Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS:
CONCEPTOS, DEMOSTRACIONES Y EJEMPLOS RELEVANTES DE LA MATEMÁTICA BÁSICA UNIVERSITARIA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JORGE ALBERTO COLEOTE DOMÍNGUEZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUE. 11 DE DICIEMBRE DE 2017

A mi mamá

Agradecimientos

La existencia del siguiente trabajo es gracias a mi profundo gusto por las matemáticas a pesar de todas mis dificultades, dudas y obstáculos del pasado.

Agradezco a mi papá Guillermo Coleote Tenorio que nunca escatimó en gastos para que yo estudiara; especialmente, le doy infinitas gracias a mi mamá Rosa Elena Domínguez Vázquez porque siempre tuvo palabras de aliento, apoyo y motivación para que yo terminará mi carrera.

De igual forma quiero agradecer a mis hermanas Elizabeth Coleote Domínguez y Rosa Elena Coleote Domínguez y a todos mis demás familiares por todas las ocasiones que me dijeron palabras de motivación y por su apoyo, aunque haya sido mínimo.

Le agradezco a todos los maestros que me enseñaron matemáticas; y bueno finalmente, también le doy las gracias a todos aquellos que pusieron obstáculos en mi camino, ya que sin ello no me hubiera motivado a seguir adelante.

¡ Sinceramente muchas gracias a todos ellos !

Introducción

El trabajo de tesis que presento es un compendio de resultados de las matemáticas básicas que fueron de gran gusto y atractivo durante mi carrera universitaria, y que generalmente todo profesional de las matemáticas debe conocer. El motivo por el que elegí a las matemáticas básicas como tema de tesis es porque en el comienzo de mi carrera tuve problemas en la comprensión y demostración de algunos conceptos y teoremas de matemáticas básicas; por tal motivo, ya superados estas dificultades, me dí a la tarea de hacer un trabajo formal donde expusiera un material de apoyo para los estudiantes de licenciatura.

En cada uno de los capítulos se exponen los conceptos y las definiciones que se utilizaran en las demostraciones, comprensión de ejemplos y resolución ejercicios.

El primer capítulo está dedicado a conjuntos y clasificación numérica con conceptos como conjunto, los números naturales, los números enteros, números racionales, números irracionales, números primos, etc. También se estudia el tema de Inducción Matemática; con pruebas no solo de ecuaciones, también abordamos desigualdades o inecuaciones.

El capítulo 2 es sobre los axiomas de orden de los números reales y teoremas relacionados.

En el tercer capítulo se exponen conceptos importantes de las funciones, tales como función inyectiva, función sobreyectiva, función polinómica y el concepto de límite, entre otros.

La cuarta parte de la tesis está dedicada a las funciones exponencial y logaritmo, las cuales no se restringen al campo de los números reales ($\mathbb{R}$).

Finalmente en el quinto capítulo se trata de trigonometría. Estudiaremos las demostraciones de las identidades trigonométricas y otros ejercicios referentes al tema.

Índice general

Conceptos, Demostraciones y Ejemplos Relevantes de la Matemática Básica Universitaria

Jorge Alberto Coleote Domínguez

11/12/2017

Capítulo 1

Conjuntos

En este capítulo revisaremos los conceptos de conjunto e inducción matemática. Las definiciones, conceptos, imagénes y demostraciones en este capítulo fueron tomadas de la bibliografía [1], [5], [11], [6] y [12].

1.1. Introducción

El concepto de conjunto como objeto abstracto no comenzó a emplearse en matemáticas hasta el siglo XIX, a medida que se despejaban las dudas sobre la noción de infinito. Los trabajos de Bernard Bolzano y Bernhard Riemann (veáse [7] y [15]) ya contenían ideas relacionadas con una visión conjuntista de la matemática. También se puede mencionar el trabajo de Dedekind [16], otro pionero que legó al mundo importantes fundamentos, con un punto de vista conjuntista.

La teoría de conjuntos como disciplina independiente se atribuye usualmente a Georg Cantor [2]. Comenzando con sus investigaciones sobre conjuntos numéricos, desarrolló un estudio sobre los conjuntos infinitos y sus propiedades.

Georg Cantor escribió lo siguiente relacionado con la definición de conjunto:

"*entiendo en general por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley*".

1.2. Definiciones y Preliminares

Recordemos que una definición es una proposición (o conjunto de proposiciones) mediante la cual se trata de exponer de manera unívoca y con precisión la comprensión de un concepto, término, dicción, expresión o locución. Se alude a determinar, por escrito u oralmente, de modo claro y exacto, las cualidades esenciales del tema implicado. Para que sea más claro lo anterior veamos que es una proposición:

Definición 1.2.1. *Una **proposición** es una expresión de un contenido semántico a la que bajo cierto procedimiento acordado o prescrito es posible asignarle un valor de verdad.*

Enseguida continuemos con definiciones de matemáticas propiamente dichas.

Definición 1.2.2. *Un **número** es un signo o un conjunto de signos que permiten expresar una determinada cantidad en relación a su unidad.*

Definición 1.2.3. *En matemáticas un **conjunto** es un grupo de elementos u objetos especificados, en tal forma que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no a la agrupación. Para denotar a los conjuntos, se usan letras mayúsculas.*

Cuando un elemento x_1 pertenece a un conjunto A se denota por $x_1 \in A$. En caso de que un elemento y_1 no pertenezca a A se utiliza la notación $y_1 \notin A$.

Existen, cuatro formas de enunciar a los conjuntos:

(1) Por extensión o enumeración: los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas. Es decir, el conjunto se describe listando sus elementos entre llaves.

(2) Por comprensión: los elementos se determinan a través de una condición que se establece entre llaves. En este caso se emplea el símbolo $|$ que significa *tal que*. En forma simbólica es:

$$A = \{x|P(x)\},$$

es decir, el conjunto A es el conjunto de todos los elementos x tales que la condición $P(x)$ es verdadera.

(3) Diagramas de Venn: son diagramas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos. Estos diagramas muestran colecciones (*conjuntos*) de cosas (*elementos*) por medio de líneas cerradas. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración, el conjunto universal U.

(4) Por descripción verbal: Es un enunciado que describe la característica que es común para los elementos.

Ejemplo 1.2.1. *Dada la descripción verbal "el conjunto de las letras vocales", expresarlo por extensión y comprensión.*

Solución.

Por extensión: $V = \{a, e, i, o, u\}$.
Por comprensión: $V = \{x | x \text{ es una vocal}\}$.

Conviene antes de continuar definir claramente los conceptos de Axioma y Teorema.

Definición 1.2.4. *El* ***Axioma*** *se considera una proposición* ***evidente*** *(verdadera) que se acepta sin requerir demostración previa.*

Definición 1.2.5. *Un* ***Teorema*** *es una proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una racionalidad (tesis)* ***no evidente*** *por sí misma.*

Ahora vamos a definir los símbolos que usaremos en este trabajo de tesis.

(1) $\Rightarrow$ **Implicación** material o en un solo sentido. Se lee como: *Implica; entonces.* Por ejemplo, $A \Rightarrow B$.

(2) $\Leftrightarrow$ **Doble implicación.** Se lee como: *si y sólo si.* Por ejemplo, $A \Leftrightarrow B$.

(3) $\wedge$ **Conjunción lógica** o **intersección.** Se lee como: *y*. Por ejemplo, $A \wedge B$.

(4) $\vee$ **Disyunción lógica** o **unión**. Se le como *o*. Por ejemplo, $A \vee B$, quiere decir A o B.

(5) $\forall$ **Cuantificador Universal.** Se lee como: *para todo; para cualquier; para cada.* Por ejemplo, $\forall x$ en un conjunto.

(6) $\exists$ **Cuantificador existencial.** Se lee como: *existe.* Por ejemplo, $\exists x$ un número.

Definición 1.2.6. *Un* ***conjunto universal*** *es el que contiene a todos los elementos bajo consideración. Se denota por U. En diagramas de Venn se le representará mediante un rectángulo.*

Definición 1.2.7. *Supongamos que A y B son conjuntos cuyos elementos están en un conjunto universal U. Diremos que el conjunto A es* ***subconjunto*** *del conjunto B, si todo elemento de A es también elemento de B, es decir, si la proposición*

$$\forall x \in U : \; x \in A \Rightarrow x \in B$$

es verdadera.

Denotaremos a la proposición "A es subconjunto de B" como:

$$A \subseteq B.$$

Definición 1.2.8. *Un* ***conjunto vacío*** *o* ***nulo*** *es aquel que no posee elementos. Se denota por $\emptyset$ o bien por $\{\}$. El conjunto vacío siempre forma parte de otro, así que es subconjunto de cualquier conjunto.*

Definición 1.2.9. *Sean A y B subconjuntos de un conjunto universo U. Diremos que A y B son iguales, si es verdadera la siguiente proposición:*

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Denotaremos la proposición "A es igual a B" por $A = B$.

Observe que las proposiciones $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ y $(\forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow X \in B)$ son equivalentes. De esa manera podemos decir que dos conjuntos A y B son iguales si la proposición

$$\forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow X \in B$$

es verdadera.

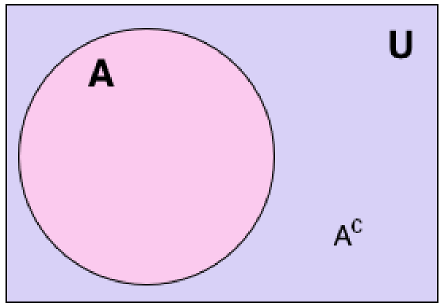


Figura 1.1: Diagrama de Venn del Complemento de A.

Ejemplo 1.2.2. *Si $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$ son conjuntos vacíos (o sea, sin elementos) y si x es un elemento cualquiera del universo, son falsas las proposiciones $x \in \emptyset_1$ y $x \in \emptyset_2$, es decir, la proposición*

$$x \in \emptyset_1 \Leftrightarrow x \in \emptyset_2$$

es verdadera, que es equivalente a:

$$\emptyset_1 = \emptyset_2.$$

Notación 1.2.1. *Denotamos por $\neg p(x)$ a la negación de una proposición.*

Definición 1.2.10. *Sea U un conjunto universal y $A = \{x \in U | p(x)\}$, donde $p(x)$ es una proposición abierta en U. Es claro que A es un subconjunto de U. Podemos formar un conjunto que conste de aquellos elementos de U que no satisfacen $p(x)$, es decir, para los cuales $\neg p(x)$ es verdadera. A este conjunto lo llamaremos el **complemento** del conjunto A en U y lo denotamos por A^C. Así,*

$$A^C = \{x \in U | \neg p(x)\} = \{x \in U | x \notin A\}.$$

Empleando los diagramas de Venn, vemos que si el universo U está representado por todos los puntos que están dentro de un rectángulo (o alguna otra figura) A está representado por los puntos que están dentro de un círculo (por ejemplo) que esté dentro del rectángulo, entonces A^C estará representado por los puntos qeu están dentro del rectángulo pero fuera del círculo (véase Figura 1.1).

Definición 1.2.11. *Si A y B son subconjuntos de U, entonces*

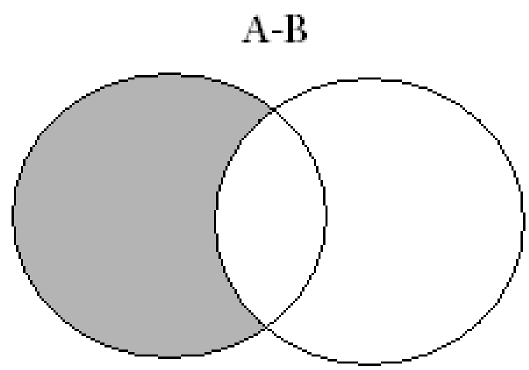


Figura 1.2: Diferencia de conjuntos

(I) *La **unión** de A y B es el subconjunto de U formado por aquellos elementos que están en A o bien están en B y se denota por $A \cup B$, es decir,*

$$A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}.$$

(II) *La **intersección** de A y B es el conjunto formado por los elementos de U que están en A y están en B. Se denota por $A \cap B$; es decir:*

$$A \cap B = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ejemplo 1.2.3. *Si $A = \{1, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ y $A \cap B = \{1\}$.*

Definición 1.2.12. *Dados los conjuntos A y B subconjuntos de U el conjunto*

$$A \cap B^C = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$$

*es un complemento relativo y suele llamarse a este conjunto la **diferencia** de A y B y se denota $A - B$ (véase Figura 1.2).*

En el caso particular en que $A = U$, el conjunto $A - B$ coincide con el complemento de B.

Ejemplo 1.2.4. *Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $A - B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ y $B - A = \{2\}$, donde el universo es $U = A \cup B$.*

Existen distintos tipos de números y se clasifican en orden de jerarquía, esto es, en números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales y números reales.

Definición 1.2.13. *Los **números naturales** son aquellos que nos permiten contar los elementos que se hallan en un conjunto y empiezan con el número* 1*, esto es*
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Los números naturales son empleados con dos finalidades, por un lado, para especificar el tamaño de un conjunto finito y por otro lado para describir que posición ocupa un elemento dentro de una secuencia ordenada.

Definición 1.2.14. *El **cardinal** indica el número o cantidad de elementos de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita. Dado un conjunto A el cardinal de A se denota por $|A|$ o $card(A)$.*

Los números naturales son un conjunto de cardinal infinito; según la teoría de Cantor es el infinito más pequeño que existe y se denota por $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Cabe mencionar que existe controversia con respecto al número 0, la teoría de los conjuntos lo incluye y reconoce como un número natural más, en cambio la teoría de los números lo excluye de este grupo; en este trabajo no incluiremos al cero como número natural.

A continuación se expone una definición alternativa de número natural, la cual sí incluye al número 0 porque es conjuntista; esta definición alternativa fue tomada del libro del Matemático Thomas Jech [6]. La definición de conjunto inductivo también se expone a continuación.

Definición 1.2.15. *Sea*
$$\mathbb{N} = \bigcap \{X : X \text{ es inductivo}\}.$$

Usaremos la siguiente notación (véase página 13 del libro [13] mencionado en la bibliografía)
$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad \dots$$

*Si $n \in \mathbb{N}$ definimos $n + 1 = n \cup \{n\}$, a los elementos de este conjunto se les llama **números naturales.***

Intuitivamente se obtienen los enteros positivos, tomando como punto de partida un primero designado por "1" y formando $1+1$ (llamado "2"), 2+1 (llamado "3"), y así sucesivamente.

En virtud de que no se puede depender del significado un poco oscuro de "y así sucesivamente" y de que se debe tener una base para proporcionar teoremas relativos a los enteros positivos, se da una definición del conjunto de los enteros positivos, basada en el concepto de conjunto inductivo.

Definición 1.2.16. *Un conjunto S de números es un **conjunto inductivo** si y sólo si S tiene las siguientes propiedades:*

1. $1 \in S$.
2. $a \in S \Rightarrow (a+1) \in S$.

Ejemplo 1.2.5. *El conjunto de los números enteros positivos es un conjunto inductivo.*

Ejemplo 1.2.6. *El conjunto $S_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ no es un conjunto inductivo, porque no obstante que $1 \in S_1$; $(1+1) \notin S_1$.*

El conjunto $\mathbb{Z}^+$ es el conjunto de números con la propiedad de que si K es cualquier conjunto inductivo de números, entonces $\mathbb{Z}^+ \subset K$. Se dice a veces, que el conjunto de los enteros positivos , es el más pequeño conjunto inductivo de números.

El **Principio de Inducción Matemática** se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1 (Principio de Inducción Matemática)**.** *Sea S_n una función proposicional cuyo conjunto de referencia es $\mathbb{Z}^+$. Si S_n satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *S_1 es cierta (Caso Base: puede ser S_1 o la S_m donde m es el número entero positivo más pequeño del conjunto inductivo considerado).*
2. *$S_k \Rightarrow S_{k+1}$ es cierta (Hipótesis Inductiva y Paso Inductivo).*

Entonces S_n es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Sea K el conjunto de todos los enteros positivos para el cual S_n es cierta. Es decir:

$$K = \{x : x \in \mathbb{Z}^+ \wedge S_x \text{ es cierta}\}$$

De 1, se observa que $1 \in K$.
De 2, se observa que $k \in K \Rightarrow (k+1) \in K$.

Por tanto K es un conjunto inductivo y por la definición de K se sabe que $K \subset \mathbb{Z}^+$.

Por otra parte $\mathbb{Z}^+ \subset K$. Por consiguiente $\mathbb{Z}^+ = K$, es decir S_n es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Definición 1.2.17. *Dado un conjunto ordenado $(A, \leq)$ (véase la Definición 2.2.1), un elemento $a \in A$ es el* ***elemento máximo*** *de A si cualquier otro elemento de A es menor o igual que él; es decir, si para todo $x \in A$, $x \leq a$.*

Definición 1.2.18. *Dado un conjunto ordenado $(A, \leq)$ (véase la Definición 2.2.1), un elemento $a \in A$ es el* ***elemento mínimo*** *de A si cualquier otro elemento de A es mayor o igual que él; es decir, si para todo $x \in A$, $a \leq x$.*

Definición 1.2.19. *Un* ***número primo*** *es un número natural mayor a 1, el cual no tiene divisores positivos salvo el mismo y la unidad, es decir el número 1.*

Los primeros 168 números primos menores que 1000 se escriben a continuación:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,$$

$$79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151,$$

$$157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233,$$

$$239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317,$$

$$331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419,$$

$$421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503,$$

$$509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607,$$

$$613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701,$$
$$709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811,$$
$$821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911,$$
$$919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.$$

Definición 1.2.20. *Un **conjunto bien ordenado** es un conjunto no vacío totalmente ordenado (véase Definición 2.2.2) tal que todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.*

A continuación se enuncia el Teorema de la División Euclídea para números naturales; este teorema es de tintes conjuntistas ya que se incluirá al 0 como número natural.

Teorema 1.2.2. *Dados dos números naturales a y b, con b distinto de 0, la división euclídea asocia un cociente q y un resto r, ambos números naturales, que verifican:*

(I) $a = bq + r$;

(II) $r < b$;

(III) *La pareja (q, r) es única.*

De manera formal esto equivale a lo siguiente:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists! (q, r) \in \mathbb{N}^2 / a = bq + r \text{ con } r < b,$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Demostración. Sean a y b dos números naturales, con b no nulo.

1. **Existencia.** Considérese al conjunto E definido por

$$E = \{x \in \mathbb{N} | \exists z \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = a - bz\}.$$

   E es no vacío porque contiene a a. Sea r el mínimo de E y q el entero que lo define, es decir, aquel que verifique la igualdad $a - b * q = r$. Por construcción, r es un número natural. Ahora, nótese que b es elemento de E (es cuando $a = b$ y $z = 0$), por consiguiente $r < b \neq 0$ porque es el mínimo de E. Esto demuestra la existencia.

2. **Unicidad.** Supongamos que existen cuatro enteros q_1, q_2, r_1 y r_2 que cumplen que:
$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2.$$
Entonces
$$b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{r_1 - r_2}{b} = -(q_1 - q_2). \tag{1.1}$$
Ahora, como $0 \leq r_1 < b$ y $0 \leq r_2 < b$ entonces
$$r_1 < b \wedge -r_2 \leq 0$$
$$\Rightarrow r_1 - r_2 < b$$
y también
$$r_1 \geq 0 \wedge -r_2 > -b$$
$$\Rightarrow -b < r_1 - r_2,$$
es decir, obtenemos que:
$$-b < r_1 - r_2 < b$$
$$\Rightarrow -1 < \frac{r_1 - r_2}{b} < 1$$
$$\Rightarrow -1 < -(q_1 - q_2) < 1 \text{ (véase resultado 1.1)}$$
$$\Rightarrow q_1 - q_2 = 0. \tag{1.2}$$
Por último; si consideramos seriamente las ecuaciones (1.1) y (1.2) se concluye que:
$$r_1 = r_2 \text{ y } q_1 = q_2$$
con lo que se demuestra la unicidad.

□

Definición 1.2.21. *Un **número entero** es un elemento del conjunto numérico que contiene los números naturales* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$*, sus inversos aditivos y el cero.*

El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

que es la letra inicial de la palabra alemana *Zahlen* cuyo significado es *números*. Por lo tanto, los números enteros no tienen parte decimal, es decir que 1.56, por ejemplo, no es un número entero.

Los números enteros negativos tiene diversas aplicaciones prácticas, con ellos se puede señalar una temperatura bajo cero o una profundidad bajo el nivel del mar.

Cabe mencionar que los matemáticos hindúes del siglo VI ya postulaban la existencia de números negativos.

Definición 1.2.22. *Se dice que un número entero b es **divisible** entre un entero $a \neq 0$ si existe un entero c tal que $b = a \cdot c$. Esto es equivalente a decir que el resto r de la división euclídea (véase el Teorema 1.2.3) es cero.*
Se expresa de la forma $a|b$, que se lee: "a divide a b", o "b es múltiplo de a".

Definición 1.2.23. *El **máximo común divisor (MCD)** de dos o más números enteros, se define como el mayor número entero positivo que los divide sin dejar residuo.*

Definición 1.2.24. *Se dice que dos números enteros a y b son **coprimos** o **primos relativos** si no tienen ningún factor primo en común. Dicho de otra forma, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1. Equivalentemente, son coprimos, si y sólo si, su MCD es el 1.*

A continuación se enuncia el Teorema de la División Euclídea para números enteros.

Teorema 1.2.3. *Dados dos números enteros a y b, con b distinto de 0, la división euclídea asocia un cociente q y un resto r, ambos números enteros, que verifican*

(i) $a = b \cdot q + r$;

(ii) $0 \leq r < |b|$;

(iii) *A q se le denomina cociente y a r, residuo que siempre es un entero positivo.*

De manera formal esto equivale a lo siguiente:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \exists! (q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tal que } a = b \cdot q + r \text{ con } 0 \leq r < |b|,$$

donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Demostración. El Teorema 1.2.2 demuestra la existencia de q_1 y r_1 tales que:

$$|a| = |b|q_1 + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < |b|; \tag{1.3}$$

por un estudio de inspección sobre los signos respectivos de a, b y q_1 considerando la definición de valor absoluto expuesta en el Capítulo 2, se obtienen los siguientes casos:

1. Si $a, b > 0$, entonces 1.3 equivale a:

$$a = bq_1 + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < b.$$

2. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces, 1.3 equivale a:

$$a = -bq_1 + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < -b.$$

3. Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces 1.3 equivale a:

$$-a = bq_1 + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < b.$$

4. Si $a, b < 0$, entonces 1.3 equivale a:

$$-a = -bq_1 + r_1 \text{ con } 0 \leq r_1 < -b,$$

esto nos garantiza la existencia generalizada a números enteros.

La prueba de la unicidad es muy similar a la de la división euclídea con números naturales, la única diferencia es que en vez de b se pone $|b|$. □

Definición 1.2.25. *Los* ***números racionales*** *es el conjunto*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}.$$

La letra $\mathbb{Q}$ proviene de la palabra *Quotient* que significa cociente en varios idiomas europeos. A diferencia de los números naturales que son consecutivos, por ejemplo a 4 le sigue 5 y este a su vez le sigue el 6, y los números negativos cuya consecución se da así, a -9 le sigue -8 y a este a su vez le sigue -7; los números racionales no poseen consecución porque entre cada número racional existen infinitos números ya sea racionales o irracionales (definidos enseguida) que solo podrían ser escritos durante toda la eternidad.

En un sentido estricto, un número racional se refiere al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada la cual es la irreducible.

Definición 1.2.26. *Una **fracción irreducible** es una fracción que no se puede simplificar (reducir), es decir, que el numerador y el denominador **no comparten factores en común**.*

Definición 1.2.27. *Un **número irracional** (denotado por $\mathbb{I}$ o $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) es un número que no puede ser escrito como una fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y $n \neq 0$.*

¿Pero en sí, qué otra definición se le da al conjunto de los números irracionales? La respuesta es que son números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, es decir, indeterminadas y por lo tanto no pueder ser escritos de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y $b \neq 0$.

El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de números irracionales, es decir que no eran enteros ni racionales. Esta escuela, los llamó números inconmensurables.

Ejemplo 1.2.7. *Entre los números irracionales enunciamos a los siguientes:*

1. *π es un número irracional. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin un patrón determinado.*
   Es la proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.
   Las primeras cifras son las siguientes:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95\ldots$$

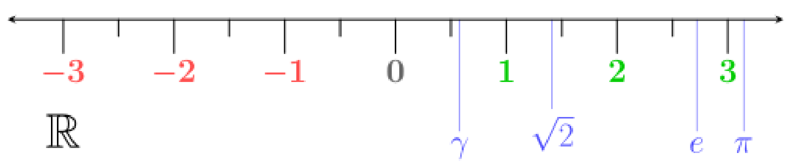


Figura 1.3: Recta real

2. *El número e de Euler es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de e sin encontrar ningún patrón.*
   Los primeros decimales son:

$$e = 2{,}7182818284590452353602874713527\ldots,$$

   también como π los decimales de e se continúan hasta el infinito.

3. *La* ***razón de oro*** *o el también llamado número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.*
   Sus primeros dígitos son:

$$\varphi = 1{,}6180339887498948482 0\ldots$$

4. *La raíz cuadrada de un número natural no cuadrado perfecto es un número irracional, también lo es la raíz enésima (con $n \in \mathbb{Z}^+$) de un natural p que no es potencia enésima perfecta, por ejemplo:*

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415059\ldots;$$

$$\sqrt{99} = 9{,}9498743710661995473447982100121\ldots;$$

$$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{81},\ \sqrt[10]{4}.$$

Definición 1.2.28. *Un* ***número real*** *es un valor que representa una cantidad a lo largo de una linea recta (véase Figura 1.3).*

El adjetivo real fue introducido en el siglo XVII por René Descartes. El conjunto de los números reales es denotado por $\mathbb{R}$, se compone esencialmente de la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los números irracionales $\mathbb{I}$.

Definición 1.2.29. *Un **número construible** es aquel que puede representarse mediante finitas operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíz cudrada de enteros. Estos números corresponden a los segmentos que se pueden construir con regla y compás.*

Definición 1.2.30. *El **factorial** de un entero positivo n (denotado $n!$) se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n, es decir:*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Notación 1.2.2. $0! = 1$

Definición 1.2.31. *El **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto de n elementos y se define de la siguiente forma:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A continuación se enuncia una proposición que tiene que ver con el coeficiente binomial, la cual se utilizará posteriormente en la demostración del Teorema del Binomio.

Proposición 1.2.1 (Teorema de Pascal). *Si $n, k \in \mathbb{Z}^+$ la siguiente igualdad se verifica:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= (n-1)! \left[\frac{1}{k!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \right] \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times \frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.2.32. *Un* ***binomio*** *es una expresión matemática que consta únicamente por una suma o una resta de dos términos, es decir separados por un signo de más (+) o de menos (-).*

A continuación, la fórmula de la potencia enésima de un binomio.

Teorema 1.2.4 (Teorema del Binomio)**.** *El* ***teorema del binomio*** *es una fórmula que proporciona el desarrollo de la potencia enésima (siendo n, entero positivo o 0) de un binomio.*
Se expresa de la siguiente forma:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción matemática.

1. Casos Base: Para los casos en que n es igual a $0, 1, 2$ y 3 es sabido desde cursos muy básicos que la fórmula se verifica. Veamos el caso $n = 4$

$$(x+y)^4 = (x+y)^3(x+y) = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y)$$

$$= x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} x^{4-i} y^i.$$

   Es decir la fórmula se verifica para $n = 4$, entonces continuemos con la hipótesis inductiva;

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que para $n = k$ se verifica la fórmula, entonces se cumple que:

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i;$$

3. Paso Inductivo. Demostraremos que la fórmula se cumple para $n = k+1$ dada la Hipótesis Inductiva, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k(x+y) \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i\right] \times (x+y) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} x^{k+1-i} y^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{k-i} y^{i+1} + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right] x^{k+1-i} y^i + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i + y^{k+1} \text{ (Véase Proposición 1.2.1)} \\
&= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{(k+1)-i} y^i.
\end{aligned}
$$

Considerando seriamente esto último, tenemos que para $n = k+1$ la fórmula de la potencia enésima de un binomio es válida; por lo tanto por el Principio de Inducción Matemática, el Teorema queda demostrado.

□

Definición 1.2.33. *Un **campo** o **cuerpo** es un conjunto F de números reales que cumple con las siguientes propiedades de adición y multiplicación:*

(1) La adición es conmutativa,

$$x + y = y + x$$

para cualquiera x e y de F.

(2) La adición es asociativa,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

para cualquiera x, y y z de F.

(3) Existe un elemento único 0 (cero) de F tal que $x + 0 = x$, para todo x en F.

(4) A cada x de F corresponde un elemento único $(-x)$ de F tal que $x + (-x) = 0$.

(5) La multiplicación es conmutativa,

$$xy = yx$$

para cualquiera x e y de F.

(6) La multiplicación es asociativa, esto es,

$$x(yz) = (xy)z,$$

para cualquiera x, y y z de F.

(7) Existe un elemento 1 (uno) no nulo único de F tal que $x1 = x$, para todo x de F.

(8) A cada elemento no nulo x de F corresponde un único elemento x^{-1} (o $1/x$) de F tal que $xx^{-1} = 1$.

(9) La multiplicación es distributiva respecto de la adición; esto es, $x(y+z) = xy + xz$, para cualesquiera x, y y z de F.

Definición 1.2.34. *Un **subcuerpo** de un cuerpo C es un subconjunto F de C ($F \subseteq C$) de números reales que es a su vez un cuerpo respecto de las operaciones de adición y multiplicación del cuerpo C.*

Por las definiciones previas se puede deducir que para demostrar que cierto conjunto S es un subcuerpo de un cuerpo C debemos probar que: el 0 y el 1 de C están en el conjunto S, y que si a y b son elementos de S, también lo son $(a+b)$, $-a$, ab, y a^{-1}.

Ejemplo 1.2.8. *1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un campo. Se deja como ejercicio al lector verificarlo.*

2. *El conjunto de los enteros positivos: $1, 2, 3, \ldots$ no es un cuerpo por varias razones. Por ejemplo 0 no es un entero positivo; para ningún entero positivo n, es $-n$ un entero positivo; para ningún entero positivo n, excepto 1, es $1/n$ un entero positivo.*

3. *Se deja como ejercicio al lector demostrar que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no cumple con la definición de campo.*

4. *Se deja como ejercicio al lector verificar que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un subcampo de $\mathbb{R}$.*

Definición 1.2.35. *Un **número algebraico** es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación polinomial de la forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde:

I $n > 0$, *es el grado del polinomio (veáse Capítulo 3 de funciones).*

II $a_i \in \mathbb{Z}$, *los coeficientes del polinomio son todos números enteros.*

III $0 \neq a_n \in \mathbb{Z}$.

En general, si tenemos dos cuerpos $(K, +, \cdot)$ y $(L, +, \cdot)$ de forma que el segundo es extensión del primero , diremos que $\alpha \in L$ es algebraico sobre K si existe un polinomio $p \in K[x]$ del que α es raíz ($p(\alpha) = 0$).

Ejemplo 1.2.9. *(I) Todos los números racionales son algebraicos porque toda fracción de la forma a/b es solución de $bx - a = 0$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.*

(II) Todos los números construibles son algebraicos, véase Definición 1.2.29.

(III) *Algunos números irracionales como:* $\sqrt{2}$ *y* $\sqrt[3]{3}/2$ *también son algebraicos porque son soluciones de* $x^2 - 2 = 0$ *y* $8x^3 - 3 = 0$, *respectivamente.*

(IV) *Otros irracionales no son algebraicos, como* π *(demostrado por Lindermann en 1882) y* e *(demostrado por Hermite en 1873), por consiguiente son números trascendentes.*

1.3. Ejemplos del Capítulo

Ejemplo 1.3.1. *Sea* U *un conjunto universal cualquiera y* A, B *y* C *conjuntos cuyos elementos están en* U. *Entonces son verdaderas:*

(a) $A \subseteq U$;

(b) $A \subseteq A$;

(c) Si $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$ *entonces* $A \subseteq C$;

(d) $\emptyset \subseteq A$.

Solución. (a) Por hipótesis, los elementos de A son elementos de U.

(b) Es claro que la proposición $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in A)$ es verdadera y entonces $A \subseteq A$ es verdadera.

(c) Supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ son verdaderas. Esto significa que las dos proposiciones siguientes son verdaderas

$$\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

y

$$\forall x \in U : (x \in B \Rightarrow x \in C).$$

De esto se concluye que la proposición

$$\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

es verdadera.

(d) Si $x \in U$, la proposición $x \in \emptyset$ es falsa y por lo tanto la implicación $x \in \emptyset \Rightarrow X \in A$ es verdadera.

Como esto es cierto para cualquier elemento $x \in U$, la proposición

$$\forall x \in U : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

es verdadera.

□

Ejemplo 1.3.2. *Demostrar que las siguientes propiedades sobre el complemento de un conjunto se cumplen.*

(a) Para todo conjunto A, subconjunto de U, $(A^C)^C = A$*;*

(b) $\emptyset^C = u$*;*

(c) $U^C = \emptyset$*;*

(d) Si $A \subseteq B \Rightarrow B^C \subseteq A^C$.

Solución. (a) Sea $A = \{x \in U | p(x)\}$, $A^C = \{x \in U | \neg p(x)\} \Rightarrow (A^C)^C = \{x \in U | \neg(\neg p(x))\} = \{x \in U | p(x)\}$.

(b) Sea $c(x)$ una proposición abierta en U tal que para toda $x \in U$, $c(x)$ es falsa. Entonces $\emptyset = \{x \in U | c(x)\}$, y $\emptyset^C = \{x \in U | \neg c(x)\}$. Como $\neg c(x)$ es verdadera para cada $x \in U$, se concluye que $\emptyset^C = U$.

(c) Se deja como ejercicio para el lector.

(d) Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de U.

$$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\Rightarrow \forall x \in U : (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A))$$

$$\Rightarrow \forall x \in U : (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Rightarrow \forall x \in U : (x \in B^C \Rightarrow x \in A^C)$$

$$\Rightarrow B^C \subseteq A^C.$$

□

Ejemplo 1.3.3. *Demostrar que las siguientes propiedades sobre diferencia, unión e intersección de conjuntos se cumplen.*

1. *$A \cap \emptyset = \emptyset$;*

2. *$A \cap A^C = \emptyset$;*

3. *$A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$;*

4. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;*

5. *$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;*

6. *$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$;*

7. *Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$;*

8. *Si $B \subseteq A$, entonces $A - (A - B) = B$.*

A los incisos (4) y (5) se les llama ***leyes de D'Morgan.***

Solución. 1. $A \cap \emptyset = \{x \in U | x \in A \wedge x \in \emptyset\} = \emptyset$ ya que para cualquier elemento $x \in U$, $x \in A \wedge x \in \emptyset$ es falsa.

2. Se deja como ejercicio para el lector.

3. $A \cap B = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$; entonces para cada $x \in U$ se cumple:

$$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B,$$

y por lo tanto $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ se verifican.

4. Para cada $x \in U$ se verifican las siguientes bicondicionales:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

por lo tanto $\forall x \in U : x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

esto es,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5. Si $A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$, entonces
$$(A \cup B)^C = \{x \in U | \neg(x \in A \vee x \in B)\}$$
$$= \{x \in U | x \notin A \wedge x \notin B\} = A^C \cap B^C.$$
6. Se deja como ejercicio para el lector.
7. Se deja como ejercicio para el lector.
8. $$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C = A \cap (A^C \cup (B^C)^C)$$
$$A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B)$$
$$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$
Como $B \subseteq A$, se tiene por el ejercicio anterior que $A \cap B = B$.

$\square$

Ejemplo 1.3.4. $S(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. La prueba es por inducción matemática, entonces:

1. Caso Base. El caso base es cuando $n = 1$, veamos si se cumple
$$S(1) = 1 \cdot 2 = 2 \ \wedge \ \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2,$$
por lo tanto se cumple.
2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$ entonces se verifica que
$$S(k) = k(k+1)(k+2)/3.$$
3. En este paso debemos demostrar que dada la Hipótesis Inductiva, la proposición se cumple para $n = k + 1$, es decir:
$$\vdash S(k) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \Rightarrow S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Entonces para demostrar el Paso 3 (Paso Inductivo) consideremos que:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1)(k+2)$$

entonces

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k+3}{3}\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Visto esto último llegamos a que el Paso 3 se demuestra; por tanto por el Principio de Inducción Matemática la proposición 1.3.4 queda probada. □

Ejemplo 1.3.5. $2^n > 2n+1$ *si* $n \in \{4, 5, 6, \dots\}$.

Demostración. La prueba es por inducción matemática.

1. Caso base. Si $n = 4 \Rightarrow 2^4 = 16 \wedge 2(4)+1 = 9$. Entonces se cumple ya que $16 > 9$

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que para $n = k$ vale, es decir es verdad que:
$$2^k > 2k+1.$$
Hasta aquí $k > 4$.

3. Debemos demostrar que para $n = k+1$ se cumple la proposición, esto es, por demostrar que:
$$2^{k+1} > 2k+3$$
dada la Hipótesis Inductiva.

Enseguida para demostrar el Paso 3 consideremos lo siguiente:

$$2^{k+1} - (2k+3) = 2 \cdot 2^k - (2k+3).$$

Ahora

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (2k+3) &> 2 \cdot (2k+1) - (2k+3) \text{ (H.I.)} \\ &= 4k+2-2k-3 = 2k-1, \end{aligned}$$

en estas últimas expresiones se debe tomar en cuenta la hipótesis inductiva.

A continuación como $k > 4$ entonces $2k > 8$, lo cual implica que

$$2k - 1 > 7 > 0;$$

es decir, hemos obtenido lo siguiente:

$$2^{k+1} - (2k + 3) > 2k - 1 > 0,$$

por tanto

$$2^{k+1} - (2k + 3) > 0 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k + 3;$$

y así, visto esto último el Paso 3 se demuestra.

Considerando todo lo anterior tenemos que por el Principio de Inducción Matemática queda demostrada esta proposición. $\square$

Ejemplo 1.3.6. $2^n \geq n^2$ *si* $n \in \{1, 2\} \cup \{4, 5, 6, 7, \dots\}$

Demostración. En primera instancia, veamos si se cumple esta proposición para el conjunto más pequeño $\{1, 2\}$, entonces si $n = 1$, $2^n = 2^1 = 2 \wedge n^2 = 1^2 = 1$, por lo tanto se cumple ya que $2 > 1$.

Ahora, si $n = 2$, $2^n = 2^2 = 4 \wedge n^2 = 2^2 = 4$, entonces también es válida la proposición, ya que se da la igualdad.

A continuación veamos el resto del conjunto considerado:

$$\{4, 5, 6, 7, \dots\},$$

si $n = 4$, $2^n = 2^4 = 16 \wedge n^2 = 4^2 = 16$, es decir, se da la igualdad $16 = 16$, por tanto la proposición es válida. Para el resto del conjunto

$$\{5, 6, 7, 8, \dots\}$$

se aplica inducción matemática y sólo se demostrará la desigualdad estricta, esto es,

$$2^n > n^2 \text{ si } n \in \{5, 6, 7, 8, \dots\},$$

entonces

1. Caso Base. Si $n = 5$, $2^n = 2^5 = 32 \wedge n^2 = 5^2 = 25$; la proposición es válida porque $32 > 25$.

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que para $n = k > 5$ vale la proposición, entonces se toma como cierto que:
$$2^k > k^2. \tag{1.4}$$

3. Paso Inductivo. Debemos demostrar que dada la Hipótesis Inductiva, entonces para $n = k + 1$ vale la proposición, es decir:
$$\vdash 2^{k+1} > (k+1)^2 \Longleftrightarrow 2^k > k^2. \tag{1.5}$$
.

Para probar el Paso Inductivo (1.5) consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k - (k+1)^2 \\ &= 2^k + 2^k - (k^2 + 2k + 1), \end{aligned}$$

por la Hipótesis Inductiva (1.4) tenemos:

$$2^k + 2^k - (k^2 + 2k + 1) > 2^k + k^2 - k^2 - 2k - 1 = 2^k - 2k - 1.$$

Ahora por la Proposición 1.3.5

$$2^k > 2k + 1 \text{ si } k \in \{4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Entonces
$$2^k - 2k - 1 > 0 \text{ si } k \in \{5, 6, 7, \dots\},$$

por lo tanto, considerando seriamente las últimas expresiones obtenemos:

$$2^{k+1} - (k+1)^2 > 0 \text{ si } k \in \{5, 6, 7, \dots\}.$$

Así,
$$2^{k+1} > (k+1)^2 \text{ si } k \in \mathbb{Z}^+ - \{1, 2, 3, 4\}. \tag{1.6}$$

Finalmente, vistas las primeras consideraciones y la última Expresión (1.6), la Proposición 1.3.6 queda demostrada. $\square$

Ejemplo 1.3.7. $3^n < (n+1)!$ *si* $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$.

Demostración. La prueba es por inducción matemática entonces:

1. Caso Base. El caso base es cuando $n = 4$, ya que

$$3^n = 3^4 = 81 \wedge (n+1)! = 5! = 120 \text{ i.e., el teorema es válido.}$$

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que para $n = k > 4$ la proposición se cumple, i.e.,

$$3^k < (k+1)! \text{ se asume como verdadero.}$$

3. Paso Inductivo:

$$\text{por demostrar que } 3^{k+1} < (k+2)! \text{ dada la H.I.}$$

Para probar el tercer punto consideremos:

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k < 3 \cdot (k+1)!; \tag{1.7}$$

la desigualdad en la última expresión se verifica por la hipótesis inductiva. Ahora, tenemos que:

$$k > 4 \Rightarrow k+2 > 6 > 3 \Rightarrow k+2 > 3.$$

Por lo tanto por la Expresión (1.7) y el resultado inmediatamente previo se concluye:

$$3^{k+1} < (k+2)(k+1)!.$$

Entonces

$$3^{k+1} < (k+2)! \text{ es decir, el Paso Inductivo se demuestra.}$$

Y así visto este último resultado, la proposición se demuestra por el Principio de Inducción Matemática. □

Ejemplo 1.3.8. *$n! > n^2$ si $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. 1. Caso Base. Si $n = 4$ veamos que es lo que pasa:

$$4! = 24 \wedge 4^2 = 16 \therefore \text{la proposición es válida}$$

2. Hipótesis Inductiva. Supongamos que para $n = k > 4$ se cumple la proposición
$$\Rightarrow k! > k^2.$$

3. Por demostrar que para $n = k+1$ vale la proposición dada la H.I. i.e,
$$\text{Si } k! > k^2 \Rightarrow (k+1)! > (k+1)^2.$$

Para demostrar el tercer punto consideremos lo siguiente:

$$(k+1)! - (k+1)^2 = (k+1)k! - (k+1)^2$$
$$= (k+1)\left[k! - (k+1)\right].$$

Ahora, como $k! > k^2$ por la H.I., tenemos:

$$(k+1)(k! - k - 1) > (k+1)(k^2 - k - 1)$$
$$= (k+1)\left(k^2 - k + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1\right)$$
$$= (k+1)\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right].$$

Así, obtenemos:

$$(k+1)(k! - k - 1) > (k+1)\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]. \tag{1.8}$$

Ahora, $k > 4 \Rightarrow k - 1/2 > 4 - 1/2 = 7/2$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > \frac{49}{4} - \frac{5}{4}.$$

Por lo tanto
$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 11 > 0. \tag{1.9}$$

También, $k + 1 > 5 > 0$, i.e.

$$k + 1 > 0. \tag{1.10}$$

Entonces por las Desigualdades (1.8), (1.9) y (1.10)

$$(k+1)(k^2-k-1)>0,$$

es decir,

$$(k+1)(k!-k-1)>(k+1)(k^2-k-1)>0.$$

Entonces

$$(k+1)!-(k+1)^2>0,$$

por lo tanto

$$(k+1)!>(k+1)^2.$$

Por el Principio de Inducción Matemática la proposición queda demostrada. □

Ejercicio 1.3.1. *Pruebe que* $S=\{n\in\mathbb{N}:1-2^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}+5^n=0\}$ *no es un conjunto inductivo.*

Solución 1.3.1. *Para la solución considere lo siguiente:*

1. $1\in S$.
2. $3\in S$, *pero* $3+1=4\notin S$.

Veamos si es verdad

1. *Si* $n=1$, *entonces* $1-2^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}+5^n=1-8+18-16+5=0$ *por consiguiente* $1\in S$.
2. *Si* $n=3$, *entonces* $1-2^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}+5^n=-31+162+256+125=0$, *entonces* $3\in S$*; pero si* $n=4$, *entonces* $1-2^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}+5^n=-63+486-1024+625=24$, *por lo tanto* $4\notin S$.

Se concluye que S *no es un conjunto inductivo.*

Ejemplo 1.3.9. *Demostrar que si* n^2 *es par, entonces* n *es par para todo* $n\in\mathbb{Z}$.

Demostración. La prueba es por contradicción. Supongamos que n^2 es par y que n no es par, por consiguiente tenemos:

$$n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1\\ &= 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1,\end{aligned}$$

es decir, llegamos a que a^2 es impar (i.e., no es par), pero esto es una contradicción porque habíamos supuesto que era par, por lo tanto la proposición se verifica. □

Ejemplo 1.3.10. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Demostración. La prueba es por contradicción.

Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, es decir, supongamos que $\sqrt{2}$ es racional para llegar a una contradicción. Sin perdida de generalidad

$$0 < \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z}^+,$$

ahora, para que la contradicción se de debemos tener en cuenta algo que es de suma importancia, y esto es que la fracción $\frac{a}{b}$ debe ser irreducible (véase Definición 1.2.26), entonces como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ tenemos:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \tag{1.11}$$

por lo tanto visto esto último tenemos que a^2 es par y por la Proposición inmediatamente anterior a también lo es, esto es:

$$a = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.12}$$

Entonces por (1.11) y (1.12) se tiene:

$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2,$$

así por el mismo razonamiento previo llegamos a que b es un número par, es decir

$$b = 2l \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}^+,$$

que es una contradicción. La razón es porque supusimos que la fracción $\frac{a}{b}$ era una fracción irreducible, esto es, que a y b no tienen factores comunes excepto el 1, y hemos obtenido que 2 es un factor común de a y b, por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional. □

Ejemplo 1.3.11 (Identidad de Bézout)**.** *Sean* $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *y* $d = mcd(a, b)$ *(máximo común divisor de* a *y* b*), entonces existen* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tal que*

$$d = ax + by.$$

Solución. Sean $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $S = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$. Es claro que en S hay enteros positivos. De hecho, $|b| \in S$. Ahora definamos $d = ax_0 + by_0$ el menor entero positivo en S.

Afirmamos que d divide a todo entero $n \in S$.

En efecto, dada $n = ax_1 + by_1 \in S$, sean $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = qd + r$ con $0 \leq r < |d| = d$ (Teorema de la División para números enteros, ver Teorema 1.2.3). Entonces $n - qd = a(x_1 - qx_0) + b(y_1 - qy_0) = r \in S$, de modo que, como d es el menor entero positivo en S, necesariamente $r = 0$, esto es, $d|n \in S$.

Ahora, como $a, b \in S$ (basta escoger $(x, y) = (1, 0)$ y $(x, y) = (0, 1)$, respectivamente), d divide a a y b; entonces $d \leq mcd(a, b)$.

Por otro lado, $mcd(a, b)$ divide a a y b, de modo que $mcd(a, b)$ divide a d. Por lo tanto $mcd(a, b) \leq d$ (véase Lema 2.3.1 en Capítulo 2) y, consecuentemente, $mcd(a, b) = d$. □

Ejemplo 1.3.12 (Lema de Euclides)**.** *Si* n *es un número entero y divide a un producto* ab *y es coprimo con uno de los factores, entonces* n *divide al otro factor.*

Demostración. En otra notación este lema se puede re-escribir como:

$$\text{Si } n|ab \text{ y } mcd(n, a) = 1, \text{ entonces } n|b.$$

Supongamos, sin perdida de generalidad, que n es coprimo con a y veamos que n divide a b. Por definición, n y a son coprimos si y sólo si $mcd(a, n) = 1$; y la identidad de Bézout nos asegura que existen números enteros x e y tal que:

$$ax + ny = 1$$

$$\Rightarrow bax + bny = b.$$

Ahora, como $n|ba$ y $n|bn$ entonces $n|bax + bny = b$; por lo tanto se concluye que $n|b$.

□

Ejemplo 1.3.13 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo entero positivo mayor que 1 es un número primo o bien un único producto de números primos.*

Demostración de Euclides. La demostración se hace en dos pasos. En el primero, se demuestra que todo número es un producto de primos. En el segundo, se demuestra que cualquier dos representaciones son iguales.

1. **Descomposición en primos:** Supóngase que existen enteros positivos que no pueden representarse como producto de primos y que n es el mínimo de ellos. Este número n no puede ser 1, por la convención anterior. Tampoco puede ser un primo, porque todo primo es el producto de un único número primo: él mismo.

   Dado que n no es primo, por definición hay un número distinto a sí mismo y distinto a 1 que lo divide. Llamemos a ese número a, por definición de divisivilidad existe b tal que $n = ab$.

   Así, $n = ab$, donde a y b son enteros positivos menores que n. Como n es el mínimo entero positivo para el que falla el teorema. Tanto a como b pueden escribirse como producto de primos. Entonces $n = ab$ también puede escribirse como producto de primos, que es una contradicción porque hemos supuesto que con n el teorema falla.

2. **Unicidad:** La demostración de la unicidad se apoya en el siguiente hecho: si un número primo p divide a un producto ab, entonces divide a a o divide a b (lema de Euclides).

   Dados dos productos de primos que tengan igual resultado, tómese un primo p del primer producto. Divide al primer producto, y por lo tanto también al segundo ya que ambos productos dan el mismo resultado. Por el hecho anterior p debe dividir al menos a un factor del segundo producto, pero los factores son todos primos, así que p debe ser igual a uno de los factores del segundo producto. Se puede entonces cancelar a p de ambos productos. Siguiendo de esta forma se cancelarán todos los factores de ambos productos, con lo cual éstos deben coincidir exactamente.

$\square$

Ejemplo 1.3.14. *Demostrar que* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ *si* p *es un número primo.*

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Si suponemos que

$$p \text{ es un número primo y } \sqrt{p} \in \mathbb{Q},$$

entonces $\sqrt{p} = a/b$ tal que $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y a/b es una fracción irreducible, i.e., a y b no tienen factores en común excepto el 1, o lo que es lo mismo $MCD(a, b) = 1$, por tanto

$$p = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Rightarrow a^2 = pb^2,$$

por consiguiente a^2 es multiplo de p.

Ahora, como $a \in \mathbb{Z}^+$, se puede descomponer en sus factores primos (véase Teorema Fundamental de la Aritmética 1.3.13), entonces

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

$$\Rightarrow a^2 = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n) \cdot (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n) = pb^2.$$

Por lo tanto p es igual a alguno de los factores primos de a.

Así, a también es múltiplo de p. Entonces

$$a = pm \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow a^2 = p^2 \cdot m^2 = pb^2$$
$$\Rightarrow b^2 = pm^2,$$

es decir, que b^2 es múltiplo de p, al igual que a^2 y a; y por el mismo razonamiento hecho con estos números llegaremos a que b es múltiplo de p

$$\text{i.e., } b = pl \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}^+,$$

que es una contradicción, porque se concluiría que p es factor común de a y b, que es imposible ya que hemos supuesto que $MCD(a, b) = 1$. Por lo tanto $\sqrt{p}$ debe ser irracional. $\square$

Capítulo 2

Axiomas de Orden y Teoremas Relacionados

En este capítulo se estudiarán los Axiomas de Orden de los Números Reales, y algunos Teoremas Relacionados de importancia.

Las definiciones, conceptos, imagénes y demostraciones en este capítulo fueron tomadas de los libros y sitios de internet [1], [11] y [13]; un pequeño porcentaje es aportación del tesista, como por ejemplo el Lema 2.3.1.

2.1. Introducción

En este apartado presentaremos una relación de orden en los números reales $\mathbb{R}$.

Intuitivamente conocemos el significado de la relaciones $<, >$ o $=$. Sabemos que $-3 < 6$ y $3 < 5$ son enunciados verdaderos. Sin embargo, necesitamos una base sólida a partir de la cual se pueden deducir resultados más precisos acerca de las desigualdades.

2.2. Axiomas de Orden

Definición 2.2.1. *Sea A un conjunto dado no vacío y R una relación binaria definida en A se dice que R es una* ***relación de orden*** *si cumple las siguientes propiedades:*

1. *Reflexividad. Todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir,* $\forall x \in A,\ xRx$.

2. *Antisimetría. Si dos elementos de A se relacionan entre sí, entonces ellos son iguales. Es decir,* $\forall x, y \in A,\ xRy,\ yRx \Rightarrow x = y$

3. *Transitividad. Si un elemento de A está relacionado con otro, y ese otro a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero estará relacionado también con este último. Es decir,*

$$\forall x, y, z \in A,\ xRy,\ yRz \Rightarrow xRz.$$

Una relación de orden R sobre un conjunto A puede denotarse con el par ordenado $(A, \leq)$.

Notación 2.2.1. *La proposición «a menor o igual que b» se denotará $a \leq b$ o $b \geq a$.*

Definición 2.2.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto dado, $\leq$ es una* ***relación de orden total*** *si y sólo si todos los elementos de A se relacionan entre sí, es decir,*

$$\forall x, y \in A, (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

Axiomas de Orden:

O1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

(i) $a = b$;

(ii) $a < b$;

(iii) $b < a$.

esto es la llamada **Ley de Tricotomía**

O2. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, $b \leq c$, entonces $a \leq c$. **Ley de Transitividad.**

O3. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ y $a \leq b$, entonces $ac \leq bc$. **Consistencia del producto** respecto a la relación de orden. Para referencias posteriores a ella, se escribirá como c.p.

O4. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$. **Consistencia de la suma** respecto a la relación de orden. Para referencias posteriores a ella se escribirá como c.s.

Un campo que cumple con estos cuatro axiomas se llama campo ordenado.

Definición 2.2.3 (Raíz cuadrada)**.** *Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq 0$. Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a > 0$ o $a = 0$ y cumple que $a^2 = b$, a se llamará la **raíz cuadrada** de b y denota por $\sqrt{b}$.*

Nótese que si $a^2 = b$, también $(-a)^2 = b$.

Definición 2.2.4. *Sea $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$ o $b = 0$. Si $a = \sqrt{b}$, llamaremos a $-a$ la **raíz negativa** de b, esto es, $-a = -\sqrt{b}$.*

A continuación enunciamos otra definción de raíz cuadrada equivalente a la Definición 2.2.4.

Definición 2.2.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, i.e., $a, b \geq 0$; si se cumple que*

$$a^2 = b \Longleftrightarrow a = \sqrt{b},$$

*entonces se dice que a es la **raíz cuadrada** de b.*

Ahora, definiremos el concepto de valor absoluto de un número real.

Definición 2.2.6. *Dado $x \in \mathbb{R}$, el **valor absoluto** de x, el cual denotaremos como $|x|$, se define de la forma siguiente:*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

2.3. Teoremas Importantes de Orden.

Aunque las desigualdades se presentan pocas veces en las matemáticas elementales, desempeñan un papel destacado en el curso superior de cálculo infinitesimal. Las dos nociones de desigualdad, $a < b$ y $a > b$, están íntimamente relacionadas: $a < b$ quiere decir lo mismo que $b > a$ (así $1 < 3$ y $3 > 1$ son, sencillamente, dos maneras distintas de escribir un mismo aserto). Los números a que satisfacen $a > 0$, se llaman **positivos**, mientras que los números a que satisfacen $a < 0$ se llaman **negativos**. Todos los hechos conocidos acerca de las desigualdades, por elementales que parezcan, son consecuencia de los teoremas expuestos a continuación.

Teorema 2.3.1. *Si $a \in \mathbb{R}$, se cumple*

(1) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$.

(2) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$.

(3) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$.

(4) $a < 0 \Leftrightarrow a^{-1} < 0$.

Demostración. (1) Demostraremos la implicación: $a > 0 \Rightarrow -a < 0$.
Si $a > 0$, entonces $a + (-a) > -a \Rightarrow 0 > -a$.
De igual manera. Si $-a < 0$, entonces $(-a) + a < a \Rightarrow a > 0$.

(2) La prueba es similar a la de (1).

(3) Queremos demostrar que si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.
Sea $a > 0$ y supongamos que $a^{-1} < 0$ o $a^{-1} = 0$.
Si $a^{-1} = 0$, entonces $aa^{-1} = 0$.
Pero $aa^{-1} = 1$. Así, $1 = 0$ es una contradicción.
Si $a > 0$ y $a^{-1} < 0$, entonces

$$aa^{-1} < 0 \cdot a \text{ (c.p.)}$$

$$\Rightarrow 1 < 0$$

Esto último, es una contradicción.
Así, si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.

Ahora, resta demostrar que $a^{-1} > 0 \Rightarrow a > 0$.
Como $a = (a^{-1})^{-1}$ y si $a^{-1} > 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} > 0$ por la implicación anterior. Así, $a > 0$.

(4) La prueba es similar a (3).

$\square$

Teorema 2.3.2. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ tienen el mismo signo, entonces $ab \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.*

Demostración. Si $a, b \in \mathbb{R}$ tienen el mismo signo, entonces se pueden dar tres casos.

Caso 1. Si $a = 0$ o $b = 0$ o $a = b = 0$.
La prueba de este caso es trivial porque siempre $ab = 0$, por lo tanto se cumple el teorema, sin embargo este caso queda excluido si se considera que el 0 es neutral.

Caso 2. Sean $a, b > 0$. Si a y b son positivos se escribe como:

$$0 < a \wedge b > 0.$$

Por la consistencia del producto tenemos:

$$0 \cdot b < ab$$

$$\Rightarrow 0 < ab.$$

Así, el teorema se cumple para este caso.

Caso 3. Sean $a, b < 0$. Si a y b son ambos negativos se escribe como:

$$a < 0 \wedge -b > 0.$$

Por la consistencia del producto tenemos que:

$$a(-b) < 0(-b).$$

Por el Teorema 2.3.1 se tiene que:

$$-ab < 0 \Rightarrow ab > 0.$$

Se concluye que para este caso se cumple el teorema.

□

Corolario 1. $\forall x \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $x^2 \geq 0$.

Demostración. Si hacemos $a = b = x$ en el Teorema 2.3.2 se demuestra este Corolario. □

Teorema 2.3.3. *Si* $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, *entonces* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Demostración. Para demostrar este teorema basta probar que

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Si $x=\sqrt{a}$ y $y=\sqrt{b}$, entonces por definición de raíz cuadrada tenemos:

$$x^2 = a \wedge y^2 = b,$$

por tanto

$$\begin{aligned} ab = x^2\cdot y^2 = (x\cdot x)(y\cdot y) &= \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}\right) \\ &= \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right) \\ &= \left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.4. *Si $a,b\in\mathbb{R}$, se cumple*

(1) $a<b \Leftrightarrow -b<-a$.

(2) Si a y b tienen el mismo signo, entonces

$$a<b \Leftrightarrow b^{-1}<a^{-1}.$$

Demostración. (1)

$$\begin{aligned} a<b &\Rightarrow (-a)+a<(-a)+b \\ &\Rightarrow 0<(-a)+b \\ &\Rightarrow -b+0<((-a)+b)+(-b) \\ &\Rightarrow -b<-a. \end{aligned}$$

Recíprocamente

$$\begin{aligned} &-b<-a \\ &\Rightarrow -b+b<-a+b \\ &\Rightarrow 0<-a+b \\ &\Rightarrow a+0<a+(-a+b) \\ &\Rightarrow a<b. \end{aligned}$$

(2) Si a, b tienen el mismo signo y $a < b$, entonces

$$ab \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a < b \text{ (Teorema 2.3.2)}$$

$$\Rightarrow (ab)^{-1} \in \mathbb{R}^+ \wedge a < b \text{ (Teorema 2.3.1)}$$

$$\Rightarrow a^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \wedge a < b$$

$$\Rightarrow \left(a^{-1}b^{-1}\right) a < \left(a^{-1}b^{-1}\right) b \text{ (consistencia del producto)}$$

$$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1}.$$

Ahora, si a, b tienen igual signo y $b^{-1} < a^{-1}$, entonces

$$a^{-1}, b^{-1} \text{ tienen el mismo signo y } b^{-1} < a^{-1} \text{ (Teorema 2.3.1)}$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} < (a^{-1})^{-1} \text{ (usando la implicación previa)}$$

$$\Rightarrow a < b.$$

$\square$

Teorema 2.3.5. *Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se cumple:*

(1) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

(2) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$.

Demostración. (1) Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + c$ y $b + c < b + d$ (c.s)

$$\Rightarrow a + c < b + d \text{ (transitividad).}$$

(2) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bc \wedge bc < bd$ (c.p)

$$\Rightarrow ac < bd \text{ (transitividad).}$$

$\square$

Teorema 2.3.6. *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

Demostración. Como $a, b > 0$ por el Teorema 2.3.5 se cumple

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Ahora, para demostrar

$$a, b \in \mathbb{R}^+, a^2 < b^2 \Rightarrow a < b,$$

supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^+, a^2 < b^2$ y a no es menor que b. Así,

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a^2 < b^2 \wedge (a = b \vee a > b \text{ (tricotomía)})$$

$$\Rightarrow \big(a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a^2 < b^2 \wedge a = b\big) \vee \big(a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a^2 < b^2 \wedge a > b\big)$$
$$\Rightarrow \big(a^2 < b^2 \wedge a^2 = b^2\big) \vee \big(a^2 < b^2 \wedge a^2 > b^2\big) \text{ (Véase Teorema 2.3.5).}$$

Esto es una contradicción porque viola la Ley de Tricotomía. □

Notación 2.3.1. *El signo ! significa contradicción.*

Teorema 2.3.7. *Sea $x \in \mathbb{R}$; si $x \geq 0$, entonces $x \geq -x$.*

Demostración. La prueba la haremos por contradicción. Supongamos que:

$$(x > 0 \vee x = 0) \wedge (x < -x)$$

$$\Rightarrow (x > 0 \wedge x < -x) \vee (x = 0 \wedge x < -x)$$
$$\Rightarrow (x > 0 \wedge x < -x < 0)! \vee (0 < 0)!$$

Por lo tanto el teorema es verdadero. □

Teorema 2.3.8. *Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x < 0$, entonces $x < -x$.*

Demostración. La prueba es por contradicción, entonces supongamos que

$$(x < 0) \wedge (x \geq -x)$$

$$\Rightarrow (x < 0) \wedge (x > -x \vee x = -x)$$
$$\Rightarrow (x < 0 \wedge x > -x) \vee (x < 0 \wedge x = -x)$$
$$\Rightarrow (x < 0 \wedge x > -x > 0)! \vee (x < 0 \wedge x = -x > 0)!$$

Vistas las contradicciones el teorema queda probado. □

Teorema 2.3.9. *$\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|x| \geq 0$.*

Demostración. Como $x \in \mathbb{R}$ entonces por tricotomía se tienen los siguientes casos:

(1) $x \geq 0$;

(2) $x < 0$.

Si $x \geq 0$ se tiene que $|x| = x \geq 0$ (véase Definición 2.2.6) y por tanto el teorema se verifica para (1).

Si se da (2), entonces $|x| = -x > 0$. Por consiguiente el teorema también es válido. □

Teorema 2.3.10. *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$.*

Demostración. Para la demostración observemos que la expresión

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

genera dos casos, que son los siguientes:

(1) $x \leq |x|$.

(2) $-x \leq |x|$,

(1) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \geq 0$ o $x < 0$ (tricotomía).
Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$.
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x > 0 \Rightarrow |x| - x > 0$ (véase Teorema 2.3.5 inciso 1) $\Rightarrow$ $|x| > x$ (c.s). Por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq |x|.$$

(2) Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \geq 0$ o $x < 0$.
Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y por el Teorema 2.3.7 tenemos que $x \geq -x$ así, $|x| \geq -x$.
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \geq |x|.$$

Hemos demostrado ambos casos, por lo tanto el teorema queda demostrado. $\square$

Teorema 2.3.11. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene lo siguiente*

$$|x| \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y.$$

Demostración. Observemos que si $y < 0$, $|x| \leq y$ y $-y \leq x \leq y$ son proposiciones falsas y por lo tanto la bicondicional es verdadera. Así, se reduce a demostrar que si $x \in \mathbb{R}$ y $y \geq 0$

$$|x| \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y.$$

$\left(\Longrightarrow \right)$ Sean $x \in \mathbb{R}$ y $y \geq 0$. Supongamos que $|x| \leq y$, demostraremos que

$$-y \leq x \leq y.$$

Como $x \in \mathbb{R}$ por tricotomia tenemos que $x \geq 0$ o $x < 0$,

I. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y $|x| \leq y \Rightarrow x \leq y$ y como $y \geq 0 \Rightarrow -y \leq 0$ y $0 \leq x \Rightarrow -y \leq x$. Así,
$$-y \leq x \leq y.$$

II. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $|x| \leq y$

$$\Rightarrow -x \leq y$$

$$\Rightarrow -y \leq x$$

y como $x < 0$ y $0 \leq y$, entonces $x < y$. Así,

$$-y \leq x < y.$$

De esta forma, si $|x| \leq y$, entonces $-y \leq x \leq y$.

$\left(\Longleftarrow \right)$ Supongamos que $-y \leq x \leq y$, demostraremos que

$$|x| \leq y.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \geq 0$ o $x < 0$.

I. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y $x \leq y \Rightarrow |x| \leq y$.

II. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $-y \leq x \Rightarrow y \geq -x$, de esta manera $y \geq |x|$.

Por lo tanto, si $-y \leq x \leq y$, tenemos $|x| \leq y$.

Así, queda demostrado este teorema. $\square$

Teorema 2.3.12. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|x| \geq y \Longleftrightarrow x \geq y \vee -x \geq y.$$

Demostración. ($\Longleftrightarrow$)

Una proposición equivalente a la que queremos demostrar es la siguiente:

$$\neg(|x| \geq y) \Longleftrightarrow \neg(x \geq y \vee -x \geq y),$$

es decir,

$$|x| < y \Longleftrightarrow x < y \wedge -x < y,$$

o sea

$$|x| < y \Longleftrightarrow -y < x < y.$$

Esto es la afirmación del Teorema 2.3.11. Así, queda demostrado este teorema. $\square$

Teorema 2.3.13 (Desigualdad del Triángulo)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración. Recordemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (por el Teorema 2.3.10) se cumple:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

y

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Entonces

$$-\left(|x| + |y|\right) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (véase el Teorema 2.3.11).}$$

Así el teorema queda probado. $\square$

Teorema 2.3.14. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces* $|xy| = |x||y|$.

Demostración. Si x y/o y es cero, el resultado es inmediato. Lo único que faltaría para obtener el resultado es observar el caso en que $x \wedge y$ no son cero.

Si $x \neq 0, y \neq 0$, entonces tenemos que

$$x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \vee x < 0$$

y

$$y \neq 0 \Rightarrow y > 0 \vee y < 0$$

Así tenemos los siguientes cuatro casos posibles:

(I) $x > 0$ y $y > 0$;

(II) $x > 0$ y $y < 0$;

(III) $x < 0$ y $y > 0$;

(IV) $x < 0$ y $y < 0$.

Demostraremos los cuatro casos.

(I)

$$\begin{aligned} &\text{Si } x > 0 \Rightarrow |x| = x. \\ &\text{Si } y > 0 \Rightarrow |y| = y. \\ &\text{Si } xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy \\ &\Rightarrow |xy| = |x||y|. \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} &\text{Si } x > 0 \Rightarrow |x| = x. \\ &\text{Si } y < 0 \Rightarrow |y| = -y. \\ &\text{Si } xy < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = x(-y) \\ &\Rightarrow |xy| = |x||y|. \end{aligned}$$

(iii)

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$$
$$\text{Si } y > 0 \Rightarrow |y| = y.$$
$$\text{Si } xy < 0 \Rightarrow |xy| = -xy$$
$$\Rightarrow |xy| = |x||y|.$$

(iv)

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$$
$$\text{Si } y < 0 \Rightarrow |y| = -y.$$
$$\text{Si } xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy$$
$$\Rightarrow |xy| = (-|x|)(-|y|) = |x||y|.$$

Como en cualquiera de los cuatro casos obtenemos que

$$|xy| = |x||y|.$$

□

Teorema 2.3.15. *Si* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x \neq 0$*,* $y \neq 0$*, entonces*

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy > 0.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Probaremos que si $|x+y| = |x| + |y|$, entonces $xy > 0$.

$$|x+y| = |x| + |y| \Rightarrow |x+y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
$$\Rightarrow \left|(x+y)^2\right| = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \text{ (por el teorema anterior)}$$
$$\Rightarrow (x+y)^2 = |x^2| + 2|x||y| + |y^2| \text{ (ver el Teorema anterior)}$$
$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$$
$$\Rightarrow xy = |x||y|$$
$$\Rightarrow xy > 0$$

($\Leftarrow$) Ahora probaremos que si $xy > 0$ entonces $|x+y| = |x| + |y|$.
Si $xy > 0$, entonces x y y tienen signos iguales, por lo tanto

(a) $x, y \in \mathbb{R}^+$ o

(b) $x, y \in \mathbb{R}^-$.

Probemos (a) y (b).

(a) Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $|x| = x$ y $|y| = y$

$$\Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x + y| = |x| + |y|.$$

(b) Si $x, y \in \mathbb{R}^-$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^-$ y $|x| = -x$ y $|y| = -y$

$$\Rightarrow |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$$

$$|x + y| = |x| + |y|.$$

Por lo tanto si $xy > 0$, entonces

$$|x + y| = |x| + |y|.$$

$\square$

Teorema 2.3.16. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $|a| = \sqrt{a^2}$.*

Demostración. Probaremos que:

$$|a|^2 = a^2 \text{ (véase Definición 2.2.5)}$$

$$\Rightarrow |a|^2 = |a||a| = |a \cdot a| \text{ (por el teorema 2.3.14)}$$
$$= |a^2| = a^2.$$

$\square$

Proposición 2.3.1. *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Probaremos que si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Por contradicción. Supongamos que:

$$a < b \wedge \neg(\sqrt{a} < \sqrt{b}),$$

es decir,

$$a < b \wedge \left(\sqrt{a} > \sqrt{b} \vee \sqrt{a} = \sqrt{b}\right).$$

Esto genera dos casos:

(I) $a < b \wedge \sqrt{a} > \sqrt{b}$ o

(II) $a < b \wedge \sqrt{a} = \sqrt{b}$

(I) Si $a < b \wedge \sqrt{a} > \sqrt{b}$, entonces

$$a < b \wedge \sqrt{a}\sqrt{a} > \sqrt{a}\sqrt{b} \wedge \sqrt{a}\sqrt{b} > \sqrt{b}\sqrt{b} \text{ (c.p)}$$
$$\Rightarrow a < b \wedge \sqrt{a^2} > \sqrt{ab} > \sqrt{b^2} \text{ (por el Teorema 2.3.3)}$$
$$\Rightarrow a < b \wedge \sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$$
$$\Rightarrow a < b \wedge |a| > |b| \text{ (véase el teorema anterior)}$$
$$\Rightarrow a < b \wedge a > b \,! \text{ (tricotomía)}$$

(II) Si $a < b \wedge \sqrt{a} = \sqrt{b}$, entonces

$$a < b \wedge \left(\sqrt{a}\right)^2 = b \text{ (ver Definición 2.2.5)}$$
$$\Rightarrow a < b \wedge \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = b$$
$$\Rightarrow a < b \wedge \sqrt{a^2} = b$$
$$\Rightarrow a < b \wedge |a| = b$$
$$\Rightarrow a < b \wedge a = b \,! \text{ (tricotomía).}$$

Así tenemos que:

$$a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

se verifica.

($\Leftarrow$) Ahora, probaremos que si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces $a < b$.

Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} < \sqrt{b}\sqrt{b} \wedge \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b} < \sqrt{b}\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{b}\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$$
$$\Rightarrow |a| < |b|$$
$$\Rightarrow a < b.$$

$\square$

Lema 2.3.1. *Si $M, d \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$M|d \Rightarrow M \leq d.$$

Demostración. La prueba es por contradicción. Supongamos que

$$M|d \wedge M > d.$$

Entonces

$$\begin{gathered} Mx = d \wedge M > d \wedge x \in \mathbb{Z}^+ \\ \Rightarrow Mx > dx \Rightarrow d > dx \Rightarrow d - dx > 0 \\ \Rightarrow d(1-x) > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ !;} \end{gathered}$$

esto es una contradicción porque hemos visto que $x \in \mathbb{Z}^+$, por lo tanto x no puede ser entero positivo y menor que 1.

$\square$

Lema 2.3.2. *Si $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces se verifica que*

$$\frac{x}{x+1} < 1.$$

Demostración. Si $x = 0$ obviamente se cumple el lema, porque obtendríamos

$$\frac{x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0 < 1.$$

Ahora, cuando $x \neq 0$, esto es, cuando $x > 0$ usaremos una prueba por contradicción. Entonces supongamos que se cumple:

$$x > 0 \wedge \frac{x}{x+1} \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq x + 1 \text{ (c.p.) } \Rightarrow 0 \geq 1.$$

Esto último es claramente una gran contradicción, por lo tanto, con esto queda demostrado este lema.

$\square$

Teorema 2.3.17. *Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Demostración. Tenemos los siguientes casos:

1. $a < \sqrt{ab}$;
2. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$;
3. $\frac{a+b}{2} < b$.

1. Tenemos que si $0 < a < b$, entonces $a^2 < ab$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow |a| < \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow a < \sqrt{ab}.$$

2. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b - a$

$$\Rightarrow 0 < (b-a)(b-a) = (b-a)^2$$

$$\Rightarrow 0 < b^2 - 2ab + a^2$$

$$\Rightarrow 4ab < b^2 + 2ab + a^2$$

$$\Rightarrow 4ab < (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4ab} < |a+b| = a+b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} < a+b$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

3. Si $a < b$, entonces $a + b < b + b$

$$\Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b.$$

$\square$

Teorema 2.3.18. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:*

(A) $|-a| = |a|$.

(B) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

(C) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Demostración. Considere lo siguiente:

(A) $|-a| = |(-1)(a)| = |-1||a| = |a|$.

(B) $|a - b| = |a + (-b)| \leq ||a| + |-b| = |a| + |b|$.

(C) Para demostrar este inciso observe que:

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$
$$|a| - |b| = -(|b| - |a|) \text{ y que}$$
$$|a - b| = |b - a|.$$

Entonces
$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{2.1}$$

Además,
$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$
$$\Rightarrow -(|b| - |a|) \geq -|a - b|$$
$$\Rightarrow |a| - |b| \geq -|a - b|. \tag{2.2}$$

Así por las desigualdades (2.1) y (2.2) tenemos:

$$-|a - b| \geq |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\Rightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \text{ (véase Teorema 2.3.11).}$$

□

2.4. Ejemplos y Ejercicios

Ejemplo 2.4.1. *Determinar cuáles son los números reales que satisfacen:*

1. $|x - 3| = x + 2$.
2. $|x^2 + 1| = 0$.
3. $|x| + 3 \leq 2x + 1$.

Solución 2.4.1. *Para determinar los $x \in \mathbb{R}$, consideremos lo siguiente:*

1. $|x-3| = x+2$
$$\Rightarrow |x-3|^2 = (x+2)^2$$
$$\Rightarrow |x-3||x-3| = (x+2)^2$$
$$\Rightarrow \left|(x-3)^2\right| = (x+2)^2$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = (x+2)^2$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9 = x^2+4x+4$$
$$\Rightarrow -6x+9 = 4x+4 \Rightarrow 10x = 5$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$
Es decir, el único número real que satisface esta ecuación es $1/2$.

2. $|x^2+1| = 0$
$$\Rightarrow x^2+1 = 0$$
$$\textit{Por lo tanto } x^2 = -1.$$
Entonces esta última expresión indica que x debe ser un número que elevado al cuadrado sea $-1 < 0$; pero tal número no existe en $\mathbb{R}$. Así, ningún número real satisface esta ecuación.

3. $|x|+3 \leq 2x+1 \Leftrightarrow |x| \leq 2x-2$
$$\Leftrightarrow -2(x-1) \leq x \leq 2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2x-2 \wedge -x \leq 2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq x-2 \wedge -x \leq 2(x-1)+x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x+2x-2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge 3x \geq 2$$
$$\Leftrightarrow x \in [2,\infty) \cap [2/3,\infty)$$
$$\Leftrightarrow x \in [2,\infty).$$
Es decir, los números reales que satisfacen está expresión son aquellos mayores o iguales a 2.

Ejercicio 2.4.1. *Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades:*

(a) $|x+1| \leq 7.$

(b) $|x-7| \geq 2^3.$

Soluciones de este ejercicio.

(a) $x \in [-8, 6].$

(b) $x \in (-\infty, -1] \cup [15, \infty).$

Sugerencia. Trate de usar los Teoremas 2.3.11 y 2.3.12.

Ejemplo 2.4.2. *Determine el intervalo en los reales donde se satisface las siguientes desigualdades*

(a) $|x+18| \geq 6.$

(b) $x^2 - 3x + 2 < 0.$

Solución 2.4.2. *(a)* $|x+18| \geq 6 \Leftrightarrow x+18 \geq 6 \vee -(x+18) \geq 6$

$$\Leftrightarrow x \geq 6 - 18 \vee x \leq -6 - 18$$

$$\Leftrightarrow x \geq -12 \vee x \leq -24 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -24] \cup [-12, \infty).$$

(b) $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0$

$$\Leftrightarrow (x-1 > 0 \wedge x-2 < 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x-2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x > 1 \wedge x < 2) \vee (x < 1 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow x \in (1,2) \cup \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in (1,2)$$

Ejemplo 2.4.3. *La relación entre grados Celsius C y grados Fahrenheit, F, está dada por*

$$C = \frac{5}{9}(F - 32). \tag{2.3}$$

I. *Determine el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a*

$$20 \leq C \leq 30.$$

II. *Determine el intervalo en la escala Celsius que corresponde a*

$$50 \leq F \leq 95.$$

Solución 2.4.3. I. *Despejando F en la relación entre grados Celsius-Fahrenheit 2.3 obtenemos*

$$F = \frac{9}{5}C + 32. \tag{2.4}$$

Usaremos (2.4) para obtener el intervalo solución; entonces tenemos que

$$20 \leq C \leq 30 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 20 \leq \frac{9}{5}C \leq \frac{9}{5} \cdot 30$$

$$36 \leq \frac{9}{5}C \leq 54$$

$$\Leftrightarrow 36 + 32 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 54 + 32$$

$$\Leftrightarrow 68 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 86$$

$$\Leftrightarrow 68 \leq F \leq 86 \text{ (véase (2.4))}.$$

II. *Tenemos que* $50 \leq F \leq 95 \Leftrightarrow 50 - 32 \leq F - 32 \leq 95 - 32$

$$\Leftrightarrow 18 \leq F - 32 \leq 63$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{9} \cdot 18 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq \frac{5}{9} \cdot 63$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 35$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq C \leq 35 \text{ (véase la Ecuación 2.3)}.$$

Capítulo 3

Funciones

En este tercer capítulo estudiaremos el tema de funciones, el cual es de suma importancia como se verá posteriormente.

Las definiciones, conceptos, imágenes, figuras y demostraciones en este capítulo fueron tomados de la bibliografía [1], [5], [4], [10] y [11].

3.1. Introducción

El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones.

No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Por tal motivo, en este capítulo proporcionaremos la definición tal como la entienden los matemáticos, definición que nos capacitará para estudiar muchas funciones e ilustrará la noción intuitiva de función.

3.2. Definiciones

Definición 3.2.1. *Una* ***función****, denotada por $y = f(x)$, es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de un cierto conjunto $X \neq \emptyset$ un único elemento y de un conjunto $Y \neq \emptyset$ (véase Figura 3.1). El conjunto X suele llamarse* ***dominio de la función*** *$Dom(f)$ y el conjunto Y* ***contradominio*** *(o* ***codominio****) $Cod(f)$ de la función.*

El dominio de una función $f : X \to Y$ debe ser un conjunto tal que si x es un elemento de él debemos poder asignarle, mediante la función, un elemento bien definido **(y único)** del codominio Y. Enseguida presento los siguientes ejemplos de función.

Ejemplo 3.2.1. *La Figura 3.1 nos presenta una función cuyo dominio y codominio son los siguientes conjuntos:*

$$Dom(f) = \{a, b, c, d\} \text{ y } Cod(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Ejemplo 3.2.2. *Otro ejemplo gráfico de función más didáctico, se expone en la Figura 3.2, es la función polígono-lados, la denotaremos por $\lambda : A \to B$, y como se puede observar a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento en el codominio, es decir, cumple perfectamente con la definición de función al igual que la función de la Figura 3.1.*

Ejemplo 3.2.3. *La función $id_A : A \to A$ es tal que para cada $a \in A, id_A(a) = a$. Aquí, A es un conjunto cualquiera. Está función es llamada* ***función identidad en*** *A.*

Ejemplo 3.2.4. *Si $S \subseteq A$, la función $j : S \to A$ tal que para cada $s \in S, j(s) = s$, se llama la* ***inclusión de*** *S* ***en*** *A.*

Ejemplo 3.2.5. *Sea $f : A \to B$ una función cualquiera, entonces la función $g : C \to B$ tal que $g(c) = f(c), \forall c \in C \subseteq A$, se llama función* ***restricción*** *de f a C y se denota por $f|_C$.*

Ejemplo 3.2.6. *Si A y B son conjuntos no vacíos y $b_0 \in B$, podemos definir una función $g : A \to B$ tal que para todo $a \in A, g(a) = b_0$. La función $g(a)$ es llamada* ***función constante*** *b_0.*

Definición 3.2.2 (Igualdad de Funciones)**.** *Dos funciones, $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son* ***iguales*** *si $A = C$, $B = D$ y si para cada $a \in A$ se cumple que $f(a) = g(a)$.*

Definición 3.2.3 (Gráfica de una Función)**.** *La gráfica de una función*

$$f : A \to B$$

es el conjunto

$$G_f = \{(a, f(a)) \, | a \in A\}.$$

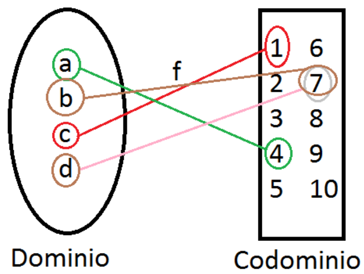


Figura 3.1: Función $f : X \to Y$

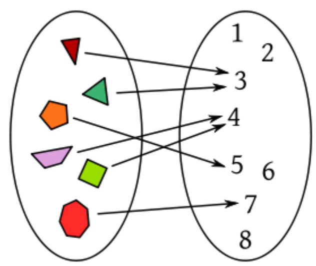


Figura 3.2: Función λ polígono-lados

Se puede comprobar que G_f es un subconjunto propio del producto cartesiano $A \times B$ definido en el Capítulo 2, porque para toda $a \in A$ $f(a) \in B$.

Se puede caracterizar a la gráfica de una función real f partiendo de su definición, como un subconjunto G de $A \times B$ con las siguientes propiedades:

(a) $\forall a \in A, \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.

(b) Si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) estan en G y si $a_1 = a_2$. entonces $b_1 = b_2$.

Definición 3.2.4. *Dados $X, Y \subseteq U$, una función con dominio X y codominio Y es un subconjunto G de $X \times Y$ tal que:*

I. *Cada $x \in X$ es la primera coordenada de alguna $(x, y) \in G$*

$$(\forall x \in X, \exists y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in G).$$

II. *Si (x, y_1) y (x, y_2) estan en G entonces $y_1 = y_2$.*

La propiedad (I) de esta definición es la de una regla de correspondencia entre elementos de X y elementos de Y. A cada elemento de $x \in X$ le asigna un elemento $y \in Y$. La propiedad (II) señala que y es única para x. La regla de correspondencia es una función en el sentido de la primera Definición 3.2.1 y su gráfica es precisamente G.

Para cada $x \in X$ hay un $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$. A y la denotamos por $G(x)$. De este modo podemos volver a la notación:

$$G : X \to Y \text{ para hablar de la función } G.$$

Así, llegamos a la conclusión: la función es la gráfica (G_f).

Definición 3.2.5 (Imagen de una Función)**.** *Sea $f : X \to Y$ una función. El conjunto*

$$Im(f) = \{f(x)|x \in X\}$$

*se llama **imagen** o **rango** de f.*

Notación 3.2.1. *La imagen de f es un subconjunto del codominio de f.*

Se puede afirmar que toda función es una relación matemática pero no toda relación matemática es una función.

Si tenemos una relación, podemos escribirla de la siguiente forma

$$r : A \to B,$$

porque se puede decir que A y B son el $dom(r)$ y $cod(r)$ respectivamente.

Definición 3.2.6. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. La **composición** de f con g, denotada por $g \circ f$, es la función $g \circ f : A \to C$ tal que $\forall a \in A$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ e $Im(f) \subseteq Dom(g)$; el dominio de $g \circ f$ es*

$$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in Dom(f) \text{ y } f(x) \in Dom(g)\}.$$

Definición 3.2.7. *Una función $f : A \to B$ es inyectiva si elementos distintos de A tienen siempre imagenes distintas (véase Figura 3.3); esto es:*

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'), \text{ donde } a, a' \in A.$$

Esto último equivale a:

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a', \text{ donde } a, a' \in A.$$

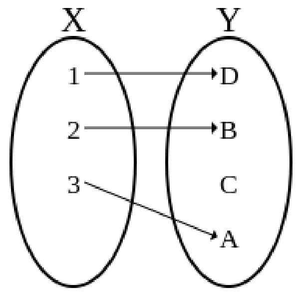


Figura 3.3: Función Inyectiva

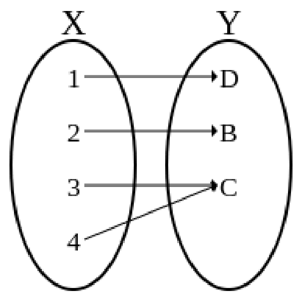


Figura 3.4: Función Sobreyectiva

Ejemplo 3.2.7. *(A) Generalmente, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ fijos, la función "lineal" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, es inyectiva porque si $f(x) = f(x')$, $ax + b = ax' + b \Rightarrow ax = ax'$ y como $a \neq 0$ se concluye que $x = x'$.*

(B) Ninguna función cuadrática del tipo $f(x) = ax^2 + b$ con $a \neq 0$ puede ser inyectiva, porque para cualquier $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, tenemos que $f(x) = f(-x)$, pero $x \neq x'$.

Definición 3.2.8. *Una función $f : A \to B$ se dirá que es* ***suprayectiva*** *(o función* ***sobre*** *o* ***sobreyectiva****) si para cada $b \in B$, puede hallarse $a \in A$ con la propiedad de que $f(a) = b$ (véase Figura 3.4).*

Ejemplo 3.2.8. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ no es suprayectiva porque para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Así, no existe $x_0 \in Dom(f) = \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = -1$, a pesar de que $-1 \in Cod(f) = \mathbb{R}$.*

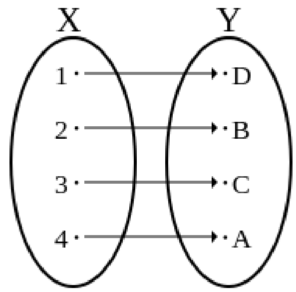


Figura 3.5: Proyección de una Función Biyectiva

También, se puede afirmar que una función f es sobreyectiva si su rango es igual a su codominio.

Definición 3.2.9. *Una función $f : A \to B$ es* ***biyectiva*** *si es sobreyectiva e inyectiva.*

La definición anterior puede también establecerse diciendo que una función $f : A \to B$ es biyectiva si sólo si para cada $b \in B$ existe un *único* $a \in A$ tal que $f(a) = b$ (véase Figura 3.5).

Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por la regla $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$ son funciones biyectivas.

Definición 3.2.10. *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. La función $g : B \to A$, definida mediante la regla $g(b) = a$, donde a es tal que $f(a) = b$, se llama* ***función inversa*** *de f y la denotaremos por $g = f^{-1}$.*

Corolario 2. *Si f es una función biyectiva, entonces existe su inversa f^{-1}.*

Ejemplo 3.2.9. *(a) Si $f : A \to B$ es cualquier función, también lo es $f_1 : A \to Im(f)$ definida igual que f, esto es, $f(a) = f_1(a)$ para toda $a \in A$; f_1 siempre es sobreyectiva, de tal suerte que si f es inyectiva, f_1 es biyectiva y entonces existe $f_1^{-1} : Im(f) \to A$.*

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x) = 3x + 1$, f es biyectiva y por consiguiente, existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtenemos la fórmula que define f^{-1} como sigue:

$$f(x) = y \Rightarrow 3x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}.$$

Así, $f^{-1}(x) = \frac{y-1}{3}$ es la fórmula buscada.

Definición 3.2.11. *Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que una función f es una **función polinomial** si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Es costumbre llamar a la función f, polinomio de x y a cada a_kx^k término k-ésimo del polinomio. También, si $a_n \neq 0$ se dice que f tiene grado n y se denota como $gr(f) = n$.

Definición 3.2.12. *Sea $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$ y $g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0, b_m \neq 0$ polinomios cualesquiera. La función $h : \mathbb{R} - A \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

*donde $A = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$ es una **función racional.***

Por ejemplo: $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $\forall x \in \mathbb{R}$

$$r(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Definición 3.2.13. *En matemáticas un **función monótona** es una función entre conjuntos ordenados que preserva o invierte el orden dado. Se clasifican en dos tipos:*

1. *Función Creciente.*

2. *Función Decreciente.*

Definición 3.2.14. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **monótona creciente** si*

$$r \leq r' \Rightarrow f(r) \leq f(r') \text{ para toda } r, r' \in \mathbb{R}.$$

*Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **monótona decreciente** si*

$$r \geq r' \Rightarrow f(r) \geq f(r') \text{ para toda } r, r' \in \mathbb{R}.$$

Definición 3.2.15. *Una función es **cóncava** en un intervalo (a, c), si para todo punto b del intervalo la recta tangente en ese punto queda por encima de la función (véase Figura 3.6).*

*Una función es **convexa** en un intervalo (a, c), si para todo punto b del intervalo la recta tangente en ese punto queda por debajo de la función (véase Figura 3.7).*

A continuación enunciaremos el concepto de límite de una función.

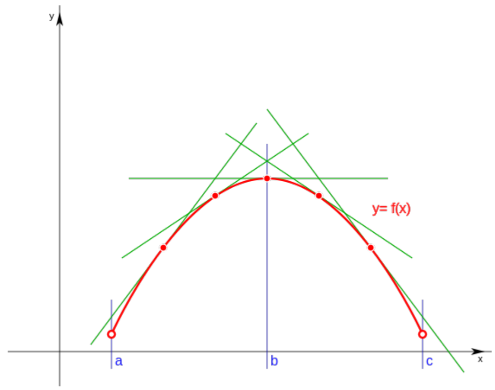


Figura 3.6: Función Cóncava

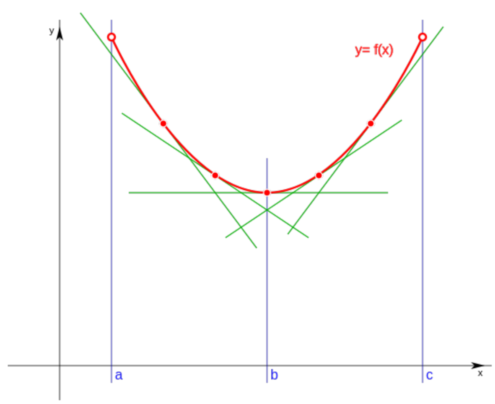


Figura 3.7: Función Convexa

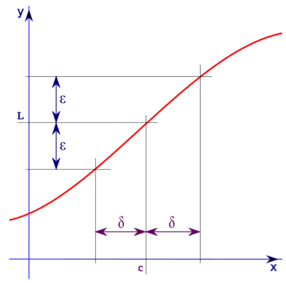


Figura 3.8: Visualización de ϵ y δ.

3.2.1. Límite de una Función

Antes de comenzar formalmente esta parte vale la pena señalar que el concepto de límite a considerar es sólo de una sóla variable, es decir de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

A continuación definiremos el límite de una función de variable real.

Definición 3.2.16. *El* ***límite*** *de una función $f(x)$, cuando x tiende a c es L si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo número real x en el dominio de la función, si*

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

véase Figura 3.8.

Aunque implícita en el desarrollo del Cálculo de los siglos XVII y XVIII, la notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano quien, en 1817, introdujo las bases de la técnica épsilon-delta.

La primera presentación rigurosa de la técnica hecha pública fue dada por Weierstrass en los 1850 y 1860 y desde entonces se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites. La notación de escritura usando la abreviatura **lím** con la flecha debajo es debida a Hardy en su libro *A Course of Pure Mathematics* en 1908.

En general los límites de funciones reales cumplen con diversas propiedades de las cuales en este trabajo demostraremos solo algunas. En la Fig. 3.9

Límite de	Expresión
Una constante	$\lim_{x\to c} k = k$
La función identidad	$\lim_{x\to c} x = c$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
Una suma	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
Una resta	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
Un producto	$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
Un cociente	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0,$
Una potencia	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $f(x) > 0$
Un logaritmo	$\lim_{x\to c} \log f(x) = \log \lim_{x\to c} f(x)$
El número e	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
Función f(x) acotada y g(x) infinitesimal	$\lim_{x\to c} (f(x)\cdot g(x)) = 0.$

Figura 3.9: Propiedades de los Límites de una Función Real de una Variable

se da una tabla de las propiedades de límites; en la sección 3.3 se demostrará el límite de una constante, el producto de una función y una constante, el límite de la suma y resta de funciones, el límite del logaritmo de una función, y el límite del producto de funciones.

Definición 3.2.17. *Se dice que una función $f(x)$ es* ***continua*** *para $x = a$ si el limite de la función, cuando x tiende a a, es igual al valor de la función para $x = a$. En símbolos, esto es:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

3.3. Demostraciones y Ejercicios

Teorema 3.3.1. *Si $Im(f) \subseteq Dom(g) = Cod(f)$ y $Cod(g) = Cod(g\circ f)$, entonces (véase Figura 3.10)*

$$Dom(f) = Dom(g\circ f)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Figura 3.10: Diagrama de la composición de funciones $g \circ f(x)$.

Demostración.

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Cod(f)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Dom(g)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) \in Cod(g)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : g \circ f(x) \in Cod(g)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : g \circ f(x) \in Cod(g \circ f)\} = Dom(g \circ f).$$

□

Teorema 3.3.2. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(a) Si $g \circ f$ es una función inyectiva, entonces f una función inyectiva.

(b) Si f y g son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

Demostración. (a) Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$; queremos concluir que $a_1 = a_2$. Para esto apliquemos g y obtenemos $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, que es equivalente a $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, y puesto que $g \circ f$ es inyectiva, debe tenerse $a_1 = a_2$, como pretendíamos.

(b) Sean nuevamente $a_1, a_2 \in A$ tales que $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$ esta igualdad es, por definición, equivalente a $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ y como g es inyectiva, debe ser $f(a_1) = f(a_2)$ y como f también lo es, $a_1 = a_2$.

□

Teorema 3.3.3. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(A) Si la composición $g \circ f : A \to C$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

(B) Si g y f son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración. (A) Sea $c \in C$ cualquiera, queremos encontrar $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Sabemos que $g \circ f$ es sobre, así que existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$, y puesto que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$, $b = f(a)$ es el elemento buscado.

(B) Queremos encontrar $\alpha \in A$ tal que $(g \circ f)(\alpha) = c \in C$.

Puesto que f es sobre existe $a \in A$ tal que $f(a) = b \in B$.
Luego, como g es sobre existe $b \in B$ tal que $g(b) = c \in C$.

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

$$\therefore a = \alpha \text{ es el elemento buscado.}$$

□

Proposición 3.3.1. *Si $f(x) = k$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = k$, donde $c, k \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\epsilon = \delta > 0$ tal que se cumple que

$$0 < |x - c| < \delta \text{ para todo } x \in Dom(f).$$

Ahora bien tenemos que:

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \delta = \epsilon,$$

es decir, contamos con que $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon,$$

esto equivale a decir que

$$\lim_{x\to c} f(x) = k.$$

□

Proposición 3.3.2. *Si $\lim_{x\to c} f(x) = L_f$, entonces $\lim_{x\to c} kf(x) = kL_f$, donde $k, c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $k = 0$ entonces esto equivale a la Proposición 3.3.1, porque obtendríamos una función $C(x) = kf(x) = 0 \cdot f(x) = 0$, es decir, una función constante.

Ahora, para un caso distinto (i.e., $k \neq 0$) considere lo siguiente:

Sean $\epsilon > 0$ y $\epsilon_0 = \epsilon/|k| > 0$, donde $k \neq 0$, como $\lim_{x \to c} f(x) = L_f$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_f| < \epsilon_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - L_f| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

$$\Rightarrow |k||f(x) - L_f| < \epsilon_0 \Rightarrow |kf(x) - kL_f| < \epsilon,$$

es decir, se cumple que $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |kf(x) - kL_f| < \epsilon,$$

esto equivale a decir que

$$\lim_{x \to c} kf(x) = kL_f.$$

□

Proposición 3.3.3. *Si f y g son dos funciones, entonces se verifica que*

$$\lim_{x \to 0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x) = L_f \pm L_g.$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\epsilon/2 = \epsilon_f = \epsilon_g > 0$, ahora como $\lim_{x \to c} f(x) = L_f$ y $\lim_{x \to c} g(x) = L_g$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_f| < \epsilon_f \wedge |g(x) - L_g| < \epsilon_g$$

$$\Rightarrow |f(x) - L_f| + |g(x) - L_g| < \epsilon_f + \epsilon_g = \epsilon.$$

Ahora, como $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Entonces

$$|(f(x) - L_f) \pm (g(x) - L_g)| \leq |f(x) - L_f| + |g(x) - L_g| < \epsilon,$$

enseguida, ordenando y simplificando se obtiene:

$$|(f(x) \pm g(x)) - (L_f \pm L_g)| < \epsilon.$$

Visto todo lo anterior, se cumple que: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L_f \pm L_g)| < \epsilon,$$

esto equivale a decir que

$$\lim_{x\to 0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = L_f \pm L_g.$$

$\square$

Proposición 3.3.4. *Si f y g son dos funciones, entonces se verifica que*

$$\lim_{x\to 0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L_f \cdot L_g.$$

Demostración. Sean $\epsilon > 0$, $\epsilon_1 = \epsilon/2(|L_g| + 1) > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon/2(|L_f| + 1) > 0$,$\epsilon_3 = 1 > 0$ y $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Ahora, como $\lim_{x\to 0} f(x) = L_f$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_f| < \epsilon_1. \tag{3.1}$$

También, como $\lim_{x\to 0} g(x) = L_g$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_g| < \epsilon_2, \tag{3.2}$$

y además, existe $\delta_3 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - L_g| < \epsilon_3 = 1.$$

Ahora,

$$||g(x)| - |L_g|| \leq |g(x) - L_g| \text{ (véase el inciso (C) del Teorema 2.3.18)}$$
$$\Rightarrow ||g(x)| - |L_g|| < 1 \Rightarrow |g(x)| - |L_g| < 1$$
$$\text{por lo tanto } |g(x)| < 1 + |L_g|. \tag{3.3}$$

También tenemos que:

$$|f(x)g(x) - L_f L_g| = |f(x)g(x) - g(x)L_f + g(x)L_f - L_f L_g|$$

$$= |g(x) \cdot (f(x) - L_f) + L_f \cdot (g(x) - L_g)|$$

$$\leq |g(x)| \cdot |f(x) - L_f| + |L_f| \cdot |g(x) - L_g|$$

$$< (1 + |L_g|)\epsilon_1 + |L_f|\epsilon_2 \text{ (veáse (3.1), (3.2) y (3.3))}$$

$$= (1 + |L_g|)\frac{\epsilon}{2(1 + |L_g|)} + |L_f|\frac{\epsilon}{2(1 + |L_f|)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ (véase Lema 2.3.2).}$$

Es decir, llegamos a:

$$|f(x)g(x) - L_f L_g| < \epsilon.$$

Entonces considerando seriamente todo lo anterior ahora contamos con que $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - L_f L_g| < \epsilon,$$

esto equivale a decir que

$$\lim_{x \to 0}[f(x) \cdot g(x)] = L_f \cdot L_g.$$

□

Proposición 3.3.5. *Sea $L \in \mathbb{R}$; si f es una función tal que $L \in Cod(f) \subseteq Dom(log)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces*

$$\lim_{x \to a} log(f(x)) = log(L)$$

Demostración.

$$\lim_{x \to a} log(f(x)) = \lim_{f(x) \to L} log(f(x))$$

$$= \lim_{y \to L} log(y) \text{ (haciendo } f(x) = y)$$

$$= log(L) \text{ (porque la función } log \text{ es continua en } L \text{, véase Capítulo 4).}$$

□

Ejercicio 3.3.1. *Demostrar el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^n - 1}{x} = n \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. La prueba es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+nx+\left[\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{nx+\left[\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[n+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}\right]=n.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.3.2. *Demostrar que si $C\subseteq A$ y $j:C\to A$ es la inclusión de C en A, entonces $j=id_A|_C$.*

Demostración. De acuerdo a las definiciones de inclusión y restricción, vistas en los ejemplos de este capítulo tenemos:

1. La función restricción de id_A en C es:

$$id_A|_C : C\to A \text{ tal que } \forall c\in C, id_A|_C(c)=id_A(c)=c$$

2. Si la función inclusión es:

$$j:C\to A \text{ tal que } \forall c\in C, j(c)=c,$$

entonces $Dom(j)=Dom(id_A|_C)$ y $Cod(j)=Cod(id_A|_C)$ y también $j(c)=id_A|_C(c)$ para toda $c\in C$.

Por lo tanto, considerando lo anterior, se concluye que $j=id_A|_C$ (véase Definición 3.2.2). □

Ejercicio 3.3.3. *Diga si el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ define una función o no*

$$G=\{(x,y)|y\leq x \text{ donde } x,y\in\mathbb{N}\wedge x,y<5\}.$$

Solución. Para determinar que este conjunto define o no una función considérese que:

$$G = \{(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),$$
$$(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),$$
$$(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\},$$

y que según la Definición 3.2.4, G no cumple con (II), porque $(1,1),(1,0) \in G$ pero $1 \neq 0$; por consiguiente G **no define una función**. □

Ejercicio 3.3.4. *Defina dos funciones $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $Im(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g \circ f) = \{5\}$.*

Solución. Las funciones que pide el problema son las siguientes:

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$; observe que la imagen de g es todo $\mathbb{R}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5$;

Así, tenemos que la imagen de f es $\{5\} \subset \mathbb{R} = Dom(g)$ y $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5) = 5$, es decir, $Im(g \circ f) = \{5\}$, por lo tanto, esto es lo pedido. □

Teorema 3.3.4 (Teorema del Sándwich)**.** *Sea I un intervalo que contiene al punto a y sean f, g y h funciones definidas en I, exceptuando quizás el mismo punto a. Supongamos que se cumplen los siguientes incisos:*

(a) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *para toda* $x \in I - \{a\}$.

(b) $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Entonces se verifica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Demostración. Sean $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon > 0$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Como $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que si}$$

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon_1 = \varepsilon$$

y

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que si}$$
$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

También tenemos que:

$$h(x) - L \leq f(x) - L \leq g(x) - L.$$

Lo anterior considerado seriamente implica que:

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

y

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

por lo cual

$$-\varepsilon < h(x) - L \leq f(x) - L \leq g(x) - L < \varepsilon$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Hemos obtenido

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si}$$
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

lo que equivale a la definición de límite, es decir

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

□

Ejercicio 3.3.5. *Determinar el dominio, rango y gráfica (véase Figura 3.11) de la función*

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Respuesta:

$Dom(f) = [1, \infty)$ y $Rang(f) = [0, \infty)$.

Nota para el lector: El estudiante interesado en más ejercicio para resolver, puede indagar en la página de internet [17] mencionada en la bibliografía

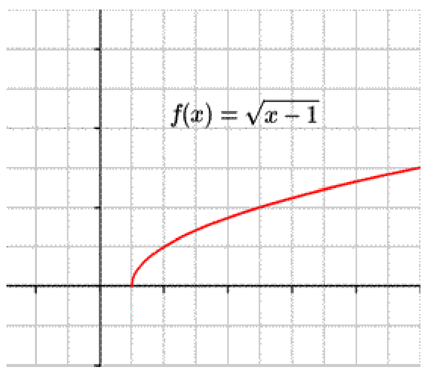


Figura 3.11: Gráfica de la Función $f(x) = f(x) = \sqrt{x-1}$.

Capítulo 4

Funciones Exponencial y Logaritmo Real

En este capítulo estudiaremos dos de las funciones más relevantes y complicadas en las matemáticas, se trata de la función logaritmo y la función exponencial, más adelante veremos que estas funciones son inversas una de la otra.

Las demostraciones, conceptos, definiciones e imágenes en este capítulo fueron tomadas de la bibliografía [10] y [11].

4.1. Introducción

Los logaritmos fueron introducidos por John Napier a principios del siglo XVII como un medio de simplificación de los cálculos. Estos fueron rápidamente adoptados por ingenieros, científicos, banqueros y otros para realizar operaciones fácil y rápidamente, usando reglas de cálculo y tablas de logaritmos. Estos dispositivos se basan en una propiedad de los logaritmos que es muy importante: que el logaritmo de un producto es la suma de los logari tmos de los factores

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y).$$

La noción actual de los logaritmos viene del famoso matemático suizo Leonhard Euler, quien conectó estos con la función exponencial en el siglo XVIII.

4.2. Definiciones

4.2.1. Exponencial

Definición 4.2.1. *Una* ***función exponencial*** *es una función de la forma*

$$f(x) = a^x$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ un número real, con $a > 0$.

Así pues, se obtiene un abanico de exponenciales, todas ellas similares, que dependen de la base b que utilicen.

Propiedades Generales

Las características generales de las funciones exponenciales son:

1. El dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$.
2. La imagen de una función exponencial es $(0, \infty)$.
3. Son funciones continuas.
4. Como $a^0 = 1$, la función siempre pasa por el punto $(0, 1)$.
5. Como $a^1 = a$, la función siempre pasa por el punto $(1, a)$.
6. Las funciones exponenciales son todas convexas, excepto quizá cuando $a = 1$ (véase Definición 3.2.15).
7. Si $a > 1$ la función es creciente.

   Si $0 < a < 1$ la función es decreciente (véase Figura 4.1).

Caso especial de la Función Exponencial

El caso a continuación, es hallado con mucha recurrencia en el ámbito de las ciencias por lo que vale la pena mencionarlo en un apartado propio. Hablamos del momento en que la base de la función exponencial es el famoso "número e".

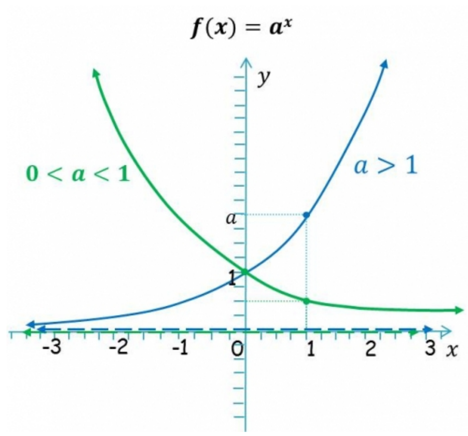


Figura 4.1: Gráfica de la Función Exponencial

En el capítulo uno ya habíamos mencionado que e es un número irracional cuyo valor se define como $e = 2{,}71828\ldots$ aproximadamente. Se llama e, porque así lo "bautizó" el matemático Leonhard Euler (1727).

La razón esencial de su importancia, es que la derivada de la función $f(x) = e^x$ es otra vez e^x; esto se verá con más exactitud en el Capítulo 6 de este trabajo.

4.2.2. Logaritmo

Definición 4.2.2. *El* ***logaritmo*** *y en una base $a \neq 1$ y positiva de un número real positivo x, es el exponente al cual hay que elevar la base a para obtener dicho número x, y se denota por $log_a(x)$, es decir:*

$$y = log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x.$$

De la misma manera que la o peración opuesta de la suma es la resta y de la multiplicación la división el cálculo de logaritmos es la operación inversa a la exponenciación de la base del logaritmo; esto equivale a afirmar que la función logaritmo y la función exponencial son funciones inversas.

Como la base de un logaritmo real puede ser cualquier número real positivo a excepción del 1, existen bases de logaritmos que se encuentran con bastante normalidad en diversos campos de las ciencias, entonces se citan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.2.1. *El **logaritmo con base 10** que es muy común en ciencias de la computación, teorías de la información, teoría musical y fotografía. Esto se debe a que es fácil de usar para los cálculos manuales en el sistema de numeración decimal. A este logaritmo también se le llama **común** o **logaritmo vulgar**, y se denota únicamente por $log(x)$ en vez de $log_1 0(x)$. Lo anterior se compacta en la siguiente expresión matemática:*

$$y = log(x) \Longleftrightarrow 10^y = x$$

Ejemplo 4.2.2. *El siguiente logaritmo real que consideramos como ejemplo es el **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano**, es aquel que está representado por los logaritmos con **base** e, donde e es el número de Euler ya mencionado en el primer capítulo. Este logaritmo se utiliza mucho en matemáticas, física, química estadística, economía, teoría de la información y algunos campos de la ingeniería. Se denota por $y = ln(x)$.*

Ejemplo 4.2.3. *Un último logaritmo muy utilizado en diversas áreas, es el logaritmo de **base 2**, llamado también **logaritmo binario**, es más usado en informática, pero también en algunos campos de la ingeniería, se usa en tablas logarítmicas, calculadoras portátiles, espectroscopia, entre otras. Se denota como en la siguiente expresión matemática:*

$$y = lg(x) \Longleftrightarrow 2^y = x.$$

Características del Logaritmo Real

El logaritmo real tiene características importantes que es conveniente apreciar.

1. El logaritmo $y = log_a(x)$ cumple con la definición de función, es decir, para cada x del dominio $Dom(y) = (0, \infty)$ existe uno y sólo un punto y en el codominio $Cod(y) = \mathbb{R}$.

2. La función $f(x) = log_a(x)$ es biyectiva y monótona. Veanse las definiciones del Capítulo 3.

3. La función inversa de $log_a(x)$ es la función $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$.

4. La función $f(x) = log_a(x)$ es cóncava si su base $a > 1$ y convexa si su base $a > 0$ pero menor a 1 (ver qué es función concava y convexa en Definiciones en el Capítulo 3), como se puede constatar de la Figuras 4.2 y 4.3.

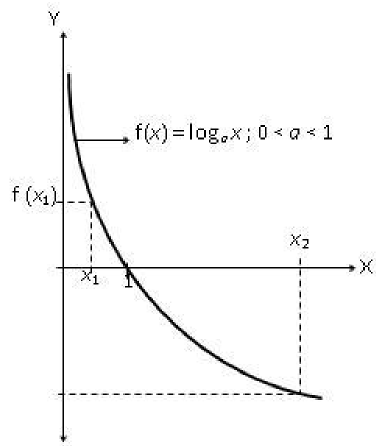


Figura 4.2: Gráfica de $log_a(x)$ si $0 < a < 1$.

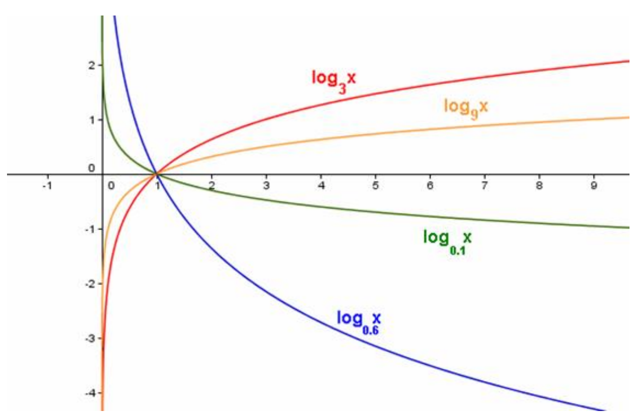


Figura 4.3: Gráfica de las funciones $log_{0.1}(x)$, $log_{0.6}(x)$, $log_3(x)$ y $log_9(x)$.

5. Los límites de la función $log_a(x)$ son los siguientes:

   - Si $a > 1$ entonces:
     $$\lim_{x\to 0^+} log_a(x) = -\infty$$
     y
     $$\lim_{x\to\infty} log_a(x) = \infty$$
   - Si $0 < a < 1$ entonces:
     $$\lim_{x\to 0^+} log_a(x) = \infty$$
     y
     $$\lim_{x\to\infty} log_a(x) = -\infty$$

El logaritmo real cumple con propiedades independientemente de su base, por ejemplo el logaritmo de la base es siempre igual a 1, es decir $log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$. El logaritmo de 1 es cero (independientemente de la base), i.e., $log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$.

4.2.3. Generalidades

Enseguida presentamos dos definiciones más generales que relacionan la función exponencial con la función logaritmo real.

Definición 4.2.3. *La* ***función exponencial****,* $f(x) = a^x$ *con* $a \neq 1$*, se define como* $f(x) = log_a^{-1}(x)$*.*

Definición 4.2.4. *Si* $a > 0$*, entonces, para cualquier número real* x*,*

$$a^x = e^{xln(a)}.$$

(Si $a = e$ *esta definición está de acuerdo evidentemente con la función exponencial de base e.)*

4.3. Propiedades Relacionadas al Capítulo

Propiedad 4.3.1. *[Identidad Fundamental de los Logaritmos]* $a^{log_a(x)} = x$ $\forall x, a \in \mathbb{R}^+$ *donde* $a \neq 1$*.*

Demostración. Por la definición de logaritmo real tenemos que:

$$y = log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x \text{ esto } \forall x, a \in \mathbb{R}^+ \text{ donde } a \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = a^y = a^{log_a(x)} \text{ esto } \forall x, a \in \mathbb{R}^+ \text{ donde } a \neq 1$$

$$\therefore a^{log_a(x)} = x \text{ esto } \forall x, a \in \mathbb{R}^+ \text{ donde } a \neq 1.$$

Entonces con ésta última expresión la propiedad se demuestra. □

A partir de ahora eliminaremos expresión repetitiva

$$\forall x, a \in \mathbb{R}^+ \text{ donde } a \neq 1$$

de las propiedades posteriores, ya que va implícita en la definición de logaritmo real, que como se observó en el apartado inmediatamente anterior se refiere a la base (a) y el dominio (x) del logaritmo real.

Propiedad 4.3.2. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

Demostración. Para la demostración usaremos la propiedad anterior; entonces se verifica que:

$$x = a^{log_a(x)} \wedge y = a^{log_a(y)}$$

$$\Rightarrow xy = (a^{log_a(x)}) \cdot (a^{log_a(y)}) = a^{log_a(x)+log_a(y)}, \tag{4.1}$$

de la misma forma por la propiedad previa

$$xy = a^{log_a(xy)}. \tag{4.2}$$

Entonces por (4.1) y (4.2)

$$a^{log_a(xy)} = a^{log_a(x)+log_a(y)}$$

$$\Rightarrow log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y),$$

por lo tanto la propiedad se demuestra. □

Propiedad 4.3.3. *Si x e y son dos números cualesquiera, entonces*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Demostración. Sea $x' = a^x$ e $y' = a^y$, de modo que

$$x = log_a(x'),$$

$$y = log_a(y').$$

Entonces

$$x + y = log_a(x') + log_a(y') = log_a(x'y').$$

Esto significa que

$$a^{x+y} = x'y' = a^x \cdot a^y.$$

$\square$

Propiedad 4.3.4. *Si $a > 0$, entonces*

1. $(a^b)^c = a^{bc}$ *para todo* $b, c \in \mathbb{R}$.
   (Obsérvese que a^b será automáticamente positivo, de modo que $(a^b)^c$ estará definido);

2. $a^1 = a$.

Demostración. Aplicando la Definición 4.2.4 y el hecho de que la función exponencial es la inversa de la función logaritmo, tenemos que:

1. $(a^b)^c = e^{cln(a^b)} = e^{cln(e^{bln(a)})} = e^{c(bln(a))} = e^{cbln(a)} = a^{bc}$.

2. $a^1 = e^{1ln(a)} = e^{ln(a)} = a$.

$\square$

Propiedad 4.3.5. $log_{a^v}(x^u) = \frac{u}{v} \cdot log_a(x)$ *donde* $u, v \in \mathbb{R}$ *y* $v \neq 0$.

Demostración. Sea

$$y = log_{a^v}(x^u). \tag{4.3}$$

Por la definición de logaritmo real se tiene que:

$$(a^v)^y = x^u,$$

de lo cual se obtiene lo siguiente:

$$a^{vy} = x^u \Rightarrow (x^u)^{\frac{1}{u}} = (a^{vy})^{\frac{1}{u}} = a^{\frac{vy}{u}}.$$

Así, se deduce que

$$x = a^{\frac{vy}{u}}.$$

Por lo tanto

$$log_a(x) = log_a\left(a^{\frac{vy}{u}}\right) = \frac{vy}{u} \text{ (ver Teorema 4.3.1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{u}{v} \cdot log_a(x)$$

$$\therefore log_{a^v}(x^u) = \frac{u}{v} \cdot log_a(x) \text{ (véase Ecuación (4.3))}.$$

Así, la propiedad está demostrada. □

Propiedad 4.3.6. *$log_a(x^r) = rlog_a(x)$ donde $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Tomando $u = r$ y $v = 1$ se demuestra la propiedad. □

Propiedad 4.3.7. *$log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$*

Demostración. Tenemos

$$log_a(x) - log_a(y) = log_a(x) + (-1 \cdot log_a(y))$$

$$= log_a(x) + log_a(y^{-1}) \text{ (ver Corolario 4.3.6)}$$

$$= log_a(xy^{-1}) \text{ (ver Teorema 4.3.2)}$$

$$= log_a(x/y).$$

□

Propiedad 4.3.8. *$log_y(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(y)}$ donde $y \in \mathbb{R}^+$ y no es 1.*

Demostración. Tenemos que $y^{log_y(x)} = x$ por el Teorema 4.3.1.

$$\text{Entonces } log_a(x) = log_a\left(y^{log_y(x)}\right) = log_y(x)log_a(y).$$

Así, tenemos:

$$log_y(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(y)}.$$

Por lo tanto la propiedad está demostrada. □

Propiedad 4.3.9. *$log_a(b)log_b(c) = log_a(c)$, donde $b \neq 1$.*

Demostración. Haciendo que y sea igual a b, despejando y conmutando se demuestra la propiedad. $\square$

Propiedad 4.3.10. $log_x(y) \cdot log_y(x) = 1 \ \forall x, y \in [\mathbb{R}^+ - \{1\}]$

Demostración. Teniendo en cuenta que $log_x(x) = 1 \ \forall x \in [\mathbb{R}^+ - \{1\}]$ haciendo $a = x$ y despejando se demuestra la propiedad. $\square$

Propiedad 4.3.11. $x^{log_a(y)} = y^{log_a(x)} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

Demostración. Para demostrar esta propiedad notemos que por la Propiedad 4.3.9

$$log_a(y) = log_a(x) log_x(y), \tag{4.4}$$

pero aquí hay que hacer una pequeña observación; en 4.4 se excluye el caso $x = 1$, al final veremos que para este caso la proposición también se cumple.

De la Ecuación (4.4) obtenemos que:

$$x^{log_a(y)} = x^{log_a(x) log_x(y)} = \left(x^{log_x(y)}\right)^{log_a(x)}$$

$$= y^{log_a(x)} \text{ (véase la Propiedad 4.3.1).} \tag{4.5}$$

Ahora, si $x = 1$, tenemos que

$$x^{log_a(y)} = 1^{log_a(y)} = 1$$

$$\wedge$$

$$y^{log_a(x)} = y^{log_a(1)} = y^0 = 1,$$

es decir, la proposición es válida.

Finalmente considerando esto último y el resultado (4.5), la propiedad está demostrada. $\square$

Proposición 4.3.1. *Si* f, g *son funciones con* $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = M$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} [g(x)(f(x) - 1)]}$$

Demostración. Para demostrar esta proposición, debemos demostrar en primer lugar que

$$L = \lim_{x \to a} ln(f(x)) = \lim_{x \to a}(f(x) - 1),$$

porque usaremos esto posteriormente.

Entonces, usando las propiedades de los límites expuestas en la Figura 3.9 tenemos que:

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \to a} ln(f(x)) &= ln\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = ln(1) = 0 \\ = 1 - 1 &= \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) - 1 = \lim_{x \to a}(f(x) - 1). \end{aligned}$$

Ya con este resultado, prosigamos a la demostración completa de esta proposición.

Nuevamente usando las propiedades de los límites expuestas en la Figura 3.9, y el hecho de que e^x y $ln(x)$ son funciones inversas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} &= e^{ln\left(\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}\right)} \\ &= e^{\left[\lim_{x \to a} ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right]} \\ = e^{\lim_{x \to a}[g(x)ln(f(x))]} &= e^{[\lim_{x \to a} g(x)][\lim_{x \to a} ln(f(x))]} \\ = e^{[\lim_{x \to a} g(x)][L]} &= e^{[\lim_{x \to a} g(x)][\lim_{x \to a}(f(x)-1)]} \\ &= e^{\lim_{x \to a}[g(x)(f(x)-1)]}. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedad 4.3.12.

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Demostración. Para demostrar esta propiedad usaremos la Proposición 4.3.1 anterior, entonces sea $f(x) = 1 + 1/x$ y $g(x) = x$; observe que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to \infty}[g(x)(f(x)-1)]} \\ &= e^{\lim_{x \to \infty}\left[x(1+\frac{1}{x}-1)\right]} = e^{\lim_{x \to \infty}\left[x(\frac{1}{x})\right]} \\ &= e^{\lim_{x \to \infty}[1]} = e^1 = e. \end{aligned}$$

$\square$

4.4. Ejemplos del Capítulo

El lector puede identificar los resultados previos que se usaron para resolver los siguientes ejercicios.

Ejemplo 4.4.1. *Simplificar:*

$$R = \frac{log_3(8) \times log_5(9) \times log_7(25)}{log(2) \times log_3(10) \times log_7(9)}$$

Solución.

$$\begin{aligned} R &= \frac{log_3(8) \times log_5(9) \times log_7(25)}{log(2) \times log_3(10) \times log_7(9)} \\ &= \frac{log_3(8)}{log_3(10)} \times \frac{log_7(25)}{log_7(9)} \times \frac{log_5(9)}{log(2)} \\ &= log(8) \times log_9(25) \times \frac{log_5(9)}{log(2)} \\ &= \frac{log(8)}{log(2)} \times log_9(25) \times log_5(9) \\ &= log_2(8) \times log_5(9) \times log_9(25) \\ &= log_2(8) \times log_5(25) \\ &= 3 \times 2 = 6. \end{aligned}$$

Es decir, $R = 6$. □

Ejemplo 4.4.2. $log_2(3)$ *es un número irracional.*

Demostración. La prueba es por contradicción, entonces supongamos que $0 < log_2(3) \in \mathbb{Q}$, entonces $\exists m, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $log_2(3) = m/n$;

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2^{log_2(3)} = 2^{m/n} \\ &\Rightarrow 3 = 2^{m/n} \\ &\Rightarrow 3^n = 2^m \end{aligned}$$

que es una contradicción, por la siguiente razón, 2 elevado a cualquier entero positivo es par ya que quedaría que es divisible por 2; ahora el número 3 elevado a cualquier entero positivo es impar ya que ninguno de sus factores primos va a ser 2 (véase Teorema Fundamental de la Aritmética); entonces como ningún número entero positivo es par e impar al mismo tiempo tenemos una contradicción. Por lo tanto $log_2(3)$ debe ser irracional. □

Capítulo 5

Trigonometría de Funciones Reales

En este capítulo final analizaremos las características de las funciones trigonométricas con dominio en los números reales.

Los conceptos, demostraciones, ejercicios, imágenes y ejemplos en este capítulo fueron tomados de la bibliografía [8], [10] y [11].

5.1. Introducción

La **trigonometría** es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Deriva de los términos griegos *trigonos* 'triángulo' y *metron* 'medida'. En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.**

Ya desde la antigüedad había estudios referentes al tema, por ejemplo, los egipcios, ya que en el segundo milenio antes de Cristo utilizaban una forma primitiva de la trigonometría para la construcción de las sus pirámides famosas. El Papiro de Ahmes, escrito por el escriba egipcio Ahmes (1680-1620 a.C.), contiene el siguiente problema relacionado con la trigonometría:

"Si una pirámide es de 250 codos de alto y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su Seked?"

El Seked fue una antigua unidad de medida egipcia usada para medir la inclinación de las caras triangulares de una pirámide recta.

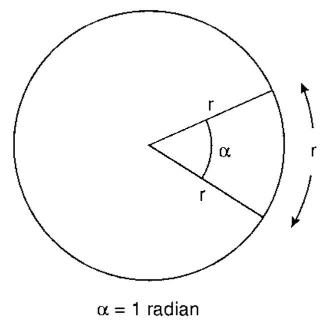


Figura 5.1: Radián.

5.2. Definiciones

Definición 5.2.1. *Un **radián** es una unidad de medida de águnlos, un ángulo de 1 radián corresponde al arco de circunferencia cuya longitud es su radio (ver Figura 5.1)*

1 *radián* = 57,29577951.. *grados sexagesimales y* 2π *radianes son exactamente* 360 *grados sexagesimales, es decir, el círculo completo.*

En matemáticas un ángulo se representa siempre en radianes.

Definición 5.2.2. *Una **razón** o **función trigonométrica** es una relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.*

En la Figura 5.2 se identifican 6 funciones trigonométricas y como están definidas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Siguiendo con mucha seriedad las definiciones en la Figura 5.2 podemos obtener el Gráfico 5.3, donde se observan las diversas funciones trigonométricas en longitudes y su relación con un círculo de radio 1.

5.3. Proposiciones y Ejemplos

Proposición 5.3.1. *Para todo ángulo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se verifica que:* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

Demostración. Consideremos la Figura 5.2, entonces, $tg\alpha = a/b$, $sen\alpha = a/c$ y $cos\alpha = b/c$

$$\Rightarrow \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c}$$

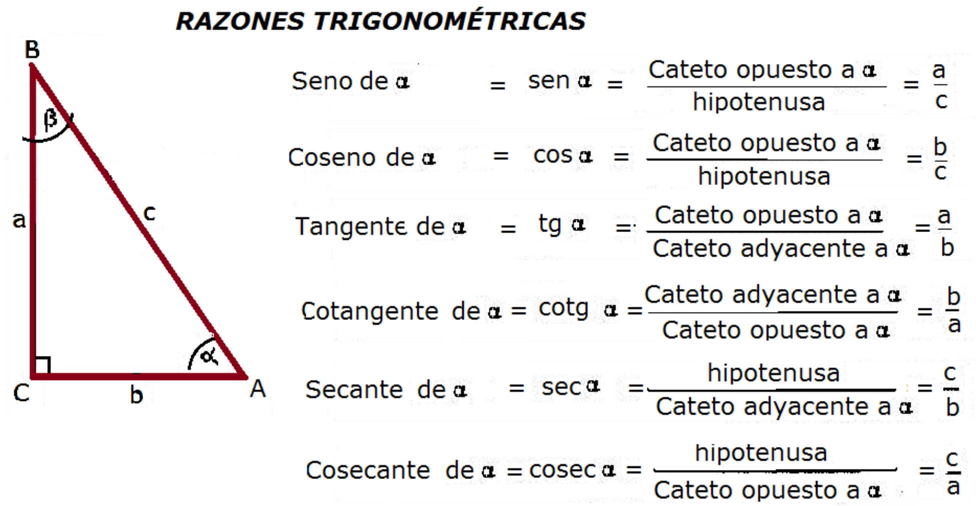


Figura 5.2: Razones trigonométricas.

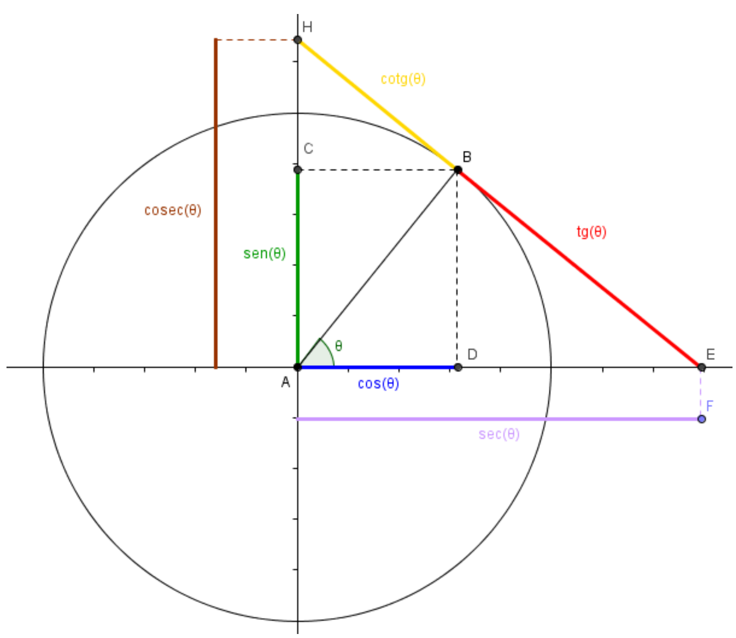


Figura 5.3: Círculo Unitario y Funciones Trigonométricas Relacionadas.

$$= \frac{a}{b} = tg\alpha.$$

□

De forma similar a la anterior se puede demostrar que

1. $cotg\alpha = cos\alpha/sen\alpha = 1/tg\alpha$.

2. $cosec\alpha = 1/sen\alpha$ *y*

3. $sec\alpha = 1/cos\alpha$.

Proposición 5.3.2. *Para toda* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se verifica que* $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

Demostración. En esta demostración considere la Figura 5.2; entonces por el Teorema de Pitágoras demostrado en la conclusión de este trabajo, $c^2 = a^2 + b^2$ por lo tanto:

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = (a/c)^2 + (b/c)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

□

De una forma similar se puede demostrar que:

1. $sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$ *y*

2. $cosec^2\alpha = 1 + cotg^2\alpha$.

El lector que este interesado puede demostrarlas.

Proposición 5.3.3. *Para todo ángulo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se cumple que:* $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$ *y* $-sen(\alpha) = sen(-\alpha)$

Demostración. Para la demostración consideremos seriamente la Figura 5.4; tenemos que:

$$y = sen(\alpha) \wedge -y = sen(-\alpha)$$
$$\Rightarrow y = sen(\alpha) \wedge y = -sen(-\alpha)$$
$$\text{por lo tanto } -sen(\alpha) = sen(-\alpha).$$

De forma similar:

$$x = cos(\alpha) \wedge x = cos(-\alpha)$$

$$\text{por lo tanto } cos(\alpha) = cos(-\alpha).$$

□

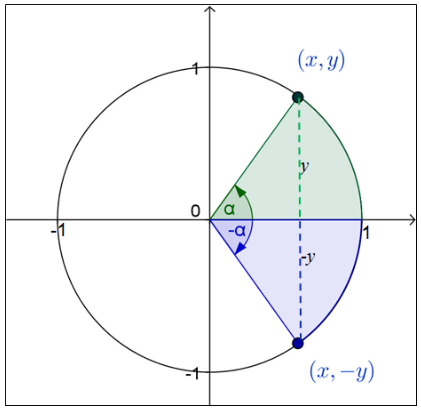


Figura 5.4: Ángulo $-\alpha$.

Proposición 5.3.4. *Las siguientes fórmulas se verifican para todo angulo* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

1. $sen(x \pm y) = senxcosy \pm senycosx$.
2. $cos(x \pm y) = cosxcosy \mp senxseny$.

Demostración. Para la demostración considérese el Gráfico 5.5.

Primero demostraremos el seno y coseno de la suma $x + y$ de ángulos, entonces tenemos que:

$$sen(x + y) = \overline{BC} = \overline{ED} + \overline{DF} = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$$

$$\Rightarrow sen(x + y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x).$$

De forma similar:

$$cos(x)cos(y) = \overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BF} = cos(x + y) + sen(x)sen(y)$$

$$\Rightarrow cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y).$$

Con lo anterior queda demostrada la identidad del seno y coseno de la suma $x + y$ de ángulos.

Para el seno y el coseno de la diferencia $x - y$ de ángulos usaremos lo ya demostrado y la Proposición 5.3.3; tenemos que:

$$sen(x - y) = sen(x + (-y)) = sen(x)cos(-y) + sen(-y)cos(x)$$

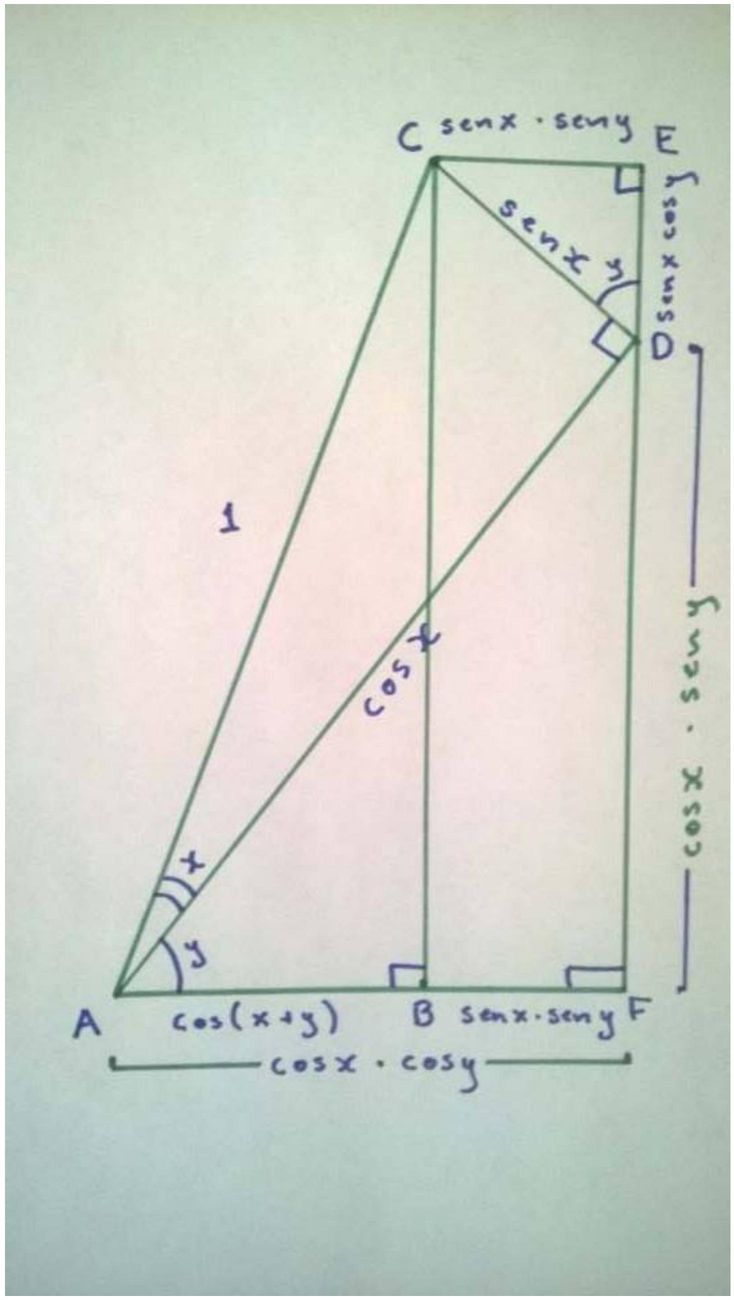


Figura 5.5: Prueba Geométrica del seno y coseno de la Suma $x+y$ de Ángulos.

$$= sen(x)cos(y) - sen(y)cos(x).$$

De forma similar:

$$cos(x-y) = cos(x+(-y)) = cos(x)cos(-y) - sen(x)sen(-y)$$

$$= cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y).$$

□

Proposición 5.3.5. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)}.$$

Demostración. Usaremos algunas demostraciones anteriores

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)}$$

$$= \frac{sen(a)cos(b)+cos(a)sen(b)}{cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)}$$

$$= \frac{sen(a)cos(b)+cos(a)sen(b)}{cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)} \cdot \frac{\frac{1}{cos(a)cos(b)}}{\frac{1}{cos(a)cos(b)}}$$

$$= \frac{\frac{sen(a)cos(b)}{cos(a)cos(b)} + \frac{cos(a)sen(b)}{cos(a)cos(b)}}{\frac{cos(a)cos(b)}{cos(a)cos(b)} - \frac{sen(a)sen(b)}{cos(a)cos(b)}}$$

$$= \frac{\frac{sen(a)}{cos(a)} + \frac{sen(b)}{cos(b)}}{1 - \frac{sen(a)}{cos(a)} \cdot \frac{sen(b)}{cos(b)}}$$

$$= \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)}$$

□

De forma similar se puede probar que:

1. $tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)tg(b)}$.

2. $cotg(a+b) = \frac{cotg(a)cotg(b)-1}{cotg(a)+cotg(b)}$.

3. $cotg(a-b) = \frac{cotg(a)cotg(b)+1}{cotg(b)-cotg(a)}$.

Proposición 5.3.6. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica:*

$$sen(2a) = 2sen(a)cos(a).$$

Demostración. Para demostrar esta proposición usaremos el resultado previo (ver Proposición 5.3.4)

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a);$$

entonces tenemos que se verifica:

$$sen(2a) = sen(a+a) = sen(a)cos(a) + cos(a)sen(a)$$

$$2sen(a)cos(a).$$

□

De una forma similar se puede probar que:

$$cos^2(a) - sen^2(a) = cos(2a).$$

Proposición 5.3.7. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$tg(2a) = \frac{2tg(a)}{1-tg^2(a)}.$$

Demostración. Para la demostración considere la Proposición 5.3.5, entonces:

$$tg(2a) = tg(a+a) = \frac{tg(a)+tg(a)}{1-tg(a)tg(a)} = \frac{2tg(a)}{1-tg^2(a)}.$$

□

Continuando, se deja a la consideración del lector la prueba de que:

$$cotg(2a) = \frac{cotg^2(a)-1}{2cotg(a)},$$

ya que es de una forma similar.

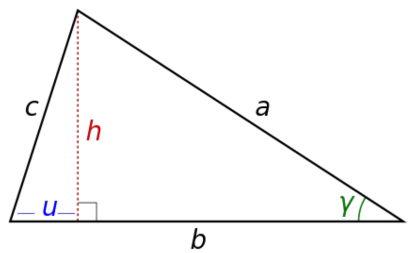


Figura 5.6: El lado c es adyacente a dos ángulos agudos.

Teorema 5.3.1 (Teorema del Coseno)**.** *Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$$

Demostración. Notemos que el Teorema del Coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras cuando el ángulo γ es recto. Por tanto sólo es necesario considerar los casos cuando c es adyacente a dos ángulos agudos y cuando c es adyacente a un ángulo agudo y un obtuso.

1. **Primer caso:** c es adyacente a dos ángulos agudos (Ver Figura 5.6).

   Por el Teorema de Pitágoras, la longitud c es calculada así:

   $$c^2 = h^2 + u^2.$$

   Pero, la longitud h también se calcula así:

   $$h^2 = a^2 - (b - u)^2.$$

   Sumando ambas ecuaciones y luego simplificando obtenemos:

   $$c^2 = a^2 - b^2 + 2bu$$

   Por la definición de coseno, se tiene:

   $$\cos(\gamma) = \frac{b - u}{a}$$

   y por lo tanto

   $$u = b - acos\gamma.$$

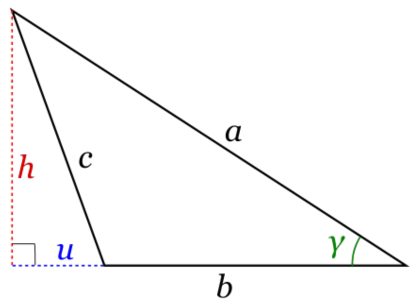


Figura 5.7: El lado c es adyacente a un ángulo obtuso.

Sustituimos el valor de u en la ecuación para c^2, concluyendo que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma,$$

con lo que concluye la prueba del primer caso.

2. **Segundo caso:** c es adyacente a un ángulo obtuso. (Considere la Figura 5.7) El Teorema de Pitágoras establece nuevamente $c^2 = h^2 + u^2$, pero en este caso $h^2 = a^2 - (b+u)^2$.
Combinando ambas ecuaciones obtenemos $c^2 = u^2 + a^2 - b^2 - 2bu - u^2$, y de este modo:
$$c^2 = a^2 - b^2 - 2bu.$$
De la definición de coseno, se tiene
$$cos(\gamma) = \frac{b+u}{a}$$
y por tanto:
$$u = acos(\gamma) - b.$$
Sustituimos en la expresión para $c^2 = a^2 - b^2 - 2b(acos(\gamma) - b)$, concluyendo nuevamente
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma).$$

Con esto último se concluye la demostración de este Teorema. $\square$

Teorema 5.3.2 (Teorema del Seno)**.** *Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b y c entonces:*

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}.$$

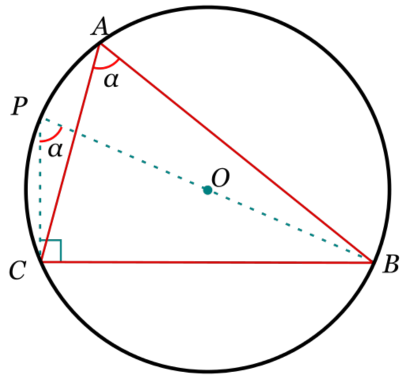


Figura 5.8: El Teorema del Seno establece que $a/sen(A) = 2R$

Demostración. Para la demostración considere la Figura 5.8.

Dado el triángulo ABC, denotamos por O su circuncentro y dibujamos su circunferencia circunscrita. Prolongando el segmento BO hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro BP. Ahora, el triángulo PCB es recto, puesto que BP es un diámetro, y además los ángulos A y P son congruentes, porque ambos son ángulos inscritos que abren el segmento BC. Por definición de la función trigonométrica seno se tiene

$$sen(A) = sen(P) = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}$$

donde R es el radio de la circunferencia. Despejando $2R$ obtenemos

$$\frac{a}{sen(A)} = 2R.$$

Repitiendo el procedimiento con un diámetro que pase por A y otro que pase por C, se llega a que las tres fracciones tienen el mismo valor $2R$ y por lo tanto son iguales. □

Proposición 5.3.8. $sen(x) - sen(y) = 2cos[\frac{1}{2}(x+y)]sen[\frac{1}{2}(x-y)]$.

Demostración. Para la demostración considere lo obtenido en la proposición 5.3.4

$$cos[\frac{1}{2}(x+y)] = cos[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y]$$

$$= cos(\frac{1}{2}x)cos(\frac{1}{2}y) - sen(\frac{1}{2}x)sen(\frac{1}{2}y)$$

y

$$sen[\frac{1}{2}(x-y)] = sen[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y]$$

$$= sen(\frac{1}{2}x)cos(\frac{1}{2}y) - cos(\frac{1}{2}x)sen(\frac{1}{2}y).$$

Entonces

$$cos[\frac{1}{2}(x+y)]sen[\frac{1}{2}(x-y)]$$

$$= cos(\frac{1}{2}x)sen(\frac{1}{2}x)cos^2(\frac{1}{2}y) - cos(\frac{1}{2}y)sen(\frac{1}{2}y)cos^2(\frac{1}{2}x)$$

$$-cos(\frac{1}{2}y)sen(\frac{1}{2}y)sen^2(\frac{1}{2}x) + cos(\frac{1}{2}x)sen(\frac{1}{2}x)sen^2(\frac{1}{2}y)$$

$$= sen\left(\frac{1}{2}x\right)cos\left(\frac{1}{2}x\right) - sen\left(\frac{1}{2}y\right)cos\left(\frac{1}{2}y\right)$$

$$= \frac{sen(x)}{2} - \frac{sen(y)}{2}$$

$$\Rightarrow sen(x) - sen(y) = 2cos\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]sen\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]$$

□

Ejercicio 5.3.1. *Demostrar que dada la identidad trigonométrica*

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

entonces

A) $sen(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$ *y*

B) $cos(\theta) = \sqrt{1 - sen^2(\theta)}$

Solución 5.3.1. *A)*

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow sen^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \sqrt{sen^2(\theta)} = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow |sen(\theta)| = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow sen(\theta) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\theta)} \Rightarrow sen(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

B)

$$\begin{aligned} cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 &\Rightarrow cos^2(\theta) = 1 - sen^2(\theta) \\ &\Rightarrow \sqrt{cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - sen^2(\theta)} \\ &\Rightarrow |cos(\theta)| = \sqrt{1 - sen^2(\theta)} \\ &\Rightarrow cos(\theta) = \pm\sqrt{1 - sen^2(\theta)} \Rightarrow cos(\theta) = \sqrt{1 - sen^2(\theta)} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.2. *Usando los resultados previos demostrar que:*

A) $1 + cos(\alpha) = 2cos^2(\alpha/2)$ *y*

B) $1 - cos(\alpha) = 2sen^2(\alpha/2)$

Solución 5.3.2. *Demostración.* A)

$$\begin{aligned} 1 + cos(\alpha) &= cos^2(\alpha/2) + sen^2(\alpha/2) + cos^2(\alpha/2) - sen^2(\alpha/2) \\ &= 2cos^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

B) Este inciso es similar al anterior, el lector interesado lo puede realizar. □

Proposición 5.3.9. $\lim_{\alpha\to 0} sen(\alpha)/\alpha = 1$

Demostración. Para la demostración, vamos a considerar seriamente la Figura 5.9; de la cual sin perdida de generalidad vamos a obtener que

$$\text{si } 0 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow sen(\alpha) < \alpha < tg(\alpha). \tag{5.1}$$

Ahora como $0 < \alpha < \pi/2$

$$\Rightarrow 0 < cos(\alpha) < 1 \wedge 0 < sen(\alpha) < 1.$$

Entonces de (5.1) obtenemos

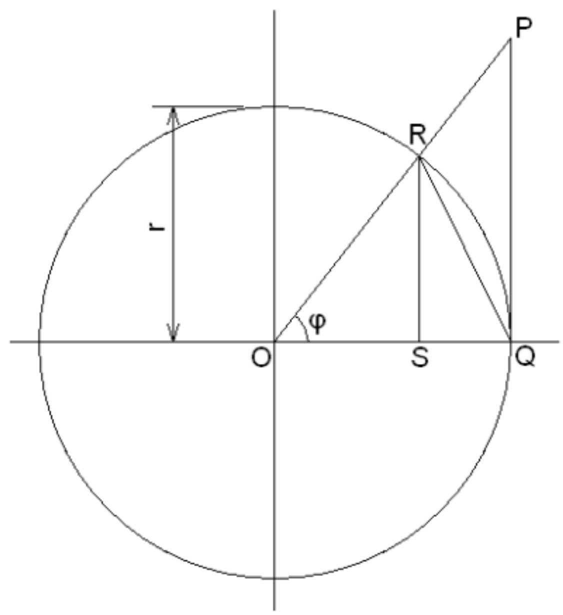
$$\begin{aligned} &\frac{sen(\alpha)}{\alpha} < 1 \wedge \alpha cos(\alpha) < sen(\alpha) \\ &\Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{\alpha} < 1 \wedge cos(\alpha) < \frac{sen(\alpha)}{\alpha} \\ &\Rightarrow cos(\alpha) < \frac{sen(\alpha)}{\alpha} < 1 \end{aligned}$$

Ahora, aplicando a esto último el teorema del sándwich visto en el capítulo de funciones, el teorema queda probado. □

Teorema. El siguiente cálculo es verdadero:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{sen(\varphi)}{\varphi} = 1$$

Demostración:



De acuerdo con la figura presentada, se efectúa una comparación de áreas:

1. $A_{\Delta - OQR} < A_{D-OQR} < A_{\Delta OQP}$, el área del triángulo OQR es menor que el área del sector circular OQR, y, a su vez, dicho sector es menor que el área del triángulo OQP.

Figura 5.9: Diferencia de áreas: Triángulo-Sector-Triángulo

Conclusión

Vamos a concluir este trabajo con tres resultados de las matemáticas, para nuestra humilde opinión, todo universitario del mundo tiene el deber, y lo que es más, tiene la obligación de conocer por lo menos 3 resultados matemáticos; ya que a pesar de la belleza de las matemáticas muchos estudiantes de nivel superior se han olvidado de ellas.

Por lo tanto hay que crear una **conciencia universal** para que cada universitario y aspirante a universitario se acerque más al lenguaje de la ciencias llamado Matemáticas.

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras)**.** *En todo triángulo rectángulos el cuadrado de la hipotenusa c es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b*

Demostración. La prueba se pone de manifiesto en la Figura 5.10

$\square$

Proposición 1 (Ecuación de 2^o grado)**.** *La fórmula general para la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ es:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración. La prueba es de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

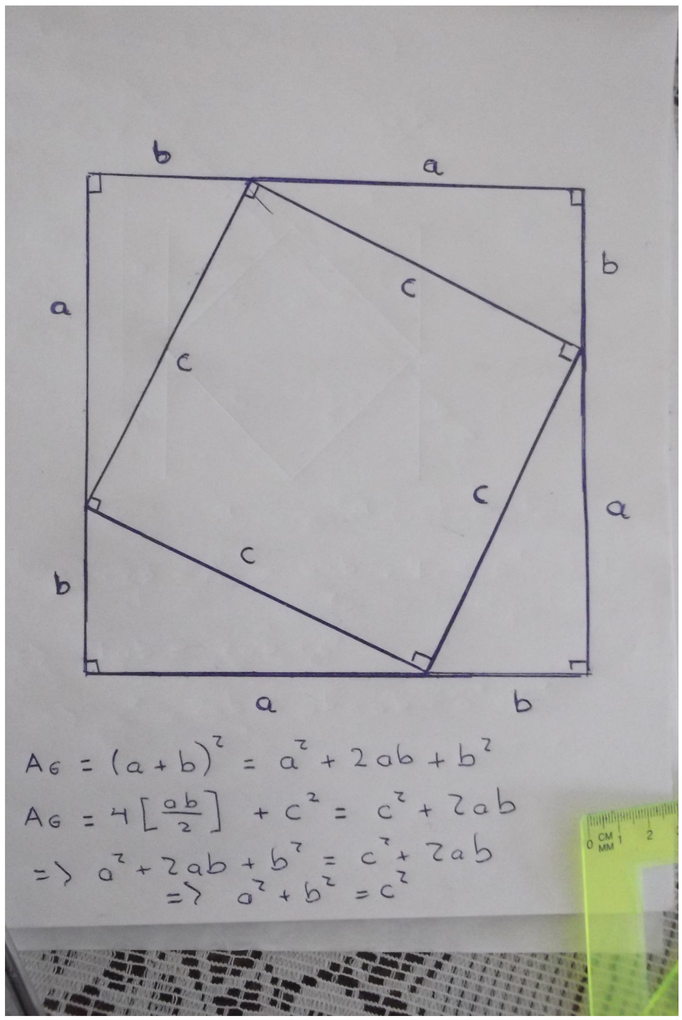


Figura 5.10: Prueba Geométrica del Teorema de Pitágoras

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

y así

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

Proposición 2 (Identidad de Euler)**.** $e^{i\pi} + 1 = 0$

Demostración. Usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x)$$

tenemos que:

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isen(\pi)$$
$$= -1 + i \cdot 0 = -1$$

y de esta forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

□

Bibliografía

[1] J. Angoa, A. Contreras, M. Ibarra, R. Linares, A. Martínez. *Matemáticas Elementales*, Primera Edición, Textos Científicos BUAP, Puebla, Pue., 2004.

[2] G. Cantor. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Edición de José Ferreirós.

[3] W. Granville. *Cálculo diferencial e integral*, Editorial Limusa, 1980.

[4] I. N. Herstein. *Abstract Algebra*, 3a Edición, Editorial Macmillan New York, 1990.

[5] K. Hoffman , R. Kunze, H. E. Finsterbusch. *Álgebra Lineal*, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana.

[6] T. Jech. *Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Springer 2002.

[7] M. Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid, Alianza Editorial, (1992).

[8] C. H. Lehmann. *Geometría Analítica*, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana, 1963.

[9] J. E. Marsden, M. J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja*, (No. 519.9 M3.), 1996.

[10] M. Spivak. *Cálculo Infinitesimal*, 2a Edición, Editorial Reverté, S.A.

[11] https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

[12] https://definicion.de/conjunto/

[13] http://www.matematicatuya.com/DESIGUALDADES/S1a.html

[14] http://juliobeltran.wikidot.com/pruebas:simbolos-logica

[15] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html

[16] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind.html

[17] http://www.vadenumeros.es/primero/dominio−y−recorrido−de−funciones.htm