Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

EL CONCEPTO DE *TOPOS* Y SU RELEVANCIA LÓGICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA: **JORGE ALBERTO HERRERA HERNÁNDEZ**

DIRECTOR DE TESIS: **IVÁN MARTÍNEZ RUIZ**

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 2016

A la memoria de Hipólito Martínez, del que tantas cosas aprendí.

Me encontré de pronto solo. Y no se trataba de una soledad definida como ausencia de compañía. Era un abismo brutal. Era la constante sensación de contingencia existencial. Mi existencia en modo alguno era relevante para nadie. Jamás me repuse del todo de ese descubrimiento.

Alexander Grothendieck, Cosechas y Siembras.

Desgraciados los pueblos donde la juventud no haga temblar al mundo, y los estudiantes se mantengan sumisos ante el tirano.

Lucio Cabañas.

Esto es, pues, la matemática: recuerda a las formas invisibles del alma, da vida a sus propios descubrimientos, despierta la mente y purifica el intelecto, saca a la luz nuestras ideas intrínsecas, suprime el olvido y la ignorancia que son nuestros por naturaleza.

Proclo.

Agradecimientos

Este trabajo representa el final de una serie de esfuerzos y dificultades por las que atravesé durante los años que abarcó mi licenciatura. Muchas personas participaron de alguna manera en este proceso. Le debo mucho a los profesores que tuve durante mi formación, a varios de mis compañeros en la carrera, y a ciertos amigos que siempre creyeron en mí, a todos ellos gracias.

Sin embargo, hay personas sin las cuales este logro jamás se hubiera conseguido. Agradezco profundamente a mis padres, Jorge y Mary, por su apoyo incondicional a pesar de que algunas veces no pensemos igual. Quiero agradecer también a Ana Carranza, por traer las matemáticas a mi vida, por ser mi maestra en muchas ocasiones, y por alentarme a continuar cuando quise desistir. Agradezco también a Antonio Chávez, por enseñarme que los problemas primero se entienden y después se resuelven, y por la paciencia en las interminables horas de estudio en la biblioteca. Especialmente gracias a mis amigos Alberto Hernández, Germán Cejudo y Jair Sánchez, por presentarme a Hipólito Martínez, por hacerme recuperar el gusto por las matemáticas, por ser los mejores amigos que pude encontrar y por sus fundamentales contribuciones a este trabajo y a mi vida. Gracias a Germán por resolver mis dudas a la hora de escribir y por ser mi mejor amigo todos estos años, a Alberto por la ayuda en los diagramas de este trabajo y por el incansable apoyo durante los años más difíciles, y a Jair por las lecturas previas para comenzar con esto y por motivarme a continuar. Gracias también a la profesora Elsa Puente, por el tiempo que dedicó a leer conmigo algunos temas. Y gracias a mi asesor Iván Martínez, por su paciencia y apoyo, y por ser mi profesor.

Por último debo agradecer a los profesores Cesar Cejudo, Agustín Contreras y Miguel Pérez Gaspar, por la lectura de este trabajo y por sus valiosas sugerencias; y a los profesores Manuel Ibarra y Ángel Contreras, por su invaluable influencia en mi pensamiento matemático y en mi formación.

Gracias Maria, por regresar la motivación a mi vida y por acompañarme en el final de este camino, seguro habrá más caminos por recorrer.

Introducción

El pensamiento categórico (es decir, el que hace uso de la teoría de categorías) se caracteriza por estudiar objetos matemáticos con independencia de su naturaleza. No intenta descubrir las propiedades fundamentales de tales objetos por medio del estudio de sus elementos o de sus partes, más bien se fija esencialmente en las relaciones (morfismos) que esos objetos tienen con otros de igual o distinta naturaleza, en las construcciones (funtores) que puede hacer entre esos objetos y las relaciones entre tales construcciones (transformaciones naturales). Para la teoría de categorías no existen los conjuntos, o los grupos, o los anillos (por lo menos no como para la matemática sin categorías), lo que hay simplemente son objetos, una especie de conjuntos "abstractos" que no son definidos por sus elementos y para los cuales nada se sabe por medio de las propiedades individuales e intrínsecas de sus partes. Los objetos son agrupados en categorías, y ahí se estudian sus diversas propiedades, esas propiedades siempre son establecidas mediante morfismos que no hacen alusión al tipo de elementos que conforman a estos objetos. Todas las facultades de estos conjuntos "abstractos" u objetos son establecidas como consecuencia de las características que la categoría que los agrupa posee.

Este forma de pensar ha revelado una gran cantidad de similitudes existentes entre objetos matemáticos de muy diversa naturaleza (espacios de todo tipo, estructuras algebraicas, lógica, etc.); en muchos casos se ha comprobado que las diferentes construcciones hechas en distintos campos de la matemática son simplemente casos particulares de nociones categóricas bien definidas. La utilidad de la teoría de categorías para facilitar la comprensión de fenómenos matemáticos diversos y para unificar multitud de conceptos en la matemática ha quedado manifiesta.

Era de esperar que los fundamentos de la matemática y la lógica que los estudia también pasaran por el agudo punto de vista de la teoría de categorías. Es así que surge la idea de estudiar lógica con categorías, pero más importante, surge la idea de estudiar aquello que fundamenta la matemática (la teoría de conjuntos) mediante herramientas de carácter puramente categórico. Con esta preocupación en mente, matemáticos de la talla de Lawvere o McLane, se involucraron en la tarea de investigar cuáles eran las propiedades más elementales de los conjuntos y de las funciones, para poder llevarlas al lenguaje de la teoría de categorías y con ello descubrir estructuras de naturaleza muy diferente a los conjuntos pero que compartieran esas propiedades. Encontraron un viejo concepto que años antes que ellos ya había descubierto Alexander Grothendieck para sus propios intereses (la geometría algebraica). Se trataba del concepto de "topos". En él hallaron la herramienta esencial que permitía formalizar en un lenguaje enteramente categórico las propiedades fundamentales que satisfacen los conjuntos y las funciones (la categoría **Set**) y que son indispensables para la construcción de todo el aparato matemático.

Esto los llevó a la idea de la fundamentación de la matemática por medios únicamente categóricos, teniendo siempre en mente el tratar de sortear las dificultades acarreadas por las diferentes fundamentaciones de carácter conjuntista. Resultó que las categorías con estructura de "topos" eran de naturaleza muy variada y que en la medida en que los objetos de estudio era funtores y transformaciones naturales, más parecido tenían con la categoría de conjuntos y funciones (**Set**). Se llegó a descubrimientos importantes en el terreno de la lógica y se realizaron así las primeras pruebas categóricas de independecia en los años 60's. La realización de pruebas de este tipo, haciendo uso de los llamados "topos", resultó facilitar enormemente las cosas y hacer de dichas pruebas verdaderas obras de arte, no sin antes cobrar un precio que para algunos es exagerado: para que las pruebas de independencia y la fundamentación de la matemática puedan ser desarrolladas de manera unificada y mediante herramientas categóricas es necesario realizar antes una labor muy compleja de abstracción y por ende, las cosas suelen dificultarse bastante.

En este trabajo no pretendemos abordar la teoría de topos desde la perspectiva fundacional de la matemática. Nuestro objetivo más bien es el de tratar de enter lo que es una categoría con estructura de topos. En esta tesis deseamos ofrecer un desarrollo paulatino que nos lleve al concepto de topos y a las principales propiedades de las categorías que tienen esta estructura, pasando por diferentes ejemplos, con el objetivo final de entender los principios más elementales de esta teoría, así como la manera de hacer lógica y de plantearse cuestiones lógicas con ayuda de estas herramientas categóricas.

El primer capítulo contiene los conceptos clave de la teoría de categorías (nociones límite, funtores adjuntos, lema de Yoneda) y debe entenderse únicamente como un repaso de tales ideas. En el segundo capítulo llegamos a la definición de "topos" y nos detenemos a estudiar tres ejemplos importantes (los haces, las gavillas y las acciones de monoides). Al llegar al tercer capítulo comenzamos a estudiar propiamente las características de las categorías con estructura de topos. En el cuarto capítulo desarrollamos la lógica conocida como clásica en el lenguaje de la teoría de topos, y descubrimos que a pesar de que los topos pueden entenderse como teorías de conjuntos generalizadas (en el sentido antes expuesto de que son categorías que cumplen propiedades importantes a **Set** pero que no tienen conjuntos y funciones como objetos), existe una gran variedad que no satisfacen las leyes lógicas conocidas como clásicas. Proporcionamos aquí toda una familia de topos que no siempre cargan con una lógica clásica, y que más bien su lógica interna se comporta según las leyes de la llamada lógica intuicionista.

El trabajo no pretende ser completo ni mucho menos específico. La intención fundamental de esta tesis es proporcionar de manera un poco más "didáctica", digamos, el concepto de topos y sus implicaciones dentro de la lógica. Por lo tanto, el lector no encontrará aquí un desarrollo sistemático y detallado de esta teoría, así como tampoco las muy diversas y complejas aplicaciones que tiene el concepto de topos en gran cantidad de áreas, tales como la topología, la geometría algebraica, la teoría de homología, etc.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos necesarios de la teoría de categorías para leer este trabajo. Suponemos que el lector posee ya una familiaridad con los conceptos más elementales de esta teoría (tales como categoría, funtor, transformación natural, etc.); si no es el caso, recomendamos la lectura de los primeros capítulos en [**CT**] y [**CWM**]. Muchos resultados importantes sólo serán mencionados, y para algunos otros esbozaremos brevemente las pruebas, por considerar que no es el objetivo de este trabajo proporcionar dicho material, pues es el contenido de un curso básico de teoría de categorías, las pruebas completas de todos los resultados que enunciaremos en este capítulo pueden consultarse en los textos antes citados.

La notación usada en este trabajo es la usual. Mediante $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ nos referimos a la clase de objetos de la categoría $\mathcal{C}$ y mediante $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ hacemos referencia a la clase de morfismos de $\mathcal{C}$. La colección de morfismos que van de un objeto a a otro objeto b en la categoría $\mathcal{C}$ la denotamos como $\mathcal{C}(a, b)$. Para cualquier objeto a, el morfismo identidad que le corresponde lo denotamos como id_a. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y d un objeto en $\mathcal{C}$, omitimos los paréntesis cuando evaluamos el funtor F en d, escribiendo únicamente Fd para indicar el objeto en $\mathcal{D}$ que le corresponde a d mediante F. De igual manera escribiremos únicamente Ff para indicar el morfismo en $\mathcal{D}$ que le corresponde a f mediante F.

1.1. Morfismos especiales y Nociones límite

Definición 1.1.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : a \to b$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Entonces:

1.- f es un **monomorfismo** si y sólo si para cualesquiera morfismos $g, h : c \to a$ en $\mathcal{C}$, si $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$. Denotamos los monomorfismos mediante la flecha $f : a \rightarrowtail b$.

2.- f es un **epimorfismo** si y sólo si para cualesquiera morfismos $g, h : b \to c$ en $\mathcal{C}$, si $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$. Denotamos los epimorfismos mediante la flecha $f : a \twoheadrightarrow b$.

3.- f es un **isomorfismo** si y sólo si existe un morfismo $g : b \to a$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = id_a$ y $f \circ g = id_b$. El morfismo g se llama **inverso** de f y lo denotaremos como $g = f^{-1}$.

4.- Dos objetos a y b en $\mathcal{C}$ son **isomorfos** (lo cual denotamos como $a \cong b$) si y sólo si existe un isomorfismo $f : a \to b$.

Observación 1
En cualquier categoría sucede:

1.- Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

2.- Si $g \circ f$ es monomorfismo, entonces f también lo es.

3.- En la categoría **Set** toda función $f : A \to B$ es un monomorfismo sólo si es inyectiva. Además, si f es sobreyectiva, será un epimorfismo.

4.- Todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo. Sin embargo, hay categorías en las que un monomorfismo que también es epimorfismo no es isomorfismo. Consideremos la categoría números naturales (aquí suponemos que 0 es un número natural), denotada como **N**, cuyo único objeto es el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ y cuyos morfismos $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son todos los números naturales. En esta categoría dos morfismos $m, n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se componen mediante la operación usual suma $(+)$ entre naturales, esto es, $m \circ n = m + n$. El morfismo identidad para el único objeto $\mathbb{N}$ es el número cero, $id_{\mathbb{N}} = 0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pues $0 \circ m = 0 + m = m$ y $n \circ 0 = n + 0 = n$, para cualesquiera morfismos m y n. En esta categoría todos los morfismos son a su vez monomorfismos y epimorfismos, sin embargo, el único morfismo que tiene inverso es el número cero $0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pues si un morfismo m tiene inverso, digamos n, debe pasar que $m \circ n = id_{\mathbb{N}}$, esto es, $m + n = 0$. Lo cual sólo sucede si $m = n = 0$. Por tanto, en esta categoría los monomorfismos que también son epimorfismos no siempre son a su vez isomorfismos.

Definición 1.1.2
Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1.- Un objeto $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$ es **terminal** si y sólo si para cualquier objeto a de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $a \to \mathbf{1}$. Este morfismo lo denotaremos mediante $!_a : a \to \mathbf{1}$.

2.- Un objeto $\mathbf{0}$ de $\mathcal{C}$ es llamado **inicial** si y sólo si para cualquier objeto a de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $\mathbf{0} \to a$. Este morfismo lo denotaremos mediante

$0_a : \mathbf{0} \to a$.

Definición 1.1.3
Sea $\mathcal{C}$ una categoría y a, b dos objetos en $\mathcal{C}$.

1.- Un **producto** para a y b es un $\mathcal{C}$-objeto $a \times b$ junto con un par de $\mathcal{C}$-morfismos $pr_a : a \times b \to a$ y $pr_b : a \times b \to b$ de tal manera que para cualquier otro par de morfismos $f : c \to a$ y $g : c \to b$ existe un único morfismo $(f, g) : c \to a \times b$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "(f,g)"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

Es decir, $pr_a \circ (f, g) = f$ y $pr_b \circ (f, g) = g$. El morfismo (f, g) es el producto de f y g respecto a las proyecciones pr_a y pr_b.

2.- Un **coproducto** para a y b es un $\mathcal{C}$-objeto $a + b$ junto con un par de $\mathcal{C}$-morfismos $i_a : a \to a + b$ y $i_b : b \to a + b$ de tal manera que para cualquier otro par de morfismos $f : a \to c$ y $g : b \to c$ existe un único morfismo $[f, g] : a+b \to c$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Es decir, $[f, g] \circ i_a = f$ y $[f, g] \circ i_b = g$. El morfismo $[f, g]$ es el coproducto de f y g con respecto a las inyecciones i_a y i_b.

3.- Un **igualador** para los $\mathcal{C}$-morfismos $f, g : a \to b$ es un objeto E, junto con un morfismo $e : E \to a$ en $\mathcal{C}$ de tal manera que:
(i) $f \circ e = g \circ e$
(ii) para cualquier otro morfismo $h : c \to a$ que cumpla que $f \circ h = g \circ h$, existe exactamente un morfismo $k : c \to E$ de tal forma que $e \circ k = h$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ & c \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

4.- Un **producto fibrado** para los $\mathcal{C}$-morfismos $f : a \to c$ y $g : b \to c$ es un par de $\mathcal{C}$-morfismos $f' : d \to a$ y $g' : d \to b$ tales que:
(i) $f \circ g' = g \circ f'$
(ii) para cualquier otro par de morfismos $h : e \to a$ y $j : e \to b$ que cumplan que $f \circ h = g \circ j$, existe un único morfismo $k : e \to d$ de tal manera que $h = g' \circ k$ y $j = f' \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

5.- Sea I un conjunto y $\{c_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Un **producto** de $\{c_i\}_{i\in I}$ es una pareja $(P, \{p_i\}_{i\in I})$ en donde $P \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y para cada $i \in I$, $p_i : P \to c_i$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Esta pareja cumple que para cualquier otro par $(Q, \{q_i\}_{i\in I})$ existe un único $r : Q \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, dashed, "r"] \arrow[dr, "q_i"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\
& c_i
\end{tikzcd}$$

El producto de la familia $\{c_i\}$ es denotado como $\prod_{i\in I} c_i$.

Las nociones duales de coigualador y producto cofibrado se obtienen a partir de las definiciones correspondientes invirtiendo la dirección de las flechas, tal como se hizo con el concepto de coproducto en la definición anterior. A este proceso se le llama "dualizar". Además, los diagramas conmutativos en la definición anterior se conocen como "propiedades universales" y caracterizan a los objetos definidos, es decir, para cada objeto definido, su correspondiente diagrama conmutativo es conocido como propiedad universal de ese objeto, de esta manera tenemos la propiedad universal del producto, la propiedad universal del coproducto, propiedad universal del producto fibrado, etc.

Observación 2
1.- Sean $f : a \to b$ y $g : c \to d$ dos morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. Si en $\mathcal{C}$ existen los productos entre cualesquiera dos objetos, definimos al morfismo $f \times g : a \times b \to c \times d$ como la pareja de morfismos $(f \circ pr_a, g \circ pr_b)$.

2.- En cualquier categoría todo igualador es un monomorfismo. Y además, cualquier epimorfismo que también es igualador, es un isomorfismo.

3.- Si un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ d \arrow[r] & e \arrow[r] & f \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces:
(i) si los dos cuadrados que conforman el diagrama son productos fibrados, también lo es el rectángulo exterior que los comprende.
(ii) si el rectángulo que comprende ambos cuadrados en el diagrama es un producto fibrado y también lo es el cuadrado de la derecha, entonces el cuadrado de la izquierda es un producto fibrado.
Este resultado es conocido como Lema del Producto Fibrado.

4.- En cualquier categoría, un morfismo $f : a \to b$ es un monomorfismo si y sólo si el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "id_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

5.- Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ c \arrow[r, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, y f es un monomorfismo, entonces g también es monomorfismo.

Definición 1.1.4
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor.

1.- Un **cono** para F es una pareja $(c, \{p_d\}_{d \in Ob(\mathcal{D})})$ en donde c es un objeto de $\mathcal{C}$ y para cada objeto d en $\mathcal{D}$, $p_d : c \to Fd$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, de tal manera que dado $q : d \to d'$ en $\mathbf{Mor}(\mathcal{D})$ se cumple que $p_{d'} = Fq \circ p_d$.

2.- Un **cono límite** o simplemente un **límite** para F es un cono $(L, \{p_d\}_{d\in Ob(\mathcal{D})})$ de F que cumple que para cualquier otro cono $(m, \{q_d\}_{d\in Ob(\mathcal{D})})$ sobre F, existe un único morfismo $k : m \to L$ tal que para cada $d \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[dr, "q_d"'] & L \arrow[d, "p_d"] \\ & Fd \end{tikzcd}$$

Para obtener las nociones duales de "cocono" y "colímite" solamente se dualizan las definiciones anteriores.

Observación 3
1.- Si un funtor F tiene límite, este es único salvo isomorfismos.

2.- Si $(L, \{p_d\}_{d\in Ob(\mathcal{D})})$ es un límite del funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, dos morfismos $f, g; m \to L$ son iguales si y sólo si para cada $d \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$, se cumple que $p_d \circ f = p_d \circ g$.

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, las construcciones de producto de dos objetos, producto fibrado de dos morfismos e igualador, son ejemplos de límites. Análogamente, las construcciones duales de coproducto, producto cofibrado y coigualador, son ejemplos de colímites.

Los objetos definidos anteriormente se caracterizan por cumplir una propiedad "universal", es decir, si existen más objetos que satisfagan una propiedad determinada, entonces cualquiera de ellos debe factorizarse a través del objeto límite. En ese sentido se dice que el objeto límite cumple una propiedad universal, dada en términos únicamente de morfismos, con independencia de la naturaleza de los objetos con los que se trabaje.

Observación 4
Para cualquier categoría $\mathcal{C}$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.- $\mathcal{C}$ tiene productos fibrados y objeto terminal.

2.- $\mathcal{C}$ tiene productos finitos e igualadores.

3.- $\mathcal{C}$ tiene límites finitos.

Estas equivalencias también se satisfacen para las nociones duales de productos cofibrados, objeto inicial, coproductos, coigualadores y colímites.

Definición 1.1.5
Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1.- $\mathcal{C}$ es **completa** si y sólo si cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, tiene un cono límite.

2.- $\mathcal{C}$ es **finitamente completa** si y sólo si $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{D}$ una categoría finita, tiene un cono límite.

Observación 5
Si una categoría $\mathcal{C}$ es tiene igualadores para cualquier par de morfismos y tiene productos para cualquier familia finita de objetos, entonces $\mathcal{C}$ es completa.

Las nociones de categoría "cocompleta" y "finitamente cocompleta" se obtienen únicamente dualizando las definiciones anteriores.

1.2. Funtores Adjuntos

Definición 1.2.1
Un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ se llama **adjunto derecho** a $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ cuando existe una transformación natural $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ con la propiedad:
Para cualesquiera objetos c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$, y para cualquier morfismo $f : c \to Gd$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $g : Fc \to d$ tal que $f = Gg \circ \eta_c$.

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, dashed, "g"] & d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} GFc \arrow[r, "Gg"] & Gd \\ c \arrow[u, "\eta_c"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

La transformación natural η es llamada la **unidad** de la adjunción. Escribiremos $F \dashv G$ para indicar que G es el adjunto derecho de F. Dualizando esta definición se obtienen los conceptos de adjunto izquierdo y counidad de la adjunción.

Teorema 1.2.1
Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.- G es adjunto derecho a F.

2.- Para cualesquiera objetos c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$, existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ que es natural en c y en d.

__**Demostración:**__

Veamos que (1) implica (2). Supongamos que G es adjunto derecho a F. Luego, existe una transformación natural $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ que satisface la siguiente propiedad:
Para cualesquiera objetos c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$, y para todo morfismo $f : c \to Gd$, existe un único morfismo $g : Fc \to d$ tal que $f = Gd \circ \eta_c$.
Ahora, sean c y d cualesquiera dos objetos en $\mathcal{C}$ y en $\mathcal{D}$ respectivamente. Definimos el morfismo $\phi : \mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ mediante la regla $\phi(g) = Gg \circ \eta_c$. Notemos que la propiedad que satisface la transformación natural η garantiza que ϕ tal como está definido es un isomorfismo. Ahora veamos que es natural en c y en d. Para ver que es natural en c, tomemos $h : c' \to c$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Fc, d) \arrow[r, "\phi_{c,d}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(Fh,d)"'] & \mathcal{C}(c, Gd) \arrow[d, "\mathcal{C}(h,Gd)"] \\
\mathcal{D}(Fc', d) \arrow[r, "\phi_{c',d}"'] & \mathcal{C}(c', Gd)
\end{tikzcd}$$

Entonces, para cada $f : Fc \to d$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}(h, Gd)(\phi_{c,d}) \\
&\quad = \quad (Gf \circ \eta_c) \circ h \\
&\quad = \quad Gf \circ GFh \circ \eta_{c'} \\
&\quad = \quad G(f \circ Fh) \circ \eta_{c'} \\
&\quad = \quad \phi_{c',d}(\mathcal{D}(Fh, d)(f))
\end{aligned}$$

Para verificar la naturalidad en d se procede de manera análoga.

Ahora veamos que (2) implica (1). Supongamos que tenemos un isomorfismo ϕ

$$\phi : \frac{Fc \to d}{c \to Gd} \tag{1.1}$$

para cada c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$ que es natural en c y en d.
Queremos definir una transformación natural $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ que satisfaga la definición de adjunto derecho.

Para esto, pongamos Fc en lugar de d y $id_{Fc} : Fc \to Fc$ en la biyección antes mencionada. Entonces tenemos:

$$\phi : \frac{id_{Fc} : Fc \to Fc}{\eta_c : c \to GFc} \tag{1.2}$$

con lo cual definimos $\eta_c = \phi(id_{Fc})$.
Este morfismo es una transformación natural en c. Para ver que satisface la propiedad de la definición de adjunto derecho, sea $g : Fc \to d$, luego

$$\begin{aligned} &Gg \circ \eta_c \\ &\quad = \quad Gg \circ \phi(id_{Fc}) \\ &\quad = \quad \phi(g \circ id_{Fc}) \\ &\quad = \quad \phi(g) \end{aligned}$$

con lo cual, η así definida cumple la definición de adjunto derecho.

■

Como consecuencia de este hecho, obtenemos un resultado similar para el adjunto izquierdo y la counidad de una adjunción.

Corolario 1.2.1
Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.- Para cualesquiera objetos c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$, existe un isomorfismo $\psi : \mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ que es natural en c y en d.

2.- F es adjunto izquierdo a G; es decir, existe una transformación natural $\epsilon : F \circ G \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ con la siguiente propiedad:
Para cualesquiera objetos c en $\mathcal{C}$ y d en $\mathcal{D}$, y para cualquier morfismo $g : Fc \to d$ en $\mathcal{D}$ existe un único morfismo $f : c \to Gd$ tal que $g = \epsilon_d \circ Ff$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, dashed, "f"] & Gd \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "g"'] & FGd \arrow[d, "\epsilon_d"] \\ & c \end{tikzcd}$$

donde $\psi = \phi^{-1}$.

La demostración de este hecho se realiza dualizando la prueba del teorema anterior. La transformación ϵ definida en el corolario es conocida como la **counidad** de la adjunción.

En resumen, una **adjunción** consiste de dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y un isomorfismo $\psi : \mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd) : \psi$. La unidad $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ y la counidad $\epsilon : F \circ G \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ de la adjunción están dadas como

$$\eta_c = \phi(id_{Fc})$$
$$\epsilon_d = \psi(id_{Gd})$$

Definición 1.2.2
Un funtor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ **preserva límites** cuando para cada categoría pequeña $\mathcal{D}$ y cada funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$, si el límite $(L, \{p_d\})$ de G existe, entonces $(FL, \{Fp_d\})$ es el límite de $F \circ G$.

Observación 6
Si un funtor $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tiene adjunto derecho (izquierdo respectivamente) entonces F preserva todos los límites (colímites respectivamente) que existen en $\mathcal{B}$.

Definición 1.2.3
Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son **equivalentes** si existen funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tales que G es adjunto derecho de F y la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos. Al funtor F se le llama **equivalencia de categorías**.

1.3. Adjunciones y categorías cerradas cartesianas

Definición 1.3.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos arbitrarios. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene **exponenciación** si y sólo si para cualesquiera dos objetos a y b en $\mathcal{C}$, existe un objeto b^a y un morfismo $ev : b^a \times a \to b$, llamado **morfismo evaluación**, de tal manera que para cualquier otro objeto c y morfismo $g : c \times a \to b$, existe un único morfismo $\hat{g} : c \to b^a$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[r, "ev"] & b \\
c \times a \arrow[u, dashed, "\hat{g} \times id_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $ev \circ (\hat{g} \times id_a) = g$. El morfismo $\hat{g}$ se conoce como **adjunto exponencial** de g.

Observación 7
El diagrama conmutativo en la definición anterior se conoce como propiedad universal de los objetos exponenciales.

El motivo de esta denominación para el morfismo $\hat{g}$ es que la asociación que hacemos en la definición anterior entre g y $\hat{g}$ introduce una biyección

$$\mathcal{C}(c \times a, b) \cong \mathcal{C}(c, b^a)$$

que se verifica en las categorías para las que existe la exponenciación. Con lo cual, es posible definir el concepto de exponenciable en términos de una adjunción entre funtores.

Definición 1.3.2
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y fijemos un objeto $a \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ arbitrario. Definimos el **funtor producto** como sigue:

$$a \times \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

objetos: $b \mapsto a \times b$
morfismos: $f : b \to c \;\mapsto id_a \times f : a \times b \to a \times c$
tal que $(x, y) \mapsto (x, f(y))$ para cada $(x, y) \in a \times b$

Definición 1.3.3
1.- Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, y sea a un objeto en $\mathcal{C}$. Siempre que el funtor $a \times \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tiene adjunto derecho, este adjunto se denota por $(\ )^a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y decimos que a es un objeto **exponenciable** de $\mathcal{C}$ y para cada objeto b de $\mathcal{C}$, el objeto b^a se llama **exponencial** de a en b.

2.- Una categoría con productos finitos $\mathcal{C}$ es **cerrada cartesiana** si todos sus objetos son exponenciables, es decir, para cada objeto a en $\mathcal{C}$, el funtor $a \times \_$ tiene adjunto derecho.

Observación 8
En una categoría $\mathcal{C}$ cerrada cartesiana con objeto inicial $\mathbf{0}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:
(1) $\mathbf{0} \cong \mathbf{0} \times a$, para cada objeto a en $\mathcal{C}$.
(2) si existe un morfismo $a \to \mathbf{0}$, entonces $a \cong \mathbf{0}$.
(3) si $\mathbf{0} \cong \mathbf{1}$ entonces en la categoría $\mathcal{C}$ todos los objetos son isomorfos, es decir, decimos que $\mathcal{C}$ es **degenerada**.
(4) cualquier morfismo $\mathbf{0} \to a$ es un monomorfismo.
(5) $a^{\mathbf{1}} \cong a$, $a^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^a \cong \mathbf{1}$.

1.4. Lema de Yoneda y funtores representables

Definición 1.4.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría, **Set** la categoría de conjuntos y funciones, y c un objeto en $\mathcal{C}$. Definimos el siguiente funtor covariante:

$$\mathcal{C}(c, \_) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

objetos: $b \mapsto \mathcal{C}(c, b)$
morfismos: $f : a \to b \mapsto \mathcal{C}(c, f)$

donde $\mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$ tal que $g \mapsto f \circ g$, para todo morfismo g en $\mathcal{C}(c, a)$.
Este funtor se conoce como **funtor representable covariante**.

El funtor representable contravariante $\mathcal{C}(\_, c)$ se define de manera similar únicamente invirtiendo composiciones. Un funtor F se llama **representable** cuando es isomorfo a alguno de estos funtores.

Observación 9
Los funtores representables covariantes preservan todos los límites y los funtores representables contravarientes mandan colímites en límites.

El siguiente resultado es una herramienta fundamental dentro de la teoría de categorías, es conocido como **lema de Yoneda**. La relevancia de este resultado recae en que establece que los elementos de un conjunto pueden ser "sustituídos" o 'estudiados" mediante transformaciones naturales entre funtores, no es necesario conocerlos explícitamente, gracias a la biyección establecida por el teorema, podemos trabajar con ellos usando solamente herramientas categóricas.

Notación 1
Si F y G son funtores, denotamos a la colección de transformaciones naturales entre F y G como $\mathcal{NAT}(F, G)$.

Teorema 1.4.1
Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ un funtor. Para cada objeto a en $\mathcal{A}$ consideremos el funtor representable $\mathcal{A}(a, \_) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$; entonces existe una biyección

$$\Theta_{F,a} : \mathcal{NAT}(\mathcal{A}(a, \_), F) \to Fa$$

que es natural en a.

<u>**Demostración:**</u> Consideremos una trasformación natural $\alpha : \mathcal{A}(a, \_) \to F$. Definimos

$$\Theta_{F,a}(\alpha) = \alpha_a(id_a)$$

Sea $\tau : Fa \to \mathcal{NAT}(\mathcal{A}(a, \_), F)$ definida para todo $x \in Fa$ como $\tau_x : \mathcal{A}(a, \_) \to F$ tal que para cada b objeto de $\mathcal{A}$, $\tau_x(b) : \mathcal{A}(a, b) \to Fb$ es una función que asigna a cada morfismo $f : a \to b$, un elemento Fb de la siguiente manera:

$$\tau_x(b)(f) = Ff(x)$$

Notemos que tal como está definida, τ_x es una transformación natural para cada $x \in Fa$.
Ahora veamos que τ es la inversa de $\Theta_{F,a}$. En efecto, tomemos $x \in Fa$, luego

$$(\Theta_{F,a} \circ \tau)(x) = \Theta_{F,a}(\tau_x) = \tau_x(a)(id_a) = F(id_a)(x) = x$$

Por otra parte, si $\alpha : \mathcal{A}(a, \_) \to F$ es una transformación natural, b es un objeto de $\mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{A}(a, b)$, entonces
$\tau \circ \Theta_{F,a}(\alpha)(b)(f) = \tau(\Theta_{F,a}(x))(b)(f) = \tau(\alpha(id_a))(b)(f) = Ff(\alpha_a(id_x)) = \alpha_b(f)$.
Con lo que τ es la inversa de $\Theta_{F,a}$.
Por último, veamos que $\Theta_{F,a}$ es natural en a. Para esto, definimos el funtor $N : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ como $Na = \mathcal{NAT}(\mathcal{A}(a, \_), F)$.
Luego, tenemos que $\Theta_F : N \to F$ es transformación natural, pues para $f : a \to b$ se cumple que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Na \arrow[r, "\Theta_{F,a}"] \arrow[d, "Nf"'] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\ Nb \arrow[r, "\Theta_{F,b}"'] & Fb \end{tikzcd}$$

■

Capítulo 2

Introducción a la teoría de Topos

La palabra *topos* (“lugar”, o “sitio” en griego) fue originalmente usada por Alexander Grothendieck en el contexto de la geometría algebraica. Él definió una noción llamada “gavilla” sobre un espacio topológico. La colección de gavillas sobre un espacio topológico forma una categoría. Grothendieck y sus colegas extendieron esta construcción reemplazando el espacio topológico por una estructura categórica más general. El concepto resultante, llamado categoría de gavillas, recibió el nombre de “topos”.

Independientemente de esto, F. William Lawvere se planteó el problema de establecer las condiciones que una categoría debe satisfacer para ser “esencialmente la misma” que **Set**. Su primera respuesta fue publicada en 1964. Estos ensayos fueron escritos con la intención de axiomatizar categóricamente la teoría de conjuntos. Un defecto en su trabajo era que una de las condiciones que estableció estaba dada en términos teórico-conjuntistas, con lo cual el resultado no fue satisfactorio.

En 1969 Lawvere, junto con Myles Tierney, comenzaron el estudio de ciertas categorías que tenían un tipo especial de morfismo, llamado “clasificador de subobjetos” (brevemente, se trata de una categorización de la correspondencia entre subconjuntos y funciones características en **Set**). Esta noción resultó ser la clave para el problema planteado arriba. Lawvere y Tierney descubrieron que todos los topos de Grothendieck tienen clasificador de subobjetos. De todo esto resultó el concepto de *topos elemental*, formulado enteramente en el lenguaje básico de la teoría de categorías y de manera independiente a la teoría de conjuntos. Posteriormente Mitchell y Cole dieron una respuesta completa y clara a la pregunta anterior, y con ello se estableció que un topos elemental es equivalente a **Set**.

2.1. Subobjetos

Si A es un subconjunto de B, entonces la función inclusión $A \hookrightarrow B$ es inyectiva, es decir, un monomorfismo. Por otra parte, cualquier monomorfismo (función inyectiva) $f : C \rightarrowtail B$ determina un subconjunto de B, a saber, $Imf = \{f(x) : x \in C\}$. Así, f induce una biyección entre C y Imf, es decir, $C \cong Imf$.
Por tanto, el dominio de una función inyectiva es isomorfo a un subconjunto del codominio. Con lo cual, es pertinente afirmar que el dominio es un subconjunto del codominio. Esto conduce a la versión categórica del concepto de subconjunto, conocida como subobjeto.

Definición 2.1.1
Sea d un $\mathcal{C}$-objeto. Un **subobjeto** de d, es un monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ con codominio d.

Si D es un conjunto, la colección de todos los subconjuntos de D se conoce como *conjunto potencia* de D, denotado por $\wp(D)$. Es decir, $\wp(D) = \{A : A \subset D\}$.
La relación de inclusión ($\subseteq$) entre subconjuntos de D es un orden parcial sobre el conjunto potencia $\wp(D)$, esto es, $(\wp(D), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y además es una categoría en donde $Ob(\wp(D)) = \wp(D)$ y dados $A, B \in \wp(D)$, existe un morfismo de A en B si y sólo si $A \subseteq B$, es decir, $A \to B$ sii $A \subseteq B$. Cuando existe uno de estos morfismos, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, hook] & \\
& D \\
A \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior sugiere una manera de definir una relación de “inclusión” entre los subobjetos de un objeto d en una categoría $\mathcal{C}$.

Definición 2.1.2
Sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$, dos subobjetos de un $\mathcal{C}$-objeto d, se dice que f está **contenido** en g (lo que se denota como $f \subseteq g$) si y solo si existe un $\mathcal{C}$-morfismo $h : a \to b$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, tail, "g"] & \\
& d \\
a \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir $f = g \circ h$.

En consecuencia, se dice que $f \subseteq g$ cuando f se factoriza a través de g.
Es importante notar que el $\mathcal{C}$-morfismo h en la definición anterior, en caso de existir, siempre será un monomorfismo.
En efecto, si $r, t : c \to a$ son dos $\mathcal{C}$-morfismos tales que $h \circ r = h \circ t$, entonces $g \circ (h \circ r) = g \circ (h \circ t)$, de donde $(g \circ h) \circ r = (g \circ h) \circ t$, es decir, $f \circ r = f \circ t$; dado que f es monomorfismo, se consigue que $r = t$.
La relación de inclusión de subobjetos tiene las dos siguientes propiedades:
1.-Reflexividad: Dado $f : a \rightarrowtail d$ subobjeto de d, se cumple que $f \subseteq f$, ya que $f = f \circ 1_a$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, tail, "f"] & \\
& d \\
a \arrow[uu, "1_a"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

2.-Transitividad: Si $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$, $k : c \rightarrowtail d$ son subobjetos de d, y además $f \subseteq g$ y $g \subseteq k$, entonces $f \subseteq k$, pues sabemos que existe $h : a \rightarrowtail b$ tal que $f = g \circ h$ y que existe $i : b \rightarrowtail c$ de tal forma que $g = k \circ i$, con lo cual $g \circ h = (k \circ i) \circ h$, es decir, $g \circ h = k \circ (i \circ h)$. Por tanto, $f = k \circ (i \circ h)$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, tail, "k"] & \\
b \arrow[u, "i"] \arrow[r, tail, "g"] & d \\
a \arrow[u, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] \arrow[uu, bend left=60, "i \circ h"] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, si $f \subseteq g$ y $g \subseteq f$, entonces f y g se factorizan cada uno a través del otro.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, tail, "g"] \arrow[dd, bend left, "i"] & \\ & d \\ a \arrow[ur, tail, "f"'] \arrow[uu, bend left, "h"] & \end{tikzcd}$$

Lo que significa que $f = g \circ h$ y $g = f \circ i$.
En este caso, $h : a \to b$ es un isomorfismo. En efecto, puesto que $g \subseteq f$, existe $i : b \to a$ un $\mathcal{C}$-morfismo que satisface la ecuación $g = f \circ i$, luego, $g \circ h = f \circ (i \circ h)$, de donde $f = f \circ (i \circ h)$, con lo cual $i \circ h = 1_a$. Análogamente se verifica que $h \circ i = 1_b$. Así, h es un isomorfismo con inverso i.

Definición 2.1.3
Dos subobjetos $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$ de un $\mathcal{C}$-objeto d se llaman **subobjetos isomorfos** cuando $f \subseteq g$ y $g \subseteq f$. En este caso escribimos $f \cong g$.

Lo que se espera es que la colección de todos los subobjetos de un $\mathcal{C}$-objeto d sea un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación de inclusión definida anteriormente ($\subseteq$), sin embargo, para que la relación $\subseteq$ sea antisimétrica se requiere que cada vez que $f \cong g$, se cumpla que $f = g$. Pero esto no necesariamente es así, es decir, si $f \cong g$, no siempre sucede que $f = g$, ya que puede ocurrir que $a \neq b$. Por tanto, $\subseteq$ es un preorden sobre los subobjetos de d, no un orden parcial.
Por otro lado, la relación $\cong$ es una relación de equivalencia. Cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ con codominio un $\mathcal{C}$-objeto d, determina una clase de equivalencia

$$[f] = \{g : f \cong g\}.$$

En consecuencia es posible definir la colección

$$\mathbf{Sub(d)} = \{[f] : f \text{ es un monomorfismo con codominio d}\}$$

Con esto, los elementos de $\mathbf{Sub(d)}$ son llamados *subobjetos* de d, es decir, cada subobjeto de d es una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio d bajo la relación $\cong$. La noción de inclusión queda entonces definida entre los representantes, i.e., $[f] \subseteq [g]$ si y sólo si $f \subseteq g$.
Notemos que la definición de la relación $\subseteq$ entre subobjetos (clases de equivalencia bajo la relación $\cong$), dada en términos de representantes de clases de equivalencia es independiente de la elección del representante. Es decir, si $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$, entonces $f \subseteq g$ si y sólo si $f' \subseteq g'$.
En efecto, tomemos los subobjetos $f : a \rightarrowtail d$, $f' : a' \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$ y $g' : b' \rightarrowtail d$ del $\mathcal{C}$-objeto d. Supongamos que $[f] = [f']$ y $[g] = [g']$, es decir, supongamos que $f \subseteq f'$ y $f' \subseteq f$ y que además $g \subseteq g'$ y $g' \subseteq g$. Si $f \subseteq g$, entonces existe $h : a \to b$ tal que $f = g \circ h$, pero del hecho de que $f \subseteq f'$, se cumple que existe $i' : a \to a'$ isomorfismo (pues $f' \subseteq f$) tal que $f = f' \circ i'$. En consecuencia,

$f' \circ i' = g \circ h$. Por otra parte, dado que $g \subseteq g'$, existe $t' : b \to b'$ isomorfimso tal que $g = g' \circ t'$. De todo esto, se obtiene que $f' \circ i' = (g' \circ t') \circ h$, de donde $f' = (g' \circ t') \circ h \circ i$, es decir, $f' = g' \circ (t' \circ h \circ i)$, en donde $i : a' \to a$ es el inverso de i'. Por lo tanto, $f' \subseteq g'$. Análogamente se verifica que $f \subseteq g$, si $f' \subseteq g'$.
Notemos que cuando $[f] \subseteq [g]$ y $[g] \subseteq [f]$, se tiene que $f \subseteq g$ y $g \subseteq f$, es decir, $f \cong g$; por tanto, $[f] = [g]$.
Con lo cual, los subobjetos de un $\mathcal{C}$-objeto d así definidos forman un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbf{Sub(d)}, \subseteq)$.
En adelante, diremos,"*el subobjeto* f", lo que en realidad quiere decir que nos referimos a la clase de equivalencia $[f]$, y también escribiremos $f \subseteq g$, que en realidad quiere decir $[f] \subseteq [g]$. Con el signo "$\cong$" indicaremos la igualdad entre subobjetos, es decir, $f \cong g$ quiere decir que f y g son el mismo subobjeto, i.e., $[f] = [g]$. Reservaremos el signo "$=$" para la igualdad entre morfismos.

Observación 10
En la categoría **Set** se cumple que $\mathbf{Sub(D)} \cong \wp(D)$, para cualquier conjunto D.

Ha quedado descrita categóricamente la noción de subconjunto, resta definir categóricamente la idea de elemento de un conjunto.
Un miembro x de un conjunto A, $(x \in A)$, puede ser identificado con el subconjunto $\{x\}$ de A, y por lo tanto, con el morfismo $\{x\} \hookrightarrow A$, que va del objeto terminal $\{x\}$, en A. Recíprocamente, una función $f : \mathbf{1} \to A$ en **Set** determina un elemento de A, a saber, la imagen bajo f del único elemento del objeto terminal $\mathbf{1}$. Esta noción puede categorizarse.

Definición 2.1.4
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$. Un **elemento** de un $\mathcal{C}$-objeto a, es un $\mathcal{C}$-morfismo $x : \mathbf{1} \to a$.

Notar que el $\mathcal{C}$-morfismo $x : \mathbf{1} \to a$ siempre es un monomorfismo, pues $\mathbf{1}$ es un objeto terminal.

2.2. Clasificador de subobjetos

En la teoría de conjuntos el conjunto potencia de un conjunto D, $\wp(D)$, es comúnmente denotado como 2^D. Este mismo signo representa a la colección de todas las funciones que van del conjunto D al conjunto $2 = \{0, 1\}$. La justificación para denotar al conjunto potencia de un conjunto D de ambas maneras es que $\wp(D) \cong 2^D$. Es decir, existe una correspondencia biyectiva entre los subconjuntos de un conjunto D y las funciones que van de D en 2. En esencia, la correspondencia se establece definiendo para cada subconjunto $A \subseteq D$ una función $\chi_A : D \to 2$, llamada **función característica** de A, mediante la regla:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Esta asociación de los elementos de $\wp(D)$ con los elementos de 2^D, en donde a cada subconjunto A de D le corresponde una función χ_A que es un elemento de 2^D, es inyectiva, es decir, si $\chi_A = \chi_B$ entonces $A = B$. También cumple con que es sobreyectiva, esto es, para cada $f \in 2^D$, existe un subconjunto $A_f \subseteq D$ tal que $f = \chi_{A_f}$, a saber, $A_f = \{x \in D : f(x) = 1\}$.
Esta correspondencia entre subconjuntos y funciones características puede ser "capturada" mediante un diagrama de producto fibrado. El conjunto A_f definido anteriormente, es la imagen inversa bajo f del subconjunto $\{1\} \subseteq \{0, 1\}$. Es decir, $A_f = f^{-1}(\{1\})$. Por lo tanto, el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, hook] & 2 \end{tikzcd}$$

El morfismo de la parte de abajo del cuadrado es una función que va del conjunto $1 = \{0\}$ en el conjunto $2 = \{0, 1\}$, llamada **la función verdad** (por razones que analizaremos más adelante), denotada simplemente por $\mathbf{v}$, y definida mediante la regla $\mathbf{v}(0) = 1$. Luego, el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\ & A_f \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"] & D \arrow[d, "f"] \\ & 1 \arrow[r, "\mathbf{v}"] & 2 \end{tikzcd}$$

Para verificar esto, supongamos que el cuadrado de afuera conmuta, es decir, el cuadrado formado por $(B, g, !)$, para alguna función g. Con lo cual, si $b \in B$, $f(g(b)) = \mathbf{v}(!(b)) = 1$, de donde se tiene que $g(b) \in A$. En consecuencia, es posible definir una función $k : B \to A_f$ mediante la regla $k(b) = g(b)$ para todo $b \in B$. De tal manera que k es el único morfismo que hace que el cuadrado de afuera conmute. De todo esto se obtiene entonces que, si $A \subseteq D$, el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "\mathbf{v}"] & 2 \end{tikzcd}$$

Con esto se observa, por lo tanto, que el conjunto 2 junto con la función verdad $\mathbf{v} : 1 \to 2$ desempeñan un papel especial en el paso de subconjuntos a funciones características. Este comportamiento es posible reescribirlo en el lenguaje de la teoría de categorías.

Definición 2.2.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$. Un **clasificador de subobjetos** para $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-objeto Ω, junto con un $\mathcal{C}$-morfismo **verdad** : $1 \to \Omega$ que satisface la siguiente condición:
Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $\chi_f : d \to \Omega$, de tal manera que el siguiente cuadrado es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "verdad"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, $\chi_f \circ f =$ **verdad**$\circ !$.

El morfismo χ_f es llamado **morfismo característico**, o también **carácter**, del monomorfismo f (subobjeto de d). El morfismo **verdad** se denotará por el signo $\top$.

Observación 11
Un clasificador de subobjetos, cuando existe en una categoría, es único salvo isomorfismo.

En efecto, si $\top : 1 \to \Omega$ y $\top' : 1 \to \Omega'$ son clasificadores de subobjetos en una categoría $\mathcal{C}$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\chi'_{\top}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top'"] \arrow[d] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{\top'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

El cuadrado de arriba es un producto fibrado y también lo es el cuadrado de abajo (por definición). Luego, por el lema del producto fibrado, el cuadrado de afuera también es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\top"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\chi_{\top'} \circ \chi'_{\top}"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces, existe un único morfismo $\Omega \to \Omega$ que hace que el cuadrado anterior conmute, a saber, $1_{\Omega} : \Omega \to \Omega$. Por lo tanto, $\chi_{\top'} \circ \chi'_{\top} = 1_{\Omega}$.
Cambiando $\top$ por $\top'$ en el argumento anterior, obtenemos $\chi'_{\top} \circ \chi_{\top'} = 1'_{\Omega}$, y así, $\chi_{\top'} : \Omega' \cong \Omega$.

Observación 12
El morfismo $\top$ es el carácter de $id_{\mathbf{1}}$, es decir $\top = \chi_{id_{\mathbf{1}}}$

Esto se consigue a partir del hecho de que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "id_1"] \arrow[d, "id_1"'] & 1 \arrow[d, "\chi_{id_1}"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

La asociación que hacemos entre χ_f y f (monomorfismo) en la definición anterior, establece una correspondencia inyectiva entre subobjetos de un objeto d y morfismos $d \to \Omega$. Es decir:

Teorema 2.2.1
Si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$, entonces $f \cong g$ si y sólo si $\chi_f = \chi_g$.

Demostración: Supongamos que $\chi_f = \chi_g$. Ahora, sabemos que los siguientes diagramas son productos fibrados:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, $\chi_f \circ f = \top \circ !$ y $\chi_g \circ g = \top \circ !$, y además se cumple por hipótesis que $\chi_f = \chi_g$, entonces $\chi_f \circ g = \top \circ !$. Con lo que existe un único morfismo $k : b \to a$ de manera que $g = f \circ k$, por la propiedad universal del producto fibrado. En consecuencia, $g \subseteq f$.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\ & a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ & 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Análogamente se obtiene que $f \subseteq g$. Por lo tanto, $f \cong g$.
Recíprocamente, supongamos ahora que $f \cong g$. El siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

En efecto, como $f \cong g$, existe un isomorfismo $k^{-1} : a \cong b$ de manera tal, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, tail, "g"] & \\
 & d \\
a \arrow[uu, "k^{-1}"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f = g \cong k^{-1}$.
Con lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, dotted, "k^{-1}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\
& b \arrow[r, "g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.
Por lo tanto, $\chi_f = \chi_g$.

∎

La correspondencia que establecemos entre χ_f y f (más exactamente $[f]$) "encaja" la clase **Sub(d)** en $\mathcal{C}(d, \Omega)$. Más aún, dado cualquier $h : d \to \Omega$, si consideramos el producto fibrado de este morfismo con el morfismo $\top$, el morfismo resultante, digamos f, será un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\top$ es un monomorfimo y el diagrama anterior es un producto fibrado, por lo tanto, f debe ser monomorfismo. De todo esto se obtiene que h debe ser χ_f (por definición de clasificador de subobjetos).
En consecuencia, en una categoría en la que estas construcciones son posibles, obtenemos que:

Teorema 2.2.2
En cualquier categoría $\mathcal{C}$ con clasificador de subobjetos Ω, la correspondencia $[f] \mapsto \chi_f$ es una biyección entre la clase **Sub(d)** de subobjetos de un $\mathcal{C}$-objeto d y el conjunto $\mathcal{C}(d, \Omega)$ de $\mathcal{C}$-morfismos $d \to \Omega$

En el apéndice de este trabajo se ofrece una prueba categórica de este resultado.

Observación 13
Es posible utilizar la biyección establecida en el teorema anterior para transferir el orden parcial $\subseteq$ que existe en $\mathbf{Sub(d)}$ al conjunto $\mathcal{C}(d, \Omega)$.
Es decir, para cualesquiera $u, v \in \mathcal{C}(d, \Omega)$, definimos $u \leqslant v$ si y sólo si $[f] \subseteq [g]$, en donde $\chi_f = u$, $\chi_g = v$.

Por lo tanto, $(\mathbf{Sub(d)}, \subseteq) \cong (\mathcal{C}(d, \Omega), \leqslant)$.

Notación 2
Para cualquier $\mathcal{C}$-objeto a, la composición $\top \circ !_a$, de los morfismos $!_a : a \to \mathbf{1}$ y $\top : \mathbf{1} \to \Omega$, se denotará como $\top_a$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr, "\top_a"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con clasificador de subobjetos Ω. Entonces, el carácter de $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ es id_Ω. Es decir, $\chi_\top = id_\Omega$.

<u>**Demostración:**</u> Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "id_1"'] & \Omega \arrow[d, "id_\Omega"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ahora, $id_\Omega \circ \top = \top = \top \circ id_{\mathbf{1}}$. Con lo cual, $\chi_\top = id_\Omega$ ■

2.3. Definición de Topos

Comencemos con una definición inicial.

Definición 2.3.1
Un **topos elemental** es una categoría $\mathcal{E}$ que satisface las siguientes propiedades:
1.- $\mathcal{E}$ es finitamente completa.
2.- $\mathcal{E}$ es finitamente co-completa.
3.- $\mathcal{E}$ tiene exponenciación.
4.- $\mathcal{E}$ tiene clasificador de subobjetos Ω.

Esta definición es una lista de las propiedades características que poseen las categorías llamadas "*topos*", es una definición muy cercana a la original propuesta por Lawvere y Tierney en 1969. Sin embargo, notemos que (1) y (3) constituyen la definición de una categoría cerrada cartesiana y además, la condición (2) es una consecuencia de (1), (3) y (4). Por lo tanto, un "*topos*" puede definirse de la siguiente manera:

Definición 2.3.2
Un **topos elemental** es una categoría $\mathcal{E}$ que es cerrada cartesiana y tiene clasificador de subobjetos Ω.

A continuación se presenta una breve lista de ejemplos. Los detalles no están desarrollados totalmente, se pone un énfasis especial en la construcción del clasificador de subobjetos para cada ejemplo.

Ejemplos

1.- Set es el primer ejemplo de topos y una de las motivaciones de este concepto.

2.- FinSet categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las funciones entre ellos. Es un topos y tiene exponenciales, límites y $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ exactamente como en **Set**.

3.- Finord categoría que tiene por objetos todos los ordinales finitos y cuyos morfismos son las funciones entres ellos. Cada conjunto finito es isomorfo a algún ordinal finito. Por tanto, todas las construcciones categóricas en **FinSet** se transfieren a **Finord**. El clasificador de subobjetos en **Finord** es la misma función $\top : \{0\} \to \{0, 1\}$ como en **FinSet** y en **Set**.

4.- Set^2 categoría cuyos objetos son pares de conjuntos, y morfismos pares de funciones entre ellos. Todas las construcciones se obtienen a partir de **Set**. Un objeto terminal es un par $(\{0\}, \{0\})$ de conjuntos unitarios. Dados dos morfismos $(f, g) : (A, B) \to (E, F)$ y $(h, k) : (C, D) \to (E, F)$ con codominio común en **Set^2**, podemos formar los siguientes productos fibrados en **Set**.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & E \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & D \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "g"'] & F \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama es un producto fibrado en $\mathbf{Set}^2$:

$$\begin{tikzcd} \langle P, Q\rangle \arrow[r, "\langle j,v\rangle"] \arrow[d, "\langle i,u\rangle"'] & \langle C, D\rangle \arrow[d, "\langle h,k\rangle"] \\ \langle A, B\rangle \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & \langle E, F\rangle \end{tikzcd}$$

Dados dos $\mathbf{Set}^2$-objetos (C, D) y (A, B), definimos el $\mathbf{Set}^2$-objeto exponencial como:

$$(C, D)^{(A,B)} = (C^A, D^B)$$

y que tiene por morfismo evaluación al par (e, f), donde

$(e, f) : (C, D)^{(A,B)} \times (A, B) = (C^A \times A, D^B \times B) \to (C, D)$

y $e : C^A \times A \to C$, $f : D^B \times B \to D$ son los morfismos evaluación correspondientes en $\mathbf{Set}$.
En esta categoría, $\mathbf{Set}^2$, el clasificador de subobjetos es $(\top, \top) : (\{0\}, \{0\}) \to (2, 2)$.

5.- $\mathbf{Set}^{\to}$ Categoría que tiene por objetos todas las funciones entre conjuntos y cuyos morfismos están definidos de la siguiente manera:
Dados dos $\mathbf{Set}^{\to}$-objetos, $f : A \to B$ y $g : C \to D$, un morfismo entre ellos es un par de funciones (h, k) que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}$$

Es decir, $g \circ h = k \circ f$.
Cualesquiera dos morfismos $(j, l), (h, k)$ se componen así: $(j, l) \circ (h, k) = (j \circ h, l \circ k)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "i"] \\
B \arrow[r, "k"'] & D \arrow[r, "l"'] & F
\end{tikzcd}$$

El morfismo identidad para cualquier $\mathbf{Set}^{\rightarrow} - objeto\ f : A \rightarrow B$ es el par (id_A, id_B).
El objeto terminal en $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ es la función identidad $id_{\{0\}} : \{0\} \rightarrow \{0\}$.
Para formar un producto fibrado en $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$, consideremos f, g, h tres $\mathbf{Set}^{\rightarrow} - objetos$ y $(i, j) : f \rightarrow g$ y $(p, q) : h \rightarrow g$ dos $\mathbf{Set}^{\rightarrow} - morfismos$ con igual codominio.
Luego, formamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "+"'] \arrow[dd, "u"'] & & C \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "p"] & \\
& Q \arrow[rr, "s"] \arrow[dd, "v"] & & D \arrow[dd, "q"] \\
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & E \arrow[dr, "g"'] & \\
& B \arrow[rr, "j"'] & & F
\end{tikzcd}$$

En donde $(+, (u, v), (r, s))$ es la terna que forma el producto fibrado de (i, j) con (p, q). El resto del diagrama se forma considerando los siguientes productos fibrados en **Set**:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "s"] \arrow[d, "v"'] & D \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "j"] & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "r"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "i"] & E \end{tikzcd}$$

Ahora, un clasificador de subobjetos en $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ se construye de la siguiente manera:
Si $f : A \to B$ es un subobjeto de $g : C \to D$ en $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$, entonces existe un diagrama conmutativo en $\mathbf{Set}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ 1 \arrow[r, tail, "j"] & D \end{tikzcd}$$

De hecho, la pareja de monomorfismos (i, j) determinan inclusiones entre conjuntos, así que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, y f es la restricción de g en A, es decir, $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$.
Un elemento $x \in C$ puede ser clasificado de tres maneras diferentes. Esto es:
1.- $x \in A$
2.- $x \notin A$ pero $g(x) \in B$
3.- $x \notin A$ y $g(x) \notin B$
Con lo cual, consideramos un conjunto de tres elementos $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y definimos $\psi : C \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si (1) se cumple} \\ \frac{1}{2} \text{ si (2) se cumple} \\ 0 \text{ si (3) se cumple} \end{cases}$$

Entonces, es posible formar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & & C \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\psi"] & \\
& B \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dd] & & D \arrow[dd, "\chi_B"] \\
\{0\} \arrow[rr, "t'"] \arrow[dr, "id_{\{0\}}"'] & & \{0, \frac{1}{2}, 1\} \arrow[dr, "t"] & \\
& \{0\} \arrow[rr, "verdad"] & & \{0, 1\}
\end{tikzcd}
$$

en donde $vaerdad(0) = t'(0) = 1$, y además $t : \{0, \frac{1}{2}, 0\} \to \{0, 1\}$ está dado por $t(0) = 0$ y $t(1) = t(\frac{1}{2}) = 1$. χ_B es la función característica de B.
La base del cubo contiene el clasificador de subobjetos para $\mathbf{Set}^{\to}$. En este caso, el morfismo $\top$ de la definición de clasificador de subobjetos, es el par $(t', verdad) : \mathbf{1} \to \Omega$, en donde $\mathbf{1} = id_{\{0\}}$ y $\Omega = t : \{0, \frac{1}{2}, 1\} \to \{0, 1\}$. Las demás caras del cubo son productos fibrados en **Set** y el par (ψ, χ_B) es el carácter del monomorfimso (i, j) en $\mathbf{Set}^{\to}$.
Definamos ahora los exponenciales en $\mathbf{Set}^{\to}$.
Sean $f : A \to B$, $g : C \to D$ dos $\mathbf{Set}^{\to}-objetos$. Entonces g^f es el $\mathbf{Set}^{\to}-objeto$

$$g^f : E \to F$$

en donde $F = D^B$ (exponencial en **Set**) y E es la colección de todos los $\mathbf{Set}^{\to} - morfismos$ que van de f a g, es decir:

$$
\begin{aligned}
E &= \{(h, k) : g \circ h = k \circ f\} \\
&= \{(h, k) : \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd} \ conmuta\}
\end{aligned}
$$

y además $g^f((h, k)) = k$.
El objeto producto de g^f con f en $\mathbf{Set}^{\to}$ es la función:

$$g^f \times f : E \times A \to F \times B$$

y el morfismo evaluación, que va de $g^f \times f$ a g, es el par (u, v)

$$
\begin{tikzcd}
E \times A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g^f \times f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
F \times B \arrow[r, "v"] & D
\end{tikzcd}
$$

en donde v es el morfismo evaluación usual en **Set** y u queda definido como $u((h,k),x) = h(x)$, para cualesquiera $(h,k) \in E$ y $x \in A$.
Las construcciones hechas en este ejemplo serán generalizadas en los capítulos subsecuentes, de manera que se trata de instancias de una definición más abstracta que genera, de hecho, toda una familia de topos.

Ahora analizaremos con mayor cuidado tres ejemplos del concepto de *topos* que tienen una relevancia especial en el desarrollo de la teoría, y que dentro de la lógica categórica son usados recurrentemente para la construcción de modelos de la teoría de conjuntos con los cuales realizar pruebas de independencia.

2.4. Haces

En esta sección estudiaremos un ejemplo de topos que es un poco más elaborado, pero que tiene una relevancia notoria en el desarrollo de la teoría.
Una de las principales fuentes que motivaron la teoría de topos es la geometría algebraica, en particular el estudio de las *gavillas*. Para poder entender lo que es una gavilla, es necesario tener presentes algunos elementos de topología (teoría de haces). De hecho, la teoría de gavillas constituye un marco conceptual y un lenguaje por sí misma, es importante estudiarla en lo básico para poder entender su relevancia para la teoría de topos.

Comencemos considerando una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ cuyos elementos son disjuntos por pares. Además, tomaremos un conjunto de índices, digamos I, para referirnos a los elementos de $\mathcal{A}$. Es decir, para cada índice $i \in I$, existe un A_i que pertenece a la colección $\mathcal{A}$. Cada miembro de $\mathcal{A}$ está etiquetado de esta forma, así que podemos escribir a $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$$

Expresamos el hecho de que los elementos de $\mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, afirmando que para cualesquiera $i, j \in I$ distintos, se cumple que $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Ahora, consideramos la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, esto es $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, con lo cual existe una función $p : A \to I$ dada por $p(x) = i$, para cada $x \in A$; p está bien definida, ya que por la condición de que los elementos de $\mathcal{A}$ son disjuntos por pares, se tiene que para cada $x \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$, existe exactamente un $A_i \in \mathcal{A}$ de tal manera que $x \in A_i$. Luego, todos los elementos de A_i son enviados a $i \in I$, todos los elementos de A_j son enviados a $j \in I$, etc. Podemos entonces recuperar a A_i a partir de considerar la imagen inversa bajo p del conjunto $\{i\}$. Esto es:

$$p^{-1}(\{i\}) = \{x : p(x) = i\} = A_i$$

El conjunto A_i es llamado **fibra** o **tallo** sobre i bajo p. Los elementos de A_i se conocen como **gérmenes** de i.

La estructura $(A = \bigcup \mathcal{A}, p)$ es llamada un **haz** de conjuntos sobre el espacio I. El conjunto $A = \bigcup \mathcal{A}$ se conoce como **espacio tallo** del haz. La razón para esta terminología botánica es evidente, lo que tenemos es un haz o ramillete de tallos, cada uno con sus propios gérmenes.

Hemos visto entonces que un haz tiene asociada una función p que va del espacio tallo a la base I. Recíprocamente, si $p : A \to I$ es una función arbitraria que va de algún conjunto A en I, entonces podemos definir A_i como el conjunto $p^{-1}(\{i\})$, para cada $i \in I$. Con lo cual, es posible formar el conjunto:

$$\mathcal{A} = \{p^{-1}(\{i\}) : i \in I\} = \{A_i : i \in I\}$$

Así que un haz de conjuntos sobre I es "esencialmente" sólo una función con codominio I. Por supuesto, esto no es conceptualmente exacto. Para convertir una función en un haz, es necesario una nueva perspectiva.
Todos los haces sobre I conforman una categoría, denotada como **Bn(I)**; esta categoría también se conoce como la categoría **coma**, que se denota por $\mathbf{Set} \downarrow I$, de funciones con codominio I.
Entonces, los **Bn(I)**-objetos son pares (A, f), en donde $f : A \to I$ es una función de conjuntos, y un **Bn(I)**-morfismo es una función $k : (A, f) \to (B, g)$, en donde $k : A \to B$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

es decir, $g \circ k = f$. Esto significa que si $f(x) = i$, para cada $x \in A$, entonces $g(k(x)) = i$, i.e., si $x \in A_i$, entonces $k(x) \in B_i$ (recordar que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $B = \bigcup_{i \in I} B_i$). Lo que quiere decir que k manda a los gérmenes de i en el haz (A, f) en los gérmenes de i en el haz (B, g).

Un topos es pensado como una generalización de la categoría **Set**. Un objeto en un topos es un "conjunto generalizado". Ahora realizaremos las construcciones categóricas correspondientes para verificar que la categoría **Bn(I)**, de haces sobre un conjunto I, es un topos, y que un "conjunto" en este topos es un haz de conjuntos ordinarios.

Objeto Terminal El objeto terminal **1** para la categoría **Bn(I)** es la función $id_I : I \to I$, y para cada haz (A, f) el único morfismo $(A, f) \to (I, id_I)$ es la misma función $f : A \to I$. Ahora, la fibra de id_I sobre i es el conjunto $id_I^{-1}(\{i\}) = \{i\}$ que es un objeto terminal en **Set**. Luego, el terminal en **Bn(I)** es un haz de **Set**-objetos terminales sobre I, y el único morfismo

$f : (A, f) \to (I, id_I)$ puede ser considerado como un haz de **Set**-morfismos $\{f_i : i \in I\}$, donde $f_i =! : f^{-1}(\{i\}) \to \{i\}$.

Producto fibrado Dados dos **Bn(I)**-morfismos $k : (A, f) \to (C, h)$ y $l : (B, g) \to (C, h)$ (es decir, $h \circ k = f$ y $h \circ l = g$) con codominio común, se obtiene a partir de ellos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "l"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
A \arrow[r, "k"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & C \arrow[dr, "h"'] & \\
& & I
\end{tikzcd}$$

Con esto, formamos en **Set** el siguiente producto fibrado de k con l:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "l"] \\
A \arrow[r, "k"] & C
\end{tikzcd}$$

Luego, el siguiente diagrama es el producto fibrado de k con l en **Bn(I)**:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "p"'] & & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "l"] & \\
& I & & I \\
A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"] & & C \arrow[dr, "h"] & \\
& I & & I
\end{tikzcd}$$

donde $j = f \circ p = h \circ k \circ p = h \circ l \circ q = g \circ q$. Es decir:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "q"] \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "j"] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "l"] \\
& I & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "k"] & & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

Con lo cual, si A_i, B_i, C_i son las fibras sobre i para los haces f, g, h respectivamente, entonces el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
& B_i \arrow[d, "l^*"] \\
A_i \arrow[r, "k^*"] & C_i
\end{tikzcd}$$

tiene dominio $P = \{(x, y) : x \in A_i,\ y \in B_i,\ k(x) = l(y)\}$, que es el mismo conjunto que $\{(x, y) : x \in A,\ y \in B,\ j((x, y)) = i\} = j^{-1}(\{i\})$ el cual es la fibra sobre i bajo $j : P \to I$.
Por lo tanto, el objeto producto fibrado (P, j) es un haz de productos fibrados en **Set**.

Clasificador de subobjetos El clasificador de subobjetos para **Bn(I)** es un haz de conjuntos de dos elementos, i.e., un haz de **Set** $-$ $clasificadores$.
Definimos el **Bn(I)** $-$ *objeto* $\Omega = (2 \times I, p_I)$, donde $p_I : 2 \times I \to I$ es la proyección $p_I((x, y)) = y$ sobre el segundo factor. El producto $2 \times I$ es, de hecho, la unión disjunta de los conjuntos:

$$\{0\} \times I = \{(0, i) : i \in I\}$$

y

$$\{1\} \times I = \{(1, i) : i \in I\}$$

ambos isomorfos a I.

La fibra sobre un particular elemento $i \in I$, es el conjunto de dos elementos

$$\Omega_i = \{(0, i), (1, i)\} = 2 \times \{i\}$$

El morfismo clasificador $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ puede ser pensado como un haz de copias de la función **verdad** ($\mathbf{v}$) en **Set**. Es decir, definimos $\top : I \to 2 \times I$ como $\top(i) = (1, i)$ para cada $i \in I$. O sea, $\top$ es el producto de las funciones $(\mathbf{v}\circ!, id_I)$, donde $\mathbf{v}\circ! : I \to \{0\} \to \{0, 1\}$.

Para ver cómo es que $(\Omega = 2 \times I, \top)$ clasifica subobjetos, tomemos un monomorfismo $k : (A, f) \rightarrowtail (B, g)$ en la categoría **Bn(I)**, de hecho k es una inclusión de conjuntos, es decir, $A \subseteq B$ y $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$. Buscamos definir el carácter de k, $\chi_k : (B, g) \to \Omega = (2 \times I, p_I)$ de tal manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "k"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "\chi_k"] \\
& I & \\
I \arrow[ur, "id_I"] \arrow[rr, "\top"'] & & 2 \times I \arrow[ul, "p_I"']
\end{tikzcd}$$

y además sea un producto fibrado en **Bn(I)**.
Ahora, cualquier $x \in B$ es clasificado según se cumpla que $x \in A$ o $x \notin A$.
Decimos entonces que χ_k asigna 1 o 0 de acuerdo a esta situación. En otras palabras, $\chi_k : B \to 2 \times I$ es la función producto del par $(\chi_A, g) : B \to 2 \times I$, donde $\chi_A : B \to 2$ es la función característica usual del conjunto A. Es decir:

$$\chi_k(x) = \begin{cases} (1, g(x)) \text{ si } x \in A \\ \\ (0, g(x)) \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Veamos ahora que esta construcción satisface la propiedad del clasificador de subobjetos.

Teorema 2.4.1
La categoría **Bn(I)** tiene clasificador de subobjetos.

Demostración: Definamos (como anteriormente) el $\mathbf{Bn(I)} - objeto \quad \Omega$ como el par $(2 \times I, p_I)$, donde $p_I : 2 \times I \to I$ es la proyección sobre el segundo factor, esto es, $p_I((x, y)) = y$ para cada $(x, y) \in 2 \times I$.
Luego, definimos el $\mathbf{Bn(I)} - morfismo \quad \top : \mathbf{1} \to \Omega$ (recordar que en **Bn(I)**, $\mathbf{1} = (1, id_I)$) como $\top(i) = (1, i)$, para cada $i \in I$.
En consecuencia, sea $k : (A, f) \rightarrowtail (B, g)$ un monomorfismo. Entonces existe un $\mathbf{Bn(I)} - morfismo \quad \chi_k : B \to 2 \times I$ que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
(A, f) \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "!"'] & (B, g) \arrow[d, "\chi_k"] \\
(I, id_I) \arrow[r, "\top"] & (2 \times I, p_I) = \Omega
\end{tikzcd}$$

A saber,

$$\chi_k(x) = \begin{cases} (1, g(x)) \text{ si } x \in A \\ \\ (0, g(x)) \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Veamos que el diagrama anterior es, en efecto, un producto fibrado.
Sea $x \in A$, luego $(\chi_k \circ k)(x) = \chi_k(k(x)) = (1, g(x)) = \top(f(x)) = (\top \circ f)(x) = (\top \circ !)(x)$. Por tanto, $\chi_k \circ k = \top \circ !$.
Ahora, sea $((A', f'), k', !)$ otra terna que hace conmutar el diagrama anterior, es decir:

$$\begin{tikzcd} (A', f') \arrow[r, tail, "k'"] \arrow[d, "!"'] & (B', g') \arrow[d, "\chi_k"] \\ (I, id_I) \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Lo que implica que χ_k es el carácter de k', es decir, $\chi_k = \chi'_k$, con lo cual $k' \cong k$, por lo tanto $k' \subseteq k$, y con esto, existe $q : (A', f') \to (A, f)$ tal que $k' = k \circ q$ y también $f' = f \circ q$ (pues recordemos que los morfismos en **Bn(I)** satisfacen esta ecuación).
Por lo tanto, el diagrama (*) es un producto fibrado. ∎

Secciones La función $\top : I \to 2 \times I$ tiene una propiedad interesante, para cada $i \in I$, $\top(i) = (1, i)$ es un germen de i. Generalizando esta propiedad, decimos que una función $s : I \to A$ es una **sección** del haz $f : A \to I$ si $s(i) \in A = f^{-1}(\{i\})$, para cada $i \in I$. Esto significa que $f(s(i)) = i$ para todo $i \in I$. Con lo cual, el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "id_I"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., $f \circ s = id_I$. Otra manera de decir esto es que una sección es un $\mathbf{Bn(I)} - morfismo$ que va del objeto terminal (I, id_I) al objeto (A, f). Con lo cual, una sección del haz (A, f) es un **elemento** del $\mathbf{Bn(I)} - objeto$ (A, f) (en el sentido de la definición dada para elemento de un $\mathcal{C}$-objeto).

Definición 2.4.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$, los elementos del $\mathcal{E}$-objeto Ω (i.e., $\mathcal{E}$-morfismos $\mathbf{1} \to \Omega$) son llamados **valores de verdad** de $\mathcal{E}$.

Los valores de verdad en un topos $\mathcal{E}$ tienen un papel especial en la estructura lógica de $\mathcal{E}$ (como veremos más adelante).

Sabemos que existe una correspondencia biyectiva **Sub(d)** $\cong \mathcal{E}(\mathbf{1}, \Omega)$ entre los elementos de Ω y los subobjetos de $\mathbf{1}$. Recordemos que un subobjeto en **Bn(I)**, digamos $k : (A, f) \rightarrowtail \mathbf{1}$, hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & I \arrow[dl, "id_I"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

así que $k = f$. Con lo cual, un subobjeto de $\mathbf{1} = (I, id_I)$ puede ser identificado con una función inyectiva $f : A \to I$, es decir, con un subobjeto de I en **Set**. Eso quiere decir que podemos identificar los valores de verdad (elementos de Ω) de **Bn(I)** con subconjuntos del conjunto I. Es decir:

Teorema 2.4.2
Existe una biyección $\wp(I) \cong \mathbf{Bn(I)}(\mathbf{1}, \Omega)$.

<u>**Demostración:**</u> Dado $A \subseteq I$, sea $S_A : I \to 2 \times I$ la función producto de (χ_A, id_I), es decir:

$$S_A(i) = \begin{cases} (1, i) \text{ si } i \in A \\ \\ (0, i) \text{ si } i \notin A \end{cases}$$

Con lo cual, S_A es una sección de Ω.
La asociación hecha, a saber, a cada $A \subseteq I$ corresponde una función $S_A : \mathbf{1} \to \Omega$, es inyectiva. En efecto, si $S_A = S_B$ para cualesquiera $A, B \subseteq I$, entonces tomamos un $i \in B$, con lo cual $S_B(i) = (1, i)$, lo que implica que $i \in A$. Así, $A = B$.
Además, si $S : \mathbf{1} \to \Omega$ y definimos el conjunto $A = \{i : S(i) = (1, i)\}$, entonces obtenemos que $S = S_A$, con lo cual la asociación anterior también es sobreyectiva.
Por lo tanto la biyección queda establecida. ■

Productos Sean (A, f) y (B, g) haces sobre I, formemos ahora el siguiente diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A \times_I B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & I \end{tikzcd}$$

Luego, $(A \times_I B, h)$ es el producto de (A, f) con (B, g) en **Bn(I)**, donde $h = f \circ p = g \circ q$, y p y q son los morfismos proyección usuales.
La fibra sobre i es el producto de las fibras sobre i en (A, f) y (B, g). Esto es

$$\{(x, y) : f(x) = g(x) = i\} = A_i \times B_i$$

Exponenciales Dados dos haces $f : A \to I$ y $g : B \to I$, formamos su exponencial como un haz de exponenciales $B_i^{A_i}$ de las fibras de A y B. Más precisamente, sea D_i la colección de las funciones $k : A_i \to B$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f^*"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta, así que k manda a A_i en la fibra B_i de g sobre i (donde f^* denota una función que tiene la misma regla que f pero puede variar en el dominio).

Los conjuntos D_i pueden no ser disjuntos por pares, así que definimos $E_i = \{i\} \times D_i$ para cada $i \in I$, por tanto, $\{E_i : i \in I\}$ es un haz, su función asociada $p : E \to I$ (donde recordemos que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$) está dada por $p((i,k)) = i$.
Por lo tanto,

$$(B,g)^{(A,f)} = (E,p)$$

es el objeto exponencial de (A,f) con (B,g). El morfismo evaluación

$$ev : (E,p) \times (A,f) \to (B,g)$$

es la función $ev : E \times_I A \to B$ donde $ev(((i,k),x)) = k(x)$.
Veamos que, en efecto, el par $((E,p), ev)$ definido como anteriormente, satisface la propiedad universal de los objetos exponenciales.
Sea (C,h) un $\mathbf{Bn(I)} - objeto$ y sea $t : (C,h) \times (A,f) \to (B,g)$ un $\mathbf{Bn(I)} - morfismo$.
Para cada $c \in C$ definimos la función $t_c : A \to B$ como $t_c(a) = t(c,a)$, para todo $a \in A$.
Luego, sea $\hat{t} : C \to E$ dada por $\hat{t}(c) = (h(c), t_c)$, con lo cual, para todo $c \in C$ se cumple $(p \circ \hat{t})(c) = p((h(c), t_c)) = p(h(c), t_c) = h(c)$. Por tanto, $h = p \circ \hat{t}$.
Así, $\hat{t}$ es, en efecto, un $\mathbf{Bn(I)} - morfismo$. Ahora veamos que $ev \circ (\hat{t} \times id_A) = t$.
En efecto, sea $(c,a) \in C \times_I A$, luego

$$\begin{array}{l} ev((\hat{t} \times id_A)(c,a)) \\ \quad = \quad ev((\hat{t}(c), a)) \\ \quad = \quad ev((h(c), t_c), a) \\ \quad = \quad t_c(a) = t((c,a)) \end{array}$$

En consecuencia, el par $((E,p), ev)$ definido como antes, cumple la propiedad universal del exponencial en $\mathbf{Bn(I)}$.

Para finalizar esta sección, en la que hemos realizado las construcciones necesarias para establecer el siguiente resultado, tenemos:

Teorema 2.4.3
1.- La categoría **Bn(I)** es un topos.
2.- Si $\mathcal{E}$ es un topos y a un $\mathcal{E}$-objeto, entonces la categoría $\mathcal{E} \downarrow a$ de morfismos en $\mathcal{E}$ sobre a, es también un topos.

Este hecho ha sido llamado por Freyd *teorema fundamental de los topos* (ver [**AT**]).
Para verificar (2) la mayoría de las construcciones pueden hacerse como antes, para construir el clasificador de subobjetos en $\mathcal{E} \downarrow a$, basta considerar al clasificador de subobjetos en $\mathcal{E}$, $\top : \mathbf{1} \to \Omega$, para poder definir a $\top_a : a \to \Omega \times a$ como el clasificador en $\mathcal{E} \downarrow a$ (cambiando I por a y 2 por Ω en la construcción hecha anteriormente), es decir,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "\langle \top, 1_a \rangle"] \arrow[dr, "1_a"'] & & \Omega \times a \arrow[dl, "pr_a"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

En el siguiente capítulo realizaremos un análisis un poco más detallado de este resultado, también discutiremos algunas de sus consecuencias, sobretodo aquellas que nos proporcionarán herramientas para resultados posteriores.

2.5. Gavillas

Una gavilla es un haz con alguna estructura topológica adicional.

Definición 2.5.1
Sea I un espacio topológico y Θ su colección de conjuntos abiertos. Una **gavilla** sobre I es un par (A, p) en donde A es un espacio topológico y $p : A \to I$ es una función continua que es un homeomorfismo local. Es decir, para cada $x \in A$, existe U vecindad de x en A, que es homeomorfa a $p(U) = \{p(y) : y \in U\}$ y además $p(U) \in \Theta$ (es un conjunto abierto en I).

Las gavillas sobre un espacio topológico I forman una categoría, denotada por **Top(I)** o **Sh(I)**, cuyos objetos son gavillas (i.e.,pares (A, p) definidos como antes) y cuyos morfismos entre cualesquiera dos gavillas $(A, p) \to (B, q)$ son funciones continuas $k : A \to B$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Los morfismos en esta categoría son funciones continuas $k : A \to B$ que son homeomorfismos locales, con lo que $Im\ k = k(A)$ es un subconjunto abierto de B.
Top(I) es un topos, conocido como *topos espacial*.
El objeto terminal es $id_I : I \to I$. El clasificador de subobjetos es la gavilla de gérmenes de subconjuntos abiertos en I. Su construcción ilustra un método para construir un haz sobre I.
Empezamos considerando algún conjunto X, después, cada punto $i \in I$ determinará una relación de equivalencia $\sim_i$ sobre X. La fibra sobre i será entonces definida como el conjunto cociente $X/\sim_i$ de clases de equivalencia de elementos de X bajo la relación $\sim_i$.
Para el caso actual, empezamos considerando la colección Θ de subconjuntos abiertos en I. Para cualquier $i \in I$, definimos la relación $\sim_i$ entre cualesquiera dos conjuntos abiertos $U, V \in \Theta$ como sigue

$$U \sim_i V \text{ sii existe algún conjunto } W \in \Theta, \text{ tal que } i \in W \text{ y } U \cap W = V \cap W$$

La relación $\sim_i$ es una relación de equivalencia sobre la colección de conjuntos abiertos en I (Θ).
En efecto, sea $i \in I$ y sean $U, V, X \in \Theta$
(1) Reflexividad Sabemos que $I \in \Theta$, y además $U \cap I = U \cap I$, con lo cual $U \sim_i U$.
(2) Simetría Supongamos que $U \sim_i V$, con lo cual existe $W \in \Theta$ de tal manera que $i \in W$ y $U \cap W = V \cap W$, que es lo mismo que $V \cap W = U \cap W$, en consecuencia $V \sim_i U$.
(3) Transitividad Supongamos que $U \sim_i V$ y que $V \sim_i X$, luego, existen $W, Z \in \Theta$ tales que $i \in W$, $i \in Z$ y además $U \cap W = V \cap W$ y $V \cap Z = X \cap Z$. Ahora, sea $Y = W \cap Z$, con lo que $i \in Y$ y también $U \cap Y = X \cap Y$. Por tanto, $U \sim_i X$.

La idea intuitiva es que $U \sim_i V$ cuando los puntos en U cercanos a i son los mismos que aquellos puntos de V que están cerca de i, esto quiere decir que, "localmente" U y V son el mismo conjunto al rededor de i, en otras palabras, la afirmación "$U = V$" es cierta cuando estamos cerca de i.

La clase de equivalencia

$$[U]_i = \{V : U \sim_i V\}$$

es llamada el **germen** de U en i. Intuitivamente representa la colección de puntos en U que están cerca de i.
Con esto definimos la fibra sobre i como

$$\Omega_i = \{(i, [U]_i) : U \text{ } es \text{ } abierto \text{ } en \text{ } I\}$$

Entonces podemos definir a Ω como el par $(\bigcup_{i\in I} \Omega_i, p)$ en donde $p : \bigcup_{i\in I} \Omega_i \to I$ está dada por $p(x) = i$, para todo x en algún Ω_i. La topología sobre $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ tiene como base la colección de todos los conjuntos de la forma

$$[U,V] = \{(i,[U]_i) : i \in V\}$$

en donde V un abierto tal que $U \subseteq V$. Todo esto hace que p sea un homeomorfismo local y que cada fibra sea un espacio discreto bajo la topología relativa o inducida.

Si denotamos por Θ_i a la colección de vecindades abiertas de i, entonces obtenemos las siguientes propiedades:

(1) $[U]_i = [I]_i$ si y sólo si $i \in U$.
(2) $[I]_i = \Theta_i$
(3) $[U]_i = [\emptyset]_i$ si y sólo si existe $V \in \Theta_i$ tal que $U \cap V = \emptyset$.

En efecto.
(1) Supongamos que $[U]_i = [I]_i$, luego $U \sim_i I$, lo que implica que existe $W \in \Theta$ de tal manera que $i \in W$ y $U \cap I = W \cap I = U = W$, por tanto $i \in U$.
Ahora supongamos que $i \in U$, con lo cual existe un abierto que contiene a i, a saber U, tal que $U \cap U = I \cap U = U$, en consecuencia $[U]_i = [I]_i$.
(2) Sea $V \in [I]_i = \{W : I \sim_i W\}$, luego V es conjunto abierto y además $i \in V$, pues como $I \sim_i V$ existe $W \in \Theta$ tal que $i \in W$ y $V \cap W = I \cap W = W$, por lo tanto, $V \in \Theta_i$.
Recíprocamente, si $V \in \Theta_i$, entonces $I \sim_i V$, y así $V \in [I]_i$.
Con lo que $[I]_i = \Theta_i$.
(3) Supongamos que $[U]_i = [\emptyset]_i$, entonces $U \sim_i \emptyset$, lo que implica que existe $V \in \Theta_i$ tal que $U \cap V = \emptyset \cap V = \emptyset$.
Recíprocamente, si existe $V \in \Theta_i$ de tal manera que $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap V = \emptyset \cap V$, con lo que $U \sim_i \emptyset$ y así $[U]_i = [\emptyset]_i$.

Antes de estudiar a $\Omega = (\cup_{i\in I}\Omega_i, p)$ como clasificador de subobjetos, analicemos los valores de verdad $s : \mathbf{1} \to \Omega$. A estos morfismos se les llama **secciones continuas** de Ω:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "id_I"'] & & \bigcup_{i\in I}\Omega_i \arrow[dl, "p"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Si U es un abierto en I, definimos $S_U : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i$ como $S_U(i) = (i,[U]_i)$. Es decir, S_U es un morfismo del tipo $S_U : \mathbf{1} \to \Omega$. Por la afirmación **(1)**, tenemos que $S_U(i) = (i,[I]_i)$ si y sólo si $i \in U$. Entonces, si $s : \mathbf{1} \to \Omega$ es cualquier sección continua de Ω (valor de verdad) y $U = \{i : s(i) = (i,[I]_i)\}$, se tiene por tanto que U es abierto ($U = s^{-1}((I,I))$) y que $S_U = s$.
Con lo cual, tenemos que los valores de verdad en **Top(I)** son "esencialmente" subconjuntos abiertos de I, mientras que en **Bn(I)** son todos los subconjuntos de I.
El morfismo $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ es la sección continua $\top : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i$ que está dada

por $\top(i) = (i, [I]_i)$ para cada $i \in I$. Ahora, si k es un monomorfismo , entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook, "k"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta, y A es un subconjunto de B, con lo que podemos definir el carácter de k, $\chi_k : (B, q) \to \Omega$, como sigue.
Sea $x \in B$, ahora elegimos una vecindad S de x en la que q sea un homeomorfismo local. Entonces $\chi_k : B \to \cup_{i \in I} \Omega_i$ asocia a x con el germen de $q(A \cap S)$ en $q(x)$, es decir:

$$\chi_k(x) = (q(x), [q(A \cap S)]_{q(x)})$$

Intuitivamente, el germen de $q(A \cap S)$ en $q(x)$ representa en I, bajo el homeomorfismo local q, al conjunto de puntos de A cercanos a x. Esto proporciona una medida de lo "lejos" que está x de A.
Mientras que la clasificación de elementos en teoría de conjuntos admite sólo dos posibilidades ($x \in A$, o $x \notin A$), en un contexto topológico es posible considerar más clasificaciones, de acuerdo a qué tan "cerca" está x de A. Usamos los gérmenes en $q(x)$ como un sistema de entidades que miden la proximidad de cualquier $x \in B$ a los subconjuntos abiertos de B.
Un orden parcial sobre $\Omega_{q(x)}$ está dado por

$$[U]_{q(x)} \sqsubseteq [V]_{q(x)} \text{ sii si existe algún conjunto abierto } W \text{ tal que } q(x) \in W \text{ y } (U \cap W) \subseteq (V \cap W)$$

es decir, la afirmación "$U \subseteq V$" es localmente cierta cerca de $q(x)$.

El topos **Top(I)** de gavillas sobre un espacio topológico I es uno de los ejemplos más importantes de la estructura de *topos*, es comúnmente usado en la construcción de modelos dentro de la lógica categórica para la teoría de conjuntos con los que se realizan pruebas de independencia. Las construcciones hechas aquí son de carácter "básico", tienen la finalidad de acercar al lector no experto a los pasos iniciales de la teoría de topos, todas estas construcciones se pueden generalizar aún más adoptando completamente el punto de vista funtorial o categórico, sin embargo la motivación principal de este trabajo es iniciar al lector en esta bella teoría.

2.6. Acciones de Monoides

Sea $\mathbf{M} = (M, *, e)$ un monoide. Para cada $m \in M$ definimos una función $\lambda_m : M \to M$, llamada **multiplicación a la izquierda** por m, dada por

la regla $\lambda_m(n) = m * n$, para todo $n \in M$. Obtenemos así una familia de funciones $\{\lambda_m : m \in M\}$ cuyos índices son elementos de M y que además satisface:
(1) $\lambda_e = id_M$, pues $\lambda_e(n) = e * n = n$.
(2) $\lambda_m \circ \lambda_p = \lambda_{m*p}$, ya que $\lambda_m(\lambda_p(n)) = \lambda_m(p*n) = m*(p*n) = (m*p)*n = \lambda_{m*p}(n)$.
La condición **(2)** establece que la colección de funciones $\{\lambda_m : m \in M\}$ es cerrada bajo composición. De hecho, forma un monoide bajo esta operación y con identidad λ_e.

Esta idea puede ser generalizada. Sea X un conjunto y $\{\lambda_m : X \to X : m \in M\}$ una colección de funciones de X en X con índices en el monoide $\mathbf{M}$. Esta colección cumple lo siguiente:

(i) $\lambda_e = id_X$.
(ii) $\lambda_m \circ \lambda_p = \lambda_{m*p}$.

La colección de funciones que cumple estas propiedades es llamada una **acción** de $\mathbf{M}$ sobre el conjunto X. Podemos reemplazarla por una sola función $\lambda : M \times X \to X$ definida por $\lambda((m, x)) = \lambda_m(x)$, para cualesquiera $m \in M$ y $x \in X$.
Las dos condiciones anteriores ahora establecen que:
1.- $\lambda((e, x)) = x$
2.- $\lambda((m, \lambda((p, x))) = \lambda((m * p, x))$
Un $\mathbf{M}$-conjunto es la pareja (X, λ), donde $\lambda : M \times X \to X$ es una acción de $\mathbf{M}$ sobre X.
Dado un monoide $\mathbf{M}$, los $\mathbf{M}$-conjuntos son objetos de la categoría $\mathbf{M} - Set$, que también es un topos. Un morfismo $f : (X, \lambda) \to (Y, \mu)$ es una función $f : X \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & Y \arrow[d, "\mu_m"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, $f(\lambda((m, x))) = \mu((m, f(x))$ para todo $m \in M$ y $x \in X$. La composición entre $(\mathbf{M} - Set)$-morfismos es la composición usual entre funciones.

El objeto terminal es un $\mathbf{M}$-conjunto singular, es decir, definimos al $(\mathbf{M} - Set)$-objeto $\mathbf{1}$ como la pareja $(\{0\}, \lambda_0)$, donde $\lambda_0((m, 0)) = 0$ para todo $m \in M$.

El producto de (X, λ) y (Y, μ) es el par $(X \times Y, \delta)$, en donde δ_m es la función $\lambda_m \times \mu_m : X \times Y \to X \times Y$.

El producto fibrado de dos $(\mathbf{M} - Set)$-morfismos con codomino común, f y

g

$$
\begin{tikzcd}
 & (Y,\mu) \arrow[d, "g"] \\
(X,\lambda) \arrow[r, "f"] & (Z,\gamma)
\end{tikzcd}
$$

es $(X \times_Z Y, \delta)$, en donde δ es como antes.

Un conjunto $B \subseteq M$ es llamado **ideal izquierdo** de $\mathbf{M}$, si $m * b \in B$ para cualesquiera $m \in M$ y $b \in B$.
Definimos al objeto clasificador para $\mathbf{M}-Set$ como $\Omega = (L_M, \omega)$, en donde L_M es el conjunto de todos los ideales izquierdos de $\mathbf{M}$ y $\omega : M \times L_M \to L_M$ está dada por $\omega((m, B)) = \{n : n * m \in B\}$, para todo $m \in M$ y $B \in L_M$.
Además, definimos $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ como la función $\top : \{0\} \to L_M$ donde $\top(0) = M$.
Para entender cómo trabaja el clasificador de subobjetos en $\mathbf{M} - Set$, consideremos un monomorfismo $k : (X, \lambda) \rightarrowtail (Y, \mu)$ (de hecho, k es una inclusión de conjuntos). El carácter de k, $\chi_k : (Y, \mu) \to \Omega$, es la función $\chi_k : Y \to L_M$ dada por:

$$\chi_k(y) = \{m : \mu((m, y)) \in X\} \text{ para todo } y \in Y$$

Teorema 2.6.1
El objeto $\Omega = (L_M, \omega)$ es el clasificador de subobjetos en $\mathbf{M} - Set$ y para cualquier monomorfismo $k : (X, \lambda) \rightarrowtail (Y, \mu)$, la función χ_k definida anteriormente, es el carácter de k.

Demostración: Para verificar esto es necesario probar que, en efecto, $\Omega = (L_M, \omega)$ es un objeto de $\mathbf{M} - Set$ (i.e., ω es una acción de $\mathbf{M}$ sobre L_M), que χ_k está bien definida (i.e., $\chi_k(y)$ es un ideal izquierdo de $\mathbf{M}$, para todo $y \in Y$) y que además χ_k satisface que es el único morfismo que hace que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "!"'] & Y \arrow[d, "\chi_k"] \\
\{0\} \arrow[r, "\top"'] & (L_M, \omega) = \Omega
\end{tikzcd}
$$

sea un producto fibrado.
Veamos que $\omega : M \times L_M \to L_M$, dada por $\omega((m, B)) = \{n : m * n \in B\}$ es una acción de $\mathbf{M}$ sobre L_M.

Sea $B \in L_M$, luego $\omega((e, B)) = \omega_e(B) = B$.
Ahora, sean $m, p \in M$ y $B \in L_M$, entonces

$$\begin{aligned}
&\omega((m, \omega((p, B)))) \\
&\quad = \omega((m, \{n : p * n \in B\})) \\
&\quad = \{n : (m * p) * n \in B\} \\
&\quad = \omega((m * p, B))
\end{aligned}$$

En consecuencia, la función ω es una acción de $\mathbf{M}$ sobre L_M. Es decir, Ω es un $\mathbf{M} - Set$ objeto.
Ahora veamos que, dados el monomorfismo $k : (X, \lambda) \rightarrowtail (Y, \mu)$ y la función $\chi_k : Y \to \Omega$, el conjunto $\chi_k(y) = \{m : \mu(m, y) \in X\}$ es un ideal izquierdo de $\mathbf{M}$, para todo $y \in Y$:
Sean $y \in Y$ y $n \in M$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\mu((n * m, y)) \\
&\quad = \mu((n, \mu((m, y)))) \\
&\quad = \mu_n(\mu_m(y)) \in X
\end{aligned}$$

con lo cual, $n * m \in \chi_k(y)$.
Por tanto, $\chi_k(y)$ es ideal izquierdo de $\mathbf{M}$.
Resta verificar que el morfismo χ_k definido como antes, es el único morfismo que convierte al diagrama anterior en un producto fibrado.
En efecto, sea $x \in X$,

$$\begin{aligned}
&(\chi_k \circ k)(x) \\
&\quad = \chi_k(k(x)) \\
&\quad = \{m : \mu((m, k(x))) \in X\} \\
&\quad = \{m : \mu_m(k(x)) \in X\} \\
&\quad = \{m : k(\lambda_m(x)) \in X\} \\
&\quad = \{m : \lambda_m(x) \in X\} = M
\end{aligned}$$

La última igualad se obtiene considerando que k es una inclusión de conjuntos.

$\blacksquare$

Los exponenciales en $\mathbf{M} - Set$ se construyen tomando en cuenta que la función $* : M \times M \to M$ (la operación binaria que hace del conjunto M un monoide) es una acción de $\mathbf{M}$ sobre $\mathbf{M}$. Esto hace que $(M, *)$ sea también un $(\mathbf{M} - Set)$-objeto.
Dados (X, λ), (Y, μ) dos $(\mathbf{M} - Set)$-objetos, definimos el exponencial de ellos así:

$$(Y, \mu)^{(X, \lambda)} = (E, \sigma)$$

en donde $E = \{f \in Mor(\mathbf{M} - Set) : f : (M, *) \times (X, \lambda) \to (Y, \mu)\}$ y $\sigma_m : E \to E$ está dada por la regla:

Para cada $f \in E$, $\sigma_m(f) = g$, de tal forma que $g : M \times X \to Y$ está definida como $g((n, x)) = f((m * n, x))$.
El morfismo evaluación

$$ev : (E, \sigma) \times (X, \lambda) \to (Y, \mu)$$

está dado por $ev((f, x)) = f((e, x))$.

Las categorías de la forma $\mathbf{M} - Set$ conforman un ejemplo de *topos* que tiene propiedades no clásicas. Retomaremos este ejemplo en los capítulos siguientes.

2.7. Objetos Potencia

El exponencial Ω^a en un *topos* tiene un papel similar a 2^A en **Set**. Puesto que $2^A \cong \wp(A)$, es natural pensar que el objeto Ω^a se comporta como el "conjunto potencia" del "conjunto" a en un *topos*. Esto es correcto, como veremos a continuación.
Dados dos conjuntos A y B, existe una correspondencia biyectiva entre las funciones de B en $\wp(A)$ y las relaciones definidas de B en A. En otras palabras, dada $f : B \to \wp(A)$, definimos la relación $R_f \subseteq B \times A$ de la siguiente manera:

$$xR_f y \text{ si y sólo si } y \in f(x)$$

para todo $x \in B$ y $y \in A$.
Recíprocamente, dada $R \subseteq B \times A$, definimos la función $f_R : B \to \wp(A)$ como

$$f_R(x) = \{y \in A : xRy\}$$

para cada $x \in B$.

Ahora traduciremos esta correspondencia al lenguaje de los morfismos examinando una relación especial, denotada como $\in_A$, que va de $\wp(A)$ en A.
$\in_A$ es la relación de pertenencia y contiene toda la información acerca de qué subconjuntos de A contienen cuáles elementos de A. Es decir:

$$\in_A = \{(U, x) : U \subseteq A,\ x \in A,\ x \in U\}$$

Cambiando $\wp(A)$ por 2^A, la condición "$x \in U$" quedaría escrita como "$\chi_U(x) = 1$", y entonces se tiene que $\in_A$ es isomorfa al conjunto

$$\in'_A = \{(\chi_U, x) : U \subseteq A,\ x \in A,\ \chi_U(x) = 1\} \subseteq 2^A \times A$$

Luego, la función característica de $\in'_A$ (entendida como un subconjunto de $2^A \times A$), es el morfismo (en **Set**) $ev : 2^A \to 2$ dado por $ev((\chi_U, x)) = \chi_U(x)$. Con esto, es posible dar la siguiente caracterización categórica de $\in'_A$ (y por tanto, de $\in_A$) como un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\in'_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & 2^A \times A \arrow[d, "ev"] \\
1 \arrow[r, "verdad"] & 2
\end{tikzcd}$$

Con lo que, dada una relación $R \subseteq B \times A$, tenemos que $(x, y) \in R$ si y sólo si $y \in f_R(x)$ si y sólo si $(f_R(x), y) \in \in_A$; así que R es la imagen inversa de $\in_A$ bajo la función $f_R \times id_A : B \times A \to \wp(A) \times A$, que a cada pareja (x, y) la asocia con el par $(f_R(x), y)$.
Por lo tanto, el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & B \times A \arrow[d, "f_R \times id_A"] \\
\in_A \arrow[r, hook] & \mathcal{P}(A) \times A
\end{tikzcd}$$

en donde g es la restricción de la función $f_R \times id_A$ a R.
Con todo esto, tenemos la siguiente definición

Definición 2.7.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos y a un $\mathcal{C}$-objeto. Un **objeto potencia** para a es un par $(\wp(a), \in)$ en donde $\wp(a)$ es un $\mathcal{C}$-objeto y $\in$ es un monomorfismo $\in : \in_a \rightarrowtail \wp(a) \times a$ de tal manera que para cada $\mathcal{C}$-objeto b y cada monomorfismo $r : R \rightarrowtail b \times a$, existe un único $\mathcal{C}$-morfismo $f_r : b \rightarrowtail \wp(a)$ que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d] & b \times a \arrow[d, "f_r \times 1_a"] \\
\in_a \arrow[r, tail, "\in"] & \wp(a) \times a
\end{tikzcd}$$

Decimos que $\mathcal{C}$ tiene **objetos potencia** si y sólo si para cada $\mathcal{C}$-objeto a existe un objeto potencia.

Teorema 2.7.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$ existen los objetos potencia.

<u>**Demostración:**</u> Sea a un $\mathcal{E}$-objeto, definimos al objeto $\wp(a) = \Omega^a$ y al morfimo $\in : \in_a \to \Omega^a \times a$ como el subobjeto de $\Omega^a \times a$ cuyo carácter es $ev_a : \Omega^a \times a \to \Omega$, es decir

$$\begin{tikzcd}
\epsilon_a \arrow[r, tail, "\epsilon"] \arrow[d, "!"'] & \Omega^a \times a \arrow[d, "ev_a"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, donde ev_a es el morfismo evaluación de $\Omega^a \times a$ en Ω.
Para mostrar que esta construcción nos garantiza objetos potencia en $\mathcal{E}$, tomemos cualquier monomorfismo $r : R \rightarrowtail b \times a$ y sea $\chi_r : b \times a \to \Omega$ su morfismo carácter. Entonces, sea $f_r : b \to \Omega^a$ el adjunto exponencial (recordar la definición de exponenciales) de χ_r, es decir, el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^a \times a \arrow[dr, "ev_a"] & \\
& \Omega \\
b \times a \arrow[uu, "f_r \times 1_a"] \arrow[ur, "\chi_r"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d, dotted] \arrow[dd, bend right=60, "!"'] & b \times a \arrow[d, "f_r \times id_a"] \\
\in_a \arrow[r, tail, "\in"] \arrow[d] & \Omega^a \times a \arrow[d, "ev_a"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Lo que nos interesa es mostrar que

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "r"] \arrow[d] & b \times a \arrow[d, "f_r \times id_a"] \\
\in_a \arrow[r, tail, "\in"] & \Omega^a \times a
\end{tikzcd}$$

(que es el cuadrado superior del diagrama anterior) es un producto fibrado, en donde f_r, $\in$ están definidas como arriba.
Puesto que $ev_a \circ (f_r \times id_a) = \chi_r$, el "perímetro" del diagrama anterior (*) es un

producto fibrado (pues $(\Omega, \top)$ es el clasificador en $\mathcal{E}$).
Luego, como el diagrama de abajo en (*) es un producto fibrado, y tomando en cuenta lo anterior (que el perímetro del diagrama (*) conmuta) entonces debe existir un único morfismo $R \to \in_a$ que cumple la propiedad universal del producto fibrado.
En consecuencia, por el lema del producto fibrado, se tiene que el cuadrado de arriba (en el diagrama (*)) es un producto fibrado, como queríamos que fuera.

$\blacksquare$

2.8. Ω y el axioma de comprensión

Lawvere sugirió que el concepto de clasificador de subobjetos para un topos es una categorización del axioma de comprensión para ZFC, es decir, el concepto de clasificador es una forma de "traducir" al lenguaje de la teoría de categorías el axioma de comprensión en la teoría de conjuntos. Se empieza por considerar un conjunto B y una propiedad φ que se predica sobre los elementos del conjunto B. Representamos a φ en **Set** como una función $\varphi : B \to 2$ que está definida por la regla

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ tiene la propiedad } \varphi \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

El axioma de comprensión (o de separación) nos proporciona un subconjunto de B conformado por todos aquellos elementos de B que satisfacen la propiedad φ, a saber, $\{x : x \in B, \text{ y } \varphi(x) \text{ es verdadera}\}$. Este conjunto está determinado por φ y podríamos escribirlo como $A_\varphi = \{x : \varphi(x) = 1\}$. Con lo cual, se tiene que $y \in \{x : \varphi(x) \text{ es verdadera}\}$ si y sólo si $\varphi(y) = 1$. Por lo tanto, con esto podemos formar un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A_\varphi \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ 1 \arrow[r, "verdad"] & 2 \end{tikzcd}$$

De igual manera, en un topos $\mathcal{E}$, si $\varphi : b \to \Omega$ es un morfismo con codominio Ω, podemos obtener el subobjeto de b (es decir, un monomorfismo con codominio b) $\{x : \varphi\} : a \to b$, a partir del producto fibrado de $\top$ con φ

$$\begin{tikzcd} a_\varphi \arrow[r, tail, "\{x:\varphi\}"] \arrow[d, "!"'] & b \arrow[d, "\varphi"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Definición 2.8.1
En cualquier categoría $\mathcal{C}$ con objeto terminal, si $x : \mathbf{1} \to b$ es un elemento del objeto b y $f : a \rightarrowtail b$ es un subobjeto también de b, decimos que x **es un elemento de** f, y lo escribimos como $x \in f$, cuando existe un morfismo $k : \mathbf{1} \to a$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "x"] & \\ a \arrow[rr, tail, "f"] & & b \end{tikzcd}$$

Es decir, $f \circ k = x$.

Aplicando esta noción de elemento de un subobjeto al diagrama anterior de producto fibrado, tenemos que si $\varphi : \mathbf{1} \to b$ es un $b-$*elemento* (o simplemente elemento del objeto b), entonces

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "k"] \arrow[dr, bend left, "y"] \arrow[dd, bend right=60, "id_1"'] & \\ a \arrow[r, tail, "\{x:\varphi\}"] \arrow[d, "!"'] & b \arrow[d, "\varphi"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$y \in \{x : \varphi\}$ si y sólo si existe un morfismo k que hace conmutar el diagrama anterior. Pero como el cuadrado de abajo es un producto fibrado, entonces k existe (y es único) si y sólo si el perímetro del diagrama conmuta. Es decir:

$$y \in \{x : \varphi\} \text{ si y sólo si } \varphi \circ y = \top \circ id_1 = \top$$

En consecuencia, la situación definida mediante el axioma de comprensión en teoría de conjuntos, ha quedado "traducida" al lenguaje de la teoría de categorías. La construcción realizada anteriormente nos proporciona una "generalización" de lo que sucede en la teoría de conjuntos.

La estructura categórica de *topos* es una "generalización" de la categoría **Set**, y de las propiedades y construcciones típicas que se realizan en la teoría de conjuntos. Como hemos podido observar, existen topos cuyos objetos son muy diferentes a los objetos de **Set**, que son simplemente conjuntos, y sin embargo en ellos también se pueden realizar construcciones que son típicas de esta categoría, estos hechos son utilizados para realizar pruebas de consistencia, así como para estudiar estructuras que en apariencia son muy diferentes de los conjuntos y que bajo un análisis categórico resultan esencialmente “similares”. El concepto de *topos*, así como la generalización que en él encuentran las construcciones estándar en teoría de conjuntos, y la manera en que estructuras de muy diversa naturaleza también satisfacen propiedades similares a **Set**, ha motivado la idea de una fundamentación de la matemática mediante la teoría de topos, haciendo de lado la teoría de conjuntos y sus problemas de fundamentación. A pesar de ser un tema de fundamental importancia, en este trabajo no pretendemos abordar el concepto de topos desde esa perspectiva.

Capítulo 3

La estructura de *topos*

Los topos pueden ser pensados como categorías en las que existe un clasificador de subobjetos y en las que además es posible realizar una gran cantidad de construcciones "típicas" de la categoría de conjuntos. Es en este sentido en que comúnmente se dice que un topos es una teoría de conjuntos generalizada, pues todas las construcciones teórico-conjuntistas encuentran una traducción dentro de las categorías con estructura de topos, con independencia del tipo de objetos o de morfismos que las conforman.

En este capítulo revisaremos las propiedades más importantes que cumplen los morfismos especiales en un topos, así como también las propiedades que ha de tener el clasificador de subobjetos y los valores de verdad.

3.1. Morfismos igualadores y morfismos imagen

En la categoría **Set** se cumple que una función inyectiva, digamos $f : A \rightarrowtail B$, es un igualador para las funciones $\chi_{Imf} : B \to 2$ (función característica de la imagen de f) y la composición de las funciones $! : B \to \{0\}$ y $\mathbf{v} : \{0\} \to \{0, 1\}$ (función *verdad*). Esta situación puede generalizarse a cualquier topos.

Teorema 3.1.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos. Si $f : a \rightarrowtail b$ es un $\mathcal{E}$-morfismo que además es monomorfismo, entonces f es un igualador de χ_f (carácter de f) y $\top_b = \top \circ !_b$.

Demostración: Como $\mathcal{E}$ es un topos y f un monomorfismo, podemos formar el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "!_b"'] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Luego, dado que $\mathbf{1}$ es terminal y que $!_b \circ f : a \to b \to \mathbf{1}$, entonces $!_a = !_b \circ f$.
En consecuencia,

$$\begin{aligned} & (\top \circ !_b) \circ f \\ & \quad = \quad \top \circ (!_b \circ f) \\ & \quad = \quad \top \circ !_a \\ & \quad = \quad \chi_f \circ f \end{aligned}$$

la última igualdad se consigue porque el diagrama anterior es un producto fibrado.
Por lo tanto, $(\top \circ !_b) \circ f = \chi_f \circ f$.
Ahora, sea $g : c \to b$ otro $\mathcal{E}$-morfismo que satisface la ecuación $(\top \circ !_b) \circ g = \chi_f \circ g$.
Notemos, además, que $!_b \circ g : c \to b \to \mathbf{1}$, con lo que $!_b \circ g = !_c$.
De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} & \chi_f \circ g \\ & \quad = \quad (\top \circ !_b) \circ g \\ & \quad = \quad \top \circ (!_b \circ g) \\ & \quad = \quad \top \circ !_c \end{aligned}$$

Es decir, el perímetro del siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!_c"'] & & \\ & a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & b \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "!_b"'] \\ & 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

y como el cuadrado en el diagrama es un producto fibrado, entonces (por la propiedad universal del producto fibrado) existe un único $\mathcal{E}$-morfismo $h : c \to a$ (como aparece en el diagrama) de tal manera que $g = f \circ h$.
De manera que, como las ecuaciones $(\top \circ !_b) \circ f = \chi_f \circ f$ y $g = f \circ h$ se cumplen, el siguiente diagrama es un diagrama de igualador

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, tail, "f"] & & b \arrow[r, shift left, "\chi_f"] \arrow[r, shift right, "\top\circ !_b"'] & \Omega \\
& c \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, f es un igualador. ■

Corolario 3.1.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$ un morfismo $f : a \to b$ es isomorfimo si y sólo si es epimorfismo y monomorfismo.

Demostración: En cualquier categoría un isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo. Ahora, recíprocamente, si $f : a \to b$ es epimorfismo y además monomorfismo, entonces (por el teorema anterior) es un epimorfismo igualador. Esto implica que es un isomorfismo (ver [**CWM**]). ■

Cualquier función $f : A \to B$ (o morfismo en **Set**) puede ser escrita como la composición de una función sobreyectiva y una inyectiva. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para cualquier función f

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde $f(A) = Imf = \{f(x) : x \in A\}$ y $f^*(x) = f(x)$ para cualquier $x \in A$. Esta forma de escribir a f se conoce como **epi-mono factorización** de f.
En un topos cualquier morfismo también tiene una epi-mono factorización. Para poder verificar esto es necesario definir qué entendemos por el conjunto Imf (imagen de f) en un topos.

Definición 3.1.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos y $f : a \to b$ un $\mathcal{E}$-morfismo. Formamos el producto cofibrado de f con f

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \\
b \arrow[r, "p"'] & r
\end{tikzcd}$$

y definimos la **imagen de** f como el morfismo $imf : f(a) \to b$ que es el igualador de p y q

$$\begin{tikzcd} f(a) \arrow[r, tail, "imf"] & b \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & r \end{tikzcd}$$

Notemos que imf es un monomorfismo, pues es un igualador y que precisamente por esto imf también factoriza a f, ya que f tiene por codominio el objeto b, con lo cual la propiedad universal de igualador garantiza que existe k de tal manera que $f = imf \circ k$. Además de esto, el morfismo imagen de un morfismo f cumple una importante propiedad.

Teorema 3.1.2
El morfismo imf es el subobjeto de b más pequeño mediante el cual se factoriza f. Es decir, sea $f : a \to b$ un $\mathcal{E}$-morfismo, si existe un monomorfismo $v : c \rightarrowtail b$ y un morfismo $u : a \to c$ de tal manera que $f = v \circ u$, entonces $imf \subseteq v$.

<u>**Demostración:**</u> Sea $f : a \to b$ un $\mathcal{E}$-morfismo y $imf : f(a) \rightarrowtail b$ su morfismo imagen. Supongamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\ & c \arrow[ur, tail, "v"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $f = v \circ u$, en donde v es un monomorfismo. Luego, v debe ser un igualador, por Teorema 3.1.1, por tanto, existen $s, t : b \to d$ dos $\mathcal{E}$-morfismos tales que $s \circ v = t \circ v$. Entonces sucede que $s \circ f = s \circ v \circ u = t \circ v \circ u = t \circ f$, con lo cual, considerando el producto cofibrado de f con f que define al morfismo imf, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\ b \arrow[r, "p"'] \arrow[drr, bend right, "s"'] & r \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & d \end{tikzcd}$$

en consecuencia, por la propiedad universal del producto cofibrado, existe un único morfismo $h : r \to d$ (como se ve en el diagrama) de tal manera que $h \circ p = s$ y $h \circ q = t$.
Con lo que

$$\begin{aligned} s \circ imf &= h \circ p \circ imf \\ &= h \circ q \circ imf \\ &= t \circ imf \end{aligned}$$

Luego, dado que v es igualador, por la propiedad universal debe existir un único morfismo $k : f(a) \to c$ tal que $imf = v \circ k$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "v"] & & b \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & d \\
& f(a) \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "imf"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $imf \subseteq v$.

■

Proposición 3.1.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos y $f : a \to b$ un $\mathcal{E}$-morfismo. Entonces existe una epi-mono factorización para f.

<u>Demostración:</u> Queremos demostrar que existe un epimorfismo f^* y un monomorfismo g tal que $f = g \circ f^*$. Para ver esto, basta considerar al morfismo $imf : f(a) \to b$ que es el igualador de dos morfismos p y q, dados por el producto cofibrado de f con f.

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, "imf"] & b \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & r \\
a \arrow[u, dashed, "f^*"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $q \circ f = p \circ f$ (definición de producto cofibrado) se tiene que existe un único morfismo $f^* : a \to f(a)$ (como en el diagrama) tal que $f = imf \circ f^*$ (por propiedad universal del igualador imf). Notemos, además, que imf es un monomorfismo.
Veamos que f^* es un epimorfismo. En efecto, sean $r, s : f(a) \to r$ dos morfismos tales que $r \circ f^* = s \circ f^*$. Consideremos ahora el morfismo imagen de f^*, es decir, $imf^* : f^*(a) \rightarrowtail f(a)$, con lo cual obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^*(a) \arrow[r, "imf \circ imf^*"] \arrow[d, tail, "imf^*"'] & b \\
f(a) \arrow[ur, tail, "imf"'] &
\end{tikzcd}$$

En consecuencia $imf \circ imf^* \subseteq imf$. Pero el Teorema 3.1.2 garantiza que $imf \subseteq imf \circ imf^*$ (pues notemos que $imf \circ imf^*$ es un monomorfismo) con lo que $imf \cong imf \circ imf^*$ y por tanto $f^*(a) \cong f(a)$. Así que el morfismo imf^* debe ser un isomorfismo.
Pero imf^* es (por definición) el igualador de r y s

$$\begin{tikzcd} f^*(a) \arrow[r] & f(a) \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & r \end{tikzcd}$$

pues por hipótesis $r \circ f^* = s \circ f^*$, con lo cual forman el siguiente producto cofibrado de f^* y f^*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] & f(a) \arrow[d, "q"] \\ f(a) \arrow[r, "p"'] & r \end{tikzcd}$$

Luego, como imf^* es un isomorfismo, en particular es un epimorfismo, con lo que $r = s$.
Por lo tanto, f^* es un epimorfismo y así $f = imf \circ f^*$ es una epi-mono factorización para f.

■

3.2. El teorema fundamental y algunas consecuencias

Si $\mathcal{E}$ es un topos, entonces la categoría coma $\mathcal{E} \downarrow a$ de morfismos sobre un objeto a también es un topos. Como lo mencionamos en el capítulo anterior, este es un resultado conocido como el teorema fundamental de la teoría de topos. Aquí esbozaremos brevemente la prueba de este resultado, sin embargo desarrollaremos más detalladamente las pruebas de algunas consecuencias de este hecho que serán indispensables para el desarrollo del trabajo.

Comencemos recordando que si $\mathcal{E}$ es un topos y a un objeto en $\mathcal{E}$, la categoría coma, denotada como $\mathcal{E} \downarrow a$, tiene por objetos todos los $\mathcal{E}$-morfismos de la forma $f : x \to a$, es decir, todos los morfismos en $\mathcal{E}$ cuyo codominio es a. Denotamos estos objetos indicando únicamente el $\mathcal{E}$-morfismo y su dominio, así (f, x) . Un morfismo entre tales objetos se denota como $h : (f, x) \to (f', x')$ y es el $\mathcal{E}$-morfismo $h : x \to x'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & x' \arrow[dl, "f'"] \\ a & \end{tikzcd}$$

Es decir, $f = f' \circ h$.

Un morfismo $f : a \to b$ en $\mathcal{E}$ induce un funtor $f^* : \mathcal{E} \downarrow b \to \mathcal{E} \downarrow a$, llamado **funtor producto fibrado**, que asigna a cada objeto $g : y \to b$ en $\mathcal{E} \downarrow b$, el producto fibrado de g con f. Es decir, a cada objeto $g : y \to b$ en $\mathcal{E} \downarrow b$, f^* le asocia el objeto $g' : y' \to a$ dado por el siguiente producto fibrado en $\mathcal{E}$ (recordemos que $\mathcal{E}$ es un topos, con lo cual para cualesquiera dos morfismos con igual codominio existe su producto fibrado):

$$\begin{tikzcd} y' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & y \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Una propiedad importante es que para todo morfismo $f : a \to b$ en $\mathcal{E}$ el funtor $f^* : \mathcal{E} \downarrow b \to \mathcal{E} \downarrow a$ tiene adjunto izquierdo y derecho. La construcción de estos adjuntos puede revisarse en [**SGL**] o en [**TLST**]. Aquí simplemente usaremos este hecho para probar algunos corolarios del llamado 'teorema fundamental ".

Teorema 3.2.1
Para cualquier objeto a en un topos $\mathcal{E}$, la categoría coma $\mathcal{E} \downarrow a$ de morfismos sobre a, también es un topos.

Únicamente esbozaremos la prueba. Para ello recordemos que un topos simplemente es una categoría que tiene clasificador de subobjetos y que es cerrada cartesiana. A su vez, una categoría cerrada cartesiana es aquella que tiene todos los límites finitos (finitamente completa) y que tiene exponenciales. En el primer capítulo mencionamos que una categoría tiene todos los límites finitos si y sólo si tiene productos binarios e igualadores. Con esto en mente, dados dos objetos $f : x \to a$ y $g : y \to a$ en $\mathcal{E} \downarrow a$, un igualador para un par de morfismos $s, t : x \rightrightarrows y$ en $\mathcal{E} \downarrow a$ (recordemos que $g \circ s = f$ y $g \circ t = f$) es exactamente el morfismo igualador $e : m \to x$ en $\mathcal{E}$ para estos morfismos junto con la flecha

$f \circ e : m \to a$. El producto de f y g en $\mathcal{E} \downarrow a$ es el producto fibrado en $\mathcal{E}$ de f con g

$$\begin{tikzcd} x \times_a y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & y \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

El objeto terminal en $\mathcal{E} \downarrow a$ es el morfismo identidad $id_a : a \to a$. Además, dado que un subobjeto de un objeto $x \to a$ en $\mathcal{E} \downarrow a$ es simplemente un subobjeto de x en $\mathcal{E}$, el objeto clasificador en $\mathcal{E} \downarrow a$ será la flecha $\Omega \times a \to a$, en donde Ω es el clasificador en $\mathcal{E}$. Con esto, $\mathcal{E} \downarrow a$ tiene límites finitos y clasificador de subobjetos, únicamente resta construir los exponenciales. Esta última construcción es una consecuencia de la siguiente biyección

$$\mathcal{E}(x \times_a y, \Omega \times a) \cong Sub(x \times_a y)$$

en donde $Sub(x \times_a y)$ es la colección de sobobjetos de $x \times_a y$.

Los detalles de estas construcciones brevemente comentadas aquí pueden consultarse en los textos antes citados. Ahora revisaremos algunas consecuencias de este hecho que se ocuparán en el desarrollo subsecuente del trabajo.

Corolario 3.2.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$ los productos fibrados preservan epimorfismos. Es decir, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en un topos $\mathcal{E}$, y f es un epimorfismo, entonces g también es epimorfismo.

<u>**Demostración:**</u> Primero notemos que, dualizando la observación uno del primer capítulo en su apartado 4, obtenemos que:

$f : b \to d$ es un epimorfismo si y sólo si el siguiente diagrama es un producto cofibrado:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & d \arrow[d] \\ d \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

Ahora, dado que f es un epimorfismo, entonces el diagrama anterior es de hecho un producto cofibrado.
Por otra parte, puesto que el funtor $k^* : \mathcal{E} \downarrow d \to \mathcal{E} \downarrow c$ definido como el producto fibrado a través de k tiene adjunto izquierdo, entonces preserva todos los colímites, en particular los productos cofibrados. Con lo cual, también preserva epimorfismos. Por tanto $g : a \to c$ debe ser un epimorfismo.

■

Corolario 3.2.2
Si el siguiente diagrama

$$b \longrightarrow b + b' = B \longleftarrow b'$$

es un coproducto y además el cuadrado

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ A \arrow[r, "h"'] & b + b' = B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, entonces el diagrama

$$a \longrightarrow A \longleftarrow a'$$

es un coproducto entre los objetos a y a'.

<u>**Demostración:**</u> Consideremos el funtor producto fibrado inducido por el morfismo h

$$\mathcal{E} \downarrow B \xrightarrow{h^*} \mathcal{E} \downarrow A$$

Puesto que este funtor tiene adjunto derecho, debe preservar colímites, con lo cual A debe ser el objeto coproducto de a con a'.

■

Corolario 3.2.3
Los coproductos preservan productos fibrados. En otras palabras, si los diagramas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"] & e
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r] \arrow[d] & b' \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"] & e
\end{tikzcd}$$

son productos fibrados en cualquier topos $\mathcal{E}$, entonces también lo es el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a + a' \arrow[r] \arrow[d] & b + b' \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"] & e
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u> Formemos el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & b + b' \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"] & e
\end{tikzcd}$$

Dado que los diagramas en la hipótesis del teorema son productos fibrados, entonces existe un único morfismo $a \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d] & b + b' \arrow[d] \\
& d \arrow[r, "k"'] & e
\end{tikzcd}$$

Con esto, es posible formar el siguiente rectángulo:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d] & b+b' \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"'] & e
\end{tikzcd}$$

Puesto que el cuadrado de abajo y el rectángulo son productos fibrados, entonces el cuadrado de arriba también lo es (por el lema del producto fibrado, ver preliminares). Con lo cual, por el corolario anterior, A debe ser el coproducto de a con a', es decir $A = a + a'$. Por lo tanto, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
a+a' \arrow[r] \arrow[d] & b+b' \arrow[d] \\
d \arrow[r, "k"] & e
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

■

Estas serán las principales consecuencias del teorema fundamental que usaremos en las siguientes secciones. Para una discusión mucho más completa de estos resultados ver [**TLST**] y [**SGL**].

3.3. Extensionalidad y bivalencia

Considerando que un topos $\mathcal{E}$ puede ser entendido como una teoría de conjuntos "generalizada", su objeto inicial $\mathbf{0}$ debería comportarse como el conjunto vacío $\emptyset$ y no tener ningún elemento. Esto, de hecho, es así, excepto en un caso. Si existe un morfismo $x : \mathbf{1} \to \mathbf{0}$, entonces (por las propiedades de una categoría cerrada cartesiana, ver capítulo 1) $\mathcal{E}$ es *degenerado*, es decir, todos los $\mathcal{E}$-objetos son isomorfos (solamente hay un objeto). Esto sucede en la categoría $\mathcal{I}$, cuyo único objeto $\mathbf{1}$ es un objeto terminal, y en la que sólo existe un morfismo; esta categoría es un topos, y se conoce como **topos degenerado**. Por lo tanto, en un topos no degenerado, el objeto inicial $\mathbf{0}$ no tiene elementos.

Definición 3.3.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos y a un $\mathcal{E}$-objeto. Entonces
1.-Decimos que a es **no cero** si y sólo si $a \not\cong \mathbf{0}$ (es decir, si no es isomorfo a $\mathbf{0}$).

2.-Se dice que a es **no vacío** si y sólo si existe al menos un $\mathcal{E}$-morfismo de la forma $\mathbf{1} \to a$.

Notación 3
Si $\mathbf{0}$ es el objeto inicial en una categoría $\mathcal{C}$, denotamos como $0_a : \mathbf{0} \to a$ al único morfismo que va de $\mathbf{0}$ al $\mathcal{C}$-objeto a.

Cuando $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ los conceptos de "no vacío" y "no cero" coinciden. En cambio, cuando $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^2$, el topos cuyos objetos son pares de conjuntos, la situación es diferente.
El objeto $(\emptyset, \{0\})$ no es isomorfo al objeto inicial $(\emptyset, \emptyset)$ en $\mathbf{Set}^2$, con lo cual es un objeto **no cero**. Sin embargo, si existiera algún elemento de $(\emptyset, \{0\})$, digamos $(f, g) : (\{0\}, \{0\}) \to (\emptyset, \{0\})$ (recordar que $(\{0\}, \{0\})$ es terminal en $\mathbf{Set}^2$), tendríamos entonces que la función f está definida del conjunto $\{0\}$ al conjunto $\emptyset$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $(\emptyset, \{0\})$ es **no cero** pero sí **vacío**.

La pregunta por la existencia de elementos en algún objeto está relacionada con la noción de *extensionalidad*; este principio de la teoría de conjuntos afirma que dos conjuntos que tienen los mismos elementos deben ser idénticos. Esto puede traducirse al lenguaje de la teoría de categorías en términos de morfismos:

Principio de extensionalidad para morfismos Si $f, g : a \to b$ son dos morfismos distintos en una categoría $\mathcal{C}$ con objeto terminal, pero tienen igual dominio y codominio, entonces existe $x : \mathbf{1} \to a$ (elemento del objeto a) de tal manera que $f \circ x \neq g \circ x$.

Este principio se satisface en $\mathbf{Set}$, pero no en $\mathbf{Set}^2$. Si consideramos los $\mathbf{Set}^2-$*objetos* $(\emptyset, \{0\})$ y $(\{0\}, 2)$, es fácil percatarse de que entre ellos existen dos morfismos diferentes, por ejemplo $(f, g) : (\emptyset, \{0\}) \to (\{0\}, 2)$ en donde $g : \{0\} \to 2$ esté dada por $g(0) = 0$ y $(f, g') : (\emptyset, \{0\}) \to 2$ en el que $g' : \{0\} \to 2$ cumpla que $g'(0) = 1$ (recordar que en esta categoría los morfismos entre objetos solamente son pares de funciones), sin embargo el objeto $(\emptyset, \{0\})$ no tiene elementos, con lo cual no existe un morfismo $x : (\{0\}, \{0\}) \to (\emptyset, \{0\})$ que satisfaga el principio anterior.

Definición 3.3.2
Se dice que un topos no degenerado $\mathcal{E}$ es **bien potenciado** si y sólo si cumple el principio de extensionalidad para morfismos.

Teorema 3.3.1
Si un topos $\mathcal{E}$ es bien potenciado, entonces cada $\mathcal{E}$-objeto no cero es no vacío.

Demostración: Sea a un $\mathcal{E}$-objeto no cero, es decir $a \ncong \mathbf{0}$. En consecuencia los $\mathcal{E}$-morfismos $0_a : \mathbf{0} \rightarrowtail a$ y $id_a : a \rightarrowtail a$ son distintos, ya que tienen dominios diferentes.
Notemos que $0_a : \mathbf{0} \rightarrowtail a$ y $id_a : a \rightarrowtail a$ también son monomorfismos y además distintos, con lo que $\chi_{0_a} : a \to \Omega$ y $\chi_{id_a} : a \to \Omega$ existen y son diferentes también. Entonces, dado que $\mathcal{E}$ es bien potenciado, se sigue que existe algún $x : \mathbf{1} \to a$ de tal manera que $\chi_{0_a} \circ x \neq \chi_{id_a} \circ x$. Lo que implica que a tiene al menos un elemento. Por lo tanto, a es no vacío.

■

3.4. Falsedad

En **Set** existen exactamente dos morfismos que van de $\mathbf{1} = \{0\}$ a $\Omega = \{0, 1\}$. Uno de ellos es la función verdad ($\mathbf{v}$), que está dada por $\mathbf{v}(0) = 1$. El otro es la función $\mathbf{f}$, que llamaremos **función falsedad**, definida como $\mathbf{f}(0){=}0$. Esta función tiene codominio Ω y es la función característica del conjunto vacío

$$\{x : \mathbf{f}(x) = 1\} = \emptyset$$

Así que en **Set** podemos formar el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, hook, "!"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\ 1 \arrow[r, "\mathbf{v}"] & 2 \end{tikzcd}$$

Definiendo esta situación con el lenguaje de la teoría de topos obtenemos:

Definición 3.4.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos. Definimos el $\mathcal{E}$-morfismo **falsedad**: $\mathbf{1} \to \Omega$ como el único morfismo que hace del siguiente diagrama un producto fibrado en $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "\textbf{falsedad}"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, **falsedad**$=\chi_{0_1}$ (carácter del único morfismo que va de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$). Denotaremos a la función **falsedad** mediante el símbolo $\perp$.

Ejemplos

1.- En $\mathbf{Set}^2$, $\perp : \mathbf{1} \to \Omega$ es el morfismo (**falsedad**,**falsedad**):$(\{0\},\{0\}) \to (2,2)$

2.- En $\mathbf{Bn}(I)$, $\perp : \mathbf{1} \to \Omega$ es el morfismo $\perp : I \to 2 \times I$ dado por $\perp(i) = (0,i)$ para cada $i \in I$.

3.- En $\mathbf{Top}(I)$, $\perp : I \to \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ es el morfismo dado por $\perp(i) = (i, [\emptyset]_i)$, el germen de $\emptyset$ en i.

4.- En **M-Set**, el objeto inicial es $\mathbf{0} = (\emptyset, \emptyset)$ junto con la acción $\phi : M \times \emptyset \to \emptyset$. Con lo que $\perp : \{0\} \to L_{\mathbf{M}}$ es el morfismo dado por $\perp(0) = \{m : \lambda_0(m) \in \emptyset\} = \emptyset$.

Proposición 3.4.1
Si $\mathcal{E}$ es un topos no degenerado, entonces $\top \neq \perp$.

Demostración: Supongamos que $\top = \perp$. Entonces debe suceder que $\chi_{id_1} = \chi_{0_1}$, ya que $\top = \chi_{id_1}$ y $\perp = \chi_{0_1}$. En consecuencia $id_1 \cong 0_1$, por tanto $\mathbf{0} \cong \mathbf{1}$. Lo cual es contradictorio, pues $\mathcal{E}$ es no degenerado. Así, $\top \neq \perp$.

■

Definición 3.4.2
Un topos no degenerado $\mathcal{E}$ se llama **bivalente** si y sólo si $\top$ y $\perp$ son sus únicos valores de verdad (i.e., son los únicos elementos de Ω).

Teorema 3.4.1
Si $\mathcal{E}$ es un topos bien potenciado, entonces $\mathcal{E}$ es bivalente.

Demostración: Sea $f : \mathbf{1} \rightarrowtail \Omega$ cualquier elemento de Ω (notemos que se trata de un monomorfismo, pues tiene como dominio un objeto terminal) y con él formamos el siguiente producto fibrado de f con $\top$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Se tienen ahora dos situaciones posibles:
Caso 1: Si $a \cong \mathbf{0}$, entonces a es un objeto inicial, con lo cual $g = 0_1$. Entonces

$f = \chi_g = \chi_{0_1} = \perp$.
Caso 2: Si $a \ncong \mathbf{0}$, entonces, dado que $\mathcal{E}$ es bien potenciado, a tiene al menos un elemento, digamos $x : \mathbf{1} \to a$. Con esto afirmamos que g debe ser un epimorfismo. En efecto, sean $h, k : \mathbf{1} \to b$ dos $\mathcal{E}$-morfismos tales que $h \circ g = k \circ g$, luego, $h \circ g \circ x = k \circ g \circ x$, pero notemos que $g \circ x : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, con lo que $g \circ x = id_{\mathbf{1}}$ y así $h = k$. Por lo tanto g es un epimorfismo y además un monomorfismo, en consecuencia g es un isomorfismo, es decir, $a \cong \mathbf{1}$. Así que a es un $\mathcal{E}$-objeto terminal, con lo cual $g = id_{\mathbf{1}}$ y con esto se tiene que $f = \chi_g = \chi_{id_{\mathbf{1}}} = \top$.
Por lo tanto, cualquier elemento de Ω debe ser $\top$ o $\perp$.

■

En **Set**, el coproducto $\mathbf{1}+\mathbf{1}$ (recordar que el coproducto de dos objetos a y b en una categoría $\mathcal{C}$ se denota como $a + b$) es un conjunto que tiene dos elementos y por tanto es isomorfo a $\Omega = 2$. De hecho, el isomorfismo está dado por el morfismo $[\top, \perp] : \mathbf{1} + \mathbf{1} \to \Omega$ en el diagrama de coproducto (ver definición de coproducto, capítulo 1)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, dashed, "{[\top,\perp]}"] & 1 \arrow[l] \arrow[dl, "\perp"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

En cualquier topos existen los coproductos, por lo tanto siempre es posible definir el morfismo $[\top, \perp]$. Con lo cual, aquellos topos en los que también suceda la situación anterior (como en **Set**) cumplen una propiedad de lógica clásica en el sentido de que poseen solamente dos valores de verdad (recordar que en un topos los valores de verdad son los elementos del clasificador) esto se retomará más adelante.

Definición 3.4.3
Decimos que un topos $\mathcal{E}$ es un **topos clásico** si y sólo si el morfismo $[\top, \perp]$, dado por el coproducto de $\mathbf{1}$ con $\mathbf{1}$, es un isomorfismo.

Al final de esta sección observaremos que existen topos en los que no se cumple esta condición, es decir, que no son clásicos.

Definición 3.4.4
Sea $\mathcal{E}$ un topos. Si $f : a \to b$ y $g : c \to b$ son dos $\mathcal{E}$-morfismos con igual codominio, decimos que f y g son **disjuntos** si y sólo si el siguiente diagrama es un producto fibrado en $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & c \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

En **Set** esto significa que $Im\ f \cap Im\ g = \emptyset$.

Lema 3.4.1
Si $f : a \rightarrowtail b$ y $g : c \rightarrowtail b$ son monomorfismos disjuntos en un topos $\mathcal{E}$, entonces el morfismo $[f, g] : a + b \to b$ es un monomorfismo también.

Demostración: Como g es un monomorfismo, entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado (ver capítulo 1)

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "id_c"'] & c \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

Luego, dado que en un topos los coproductos preservan productos fibrados (ver observaciones sobre hechos fundamentales) entonces a partir del diagrama anterior junto con el siguiente diagrama (que también es un producto fibrado, ya que f y g son disjuntos)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & c \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

se forma el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} 0 + c \arrow[r, "{[0_c, id_c]}"] \arrow[d, "{[0_a, id_c]}"'] & c \arrow[d, "g"] \\ a + c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b \end{tikzcd}$$

Ahora, como $\mathbf{0} + c \cong c$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "i_c"'] & c \arrow[d, "g"] \\ a+c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado (en donde i_c es el morfismo dado por el coproducto de a con c).
Análogamente se consigue que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "i_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a+c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b \end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado.
En consecuencia, aplicando una vez más para los dos últimos diagramas el hecho de que los coproductos preservan productos fibrados, obtenemos que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} a+c \arrow[r, "{[id_a,id_c]=id_{a+c}}"] \arrow[d, "id_{a+c}"'] & a+c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\ a+c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b \end{tikzcd}$$

Con lo cual, por las propiedades de producto fibrado, $[f, g]$ debe ser un monomorfismo.

■

Una vez verificada esta afirmación, obtenemos entonces los siguientes hechos importantes.

Teorema 3.4.2
En cualquier topos $\mathcal{E}$, el morfismo $[\top, \perp]$ es un monomorfismo.

<u>**Demostración:**</u> Notemos que a partir de la definición de $\perp$ se obtiene que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado. Con lo cual, $\top$ y $\perp$ son disjuntos. Además son monomorfismos (ambos tienen por dominio al terminal $\mathbf{1}$). Así que por el lema anterior, $[\top, \perp] : \mathbf{1} + \mathbf{1} \to \Omega$ es un monomorfismo.

■

Teorema 3.4.3
Si un topos $\mathcal{E}$ es bien potenciado, entonces $[\top, \perp] : 1 + 1 \cong \Omega$, es decir, $\mathcal{E}$ es clásico.

Demostración: Por el teorema anterior sabemos que $[\top, \perp]$ es un monomorfismo, resta ver que también es un epimorfismo.
Sean $f, g : \Omega \to a$ dos $\mathcal{E}$-morfismos tales que $f \circ [\top, \perp] = g \circ [\top, \perp]$. Luego, formando el coproducto $1 + 1$ obtenemos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, dashed, "{[\top,\perp]}"] & 1 \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "\perp"] \\
 & \Omega \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
 & a &
\end{tikzcd}
$$

De donde

$$
\begin{aligned}
f \circ \top &= f \circ [\top, \perp] \circ i \\
&= g \circ [\top, \perp] \circ i \\
&= g \circ \top
\end{aligned}
$$

Análogamente (usando ahora j) se obtiene que $f \circ \perp = g \circ \perp$.
En consecuencia, cualquier morfismo $x : \mathbf{1} \to \Omega$ (es decir, cualquier elemento de Ω) cumple que $f \circ x = g \circ x$, pues $\mathcal{E}$ es bivaluado, es decir, los únicos elementos de Ω son $\top$ y $\perp$. Con lo cual, por el principio de extensionalidad, se implica que $f = g$. Así, $[\top, \perp]$ es epimorfismo.

Por lo tanto, $[\top, \bot]$ es un isomorfismo y con ello $1 + 1 \cong \Omega$ en cualquier topos bien potenciado.

■

La categoría $\mathbf{Set}^2$ es clásica, pero no bivalente, pues tiene cuatro valores de verdad, ya que el $\mathbf{Set}^2 - clasificador$ $\Omega = (2, 2)$. Por otra parte, la categoría $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ (cuyos objetos son funciones) no es un topos bivalente (tiene tres valores de verdad) como ya vimos, y tampoco es clásico.
Para construir un ejemplo de un topos no clásico pero sí bivalente, usamos el siguiente hecho.

Teorema 3.4.4
Si $\mathbf{M} = (M, *, e)$ es un monoide conmutativo, entonces la categoría $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$ es un topos clásico si y sólo si $\mathbf{M}$ es un grupo.

Demostración: Sea $\mathbf{M}$ un monoide conmutativo. Primero estudiemos cómo es el coproducto de $\mathbf{1}$ con $\mathbf{1}$ en **M-Set**.
Recordemos que en esta categoría el objeto terminal es $1 = (\{0\}, \lambda_0)$. Luego, definimos el objeto $1 + 1 = (\{0, 1\}, \gamma)$ donde $\gamma(m, 0) = 0$ y $\gamma(m, 1) = 1$ para cada $m \in M$. Entonces tenemos el siguiente diagrama de coproducto

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, "{[\top,\bot]}"] & 1 \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "\bot"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $[\top, \bot]$ queda definido mediante $[\top, \bot](0) = M$ y $[\top, \bot](1) = \emptyset$ (recordar que $\Omega = (L_{\mathbf{M}}, \omega)$, $L_{\mathbf{M}} = \{B \subseteq M : B$ es ideal izquierdo de $\mathbf{M}\})$, y además $i(0) = 0$ y $j(0) = 1$ son las funciones que junto con el objeto $1 + 1$ forman el coproducto de $\mathbf{1}$ con $\mathbf{1}$ en $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$.

Ahora, probaremos el teorema verificando las dos siguientes afirmaciones:

1.- **M-Set** es un topos clásico si y sólo si $L_{\mathbf{M}} = \{M, \emptyset\}$
2.- $L_{\mathbf{M}} = \{M, \emptyset\}$ si y sólo si $\mathbf{M}$ es grupo

En efecto, veamos **(1)**.
Supongamos que **M-Set** es clásico, es decir, $[\top, \bot]$ es un isomorfismo, lo que implica que es una biyección de conjuntos y que por lo tanto $L_{\mathbf{M}}$ solamente tiene dos elementos, a saber, $L_{\mathbf{M}} = \{M, \emptyset\}$.
Recíprocamente, si $L_{\mathbf{M}} = \{M, \emptyset\}$, entonces $\omega(m, M) = M$ y $\omega(m, \emptyset) = \emptyset$, para cada $m \in M$. Por lo tanto, $[\top, \bot]$ es una función biyectiva que además es un morfismo en **M-Set**, pues el siguiente cuadrado es conmutativo (por la manera en que están dadas ω y $[\top, \bot]$

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[r, "{[\top,\perp]}"] \arrow[d, "\gamma_m"'] & \Omega \arrow[d, "\omega_m"] \\
1+1 \arrow[r, "{[\top,\perp]}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es decir, $\omega \circ [\top, \perp] = [\top, \perp] \circ \gamma$.
En consecuencia $[\top, \perp]$ es un isomorfismo en **M-Set**.Con lo cual, queda verificada **(1)**.
Ahora verifiquemos **(2)**. Supongamos entonces que **M** es un grupo, y sea $B \subseteq M$ un ideal izquierdo de **M** tal que $B \neq \emptyset$.
Luego, debe existir al menos un elemento $x \in B \subseteq M$ y como **M** es grupo, entonces sabemos que existe $x^{-1} \in M$ de tal manera que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.
Veamos que B debe ser M.
Sea $m \in M$, dado que B es ideal izquierdo de **M** y $m * x^{-1} \in M$ (pues $m, x^{-1} \in M$), entonces $(m * x^{-1}) * x \in B$, lo que implica que $m * (x^{-1} * x) \in B$, es decir, $m * e \in B$, por lo tanto $m \in B$. Así $B = M$.
Recíprocamente, ahora supongamos que $L_{\mathbf{M}} = \{\emptyset, M\}$.
Sea $m \in M$, queremos demostrar que existe $n \in M$ tal que $n * m = m * n = e$.
Para ello, consideremos el siguiente conjunto $T = \{m * s : s \in M\}$.
Afirmamos que T es un ideal izquierdo de **M**. En efecto, sean $t \in T$ y $r \in M$, entonces existe $s \in M$ de tal manera que $t = m * s$. Lo que implica que $r * t = r * (m * s) = (r * m) * s = m * (r * s)$. Por tanto $r * t \in T$, con lo que T es ideal izquierdo de M, y como $T \neq \emptyset$ (pues notemos que $m \in T$), entonces $T = M$.
En consecuencia $e \in T$, es decir, existe $n \in M$ de tal manera que $e = m * n = n * m$. Con lo cual **M** es un grupo.
A partir de las afirmaciones **(1)** y **(2)** se concluye por tanto que **M-Set** es un topos clásico si y sólo si **M** es un grupo.

■

El teorema anterior nos proporciona una manera de construir topos no clásicos. Únicamente es necesario elegir un monoide conmutativo que no sea grupo.
Consideremos el conjunto $\{0, 1\}$ cuyos únicos elementos son los números naturales 0 y 1. Con este conjunto definimos el monoide conmutativo $\mathbf{M}_2 = (\{0, 1\}, \cdot, 1)$ en donde $\cdot$ está definida como sigue

$$\begin{gathered} 1 \cdot 1 = 1 \\ 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0 \end{gathered}$$

$\mathbf{M}_2$ es un monoide con identidad 1, en el que el elemento 0 no tiene inverso.
Con $\mathbf{M}_2$ obtenemos el topos $\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}$, que llamaremos simplemente **topos** $\mathbf{M}_2$.
Por el teorema anterior sabemos que este topos no es clásico.

El conjunto de ideales izquierdos de $\mathbf{M}_2$, L_2, tiene tres elementos, a saber, $L_2 = \{\{0,1\}, \emptyset, \{0\}\}$. Por tanto $\Omega = (L_2, \omega)$, en donde ω es la acción de $\mathbf{M}_2$ sobre L_2 dada por $\omega(m, B) = \{n \in 2 : n \cdot m \in B\}$ para cualesquiera $m \in M$ y $B \in L_2$.
Dado que $\mathbf{M}_2$ no es clásico, entonces el morfismo $[\top, \bot]$ definido en el teorema anterior no es un isomorfismo. Para ver esto de manera más explícita, solamente hay que notar que $[\top, \bot]$ no es un epimorfismo.
Consideremos el $(\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}) - morfismo$ $f_\Omega : L_2 \to L_2$ dado por $f_\Omega(2) = f_\Omega(\{0\}) = 2$ y $f_\Omega(\emptyset) = \emptyset$.
Este morfismo cumple $f_\Omega \circ [\top, \bot] = id_\Omega \circ [\top, \bot]$, sin embargo $f_\Omega \neq id_\Omega$. Con lo que se observa que $[\top, \bot]$ no es epimorfismo, y por tanto queda explícito que no es un isomorfismo.
Además, $\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}$ es un topos bivaluado. En efecto, si $h : \mathbf{1} \to \Omega$ es un morfismo en $\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}$, entonces $h : \{0\} \to L_2$ es una función que cumple $\omega(0, h(0)) = h(\lambda_0(0)) = h(0)$.
Notemos que $\omega(0, \{0\}) = 2 \neq \{0\}$, lo que implica que $h(0) \neq \{0\}$, pues como vimos antes, $\omega(0, h(0)) = h(0)$. Esto quiere decir que $h(0) = 2$ o $h(0) = \emptyset$ (recordar que $L_2 = \{\emptyset, \{0\}, 2\}$), con lo que $h = \top$ o $h = \bot$. Por lo tanto, $\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}$ solamente tiene dos valores de verdad.
Como este topos no es clásico, entonces tampoco es bien potenciado. Lo que implica que se trata de un topos que no es clásico ni bien potenciado pero sí bivaluado.

Esta construcción nos proporciona un método para elaborar contraejemplos en muchas situaciones. La categoría $\mathbf{M}_2 - \mathbf{Set}$ es un tipo de contraejemplo bastante común dentro de la teoría de topos.

3.5. Monomorfismos y Epimorfismos

Usando nuestra noción de elemento de un $\mathcal{C}$-objeto a como un morfismo de la forma $\mathbf{1} \to a$, podemos proporcionar definiciones categóricas para los conceptos "función inyectiva" y "función sobreyectiva".

Definición 3.5.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$ y sea $f : a \to b$ un $\mathcal{C}$-morfismo. Entonces:
1.- f es **sobreyectivo** si y sólo si para cada morfismo $y : \mathbf{1} \to b$ existe algún morfismo $x : \mathbf{1} \to a$ de tal manera que $f \circ x = y$.

2.- f es **inyectivo** si y sólo si para cualesquiera morfismos $x, y : \mathbf{1} \to a$, si $f \circ x = f \circ y$, entonces $x = y$.

Teorema 3.5.1
Si $\mathcal{E}$ es un topos bien potenciado, entonces para un $\mathcal{E}$-morfismo $f : a \to b$ se cumplen las siguientes afirmaciones:
1.- f es sobreyectivo si y sólo si f es epimorfismo.
2.- f es inyectivo si y sólo si f es monomorfismo.

Demostración:
Verifiquemos **(1)**.
Supongamos que f es sobreyectivo. Sean $g, h : b \to c$ morfismos tales que $g \circ f = h \circ f$. Si $g \neq h$, entonces (puesto que $\mathcal{E}$ es bien potenciado) existe algún $y : \mathbf{1} \to b$ tal que $g \circ y \neq h \circ y$. Sin embargo f es sobreyectivo, con lo cual debe existir un morfismo $x : \mathbf{1} \to a$ de tal forma que $y = f \circ x$. Luego, $g \circ y = g \circ (f \circ x) = (g \circ f) \circ x = (h \circ f) \circ x = h \circ y$, lo que es una contradicción. Por ende, $g = h$ y así f es un epimorfismo.
Recíprocamente, supongamos que f es un epimorfismo. Sea $y : \mathbf{1} \to b$. Ahora formemos el sigiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & 1 \arrow[d, "y"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Entonces, p debe ser un epimorfismo (pues los productos fibrados preservan epimorfismos). Ahora, si c es un objeto cero, es decir $c \cong \mathbf{0}$, entonces p también será monomorfismo, con lo que $\mathbf{0} \cong \mathbf{1}$ y por tanto $\mathcal{E}$ sería degenerado. Así que c debe ser un objeto no cero, por tanto c es no vacío y con ello debe existir $z : \mathbf{1} \to c$. Si hacemos $x = q \circ z : \mathbf{1} \to a$, entonces

$$\begin{aligned} f \circ x &= f \circ (q \circ z) \\ &= (f \circ q) \circ z \\ &= (y \circ p) \circ z \\ &= y \circ (p \circ z) \\ &= y \circ id_{\mathbf{1}} = y \end{aligned}$$

Por lo tanto f es sobreyectivo.
Ahora verifiquemos **(2)**.
Supongamos que f es inyectivo. Sean $g, h : c \to a$ dos morfismos tales que $f \circ g = f \circ h$. Si $g \neq h$, entonces existe $x : \mathbf{1} \to c$ de tal manera que $g \circ x \neq h \circ x$. Luego, $f \circ g \circ x = f \circ h \circ x$. Además, dado que f es inyectivo y $g \circ x, h \circ x : \mathbf{1} \to a$, entonces $g \circ h = h \circ x$, lo cual es una contradicción. Por tanto $g = h$ y así f es un monomorfismo.
La proposición recíproca es una consecuencia de suponer que f es un monomorfismo. ■

Capítulo 4

Álgebra de subobjetos y lógica clásica

Uno de los primeros intereses en cualquier desarrollo sistemático de la teoría de conjuntos, una vez que se han definido sus reglas y axiomas básicos, es definir nuevos conjuntos mediante la llamada 'álgebra de clases". Esta comienza considerando conjuntos arbitrarios A, B, D, y con ellos se definen las operaciones:

* Intersección: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$
* Unión: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } a \in B\}$
* Complemento (relativo a D): $-A = \{x : x \in D \text{ y } x \notin A\}$

El conjunto potencia de un conjunto D, $\wp(D)$, junto con estas operaciones conforma lo que se conoce como "álgebra Booleana".
Notemos que las operaciones $\cap$, $\cup$, $-$, están definidas a partir de las palabras "y", "o", "no", con lo que sus propiedades estarán determinadas por el significado (o el comportamiento) de estos conectivos. Ese significado es lo que se conoce como las reglas de la lógica clásica, y son precisamente esas reglas las que hacen de $\wp(D)$ un álgebra Booleana. Además, las operaciones anteriores pueden ser caracterizadas por propiedades universales de morfismos, generando con ello un "álgebra" de subobjetos en cualquier topos. En algunos casos esta álgebra no será Booleana, pues no cumplirá ciertas propiedades, indicando con ello que la lógica del topos no es la misma que la lógica clásica.
Las reglas de la lógica clásica están representadas en **Set** mediante operaciones en el conjunto $2 = \{0, 1\}$, con lo cual es posible definirlas para cualquier topos $\mathcal{E}$ mediante el uso de su clasificador Ω en lugar de 2. Esto nos proporciona la lógica de $\mathcal{E}$, la cual caracterizará el comportamiento de los subobjetos en $\mathcal{E}$. Cuando esta lógica no cumple las propiedades que caracterizan la lógica clásica (es decir, la lógica de **Set**) entonces el álgebra de subobjetos en $\mathcal{E}$ no será Booleana.

En este capítulo traduciremos al lenguaje de los morfismos los principios de la lógica clásica para poder estudiar la lógica de cualquier topos $\mathcal{E}$; veremos que esta lógica no siempre es clásica y estudiaremos las propiedades que debe satisfacer $\mathcal{E}$ para que sí lo sea. Primero expondremos brevemente la lógica clásica tal y como la conoce cualquier estudiante de licenciatura, así que la exposición no será detallada y muchas pruebas se omitirán. El lector interesado en consultar una exposición mucho más completa puede consultar [**IML**].

4.1. Proposiciones y valores de verdad

Una **proposición** es simplemente una afirmación que tiene algún valor de verdad "verdadero" o "falso", y sólo uno. Por ejemplo "$2+2=4$" o "$2+2=5$". Si una proposición es verdadera, le asignamos el número 1 y si es falsa, le asociamos el número 0. El conjunto de valores de verdad es $2 = \{0, 1\}$.
Podemos formar nuevas proposiciones a partir de dos dadas, digamos α y β, mediante los conectivos "y", "o" y "no"
"α y β" se simboliza como $\alpha \wedge \beta$
"α o β" se simboliza como $\alpha \vee \beta$
"no α" se simboliza como $\sim \alpha$
Estas nuevas proposiciones se llaman **conjunción**, **disyunción** y **negación**, respectivamente. En adelante hablaremos de fórmulas en lugar de proposiciones.
El valor de verdad de estas proposiciones puede ser calculado a partir del valor de verdad de sus componentes mediante las siguientes reglas:

Negación La fórmula $\sim \alpha$ es verdadera (o lo que es lo mismo, le asociamos el número 1) cuando α es falsa (o recibe el número 0), y es falsa (0) cuando α es verdadera (1). Esto puede representarse mediante una tabla, conocida como **tabla de verdad** para la fórmula $\sim \alpha$, consiste simplemente de una lista de valores de verdad que indica qué valor recibe la fórmula compuesta a partir del valor de verdad de sus componentes (en caso de la negación, la única componente es α).

α	$\sim \alpha$
1	0
0	1

Esta tabla determina una función $\neg : 2 \to 2$ dada por:

$$\neg(1) = 0$$
$$\neg(0) = 1$$

Esta función es llamada **función verdad negación**.

Conjunción La fórmula $\alpha \wedge \beta$ es verdadera si y sólo si α es verdadera y también lo es β, en otro caso es falsa.

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
0	0	0
1	0	0
0	1	0

Esta tabla determina una función $\cap : 2 \times 2 \to 2$ dada por:

$$\cap((1,1)) = 1$$
$$\cap((1,0)) = 0$$
$$\cap((0,1)) = 0$$
$$\cap((0,0)) = 0$$

Esta función recibe el nombre de **función verdad conjunción**.

Disyunción La fórmula $\alpha \vee \beta$ es verdadera cuando al menos alguna de sus componentes (α o β) es verdadera, y es falsa sólo si ambas componentes son falsas.

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La correspondiente **función de verdad disyunción** es $\cup : 2 \times 2 \to 2$ dada por:

$$\cup((1,1)) = 1$$
$$\cup((1,0)) = 1$$
$$\cup((0,1)) = 1$$
$$\cup((0,0)) = 0$$

Implicación El conectivo “implicación” relaciona dos fórmulas mediante afirmaciones del tipo α **implica** β, que se simboliza $\alpha \supset \beta$.
La interpretación clásica de este conectivo es que $\alpha \supset \beta$ no puede ser verdadera si a partir de algo verdadero se implica algo falso. Así que $\alpha \supset \beta$ es falsa si α es verdadera pero β falsa, en cualquier otro caso es verdadera.

α	β	$\alpha \supset \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La función de verdad **implicación** es $\Rightarrow$: $2 \times 2 \to 2$ dada por:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ((1,1)) = 1 \\ &\Rightarrow ((1,0)) = 0 \\ &\Rightarrow ((0,1)) = 1 \\ &\Rightarrow ((0,0)) = 1 \end{aligned}$$

Mediante una sucesiva aplicación de las reglas anteriores es posible calcular el valor de verdad de cualquier fórmula compuesta, construyendo para ello una tabla de valores de verdad con ayuda de estas reglas.
Una **tautología** es una fórmula cuya tabla le asigna solamente el valor de verdad 1.
El concepto de tautología expresa entonces la idea de lo que comúnmente se denomina "ley lógica". Una proposición que tiene la forma de una fórmula que es verdadera por razones puramente lógicas, con independencia de los objetos a los que hace referencia. A partir de todo esto, estamos interesados en describir un sistema en el que podamos "calcular" o "derivar" tautologías o verdades lógicas partiendo de unas pocas previamente dadas. Dicho sistema se llama **cálculo proposicional** y lo denotaremos como **PL**.
Este sistema está compuesto por tres elementos básicos: un alfabeto, unas reglas para formar fórmulas y unos axiomas o fórmulas primarias que nos sirven para deducir o calcular más fórmulas.

Alfabeto de PL Está compuesto por:
(i) una lista infinita π_0, π_1, π_2, ..., de símbolos llamados **variables proposicionales**.
(ii) los símbolos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\supset$.
(iii) símbolos de puntuación: "(", ")".

Reglas de formación de PL-fórmulas En PL podemos formar más fórmulas mediante la aplicación de alguna de las siguientes reglas:
(1) cada variable proposicional es una PL-fórmula.
(2) si α es una PL-fórmula, también lo es $\sim \alpha$.
(3) si α y β son PL-fórmulas, entonces también lo son $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \supset \beta$.

Agrupamos a las variables proposicionales y a las PL-fórmulas mediante los siguientes conjuntos:

$$\Phi_0 = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...\}$$

$$\Phi = \{\alpha : \alpha \text{ es una PL-fórmula}\}$$

Para poder desarrollar una teoría del significado o semántica para las PL-fómulas usamos las definiciones dadas anteriormente para las funciones verdad. Con ello, una **valuación** es cualquier función $\mathbf{v}$ que asocie elementos de Φ_0 con elementos del conjunto $\{0, 1\}$ (valores de verdad). Estas funciones asignan un valor de verdad $\mathbf{v}(\pi_i)$ a cada variable proposicional y con ello nos proporcionan un "significado" o una "interpretación" para los elementos de Φ_0. Estas interpretaciones son extendidas a las fórmulas, es decir, cualquier valuación v nos proporciona una manera de definir una función $\bar{v} : \Phi \to 2$ mediante la definición de las funciones verdad y las siguientes reglas:
(a) $\bar{v}(\sim \alpha) = \neg(v(\alpha))$
(b) $\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \cap((v(\alpha), v(\beta)))$
(c) $\bar{v}(\alpha \vee \beta) = \cup((v(\alpha), v(\beta)))$
(d) $\bar{v}(\alpha \supset \beta) = \Longrightarrow ((v(\alpha), v(\beta)))$

Con esto, una fórmula α es una **tautología** si y sólo si $\bar{v}(\alpha) = 1$ para cada valuación v.

Notación 4
Si una fórmula α es tautología lo indicamos mediante el símbolo $\vDash \alpha$.

Axiomas de PL Un sistema axiomático se define mediante unas fórmulas que llamamos **axiomas** y un conjunto de **reglas de inferencia** que son métodos u operaciones entre fórmulas para generar nuevas fórmulas a partir de los axiomas. Las fórmulas generadas mediate la aplicación de las reglas de inferencia se conocen como **teoremas**. Existen varios sistemas axiomáticos para PL, aquí definiremos uno que consta de 12 axiomas y una regla de inferencia (a este sistema lo denotaremos como **CL**). Todas las fórmulas que sean instancias de alguno de estos doce axiomas, también son considerados axiomas de CL:
1.- $\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$
2.- $(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$
3.- $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma)$
4.- $((\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma)$
5.- $\beta \supset (\alpha \supset \beta)$
6.- $(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta)) \supset \beta$
7.- $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$
8.- $(\alpha \vee \beta) \supset (\beta \vee \alpha)$
9.- $((\alpha \supset \gamma) \wedge (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \vee \beta) \supset \gamma)$
10.- $\sim \alpha \supset (\alpha \supset \beta)$
11.- $((\alpha \supset \beta) \wedge (\alpha \supset \sim \beta)) \supset \sim \alpha$
12.- $\alpha \vee \sim \alpha$
La regla de inferencia es conocida como **Modus Ponens**:
(MP): A partir de las fórmulas α y $\alpha \supset \beta$, la fórmula β puede ser obtenida. Esto se escribe así:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha \supset \beta\end{array}}{\beta}$$

Notación 5
Mediante el símbolo $\vdash_{CL} \alpha$ indicaremos que la fórmula α ha sido obtenida como el resultado de aplicar MP a los axiomas, es decir, es un CL-teorema.

El siguiente hecho nos garantiza que todas las fórmulas obtenidas mediante MP a partir de los axiomas anteriores son tautologías, y que además todas las tautologías que se pueden obtener mediante las funciones de verdad también son teoremas (es decir, se pueden obtener mediante MP) en CL.

Teorema 4.1.1
Para cada fórmula α se cumple: $\vdash_{CL} \alpha$ si y sólo si $\models \alpha$.

Este resultado es conocido como teorema de robustez y completitud, para poder revisar la prueba así como la construcción de las funciones de verdad y de CL de una manera más detallada, ver [**IML**].

4.2. Álgebras Booleanas

Definición 4.2.1
1.- Un conjunto parcialmente ordenado $\mathbf{P} = (P, \sqsubseteq)$ es una **retícula** si y sólo si para cualesquiera dos elementos $x, y \in P$ existen $\inf\{x, y\}$ y $\sup\{x, y\}$.

2.- Un **mínimo** para una retícula $\mathbf{P}$ es un elemento $0 \in P$ tal que $0 \sqsubseteq x$ para cualquier $x \in P$, y **máximo** es un elemento $1 \in P$ que cumple que $x \sqsubseteq 1$ para todo $x \in P$.

3.- Una retícula $\mathbf{P}$ se dice que es **acotada** si tiene elemento mínimo y máximo.

Notación 6
En una retícula $\mathbf{P}$ denotaremos como $x \sqcap y$ al elemento $\inf\{x, y\}$ y mediante $x \sqcup y$ al elemento $\sup\{x, y\}$, para cualesquiera $x, y \in P$.

Desde un punto de vista categórico, una retícula $\mathbf{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado que, visto como categoría, tiene productos y coproductos finitos. Si la retícula es acotada, el elemento mínimo 0 es un objeto inicial y el elemento máximo 1 es un objeto termial.

Ejemplos

1.- Para cualquier conjunto D, $(\wp(D), \subseteq)$ es una retícula acotada. El elemento mínimo es $\emptyset$, el máximo es D y $\sup\{A, B\} = A \cup B$, $\text{ínf}\{A, B\} = A \cap B$ para cualesquiera $A, B \in \wp(D)$.

2.- El conjunto $\{0, 1\} = 2$ junto con la relación usual de orden entre números naturales, $0 \leqslant 1$, es una retícula acotada, en la que 0 es el mínimo, 1 es el máximo y $\sup\{x, y\} = \cup((x, y))$ (función verdad disyunción), $\text{ínf}\{x, y\} = \cap((x, y))$ (función verdad conjunción), para todo $x, y \in 2$.

3.- Si I es un espacio topológico y Θ es su colección de conjuntos abiertos, entonces $(\Theta, \subseteq)$ es una retícula acotada definida exactamente como el ejemplo 1.

4.- $(L_{\mathbf{M}}, \subseteq)$ es una retícula acotada, en donde $L_{\mathbf{M}}$ es el conjunto de ideales izquierdos del monoide $\mathbf{M}$. Esta retícula está definida exactamente como el ejemplo 1.

Definición 4.2.2
Decimos que una retícula $\mathbf{P}$ es **distributiva** si y sólo si satisface las siguientes dos condiciones:

(i) $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
(ii) $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

para cualesquiera $x, y, z \in P$.

En una retícula acotada, decimos que un elemento $y \in P$ es un **complemento** para otro elemento x si y sólo si $x \sqcap y = 0$ y $x \sqcup y = 1$.
Una retícula acotada es **complementada** si para cada elemento $x \in P$ existe $y \in P$ de manera tal que y es un complemento para x.

Ejemplos

1.- $(\wp(D), \subseteq)$ es una retícula complementada para cada conjunto D.

2.- $(2, \leqslant)$ es una retícula complementada. El complemento de $x \in 2$ es el elemento $\neg(x) \in 2$.

3.- En la retícula $(\Theta, \subseteq)$ el único candidato para ser el complemento de un conjunto abierto $U \in \Theta$ es su conjunto complemento $-U$. Sin embargo $-U \notin \Theta$, a menos que U sea un conjunto cerrado también. Con lo cual, $(\Theta, \subseteq)$ será una retícula complementada sólo si cada conjunto abierto también es un conjunto cerrado.

4.- Si $\mathbf{M}$ es el monoide $\mathbf{M}_2 = (2, \cdot, 1)$, entonces en $(L_{\mathbf{M}}, \subseteq)$ el elemento $\{0\}$ no tiene complemento en la retícula, pues $\{1\} \notin L_{\mathbf{M}}$.

Observación 14
En una retícula distributiva cada elemento tiene a lo más un complemento.

Definición 4.2.3
Un **álgebra Booleana** (**BA**) es una retícula complementada y distributiva.

Notemos que $(\wp(D), \subseteq)$ y $(2, \leqslant)$ definidos anteriormente son ejemplos de álgebras Booleanas.

Notación 7
Si $\mathbf{B} = (B, \sqsubseteq)$ es un álgebra Booleana, entonces cada $x \in B$ tiene exactamente un complemento, que denotaremos como x'.

Observación 15
En cualquier álgebra Booleana $\mathbf{B}$ se cumplen las siguientes propiedades para todo $x, y \in B$:
1.- $(x')' = x$
2.- $x \sqcap y = 0$ si y sólo si $y \sqsubseteq x'$
3.- $x \sqsubseteq y$ si y sólo si $y' \sqsubseteq x'$
4.- $(x \sqcap y)' = x' \sqcup y'$
5.- $(x \sqcup y)' = x' \sqcap y'$

Cada ágebra Booleana $\mathbf{B}$=$(B, \sqsubseteq)$ tiene definidas unas operaciones $\sqcap$, $\sqcup$, $'$ que se corresponden con las funciones verdad conjunción, disyunción y negación. Con lo cual también es posible definir en $\mathbf{B}$ una operación que se corresponda con la función implicación. Dado que la fórmula $\sim \alpha \vee \beta$ tiene exactamente la misma tabla de valores de verdad que $\alpha \supset \beta$, entonces es natural definir para cualesquiera $x, y \in B$:

$$x \Rightarrow y = x' \sqcup y$$

Las operaciones en $\mathbf{B}$ pueden ser usadas para generalizar la semántica definida para PL anteriormente.
Una **B-valuación** es cualquier función de la forma $v : \Phi_0 \to B$. Cada una de estas funciones determina otra función $\bar{v} : \Phi \to B$ mediante las siguientes reglas:
(a) $\bar{v}(\sim \alpha) = v(\alpha)'$
(b) $\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$
(c) $\bar{v}(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \sqcup v(\beta)$

(d) $\bar{v}(\alpha \supset \beta) = v(\alpha)' \sqcup v(\beta)$

Decimos que una fórmula α es **B-válida** (lo cual denotamos como $\mathbf{B} \vDash \alpha$) si y sólo si para cada **B**-valuación v se cumple que $\bar{v}(\alpha) = 1$, en donde 1 es el elemento máximo de **B**.
Notemos que una 2-valuación es precisamente una valuación y por tanto $2 \vDash \alpha$ si y sólo si α es una tautología.
Los elementos mínimo y máximo en **B** nos proporcionan una copia isomorfa de 2. Es decir, 2 es un subobjeto de **B** en la categoría de álgebras Booleanas $\mathcal{BA}$.
Por lo tanto, si $2 \vDash \alpha$ entonces $\mathbf{B} \vDash \alpha$.
Una fórmula α es **BA-válida** si es **B**-válida para cualquier álgebra Booleana **B** (y por lo tanto será 2-váida).
En consecuencia, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1- $\vdash_{CL} \alpha$
2.- α es una tautología
3.- α es **B**-válida para alguna álgebra Booleana **B** (basta considerar $\mathbf{B}=(2, \leqslant)$)
4.- α es **BA**-válida

4.3. Funciones de verdad como morfismos

Cada una de las funciones verdad definidas anteriormente tiene como codominio al conjunto 2, por tanto, cada una de ellas es la función característica de algún subconjunto de su dominio. Esta observación nos proporciona una definición de estas funciones en términos de morfismos dentro de cualquier topos. Para ello, definamos como funciones características de ciertos conjuntos a las funciones verdad y categoricemos (es decir, definamos sólo en términos de morfismos) sus definiciones.

Negación La función verdad negación $\neg : 2 \to 2$ es la función característica del conjunto $\{x : \neg(x) = 1\} = \{0\} \subseteq 2$. Por lo tanto, en **Set** tenemos el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "falsedad(f)"] \arrow[d] & 2 \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "verdad(v)"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Conjunción La función verdad conjunción $\cap : 2 \times 2 \to 2$ es la función característica del conjunto $A = \{(1, 1)\}$. Es decir, $\cap = \chi_A$.

El conjunto A tiene solamente un elemento, con lo cual es posible identificarlo con el morfismo producto $(v, v) : 1 \to 2 \times 2$ que manda a 0 al par $(v(0), v(0)) = (1, 1)$ (recordemos que v es la función "verdad" en **Set**). Por lo tanto el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "(v,v)"] \arrow[d] & 2 \times 2 \arrow[d, "\cap"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Implicación La función verdad implicación $\Rightarrow : 2 \times 2 \to 2$ es la función característica del conjunto $\leq = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$. Con lo cual, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \leq \arrow[r, hook] \arrow[d] & 2 \times 2 \arrow[d, "\Rightarrow"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & 2 \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.
Notemos que el conjunto $\leq$ es la relación de orden parcial sobre el ordinal 2. Es decir, $\leq = \{(x, y) : x \leqslant y en 2\}$. Además, el morfimso inclusión $i : \leq \hookrightarrow 2 \times 2$ es el igualador de los morfismos

$$\begin{tikzcd} 2 \times 2 \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "pr_1"'] & 2 \end{tikzcd}$$

en donde pr_1 es la función dada por $pr_1((x, y)) = x$ (primera proyección del producto 2×2).

Disyunción La función $\cup : 2 \times 2 \to 2$ coincide con la función característica χ_D, donde $D = \{(1,1), (1,0), (0,1)\}$.
Para poder describir a D en términos de morfismos (como en el caso de las funciones anteriores) notemos que $D = A \cup B$, en donde $A = \{(1,1), (1,0)\}$ y $B = \{(1,1), (0,1)\}$. Con esto se tiene que el conjunto $A \subseteq 2 \times 2$ puede ser identificado con la imagen del morfismo producto $(v, id_2) : 2 \to 2 \times 2$, que está dado por $(v, id_2)(0) = (v(0), id_2(0)) = (1, 0)$ y $(v, id_2)(1) = (v(1), id_2(1)) = (1, 1)$. De manera análoga se identifica a B con el morfismo (id_2, v). Por lo tanto, podemos formar el siguiente diagrama de coproducto:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[dr, "{(v,id_2)}"'] & 2+2 \arrow[d, dashed, "f"] & 2 \arrow[l] \arrow[dl, "{(id_2,v)}"] \\ & 2\times 2 & \end{tikzcd}$$

en cual $f = [(v, id_2), (id_2, v)]$ y por tanto $D = imf$.

De esta forma, hemos proporcionado definiciones categóricas para las funciones verdad, cada una de ellas está dada por una propiedad universal para algún diagrama (en caso de la implicación, el par $(\leq, i)$ es un igualador y en el caso de la disyunción, formamos el coproducto $2+2$ para definir $D = imf$).

4.4. Morfismos verdad en un topos

Si $\mathcal{E}$ es un topos con clasificador de subobjetos $\top : \mathbf{1} \to \Omega$, es posible definir en él una versión categórica de las funciones verdad.

Negación $\neg : \Omega \to \Omega$ es el único $\mathcal{E}$-morfismo que hace del siguiente diagrama un producto fibrado en $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, $\neg = \chi_\perp$.

Conjunción $\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ es el carácter en $\mathcal{E}$ del morfismo producto $(\top, \top) : 1 \to \Omega \times \Omega$

$$\begin{tikzcd} 1\times 1 \arrow[r, "{(\top,\top)}"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\cap"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, $\cap = \chi_{(\top,\top)}$.

Disyunción $\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ es el carácter del $\mathcal{E}$-morfismo

$$[(\top, id_\Omega), (id_\Omega, \top)] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$$

que es el coproducto de los morfismos $(\top, id_\Omega)$ y $(id_\Omega, \top)$.

$$\begin{tikzcd} \Omega + \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cup"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En donde $f = [(\top, id_\Omega), (id_\Omega, \top)]$

Implicación $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ es el carácter del morfismo igualador

$$e : \leq \rightarrowtail \Omega \times \Omega$$

de los morfismos

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\cap"] \arrow[r, shift right, "pr_1"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ejemplos

1.- En **Set** y en **FinSet** los morfismos verdad son las clásicas funciones verdad.

2.- En **Bn(I)**, donde $\Omega = (2 \times I, p_I)$, el tallo Ω_i sobre i es el conjunto $2 \times \{i\}$ que es isomorfo a 2. Con lo cual, los morfismos verdad son esencialmente haces de funciones verdad clásicas. Esto es, $\neg : \Omega \to \Omega$ es la función que va de $2 \times I$ en $2 \times I$ dada por $\neg((1, i)) = (0, i)$ y $\neg((0, i)) = (1, i)$. Análogamente
$\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ y está dada por $\cap((x, i), (y, i)) = (\cap_{Set}(x, y), i)$
$\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ y está dada por $\cup((x, i), (y, i)) = (\cup_{Set}(x, y), i)$
$\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ y está dada por $\Rightarrow((x, i), (y, i)) = (\Rightarrow_{Set}(x, y), i)$
Mientras que en **Set** el clasificador $\Omega = 2$ es un álgebra Booleana, en **Bn(I)** el clasificador es un haz de álgebras Booleanas con índices en el conjunto I.

3.- En **M**-Set, donde $\Omega = (L_{\mathbf{M}}, \omega)$, tenemos que:
$\neg : L_{\mathbf{M}} \to L_{\mathbf{M}}$ está dada por

$$\neg(B) = \{m \in M : \omega_m(B) = \emptyset\}$$

$\cap : L_{\mathbf{M}} \times L_{\mathbf{M}} \to L_{\mathbf{M}}$ es una función definida como

$$\cap((B, C)) = B \cap C \text{ (intersección usual de conjuntos)}$$

$\cup : L_{\mathbf{M}} \times L_{\mathbf{M}} \to L_{\mathbf{M}}$ es una función definida mediante la regla

$$\cup((B,C)) = B \cup C \text{ (unión usual de conjuntos)}$$

$\Rightarrow: L_{\mathbf{M}} \times L_{\mathbf{M}} \to L_{\mathbf{M}}$ está dada como

$$\Rightarrow((B,C)) = \{m \in M : \omega_m(B) \subseteq \omega_m(C)\}$$

Después de estas construcciones es posible generar un tipo de "lógica proposicional" para morfismos en un topos $\mathcal{E}$. Recordemos que los valores de verdad en un topos son los morfismos $\mathbf{1} \to \Omega$ y que Φ_0 y Φ denotan al conjunto de variables proposicionales y al conjunto de PL-fórmulas, respectivamente. Entonces

Definición 4.4.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos con clasificador $\top : \mathbf{1} \to \Omega$.

1.- Una **$\mathcal{E}$-valuación** es una función $v : \Phi_0 \to \mathcal{E}(\mathbf{1}, \Omega)$ que asocia a cada variable proposicional π_i con un valor de verdad $v(\pi_i) : \mathbf{1} \to \Omega$.

2.- Dada cualquier $\mathcal{E}$-valuación v, definimos la función $\bar{v} : \Phi \to \mathcal{E}(\mathbf{1}, \Omega)$ mediante las siguientes reglas:
(a) $\bar{v}(\sim \alpha) = \neg \circ v(\alpha)$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "v(\alpha)"] \arrow[dr, "\bar{v}(\sim\alpha)"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
 & \Omega
\end{tikzcd}$$

(b) $\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ (v(\alpha), v(\beta))$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "v(\alpha)"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "v(\beta)"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[d, "\cap"] & \Omega \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

En donde $f = (v(\alpha), v(\beta))$.

(c) $\bar{v}(\alpha \vee \beta) = \cup \circ (v(\alpha), v(\beta))$

(d) $\bar{v}(\alpha \supset \beta) = \Rightarrow \circ(v(\alpha), v(\beta)$

3.- Decimos que una PL-fórmula α es **$\mathcal{E}$-válida** (lo cual denotaremos mediante $\mathcal{E} \vDash \alpha$) si y sólo si para cada $\mathcal{E}$-valuación v, se cumple que $\bar{v}(\alpha) = \top : \mathbf{1} \to \Omega$.

Mostraremos que el sistema CL es completo respecto a la $\mathcal{E}$-validez, es decir, que cada fórmula $\mathcal{E}$-válida es un CL-teorema, sin importar quién sea $\mathcal{E}$. Sin embargo, la afirmación recíproca no se cumple en general para cualquier topos $\mathcal{E}$, pues existen ejemplos de topos $\mathcal{E}$ para los cuales no se verifica la $\mathcal{E}$-validez del axioma $\alpha \vee \sim \alpha$ de CL, conocido como "principio del tercio excluso". Este tipo de topos se construirán en el siguiente capítulo.

Los siguientes resultados muestran que la composición de los morfismos $\top$ (verdad) y $\perp$ (falsedad) con los morfismos *verdad* en un topos $\mathcal{E}$ se comporta de manera similar a lo que sucede en **Set**. En otras palabras, en cualquier topos sucede que el morfismo negación aplicado a $\top$ (verdad) es exactamente el morfismo $\perp$ (falsedad), el morfismo conjunción aplicado al producto de $\top$ con $\top$ es exactamente el mismo que el morfismo $\top$, etc. (esto puede interpretarse como que los morfismos verdad combinados con los morfismos $\top$ y $\perp$ respetan la idea clásica de que una negación de algo verdadero es algo falso, la conjunción de dos cosas verdaderas es algo verdadero, etc.).

Notación 8
Si $(f, g) : \mathbf{1} \to \Omega \times \Omega$ es un par de valores de verdad (o equivalentemente es el producto de los valores de verdad $f : \mathbf{1} \to \Omega$ y $g : \mathbf{1} \to \Omega$), escribimos:

$f \cap g$ para referirnos a la composición $\cap \circ (f, g) : \mathbf{1} \to \Omega$
$f \cup g$ para referirnos a la composición $\cup \circ (f, g)$
$f \Rightarrow g$ para referirnos a la composición $\Rightarrow \circ (f, g)$

Teorema 4.4.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$, los morfismos $\top$ y $\perp$ satisfacen las siguientes ecuaciones:
(a)
$\neg \circ \perp = \top$
$\neg \circ \top = \perp$
(b)
$\cap \circ (\top, \top) = \top \cap \top = \top$
$\cap \circ (\perp, \perp) = \perp \cap \perp = \perp$
$\cap \circ (\top, \perp) = \top \cap \perp = \perp$
$\cap \circ (\perp, \top) = \perp \cap \top = \perp$
(c)
$\cup \circ (\top, \top) = \top \cup \top = \top$
$\cup \circ (\top, \perp) = \top \cup \perp = \top$
$\cup \circ (\perp, \top) = \perp \cup \top = \top$

$\cup \circ (\bot, \bot) = \bot \cup \bot = \bot$
(d)
$\Rightarrow \circ(\top, \top) = \top \Rightarrow \top = \top$
$\Rightarrow \circ(\bot, \bot) = \bot \Rightarrow \bot = \top$
$\Rightarrow \circ(\bot, \top) = \bot \Rightarrow \top = \top$
$\Rightarrow \circ(\top, \bot) = \top \Rightarrow \bot = \bot$

<u>**Demostración:**</u> Únicamente probaremos que se cumplen las ecuaciones de **(a)**, pues el resto de ecuaciones se obtienen realizando las construcciones correspondientes mediante la aplicación de las definiciones para los morfismos verdad.
(a) La ecuación $\neg \circ \bot = \top$ se sigue del diagrama de producto fibrado que define al morfismo $\neg$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\bot"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Para ver que $\neg \circ \top = \bot$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
1 \arrow[r, "\bot"'] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

El cuadrado de abajo es el producto fibrado que define al morfismo $\neg$. El cuadrado de arriba es el producto fibrado que define al morfismo $\bot$ como el carécter de $! : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$. Por lo tanto, el rectángulo que forman ambos cuadrados es un producto fibrado y con ello obtenemos que $\neg \circ \top$ es el carácter $! : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$ y por tanto $\neg \circ \top = \bot$.

■

Consideremos ahora una valuación $v : \Phi_0 \to 2$ clásica. Con ella definimos una

$\mathcal{E}$-valuación $v' : \Phi_0 \to \mathcal{E}(\mathbf{1}, \Omega)$ mediante la siguiente regla:

$$v'(\pi_i) = \begin{cases} \top \text{ si } v(\pi_i) = 1 \\ \bot \text{ si } v(\pi_i) = 0 \end{cases}$$

Lema 4.4.1
Para cualquier fórmula $\alpha \in \Phi$, tenemos
(a) $v'(\alpha) = \top$ o $v'(\alpha) = \bot$.
(b) $v'(\alpha) = \top$ si y sólo si $\bar{v}(\alpha) = 1$.

Demostración: Sea α una fórmula en el conjunto Φ.
(a) Realizaremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula α. Para esto, notemos que si $\alpha = \pi_i$ (es decir, si nuestra fórmula es una variable proposicional) el resultado es válido por la sola definición de v'.
Ahora, supongamos que $\alpha =\sim \beta$ y que la afirmación se verifica para β, es decir, $v'(\beta) = \top$ o $v'(\beta) = \bot$. Luego, $v'(\alpha) = v'(\sim \beta) = \neg \circ \top = \bot$, si $v'(\beta) = \top$, o $v'(\sim \beta) = \neg \circ \bot = \top$, si $v'(\beta) = \bot$.
Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$ y además la afirmación se verifica para β y γ, entonces $v'(\alpha) = v'(\beta \wedge \gamma) = \top \cap \top = \top$, si $v'(\beta) = \top$ y $v'(\gamma) = \top$, en otro caso $v'(\beta \wedge \gamma) = \bot$.
Considerando el teorema anterior, se procede de manera análoga para el caso en que $\alpha = \beta \vee \gamma$ o $\alpha = \beta \supset \gamma$.
(b) Se realiza de manera similar al apartado anterior.

■

Este resultado nos permite extender la $\mathcal{E}$-valuación v' (definida únicamente para variables proposicionales) al conjunto de fórmulas Φ.

Teorema 4.4.2
Para cualquier topos $\mathcal{E}$ y cualquier PL-fórmula α, si $\mathcal{E} \vDash \alpha$ entonces $\vdash_{CL} \alpha$.

Demostración: Sea v cualquier valuación clásica y v' su $\mathcal{E}$-valuación asociada como antes. Puesto que $\mathcal{E} \vDash \alpha$, entonces tenemos que $v'(\alpha) = \top$, luego (por el lema anterior) $\bar{v}(\alpha) = 1$. Por tanto α es asociada con 1 mediante cualquier valuación clásica v, con lo cual α es una tautología. Así, $\vdash_{CL} \alpha$.

■

Teorema 4.4.3
Si $\mathcal{E}$ es un topos bivalente y α cualquier PL-fórmula, entonces $\mathcal{E} \vDash \alpha$ si y sólo si $\vdash_{CL} \alpha$.

Demostración: El teorema anterior nos proporciona la primera implicación de este teorema. Para la implicación recíproca, supongamos que $\vdash_{CL} \alpha$, es decir, α es una tautología. Si v' es cualquier $\mathcal{E}$-valuación, definimos una valuación clásica $v : \Phi_0 \to 2$ mediante la regla $v(\pi_i) = 1$ si $v'(\pi_i) = \top$ y $v(\pi_i) = 0$ si $v'(\pi_i) = \bot$. Dado que $\mathcal{E}$ es un topos bivalente, $\top$ y $\bot$ son los únicos valores de verdad en $\mathcal{E}$, así que la valuación v está bien definida. Luego, v y v' se comportan como en el Lema 4.4.1 , con lo cual se cumple que $v'(\alpha) = \top$, ya que $v(\alpha) = 1$.

■

Este último resultado sugeriría que un topos bivalente se comporta de una manera más parecida a **Set**. Sin embargo, hemos visto que $\mathbf{M}_2$ es bivalente y difiere bastante de **Set**, pues no es clásico. Por otra parte, el topos $\mathbf{Set}^2$ no es bivalente, pero sí es clásico. Podríamos concluir entonces que la condición de bivalencia no es una caracterización categórica de la teoría de conjuntos clásica.

4.5. Operaciones entre subobjetos

La estructura de $(\wp(D), \subseteq)$ como álgebra Booleana depende de las reglas de la lógica clásica, es decir, del comportamiento que hemos definido para los conectivos lógicos "y", "o", "no". Las operaciones entre conjuntos son consecuencia de componer funciones verdad con funciones características. Por tanto, es posible afirmar que el álgebra de conjuntos depende del álgebra entre morfismos especiales en **Set**. Como se muestra a continuación.

Teorema 4.5.1
Si A y B son subconjuntos de D, con funciones características $\chi_A : D \to 2$ y $\chi_B : D \to 2$ respectivamente, entonces:
1.- $\chi_{-A} = \neg \circ \chi_A$.
2.- $\chi_{A\cap B} = \cap \circ (\chi_A, \chi_B) = \chi_A \cap \chi_B$.
3.- $\chi_{A\cup B} = \cup \circ (\chi_A, \chi_B) = \chi_A \cup \chi_B$.

Demostración:
1.- Si $\chi_{-A}(x) = 1$ para cualquier $x \in D$, entonces $x \in -A$, con lo cual $x \notin A$, por tanto $\chi_A(x) = 0$. En consecuencia $\neg(\chi_A(x)) = \neg(0) = 1 = \chi_{-A}(x)$. Así, $\neg \circ \chi_A = \chi_{-A}$.
Si $\chi_{-A}(x) = 0$ para todo $x \in D$, entonces $x \notin -A$ y por tanto $x \in A$, con lo cual $\chi_A(x) = 1$. Entonces $\neg(\chi_A(x)) = \neg(1) = 0 = \chi_{-A}(x)$. Por tanto, $\neg \circ \chi_A = \chi_{-A}$.

2.- Sea $x \in D$.
Si $\chi_{A\cap B}(x) = 1$, entonces $x \in A \cap B$, con lo que $x \in A$ y $x \in B$, en consecuencia $\chi_A(x) = 1$ y $\chi_B(x) = 1$. Por lo tanto, $\cap \circ (\chi_A, \chi_B)(x) = \cap \circ (\chi_A(x), \chi_B(x)) = \cap((1, 1)) = 1 = \chi_{A\cap B}(x)$. Con lo cual $\chi_{A\cap B} = \cap \circ (\chi_A, \chi_B) = \chi_A \cap \chi_B$.
Si $\chi_{A\cap B}(x) = 0$, entonces $x \notin A \cap B$, por lo tanto $x \notin A$ o $x \notin B$, con lo cual $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\chi_A(x) = 0$. Entonces, si $\chi_B(x) = 0$, tenemos que $\cap \circ (\chi_A, \chi_B)(x) = \cap((0, 0)) = 0 = \chi_{A\cap B}(x)$. Si $\chi_B(x) = 1$, entonces $\cap \circ (\chi_A, \chi_B)(x) = \cap((0, 1)) = 0 = \chi_{A\cap B}(x)$.
Análogamente se verifica el resultado suponiendo ahora que $\chi_B(x) = 0$. Por lo tanto, en cualquier caso $\cap \circ (\chi_A, \chi_B) = \chi_{A\cap B}$.

3.- Esta ecuación se obtiene como en (2) tomando en cuenta ahora la definición de $\cup$. ■

El teorema anterior sugiere una manera de definir por medio de morfismos las operaciones entre conjuntos, obteniendo con ello una generalización o una definición categórica para cualquier objeto en un topos.

Definición 4.5.1
Sea $\mathcal{E}$ un topos y d un $\mathcal{E}$-objeto. Definimos las siguientes operaciones para los elementos de la colección $\mathbf{Sub}(d)$ de subobjetos de d:

1.- Complemento Dado $f : a \rightarrowtail d$ un subobjeto de d, el **complemento** de f es el subobjeto $-f : -a \rightarrowtail d$ cuyo carácter es el morfismo $\neg \circ \chi_f$. Es decir, $-f$ es el producto fibrado de $\top$ con $\neg \circ \chi_f$

$$\begin{tikzcd} -a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\neg\circ\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\chi_{-f} = \neg \circ \chi_f$.

2.- Intersección Si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ son dos subobjetos de d, la **intersección** de f con g es el subobjeto $f \cap g : a \cap b \rightarrowtail d$ obtenido mediante el producto fibrado de $\top$ con $\chi_f \cap \chi_g = \cap \circ (\chi_f, \chi_g)$

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r, tail, "f\cap g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f\cap\chi_g"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Con lo cual $\chi_{f\cap g} = \chi_f \cap \chi_g = \cap \circ (\chi_f, \chi_g)$.

3.- Unión Dados $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ subobjetos de d, la **unión** de f con g es el subobjeto $f \cup g : a \cup b \rightarrowtail d$ dado por el producto fibrado de $\top$ con $\chi_f \cup \chi_g = \cup \circ (\chi_f, \chi_g)$

$$\begin{tikzcd}
a \cup b \arrow[r, tail, "f \cup g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f \cup \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\chi_{f \cup g} = \chi_f \cup \chi_g$.

Ahora trataremos de caracterizar la intersección y la unión de dos subobjetos de d (monomorfismos con codominio d) como límites de ciertos diagramas.

Teorema 4.5.2
En cualquier topos $\mathcal{E}$, si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ forman el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "g'"'] & b \arrow[d, tail, "g"] \\
a \arrow[r, tail, "f"'] & d
\end{tikzcd}$$

entonces $\alpha = g \circ f' = f \circ g' : c \rightarrowtail d$ tiene como carácter al morfismo $\chi_f \cap \chi_g$. Es decir, $\chi_\alpha = \chi_{f \cap g}$.

<u>**Demostración:**</u> Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\
1 \arrow[r, "(\top, \top)"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cap"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

El cuadrado de arriba es un producto fibrado, y también lo es el cuadrado de abajo, por definición de $\cap$. En consecuencia, por el lema del producto fibrado, el rectángulo que comprende ambos cuadrados también es un producto fibrado. Por lo tanto, (por definición de clasificador de subobjetos) $\chi_\alpha = \chi_f \cap \chi_g = \chi_{f \cap g}$.

■

Observemos que este resultado está afirmando que $\alpha \cong f \cap g$ y que, por lo tanto, existe un producto fibrado de la forma:

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr] & b \arrow[d, tail, "g"] \\ a \arrow[r, tail, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

Con lo cual el morfismo intersección de los morfismos f y g que son subobjetos de un objeto d (o sea $f \cap g$) queda caracterizado simplemente como el producto fibrado de f con g. Para poder obtener un resultado similar en al caso de la operación unión, es necesario un resultado previo.

Recordemos que dado un morfismo $f : a \to b$, si formamos el producto cofibrado de f con él mismo, obtenemos el morfismo imagen de f, $imf : f(a) \to b$, este morfismo es un igualador de las flechas p y q dadas por el producto cofibrado de f con f. Con lo cual, siempre existe un morfismo $f^* : a \to f(a)$ que además es un epimorfismo (en el capítulo anterior esto se discutió ampliamente).

Lema 4.5.1
En cualquier topos $\mathcal{E}$, si

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & b \arrow[d, "v"] \\ c \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, entonces existe un morfismo $h : f(a) \to g(c)$ que hace que el cuadrado derecho del siguiente diagrama sea un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[d, "u"] & f(a) \arrow[r, tail, "imf"] \arrow[d, dashed, "h"] & b \arrow[d, "v"] \\ c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "img"] & d \end{tikzcd}$$

<u>**Demostración:**</u> Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "u"] & e \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h'"] & b \arrow[d, "v"] \\
c \arrow[r, two heads, "g^*"] & g(c) \arrow[r, tail, "img"] & d
\end{tikzcd}$$

El cuadrado de la derecha es el producto fibrado de img con v, y dado que img es monomorfismo, también lo es i. La existencia de f' se sigue de la propiedad universal de producto fibrado que cumple el cuadrado de la derecha (pues tenemos que $f : a \to b$ y $g^* \circ u : a \to g(c)$). Con lo cual $f = i \circ f'$. Además, notemos que el rectángulo que comprende ambos cuadrados es el producto fibrado de la hipótesis. Con lo cual, el cuadrado de la izquierda en el diagrama anterior es también un producto fibrado, y como los productos fibrados preservan epimorfismos y además g^* es un epimorfismo, entonces f' también debe serlo. En consecuencia, $i \circ f'$ es una epi-mono factorización para f. Por tanto, existe un único morfismo $k : f(a) \to e$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, two heads, "f^*"] \arrow[dr, two heads, "f'"'] & f(a) \arrow[r, tail, "imf"] \arrow[d, "k"] & b \\
& e \arrow[ur, tail, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, $h = h' \circ k$ es el morfismo que establece el lema.

■

Teorema 4.5.3
Dados los morfismos $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ (subobjetos de d) en un topos $\mathcal{E}$, el $\mathcal{E}$-morfismo $\alpha : c \rightarrowtail d$, que es la imagen del morfismo coproducto $[f, g] : a+b \to d$

$$\begin{tikzcd}
a + b \arrow[rr, two heads, "{[f,g]}"] \arrow[dr, two heads, "{[f,g]^*}"'] & & d \\
& c \arrow[ur, tail, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

tiene caracter $\chi_f \cup \chi_g$. Es decir, $\chi_\alpha = \chi_f \cup \chi_g$.

Demostración: Notemos que los siguientes diagramas son productos fibrados

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g \circ f"'] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\ \Omega \arrow[r, "(\top_\Omega, id_\Omega)"] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\chi_f \circ g"'] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\ \Omega \arrow[r, "(id_\Omega, \top_\Omega)"] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

Luego, dado que los coproductos preservan productos fibrados, obtenemos el siguiente diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} a + b \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[d] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\ \Omega + \Omega \arrow[r] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

donde la flecha de la parte de abajo en el diagrama es el morfismo coproducto $[(\top_\Omega, id_\Omega), (id_\Omega, \top_\Omega)] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$. Luego, por el Lema 4.5.1, obtenemos un producto fibrado de la forma

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & d \arrow[d, "(\chi_f, \chi_g)"] \\ e \arrow[r, "i"] & \Omega \times \Omega \end{tikzcd}$$

en donde a su vez i es la imagen del morfismo $[(\top_\Omega, id_\Omega), (id_\Omega, \top_\Omega)]$. Pero además i es el morfismo cuyo carácter es $\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$, es decir, el siguiente diagrama también es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cup"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

En consecuencia, considerando los dos diagramas anteriores, el rectángulo que los comprende debe ser un producto fibrado. Por lo tanto, $\chi_\alpha = \cup \circ (\chi_f, \chi_g) = \chi_f \cup \chi_g$.

■

Este teorema está afirmando que $\alpha \cong f \cup g$ y que, en consecuencia, existe una epi-mono factorización de la forma:

$$\begin{tikzcd} a+b \arrow[rr, two heads, "{[f,g]}"] \arrow[dr] & & d \\ & a \cup b \arrow[ur, tail, "f \cup g"'] & \end{tikzcd}$$

4.6. Sub(d) como una retícula y toposes Booleanos

Sea d un objeto en una categoría $\mathcal{C}$ con clasificador de subobjetos Ω. Recordemos que la colección **Sub(d)** de subobjetos de d tiene asociado un orden parcial, dados $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ subobjetos de d, se cumple que $[f] \subseteq [g]$ si y sólo si existe un morfismo $h : a \to b$ de tal manera que $f = g \circ h$. Más aún, como consecuencia del teorema 2,2,2 es posible transferir este orden parcial al conjunto $\mathcal{C}(d, \Omega)$. Para cualesquiera $u, v \in \mathcal{C}(d, \Omega)$, definimos $u \leq v$ si y sólo si $[f] \subseteq [g]$, en donde $\chi_f = u$ y $\chi_g = v$.
Ahora veremos que además del orden parcial, **Sub(d)** tiene una estructura de retículas cuando d es un objeto de un topos $\mathcal{E}$.

Teorema 4.6.1
Sea d un objeto en un topos $\mathcal{E}$. La colección **Sub(d)** es una retícula, en donde:
(a) $f \cap g$ es el elemento $\inf\{f, g\}$.
(b) $f \cup g$ es el elemento $\sup\{f, g\}$.

La prueba de este resultado es una consecuencia directa de los teoremas anteriores mediante los cuales caracterizamos a $f \cap g$ como un producto fibrado y a $f \cup g$ como la imagen un morfismo coproducto.

Teorema 4.6.2
En un topos $\mathcal{E}$, la colección **Sub(d)** es una retícula acotada para todo objeto d, cuyos elementos máximo y mínimo son id_d y 0_d respectivamente.

Demostración: Dado cualquier morfismo $f : a \rightarrowtail d$, se cumple la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "id_d"] & d \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "f"] & d \\
0 \arrow[u, "0_d"] \arrow[ur, "0_d"'] &
\end{tikzcd}
$$

con lo cual se verifica que $0_d \subseteq f$ y que $f \subseteq id_d$.

■

Teorema 4.6.3
Para cualquier monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ en un topos $\mathcal{E}$, se cumple que $f \cap -f \cong 0_d$.

<u>**Demostración:**</u> Observemos que el siguiente rectángulo es un producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
-a \arrow[r, tail, "-f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

pues se trata de la definición del morfismo $-f$. De la misma manera el cuadrado de abajo es un producto fibrado, pues es la definición del morfismo $\neg$. Con lo cual, el cuadrado de arriba también es un producto fibrado.
En consecuencia, cada cuadrado del siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
a \cap -a \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"] & -a \arrow[r] \arrow[d, "-f"] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
a \arrow[r, tail, "f"] & d \arrow[r, "\chi_f"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Con lo cual, $\perp \circ ! = \chi_f \circ f \circ g$. Pero $\chi_f \circ f = \top_a$, por tanto $\chi_f \circ f \circ g = \top_a \circ g = \top_{a \cap -a}$. Lo que implica que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd}
a \cap -a \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Y dado que el cuadrado interno en el diagrama anterior es un producto fibrado, el morfismo $k : a \cap -a \to 0$ debe existir. Con ello se obtiene que $a \cap -a \cong 0$, y por tanto $a \cap -a$ es un objeto inicial. Con lo que debe suceder que $f \cap -f \subseteq 0_d$. De esta manera, dado que 0_d es el elemento mínimo, se consigue que $f \cap -f \cong 0_d$.

■

Teorema 4.6.4
En cualquier topos $\mathcal{E}$, dentro de la colección de morfismos **Sub(Ω)** sucede que $\perp \cong -\top$.

<u>**Demostración:**</u> Por definición del morfismo $\neg$, obtenemos que $\chi_\perp = \neg$. Con lo cual sucede que

$$\begin{aligned}
\chi_\perp &= \neg \\
&= \neg \circ id_\Omega \\
&= \neg \circ \chi_\top \\
&= \chi_{-\top}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\perp \cong -\top$.

■

Definición 4.6.1
Un topos $\mathcal{E}$ se dice que es **Booleano** si y sólo si para cada objeto d en $\mathcal{E}$ se cumple que $(\mathbf{Sub(d)}, \subseteq)$ es un álgebra Booleana.

Teorema 4.6.5
Para cualquier topos $\mathcal{E}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:
1.- $\mathcal{E}$ es Booleano.
2.- **Sub(Ω)** es un álgebra Booleana.
3.- $\top : 1 \to \Omega$ tiene un complemento en **Sub(Ω)**.
4.- $\perp : 1 \to \Omega$ es el complemento de $\top$ en **Sub(Ω)**.
5.- $\top \cup \perp \cong id_\Omega$ en **Sub(Ω)**.
6.- $\mathcal{E}$ es clásico.
7.- $i_1 : 1 \to 1 + 1$ es un clasificador de subobjetos.

<u>**Demostración:**</u> **(1)** implica **(2)** se verifica por definición de topos Booleano.

(2) implica **(3)** es una consecuencia de la definición de álgebra Booleana.

(3) implica **(4)**. Si $\top : 1 \to \Omega$ tiene un complemento, digamos f, debe suceder que $\top \cap f \cong 0_\Omega$, es decir, el siguiente diagrama debe ser un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d] & a \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $f = \chi_{0_a} = \perp \circ !_a$. De esta manera $f \subseteq \perp$. Luego, por las propiedades de una retícula, $\top \cup f \subseteq \top \cup \perp$, y dado que $\top \cup f \cong id_\Omega$, entonces $\top \cup \perp \cong id_\Omega$. Además, como consecuencia de los teoremas anteriores, $\top \cap \perp \cong 0_\Omega$. Por lo tanto, $\perp$ es el complemento de $\top$ en $\mathbf{Sub}(\Omega)$.

(4) implica **(5)** se obtiene a partir de la definición de morfismo complemento.

(5) implica **(6)**. Notemos que $[\top, \perp]$ es un monomorfismo, con lo cual, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1+1 \arrow[rr, "{[\top,\perp]}"] \arrow[dr] & & \Omega \\
& 1+1 \arrow[ur, tail, "{[\top,\perp]}"'] &
\end{tikzcd}$$

es una epi-mono factorización de $[\top, \perp]$, de donde $\top \cup \perp \cong [\top, \perp]$. Luego, dado que $\top \cup \perp \cong id_\Omega$, entonces $[\top, \perp] \cong id_\Omega$. De esta forma, $[\top, \perp]$ debe ser un isomorfismo.

(6) implica **(7)** es una consecuencia del isomorfismo $1 + 1 \cong \Omega$.

(7) implica **(1)**. Dado un morfismo $f : a \rightarrowtail d$ en $\mathbf{Sub(d)}$, queremos verificar que $f \cup -f \cong id_d$ y que $f \cap -f \cong 0_d$. Sin embargo notemos que $f \cap -f \cong 0_d$ sucede en cualquier topos. Con lo que resta comprobar que $f \cup -f \cong id_d$. Para ver esto, simplemente observemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "id_d"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& a \cup -a \arrow[r] \arrow[d] & d \arrow[d] \\
& 1 \arrow[r] & 1+1
\end{tikzcd}$$

Pues por hipótesis, $1+1$ es el clasificador de subobjetos, y dado que el cuadrado interior del diagrama es un producto fibrado, debe existir el morfismo $k : d \to$

$a \cup -a$ que hace que $id_d \subseteq f \cup -f$. Y dado que $f \cup -f \subseteq id_d$, podemos concluir que $f \cup -f \cong id_d$. Así, **Sub(d)** es un álgebra Booleana.

■

Teorema 4.6.6
Si $\mathcal{E}$ es un topos Booleano, entonces $\mathcal{E} \models \alpha \vee \sim \alpha$ para cualquier fórmula α en el conjunto Φ.

<u>**Demostración:**</u> Sea v una $\mathcal{E}$-valuación. A partir del siguiente producto fibrado del morfismo $\top$ con $\bar{v}(\alpha)$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\bar{v}(\alpha)"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

obtenemos que $\chi_f = \bar{v}(\alpha)$.
Luego, como $\mathcal{E}$ es Booleano, **Sub(1)** es un álgebra Booleana, por tanto $f \cup -f \cong id_1$. En consecuencia, $\chi_{f \cup -f} = \top$. Con ello, sucede que

$$\begin{aligned} \chi_{f \cup -f} &= \chi_f \cup \neg \circ \chi_f \\ &= \bar{v}(\alpha) \cup \neg \circ \bar{v}(\alpha) \\ &= \bar{v}(\alpha \vee \sim \alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{v}(\alpha \vee \sim \alpha) = \top$.

■

4.7. Una familia de toposes no Booleanos

Consideremos dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, a partir de ellas podemos definir la categoría $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ cuyos objetos son funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y los morfismos entre dos objetos cualesquiera $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son transformaciones lineales de la forma $\alpha : F \to G$. Estas categorías se conocen como **categorías de funtores**. Estas categorías tienen varias propiedades importantes, por ejemplo, si $\mathcal{D}$ es una categoría completa, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ también lo es (esta prueba se puede consultar en [**CWM**]).

En esta sección presentaremos una familia de categorías de funtores que tienen estructura de topos pero cuya lógica interna no siempre es clásica (es decir, la estructura de **Sub(d)** no necesariamente es la de un álgebra Booleana). Las construcciones hechas aquí serán brevemente comentadas, la finalidad de esta sección simplemente es desarrollar de manera breve un ejemplo que nos mostrará la existencia de toposes que no necesariamente se comportan según las leyes de la lógica clásica.

Definición 4.7.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña (su clase de objetos es un conjunto). Definimos la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ cuyos objetos son funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ en **Set**, en la cual si $P, P' : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ son funtores entonces un morfismo entre ellos es la transformación natural $\theta : P \to P'$ que asocia a cada objeto c en $\mathcal{C}$, una función $\theta_c : Pc \to P'c$ en **Set**, de tal forma que para cualesquiera objetos c y d en $\mathcal{C}$ y para cada función $f : c \to d$ el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} Pd \arrow[r, "\theta_d"] \arrow[d, "Pf"'] & P'd \arrow[d, "P'f"] \\ Pc \arrow[r, "\theta_c"'] & P'c \end{tikzcd}$$

A los funtores que son objetos de esta categoría se les llama **pregavillas** sobre $\mathcal{C}$ y la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ se conoce por tanto como **categoría de pregavillas**.

Ejemplos:

1.- Recordemos que un grupo **G** puede ser visto como una categoría de un único elemento, los morfismos son los elementos del grupo y la ley de composición es la operación del grupo. La categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{G}}$ es una categoría de pregavillas.

2.- Considerando al conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como una categoría, $\mathbf{Set}^{\mathbb{N}}$ es una categoría de pregavillas.

Para analizar más ejemplos de estas categorías, revisar [**SGL**].

Ahora analizaremos la estructura de este tipo de categorías, observaremos que también son toposes y que además la colección **Sub(P)** para cualquier objeto P en ellas, no resulta ser un álgebra Booleana.

Teorema 4.7.1
Para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$, la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene productos fibrados y objeto terminal.

Demostración: Como la categoría **Set** tiene productos fibrados, la construcción de los mismos en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ será puntual. Sean $F, H, G : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$

funtores y $\alpha : F \to H$, $\beta : G \to H$, transformaciones naturales. Buscamos definir una pregavilla $P : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ de tal manera que le siguiente diagrama sea un producto fibrado de α con β.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\alpha'"] \arrow[d, dashed, "\beta'"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\ F \arrow[r, "\alpha"'] & H \end{tikzcd}$$

Notemos que para cada objeto c en $\mathcal{C}$ existen funciones $\alpha_c : Fc \to Hc$ y $\beta_c : Gc \to Hc$ que forman el siguiente producto fibrado en **Set**

$$\begin{tikzcd} Pc \arrow[r, dashed, "{\alpha'}_c"] \arrow[d, dashed, "{\beta'}_c"'] & Gc \arrow[d, "\beta_c"] \\ Fc \arrow[r, "\alpha_c"'] & Hc \end{tikzcd}$$

Con lo cual, definimos a P como el funtor que asocia a cada objeto c en $\mathcal{C}$ con el conjunto Pc que forma junto con ${\alpha'}_c$ y ${\beta'}_c$ el producto fibrado en **Set** de las funciones α_c y β_c.
Observemos que α' y β' son en efecto transformaciones naturales. Además, el funtor P junto con α' y β' cumple la propiedad universal de producto fibrado, pues para todo objeto c en $\mathcal{C}$, el conjunto Pc junto con las funciones ${\alpha'}_c$ y ${\beta'}_c$ cumplen esa misma propiedad en **Set**.

Ahora, el objeto terminal en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es simplemente el funtor $\mathbf{1} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ cuyo valor en cada objeto c es un objeto terminal en **Set** de la forma $\{*\}$. Con lo cual, dada una pregavilla $P : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, para cada objeto c en $\mathcal{C}$ existe una función $\alpha_c : Pc \to \{*\}$. Esto nos proporciona la transformación natural $\alpha : P \to \mathbf{1}$.

■

Ahora demos paso al estudio del clasificador de subobjetos y los morfismos carácter en estas categorías.

Definición 4.7.2
Sean P y Q dos pregavillas. Q es un **subfuntor** de P si para cada objeto c en $\mathcal{C}$ se cumple que $Qc \subseteq Pc$ y para cada función $f : d \to c$, Qf es la restricción

de Pf a Qc y Qd, es decir

$$\begin{tikzcd} Qc \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, dashed, "Qf"'] & Pc \arrow[d, "Pf"] \\ Qd \arrow[r, hook, "i"'] & Pd \end{tikzcd}$$

Observación 16
Un morfismo $\Theta : Q \to P$ es un monomorfismo en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ si y sólo si Q es un subfuntor de P. Con lo cual las nociones de sobobjeto y subfuntor quedan identificadas en las categorías de pregavillas.

Definición 4.7.3
Sea c un objeto de una categoría $\mathcal{C}$. Una **criba** sobre c es un conjunto S_c de morfismos en $\mathcal{C}$ con codominio c de tal forma que si $f \in S_c$ y $f \circ g$ está definida, entonces $f \circ g \in S_c$.

Definamos ahora el objeto $\Omega : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ de la siguiente manera:
Para cada objeto c en $\mathcal{C}$, $\Omega c = \{S : S \text{ es una criba sobre } c\}$.
Para cada morfismo $g : c' \to c$ en $\mathcal{C}$, $\Omega g : \Omega c \to \Omega c'$ de tal forma que a cada S en Ωc le asociamos $\Omega g(S) = \{h : g \circ h \in S\}$.

Luego, para cualquier objeto c en $\mathcal{C}$ definimos la siguiente criba especial, conocida como **criba maximal**, que simplemente consta de todos los morfismos que tienen codominio c:

$$T_c = \{f : f : a \to c \text{ es un morfismo en } \mathcal{C}\}$$

Observación 17
Una criba es maximal si y sólo si contiene a la identidad.

Con esto, podemos definir la pregavilla $\mathbf{1} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ como la que asocia a cada objeto c en $\mathcal{C}$ el conjunto $\{T_c\}$ y para cada morfismo $g : c \to c'$, $\mathbf{1}(g) : \{T'_c\} \to \{T_c\}$ asocia T'_c con T_c.
Notemos que $\mathbf{1}$ es terminal en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.

Con ayuda de todo lo anterior es posible definir ahora una transformación natural $\top_c : \mathbf{1} \to \Omega c$ simplemente como $\top_c(T_c) = T_c$ para cada objeto c en $\mathcal{C}$.

Proposición 4.7.1
La transformación natural $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ es el clasificador de suobjetos en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.

<u>Demostración:</u> Sean P y Q pregavillas de tal forma que $Q \subseteq P$ (Q subfuntor de P). Tenemos que definir la transformación natural $\chi : P \to \Omega$ que haga del siguiente diagrama un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d, dashed, "\chi"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Entonces, para cada objeto c en $\mathcal{C}$ definamos la función $\chi_c : Pc \to \Omega c$ como $\chi_c(x) = \{f : \ cod(f) = c, \ Pf(x) \in Q(dom f)\}$ para todo $x \in Pc$.
Notemos que $\chi_c(x)$ es una criba sobre c y que además se trata de una criba maximal.
Veamos ahora que χ es una transformación natural. Sea $g : c \to c'$ y $x \in Pc$, luego

$$\begin{aligned} &\Omega g \circ \chi_{c'} \\ &\quad = \quad \{f : \ cod(f) = dom(g) = c, \ g \circ f \in \chi_{c'}(x)\} \\ &\quad = \quad \{f : \ cod(f) = c, \ cod(g \circ f) = c', \ P(g \circ f)(x) \in Q(dom(g \circ f))\} \\ &\quad = \quad \{f : \ cod(f) = c \ cof(g \circ f) = c', \ (Pf \circ Pg)(x) \in Q(dom(f))\} \\ &\quad = \quad \chi_c(Pg(x)) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $\chi : P \to \Omega$ es natural.
Por último, debemos ver que el diagrama anterior es un producto fibrado. Sin embargo, esto último es consecuencia de que para cada objeto c en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} Qc \arrow[r, hook] \arrow[d] & Pc \arrow[d, "\chi_c"] \\ \mathbf{1}c \arrow[r, hook, "\top"'] & \Omega c \end{tikzcd}$$

■

Observación 18
Para todo objeto P en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, el funtor $\_ \times P : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene adjunto derecho.

Las construcciones anteriores proporcionan una estructura de topos para las categorías de pregavillas $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Hemos visto que estas categorías tienen productos fibrados y objeto terminal, con lo cual tienen todos los límites finitos, y por tanto son completas, además poseen clasificador de subobjetos y la observación anterior nos garantiza que todo objeto en esas categorías es exponenciable. En consecuencia es posible afirmar el siguiente resultado.

Teorema 4.7.2
Para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$, la categoría de pregavillas $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es un topos.

Ahora veremos que la estructura del conjunto **Sub(P)** para cada objeto P en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ no es la de un álgebra Booleana. Para ello es necesario definir el concepto de álgebra de Heyting.

Definición 4.7.4
Sea $(H, \sqsubseteq)$ una retícula acotada y a, b elementos de H.

1.- Decimos que b es el **pseudo-complemento** de a si y sólo si b es el elemento más grande (con respecto a $\sqsubseteq$) del conjunto $\{x \in H : \; a \sqcap x = 0\}$.

2.- El pseudo-complemento de a **relativo** a b es el elemento más grande (con respecto a $\sqsubseteq$) del conjunto $\{x \in H : \; a \sqcap x \sqsubseteq b\}$. Este elemento se denotará como $a \Rightarrow b$.

3.- Decimos que $(H, \sqsubseteq)$ es un **álgebra de Heyting** si y sólo si para cualesquiera elementos a y b en H, existe el elemento $a \Rightarrow b$.

Observación 19
Notemos que si $\mathbf{B}$ es un álgebra Booleana y definimos $a \Rightarrow b = a' \sqcup b$ para cualesquiera elementos a y b en $\mathbf{B}$, se verifica que $\mathbf{B}$ es también un álgebra de Heyting.

Definición 4.7.5
En un álgebra de Heyting definimos la **negación** de un elemento a como $\neg a = x \Rightarrow 0$.

Esta nueva operación tiene las siguientes propiedades:

1.- $a \sqsubseteq \neg\neg a$.

2.- $a \sqsubseteq b$ implica que $\neg b \sqsubseteq \neg a$.

3.- $\neg a = \neg\neg\neg a$.

4.- $\neg\neg(a \wedge b) = \neg\neg a \wedge \neg\neg b$.

Proposición 4.7.2
Sea $(H, \sqsubseteq)$ un álgebra de Hyting. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.- $(H, \sqsubseteq)$ es un álgebra Booleana.

2.- Para cada $a \in H$ se cumple que $\neg\neg a = a$.

3.- Para cada $a \in H$ se cumple que $a \vee \neg a = 1$.

Por último veamos que la relación entre álgebras de Heyting y las categorías de la forma $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es precisamente el hecho de que el conjunto parcialmente ordenado de subobjetos de un objeto es un álgebra de Heyting.

Teorema 4.7.3
Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y P un objeto en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. El conjunto parcialmente ordenado **Sub(P)** de subobjetos de P es un álgebra de Heyting.

Demostración: Sea c un objeto de la categoría $\mathcal{C}$ y sean S y T dos elementos de **Sub(P)**. Definimos las siguientes operaciones:

$$(S \vee T)(c) = Sc \cup Tc \subseteq Pc$$
$$(S \wedge T)(c) = Sc \cap Tc \subseteq Pc$$

y para cualquier morfismo f en $\mathcal{C}$, $(S \vee T)(f)$ y $(S \wedge T)(f)$ son la restricción de Pf a los correspondientes dominio y codominio.
Es claro que las pregavillas $S \vee T$, $S \wedge T : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ son el supremo y el ínfimo, respectivamente, en **Sub(P)** para T y S.
El subobjeto más grande (máximo) de **Sub(P)** es P y el mínimo es la pregavilla $\mathbf{0} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ dada por $\mathbf{0}(c) = \emptyset$ para cada c en $\mathcal{C}$.
El elemento $S \Rightarrow T$ se define como:

$(S \Rightarrow T)(c) = \{x \in Pc : \textit{para cada} f : d \to c,\ \textit{si} Pf(x) \in Sd \textit{ entonces } Pf(x) \in Td\}$

Primero notemos que $S \Rightarrow T$ es un elemento de **Sub(P)**. Sea $f : d \to c$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y tomemos x en $(S \Rightarrow T)(c)$. Queremos ver que $(S \Rightarrow T)(f)(x)$ está en $(S \to T)(d)$. Consideremos $g : e \to d$ un morfismo en $\mathcal{C}$ de tal manera que $Pg((S \Rightarrow T)(f)(x)$ es un elemento de Se. Dado que $f \circ g : e \to c$ y $P(f \circ g)(x) = Pg(Pf(x)) = Pg((S \Rightarrow T)(f)(x))$ es un elemento de Se, entonces $P(f \circ g)(x) \in Te$, es decir, $Pg((S \Rightarrow T)(f)(x))$ es elemento de Te. Por lo tanto, $(S \Rightarrow T)(f)$ es la restricción de Pf a $(S \Rightarrow T)(c)$ y $(S \Rightarrow T)(d)$ respectivamente. Con lo cual $S \Rightarrow T$ es un subfuntor de P.
Por último, notemos que dada la manera en que ha sido definido $S \Rightarrow T$, se verifica la definición de pseudo-complemento relativo.
De esta manera obtenemos que **Sub(P)** es un álgebra de Heyting.

■

Las álgebras de Heyting son estructuras que modelan la lógica intuicionista. Esta simplemente es un tipo de sistema formal (de hecho, consiste de los mismos axiomas que nuestro sistema **CL** definido en este capítulo, con la excepción del axioma **12**) que intenta formalizar las ideas lógicas de la filosofía constructivista dentro de las matemáticas. Fue inicialmente definido por Arend Heyting, y ha sido ampliamente discutido y analizado. Una de sus características es que la ley lógica del tercio excluso no se verifica en este sistema. Con las construcciones analizadas aquí podemos darnos cuenta de que existen familias de topos (es decir, las categorías de pregavillas) que tienen una lógica intuicionista, en el sentido de que la estructura de **Sub(P)** (que es isomorfo a $\mathcal{E}(P, \Omega)$, en donde $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$) resulta ser un álgebra de Heyting.

Las categorías estudiadas aquí son de importancia fundamental para la realización de pruebas de independencia categóricas y la resolución de cuestiones lógicas relacionadas con ciertos modelos de la teoría de conjuntos dentro de un marco categórico. Nuestro objetivo en esta sección era simplemente mencionar la relevancia que estas categorías tienen dentro de la lógica categórica. El lector interesado en consultar los detalles aquí omitidos puede acudir a [**TLST**], [**TT**] o [**SGL**].

Capítulo 5

Conclusiones

El concepto de topos puede considerarse uno de los aportes más importantes de la teoría de categorías al pensamiento matemático. Su relevancia recae en el hecho ya probado de su gran aplicabilidad a una diversidad de cuestiones de fundamental importancia. Los temas relacionados con la lógica y los fundamentos de la matemática es una de las áreas en que su aplicación a resultado reveladora.

Como hemos analizado aquí, una de las principales motivaciones para el concepto de topos fue el intento de categorizar o de llevar al lenguaje de la teoría de categorías las principales propiedades de la categoría de los conjuntos y las funciones. Los topos son, de esta manera, una generalización de la teoría de conjuntos, pues cumplen las mismas propiedades que la categoría **Set** pero sus objetos son de naturaleza muy variada. Estas categorías tienen su lógica interna, representada en el objeto especial que poseen definido como clasificador de subobjetos. En los topos es posible definir en el lenguaje categórico las operaciones usuales de intersección, unión y complemento. Además, los morfismos verdad en estas categorías, obtenidos a partir de la traducción hecha al lenguaje de las flechas y los objetos de los conectivos y las funciones de verdad de la lógica clásica, conservan características importantes que posee el álgebra de conjuntos utilizada en **Set**. Sin embargo, el concepto de topos es de naturaleza tal, que es posible la existencia de categorías con esta estructura pero cuya lógica interna (el álgebra de subobjetos) encuentra mayor relación con la lógica intuicionista y la filosofía constructivista.

En definitiva, el concepto de topos proporciona una herramienta fundamental en el tratamiento de cuestiones lógicas y en la unificación de multitud de conceptos relevantes para el pensamiento matemático.

Capítulo 6

Apéndice

En este apéndice daremos una demostración categórica del Teorema 2.2.2 enunciado en el capítulo 2 de este trabajo. Dicho teorema establece una biyección entre la colección de subobjetos **Sub(d)** de un objeto d en una categoría $\mathcal{C}$ con un objeto distinguido Ω y la colección de morfismos $\mathcal{C}(d,\Omega)$, pero no sólo eso, el teorema a su vez establece que dicha biyección es una condición para que en esa categoría exista el clasificador de subobjetos y sea precisamente Ω. Este hecho es de importancia fundamental, pues como ya vimos, "traspasa" el orden parcial definido para los subobjetos de un objeto d al conjunto de morfismos que van de ese objeto a Ω; y como ya se ha visto, dado que es Ω quien posee la lógica de un topos, este resultado va a servir para que esa lógica determine una estructura de álgebra Booleana o de Heyting para **Sub(d)** (como ya se vio en los capítulos anteriores).

Definición 6.0.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos el funtor contravariante representable, llamado **funtor subobjeto**, como sigue:

$$\mathbf{Sub}(\ ) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

objetos: $c \mapsto \mathbf{Sub(c)}$
morfismos: $f : a \to b \mapsto \mathbf{Sub}(f) : \mathbf{Sub}(b) \to \mathbf{Sub}(a)$

en donde $\mathbf{Sub}(f)$ está dado por el producto fibrado de f con m para cada $m \in \mathbf{Sub}(b)$ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, tail, "m'"'] & c \arrow[d, "m"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Entonces $\mathbf{Sub}(f)(m) = m'$ y como m es monomorfismo, m' también lo es y por tanto $\mathbf{Sub}(f)$ está bien definido.

Teorema 6.0.1
Una categoría $\mathcal{C}$ con límites finitos tiene clasificador de subobjetos $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ si y sólo si existe un objeto Ω y un isomorfismo $\Theta_d : \mathbf{Sub(d)} \cong \mathcal{C}(d, \Omega)$ natural en d.

<u>**Demostración:**</u> Sea $\top : \mathbf{!} \to \Omega$ el clasificador de subobjetos de $\mathcal{C}$. Definimos para cada objeto d de $\mathcal{C}$

$$\Theta_d : \mathbf{Sub(d)} \to \mathcal{C}(d, \Omega)$$

como $\Theta_d(m) = \chi_m$ para todo $m \in \mathbf{Sub(d)}$, en donde χ_m es el carácter de m (para la definición de carácter de un monomorfismo, ver capitulo 2 de este trabajo).
Notemos que Θ_d es inyectiva por definición.
Para ver que también es sobreyectiva, tomemos $\chi \in \mathcal{C}(d, \Omega)$ y hagamos el producto fibrado de $\top$ con χ que por hipótesis existe.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m_\chi"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces obtenemos $m_\chi \in \mathbf{Sub(d)}$, que además es monomorfismo.
Por lo tanto Θ_d es un isomorfismo.

Ahora veamos que es natural en d. Tomemos $f : d \to c$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y $m \in \mathbf{Sub(c)}$, formando el producto fibrado de m con f obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, tail, "n"'] & M \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ d \arrow[r, "f"'] & c \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

en el que además $\chi_m \circ f = \chi_n$ (carácter de n).
Como los dos cuadrados interiores son productos fibrados, el rectángulo que los contiene también lo es, con lo cual
$(\mathcal{C}(f, \Omega) \circ \Theta_c)(m) = \mathcal{C}(f, \Omega)(\chi_m) = \chi_m \circ f = \chi_n = \Theta_d(n) = \Theta_d \circ \mathbf{Sub}(f)(m)$.
Así, Θ es natural en d.

Recíprocamente, supongamos ahora que para cada objeto d en $\mathcal{C}$, $\Theta_d : \mathbf{Sub(d)} \cong \mathcal{C}(d, \Omega)$ es natural en d. En particular para el objeto Ω tenemos el isomorfismo

$\Theta : \mathbf{Sub}(\Omega) \cong \mathcal{C}(\Omega, \Omega)$. Como $id_\Omega \in \mathcal{C}(\Omega, \Omega)$ entonces existe $t_0 : \Omega_0 \to \Omega$ en $\mathbf{Sub}(\Omega)$ de tal manera que $\Theta_\Omega(t_0) = id_\Omega$. Afirmamos que $t_0 : \Omega_0 \to \Omega$ es el clasificador de subobjetos de $\mathcal{C}$.
En efecto, tomemos $n : N \rightarrowtail d$ un monomorfismo en $\mathcal{C}$, por el isomorfismo $\mathbf{Sub}(d) \cong \mathcal{C}(d, \Omega)$ obtenemos la asociación $n \mapsto \chi_n : d \to \omega$. Además, por la naturalidad de Θ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sub}(\Omega) \arrow[r, "\Theta_\Omega"] \arrow[d, "Sub(\chi_n)"'] & \mathcal{C}(\Omega, \Omega) \arrow[d, "\mathcal{C}(\phi_n, \Omega)"] \\
\mathbf{Sub}(d) \arrow[r, "\Theta_d"'] & \mathcal{C}(d, \Omega)
\end{tikzcd}$$

Luego, para $t_0 \in \mathbf{Sub}(\Omega)$, tenemos que $\mathbf{Sub}(\phi_n)(t_0) = n : N \rightarrowtail d$ es tal que el cuadrado siguiente

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "n"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\
d \arrow[r, "\chi_n"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado por definición de $\mathbf{Sub}(\ )$, lo cual nos da un morfismo $N \to \Omega_0$.
Resta ver que Ω_0 es un objeto terminal en $\mathcal{C}$. De la construcción anterior, si ahora tomamos $n = id_d$, tenemos que para cada objeto d, existe un morfismo $d \to \Omega_0$ dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, dashed] \arrow[d, "id_d"'] & \Omega_0 \arrow[d, tail, "t_0"] \\
d \arrow[r, "\chi_{id_d}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que este morfismo es único. Si $\psi, \psi' : d \to \Omega_0$ entonces los siguientes cuadrados son productos fibrados, pues t_0 es monomorfismo

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "id_d"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t_0"] \\
d \arrow[r, "t_0 \circ \psi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "id_d"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t_0"] \\
d \arrow[r, "t_0 \circ \psi'"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, la biyectividad de Θ nos garantiza que χ_{id_d} es único, es decir $t_0 \circ \psi = t_0 \circ \psi'$ y como t_0 es un monomorfismo, se sigue que $\psi = \psi'$. Con esto hemos probado que para objeto d, existe un único morfismo $d \to \Omega_0$, con lo cual, Ω_0 es objeto terminal de $\mathcal{C}$ y por lo tanto $t_0 : \Omega_0 \to \Omega$ es un clasificador de subobjetos en $\mathcal{C}$.

$\blacksquare$

Bibliografía

[CT] Awodey, S., CATEGORY THEORY, Oxford Logic Guides 52, second edition (2010).

[TLST] Bell, J., TOPOSES AND LOCAL SET THEORIES, Oxford Logic Guides 14, (1988)

[AT] Freyd, P., ASPECTS OF TOPOI, Bulletin of the Australian Mathematical Society, volume 7 (1972).

[TT] Goldblatt, R., TOPOI, THE CATEGORIAL ANALYSIS OF LOGIC, Elsevier Science Publishers-North Holland, Studies in Logic and the foundations of Mathematics, volume 98 (1984).

[CWM] Mac Lane, S., CATEGORIES FOR THE WORKING MATEMATICIAN, Springer-Verlag, New York, second edition (1978).

[SGL] Mac Lane, S., Moerdijk, I., SHEAVES IN GEOMETRY AND LOGIC, Springer, New York, (1992).

[IML] Mendelson, E., INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC, Chapman & Hall, fourth edition (1997).