(X) |$ para cada abierto $\mathcal{U}$ en X tal que $B \in \mathcal{U}$ existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que $|J| \geq \aleph_0$ y para cada $i \in J$, $C(p_i, X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$.
Sean $A \in \limsup C(p_n, X)$. Por la Proposición 1.52, existe una base numerable de vecindades de A, digamos $\mathcal{B}'$. Además, cada elemento de $\mathcal{B}'$ contiene un subconjunto abierto que tiene a A como elemento, es decir, podemos construir una base numerable de vecindades de A cuyos elementos son conjuntos abiertos, digamos $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \ldots\}$, de tal manera que $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$ si $i \leq j$ (como en la prueba de la Proposición 1.120). Luego, para cada $\mathcal{U}_i$ existe $J_i \subset \mathcal{N}$ que cumple con las condiciones de la definición de $\limsup C(p_n, X)$. Como cada J_i no es finito, podemos tomar un $n_i \in J_i$ de tal manera que $n_i < n_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a A. Así, por la Proposición 1.120, se sigue que $p \in A$, pues $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a p. Luego $A \in C(p, X)$. Por lo tanto, $\limsup C(p_n, X) \subset C(p,X)$. ■

Definición 4.5. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X tiene la **propiedad de Kelley** en p si para cada sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim p_n = p$ y para cada $A \in C(p,X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim A_n = A$ y $A_n \in C(p_n, X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X tiene la **propiedad de Kelley** si tiene la propiedad de Kelley en cada uno se sus puntos.

Teorema 4.6. Sea X un continuo. Entonces la función τ es continua si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sean $p \in X$, $A \in C(p,X)$ y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a p. Por la continuidad de τ, se tiene que $C(p_n, X) = \tau(p_n) \longrightarrow \tau(p) = C(p,X)$. Se sigue, de la Proposición 1.120, que existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A y $A_n \in C(p_n, X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley.

($\Longleftarrow$) Sean $p \in X$ y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim p_n = p$. Como X tiene la propiedad de Kelley, entonces para cada $B \in C(p,X)$ existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim B_n = B$. En consecuencia, $C(p,X) \subset \liminf C(p_n, X)$. Por el Lema 4.4 y la Proposición 1.115, se cumple que $\lim C(p_n, X) = C(p,X)$. Finalmente, por la Proposición 1.53, τ es continua. ■

Teorema 4.7. Si X es un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $K(X)$ es compacto;
2. $\tau : X \longrightarrow K(X)$ es continua;

3. X tiene la propiedad de Kelley;

4. τ es un homeomorfismo, es decir, $X \approx K(X)$.

Demostración. De la Observación 4.2 y del Lema 4.3 se tiene que (2) implica (4). Es fácil ver que (4) implica (2). Por la Proposición 1.71, (2) implica (1). Como $K(X) \subset 2^{2^X}$ y 2^{2^X} es T_2, por la Observación 1.55, la Proposición 1.72 y la continuidad de τ^{-1}, (1) implica (4). Finalmente por el Teorema 4.6 se tiene que (2) y (3) son equivalentes. ■

El teorema anterior muestra algunas equivalencias de la compacidad del hiperespacio $K(X)$, por lo que podemos afirmar que existen continuos cuyo hiperespacio de hiperespacios anclados no es compacto, en consecuencia no es un continuo.

A continuación, hacemos una ligera revisión sobre los tipos de conexidad que puede presentar $K(B, X)$ para algun continuo X y $B \subset X$. En particular, estos resultados funcionan para $K(X)$ si $B = X$.

El resultado que sigue, se encuentra en [14] junto con la prueba que incluimos aquí, la cual hace uso de la métrica de Hausdorff. La razón que tenemos para romper con la "tradición vietórica", se debe principalmente a lo abstracto que se torna dicha demostración cuando usamos vietóricos.

Teorema 4.8. Si X es un continuo y B es un subespacio localmente conexo de X, entonces la función $\tau_B : B \longrightarrow K(B, X)$ es continua.

Demostración. Sean $p \in B$ y $\epsilon > 0$. Desde que B es localmente conexo, podemos tomar vecindades abiertas arbitrariamente pequeñas contenidas en B, es decir, existe $V \subset B$ una vecindad abierta de p tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos de V es menor que ϵ. Sean $q \in V$, $A \in C(p, X)$ y $D = A \cup Cl_X(V)$. Luego, se tiene que $D \subset N_X(\epsilon, A)$ y $A \subset N_X(\epsilon, D)$. Se sigue que $\mathcal{H}(A, D) < \epsilon$. Es fácil ver que $D \in C(q, X)$. De esta manera tenemos que $C(p, X) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(q, X))$. Similarmente, se tiene que $C(q, X) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(p, X))$. Por lo tanto, la distancia entre $\tau_B(p)$ y $\tau_B(q)$ (con la respectiva métrica de Hausdorff en $C(C(X))$) es menor que ϵ. Lo que nos dice que τ_B es continua, pues $K(B, X)$ es un espacio métrico y la Proposición 1.20 hace que se cumplan las condiciones de la definición de continuidad. ■

Corolario 4.9. Si X es un continuo y B es un subespacio localmente conexo de X, entonces $B \approx K(B, X)$. Más aún, $K(B, X)$ es localmente conexo.

Demostración. Por la Observación 4.2, el Lema 4.3 y el Teorema 4.8 se tiene que τ es un homeomorfismo. Luego, por la Porposición 1.27, f es abierta. Finalmente, por la Proposición 1.71, se tiene que $K(B, X)$ es localmente conexo. ■

En [14, Ejemplos 5.4] y [14, Ejemplo 5.5] podemos encontrar continuos X y Y que no son localmente conexos cuyos hiperespacios $K(X)$ y $K(Y)$, respectivamente, son localmente conexos. Además, $K(Y)$ resulta ser conexo, mientras que $K(X)$ no lo es. A saber, $X =$

$\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \in [-2,2]\} \cup \left\{\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in (0,\pi]\right\}$ y $Y = X/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por:

$$(x,y) \sim (w,z) \Longleftrightarrow (x,y) = (w,z) \text{ o } (x,y) \in \left\{(0,-2), \left(\pi, \frac{1}{\pi}\right)\right\}$$

.

El resto de la sección hablamos sobre compactaciones del rayo con residuo algún continuo. Los resultados que presentamos a continuación, pueden encontrarse en [14, Sección 6]. Usamos la notación presentada en la Proposición 2.1 por comodidad.

Lema 4.10. Si cualquiera de las siguientes condiciones se mantiene:

1. X es una compactación del rayo con residuo Y y Y tiene un punto p tal que $C(p,Y) \approx [0,1]$; o
2. X es un continuo y $p \in X$ tales que $C(p,X) \approx [0,1]$.

y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\lim p_n = p$, entonces $\lim C(p_n,X) = C(p,X)$.

Demostración. Por la Proposición 3.20, tenemos que la condición (1) implica la condición (2), por lo que podemos suponer que existe $p \in X$ tal que $C(p,X)$ es un arco. Sea $A \in C(p,X)$ y consideremos $\gamma : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney en $C(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $A_n \in C(p_n,X)$ tal que $\gamma(A_n) = \gamma(A)$. Como $C(X)$ es cerrado, podemos encontrar $B \in C(X)$ tal que $\lim A_n = B$. Por la continuidad de γ se tiene que $\gamma(A) = \gamma(A_n) \longrightarrow \gamma(B)$, es decir, $\gamma(A) = \gamma(B)$. Como $\lim p_n = p$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_n \in A_n$, por la Proposición 1.120, $p \in B$. Se sigue, de la definición de función de Whitney que $A = B$. De esta manera, $\lim A_n = A$, lo que nos dice que $C(p,X) \subset \liminf C(p_n,X)$. Finalmente, como consecuencia del Lema 4.4 y la Proposición 1.115, $\lim C(p_n,X) = C(p,X)$. ■

Proposición 4.11. Si X es una compactación del rayo con residuo Y, entonces $K(Y,X)$ es cerrado en $K(X)$.

Demostración. Consideremos una sucesión $\{C(p_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ en $K(Y,X)$ que converge a $C(p,X)$, para algún $p \in X$. Por el Lema 4.3 y la Proposición 1.53, se tiene que $p_n = \tau^{-1}(C(p_n,X)) \longrightarrow \tau^{-1}(C(p,X)) = p$, se sigue que $p \in Y$. Por lo tanto $K(Y,X)$ es cerrado en $K(X)$. ■

Lema 4.12. Sea X una compactación del rayo Z con residuo Y. Si para cada $p \in X$ existe $A \in C(p,X)$ tal que $A \notin Cl_{C(X)}(C(Z))$, entonces $K(Z,X)$ es cerrado en $K(X)$. Además, $K(X)$ no es conexo.

Demostración. Supongamos que $K(Z,X)$ no es cerrado en $K(X)$. Luego, existe una sucesión $\{C(p_n,X)\}_{n=1}^{\infty}$ en $K(Z,X)$ que converge a $C(p,X)$ para algún $p \in X$. Por hipótesis, existe $A \in (C(p,Y) \setminus Cl_{C(X)}(C(Z))) \subset (C(p,X) \setminus \lim C(p_n,X)))$, pues $\lim C(p_n,X) = C(p,X)$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto $K(Z,X)$ debe ser cerrado en $K(X)$. De la Proposición 4.11, tenemos que $K(Y,X)$ es cerrado en $K(X)$. Desde que $Y \cap Z = \emptyset$, se tiene que $K(X)$ es la unión de dos cerrados no vacíos y disjuntos. Así, $K(X)$ es disconexo. ■

4.2. Continuos T-similares

Esta sección se dedica al estudio breve de continuos que son "similares" al triodo simple T, esto es, que cumplan con la definición dada a continuación:

Definición 4.13. Sean X y Y dos continuos. Decimos que:

1. el hiperespacio $K(X)$ **coincide** con $K(Y)$ si existe una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que para cada $p \in X$, se tiene que $C(p, X) \approx C(f(p), Y)$.

2. X es **similar** a Y si sus hiperespacios de hiperespacios anclados $K(X)$ y $K(Y)$ coinciden.

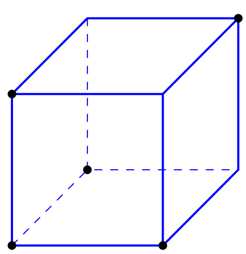
3. Y es X-similar si X y Y son similares.

Dicho lo anterior, procedemos con el estudio de nuestro continuo de interés, el triodo simple T. Como vimos en la Sección 3 del Capítulo 2, los hiperespacios anclados son de tres tipos principales, por lo que si tratamos de buscar un continuo que sea T-similar, debemos hacer algunas consideraciones.

Observación 4.14. Si X es un continuo T-similar, entonces existen $w, x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que:

(1) Para el punto w

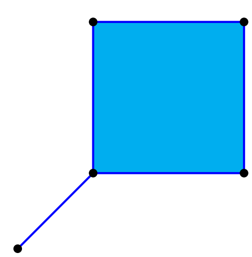
$$C(w, X) \approx$$



(Recordar que hablamos de una 3-celda)

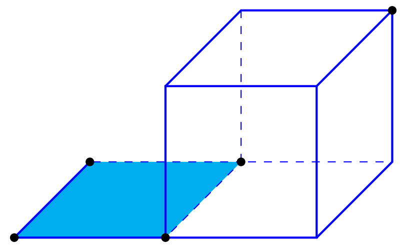
(2) Para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$$C(x_i, X) \approx$$



(3) Para $p \in X \setminus \{w, x_1, x_2, x_3\}$

$$C(p, X) \approx$$



(Recordar que hablamos de una 3-celda unida con una 2-celda)

De esta manera, podemos deducir lo siguiente:

Observación 4.15. Si X es un continuo T-similar, entonces para cada $p \in X$ se tiene que $dim(C(p, X)) \leq 3$ y que $\{x \in X |\ C(x, X)$ tiene puntos de corte$\}$ tiene sólo 3 elementos, a saber, $C(x_1, X)$, $C(x_2, X)$ y $C(x_3, X)$.

A continuación enunciamos dos resultados cuyas pruebas no son incluidas, pues para desarrollarlas tomaría demasiado espacio en este documento, pero no dejamos a un lado la correspondiente referencia.

Proposición 4.16. [13, Teorema 3.16] Sean X un continuo y $N \in \mathbb{N}$ tales que el conjunto $\{x \in X |\ C(x, X)$ tiene puntos de corte$\}$ es a lo más numerable y para cada $p \in X$ se tiene que $dim(C(p, X)) < N$. Entonces todo subcontinuo propio y no degenerado de X es descomponible.

Proposición 4.17. [12, Teorema II, Mazurkiewicz] Todo espacio métrico compacto de dimensión mayor que 1 contiene un continuo indescomponible no degenerado.

Teorema 4.18. Si X es un continuo descomponible T-similar, entonces X es hereditariamente descomponible. En consecuencia $dim(X) \leq 1$.

Demostración. Como X es T-similar, por la Observación 4.15 se cumplen las hipótesis de la Proposición 4.16, para $N = 4$. Luego, para cada $A \in C(X) \setminus \{X\}$, se cumple que A es descomonible. Si $dim(X) \leq 2$, entonces X debe contener un continuo indescomponible, pero eso contradice la primera parte de este teorema. Por lo tanto $0 < dim(X) \leq 1$, pues $X \neq \emptyset$. Si para algún $p \in X$ se tiene que $dim_p(X) \leq 0$, entonces existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $dim(Fr(U_x)) \leq -1$, es decir, $dim(Fr(U_x)) = -1$, se sigue que $Fr(U_x) = \emptyset$. Recordemos que $Fr(U_x) = Cl_X(U_x) \cap Cl_X(X \setminus U_x) = \emptyset$, además, $X = Cl_X(U_x) \cup Cl_X(X \setminus U_x)$, lo que nos dice que X es disconexo. Por lo tanto es falso que $dim_p(X) \leq 0$ para cada $p \in X$, en consecuencia es falso que $dim(X) \leq 0$. Finalmente, por la Definición 1.78 (4), se tiene que $dim(X) = 1$. ∎

Lema 4.19. Si X es un continuo T-similar y existe $A \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $X \setminus A$ no es denso en X, entonces X es descomponible.

Demostración. Notemos que $dim(C(a,X)) \leq 3$ para cada $a \in A$. Sea $p \in A$. Por el Lema 3.16, p no está contenido en el corazón de un 4-*odo*, es decir, $X \setminus A$ tiene a lo más 3 componentes.

1. Si $X \setminus A$ tiene exactamente 3 componentes, digamos B_1, B_2 y B_3, entonces, por la Proposición 1.123, $A_0 = A \cup B_1$ y $B_0 = A \cup B_2 \cup B_3$ son subcontinuos propios de X tales que $X = A_0 \cup B_0$, es decir, X es descomponible.

2. Si $X \setminus A$ tiene exactamente 2 componentes, digamos C_1 C_2, entonces, por la Proposición 1.123, $C_0 = A \cup C_1$ y $D_0 = A \cup C_2$ son subcontinuos propios de X tales que $X = C_0 \cup D_0$, es decir, X es descomponible.

3. Si $X \setminus A$ es conexo, entonces $\overline{X \setminus A}$ es un subcontinuo propio de X, pues por hipótesis, $\overline{X \setminus A} \neq X$. De esta manera, $X = A \cup \overline{X \setminus A}$. Por lo tanto, X es descomponible.

■

Corolario 4.20. Si X es un continuo T-similar y existe un subcontinuo propio A de X tal que $X \setminus A$ no es denso en X, entonces X es hereditariamente descomponible. En consecuencia $dim(X) \leq 1$.

Demostración. Se deduce inmediatamente del Teorema 4.18 y el Lema 4.19. ■

Con esto, damos por terminado el trabajo. Esperamos que estas páginas hayan sido gratas para el lector y que el contenido no fuera confuso. La pregunta que motivo el desarrollo de esta tesis, sigue sin respuesta. Los avances que hemos hecho, no son profundos, pero creemos que son bastante interesantes y que en algunos años, quizá, podremos responder tal cuestión. Además, en el camino encontramos muchas preguntas que puede ser divertido estudiar, pues los hiperespacios anclados seguramente tienen mucho que decirnos aún (no las incluimos en este documento porque se sale de nuestros propósitos). Invitamos al lector a que formule algunas, pues seguro encontrará problemas para matar el aburrimiento.

Sin más que agregar, llego el momento de tomar un descanso...

Bibliografía

[1] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, (2012).

[2] C. Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Soc. 68(2), (1978), 220-224.

[3] C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Soc. 77(2), (1979), 279-288.

[4] J. Hocking y G. Young, *Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1988.

[5] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, (1965).

[6] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princenton University Press, United States, (1974).

[7] A. Illanes, S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, (1999).

[8] A. Illanes, *Modelos de Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, (2004).

[9] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, (2008).

[10] R. Leonel, *Puntos Orilla*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, (2012).

[11] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, (2000).

[12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, New York: Marcel Dekker, Inc., (1992).

[13] P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces $C(p, X)$*, Topology Proc. 24(1), (2003), 259-285.

[14] P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces $K(X)$*, Rocky Mountain, Journal of Mathematics. 35(2), (2005), 655-674.

[15] P. Pellicer-Covarruvias, *Cells in hyperspaces*, Topology and its Applications 154, (2007), 1002-1007.

Índice alfabético