



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CONEXIDAD DE GRAFOS Y SUS APLICACIONES A MATROIDES
CONECTADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOEL VÁZQUEZ NÁJERA

DIRECTORES DE TESIS:
DR. CARLOS GUILLÉN GALVÁN
MC. PAULINO ANTONIO GÓMEZ SALGADO

PUEBLA, PUE.

JULIO 2019

A mi esposa e hija: Janel y Cami.

A mis papás: Joel y Caro.

A mis hermanos: Vianney, Josué y Montse.

Agradecimientos

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por su apoyo al proyecto: “Familia de árboles con polinomio de independencia unimodal (continuación)”, con clave: 100128244-VIEP2019, que hizo posible la elaboración de esta tesis.

A mis papás, Joel y Caro, que en todo momento han estado para brindarme todo su apoyo, cariño y comprensión. Los quiero.

A mis hermanos, Vianney, Josué y Montse, que salvo algunas peleas, siempre hemos estado juntos.

Janel y Cami, mi nueva familia. Hace tiempo no pensaba en tener a dos mujeres tan maravillosas a mi lado, que a parte de su amor me dan motivos para seguir adelante. Las amo.

Quisiera agradecer a mis dos directores de tesis. Al Dr. Carlos Guillén Gálvan le agradezco por darme la oportunidad de trabajar el tema bajo su supervisión; siempre hubo entera disposición de su parte para resolver cualquier duda, y apoyo para poder culminarla. Al M.C. Paulino Antonio Gómez Salgado, amigo y ahora asesor, te agradezco por tu interés mostrado y mucha ayuda brindada para poder concluir en tiempo la tesis. A ambos, infinitas gracias.

A mis sinodales: Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. César Bautista Ramos y M.C. Marisol Mares Javier, por su tiempo, por sus correcciones y observaciones hechas al trabajo.

A mis amigos, que siempre me impulsaron a seguir adelante y no claudicar.

Introducción

Königsberg, antigua ciudad de Prusia oriental, hoy Kaliningrado, célebre por los siete puentes que cruzan el río Pregel. La ciudad de Königsberg está vinculada al famoso matemático Leonhard Euler, que según se cuenta se planteó la pregunta si era posible cruzar cada puente exactamente una vez. El paseo no exige que se termine donde se empieza, sino que solo se atravesase cada puente una vez. Euler presentó su solución a la Academia Rusa; solución donde demostró que no era posible. A ese trabajo de Euler actualmente se considera el comienzo de la teoría de grafos moderna.

La teoría de grafos está inmersa en muchas áreas matemáticas, y también en áreas fuera de ella. Por lo cual su estudio presenta muchas aplicaciones hoy en día. Desde modelar las neuronas en un cerebro, los patrones de vuelo de una aerolínea, descifrado de códigos, hasta relacionar bases de datos, entre otras.

El concepto de grafo, es muy versátil, ya que se puede representar, o ver, desde distintas vertientes. La principal y la más común de las formas de representar un grafo, es mediante puntos y líneas, donde cada línea que une dos puntos establece una relación entre ellos. Una idea más abstracta de ver los grafos, es mediante la relación matemática; más aún, si tenemos una relación entonces podemos definir un grafo que describa a cierto conjunto con la relación definida ahí. Un grafo se dice conectado o conexo si cualquier par de puntos distintos del grafo pueden ser unidos por un conjunto de líneas unidas secuencialmente por sus extremos.

La conectividad de un grafo es una propiedad de interés considerable debido a su impacto tanto en su estudio teórico como en el desarrollo de sus aplicaciones. Por ejemplo, en la parte teórica hay una amplia línea de investigación dedicada a la determinación de características de unimodalidad de grafos conexos acíclicos (árboles) [1, 2, 8]. Con lo que respecta a sus aplicaciones, por mencionar un ejemplo, podemos citar las que se presentan en la teoría de redes y flujos [7, 6]. Otro tópico de investigación de enorme interés, es el diagnóstico de fallas en los sistemas de eventos discretos. Los

sistemas de eventos discretos son sistemas dinámicos con espacio de estados discreto y cuya evolución es gobernada en el tiempo por la ocurrencia de eventos físicos en posibles intervalos de tiempo irregulares. El diagnóstico de fallas de un sistema de eventos discreto es estudiado a través de un grafo y de la cerradura de sus componentes fuertemente conectadas para detectar y predecir un evento defectuoso [4, 5]. También los grafos conectados resultan ser muy útiles en el estudio de la propagación de epidemias en una población, aquí los vértices del grafo son las personas de la población y sus aristas se forman si hay transmisión de la enfermedad de un individuo a otro. Este modelo ayuda a rastrear la transmisión de la enfermedad y a su control. En la construcción de algoritmos eficientes para diversos problemas combinatorios los grafos combinados con otras teorías, como la teoría de cubiertas basadas en conjuntos de aproximación o aproximados, juegan un papel fundamental, especialmente en cuanto a la selección de atributos y extracción de reglas en el reconocimiento de patrones [10, 14].

Ubicada dentro de la combinatoria se encuentra la teoría de matroides, que se basa en gran parte en la terminología del álgebra lineal y la teoría de grafos. En esta teoría se generaliza el concepto de conjunto independiente de un espacio vectorial, así como varias nociones de la teoría de grafos [11]. Un ejemplo de las nociones extendidas por la teoría de matroides es la conectividad de un grafo, la cual fundamenta las bases para el estudio de la conectividad para matroides, además de que proporciona plataformas bien establecidas para el diseño de algoritmos eficientes.

El principal objetivo de la tesis es introducir el estudio de la conectividad de los matroides a través de la conectividad de grafos y las cubiertas basadas en conjuntos aproximados. Para el desarrollo de este trabajo nos hemos basado principalmente en el artículo [10]. Se aportan algunos detalles no contemplados en el artículo, sobre todo en las primeras secciones del capítulo 3. A continuación se describe como se encuentra organizado este trabajo.

El *capítulo 1* se enfoca en introducir el concepto de grafo, dar algunas de sus propiedades fundamentales y ejemplos básicos, para llegar al concepto de *grafo conexo*. La mayoría de los conceptos introducidos en este capítulo han sido tomadas del libro *Graph Theory* [7], también se tomaron algunas ideas de [3, 12, 13].

Por otro lado, el *capítulo 2*, tiene como objetivo dar una pequeña introducción a la *Teoría de Matroides*, la cual tiene como uno de los ejemplos más importantes a los grafos. La noción de *matroide* fue introducida por Whitney[15] en 1935. La idea principal aquí es llegar al concepto de *matroide conectado*.

El objetivo de presentar los *Capítulo 1 y 2*, es relacionar los *matroides* con los *grafos*, dicho puente lo encontraremos mediante la noción de *Matroides gráficos*.

Finalmente, en el *Capítulo 3* se introduce un nuevo enfoque, con el cual se establece una relación directa entre *matroides* y *grafos* a través de *cubiertas de conjuntos aproximados*. Dicho enfoque es desarrollado en el artículo titulado *Connectedness of graphs and its application to connected matroids through covering-based rough sets* [10].

Índice general

Introducción	VII
1. Teoría de Grafos	1
1.1. Conceptos básicos de la teoría de grafos	1
1.2. Algunas operaciones con grafos	4
1.3. Caminos, grafos conexos y árboles	5
2. Teoría de Matroides	11
2.1. Axiomas de conjuntos independientes	11
2.2. Axiomas de circuito	12
3. Conexidad de Matroides a través de la conexidad grafos	17
3.1. Cubiertas basadas en conjuntos aproximados	17
3.2. Un enfoque del operador cubierta de aproximación a la conexidad en grafos	21
3.3. Un enfoque de la conexidad de un grafo mediante el k -operador superior de aproximación	24
3.4. Una aplicación a matroides conectados	28
Conclusiones	35
Bibliografía	36

Capítulo 1

Teoría de Grafos

Este capítulo está dedicado a definir los conceptos básicos, así como los necesarios de la teoría de grafos que nos ayudan a entender los conceptos futuros abordados en la tesis. La mayor parte de los conceptos presentados en este capítulo fueron tomados del libro *Graph Theory* [7].

1.1. Conceptos básicos de la teoría de grafos

Dado un conjunto V , denotamos con $[V]^2$, el conjunto de todos los subconjuntos binarios de V . La siguiente definición en otros textos corresponde a la de grafo simple.

Definición 1.1. *Un grafo es un par de conjuntos $G = (V, E)$, donde V es llamado el conjunto de vértices (o nodos) del grafo y E subconjunto de $[V]^2$ es el conjunto de aristas del grafo.*

Si $G = (V, E)$ es un grafo, $V(G)$ denota el conjunto de vértices del grafo G y $E(G)$ es el conjunto sus aristas; esto, si existe alguna ambigüedad entre 2 o más grafos. También cabe señalar que para esta notación V y E son fijos, indicando el conjunto de vértices y aristas, respectivamente, mientras que la variante será el “nombre” del grafo, en este caso G .

Si $V(G) = \emptyset$, el grafo G es llamado *grafo vacío*. Si $\{x, y\} \in E(G)$, podemos denotar a $\{x, y\}$ como xy o como yx . A los elemento x e y de una arista se les llama *extremos* de la arista xy , también decimos que la arista xy es *incidente* en x (o en y). Decimos que x e y son *adyacentes* si pertenecen

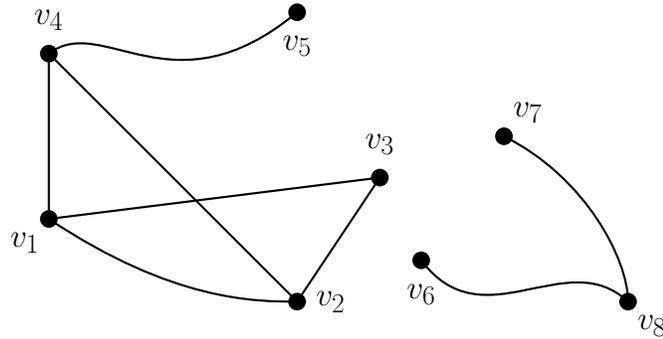


Figura 1.1: Grafo $G = (V, E)$.

a la misma arista. El conjunto de todas las aristas adyacentes o *vecinos* de un vértice $v \in V$ se denota por $N(v)$. Si $N(v) = \emptyset$ entonces v es un *vértice aislado*.

Ejemplo 1.2. Sea G el grafo como en la Figura 1.1. Entonces $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, mientras que $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_5, v_6v_8, v_7v_8\}$. Por ejemplo, para v_1 se tiene que $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$.

A continuación se mencionan algunos tipos de grafos enfocados al objetivo de este trabajo. A saber, se definirán los conceptos de *multigrafo*, *grafo dirigido* y *grafo simple*. Este último será el de mayor peso en esta tesis.

Definición 1.3. Un *multigrafo* es un par (V, E) de conjuntos disjuntos con un mapeo $\mu : E \rightarrow V \cup [V]^2$ que asigna a toda arista uno o dos vértices.

En los *multigrafos* podemos establecer conexiones entre vértices de 1 o más aristas.

Ejemplo 1.4. En el grafo G de la Figura 1.2, se puede observar que tiene varias aristas entre un mismo par de vértices, así como un lazo en v_5 .

A las conexiones (aristas) dadas entre los vértices se les puede asignar un sentido, es decir, si $u, v \in V$ entonces uv y vu son dos aristas distintas entre los vértices u y v . Podemos establecer lo anterior en la siguiente definición.

Definición 1.5. Un *grafo dirigido* es un par (V, E) de conjuntos disjuntos, junto con dos mapeos $ini : E \rightarrow V$ y $ter : E \rightarrow V$. Es decir, para cada arista $e \in E$ se le asigna un vértice inicial y uno final.

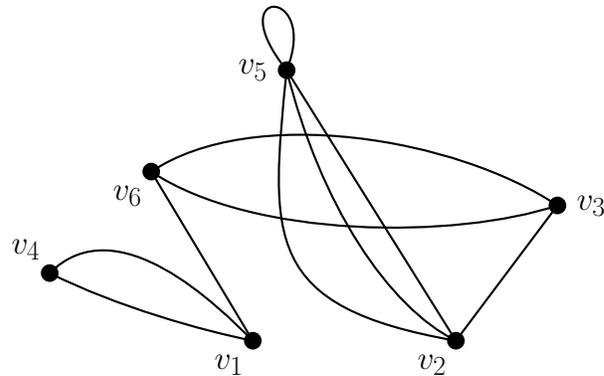


Figura 1.2: Un multigrafo G .

A un *grafo dirigido* también se le suele llamar *digrafo*. La arista $e \in E$ se dice estar dirigida de $ini(e)$ a $ter(e)$. Dos aristas en los mismos vértices x e y son llamadas *aristas múltiples*, si ellas tienen la misma dirección se les llama *aristas paralelas*. Si $ini(e) = ter(e)$, a la arista e se le llamará *lazo* o *bucle*.

Definición 1.6. Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo simple si no tiene lazos ni aristas múltiples.

Desde este momento escribiremos simplemente grafo para referirnos a un grafo simple, a menos que se indique otra cosa.

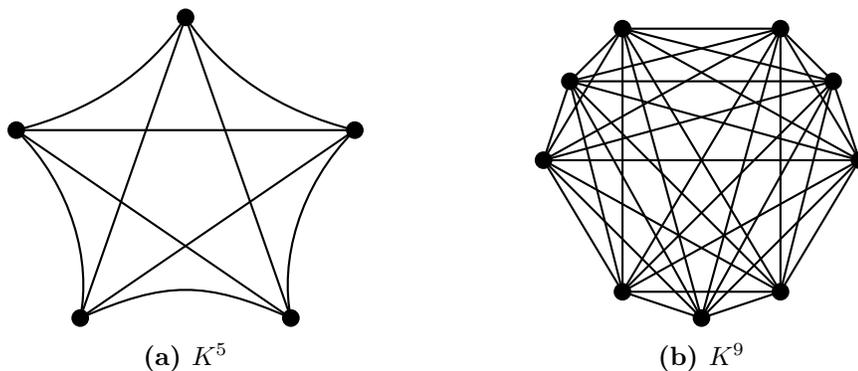


Figura 1.3: Grafos completos.

Definición 1.7. El orden de un grafo G es el número de vértices de G y se denota por $|G|$, mientras que el tamaño es el número de aristas de G , se denota por $\|G\|$.

Definición 1.8. Un grafo $G = (V, E)$ es completo si para cada par de vértices $x, y \in G$ la arista $xy \in E$, es decir, si todas las parejas de vértices en G son adyacentes. Un grafo completo de n vértices se denota por K^n .

Un grafo de orden 0 o 1 es llamado *grafo trivial*. Cabe mencionar que algunos autores denotan al *grafo completo* por K_n pero se guardará esta notación para la Definición 3.11. Ejemplos de grafos completos son dados en la Figura 1.3.

1.2. Algunas operaciones con grafos

Como en muchas categorías es necesario conocer las subestructuras y las estructuras que se pueden generar a partir de cierto objeto, no es la excepción con los grafos, es por eso que se enunciarán a continuación algunos conceptos derivados de los grafos.

Definición 1.9. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, se define la igualdad de grafos como sigue, $G = G'$ si y solo si $V' = V$ y $E' = E$.

Definición 1.10. Se dice que $G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y se denota por $G' \subseteq G$.

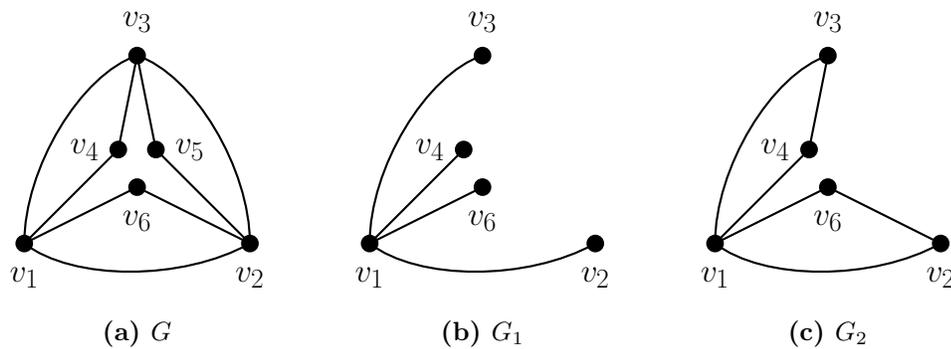


Figura 1.4: G_1 y G_2 son subgrafos de G . A diferencia de G_1 , G_2 es inducido por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$

Si $G' \subseteq G$ pero $G' \neq G$ entonces G' es *subgrafo propio* de G y se escribe $G' \subset G$. Si $G' \subseteq G$ y para cada arista $xy \in E$ con $x, y \in V'$ entonces $xy \in E'$.

Dado un subconjunto de vértices V' de un grafo G podemos generar un subgrafo a partir de estos vértices, tal subgrafo consistirá de dichos vértices V' y el conjunto de aristas será el conjunto de aristas incidentes en cada vértice de V' . Lo anterior queda plasmado en la siguiente definición.

Definición 1.11. Sean $G = (V, E)$ un grafo, si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in E$, con $x, y \in V'$ entonces G' es un subgrafo inducido de G . Dicho grafo G' inducido por el conjunto de vértices V' se denotará por $G[V']$.

Ejemplo 1.12. En la Figura 1.4, G_1 y G_2 son subgrafos de G . Pero G_1 no es subgrafo inducido de G . Por su lado G_2 sí es grafo inducido de G , a saber, inducido por el subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$.

Un subgrafo G' de G es un *subgrafo abarcador* de G si $V' = V$. Si U es cualquier conjunto de vértices, denotamos $G[V \setminus U]$ por $G - U$, mientras que la operación $G \setminus \{v\}$ se denotará por $G - v$.

1.3. Caminos, grafos conexos y árboles

Algunos grafos tienen características comunes que nos permiten clasificarlos por tipos específicos, ahora describiremos algunos de estos, ya que el hecho de que tengan estas características nos permite realizar el análisis más detallado enfocado en su tipo.

Definición 1.13. Un camino P es un grafo no vacío $P = (V, E)$ en el cual $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ donde cada $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

El número de aristas de un camino es su *longitud* y el camino de longitud k se denota por P_k . Note que $P_0 = K^1$. A menudo nos referimos a un camino por la sucesión natural de sus vértices, es decir $P = x_0x_1 \cdots x_k$ y llamamos a P un camino de x_0 a x_k . Un camino que inicia y termina en el mismo nodo es llamado *ciclo*.

Definición 1.14. Un grafo no vacío G es llamado *conectado* si cualquier par de vértices $x, y \in G$ están unidos por un camino en G . Llamamos *desconectado* a un grafo que es no conectado.

Dos vértices x, y son (x, y) -conectados si existe un camino entre ellos, o simplemente se dirá que x y y están *conectados*. Si $U \subseteq V(G)$ y $G[U]$ es

conectado, decimos que G es conectado en U .

La siguiente definición es muy útil, ya que nos ayuda a descomponer un grafo en subgrafos conexos.

Definición 1.15. *Un subgrafo conexo maximal (con respecto a la relación de subgrafo) es una componente de G .*

Observación 1.16. *Si C_1 es una componente de G no existe un subgrafo conexo C_2 de G tal que $C_1 \subset C_2$.*

Las *componentes* son subgrafos *inducidos*. El conjunto de *vértices* de las componentes forman una *partición* de V . El grafo vacío no tiene componentes. Por definición las *componentes* son subgrafos *conexos*, es por eso que también se les llama *componentes conexas*.

Ejemplo 1.17. *Sea $G = (V, E)$ el grafo de la Figura 1.1. Sean $V_1, V_2 \subseteq V$ tales que $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $V_2 = \{v_6, v_7, v_8\}$ Entonces $C_1 = G[V_1]$ y $C_2 = G[V_2]$ son las componentes conexas de G .*

Definición 1.18. *Un grafo conexo que no tiene ciclos es un árbol.*

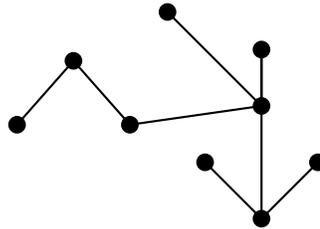


Figura 1.5: Árbol.

A un *árbol* lo podemos caracterizar de distintas maneras, la siguiente proposición nos muestra algunas equivalencias.

Proposición 1.19. *Para un grafo T son equivalentes:*

- (i) T es un árbol.
- (ii) Cualquier par de vértices de T son conectados por un único camino.
- (iii) T es minimalmente conectado.

(iv) T es maximalmente acíclico.

Ejemplo 1.20. En la siguiente lista se presentan ejemplos de grafos conectados y desconectados.

- (i) Los grafos completos de $n \geq 2$ vértices, K^n , son grafos conectados.
- (ii) Los caminos de longitud $k \geq 2$, P_k , son grafos conectados.
- (iii) El grafo $G = (V, E)$ de la Figura 1.6 es un grafo desconectado.
- (iv) El grafo $K^1 = P_0$, o lo que es lo mismo, un vértice aislado es un grafo conectado.

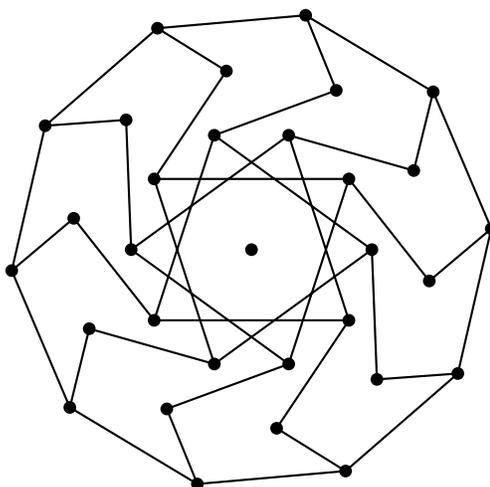


Figura 1.6: Grafo $G = (V, E)$.

Definición 1.21. Sea $r \geq 2$ un entero. Un grafo $G = (V, E)$ es llamado r -partito si V admite una partición en r clases tales que cada arista tiene vértices en una clase diferente, es decir dos vértices de la misma clase no son adyacentes.

A un grafo G que es 2-partito se le llama usualmente *bipartito*. Un grafo r -partito es llamado *completo* si cada par de vértices en clases diferentes son adyacentes.

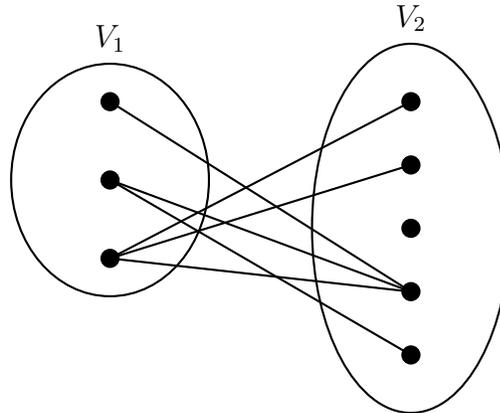


Figura 1.7: Grafo bipartito.

Los grafos r -partitos completos para todo r son los *grafos multipartitos completos*, denotados por K_{n_1, \dots, n_r} , donde cada n_i , $i = 1, \dots, r$, es la cardinalidad de la clase i -ésima; si $n_1 = \dots = n_r = s$, abreviamos la notación anterior como K_s^r . Así K_s^r es el grafo r -partito completo en el cual cada clase de la partición tiene exactamente s vértices.

Definición 1.22. Un grafo G es k -conectado, $k \in \mathbb{N}$, si $|G| > k$ y $G - X$ es conexo para todo conjunto $X \subseteq V$ con $|X| < k$.

Un grafo que es k -conectado es s -conectado, para cada $s < k$.

Ejemplo 1.23. Un grafo completo K^n es $(n - 1)$ -conectado.

Definición 1.24. El mayor entero k tal que G es k -conectado es la *conectividad* de $k(G)$ de G .

Otras formas de representar un grafo G es por medio de matrices como se verá a continuación.

Definición 1.25. Dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, definimos la *matriz de incidencia* de G , $I(G) = (b_{ij})_{n \times m}$, donde,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.26. *Matriz de incidencia del grafo G_1 de la Figura 1.4.*

$$I(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.27. *Dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, definimos la matriz de adyacencia de G , $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, donde,*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.28. *Matriz de adyacencia del grafo G_1 de la Figura 1.4.*

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto concluimos la sección dedicada a la teoría de grafos.

Capítulo 2

Teoría de Matroides

En este capítulo se dará un acercamiento a la teoría de matroides, comenzando con la definición y llegando al concepto de conexidad en matroides, tal concepto será de gran importancia en el capítulo 3, ya que se busca establecer una relación entre la conexidad de grafos y matroides.

2.1. Axiomas de conjuntos independientes

La siguiente definición tiene la función de abstraer el concepto de conjunto independiente para un conjunto donde no contamos con una estructura de espacio vectorial.

Definición 2.1. *Un matroide M es un par (U, \mathcal{I}) que consiste de un conjunto finito U y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de U , llamados conjuntos independientes, que satisface las siguientes condiciones:*

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Si $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subseteq I$ entonces $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) Si $I, I' \in \mathcal{I}$ y además $|I'| < |I|$ entonces existe $x \in I \setminus I'$ tal que $I' \cup \{x\}$.

Escribiremos $M = (U, \mathcal{I})$ o simplemente M si U e \mathcal{I} son evidentes, y decimos que M es un matroide en U . A los elementos de \mathcal{I} les llamaremos conjuntos *independientes*, mientras que los subconjuntos de U que no son elementos de \mathcal{I} son llamados *dependientes*. Observe que la propiedad (I1) es

equivalente a decir que \mathcal{I} es diferente del conjunto vacío. La propiedad (I2) es *hereditaria*, ya que cualquier subconjunto de un conjunto independiente es también independiente. A la propiedad (I3) le llamaremos de *augmentación*. Al conjunto U se le llamará *conjunto subyacente* de M . Se escribe $U(M)$ para enfatizar que este es el conjunto subyacente del matroide M .

El siguiente ejemplo es una plantilla de los ejemplos clásicos introductorios al concepto de *matroides*, y nos da idea del por qué recibió dicho nombre, dado en [15].

Ejemplo 2.2. *Sea A una matriz 2×4 en el campo de los números reales, definida de la siguiente manera:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etiquetamos a cada vector columna con su respectivo número de columna. Es decir, sea $U = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de columnas etiquetadas de la matriz A , y definimos a $\mathcal{I} = \{X \in U : X \text{ es un conjunto linealmente independiente en } \mathbb{R}^2\}$. Entonces $M = (U, \mathcal{I})$ es un matroide.

El siguiente ejemplo generaliza el concepto anterior.

Ejemplo 2.3. *Sea U un conjunto finito de vectores sobre un campo \mathbb{F} y supongamos que \mathcal{I} consiste de todos los subconjuntos de U los cuales son linealmente independientes sobre \mathbb{F} . Afirmamos que (U, \mathcal{I}) es un matroide, el cual es llamado matroide vectorial y, si los vectores de U son los vectores columna asociados a una matriz A entonces el matroide será representado por $M[A]$.*

Definición 2.4. *Decimos que dos matroides $M = (E, \mathcal{I})$ y $M' = (E', \mathcal{I}')$ son isomorfos si existe una biyección $\phi : E \mapsto E'$ tal que cualquier conjunto A es independiente en M si y solo si $\phi(A)$ es independiente en M' .*

2.2. Axiomas de circuito

Ahora se define un concepto importante, con el cual es posible dar una definición alterna al concepto de matroide. A saber, dicho concepto es el de

circuito, el cual tendrá mucha importancia, ya que será un puente entre el *matroides* y *grafos*.

Definición 2.5. *Un circuito \mathcal{C} en un matroide M es un subconjunto dependiente minimal de U , es decir, un conjunto dependiente cuyos subconjuntos propios son todos independientes.*

El conjunto de todos los circuitos de M se denota por $\mathcal{C}(M)$ o simplemente \mathcal{C} . El siguiente ejemplo trata de dejar claro las ideas principales de un circuito.

Ejemplo 2.6. *Sea la matriz A sobre el campo de los números reales, definida como sigue*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etiquetemos a cada columna con su respectivo número de columna, partiendo de izquierda a derecha. Sean $U = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, entonces $M = (U, \mathcal{I})$ determina un matroide. Ahora, el conjunto de circuitos de M es $\mathcal{C} = \{\{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$. Notemos que si únicamente se tuviera a los conjuntos U y \mathcal{C} podemos determinar a \mathcal{I} , ya que los elementos de \mathcal{I} son los subconjuntos propios de \mathcal{C} .

Como se puede notar, los *circuitos* de un *matroide* la definen completamente, es decir, a partir de los *circuitos* es posible determinar los conjuntos independientes de un *matroide*. La siguiente proposición refleja este dicho.

Proposición 2.7. *Sea \mathcal{C} una familia de subconjuntos de U . Existe un matroide M tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ si y solo si \mathcal{C} satisface las siguientes condiciones:*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) Para cada $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$.

(C3) Para cada $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$ y $x \in C_1 \cap C_2$, existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - \{x\}$.

Un matroide queda completamente determinado por su conjunto de circuitos, de siguiente manera $\mathcal{I}(M)$ es el conjunto de elementos de U que no contiene como subconjuntos miembros de $\mathcal{C}(M)$.

Las condiciones (C1) – (C3) son llamados *axiomas de circuitos* y el matroide adecuado queda determinado por el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Sea U un conjunto y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de U que satisfacen (C1)-(C3). Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos de U que no contienen miembros de \mathcal{C} . Entonces (U, \mathcal{I}) es un matroide que tiene a \mathcal{C} como su colección de circuitos.*

Así, el par (U, \mathcal{C}) definen un matroide. Inmediatamente de la Proposición 2.7, $X \subseteq U$ es independiente si y solo si no contiene ningún ciclo.

La siguiente proposición es una propiedad de matroides que se usa frecuentemente.

Proposición 2.9. *Suponga que I es un conjunto independiente de un matroide M y e es un elemento de M tal que $I \cup e$ es dependiente. Entonces M tiene un único circuito contenido en $I \cup e$ y este circuito contiene a e .*

De hecho, los matroides y los grafos coinciden entre sí cuando el circuito de un matroide degenera en el ciclo de un grafo. El siguiente ejemplo es para ilustrar este argumento.

Ejemplo 2.10. *Sea $G = (V, E)$, donde $V = \{a, b, c, d\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Supongamos que \mathcal{C} es el conjunto de ciclos de G , y $\mathcal{C} = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_2, e_4, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4, e_5\}\}$. Es fácil verificar que \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$, donde E será igual al conjunto de aristas de E e $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ (como subgrafo) no contiene ciclos}\}$, es decir, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_1, e_3, e_5\}, \{e_1, e_4, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}, \{e_3, e_4, e_5\}\}$.*

Los matroides derivados de los grafos serán descritos a continuación. Recordando que los ciclos de un grafo son caminos cerrados cuyos vértices son todos de grado dos.

Proposición 2.11. *Sea E un conjunto de aristas de un grafo G y \mathcal{C} el conjunto de conjuntos de aristas de ciclos de G . Entonces \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide sobre E .*

El matroide resultante del grafo G es llamado *matroide gráfico* o *matroide cíclico* de G y se denota por $M(G)$. Claramente, un conjunto de aristas X de G es *independiente* si y solo si X no contiene ciclos.

Si $C \in \mathcal{C}(M)$ y $C = \{x\}$ decimos que C es un *lazo* o *bucle* de M . Si $\mathcal{C}(M)$ no contiene algún conjunto singular, el matroide es *sin lazos* (*bucles*). Para la familia de *circuitos*, la *conexidad* del matroide está definida mediante la siguiente relación: *para cada par de elementos $a, b \in U(M)$ definimos la relación anterior R por aRb si y solo si $a = b$ o M tiene un circuito que contiene a y b* . Para cada $t \in U(M)$ se denotará por $R(t)$ a la clase de equivalencia de t , dada por la relación R .

Las siguientes proposiciones plasman lo dicho en el párrafo anterior.

Proposición 2.12. *La relación R es una relación de equivalencia en $U(M)$.*

Corolario 2.13. *Si $T \subseteq U(M)$ y R es una R -clase de equivalencia, entonces para todo $t \in T$, $R(t) = T$.*

La R -clases de equivalencia son llamadas las *componentes conectadas* de M . Claramente, los lazos es una componente de M . Si $U(M)$ es una componente de M , la llamaremos a M *2-conectado* o a veces solamente *conectado*; de cualquier otra forma diremos que M es *desconectado*. La siguiente proposición se sigue inmediatamente del corolario anterior.

Proposición 2.14. *El matroide M es conectado si y solo si, para cada par de elementos de $U(M)$, existe un circuito que contiene a ambos.*

Con esto terminamos esta breve sección dedicada a la Teoría de matroides.

Capítulo 3

Conexidad de Matroides a través de la conexidad grafos

En este capítulo se introduce el término de *cubierta*, así como sus derivados, *cubierta superior* e *inferior*, que dan inicio a un nuevo enfoque de la conexidad de grafos, como también a la conexidad de matroides. Finalmente, dentro de este mismo contexto se establecerá una relación de la conexidad en grafos y en matroides.

Cabe mencionar que este último capítulo tiene como base el artículo que lleva por nombre “*Connectedness of graphs and its application to connected matroids through covering-based rough sets*” [10].

3.1. Cubiertas basadas en conjuntos aproximados

En la siguiente definición se introduce el concepto de *cubiertas basadas en conjuntos aproximados*.

Definición 3.1. *Sea U un conjunto finito y C una familia de subconjuntos de U . Si ninguno de los subconjuntos de C es vacío y la unión de todos los elementos de C es U , entonces C es llamada cubierta de U . La pareja (U, C) será llamada espacio cubierta de aproximación.*

Este concepto no está muy alejado de *cubierta* desde el punto de vista *topológico*, pero en este trabajo se enfoca más a conjuntos *finitos*, a diferencia

de *topología* donde se le da más peso a los conjuntos infinitos y se encamina hacia el concepto de *compacidad*.

Definición 3.2. Sea C una cubierta de U y $X \subseteq U$ entonces las cubiertas superior e inferior de aproximación de X , denotadas por $\overline{C}(X)$ y $\underline{C}(X)$ respectivamente, se definen como:

$$(i) \overline{C}(X) = \bigcup_{K \in I} K, \text{ donde } I = \{K \in C : K \cap X \neq \emptyset\}.$$

$$(ii) \underline{C}(X) = (\overline{C}(X^c))^c, \text{ donde } X^c \text{ denota el complemento de } X \text{ en } U.$$

A continuación se presentan propiedades importantes del operador *cubierta superior de aproximación*, y después enunciaremos las propiedades duales para el operador de *cubierta inferior de aproximación*.

Proposición 3.3. Sea C una cubierta de U . El operador \overline{C} tiene las siguientes propiedades:

$$(i) \overline{C}(\emptyset) = \emptyset. \text{ (Normalidad)}$$

$$(ii) \overline{C}(U) = U. \text{ (Co-normalidad)}$$

$$(iii) \text{ Para todo } X \subseteq U, X \subseteq \overline{C}(X). \text{ (Extensión)}$$

$$(iv) \text{ Si } X, Y \subseteq U, \overline{C}(X \cup Y) = \overline{C}(X) \cup \overline{C}(Y). \text{ (Aditividad)}$$

$$(v) \text{ Si } X \subseteq Y \subseteq U, \text{ entonces } \overline{C}(X) \subseteq \overline{C}(Y). \text{ (Monotonía)}$$

Demostración. (i) y (ii) son inmediatas de la definición.

(iii) Supongamos que $x \in X$ y $x \notin \overline{C}(X)$ entonces $x \notin K$, para todo $K \in C$, luego $x \notin \bigcup K = U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X \subseteq \overline{C}(X)$.

(iv) Para la propiedad aditiva se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \overline{C}(X \cup Y) &= \bigcup_{K \cap (X \cup Y) \neq \emptyset} K = \bigcup_{(K \cap X) \cup (K \cap Y) \neq \emptyset} K \\ &= \bigcup_{K \cap X \neq \emptyset \vee K \cap Y \neq \emptyset} K = \left(\bigcup_{K \cap X \neq \emptyset} K \right) \cup \left(\bigcup_{K \cap Y \neq \emptyset} K \right) \\ &= \overline{C}(X) \cup \overline{C}(Y). \end{aligned}$$

- (v) Sea $x \in \overline{C}(X)$ entonces $x \in K$ para algún $K \in C$, con $K \cap X \neq \emptyset$. Como $X \subseteq Y$ se sigue que $K \cap Y \neq \emptyset$, con $x \in K$ para algún $K \in C$, por tanto $x \in \overline{C}(Y)$.

□

Proposición 3.4. Sea C una cubierta de U . El operador \underline{C} tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\underline{C}(\emptyset) = \emptyset$. (**Normalidad**)
(ii) $\underline{C}(U) = U$. (**Co-normalidad**)
(iii) Para todo $X \subseteq U$, $\underline{C}(X) \subseteq X$. (**Extensión**)
(iv) Si $X, Y \subseteq U$, $\underline{C}(X \cup Y) = \underline{C}(X) \cup \underline{C}(Y)$. (**Aditividad**)
(v) Si $X \subseteq Y \subseteq U$, entonces $\underline{C}(X) \subseteq \underline{C}(Y)$. (**Monotonía**)

Demostración. Usando propiedades del complemento de un conjunto y las de la cubierta superior no es difícil mostrar la validez de las propiedades. □

Definición 3.5. Sea $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un conjunto con n elementos y $X \subseteq U$. Definimos la función característica χ_X de X que asigna 1 a elementos que pertenecen a X y 0 si el elemento no está en X . Es decir, para cada $x \in U$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Se representará a la función característica mediante una n -ada (columna) o como un vector transpuesto, de ceros y unos dependiendo si x está o no en X .

Ejemplo 3.6. Sean $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $X = \{u_2, u_3\}$, entonces $\chi_X = (0, 1, 1)^T$.

Definición 3.7. Sean $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ una cubierta de U , definimos para cada $u_i \in U$, a la matriz $M_C = (m_{ij})_{n \times m}$ como:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \in K_j, \\ 0 & \text{si } u_i \notin K_j. \end{cases}$$

M_C es llamada la matriz de representación de la cubierta C o la matriz que representa a C .

La matriz de representación no es única debido a que no hay definido un orden en U . Dicha situación se visualiza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Sea $U = \{a, b, c, d, e\}$ y $C = \{\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}$ una cubierta de U . Entonces las matrices M_1 y M_2 representan a C .

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se mencionó anteriormente la matriz de representación de la cubierta no es única, pero el producto $M_C \cdot M_C^T$ sí lo es, donde el producto es el producto booleano y M_C^T es la matriz transpuesta de M_C .

La siguiente proposición nos proporciona una relación entre la *matriz de representación* M_C , la *cubierta superior de aproximación* y la *función característica* χ .

Proposición 3.9. Sea C una cubierta de U . Entonces para todo $X \subseteq U$, $\chi_{\overline{C}(X)} = (M_C \cdot M_C^T) \cdot \chi_X$.

Ejemplo 3.10. Sean U y C como el ejemplo anterior, y sea $X = \{a, e\}$. Entonces $\overline{C}(X) = \{a, b, c, e\}$ y $\chi_{\overline{C}(X)} = (1, 1, 1, 0, 1)^T$. Por otro lado, sea $M_1 = M_C$ una matriz que representa a la cubierta C , entonces

$$M_C \cdot M_C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, como $\chi_X = (1, 0, 0, 0, 1)^T$, no es difícil ver que $(M_C \cdot M_C^T)\chi_X = (1, 1, 1, 0, 1)$. Por tanto, salvo por el operador transpuesta, tenemos que $\chi_{\overline{C}(X)} = (M_C \cdot M_C^T) \cdot \chi_X$.

3.2. Un enfoque del operador cubierta de aproximación a la conexidad en grafos

En esta sección, presentamos ciertos enfoques para verificar si un grafo es conexo a través del operador *cubierta superior de aproximación*. Para esto, necesitamos establecer una relación entre un *grafo* y una *cubierta*.

Definición 3.11. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido. Podemos definir una familia de $F(G)$ de subconjuntos de V como sigue: para cada $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in F(G) \text{ si y solo si } uv \in E.$$

La definición anterior indica que un grafo puede ser representado por una familia de subconjuntos de sus vértices, lo cual es muy natural dada la definición de grafo.

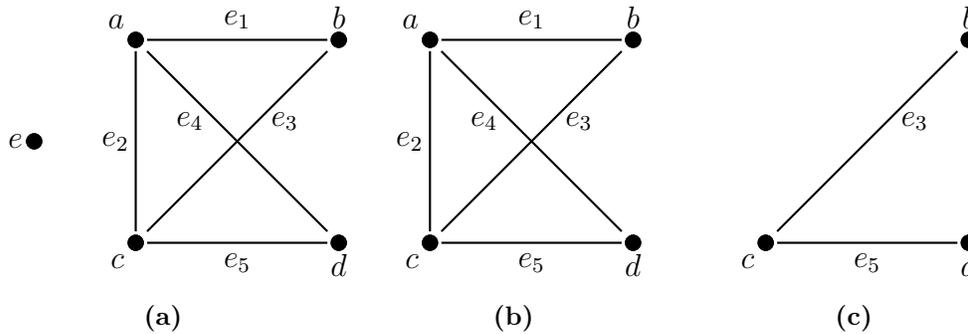


Figura 3.1: Grafos simples no dirigidos.

Ejemplo 3.12. Sea $G = (V, E)$ el grafo (a) de la Figura 3.1 donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, por la Definición 3.11 tenemos que $F(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Entonces $F(G)$ no es una cubierta de V porque no existe alguna arista que conecte con el vértice aislado e .

Proposición 3.13. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido. La familia $F(G)$ es una cubierta de V si y solo si G no tiene vértices aislados.

Como ya se haba hecho mención, los grafos estudiados en esta sección serán *simples*, *no dirigidos* y sin vértices aislados, a menos que se especifique otra cosa. Para este tipo de grafos denotaremos por $C(G)$ a la cubierta inducida por el grafo G mediante la definición 3.11.

Proposición 3.14. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, y u, v dos vértices distintos de V . El vértice u está conectado a v si y solo si $\{u, v\} \in C(G)$ o existen $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$ que cumplen con las condiciones: $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

Demostración. \Rightarrow] Si u y v son vértices adyacentes, entonces $\{u, v\} \in C(G)$. Si u está conectado a v pero no son adyacentes, entonces existe un (u, v) – camino $u_1 u_2 u_3 \cdots u_{n-1} u_n u_{n+1}$ donde $u = u_1$ y $v = u_{n+1}$. Sea $K_i = \{u_i, u_{i+1}\}$ para algún $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Es claro que $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$. Y $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para algún $i = 1, 2, \dots, n - 1$ porque $u_{i+1} \in K_i \cap K_{i+1}$.

\Leftarrow] Para $u, v \in V$, si $\{u, v\} \in C(G)$, entonces u y v son adyacentes. Si existen $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$ se satisface que $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para algún $i = 1, 2, \dots, n - 1$, entonces sea $u_i \in K_i \cap K_{i+1}$ donde $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Entonces existe una lista $u_0 u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n$ que conectan a u y v , donde $u_0 = u$ y $u_n = v$. Si existen $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ y suponiendo que $i < j$ son tales que $u_i = u_j$, entonces se borran los vértices $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j$ de la lista. Finalmente, obtenemos un (u, v) – camino. Por tanto, u está conectado a v . \square

Apoyados en la proposición anterior, se puede establecer una caracterización equivalente para la *conexidad de grafos* en términos de la *cubierta inducida* por el grafo.

Teorema 3.15. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. El grafo es conexo si y solo si, para para cualquier par de vértices distintos u y v de V , $\{u, v\} \in C(G)$ o existen $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$ que satisfacen que $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

Demostración. La demostración se sigue de la última proposición. \square

Ejemplo 3.16. *Sea $G = (V, E)$ el grafo dado por (b) de la Figura 3.1, donde $V = \{a, b, c, d\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Entonces la cubierta inducida por G es $G(C) = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$, donde $K_1 = \{a, b\}$, $K_2 = \{a, c\}$, $K_3 = \{b, c\}$, $K_4 = \{c, d\}$ y $K_5 = \{d, a\}$. Para el par de distintos vértices b y d de V , existe $\{K_3, K_4\} \subseteq C(G)$ tales que $b \in K_3$, $d \in K_4$ y $K_3 \cap K_4 \neq \emptyset$, entonces b está conectado a d . De la misma manera, cada par de vértices de V están conectados, y por tanto G es un grafo conexo.*

De hecho, por el Teorema 3.15, los *grafos conectados* pueden ser caracterizados desde el punto de vista del operador *cubierta superior de aproximación*.

Teorema 3.17. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. El grafo es conexo si y solo si para cada $\emptyset \neq X \subset V$, $\overline{C(G)}(X) \neq X$.*

Demostración. \Rightarrow] Ya que $\overline{C(G)}(\emptyset) = \emptyset$, solo necesitamos probar que: para todo $\emptyset \neq X \subseteq V$, si $\overline{C(G)}(X) = X$ entonces $X = V$. Tomemos $u \in X$. Para cada $v \in V - \{u\}$, si $\{u, v\} \in C(G)$, entonces $v \in \{u, v\} \subseteq \overline{C(G)}(X)$ lo cual implica que $V - \{u\} \subseteq X$. Si u y v no son adyacentes, entonces existen $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$ tal que satisfacen que $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 1, 2, \dots, n - 1$. A partir de que $u \in K_1 \cap X$, se tiene que $K_1 \subseteq \overline{C(G)}(X) = X$. Ya que $K_2 \cap K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \subseteq \overline{C(G)}(K_1)$. Combinado con la propiedad de monotonía de $\overline{C(G)}$, se tiene que $K_2 \subseteq \overline{C(G)}(K_1) \subseteq \overline{C(G)}(\overline{C(G)}(X)) \subseteq \overline{C(G)}(X) = X$. Con el mismo procedimiento se puede obtener que, si $v \in K_n \subseteq X$, entonces $V - \{u\} \subseteq X$. Ya que $u \in X$, entonces $V \subseteq X$, y combinado con que $X \subseteq V$, sigue $X = V$.

\Leftarrow] Para todo $u \in V$, sea $P_u = \{v \in V : v \text{ está conectado a } u\}$. Entonces $P_u \neq \emptyset$ porque $u \in P_u$. Ahora, se necesita probar que $\overline{C(G)}(P_u) = P_u$. Para todo $v \in \overline{C(G)}(P_u)$, existe $K \in C(G)$ tal que $v \in K$ y $K \cap P_u \neq \emptyset$. Sea $w \in K \cap P_u$, entonces v está conectado w y w está conectado a u , entonces v está conectado a u , es decir, $v \in P_u$. Entonces $\overline{C(G)}(P_u) \subseteq P_u$, y por la propiedad de extensión de $\overline{C(G)}$ se tiene que $\overline{C(G)}(P_u) = P_u$. Por su puesto, se sabe que $P_u = V$. Por lo tanto, G es conexo. □

Dado un *espacio cubierta de aproximación* (U, C) , para $X \subseteq U$, si $\overline{C}(X) = X$, entonces X es llamado un *conjunto exteriormente definible*. Desde este enfoque, el teorema 3.17 nos dice que: un grafo es conexo si y solo si el espacio cubierta de aproximación inducida por el grafo, no tiene subconjuntos exteriormente definibles propios distintos del vacío.

Análogamente, la conexidad de un grafo caracterizada por *cubiertas inferiores del operador de aproximación* es enunciada en el siguiente corolario.

Corolario 3.18. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. El grafo es conexo si y solo si para cada $\emptyset \neq X \subset V$, $\underline{C(G)}(X) \neq X$.*

Ejemplo 3.19. Sea $G = (V, E)$ el grafo (b) de la Figura 3.1. Siguiendo algunos cálculos, los subconjuntos exteriormente definibles de cubiertas de aproximación del espacio $(V, C(G))$ son \emptyset y V . Entonces G es conexo.

3.3. Un enfoque de la conexidad de un grafo mediante el k -operador superior de aproximación

En esta sección, se estudia el problema de la conexidad en un grafo desde el punto de vista del k -operador superior de aproximación. Teniendo en cuenta que el operador tiene una relación cercana con la *matriz de incidencia* de un grafo, por tal razón se introducen las matrices para tratar el problema. Después, se define el k -operador superior de aproximación.

Definición 3.20. Sea (U, C) un espacio cubierta de aproximación y $k \in \mathbb{N}$. Para cualquier $X \subseteq U$, el operado $\overline{C}^k(X)$ se define de siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overline{C}^1(X) &= \overline{C}(X), \\ \overline{C}^2(X) &= \overline{C}(\overline{C}(X)), \\ &\vdots \\ \overline{C}^k(X) &= \underbrace{\overline{C}(\overline{C}(\cdots(\overline{C}(X))))}_{k\text{-veces}}.\end{aligned}$$

\overline{C}^k es llamado el k -operador superior aproximación con respecto a la cubierta C .

Es claro que $\overline{C}^{k+1}(X) = \overline{C}(\overline{C}^k(X))$. Para cualquier $x \in U$, se escribe a $\overline{C}^k(\{x\})$ simplemente como $\overline{C}^k(x)$.

Ahora se establece una caracterización para la conexidad de dos vértices distintos de un grafo.

Proposición 3.21. Sea $G = (V, E)$ un grafo y u, v distintos vértices de V . El vértice u está conectado a v si y solo si $v \in \bigcup \{\overline{C}(G)^k(u) : k \geq 1\}$.

Demostración. \Rightarrow] Si $\{u, v\} \in C(G)$, entonces $v \in \overline{C(G)}(u) \subseteq \bigcup\{\overline{C(G)}^k(u) : k \geq 1\}$. Si existen $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subseteq C(G)$ que satisfacen que $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$, para cualquier $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces $K_1 \subseteq \overline{C(G)}(u)$ y $K_{i+1} \subseteq \overline{C(G)}(K_i)$. Por la propiedad de monotonía de $\overline{C(G)}$, se tiene que $v \in K_n \subseteq \overline{C(G)}(K_{n-1}) \subseteq \overline{C(G)}^2(K_{n-2}) \subseteq \dots \subseteq \overline{C(G)}^{n-1}(K_1) \subseteq \overline{C(G)}^n(u) \subseteq \bigcup\{\overline{C(G)}^k(u) : k \geq 1\}$.

\Leftarrow] Ya que $v \in \bigcup\{\overline{C(G)}^k(u) : k \geq 1\}$, existe $n \geq 1$ tal que $v \in \overline{C(G)}^n(u)$. Si $n = 1$, entonces $v \in \overline{C(G)}(u)$, es decir, existe $K \in \overline{C(G)}$ tal que $K = \{u, v\}$, que es lo que se buscaba. Si $n > 1$, entonces existe $K_n \in \overline{C(G)}$ tal que $v \in K_n$ y $K_n \cap \overline{C(G)}^{n-1}(u) \neq \emptyset$. Supongamos que $v_{n-1} \in K_n \cap \overline{C(G)}^{n-1}(u)$, entonces existe $K_{n-1} \in \overline{C(G)}$ tal que $v_{n-1} \in K_{n-1}$ y $K_{n-1} \cap \overline{C(G)}^{n-2}(u) \neq \emptyset$. De esta misma manera, existe $K_1, K_2, \dots, K_n \in \overline{C(G)}$. Es claro que $u \in K_1$, $v \in K_n$ y $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$ porque $v_i \in K_i \cap K_{i+1}$. Si existe $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $K_i = K_j$, con $i < j$, entonces quitando los bloques $K_{i+1}, K_{i+2}, \dots, K_j$. Finalmente, se tiene que $\{K_{s_1}, K_{s_2}, \dots, K_{s_t}\} \subseteq \overline{C(G)}(t \leq n)$ satisfacen que $u \in K_{s_1}$, $v \in K_{s_t}$ y $K_{s_i} \cap K_{s_{i+1}} \neq \emptyset$ para cualquier $i = 1, 2, \dots, t-1$. Luego por la Proposición 3.14, se obtiene el resultado buscado. \square

Sea $G(V, E)$ un grafo. Para todo $u \in V$, denotemos $P_u = \bigcup\{\overline{C(G)}^k(u) : k \geq 1\}$. Es interesante que las componentes conectadas de un grafo son los subgrafos inducidos por el conjunto $\{P_u : u \in V\}$.

Teorema 3.22. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. La familia de las componentes conectadas de G es $T_G = \{G[P_u] : u \in V\}$. Más aún, $|G| = |\{P_u : u \in V\}|$.*

Demostración. Es una combinación de la definición de componentes conectadas de un grafo y la Proposición 3.21. \square

Ejemplo 3.23. *Sea $G = (V, E)$ el grafo dado en la Figura 3.2. Es claro que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y $C(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$. Llevando a cabo los cálculos adecuados, se tiene que $P_a = P_b = P_c = \{a, b, c\}$, $P_d = P_e = \{d, e\}$ y $P_f = P_g = P_h = P_i = \{f, g, h, i\}$. Entonces, las componentes conectadas del grafo G son los subgrafos inducidos $G[P_a]$, $G[P_d]$ y $G[P_f]$, y $|G| = |\{P_u : u \in V\}| = 3$.*

Un grafo que solo tiene una componente conectada es conexo, y viceversa. Por lo tanto, un enfoque para determinar si un grafo es conexo o no está provisto por el siguiente teorema.

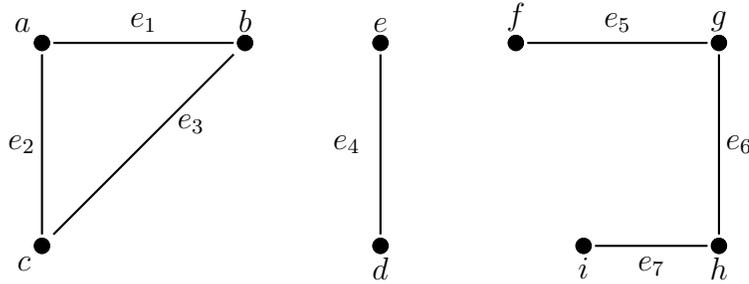


Figura 3.2: Grafo $G = (V, E)$.

Teorema 3.24. Sea $G = (V, E)$ un grafo. El grafo es conexo si y solo si para cada $x \in V$, se cumple que $\bigcup\{\overline{C(G)^k}(x) : k \geq 1\} = V$.

Demostración. Se sigue del Teorema 3.22 y la Definición 1.14 de grafo conexo. \square

Debido a la particularidad de un grafo conexo, su conexidad puede ser caracterizada solo por la cubierta superior del operador de aproximación.

Proposición 3.25. Sea $G = (V, E)$ un grafo. G es un grafo completo si y solo si se cumple que para todo $x \in V$, $\overline{C(G)}(x) = V$.

Demostración. \Rightarrow] Para cualquier $x \in V$, es claro que $\overline{C(G)}(x) \subseteq V$. Ahora, ya que G es completo, para cualquier $y \in V - \{x\}$, x e y son adyacentes, es decir, $\{x, y\} \in C(G)$. Entonces, $y \in \overline{C(G)}(x)$. Por lo tanto, $V - \{x\} \subseteq \overline{C(G)}(x)$. Combinado con que $x \in \overline{C(G)}(x)$, se tiene que $V \subseteq \overline{C(G)}(x)$.

\Leftarrow] Para cualquier par de vértices u, v de V , $u \in V = \overline{C(G)}(v)$. Entonces existe $K \in C(G)$ tal que $K = \{u, v\}$, entonces u y v son adyacentes. Por lo tanto, G es un grafo completo. \square

Para un grafo con n vértices, si calculamos la cubierta superior de aproximación cualquier vértice del grafo menos que $n - 1$ veces, entonces la aproximación se mantiene sin cambios. Combinado con la propiedad de extensión de la cubierta superior del operador de aproximación, el teorema 3.24 se puede escribir de la siguiente forma. Tal expresión ayudará usar las matrices para el estudio de la conexidad de un grafo.

Proposición 3.26. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|G| = n$. El grafo es conec-tado si y solo si existe $s \in \mathbb{N}$, $s \leq n - 1$ tal que para cada $x \in V$, se cumple que $\overline{C(G)}^s(x) = V$.*

Demostración. \Rightarrow] Para todo $y \in V$, de acuerdo a la propiedad de extensión del operador $\overline{C(G)}$, existe un entero positivo $s_y \leq n - 1$, tal que $\bigcup\{\overline{C(G)}^k(y) : k \geq 1\} = \overline{C(G)}^{s_y}(y)$. Sea $s = \max\{s_y : y \in V\}$. Es claro que $s \leq n - 1$. Ahora, se probará que para todo $x \in V$, $\bigcup\{\overline{C(G)}^k(x) : k \geq 1\} = \overline{C(G)}^s(x)$. Para todo $x \in V$, $\overline{C(G)}^s \subseteq \bigcup\{\overline{C(G)}^k(x) : k \geq 1\} = \overline{C(G)}^{s_x}(x) \subseteq \overline{C(G)}^s(x)$. Entonces $\overline{C(G)}^s(x) = \bigcup\{\overline{C(G)}^k(x) : k \geq 1\}$. Por el teorema (4) se tiene el resultado.

\Leftarrow] Para cualquier par de vértices u, v de V , si $\overline{C(G)}^s(u) = V$, entonces $v \in \overline{C(G)}^s(u)$ y por la proposición 7, sabemos que u está conectado a v . Por lo tanto, G es conexo. \square

Corolario 3.27. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|G| = n$. El grafo es conexo si y solo si, para todo $x \in V$, se cumple que $\overline{C(G)}^{n-1}(x) = V$.*

Como se ha visto, el operador de aproximación inducido por una cubierta está estrechamente relacionado con las matrices, ya que pueden ser expresados por una matriz de representación de la cubierta, lo cual motiva a estudiar la conexidad de grafos desde el punto de vista de las matrices. Para la cubierta inducida por un grafo, es interesante que una matriz de incidencia de un grafo es exactamente una matriz de representación de la cubierta. Por lo tanto, un enfoque para caracterizar la conexidad de un grafo es presentada a través de las matrices.

Teorema 3.28. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, con $|G| = n$. El grafo es conexo si y solo si existe un entero positivo $s \leq n - 1$ tal que $(I(G) \cdot I(G)^T)^s = \mathbf{1}_{n \times n}$, donde $\mathbf{1}_{n \times n}$ es la matriz $n \times n$ tal que cada entrada es 1.*

Demostración. Utilizando la proposición 3.26, el grafo es conexo si y solo si existe un entero positivo $s \leq n - 1$ tal que, para todo $x \in V$, $\overline{C(G)}^s(x) = V$ si y solo si existe un entero positivo $s \leq n - 1$ tal que, para todo $x \in V$, $(I(G) \cdot I(G)^T)^s \chi_x = \mathbf{1}_{n \times n}$ si y solo si existe un entero positivo $s \leq n - 1$ tal que $(I(G) \cdot I(G)^T)^s = \mathbf{1}_{n \times n}$. \square

El corolario siguiente es inmediato del teorema anterior.

Corolario 3.29. Sea $G = (V, E)$ un grafo, con $|V| = n$. El grafo es conexo si y solo si $(I(G) \cdot I(G)^T)^{n-1} = \mathbf{1}_{n \times n}$.

Basados en los dos resultados anteriores, se puede determinar relativamente fácil si un grafo es o no conexo a través de métodos computacionales.

Para concluir la sección, se proporciona un ejemplo para aterrizar los resultados mencionados.

Ejemplo 3.30. Sea G el grafo dado por (b) de la Figura 3.1. Entonces $|G| = 4$ y una matriz de incidencia del grafo es

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo los cálculos pertinentes, se obtiene que

$$I(G) \cdot I(G)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$(I(G) \cdot I(G)^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces existe un entero positivo $s = 2 \leq 3$ tal que $(I(G) \cdot I(G)^T)^s = \mathbf{1}_{4 \times 4}$. Por lo tanto, por Teorema 3.28, G es un grafo conexo.

3.4. Una aplicación a matroides conectados

Como es sabido, cuando un matroide es el matroide inducido por un grafo, el matroide y el grafo tienen la misma conexidad. Sin embargo, para un matroide dado, este puede no ser el matroide cíclico de algún grafo. Por lo tanto, usar matroides cíclicos para estudiar la conexidad de matroides puede no ser efectivo. En esta sección, se propone un enfoque para inducir un grafo

de un matroide arbitrario. Es interesante que el grafo y el matroide tienen la misma conexidad, por consiguiente, las cubiertas basadas en conjuntos aproximados son usadas para el estudio de conexidad de matroides. Primero, el método para convertir un matroide a un grafo se presenta a continuación.

Definición 3.31. Sea M un matroide. Podemos definir un grafo simple, no dirigido $G(M) = (V, E)$ como sigue:

- (i) $V = U(M)$,
- (ii) Para cualesquiera $u, v \in V$ y $u \neq v$, $uv \in E$ si y solo si existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v\} \subseteq C$.

Observación 3.32. Cuando el matroide M tiene lazos, el grafo $G(M)$ tiene vértices aislados.

Ejemplo 3.33. Sea M un matroide con $U(M) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\mathcal{C}(M) = \{\{1, 2, 3\}, \{6\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}\}$. El grafo inducido por el matroide M es K^n unido con los vértices aislado $\{6, 7\}$.

De hecho, la conexidad del grafo inducido por un matroide está fuertemente relacionada con la conexidad del matroide. Primero, se introduce la caracterización equivalente para la conexidad de cualquier par de vértices distintos del grafo, que se presenta a través de los circuitos del matroide.

Lema 3.34. Sea M un matroide y $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$. Si $e_1 \in C_1 - C_2$, $e_2 \in C_2 - C_1$ y $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, entonces existe $C_3 \in \mathcal{C}(M)$ tal que $e_1, e_2 \in C_3 \subset C_1 \cup C_2$.

Proposición 3.35. Sea M un matroide y u, v un par de vértices distintos de $U(M)$. El vértice u está conectado al vértice v en el grafo $G(M)$ si y solo si existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v\} \subseteq C$.

Demostración. La suficiencia es directa. Entonces se prueba la necesidad. Como u está conectado con v en el grafo $G(M)$, existe un camino más corto entre u y v , asumimos que la longitud de dicho camino es n . Veamos que $n = 1$. De otra forma, podemos suponer que el camino es $u_1 u_2 \dots u_{n+1}$, donde $u_1 = u$, $u_{n+1} = v$ y $n \geq 2$. Ya que $u_1 u_2 \dots u_{n+1}$ es un camino, existen $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u_i, u_{i+1}\} \subseteq C_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Debido a que el camino es el más corto, los circuitos C_1, C_2, \dots, C_n son diferentes, y $u \notin C_j$ para $j = 2, 3, \dots, n$, y $v \notin C_j$ para cada $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Como $u \in C_1 - C_2$, de acuerdo a (ii) de la definición de matroide, sabemos que existe $v_1 \in C_2 - C_1$. Combinando esto con el Lema 3.34, existe $C'_1 \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v_1\} \subseteq C'_1 \subseteq C_1 \cup C_2$. Por otro lado $v_1 \in C_2$, si $v_1 \notin C_3$, entonces $v_1 \in C_2 - C_3$. Utilizando el axioma (C2) de circuitos, existe $v_2 \in C_3 - C_2$. De acuerdo al Lema 3.34 y $C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, existe $C'_2 \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{v_2, v_1\} \subseteq C'_2 \subseteq C_2 \cup C_3$. Si $v_1 \in C_3$, tomamos $C'_2 = C_3$, es claro que $C'_1 \cap C'_2 \neq \emptyset$ porque $v_1 \in C'_1 \cap C'_2$. De la misma forma obtenemos $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1} \in \mathcal{C}(M)$ tales que $u \in C'_1, v \in C'_{n-1}$ y $C'_i \cap C'_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Más aún, $v \notin C'_j$ para cada $i = 1, 2, \dots, n-2$. Si existe $j \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ tal que $v \in C'_j$, entonces $v \in C'_j \subseteq C_j \cup C_{j+1}$, es decir, $v \in C_j$ o $v \in C_{j+1}$ lo que contradice que $v \notin C_j$ para todo $j \leq n-1$.

De forma similar, para cada $j = 2, 3, \dots, n-1, u \notin C'_j$. Así, tenemos $C'_1 \neq C'_{n-1}$, sin embargo los circuitos $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}$ pueden no ser todos diferentes. Luego, reducimos los circuitos por el siguiente paso. Si existen dos $C'_i = C'_j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y además $i < j$, entonces removemos los circuitos C'_{i+1}, \dots, C'_j , por este paso obtenemos la familia de circuitos $\{C'_{s_1}, C'_{s_2}, \dots, C'_{s_t}\} \subset \{C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}\}$ cuyos elementos son diferentes y satisfacen la condición: $u \in C'_{s_1}, v \in C'_{s_t}$ y $C'_{s_i} \cap C'_{s_{i+1}} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \dots, t-1$. Es claro que $s_1 = 1, s_t = n-1, u \notin C'_{s_j}$ para cada $j = 2, 3, \dots, t$ y $v \notin C'_{s_j}$ para cada $j = 1, 2, \dots, t-1$. Para los circuitos $C'_{s_1}, C'_{s_2}, \dots, C'_{s_t}$, repetimos el análisis anterior. Finalmente, obtenemos dos circuitos C_u y C_v tales que $u \in C_u - C_v, v \in C_v - C_u$ y $C_u \cap C_v \neq \emptyset$. Usando el Lema 3.34, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v\} \subseteq C \subseteq C_u \cup C_v$, es decir $uv \in E(G(M))$ lo que implica $n = 1$. Esto contradice que $n \geq 2$, por lo tanto el resultado ha sido probado. \square

Observación 3.36. *Cualquier componente conexa del grafo $G(M)$ es un vértice aislado o un grafo completo. Una vez que el grafo es conexo, este es un grafo completo.*

Por la Proposición 3.35 puede ser introducida relación entre la conexidad de matroides y la del grafo inducido por el matroide. Más aún tienen la misma conexidad, como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3.37. *Sea M un matroide. El grafo $G(M)$ es conexo si y solo si el matroide M es conectado.*

Demostración. De acuerdo a las Proposiciones 2.14 y 3.35, $G(M)$ es conexo si y solo si para cualquier par de vértices distintos u y v de $U(M)$, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v\} \subseteq C$ si y solo si M es conectado. \square

Ahora que un matroide y el grafo inducido por él tienen la misma conexidad, si el grafo tiene vértices aislados, entonces el matroide es desconectado. Del Ejemplo 3.33, encontramos que si el grafo tiene vértices aislados o no, no es determinado solamente por los lazos del matroide. De hecho, también está relacionado con los otros circuitos del matroide.

Proposición 3.38. *Sea M un matroide. El grafo $G(M)$ no tiene vértices aislados si y solo si M no tiene lazos y $\mathcal{C}(M)$ es una cubierta de $U(M)$.*

Demostración. \Leftarrow] Si u es un vértice aislado de $G(M)$, entonces para cada $v \in U(M) - \{u\}$, no existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{u, v\} \subseteq C$. Así, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $C = \{u\}$ o no existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $u \in C$, lo cual contradice el hecho de que M no tiene lazos y $\mathcal{C}(M)$ es una cubierta de $U(M)$, respectivamente.

\Rightarrow] Es claro que $G(M)$ no tiene vértices aislados implica que M no tiene lazos. Después, necesitamos probar que $\mathcal{C}(M)$ es una cubierta de $U(M)$. De acuerdo a los axiomas de circuitos, sabemos que $\emptyset \neq \mathcal{C}(M)$. Para cada $u \in U(M)$, existe un elemento de $U(M)$ que es diferente de u tal que u está conectado con v . Utilizando la Proposición 3.35, existe $C_u \in \mathcal{C}(M)$ tal que $u \in C_u$. Así, $U(M) = \bigcup \mathcal{C}(M) \subseteq U(M)$, es decir, $U(M) = \bigcup \mathcal{C}(M)$. Por lo tanto, $\mathcal{C}(M)$ es una cubierta de $U(M)$. \square

A continuación, nos concentramos en la conexidad de matroides cuyo grafo inducido no tiene vértices aislados. En esta parte, introducimos el enfoque propuesto en la sección anterior para estudiar el problema. Como es sabido, un grafo sin vértices aislados puede inducir una cubierta a través de la Definición 3.11. Combinándola con la Proposición 3.38, sabemos que para un matroide M , cuando el grafo $G(M)$ no tiene vértices aislados, existen dos cubiertas del conjunto de vértices, es decir, $\mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{C}(G(M))$. Generalmente, esas dos cubiertas son diferentes, pero pueden inducir la misma cubierta para el operador de aproximación superior.

Lema 3.39. *Sea M un matroide. Si el grafo $G(M)$ no tiene vértices aislados, entonces para cada $X \subseteq U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(G(M))}(X) = \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$.*

Demostración. Ya que $G(M)$ no tiene vértices aislados, las familias $\mathcal{C}(G(M))$ y $\mathcal{C}(M)$ son dos cubiertas de $U(M)$. Así, $\overline{\mathcal{C}(G(M))}$ y $\overline{\mathcal{C}(M)}$ son cubiertas de aproximación superior de $U(M)$, respectivamente. Posteriormente, se prueba que esos dos operadores son iguales. Para cada $x \in \overline{\mathcal{C}(G(M))}(X)$, existe

$K \in \overline{\mathcal{C}(M)}$ tal que $x \in K$ y $K \cap X \neq \emptyset$. Si $x \in X$, entonces $x \in \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$ porque $X \subseteq \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$. Si $x \notin X$, escogemos $y \in K \cap X$, entonces $x \neq y$ y $K = \{x, y\}$, es decir, x está conectado con y . De acuerdo con la Proposición 3.35, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{x, y\} \subseteq C$ lo cual implica que $x \in \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{C}(G(M))}(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$.

De la misma forma, para cualquier $x \in \overline{\mathcal{C}(M)}(X)$, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $x \in C$ y $C \cap X \neq \emptyset$. Si $x \in X$, entonces $x \in \overline{\mathcal{C}(G(M))}(X)$. Si $x \notin X$, elegimos $y \in C \cap X$, entonces $x \neq y$ y $\{x, y\} \subseteq C$, es decir, x y y son adyacentes en el grafo $G(M)$. Así, $\{x, y\} \in \mathcal{C}(G(M))$ lo cual implica que $x \in \overline{\mathcal{C}(G(M))}(X)$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{C}(M)}(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}(G(M))}(X)$. \square

Luego, la conexidad del matroide, cuyo grafo inducido no tiene vértices aislados, puede ser caracterizado por la cubierta de circuitos.

Teorema 3.40. Sean M un matroide sin lazos y la familia de circuitos $\mathcal{C}(M)$ una cubierta de $U(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) M es conectado.
- (ii) Para cualquier $\emptyset \neq X \subset U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(M)}(X) \neq X$.
- (iii) Para cualquier $x \in U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(M)}(x) = U(M)$.

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii): M es conectado si y solo si $G(M)$ es conexo si y solo si, para cada $\emptyset \neq X \subset U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(G(M))}(X) \neq X$, si y solo si $\emptyset \neq X \subset U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(M)}(X) \neq X$.

(i) \Leftrightarrow (iii): M es conectado si y solo si $G(M)$ es un grafo completo si y solo si, para cada $x \in U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(G(M))}(x) = U(M)$ si y solo si, para cada $x \in U(M)$, $\overline{\mathcal{C}(M)}(x) = U(M)$. \square

Lo anterior nos da una serie de 3 pasos para determinar la conexidad de un matroide M .

Paso 1: Verificar si M tiene lazos.

Paso 2: Verificar si $\mathcal{C}(M)$ es o no una cubierta de $U(M)$.

Paso 3: Si el matroide no tiene lazos y su familia de circuitos forman una cubierta de su conjunto universo, entonces utilizar el Teorema 3.40 para

determinar su conexidad.

Además, la matriz de incidencia por circuitos del matroide puede usarse para determinar la conexidad del matroide. Veamos primero la definición.

Definición 3.41. (*Matriz de incidencia por circuitos*) Sea M un matroide de U . Suponga que $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\mathcal{C}(M) = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$. Definimos la matriz $A(\mathcal{C}(M)) = (a_{ij})_{m \times n}$ como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in C_j \\ 0 & \text{si } x_j \notin C_i \end{cases}$$

Ejemplo 3.42. Suponga que M es el matroide dado en el Ejemplo 3.33, una matriz de incidencia por circuitos de M es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la matriz de incidencia por circuitos de un matroide, el siguiente teorema nos da un enfoque efectivo para determinar la conexidad para el matroide.

Teorema 3.43. Sea M un matroide con $|U(M)| = n$. El matroide es conectado si y solo $A(\mathcal{C}(M))^T \cdot A(\mathcal{C}(M)) = 1_{n \times n}$.

Demostración. Denotemos $A(\mathcal{C}(M)) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$, donde \mathbf{a}_i es un vector columna de dimensión m . Sea $T = (t_{ij}) = A(\mathcal{C}(M))^T \cdot A(\mathcal{C}(M))$. Para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t_{ij} = 1$ si y solo si $t_{ij} = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \wedge a_{kj}) = \bigvee_{k=1}^m (a_{ik} \wedge a_{jk}) = 1$ si y solo si $\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_j \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ si y solo si existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\{x_i, x_j\} \subseteq C$.

\Leftarrow] Si $A(\mathcal{C}(M))^T \cdot A(\mathcal{C}(M)) = 1_{n \times n}$, entonces para cada $1 \leq i \neq j \leq n$, $t_{ij} = 1$. Así, para cuales quiera vértices distintos x_i y x_j de $U(M)$, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{x_i, x_j\} \subseteq C$. Por lo tanto, M es conectado.

\Rightarrow] Si M es conectado, entonces para cualquier par de vértices de $U(M)$, existe un circuito que contiene a ambos. Así, para cuales quiera $1 \leq i \neq j \leq n$, $t_{ij} = 1$, ya que M es conectado, $\mathcal{C}(M)$ es una cubierta de $U(M)$. Así, para cualquier elemento de $U(M)$, existe un circuito que lo contiene, es decir, $\mathbf{a}_i \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ lo que implica que $t_{ii} = 1$. \square

A diferencia del Teorema 3.40, el Teorema 3.43 no tiene restricciones en las condiciones. Finalmente, se presenta un ejemplo para concluir.

Ejemplo 3.44. *Suponga que tenemos el matroide dado en el Ejemplo 3.33. Entonces*

$$A(\mathcal{C}(M))^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y además

$$A(\mathcal{C}(M)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finalmente,

$$A(\mathcal{C}(M))^T \cdot A(\mathcal{C}(M)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}_{7 \times 7}.$$

Por lo tanto por el Teorema 3.43, el matroide no es conexo.

Conclusiones

La teoría de grafos es muy utilizada en problemas planteados en el campo de las ciencias computacionales, algunas estructuras de datos pueden ser representadas a través de grafos. En este trabajo se presentó un problema particular que relaciona la conexidad de matroides (que representan bases de datos) con la conexidad de un grafo.

El problema de determinar la conexidad de un matroide fue estudiada en “*Connectedness of graphs and its application to connected matroids through covering-based rough sets*” [10] y se determinó su relación con la conexidad de un grafo.

Para explicar esta relación resultó útil el uso de conjuntos llamados aproximados y teoría de cubiertas basadas en ellos, que dieron la posibilidad de caracterizar de forma conveniente las conexidad de grafos.

La importancia de este estudio radica básicamente en que la conexidad del grafo a través de estos conjuntos aproximados y las cubiertas que se basan en ellos es fácilmente representable en ciertas matrices que sirvan de herramienta para determinar la conexidad de los matroides adecuados de forma computacional.

Muchas de las aplicaciones de matroides se representan en modelos de grafos, aunque en este trabajo solo se presentan grafos no dirigidos, algunas de estas aplicaciones generan modelos con grafos dirigidos en los cuales la conexidad del grafo juega un papel importante.

De este modo queda aún trabajo por hacer para relacionar la conexidad de un matroide con la conexidad del grafo dirigido para resolver problemas discretos. También, como trabajo futuro se plantea la relación de las cubiertas basadas en conjuntos aproximados con la eficiencia computacional.

Bibliografía

- [1] Bautista C., Guillén C., Gómez P. A. (2019). *Log-concavity of some independence polynomials via a partial ordering*. Discrete Mathematics, 342, 18-28.
- [2] Bencs F. (2018). *On trees with real-rooted independence polynomial*, Discrete Math., 34, 3321-3330.
- [3] Chartrand G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Estados Unidos: Dover Publications, Inc.
- [4] Chen J. y Ratnesh K. (2013). *Polynomial test for stochastic diagnosability of discrete event systems*. IEEE Trans Autom Sci Eng 10:969979.
- [5] Chen J. y Ratnesh K. (2015). *Stochastic failure prognosability of discrete event systems*. IEEE Trans Autom Control 60:15701581.
- [6] Chudnovsky M., Ries B., Zwols Y. (2011). *Claw-free graphs with strongly perfect complements. Fractional and integral version. Part I. Basic graphs*. Discrete Appl Math 159:19711995.
- [7] Diestel R. (2005). *Graph Theory*. Estados Unidos: Springer-Verlag Heidelberg.
- [8] Galvin D. y Hilyard J. (2017). *The independent set sequence of some families of trees*. Revisado el 24 de octubre de 2017, de <https://arxiv.org/pdf/1701.02204.pdf>
- [9] Gordon G., Macnulty J. (2012). *Matroid: A geometry introduction Theory*. Reino Unido: Cambridge University Press.

- [10] Huang A. y Zhu W. (2016). *Connectedness of graphs and its application to connected matroids through covering-based rough sets*. *Soft Comput*, 20:1841-1851.
- [11] Oxley J. G. (1992). *Matroid Theory*. Estados Unidos: Oxford University Press.
- [12] Pitsoulis L. S. (2014). *Topics in Matroid Theory*. Estados Unidos: Springer-Verlag Heidelberg.
- [13] Toranzos, F.A. (1976). *Introducción a la teoría de grafos*. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Departamento de Asuntos Científicos, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.
- [14] Wang S, Zhu Q, Zhu W, Min F. (2014). *Characteristic matrix of covering and its application to Boolean matrix decomposition*. *Inf Sci*, 263:186197.
- [15] Whitney, H. (1935). *On the abstract properties of linear dependence*. *Amer. J. Math.*, 57, 509-533.