Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio sobre la convergencia uniforme de la serie e integral seno de Fourier

Tesis presentada para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jesús Pérez Mino

Director de tesis:

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue. Agosto de 2016.

Dedicado a las personas que creen en mí, por su incondicional apoyo.

Agradecimientos

“De gente bien nacida es agradecer los beneficios que recibe, y uno de los pecados que más a Dios ofende es la ingratitud”.

M. Cervantes, en el Libro del Quijote a Sancho.

Gracias a ese ser que llamamos Dios por permitirme vivir hasta este momento.

Agradezco a mis padres: la Sra. María Guadalupe Silvia Mino Ortíz y el Sr. Sebastián Pérez García, por todo el sacrificio constante e inigualable que han hecho para sacarnos adelante a mi hermano y a mí. También a Bernardo Pérez Mino, mi hermano, por ser un apoyo fundamental en mi vida.

Al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, un excelente profesor, pero sobre todo, un ser humano único. Por brindarme su apoyo incondicional siempre, por su tolerancia y paciencia, y por alimentar mi *autoestima matemática*. En verdad, muchas gracias.

Gracias a los doctores: Juan Héctor Arredondo Ruiz, Juan Alberto Escamilla Reyna, Gabriel Kantún Montiel y Gustavo Mendoza Torres, por tomarse el tiempo para revisar mi tesis, marcarme observaciones y proporcionarme sugerencias para enriquecerla.

A Abel Moreno Luna que durante estos ocho años me ha brindado su amistad y confianza. Por su compañía y apoyo en los momentos complicados de la licenciatura.

Índice general

Introducción **9**

1. Preliminares **11**

1.1. Conceptos básicos 11

1.2. El espacio $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ 12

1.3. Los espacios $L_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$ 16

1.4. Algunas observaciones 18

2. Convergencia uniforme de la serie seno **23**

2.1. La clase $MVBVS$ 23

2.2. La clase $SBVS$ 30

2.3. La clase $SBVS_2$ 36

3. Convergencia uniforme de la integral seno de Fourier **49**

3.1. El espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$ 50

3.2. El espacio $SBVF(\mathbb{R}_+)$ 56

3.3. El espacio $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ 62

Conclusiones **73**

Bibliografía **75**

Índice Alfabético **76**

Introducción

La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define para $t \in \mathbb{R}$ como:

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-tx}\, dx. \tag{1}$$

La existencia de la transformada de Fourier depende de la función y del proceso de integración empleado. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones integrables en el sentido de Lebesgue, entonces, bajo esta misma integral, su transformada de Fourier está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos tener otros casos, por ejemplo si la función es Lebesgue integrable localmente y no Lebesgue integrable, entonces tendríamos que investigar para qué números reales t la integral en la expresión (1) existe en el sentido impropio (de Lebesgue). Esta tesis está parcialmente relacionada con este hecho.

Para explicar el motivo de esta tesis, inicialmente supongamos que f pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Si f es una función par, tenemos que:

$$\widehat{f}(t) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(tx)\, dx. \tag{2}$$

Si la función es impar, entonces

$$\widehat{f}(t) = -2i\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\, dx. \tag{3}$$

La integral de la expresión (2) se llama transformada coseno de Fourier de f y es denotada por $\widehat{f_c}$. La integral de la derecha en (3) se llama transformada seno de Fourier de f y se denota como $\widehat{f_s}$.

Para toda función f, si definimos las funciones f_1 y f_2 como

$$f_1(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2},$$

tenemos que la primera función es par y la segunda es impar, además $f = f_1 + f_2$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, se tiene que:

$$\widehat{f}(t) = \widehat{f_1 + f_2}(t) = \widehat{f}_1(t) + \widehat{f}_2(t) = 2\ \widehat{f}_{1c}(t) - 2i\ \widehat{f}_{2s}(t).$$

Por lo tanto,

$$Re(\widehat{f}) = 2\ \widehat{f}_{1c} \qquad \text{y} \qquad Im(\widehat{f}) = -2\ \widehat{f}_{2s}.$$

Las transformadas coseno y seno de Fourier por sí mismas tienen importancia en la matemática. En $L^1(\mathbb{R})$, satisfacen propiedades básicas similares a las de la transformada de Fourier, (véase [1],

[2] y [10]). Su empleo es importante, por ejemplo, en problemas de análisis de señales y de flujo de calor, (véase [2]). En [1, página 63] se exhiben algunas aplicaciones de estas transformadas a las ecuaciones diferenciales en varias variables con valor inicial acotado.

Para funciones que no pertenecen a $L^1(\mathbb{R}_+)$, donde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, debemos determinar los valores de t para los cuales las funciones $\widehat{f_c}$ y $\widehat{f_s}$ están definidas, lo cual es equivalente a probar la convergencia de las integrales impropias involucradas. A la par, debemos determinar el tipo de convergencia. La convergencia uniforme es deseable debido a que, por un lado, las transformadas estarían definidas para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado, esta convergencia es necesaria en la manipulación de propiedades fundamentales, por ejemplo, para intercambiar el orden de las integrales interadas involucradas en la convolución, la inversión y otras propiedades importantes. Al respecto, pueden consultarse [5], [6], [7], [8] y [9].

Diseñamos esta tesis con una estructura muy natural constituida por tres capítulos. Enseguida discutimos el contenido de cada uno de ellos.

En el Capítulo 1 presentamos definiciones y desarrollamos resultados elementales que en los capítulos posteriores utilizamos de forma implícita. Exponemos el concepto de función absolutamente continua localmente, algunos ejemplos y también estudiamos su comportamiento algebraico, así como su relación con otros conceptos como la continuidad. Definimos lo que es una función Lebesgue integrable localmente y desarrollamos algunas propiedades simples. Finalizamos este capítulo mostrando una serie de observaciones que citamos en las secciones posteriores.

En el Capítulo 2 introducimos algunas clases de sucesiones con términos en $\mathbb{R}_+$. En éstas, la serie seno de Fourier converge de manera uniforme para cualquier número real en $\mathbb{R}_+$. Relacionamos estas clases mediante la contención y proporcionamos ejemplos de sucesiones que pertenecen a una clase pero no a otra.

En Capítulo 3 analizamos espacios de funciones Lebesgue medibles, no necesariamente Lebesgue integrables, que son absolutamente continuas localmente en $\mathbb{R}_+$, para los cuales existe la transformada seno de Fourier y además converge uniformemente para cualquier número real en $\mathbb{R}_+$. Éstos espacios están relacionados mediante la contención y mostramos ejemplos de funciones que pertenecen a un espacio pero no a otro. Propiamente, este capítulo es una generalización del previo.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de esta tesis denotamos mediante $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, al conjunto de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente. Utilizamos el simbolo $\square$ para indicar el término de la justificación de una observación o ejemplo, y el simbolo $\blacksquare$ para anunciar la finalización de la prueba de un teorema, corolario o lema.

En este primer capítulo presentamos una serie de conceptos y resultados básicos que nos apoyan en el desarrollo de los posteriores.

1.1. Conceptos básicos

Comenzamos definiendo la parte entera de un número real.

Definición 1.1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = \text{máx}\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}$ es llamada la *parte entera de x*. Será denotada como $[x]$.

Presentamos el concepto de sucesión creciente y no creciente.

Definición 1.2. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es *creciente* si se satisface que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y es *no creciente* si se cumple que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cuando pensamos en funciones, también tenemos una noción de creciente y no creciente:

Definición 1.3. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *creciente* en I si se satisface que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in I$ con $x \leq y$, y es *no creciente* si se cumple que $f(x) \geq f(y)$ para todo $x, y \in I$ con $x \leq y$.

Ahora presentamos los conceptos de convergencia monótona a infinito para sucesiones y funciones.

Definición 1.4. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *tiende monótonamente a infinito* si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definición 1.5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Consideremos $\alpha = \sup(I)$ si I es acotado por la derecha y $\alpha = \infty$ si no lo es. Decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ *tiende monótonamente a infinito* si es creciente y $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

1.2. El espacio $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$

A continuación presentamos un concepto que utilizamos implícitamente en el Capítulo 3.

Definición 1.6. Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *absolutamente continua en* $[a, b]$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \ldots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a, b]$, se satisface que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

El espacio de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ absolutamente continuas en $[a, b]$ se denota como $AC\big([a, b]\big)$.

En términos de la definición previa, introducimos el concepto de función absolutamente continua pero de manera local.

Definición 1.7. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{C}$ es *absolutamente continua localmente en* I si f es absolutamente continua en $[a, b]$ para cada intervalo $[a, b] \subseteq I$.

Denotamos por $AC_{loc}(I)$ al espacio de todas las funciones $f : I \to \mathbb{C}$ absolutamente continuas localmente en I .

Mostramos algunos ejemplos de funciones absolutamente continuas localmente en $\mathbb{R}_+$.

Ejemplo 1.8. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definida mediante $f(x) = \alpha$ es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$.

Para comprobar lo anterior, consideremos $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Tomando $\delta = \varepsilon$, para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \ldots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a, b]$, se satisface que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n}|\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Es decir, f es absolutamente continua en $[a, b]$. Por lo tanto, $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Ejemplo 1.9. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x$ es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$.

Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Dado $\varepsilon > 0$. Eligiendo $\delta = \varepsilon$, para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \ldots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a, b]$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n}|b_k - a_k| < \varepsilon.$$

Así, $f \in AC\big([a,b]\big)$. Por lo tanto, f es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$. $\square$

Ejemplo 1.10. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es elemento de $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Proporcionado $\varepsilon > 0$. Si elegimos $\delta = \varepsilon a^2$, para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \ldots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a,b]$, sucede que $0 < a \leq a_k \leq b_k$ lo que implica que $0 < \frac{1}{a_k}, \frac{1}{b_k} \leq \frac{1}{a}$, así $0 < \frac{1}{a_k b_k} \leq \frac{1}{a^2}$. Además,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k - b_k}{a_k b_k}\right| \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Es decir, $f \in AC\big([a,b]\big)$. Por lo tanto, $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Ejemplo 1.11. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \operatorname{sen} x$ pertenece al espacio $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Consideremos $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Dado $\varepsilon > 0$. Si tomamos $\delta = \varepsilon$, para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \ldots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a,b]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n}|\operatorname{sen} b_k - \operatorname{sen} a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k}\cos t\,dt\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|\cos t|\;dt \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}1\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es absolutamente continua en $[a,b]$. De esta forma, f es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$. $\square$

Enseguida presentamos un resultado que nos permite decidir de una forma un poco más sencilla si una función es absolutamente continua en un intervalo compacto. En su prueba se utiliza el hecho de que toda función de Lipschitz es absolutamente continua (dado $\varepsilon > 0$ basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ para que se satisfaga la Definición 1.6, donde $L > 0$ es la constante de Lipschitz).

Teorema 1.12. *Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable con derivada acotada en (a,b). Entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$.*

Demostración. Dado que f es derivable con derivada es acotada en (a,b), existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$.

Probaremos que f es Lipschitz en $[a,b]$ con M la constante asociada. Sean $x, y \in [a,b]$. Hay tres posibles casos: $x < y$, $x > y$ y $x = y$.

Consideremos el caso en que $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x, y]$, obtenemos que existe un punto $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Notemos que $c \in (x, y) \subseteq (a, b)$. De esta forma,

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = |f'(c)|\, |y - x| \leq M\, |x - y|\, .$$

El caso en que $x > y$ es análogo, basta intercambiar los papeles de x y y.

Finalmente, en el caso en que $x = y$, tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = 0 = M\, |x - y|\, .$$

Por lo tanto, f es Lipschitz en $[a, b]$. Así, $f \in AC\big([a, b]\big)$. ■

Los siguientes ejemplos muestran la utilidad del teorema previo.

Ejemplo 1.13. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)}$ es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$.

Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Es claro que f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además para $x \in (a, b)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} - \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| \\
&\leq \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} \right| + \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| \\
&= \frac{1}{\ln(x+3)} \cdot |\cos x| + \frac{1}{(x+3)} \cdot \frac{1}{\ln^2(x+3)} \cdot |\operatorname{sen} x| \\
&\leq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f' es acotada en (a, b). Por el teorema anterior, $f \in AC\big([a, b]\big)$. De esta manera, f es absolutamente continua localmente en $\mathbb{R}_+$. □

Ejemplo 1.14. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3}$ pertenece al espacio $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Consideremos $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$. La función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Para $x \in (a, b)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} - \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| \\
&\leq \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} \right| + \left| \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| \\
&= \frac{1}{(x+1)^3} \cdot |\cos x| + \frac{3}{(x+1)^4} \cdot |\operatorname{sen} x| \\
&\leq 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Es decir, f' es acotada en (a, b). De acuerdo al Teorema 1.12, f es absolutamente continua en $[a, b]$. Por lo tanto, $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. □

El siguiente teorema establece que el producto de dos funciones absolutamente continuas en un intervalo cerrado es una función del mismo tipo en dicho intervalo.

Teorema 1.15. *Si $f, g \in AC\big([a,b]\big)$, entonces $fg \in AC\big([a,b]\big)$.*

Demostración. Dado que $f, g \in AC\big([a,b]\big)$, entonces f y g son continuas en $[a,b]$. Por lo tanto, existen $M_f > 0$ y $M_g > 0$ tales que $M_f \geq |f(x)|$ y $M_g \geq |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in AC\big([a,b]\big)$, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M_g} > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \dots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a,b]$, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta' \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M_g}.$$

Análogamente, como $g \in AC\big([a,b]\big)$, para $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2M_f} > 0$ existe $\delta'' > 0$ tal que para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \dots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a,b]$, se satisface que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta'' \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2M_f}.$$

Si elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta', \delta''\}$, para cualquier colección finita $\{[a_k, b_k] : k = 1, \dots, n\}$ de subintervalos con interiores mutuamente disjuntos de $[a,b]$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |fg(b_k) - fg(a_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k) + f(a_k)g(b_k) - f(a_k)g(b_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big|g(b_k)\big(f(b_k) - f(a_k)\big) - f(a_k)\big(g(a_k) - g(b_k)\big)\big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |g(b_k)|\,|f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^{n} |f(a_k)|\,|g(a_k) - g(b_k)| \\
&\leq M_g \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + M_f \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| \\
&< M_g\ \varepsilon' + M_f\ \varepsilon'' \\
&= M_g\ \frac{\varepsilon}{2M_g} + M_f\ \frac{\varepsilon}{2M_f} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $fg \in AC\big([a,b]\big)$. ■

Como consecuencia del teorema previo obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 1.16. *Si $f, g \in AC_{loc}(I)$, entonces $fg \in AC_{loc}(I)$.*

Demostración. Sea $[a,b] \subseteq I$. Dado que $f, g \in AC_{loc}(I)$, entonces $f, g \in AC\big([a,b]\big)$. Por el teorema anterior, $fg \in AC\big([a,b]\big)$. Por lo tanto, $fg \in AC_{loc}(I)$. ■

Corolario 1.17. *Sea $f \in AC_{loc}\big(\mathbb{R}_+\big)$. Si para $r \in \mathbb{Z}$ se define $g_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ como $g_r(x) = x^r f(x)$, entonces $g_r \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Si $r = 0$, tenemos que $g_0(x) = f(x)$. Por lo tanto, $g_0 \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si $r \in \mathbb{N}$, hacemos inducción matemática sobre r. Para $r = 1$, sucede que $g_1(x) = xf(x)$. En el Ejemplo 1.9, probamos que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $h(x) = x$ pertenece a $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Por el corolario anterior, $g_1 = hf \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Para $r = k$, ocurre que $g_k(x) = x^k f(x)$. Supongamos que $g_k \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Así, para $r = k+1$ tenemos que $g_{k+1}(x) = x^{k+1} f(x) = x \cdot x^k f(x) = x g_k(x)$. Por el Ejemplo 1.9 y el corolario precedente, $g_{k+1} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si $-r \in \mathbb{N}$, la prueba de este caso es análoga al previo utilizando inducción matemática ahora sobre $-r$. Para $-r = 1$, tenemos que $r = -1$ y $g_{-1}(x) = x^{-1} f(x) = \frac{1}{x}\, f(x)$. En el Ejemplo 1.10, demostramos que la función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida como $h(x) = \frac{1}{x}$ pertenece a $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Por el Corolario 1.16, $g_{-1} = hf \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Para $-r = k$, tenemos que $r = -k$ y $g_{-k}(x) = x^{-k} f(x)$. Supongamos que $g_{-k} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. De esta forma, para $r = -(k+1)$ tenemos que $g_{-(k+1)}(x) = x^{-(k+1)} f(x) = x^{-1} \cdot x^{-k} f(x) = \frac{1}{x}\, g_{-k}(x)$. Por el Ejemplo 1.10 y el Corolario 1.16, $g_{-(k+1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. ■

1.3. Los espacios $L_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$

Para comenzar definimos lo que entendemos por una función Lebesgue integrable.

Definición 1.18. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ medible es *Lebesgue integrable en* $[a,b]$ si

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

El espacio de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Lebesgue integrables en $[a,b]$ se denota como $L^1\big([a,b]\big)$, o simplemente $L\big([a,b]\big)$.

En términos de la definición anterior, presentamos el concepto de función Lebesgue integrable pero de forma local.

Definición 1.19. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{C}$ medible es *Lebesgue integrable localmente en I* si f es Lebesgue integrable en $[a,b]$ para cada $[a,b] \subseteq I$.

Denotamos por $L^1_{loc}(I)$, o simplemente como $L_{loc}(I)$, al espacio de todas las funciones $f : I \to \mathbb{C}$ Lebesgue integrables localmente en I.

De aquí en adelante, denotamos por $\overline{\mathbb{R}_+}$ a la cerradura de $\mathbb{R}_+$, es decir, $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty)$.

Observación 1.20. *Si $f \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, entonces $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.*

Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $[a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}_+}$. Puesto que $f \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, se cumple que

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$. $\square$

En la observación previa se establece que $L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+}) \subset L_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Sin embargo, la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida mediante $f(x) = \frac{1}{x}$ pertenece a $L_{loc}(\mathbb{R}_+)$ pero no a $L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, es decir, el recíproco de la observación en general es falso.

Teorema 1.21. *Si f es una función tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, entonces para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que $x^n f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$.

Si $n = 0$, puesto que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, se cumple que

$$\int_a^b |xf(x)|\, dx < \infty.$$

De aquí implicamos que

$$a \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b |xf(x)|\, dx < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$, realizamos la prueba mediante inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, de acuerdo a la observación anterior, la afirmación se cumple.

Supongamos que para $n = k$ la afirmación es cierta. Como $x^k f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$, se cumple que

$$\int_a^b \left|x^k f(x)\right|\, dx < \infty.$$

Para $n = k+1$ tenemos que

$$\int_a^b \left|x^{k+1} f(x)\right|\, dx = \int_a^b |x| \left|x^k f(x)\right|\, dx \leq b \int_a^b \left|x^k f(x)\right|\, dx.$$

De la hipótesis inductiva, obtenemos que

$$b \int_a^b \left|x^k f(x)\right|\, dx < \infty.$$

Por lo tanto, $x^{k+1} f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$. $\blacksquare$

Concluimos esta sección presentando un teorema que relaciona a los espacios $AC\big([a,b]\big)$ y $L^1\big([a,b]\big)$.

Teorema 1.22 (*Teorema Fundamental del Cálculo*). [3, Teorema A.4.3.]. *Una función F es absolutamente continua en $[a,b]$ si y sólo si,*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, dt$$

para alguna función $f \in L^1\big([a,b]\big)$. Además en ese caso la función F es derivable en casi todo punto $x \in [a,b]$ y, si $F'(x)$ existe, entonces $F'(x) = f(x)$.

1.4. Algunas observaciones

En esta última sección del Capítulo 1 presentamos con detalle una serie de hechos que utilizamos en ejemplos y pruebas de los siguientes dos capítulos.

Observación 1.23. Si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Definamos $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. Demostraremos que f es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, para ello veremos que $f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} < 0$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pero como el denominador es siempre positivo, bastará probar que $x\cos x - \operatorname{sen} x < 0$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Consideremos ahora $g(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x$, tenemos que $g(0) = 0$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Puesto que $\operatorname{sen} x > 0$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $g'(x) = -x \operatorname{sen} x < 0$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Es decir, g es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, lo que implica que $g(x) < 0$ para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Por lo tanto, f es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Así, $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

Observación 1.24. Sea $t \in (0, \pi)$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kt)\right| \leq \frac{\pi}{t}.$$

Si $t \in (0, \pi)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kt)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(kt)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(kt - \frac{t}{2}\right) - \cos\left(kt + \frac{t}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \left|\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \cos\left(\frac{5t}{2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Resta probar que $\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{\pi}{t}$ para $t \in (0, \pi)$. Haciendo $x = \frac{t}{2}$, nuestro problema equivale a mostrar que $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por la observación anterior sabemos que esto es cierto. $\square$

Observación 1.25. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si para $m \in \mathbb{N}$ se define $\Delta a_m = a_m - a_{m+1}$ y $D_m = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \operatorname{sen}(jt)$, entonces

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|\,|D_k| + |a_n|\,|D_{n-1}|\,.$$

Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\operatorname{sen}(kt) = D_k - D_{k-1}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $m \geq n$, entonces,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n}^{m} a_k \operatorname{sen}(kt)\\
&= a_n \operatorname{sen}(nt) + a_{n+1} \operatorname{sen}((n+1)t) + a_{n+2} \operatorname{sen}((n+2)t) + \cdots + a_m \operatorname{sen}(mt)\\
&= a_n\left(D_n - D_{n-1}\right) + a_{n+1}\left(D_{n+1} - D_n\right) + a_{n+2}\left(D_{n+2} - D_{n+1}\right) + \cdots + a_m\left(D_m - D_{m-1}\right)\\
&= -a_n D_{n-1} + \left(a_n - a_{n+1}\right) D_n + \left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) D_{n+1} + \cdots + \left(a_{m-1} - a_m\right) D_{m-1} + a_m D_m\\
&= \Delta a_n D_n + \Delta a_{n+1} D_{n+1} + \cdots + \Delta a_{m-1} D_{m-1} + a_m D_m - a_n D_{n-1}\\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \Delta a_k D_k + a_m D_m - a_n D_{n-1}.
\end{aligned}$$

De lo anterior y la Observacion 1.24, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k|\,|D_k| + |a_m|\,|D_m| + |a_n|\,|D_{n-1}|\\
&= \sum_{k=n}^{m-1} |\Delta a_k|\,|D_k| + |a_m|\left|\frac{\pi}{t}\right| + |a_n|\,|D_{n-1}|\,.
\end{aligned}$$

Puesto que $m\,|a_m| \to 0$ cuando $m \to \infty$,

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|\,|D_k| + |a_n|\,|D_{n-1}|\,. \ \square$$

Observación 1.26. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\int_x^{x+\pi} |\operatorname{sen} t|\; dt = 2 \quad \text{y} \quad \int_x^{x+\pi} |\cos t|\; dt = 2.$$

Tenemos que $|\operatorname{sen} t| = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\\ -\operatorname{sen} t & \text{si } (2k+1)\pi \leq t \leq 2(k+1)\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Revisamos las posibilidades:

Si $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $(2k+1)\pi \leq x+\pi \leq 2(k+1)\pi$. Además,

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt &= \int_x^{(2k+1)\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt + \int_{(2k+1)\pi}^{x+\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt \\
&= \int_x^{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} t\, dt + \int_{(2k+1)\pi}^{x+\pi} -\operatorname{sen} t\, dt \\
&= -\cos((2k+1)\pi) + \cos x + \cos(x+\pi) - \cos((2k+1)\pi) \\
&= 1 + \cos x - \cos x + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Si $(2k+1)\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $2(k+1)\pi \leq x+\pi \leq (2(k+1)+1)\,\pi$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt &= \int_x^{2(k+1)\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt + \int_{2(k+1)\pi}^{x+\pi} |\operatorname{sen} t|\ dt \\
&= \int_x^{2(k+1)\pi} -\operatorname{sen} t\, dt + \int_{2(k+1)\pi}^{x+\pi} \operatorname{sen} t\, dt \\
&= \cos(2(k+1)\pi) - \cos x - \cos(x+\pi) + \cos(2(k+1)\pi) \\
&= 1 - \cos x + \cos x + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\cos t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+\pi} |\cos t|\ dt &= \int_x^{x+\pi} \left|\sin\left(t+\tfrac{\pi}{2}\right)\right|\ dt \\
&= \int_{x+\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}+\pi} |\operatorname{sen} u|\ du \\
&= 2. \ \square
\end{aligned}$$

Observación 1.27. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a > 2\pi$. Se cumple que:

$$\frac{a}{\pi} \leq \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x|\ dx \leq \frac{4a}{\pi} \quad \text{y} \quad \frac{a}{\pi} \leq \int_a^{2a} |\cos x|\ dx \leq \frac{4a}{\pi}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface que $[x] \leq x < [x]+1$. Dado que $a > 2\pi$, tenemos que $2 < \frac{a}{\pi}$, y en consecuencia, $2 \leq \left[\frac{a}{\pi}\right]$. Combinando las dos hechos previos, $\frac{a}{\pi} < \left[\frac{a}{\pi}\right] + 1 \leq \left[\frac{a}{\pi}\right] + \left[\frac{a}{\pi}\right] = 2\left[\frac{a}{\pi}\right]$.

Notemos que $\left[\frac{a}{\pi}\right]$ nos indica el número entero máximo de veces que cabe π en a. Por la observación previa,

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\pi} \leq 2\left[\frac{a}{\pi}\right] \\
&= \int_a^{a+\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx + \cdots + \int_{a+\left(\left[\frac{a}{\pi}\right]-1\right)\pi}^{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx \\
&\leq \int_a^{a+\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx + \cdots + \int_{a+\left(\left[\frac{a}{\pi}\right]-1\right)\pi}^{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi} |\operatorname{sen} x|\ dx + \int_{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi}^{2a} |\operatorname{sen} x|\ dx \\
&= \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x|\ dx.
\end{aligned}$$

Además,

$$\int_a^{2a} |\operatorname{sen} x| \; dx \leq \int_a^{2a} 1 \, dx = a \leq \frac{4a}{\pi}.$$

Por otro lado, por la Observación 1.26,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\pi} &\leq 2\left[\frac{a}{\pi}\right] \\
&= \int_a^{a+\pi} |\cos x| \; dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} |\cos x| \; dx + \cdots + \int_{a+\left(\left[\frac{a}{\pi}\right]-1\right)\pi}^{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi} |\cos x| \; dx \\
&\leq \int_a^{a+\pi} |\cos x| \; dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} |\cos x| \; dx + \cdots + \int_{a+\left(\left[\frac{a}{\pi}\right]-1\right)\pi}^{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi} |\cos x| \; dx + \int_{a+\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi}^{2a} |\cos x| \; dx \\
&= \int_a^{2a} |\cos x| \; dx.
\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\int_a^{2a} |\cos x| \; dx \leq \int_a^{2a} 1 \, dx = a \leq \frac{4a}{\pi}. \; \square$$

Capítulo 2

Convergencia uniforme de la serie seno

Una *serie seno* es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$, donde $t \in \mathbb{R}_+$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}_+$.

En este capítulo estudiamos algunas condiciones para que la serie seno sea uniformemente convergente. La intención de este desarrollo es realizar un análisis similar para la integral seno de Fourier, el cual presentamos en el siguiente capítulo. La exposición se basa en el trabajo de P. Kórus ([7]).

Presentamos, sin demostración, un resultado que ha motivado el estudio de la convergencia uniforme para la serie seno, probado en 1916 por Chaundry y Jolliffe (ver [4]).

Teorema 2.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ una sucesión no creciente que tiende a cero. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, si y sólo si $na_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

A partir de este resultado, muchos autores en el afán de generalizarlo han introducido diversas clases de sucesiones para las cuales su serie seno converge uniformemente, como ejemplos están [12] y [13].

2.1. La clase $MVBVS$

Ahora exponemos la primera clase de sucesiones que analizaremos.

Definición 2.2. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ pertenece a la *clase $MVBVS$* (*Mean Value Bounded Variation Sequences / Sucesiones de Variación Acotada en Media*) si existen constantes $C > 0$ y $\lambda \geq 2$, que dependen solamente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfacen la condición:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| \leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n| \quad \text{para} \quad k \geq \lambda,$$

donde

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Presentamos un par de ejemplos de sucesiones pertenecientes a esta clase.

Ejemplo 2.3. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ definida como $a_n = \alpha$ pertenece a la clase $MVBVS$.

En efecto, si tomamos $C > 0$ y $\lambda \geq 2$, para $k \geq \lambda$ tenemos que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| = \sum_{n=k}^{2k} |0| = 0 \leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |\alpha| = \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n|.$$

Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$. $\square$

Ejemplo 2.4. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ definida por $a_n = n$ es elemento de la clase $MVBVS$.

En efecto, tomando $C = 1$ y $\lambda \geq 2$, para $k \geq \lambda$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| &= \sum_{n=k}^{2k} |-1| \\
&= (k+1) \cdot 1 \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{2k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{2k^2 + 2k}{2} \\
&\leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - k^2 + 4k^2 + 2k}{2} \\
&\leq \frac{1}{k} \cdot \frac{[k/\lambda] - [k/\lambda]^2 + [\lambda k]^2 + [\lambda k]}{2} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{\big([\lambda k] + 1 - [k/\lambda]\big)\big([k/\lambda] + [\lambda k]\big)}{2} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |n| \\
&= \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$. $\square$

A continuación proporcionamos, sin prueba, una generalización del Teorema 2.1.

Teorema 2.5. [7, Teorema C]. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

(1) Si $n|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$*, entonces* $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Ahora mostramos una interesante propiedad de la clase $MVBVS$.

Teorema 2.6. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$*. Si para* $r \in \mathbb{Z}$ *se define* $b_n = n^r a_n$*, entonces* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$*.*

Demostración. Si $r = 0$, tenemos que $b_n = a_n$. Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

Ahora si $r \in \mathbb{N}$, hacemos inducción matemática sobre r. Para $r = 1$, ocurre que $b_n = na_n$. Si tomamos $C_1 = 4C\lambda + 1$ y $\lambda_1 = \lambda + 1$, donde $C > 0$ y $\lambda \geq 2$ son las constantes asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ según la Definición 2.2, para $k \geq \lambda_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &= \sum_{n=k}^{2k} |na_n - (n+1)a_{n+1}| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} |n(a_n - a_{n+1}) - a_{n+1}| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} n\,|a_n - a_{n+1}| + \sum_{n=k}^{2k} |a_{n+1}| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| + \sum_{n=k+1}^{2k+1} |a_n| \\
&\leq 2k \cdot \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n| + \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{2k+1} n\,|a_n| \\
&\leq 2C \cdot \frac{1}{[k/\lambda]} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |na_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2k+1} |na_n| \\
&\leq 2C \cdot \frac{1}{k/2\lambda} \sum_{n=[k/(\lambda+1)]}^{[(\lambda+1)k]} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/(\lambda+1)]}^{[(\lambda+1)k]} |b_n| \\
&= 2C \cdot \frac{2\lambda}{k} \sum_{n=[k/\lambda_1]}^{[\lambda_1 k]} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_1]}^{[\lambda_1 k]} |b_n| \\
&= \frac{4C\lambda + 1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_1]}^{[\lambda_1 k]} |b_n| \\
&= \frac{C_1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_1]}^{[\lambda_1 k]} |b_n| \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

Para $r = s$, tenemos que $b_n = n^s a_n$. Supongamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$, entonces existen constantes $C_s > 0$ y $\lambda_s \geq 2$, que dependen solamente de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y que para $k \geq \lambda_s$ satisfacen:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \frac{C_s}{k} \sum_{n=[k/\lambda_s]}^{[\lambda_s k]} |b_n| \,.$$

De esta forma, para $r = s+1$ tenemos que $b'_n = n^{s+1}a_n$ y si elegimos $C_{s+1} = 4C_s\lambda_s + 1$ y $\lambda_{s+1} = \lambda_s + 1$, para $k \geq \lambda_{s+1}$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b'_n| &= \sum_{n=k}^{2k} \left| n^{s+1}a_n - (n+1)^{s+1}a_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} |n(n^s a_n - (n+1)^s a_{n+1}) - (n+1)^s a_{n+1}| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} n\,|n^s a_n - (n+1)^s a_{n+1}| + \sum_{n=k}^{2k} |(n+1)^s a_{n+1}| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |b_n - b_{n+1}| + \sum_{n=k+1}^{2k+1} |n^s a_n| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| + \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{2k+1} n\,|b_n| \\
&\leq 2k \cdot \frac{C_s}{k} \sum_{n=[k/\lambda_s]}^{[\lambda_s k]} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2k+1} |b'_n| \\
&\leq 2C_s \cdot \frac{1}{[k/\lambda_s]} \sum_{n=[k/\lambda_s]}^{[\lambda_s k]} |nb_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/(\lambda_s+1)]}^{[(\lambda_s+1)k]} |b'_n| \\
&\leq 2C_s \cdot \frac{1}{k/2\lambda_s} \sum_{n=[k/(\lambda_s+1)]}^{[(\lambda_s+1)k]} |b'_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/(\lambda_s+1)]}^{[(\lambda_s+1)k]} |b'_n| \\
&= 2C_s \cdot \frac{2\lambda_s}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{s+1}]}^{[\lambda_{s+1}k]} |b'_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{s+1}]}^{[\lambda_{s+1}k]} |b'_n| \\
&= \frac{4C_s\lambda_s + 1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{s+1}]}^{[\lambda_{s+1}k]} |b'_n| \\
&= \frac{C_{s+1}}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{s+1}]}^{[\lambda_{s+1}k]} |b'_n| \,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

Si $-r \in \mathbb{N}$, realizamos una prueba análoga a la del caso previo sólo que ahora la inducción matemática es sobre $-r$. Para $-r = 1$, Tenemos que $r = -1$ y $b_n = n^{-1}a_n = \frac{1}{n}\, a_n$. Si tomamos $C_{-1} = C\lambda + 1$

y $\lambda_{-1} = \lambda + 1$, para $k \geq \lambda_{-1}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &= \sum_{n=k}^{2k} \left| \frac{1}{n}\ a_n - \frac{1}{n+1}\ a_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} \left| \frac{1}{n}\ a_n - \frac{1}{n}\ a_{n+1} + \frac{1}{n}\ a_{n+1} - \frac{1}{n+1}\ a_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} \left| \frac{1}{n}(a_n - a_{n+1}) + \frac{1}{n(n+1)}\ a_{n+1} \right| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n}\ |a_n - a_{n+1}| + \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)}\ |a_{n+1}| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n+1}\ |a_{n+1}| \\
&\leq \frac{1}{k} \cdot \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{1}{n}\ |a_n| \\
&\leq \frac{C}{k^2} \cdot [\lambda k] \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} \frac{1}{n}\ |a_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{1}{n}\ |a_n| \\
&\leq \frac{C}{k^2} \cdot \lambda k \sum_{n=[k/(\lambda+1)]}^{[(\lambda+1)k]} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/(\lambda+1)]}^{[(\lambda+1)k]} |b_n| \\
&= \frac{C\lambda + 1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-1}]}^{[\lambda_{-1} k]} |b_n| \\
&= \frac{C_{-1}}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-1}]}^{[\lambda_{-1} k]} |b_n| \, .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

Para $-r = s$, tenemos que $r = -s$ y $b_n = n^{-s} a_n = \frac{1}{n^s}\ a_n$. Supongamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$, es decir, que existen constantes $C_{-s} > 0$ y $\lambda_{-s} \geq 2$, dependientes sólo de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfacen la condición siguiente para $k \geq \lambda_{-s}$:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \frac{C_{-s}}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-s}]}^{[\lambda_{-s} k]} |b_n| \, .$$

De esta manera, para $-r = s+1$ tenemos que $r = -(s+1)$ y $b_n' = n^{-(s+1)} a_n = \frac{1}{n^{s+1}}\ a_n$. Si elegimos

$C_{-(s+1)} = C_{-s}\lambda_{-s} + 1$ y $\lambda_{-(s+1)} = \lambda_{-s} + 1$, obtenemos para $k \geq \lambda_{-(s+1)}$ que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b'_n| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} \left| \frac{1}{n^{s+1}}\ a_n - \frac{1}{(n+1)^{s+1}}\ a_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} \left| \left(\frac{1}{n^{s+1}}\ a_n - \frac{1}{n(n+1)^s}\ a_{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n(n+1)^s}\ a_{n+1} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{(n+1)^{s+1}}\ a_{n+1} \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{n^s}\ a_n - \frac{1}{(n+1)^s}\ a_{n+1} \right| + \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{(n+1)^{s+1}}\ a_{n+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{2k} |b_n - b_{n+1}| + \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{2k} \left| b'_{n+1} \right| \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2k+1} |b'_n| \\
&\leq \frac{1}{k} \cdot \frac{C_{-s}}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-s}]}^{[\lambda_{-s}k]} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/(\lambda_{-s}+1)]}^{[(\lambda_{-s}+1)k]} |b'_n| \\
&\leq \frac{C_{-s}}{k^2} \cdot [\lambda_{-s}k] \sum_{n=[k/\lambda_{-s}]}^{[\lambda_{-s}k]} \frac{1}{n} |b_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-(s+1)}]}^{[\lambda_{-(s+1)}k]} |b'_n| \\
&\leq \frac{C_{-s}}{k^2} \cdot \lambda_{-s}k \sum_{n=[k/(\lambda_{-s}+1)]}^{[(\lambda_{-s}+1)k]} |b'_n| + \frac{1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-(s+1)}]}^{[\lambda_{-(s+1)}k]} |b'_n| \\
&= \frac{C_{-s}\lambda_{-s} + 1}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-(s+1)}]}^{[\lambda_{-(s+1)}k]} |b'_n| \\
&= \frac{C_{-(s+1)}}{k} \sum_{n=[k/\lambda_{-(s+1)}]}^{[\lambda_{-(s+1)}k]} |b'_n| .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$. ■

Cuando hablamos de la *derivada formal* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ estamos dando por hecho que se satisface:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(a_n \operatorname{sen}(nt) \right),$$

sin considerar las condiciones necesarias para que la igualdad se cumpla.

Similarmente, cuando hablamos de la *integral formal* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ damos por hecho que se cumple:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int a_n \operatorname{sen}(nt)\, dt \right),$$

sin analizar las condiciones necesarias para conseguir la igualdad.

De los Teoremas 2.5 y 2.6, obtenemos los siguientes corolarios para la *derivada formal* e *integral formal* de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$.

Corolario 2.7. *Sean* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

(1) Si $n^{2r+1} |a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *la* $2r-$*ésima derivada formal de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respeto a* $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$, *entonces* $n^{2r+1} |a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Si $r = 0$, entonces el corolario se transforma en el Teorema 2.5.

Si $r \in \mathbb{N}$, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$, por el Teorema 2.6, haciendo $b_n = n^{2r} a_n$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

(1) Para todo $r \in \mathbb{N}$, la $2r-$ésima derivada formal de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ es $(-1)^r \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$.

Por hipótesis $n^{2r+1} |a_n| = n\, |b_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces por el Teorema 2.5 (1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que

$$(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$. Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces por el Teorema 2.5 (2),

$$n\, |b_n| = n^{2r+1} |a_n| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \blacksquare$$

Corolario 2.8. *Sean* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$.

(1) Si $n^{-2r+1}|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, la $2r-$ésima integral formal de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ converge uniformemente con respeto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $n^{-2r+1}|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Si $r = 0$, entonces el corolario se transforma en el Teorema 2.5.

Si $r \in \mathbb{N}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$ por el Teorema 2.6, haciendo $b_n = n^{-2r}a_n$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a $MVBVS$.

(1) Para todo $r \in \mathbb{N}$, la $2r-$ésima integral formal de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ es $(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$.

Como $n^{-2r+1}|a_n| = n|b_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces por el Teorema 2.5 (1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2r} a_n \operatorname{sen}(nt).$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que

$$(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$. Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2r} a_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt),$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces por el Teorema 2.5 (2),

$$n|b_n| = n^{-2r+1}|a_n| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \blacksquare$$

2.2. La clase $SBVS$

A continuación, definimos la segunda clase de sucesiones relacionada con el objeto de nuestro estudio.

Definición 2.9. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ es elemento de la *clase $SBVS$* (*Supremum Bounded Variation Sequences / Sucesiones de Variación Supremo-Acotada*) si existen constantes $C > 0$ y $\lambda \geq 1$, que dependen solamente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfacen la condición:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| \leq \frac{C}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \quad \text{para} \quad k \geq \lambda.$$

Enseguida demostramos un teorema que establece que $MVBVS \subset SBVS$. Proporcionamos un ejemplo que nos permite aclarar que $SBVS \not\subset MVBVS$, es decir, que el recíproco del teorema en general es falso.

Teorema 2.10. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in MVBVS$, *entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$.

Demostración. Sean $C > 0$ y $\lambda \geq 2$ las constantes asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debido a su pertenencia a la clase $MVBVS$, y sea μ el número natural que satisface $2^\mu \leq \lambda^2 < 2^{\mu+1}$. Tomando $C' = C(\mu+2)$ y $\lambda' = \lambda$, para $k \geq \lambda'$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| &\leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |a_n| \\
&= \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda^2 \cdot \frac{k}{\lambda}]} |a_n| \\
&\leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[2^{\mu+1} \cdot \frac{k}{\lambda}]} |a_n| \\
&= \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[2^{((\mu+1)+1)} \cdot \frac{k}{2\lambda}]} |a_n| \\
&\leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[2^{\mu+2} \cdot [k/\lambda]]} |a_n| \\
&\leq \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{2^{\mu+2} \cdot [k/\lambda]} |a_n| \\
&= \frac{C}{k} \left(\sum_{n=2^0[k/\lambda]}^{2 \cdot 2^0 [k/\lambda]} |a_n| + \sum_{n=2^1[k/\lambda]}^{2 \cdot 2^1 [k/\lambda]} |a_n| + \cdots + \sum_{n=2^{\mu+1}[k/\lambda]}^{2 \cdot 2^{\mu+1} [k/\lambda]} |a_n| \right) \\
&\leq \frac{C}{k} \left(\sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) + \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \right) \\
&= \frac{C}{k} \cdot (\mu+2) \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \\
&= \frac{C(\mu+2)}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \\
&= \frac{C'}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda']} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$. ■

Ejemplo 2.11. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ una sucesión y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida como

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n < 16 \\ a_j & \text{si } n = 2^{4^j} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{4^j} < n < 2^{2\cdot 4^j} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ a_j & \text{si } 2^{2\cdot 4^j} \leq n < 2^{2\cdot 4^j+1} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{2\cdot 4^j+1} \leq n < 2^{4^{(j+1)}} \text{ para algún } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a $SBVS$ pero no a $MVBVS$.

Observemos que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned}
&b_1 = \cdots = b_{15} = 0,\\
&b_{16} = a_1,\\
&b_{17} = \cdots = b_{255} = 0,\\
&b_{256} = \cdots = b_{511} = a_1,\\
&b_{512} = \cdots = b_{65\ 535} = 0,\\
&b_{65\ 536} = a_2,\\
&\vdots\\
&b_{2^{(4^j-1)}} = \cdots = b_{2^{4^j}-1} = 0,\\
&b_{2^{4^j}} = a_j,\\
&b_{2^{4^j}+1} = \cdots = b_{2^{(4^j+1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j-1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j)}-1} = 0,\\
&b_{2^{(2\cdot 4^j)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j+1)}-1} = a_j,\\
&b_{2^{(2\cdot 4^j+1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j+2)}} = b_{2^{\left(4^{(j+1)}-1\right)}} = 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sea $k \geq 2$. Analicemos las posibilidades:

Si $2 \leq k \leq 7$, entonces $4 \leq 2k \leq 14$. Luego,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=2}^{14} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/2]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

Si $2^{4^j-1} \leq k \leq 2^{4^j}$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{4^j} \leq 2k \leq 2^{4^j+1}$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &\leq \sum_{n=2^{4^j-1}}^{2^{4^j+1}} |\Delta b_n| \\
&= \sum_{n=2^{4^j-1}}^{2^{4^j}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{4^j}-1}\right| + \left|\Delta b_{2^{4^j}}\right| + \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2^{4^j+1}} |\Delta b_n| \\
&= 0 + |0 - a_j| + |a_j - 0| + 0 \\
&= 2a_j \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}} \cdot 2^{2\cdot 4^j} a_j \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}-1} a_j \\
&= \frac{1}{2^{2\cdot 4^j-1}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}} |b_n| \\
&\leq \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/2]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).
\end{aligned}$$

Si $2^{4^j} + 1 \leq k \leq 2^{2\cdot 4^j-1} - 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{4^j+1} + 2 \leq 2k \leq 2^{2\cdot 4^j} - 2$. Además,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2^{2\cdot 4^j}-2} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/2]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

Si $2^{2\cdot 4^j-1} \leq k \leq 2^{2\cdot 4^j+1}$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{2\cdot 4^j} \leq 2k \leq 2^{2\cdot 4^j+2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &\leq \sum_{n=2^{2\cdot 4^j-1}}^{2^{2\cdot 4^j+2}} |\Delta b_n| \\
&= \sum_{n=2^{2\cdot 4^j-1}}^{2^{2\cdot 4^j}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{2\cdot 4^j}-1}\right| + \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2^{2\cdot 4^j+1}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{2\cdot 4^j+1}-1}\right| + \sum_{n=2^{2\cdot 4^j+1}}^{2^{2\cdot 4^j+2}} |\Delta b_n| \\
&= 0 + |0 - a_j| + 0 + |a_j - 0| + 0 \\
&= 2a_j \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}} \cdot 2^{2\cdot 4^j} a_j \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}-1} a_j \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}} |b_n| \\
&\leq \frac{4}{k} \sup_{m\geq[k/2]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).
\end{aligned}$$

Por último, si $2^{2\cdot 4^j+1}+1 \leq k \leq 2^{4^{(j+1)}-1}-1$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{2\cdot 4^j+2}+2 \leq 2k \leq 2^{4^{(j+1)}}-2$.

Adicionalmente,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=2^{2\cdot 4^j+1}+1}^{2^{4^{(j+1)}}-2} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/2]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

En resumen, considerando $C = 4$ y $\lambda = 2$, para $k \geq \lambda$ tenemos que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \frac{C}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$.

Resta probar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin MVBVS$. Para ello mostraremos que dados $C > 0$ y $\lambda \geq 2$, podemos hallar $k \geq \lambda$ tal que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| > \frac{C}{k} \sum_{n=[k/\lambda]}^{[\lambda k]} |b_n|. \tag{2.1}$$

Dadas $C > 0$ y $\lambda \geq 2$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \leq \frac{\sqrt{2^{4^j}}}{2}$ y $C \leq \frac{\sqrt{2^{4^j}}}{2}$. Entonces, $\lambda < 2^{4^j}$, $C < 2^{4^j}$ y $2^{2\cdot 4^{(j-1)}+1} = 2\cdot\sqrt{2^{4^j}} \leq \left[\frac{2^{4^j}}{\lambda}\right] \leq 2^{4^j} \leq \left[\lambda 2^{4^j}\right] < 2^{2\cdot 4^j}$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2^{4^j}}^{2\cdot 2^{4^j}} |\Delta b_n| &= \left|\Delta b_{2^{4^j}}\right| + \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2\cdot 2^{4^j}} |\Delta b_n| \\
&= |a_j - 0| + 0 \\
&= a_j \\
&> \frac{C}{2^{4^j}}\ a_j \\
&= \frac{C}{2^{4^j}}\ (0 + a_j + 0) \\
&= \frac{C}{2^{4^j}} \left(\sum_{n=2^{2\cdot 4^{(j-1)}+1}}^{2^{4^j}-1} |b_n| + \left|b_{2^{4^j}}\right| + \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2^{2\cdot 4^j}-1} |b_n| \right) \\
&= \frac{C}{2^{4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^{(j-1)}+1}}^{2^{2\cdot 4^j}-1} |b_n| \\
&\geq \frac{C}{2^{4^j}} \sum_{n=[2^{4^j}/\lambda]}^{[\lambda 2^{4^j}]} |b_n|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si consideramos $k = 2^{4^j}$ en (2.1), tenemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin MVBVS$. $\square$

Notemos que en el ejemplo anterior, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede elegirse de manera que se satisfaga o no la condición:

$$n\,|b_n| \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Para la clase $SBVS$ se satisface una propiedad similar a la presentada en el Teorema 2.6.

Teorema 2.12. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$. Si para $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ se define $b_n = n^r a_n$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$.*

Demostración. Si $r = 0$, tenemos que $b_n = a_n$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$ trivialmente.

Consideremos $r \in \mathbb{N}$. Realizamos la prueba mediante inducción matemática sobre r. Para $r = 1$, ocurre que $b_n = na_n$. Tomando $C_1 = 4C\lambda + 1$ y $\lambda_1 = \lambda$ donde $C > 0$ y $\lambda \geq 1$ son las constantes asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ según la Definición 2.9, para $k \geq \lambda_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &= \sum_{n=k}^{2k} |na_n - (n+1)a_{n+1}| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} |n(a_n - a_{n+1}) - a_{n+1}| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} n\,|a_n - a_{n+1}| + \sum_{n=k}^{2k} |a_{n+1}| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| + \sum_{n=k+1}^{2k+1} |a_n| \\
&\leq 2k \cdot \frac{C}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) + \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{2k+1} n\,|a_n| \\
&\leq 2C \cdot \frac{1}{[k/\lambda]} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |na_n| \right) + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2(k+1)} |na_n| \\
&\leq 2C \cdot \frac{1}{k/2\lambda} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) + \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) \\
&= 2C \cdot \frac{2\lambda}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) + \frac{1}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) \\
&= \frac{4C\lambda + 1}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) \\
&= \frac{C_1}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda_1]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$.

Para $r = s$, tenemos que $b_n = n^s a_n$. Supongamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$, es decir, que existen constantes $C_s > 0$ y $\lambda_s \geq 1$, que dependen solamente de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y que para $k \geq \lambda_s$ satisfacen:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \frac{C_s}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

De esta forma, para $r = s+1$ tenemos que $b'_n = n^{s+1}a_n$ y si elegimos $C_{s+1} = 4C_s\lambda_s + 1$ y $\lambda_{s+1} = \lambda_s$, para $k \geq \lambda_{s+1}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n'| &= \sum_{n=k}^{2k} \left| n^{s+1} a_n - (n+1)^{s+1} a_{n+1} \right| \\
&= \sum_{n=k}^{2k} |n(n^s a_n - (n+1)^s a_{n+1}) - (n+1)^s a_{n+1}| \\
&\leq \sum_{n=k}^{2k} n \left| n^s a_n - (n+1)^s a_{n+1} \right| + \sum_{n=k}^{2k} |(n+1)^s a_{n+1}| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |b_n - b_{n+1}| + \sum_{n=k+1}^{2k+1} |n^s a_n| \\
&\leq 2k \sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| + \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{2k+1} n\,|b_n| \\
&\leq 2k \cdot \frac{C_s}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right) + \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^{2(k+1)} |b_n'| \\
&\leq 2C_s \cdot \frac{1}{[k/\lambda_s]} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |n b_n| \right) + \frac{1}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) \\
&\leq 2C_s \cdot \frac{1}{k/2\lambda_s} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) + \frac{1}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) \\
&= 2C_s \cdot \frac{2\lambda_s}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) + \frac{1}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) \\
&= \frac{4C_s\lambda_s + 1}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_s]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right) \\
&= \frac{C_{s+1}}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda_{s+1}]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n'| \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(b_n')_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$. ■

2.3. La clase $SBVS_2$

Definimos la última clase de sucesiones que estudiamos en este capítulo.

Definición 2.13. La *clase* $SBVS_2$ (*Supremum Bounded Variation Sequences of 2nd type / Sucesiones de Variación Supremo-Acotada del tipo 2*) está constituida por las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ para las cuales existen constantes $C > 0$, $\lambda \geq 1$ y una sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ que tiende monótonamente a infinito y que satisface que $\beta_n \leq n$ para $n \in \mathbb{N}$, que dependen solamente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y son tales que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| \leq \frac{C}{k} \sup_{m \geq [\beta_k]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) \quad \text{para} \quad k \geq \lambda.$$

El siguiente teorema asegura que $SBVS \subset SBVS_2$. Más adelante afinamos esta relación.

Teorema 2.14. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$, *entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$.

Demostración. Sean $C > 0$ y $\lambda \geq 1$ las constantes asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ según la Definición 2.9. Notemos que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ definida por $\beta_n = n/\lambda$ tiende monótonamente a infinito, además $\beta_n \leq n$ para $n \in \mathbb{N}$. Considerando $C' = C$, $\lambda' = \lambda$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para $k \geq \lambda'$ tenemos que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta a_n| \leq \frac{C}{k} \sup_{m \geq [k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right) = \frac{C'}{k} \sup_{m \geq [\beta_k]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |a_n| \right).$$

Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$. ■

A continuación presentamos un ejemplo similar al Ejemplo 2.11 que nos demuestra que el recíproco del Teorema 2.14, en general, es falso. En resumen tenemos que: $MVBVS \subset SBVS \subset SBVS_2$.

Ejemplo 2.15. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ una sucesión no creciente. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n < 16 \\ \dfrac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}} & \text{si } n = 2^{4^j} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{4^j} < n < 2^{2\cdot 4^j} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ \dfrac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j} \cdot 2^{4^{(j+1)}}} & \text{si } 2^{2\cdot 4^j} \leq n < 2^{2\cdot 4^j + 1} \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{2\cdot 4^j + 1} \leq n < 2^{4^{(j+1)}} \text{ para algún } j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

pertenece a $SBVS_2$ pero no a $SBVS$.

La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned}
&b_1 = \cdots = b_{15} = 0, \\
&b_{16} = \frac{a_1}{256}, \\
&b_{17} = \cdots = b_{255} = 0, \\
&b_{256} = \cdots = b_{511} = \frac{a_2}{16\ 777\ 216}, \\
&b_{512} = \cdots = b_{65\ 535} = 0, \\
&b_{65\ 536} = \frac{a_2}{4\ 294\ 967\ 296}, \\
&\vdots \\
&b_{2^{(4^j-1)}} = \cdots = b_{2^{4^j}-1} = 0, \\
&b_{2^{4^j}} = \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}}, \\
&b_{2^{4^j}+1} = \cdots = b_{2^{(4^j+1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j-1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j)}-1} = 0, \\
&b_{2^{(2\cdot 4^j)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j+1)}-1} = \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j} \cdot 2^{4^{(j+1)}}}, \\
&b_{2^{(2\cdot 4^j+1)}} = \cdots = b_{2^{(2\cdot 4^j+2)}} = b_{2^{\left(4^{(j+1)}-1\right)}} = 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sea $k \geq 1$. Revisemos los siquientes casos:

Si $1 \leq k \leq 7$, entonces $2 \leq 2k \leq 14$. Luego,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=1}^{14} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m \geq \sqrt{k}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

Si $2^{4^j - 1} \leq k \leq 2^{4^j}$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{4^j} \leq 2k \leq 2^{4^j+1}$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &\leq \sum_{n=2^{4^j-1}}^{2^{4^j+1}} |\Delta b_n| \\
&= \sum_{n=2^{4^j-1}}^{2^{4^j}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{4^j}-1}\right| + \left|\Delta b_{2^{4^j}}\right| + \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2^{4^j+1}} |\Delta b_n| \\
&= 0 + \left|0 - \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}}\right| + \left|\frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}} - 0\right| + 0 \\
&= 2 \ \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}} \\
&= \frac{2}{2^{4^j}} \cdot 2^{2\cdot 4^{(j-1)}} \cdot \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^{(j-1)}} \cdot 2^{4^j}} \\
&= \frac{2}{2^{4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^{(j-1)}}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^{(j-1)}}-1} \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^{(j-1)}} \cdot 2^{4^j}} \\
&\leq \frac{2}{2^{4^j}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^{(j-1)}}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^{(j-1)}}} |b_n| \\
&= \frac{2}{2^{4^j}} \sum_{n=\sqrt{2^{4^j}}}^{2\cdot\sqrt{2^{4^j}}} |b_n| \\
&\leq \frac{2}{k} \sup_{m \geq \sqrt{k}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).
\end{aligned}$$

Si $2^{4^j} + 1 \leq k \leq 2^{2\cdot 4^j - 1} - 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{4^j+1} + 2 \leq 2k \leq 2^{2\cdot 4^j} - 2$. Además,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=2^{4^j}+1}^{2^{2\cdot 4^j}-2} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m \geq \sqrt{k}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \right).$$

Si $2^{2\cdot 4^j-1} \leq k \leq 2^{2\cdot 4^j+1}$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{2\cdot 4^j} \leq 2k \leq 2^{2\cdot 4^j+2}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| &\leq \sum_{n=2^{2\cdot 4^j-1}}^{2^{2\cdot 4^j+2}} |\Delta b_n| \\
&= \sum_{n=2^{2\cdot 4^j-1}}^{2^{2\cdot 4^j}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{2\cdot 4^j}-1}\right| + \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2^{2\cdot 4^j+1}-2} |\Delta b_n| + \left|\Delta b_{2^{2\cdot 4^j+1}-1}\right| + \sum_{n=2^{2\cdot 4^j+1}}^{2^{2\cdot 4^j+2}} |\Delta b_n| \\
&= 0 + \left|0 - \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j}\cdot 2^{4^{(j+1)}}}\right| + 0 + \left|\frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j}\cdot 2^{4^{(j+1)}}} - 0\right| + 0 \\
&= 2\ \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j}\cdot 2^{4^{(j+1)}}} \\
&= \frac{2}{2^{2\cdot 4^j}}\cdot 2^{2\cdot 4^j}\cdot \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j}\cdot 2^{4^{(j+1)}}} \\
&= \frac{4}{2^{2\cdot 4^j+1}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}-1} \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^j}\cdot 2^{4^{(j+1)}}} \\
&\leq \frac{4}{2^{2\cdot 4^j+1}} \sum_{n=2^{2\cdot 4^j}}^{2\cdot 2^{2\cdot 4^j}} |b_n| \\
&= \frac{4}{2^{2\cdot 4^j+1}} \sum_{n=\sqrt{2^{4^{(j+1)}}}}^{2\cdot\sqrt{2^{4^{(j+1)}}}} |b_n| \\
&\leq \frac{4}{k} \sup_{m\geq\sqrt{k}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right).
\end{aligned}$$

Por último, si $2^{2\cdot 4^j+1}+1 \leq k \leq 2^{4^{(j+1)}-1}-1$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $2^{2\cdot 4^j+2}+2 \leq 2k \leq 2^{4^{(j+1)}}-2$. Adicionalmente,

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \sum_{n=2^{2\cdot 4^j+1}+1}^{2^{4^{(j+1)}}-2} |\Delta b_n| = 0 \leq \frac{1}{k} \sup_{m\geq\sqrt{k}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right).$$

Recordemos que la sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ definida como $\beta_n = \sqrt{n}$ tiende monótonamente a infinito, también es claro que $\beta_n \leq n$ para $n \in \mathbb{N}$. Considerando $C = 4$, $\lambda = 1$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para $k \geq \lambda$ tenemos que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| \leq \frac{C}{k} \sup_{m\geq\beta_k} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right) \leq \frac{C}{k} \sup_{m\geq[\beta_k]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right).$$

Por lo tanto, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$.

Ahora probaremos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin SBVS$. Para ello mostraremos que dados $C > 0$ y $\lambda \geq 1$, podemos hallar $k \geq \lambda$ tal que:

$$\sum_{n=k}^{2k} |\Delta b_n| > \frac{C}{k} \sup_{m\geq[k/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right). \tag{2.2}$$

Haciendo un análisis similar al del inicio de este ejemplo, para $m \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq m \leq 7 \\ \dfrac{a_i}{2^{2\cdot 4^i}} & \text{si } 2^{4^i-1} \leq m \leq 2^{4^i} \text{ para algún } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{4^i}+1 \leq m \leq 2^{2\cdot 4^i-1}-1 \text{ para algún } i \in \mathbb{N} \\ \dfrac{a_{i+1}}{2^{4^{(i+1)}}} & \text{si } 2^{2\cdot 4^i-1} \leq m \leq 2^{2\cdot 4^i+1} \text{ para algún } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } 2^{2\cdot 4^i+1}+1 \leq m \leq 2^{4^{(i+1)}-1}-1 \text{ para algún } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En consecuencia, para todo $j \in \mathbb{N}$ y para todo $m \geq 2^{4^j}$:

$$\sum_{n=m}^{2m} |b_n| \leq \sup\left(\frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}}, \frac{a_{j+1}}{2^{4^{(j+1)}}}, \frac{a_{j+1}}{2^{2\cdot 4^{(j+1)}}}, \frac{a_{j+2}}{2^{4^{(j+2)}}}, \cdots\right).$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no creciente, para todo $j \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\sup_{m \geq 2^{4^j}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right) \leq \frac{a_j}{2^{2\cdot 4^j}}.$$

Dadas $C > 0$ y $\lambda \geq 1$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \leq \dfrac{\sqrt{2^{4^r}}}{2}$ y $C \leq \dfrac{\sqrt{2^{4^r}}}{2}$. Entonces, $\lambda < 2^{4^r}$, $C < 2^{4^r}$ y $2^{2\cdot 4^{(r-1)}+1} = 2 \cdot \sqrt{2^{4^r}} \leq \left[\frac{2^{4^r}}{\lambda}\right] \leq 2^{4^r} \leq \left[\lambda 2^{4^r}\right] < 2^{2\cdot 4^r}$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{4^r}}^{2\cdot 2^{4^r}} |\Delta b_n| &= |\Delta b_{2^{4^r}}| + \sum_{n=2^{4^r}+1}^{2\cdot 2^{4^r}} |\Delta b_n| \\ &= \left|\frac{a_r}{2^{2\cdot 4^r}} - 0\right| + 0 \\ &= \frac{a_r}{2^{2\cdot 4^r}} \\ &> \frac{C}{2^{4^r}} \cdot \frac{a_r}{2^{2\cdot 4^r}} \\ &= \frac{C}{2^{4^r}} \text{ máx}\left(\frac{a_r}{2^{2\cdot 4^r}}, \frac{a_r}{2^{2\cdot 4^r}}\right) \\ &\geq \frac{C}{2^{4^r}} \text{ máx}\left(\sup_{[2^{4^r}/\lambda] \leq m < 2^{4^r}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right), \sup_{m \geq 2^{4^r}} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right)\right) \\ &= \frac{C}{2^{4^r}} \sup_{m \geq [2^{4^r}/\lambda]} \left(\sum_{n=m}^{2m} |b_n|\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si consideramos $k = 2^{4^r}$ en (2.2), tenemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin SBVS$. $\square$

Sabemos que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS \setminus MVBVS$ entonces puede o no ocurrir que $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ (ver comentario inmediato posterior al Ejemplo 2.11). Sin embargo, para las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenecen a la clase $SBVS_2$ pero no a $SBVS$ siempre se satisface que $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto último se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 2.16. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2 \setminus SBVS$, *entonces* $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Sean C' y λ' las constantes y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por su pertenencia al espacio $SBVS_2$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$s_n = \sup_{m\geq n}\left(\sum_{i=m}^{2m}|a_i|\right).$$

Observemos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no negativa y no creciente. Por consiguiente,

$$S = \limsup_{n\to\infty}(s_n) = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n\geq k}(s_n)\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}}(s_k).$$

Existen tres posibilidades para el valor de S:

Si $S = \infty$, entonces $s_k = \infty$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Escogiendo $C > 0$ y $\lambda \geq 1$, para $k \geq \lambda$ tenemos que $s_{[k/\lambda]} = \infty$. En consecuencia,

$$\sum_{n=k}^{2k}|\Delta a_n| \leq \frac{C}{k}\sup_{m\geq[k/\lambda]}\left(\sum_{n=m}^{2m}|a_n|\right).$$

De acuerdo a la Definición 2.9, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$. Pero esto contradice la hipótesis.

Si $0 < S < \infty$, existen $N = \min\{n \in \mathbb{N} : s_n < \infty\}$ y $T > 0$ tal que $s_n \leq T$ para todo $n \geq N$. También se cumple que $S \leq s_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que debe existir $K \in \mathbb{N}$ tal que $[\beta_k] \geq N$ para todo $k \geq K$. Consideremos $C'' = C' \cdot T/S$ y $\lambda'' = \max\{\lambda', K\}$. Para $k \geq \lambda''$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{2k}|\Delta a_n| &\leq \frac{C'}{k}\sup_{m\geq[\beta_k]}\left(\sum_{n=m}^{2m}|a_n|\right)\\ &= \frac{C'}{k}\, s_{[\beta_k]}\\ &\leq \frac{C'}{k\ S}\, S\cdot T\\ &\leq \frac{C'\cdot T/S}{k}\, s_{[k/\lambda']}\\ &= \frac{C''}{k}\sup_{m\geq[k/\lambda'']}\left(\sum_{n=m}^{2m}|a_n|\right).\end{aligned}$$

Por tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$. Lo cual, de nuevo, es imposible.

Conforme al análisis previo, el único caso posible es $S = 0$. Como $\inf_{k\in\mathbb{N}}(s_k) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $s_M \in \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $s_M < \varepsilon$. Debido a que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no creciente, $|s_n - 0| = s_n < \varepsilon$ para todo $n \geq M$. Es decir, $s_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Deducimos que la subsucesión $\left(s_{[\beta_n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que $s_{[\beta_n]} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$, definiendo

$$\gamma_k = \frac{1}{k}s_{[\beta_k]} \quad \text{para} \quad k \geq \lambda',$$

tenemos que $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq\lambda'}$ es una sucesión no negativa y además se satisface que:

$$\sum_{n=k}^{2k}|\Delta a_n| \leq C'\gamma_k \quad \text{para} \quad k \geq \lambda'.$$

Por lo tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in GM(\gamma)$ (ver [11]).

De [11, Lema 2.1], para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que:

$$|a_n| \leq C'\gamma_n + \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{2n}|a_i|\,. \tag{2.3}$$

De esta forma, para $n \geq \lambda'$ se cumple que:

$$n\,|a_n| \leq C'\ s_{[\beta_n]} + s_{[\beta_n]} = (C'+1)\ s_{[\beta_n]}.$$

Por lo tanto, $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

A continuación presentamos una generalización del Teorema 2.5.

Teorema 2.17. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$.

(1) Si $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$*, entonces* $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Sean $C > 0$, $\lambda \geq 1$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, las constantes y sucesión asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ según la Definición 2.13.

El argumento que utilizamos es similar al de la prueba del Lema 9 en [13].

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$I(n,t) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt) \quad \text{y} \quad D_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kt).$$

Puesto que $I(n,0) = I(n,\pi) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, restringimos el estudio de la convergencia uniforme con respecto a t al intervalo $(0,\pi)$. Por tanto, sólo probaremos que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ y para toda $t \in (0,\pi)$ se satisface que:

$$|I(n,t)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{8C+3}$. Puesto que $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y como $\beta_n \leq n$ para $n \in \mathbb{N}$, también tenemos que $\beta_n \left|a_{[\beta_n]}\right| \to 0$ cuando $n \to \infty$. De esta manera, existe $n_0 \geq \lambda$ tal que para toda $n \geq n_0$ se satisface que:

$$\beta_n \left|a_{[\beta_n]}\right| < \varepsilon' \quad \text{y} \quad n\,|a_n| < \frac{\varepsilon'}{\pi}.$$

Elijamos $t \in (0,\pi)$ arbitrario y definamos $N = [1/t]$. Sea $n \geq n_0$, revisemos las posibilidades:

Si $n_0 \leq n < N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{N-1} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| &\leq \sum_{k=n}^{N-1} |a_k \operatorname{sen}(kt)| \\
&\leq \sum_{k=n}^{N-1} |a_k|\,|kt| \\
&= \sum_{k=n}^{N-1} t \cdot k\,|a_k| \\
&\leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot \pi k\,|a_k| \\
&< \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{N-1} \varepsilon' \\
&\leq \frac{1}{N}\,(N-1)\,\varepsilon' \\
&< \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Si $n_0 \leq N \leq n$, por las Observaciones 1.24 y 1.25, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|\,|D_k(t)| + |a_n|\,|D_{n-1}(t)| \\
&\leq \frac{\pi}{t}\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| + |a_n|\right) \\
&\leq \pi(N+1)\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| + \frac{1}{n} \cdot n\,|a_n|\right) \\
&< \pi(N+1)\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| + \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon'}{\pi}\right) \\
&= \pi(N+1)\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| + \frac{N+1}{N}\,\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| &\leq \sum_{k=n}^{2n} |\Delta a_k| + \sum_{k=2n}^{4n} |\Delta a_k| + \sum_{k=4n}^{8n} |\Delta a_k| + \cdots + \sum_{k=2^j n}^{2\cdot 2^j n} |\Delta a_k| + \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=2^j n}^{2\cdot 2^j n} |\Delta a_k| \right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C}{2^j n} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} |a_k| \right) \right) \\
&\leq \frac{C}{N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k} \cdot k\, |a_k| \right) \right) \\
&< \frac{C}{N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k} \cdot \frac{\varepsilon'}{\pi} \right) \right) \\
&= \frac{C}{N} \cdot \frac{\varepsilon'}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k} \right) \right) \\
&\leq \frac{C\varepsilon'}{N\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{m} \right) \right) \\
&\leq \frac{C\varepsilon'}{N\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \sup_{m \geq [\beta_{2^j n}]} \left(2m \cdot \frac{1}{m} \right) \right) \\
&\leq \frac{2C\varepsilon'}{N\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{4C\varepsilon'}{N\pi}.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt) \right| &< \pi(N+1)\, \frac{4C\varepsilon'}{N\pi} + \frac{N+1}{N}\, \varepsilon' \\
&= \frac{N+1}{N} \cdot (4C+1)\varepsilon' \\
&\leq 2(4C+1)\varepsilon' \\
&= (8C+2)\varepsilon'.
\end{aligned}$$

En resumen, si $n_0 \leq n < N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|I(n,t)| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=n}^{N-1} a_k \operatorname{sen}(kt) \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt) \right| \\
&< \varepsilon' + (8C+2)\varepsilon' \\
&= (8C+3)\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ahora $n_0 \leq N \leq n$, sucede que:

$$|I(n,t)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| < (8C+2)\varepsilon'.$$

Finalmente, si $N < n_0 \leq n$, también tenemos que:

$$|I(n,t)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| < (8C+2)\varepsilon'.$$

Por lo tanto, para toda $n \geq n_0$ y para toda $t \in (0,\pi)$ se satisface que:

$$|I(n,t)| < (8C+3)\varepsilon' = (8C+3)\ \frac{\varepsilon}{8C+3} = \varepsilon.$$

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{sen}(kt).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})}{C+1}$, observemos que $\varepsilon' > 0$. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ converge uniformemente con respecto a t, existe $n_0 \geq \lambda$ tal que para todo m que satisface $m \geq \beta_{n_0}$ y para todo $t \in [0,\pi]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|S_{2m}(x) - S_{m-1}(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{2m} a_k \operatorname{sen}(kt) - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{2m} a_k \operatorname{sen}(kt)\right| \\
&< \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $t_m = \frac{\pi}{4m}$, notemos que $t_m \in [0,\pi]$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ y la función seno es positiva y creciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=m}^{2m} a_k &\leq \sum_{k=m}^{2m} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k}{m} \cdot \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \left|\sum_{k=m}^{2m} a_k \operatorname{sen}\left(k\ \frac{\pi}{4m}\right)\right| \\
&= |S_{2m}(t_m) - S_{m-1}(t_m)|.
\end{aligned}$$

Entonces, para toda $m \geq \beta_{n_0}$ se cumple:

$$\sum_{k=m}^{2m} a_k < \frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{m \geq [\beta_{n_0}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} a_k\right) < \frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Puesto que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$, por (2.3) en la prueba del teorema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|a_n| \leq \frac{C}{n} \sup_{m\geq[\beta_n]} \left(\sum_{i=m}^{2m} |a_i| \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{2n} |a_i| \, .$$

En consecuencia, para $n \geq n_0$ se cumple que:

$$\begin{aligned} n\,|a_n| &\leq C \sup_{m\geq[\beta_n]} \left(\sum_{i=m}^{2m} |a_i| \right) + \sup_{m\geq[\beta_n]} \left(\sum_{i=m}^{2m} |a_i| \right) \\ &= (C+1) \sup_{m\geq[\beta_n]} \left(\sum_{i=m}^{2m} |a_i| \right) \\ &\leq (C+1) \sup_{m\geq[\beta_{n_0}]} \left(\sum_{k=m}^{2m} a_k \right) \\ &< (C+1) \frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n\,|a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

Como consecuencia del teorema anterior y el Teorema 2.14, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.18. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$*.*

(1) Si $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$*.*

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$*, entonces* $n\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Demostración. Por el Teorema 2.14 sabemos que $SBVS \subset SBVS_2$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS_2$. Por el Teorema 2.17, obtenemos las afirmaciones (1) y (2) de este corolario. ■

Finalizamos este capítulo con una generalización del Corolario 2.7 que involucra a la *derivada formal* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$. Se deduce del corolario anterior y el Teorema 2.12.

Corolario 2.19. *Sean* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$*.*

(1) Si $n^{2r+1}\,|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*, la* $2r-$*ésima derivada formal de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respeto a* $t \in \mathbb{R}_+$*.*

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} a_n \operatorname{sen}(nt)$ *converge uniformemente con respecto*

a $t \in \mathbb{R}_+$, *entonces* $n^{2r+1}|a_n| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Si $r = 0$, entonces el corolario se transforma en el Corolario 2.18.

Si $r \in \mathbb{N}$, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$, por el Teorema 2.12, haciendo $b_n = n^{2r}a_n$, tenemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in SBVS$.

(1) Para todo $r \in \mathbb{N}$, la $2r-$ésima derivada formal de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nt)$ es $(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}a_n \operatorname{sen}(nt)$.

Por hipótesis $n^{2r+1}|a_n| = n|b_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces por el Corolario 2.18 (1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}a_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que

$$(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}a_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$. Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r}a_n \operatorname{sen}(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt)$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces por el Corolario 2.18 (2),

$$n|b_n| = n^{2r+1}|a_n| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \blacksquare$$

Capítulo 3

Convergencia uniforme de la integral seno de Fourier

En este capítulo realizamos un estudio sobre la convergencia uniforme de la transformada seno de Fourier. Lo hacemos tomando como base los resultados obtenidos para la serie seno. La exposición se fundamenta en el trabajo elaborado por P. Kórus ([6]).

Recordemos que para una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ medible en el sentido de Lebesgue, la *integral seno de Fourier* o *transformada seno de Fourier* de f se define como

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.1}$$

Por la convergencia de la integral (3.1) para $t \in \mathbb{R}_+$, entendemos la finitud del límite

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx \quad \text{cuando} \quad a \to \infty.$$

Denotamos por $L_{loc}(\mathbb{R}_+)$ al espacio de funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ que son Lebesgue integrables localmente sobre $\mathbb{R}_+$.

P. Kórus realizó su tesis doctoral bajo la dirección de F. Móricz. En sus estudios, impone la condición de que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$. Esto con el fin de evitar en sus resultados funciones que tengan un comportamiento asintótico igual a $\frac{1}{x^p}$, con $p \geq 1$, alrededor de $x = 0$ por las complicaciones que esto conlleva.

Tal y como lo hace Kórus en [6], nosotros asumimos que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$. Observemos que de ésta condición obtenemos que $f \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Algunos teoremas estudiados en el capítulo precedente no pueden generalizarse para todo el espacio de funciones medibles sobre $\mathbb{R}_+$, pero sí para algunos subespacios que se introducen en [9] y que se presentan a continuación.

3.1. El espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$

La clase $MVBVS$ de sucesiones (ver Definición 2.2) inspiró el siguiente concepto para el caso continuo.

Definición 3.1. El *espacio* $MVBVF(\mathbb{R}_+)$ (*Mean Value Bounded Variation Functions on* $\mathbb{R}_+$ */ Funciones de Variación Acotada en Media sobre* $\mathbb{R}_+$) se define como el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ tales que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ para las que existen constantes $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$, que dependen solamente de f, que satisfacen la condición:

$$\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \leq \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\, dx \quad \text{para} \quad a > A.$$

Presentamos un par de ejemplos de funciones pertenecientes a este espacio.

Ejemplo 3.2. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definida como $f(x) = \alpha$ pertenece al espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

En el Ejemplo 1.8 probamos que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Considerando $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$, para $a > A$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &= \int_a^{2a} |0|\, dx \\ &= 0 \\ &\leq \frac{C(\lambda^2 - 1)\,|\alpha|}{\lambda} \\ &= \frac{C}{a} \cdot \frac{a(\lambda^2 - 1)\,|\alpha|}{\lambda} \\ &= \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |\alpha|\, dx \\ &= \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Ejemplo 3.3. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x$ es elemento del espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

En el Ejemplo 1.9 demostramos que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Tomando $C = 1$, $A > 0$ y $\lambda \geq 2$, para $a > A$

tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &= \int_a^{2a} |1|\, dx \\ &= a \\ &\leq \frac{a(\lambda^4-1)}{2\lambda^2} \\ &= \frac{1}{a}\cdot\frac{a^2(\lambda^4-1)}{2\lambda^2} \\ &= \frac{1}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a} |x|\, dx \\ &= \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Es decir, $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$. $\square$

El siguiente teorema que presentamos es demostrado por Móricz. Nuestro objetivo es generalizarlo.

Teorema 3.4. [9, Teorema 2]. *Sea $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$ tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Enseguida mostramos una propiedad del espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.5. *Sea $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$. Si para $r \in \mathbb{Z}$ se define $g_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ como $g_r(x) = x^r f(x)$, entonces $g_r \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Por el Corolario 1.17, $g_r \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si $r = 0$, tenemos que $g_0(x) = f(x)$. Por lo tanto, $g_0 \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Si $r \in \mathbb{N}$, hacemos inducción matemática sobre r. Para $r = 1$, sucede que $g_1(x) = xf(x)$. Tomando $C_1 = 2C\lambda + 1$, $A_1 = A$ y $\lambda_1 = \lambda$ donde C, A y λ son las constantes asociadas a f según la Definición

3.1, para $a > A_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |g_1'(x)|\, dx &= \int_a^{2a} |xf'(x) + f(x)|\, dx \\
&\leq \int_a^{2a} |xf'(x)|\, dx + \int_a^{2a} |f(x)|\, dx \\
&\leq 2a \int_a^{2a} |f'(x)|\, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |xf(x)|\, dx \\
&\leq 2a \cdot \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_1(x)|\, dx \\
&\leq 2C \cdot \frac{\lambda}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |xf(x)|\, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_1(x)|\, dx \\
&= \frac{2C\lambda}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_1(x)|\, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_1(x)|\, dx \\
&= \frac{2C\lambda + 1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_1(x)|\, dx \\
&= \frac{C_1}{a} \int_{a/\lambda_1}^{\lambda_1 a} |g_1(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_1 \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Para $r = k$, tenemos que $g_k(x) = x^k f(x)$ y supongamos que $g_k \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, es decir, que existen constantes $C_k, A_k > 0$ y $\lambda_k \geq 2$, que dependen solamente de g_k, tales que:

$$\int_a^{2a} |g_k'(x)|\, dx \leq \frac{C_k}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_k(x)|\, dx \quad \text{para} \quad a > A_k.$$

De esta manera, para $r = k + 1$ tenemos que $g_{k+1}(x) = x^{k+1} f(x)$. Si elegimos $C_{k+1} = 2C_k\lambda_k + 1$,

$A_{k+1} = A_k$ y $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, para $a > A_{k+1}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_a^{2a} \left|g'_{k+1}(x)\right| \, dx \\
&= \int_a^{2a} \left|x^{k+1} f'(x) + (k+1)x^k f(x)\right| \, dx \\
&= \int_a^{2a} \left|x \left(x^k f'(x) + kx^{k-1} f(x)\right) + x^k f(x)\right| \, dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left|x \left(x^k f'(x) + kx^{k-1} f(x)\right)\right| \, dx + \int_a^{2a} \left|x^k f(x)\right| \, dx \\
&\leq 2a \int_a^{2a} |g'_k(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|x^{k+1} f(x)\right| \, dx \\
&\leq 2a \cdot \frac{C_k}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_k(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_{k+1}(x)| \, dx \\
&\leq 2C_k \cdot \frac{\lambda_k}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |x g_k(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_{k+1}(x)| \, dx \\
&= \frac{2C_k \lambda_k}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_{k+1}(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_{k+1}(x)| \, dx \\
&= \frac{2C_k \lambda_k + 1}{a} \int_{a/\lambda_k}^{\lambda_k a} |g_{k+1}(x)| \, dx \\
&= \frac{C_{k+1}}{a} \int_{a/\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1} a} |g_{k+1}(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_{k+1} \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Si $-r \in \mathbb{N}$, la prueba de este caso la hacemos similar al previo utilizando inducción matemática ahora sobre $-r$. Para $-r = 1$, tenemos que $r = -1$ y $g_{-1}(x) = x^{-1} f(x) = \frac{1}{x} f(x)$. Como $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, de acuerdo a la Definición 3.1, f está asociada a las constantes C, A y λ. Si tomamos $C_{-1} = C\lambda + 1$, $A_{-1} = A$ y $\lambda_{-1} = \lambda$, para $a > A_{-1}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} \left|g'_{-1}(x)\right| \, dx &= \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x)\right| \, dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x} f'(x)\right| \, dx + \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x^2} f(x)\right| \, dx \\
&\leq \frac{1}{a} \int_a^{2a} |f'(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x} f(x)\right| \, dx \\
&\leq \frac{1}{a} \cdot \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_{-1}(x)| \, dx \\
&\leq \frac{C}{a^2} \cdot \lambda a \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|\frac{1}{x} f(x)\right| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_{-1}(x)| \, dx \\
&= \frac{C\lambda}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_{-1}(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_{-1}(x)| \, dx \\
&= \frac{C\lambda + 1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |g_{-1}(x)| \, dx \\
&= \frac{C_{-1}}{a} \int_{a/\lambda_{-1}}^{\lambda_{-1} a} |g_{-1}(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_{-1} \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Para $-r = k$, tenemos que $r = -k$ y $g_{-k}(x) = x^{-k} f(x) = \frac{1}{x^k}\ f(x)$. Supongamos que $g_{-k} \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, es decir, que podemos hallar constantes $C_{-k}, A_{-k} > 0$ y $\lambda_{-k} \geq 2$, que dependen sólo de g_{-k}, tales que:

$$\int_a^{2a} \left|g'_{-k}(x)\right| \, dx \leq \frac{C_{-k}}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} |g_{-k}(x)| \, dx \quad \text{para} \quad a > A_{-k}.$$

De esta forma, para $-r = k+1$ tenemos que $r = -(k+1)$ y $g_{-(k+1)}(x) = x^{-(k+1)} f(x) = \frac{1}{x^{k+1}} f(x)$. Si elegimos $C_{-(k+1)} = C_{-k}\lambda_{-k} + 1$, $A_{-(k+1)} = A_{-k}$ y $\lambda_{-(k+1)} = \lambda_{-k}$, para $a > A_{-(k+1)}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_a^{2a} \left|g'_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&= \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x^{k+1}} f'(x) - \frac{k+1}{x^{k+2}} f(x)\right| \, dx \\
&= \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^k} f'(x) - \frac{k}{x^{k+1}} f(x)\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^{k+1}} f(x)\right)\right| \, dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^k} f'(x) - \frac{k}{x^{k+1}} f(x)\right)\right| \, dx + \int_a^{2a} \left|\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^{k+1}} f(x)\right)\right| \, dx \\
&\leq \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|g'_{-k}(x)\right| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&\leq \frac{1}{a} \cdot \frac{C_{-k}}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} |g_{-k}(x)| \, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&\leq \frac{C_{-k}}{a^2} \cdot \lambda_{-k}\ a \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} \left|\frac{1}{x} g_{-k}(x)\right| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&= \frac{C_{-k}\ \lambda_{-k}}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx + \frac{1}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&= \frac{C_{-k}\ \lambda_{-k} + 1}{a} \int_{a/\lambda_{-k}}^{\lambda_{-k} a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx \\
&= \frac{C_{-(k+1)}}{a} \int_{a/\lambda_{-(k+1)}}^{\lambda_{-(k+1)} a} \left|g_{-(k+1)}(x)\right| \, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_{-(k+1)} \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$. ■

Cuando hablamos de la *derivada formal respecto de* t de $\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx) \, dx$ nos referimos a que se satisface:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx) \, dx\right) = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(x) \operatorname{sen}(tx)\right) \, dx,$$

sin detenernos a considerar las condiciones necesarias para que la igualdad se cumpla.

Análogamente, cuando hablamos de la *integral formal respecto de* t de $\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx) \, dx$ nos referimos a que se cumple:

$$\int \left(\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx) \, dx\right) \, dt = \int_0^\infty \left(\int f(x) \operatorname{sen}(tx) \, dt\right) \, dx,$$

sin analizar las condiciones necesarias para conseguir la igualdad.

Si revisamos los dos últimos teoremas, obtenemos los siguientes corolarios para la *derivada formal* e *integral formal* de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$.

Corolario 3.6. *Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$ tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $x^{2n+1}f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces la $2n-$ésima derivada formal respecto de t de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $x^{2n+1}f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Si $n = 0$, el corolario se transforma en el Teorema 3.4. Si $n \in \mathbb{N}$, dado que $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, por el Teorema 3.5, $g_{2n} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definida como $g_{2n}(x) = x^{2n}f(x)$ pertenece a $MVBVF(\mathbb{R}_+)$. Como $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, por el Teorema 1.21, tenemos que $x^{2n+1}f = xg_{2n} \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la $2n-$ésima derivada formal respecto de t de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ es

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{2n}f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx.$$

Por hipótesis $x^{2n+1}f(x) = xg_{2n}(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces por el Teorema 3.4 (1),

$$\int_0^\infty g_{2n}(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx = \int_0^\infty x^{2n}f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que:

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{2n}f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $g_{2n}(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$. Puesto que

$$\int_0^\infty x^{2n}f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx = \int_0^\infty g_{2n}(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, por el Teorema 3.4 (2),

$$xg_{2n}(x) = x^{2n+1}f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty. \blacksquare$$

Corolario 3.7. *Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$ tal que $x^{-2n+1}f \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $x^{-2n+1}f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces la $2n-$ésima integral formal respecto de t de $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *y* $\int_0^\infty x^{-2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ *converge uniformemente con respecto a* $t \in \mathbb{R}_+$*, entonces* $x^{-2n+1} f(x) \to 0$ *cuando* $x \to \infty$.

Demostración. Si $n = 0$, el corolario se transforma en el Teorema 3.4. Si $n \in \mathbb{N}$, dado que $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, por el Teorema 3.5, $g_{-2n} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definida como $g_{-2n}(x) = x^{-2n} f(x)$ pertenece a $MVBVF(\mathbb{R}_+)$. Además, $x^{-2n+1} f = x g_{-2n} \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la $2n-$ésima integral formal respecto de t de $\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ es

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{-2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx.$$

Por hipótesis $x^{-2n+1} f(x) = x g_{-2n}(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces por el Teorema 3.4 (1),

$$\int_0^\infty g_{-2n}(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx = \int_0^\infty x^{-2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que:

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{-2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $g_{-2n}(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$. Puesto que

$$\int_0^\infty x^{-2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx = \int_0^\infty g_{-2n}(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, por el Teorema 3.4 (2),

$$x g_{-2n}(x) = x^{-2n+1} f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty. \blacksquare$$

3.2. El espacio $SBVF(\mathbb{R}_+)$

Por su parte, la clase $SBVS$ de sucesiones estudiada en el capítulo previo (ver Definición 2.9), inspiró el concepto que enseguida exhibimos.

Definición 3.8. Una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ pertenece al *espacio* $SBVF(\mathbb{R}_+)$ (*Supremum Bounded Variation Functions on* $\mathbb{R}_+$ */ Funciones de Variación Supremo-Acotada sobre* $\mathbb{R}_+$) si $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y existen constantes $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$, que dependen sólo de f, que satisfacen la condición:

$$\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \quad \text{para} \quad a > A.$$

Mostramos un resultado en el que se establece la relación de contención entre los espacios de funciones estudiados hasta ahora en este capítulo.

Teorema 3.9. *Si $f \in MVBVF(\mathbb{R}_+)$, entonces $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Sean $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$ las constantes asociadas a f según la Definición 3.1. Sea μ el número natural para el que se satisface: $2^\mu \leq \lambda^2 < 2^{\mu+1}$. Considerando $C' = C(\mu+1)$, $A' = A$ y $\lambda' = \lambda$, para $a > A'$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &\leq \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\, dx \\
&= \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda^2 a/\lambda} |f(x)|\, dx \\
&\leq \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{2^{\mu+1} a/\lambda} |f(x)|\, dx \\
&= \frac{C}{a} \left(\int_{a/\lambda}^{2a/\lambda} + \int_{2a/\lambda}^{4a/\lambda} + \cdots + \int_{2^\mu a/\lambda}^{2^{\mu+1} a/\lambda} \right) |f(x)|\, dx \\
&= \frac{C}{a} \left(\int_{2^0 a/\lambda}^{2\cdot 2^0 a/\lambda} |f(x)|\, dx + \int_{2^1 a/\lambda}^{2\cdot 2^1 a/\lambda} |f(x)|\, dx \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \int_{2^\mu a/\lambda}^{2\cdot 2^\mu a/\lambda} |f(x)|\, dx \right) \\
&\leq \frac{C}{a} \left(\sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) + \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \right) \\
&= \frac{C}{a} \cdot (\mu+1) \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{C(\mu+1)}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{C'}{a} \sup_{b \geq a/\lambda'} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. ■

El teorema anterior nos asegura que $MVBVF(\mathbb{R}_+) \subset SBVF(\mathbb{R}_+)$. Sin embargo, los ejemplos siguientes nos permiten aclarar que $SBVF(\mathbb{R}_+) \not\subset MVBVF(\mathbb{R}_+)$ o equivalentemente, que el recíproco del Teorema 3.9 en general es falso.

Ejemplo 3.10. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \operatorname{sen} x$ pertenece a $SBVF(\mathbb{R}_+)$ pero no a $MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

En el Ejemplo 1.11 probamos que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. También es recomendable revisar la Observación 1.27.

Tomando $C = 4$, $A = 2\pi$ y $\lambda \geq 2$, para $a > A$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)| \, dx &= \int_a^{2a} |\cos x| \, dx \\
&\leq \frac{4a}{\pi} \\
&= \frac{4}{a} \cdot \frac{a^2}{\pi} \\
&\leq \frac{4}{a} \cdot \int_{a^2}^{2a^2} |\operatorname{sen} x| \, dx \\
&\leq \frac{4}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |\operatorname{sen} x| \, dx \right) \\
&= \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Ahora, para $2\pi < a$ tenemos que:

$$\frac{a}{\pi} \leq \int_a^{2a} |\cos x| \, dx = \int_a^{2a} |f'(x)| \, dx.$$

Es decir,

$$\int_a^{2a} |f'(x)| \, dx \to \infty \quad \text{cuando} \quad a \to \infty.$$

Por otro lado, para $2\pi < a$ tenemos que:

$$\frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)| \, dx = \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |\operatorname{sen} x| \, dx \leq \frac{C}{a} \cdot \frac{4\lambda a}{\pi} = \frac{4C\lambda}{\pi}.$$

Es decir, no existen constantes C, A y λ, que satisfagan la Definición 3.1. Por lo tanto, $f \notin MVBVF(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Ejemplo 3.11. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)}$ es elemento del espacio $SBVF(\mathbb{R}_+)$ pero no pertenece al espacio $MVBVF(\mathbb{R}_+)$.

Recordemos la Observación 1.27. En el Ejemplo 1.13 probamos que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si consideramos $C = 24$, $A = 2\pi$ y $\lambda \geq 2$, para $a > A$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &= \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} - \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} \right| dx + \int_a^{2a} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\ln(a+3)} \cdot \int_a^{2a} |\cos x|\, dx + \frac{1}{(a+3)\ln^2(a+3)} \cdot \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x|\, dx \\
&\leq \frac{1}{\ln(a+3)} \cdot \frac{4a}{\pi} + \frac{1}{\ln(a+3)} \cdot \frac{4a}{\pi} \\
&= \frac{8a}{\pi \ln(a+3)} \\
&= \frac{8\ln(2a^2+3)}{a\ln(a+3)} \cdot \frac{1}{\ln(2a^2+3)} \cdot \frac{a^2}{\pi} \\
&\leq \frac{8\ln(2a^2+3)}{a\ln(a+3)} \cdot \frac{1}{\ln(2a^2+3)} \cdot \int_{a^2}^{2a^2} |\operatorname{sen} x|\, dx \\
&\leq \frac{8}{a} \cdot \frac{\ln(2a^2+3)}{\ln(a+3)} \cdot \int_{a^2}^{2a^2} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)} \right| dx \\
&\leq \frac{8}{a} \cdot 3 \cdot \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)} \right| dx \right) \\
&= \frac{24}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)} \right| dx \right) \\
&= \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Resta probar que $f \notin MVBVF(\mathbb{R}_+)$. Para $2\pi < a$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\pi \ln(2a+3)} - \frac{4}{\pi \ln^2(a+3)} \\
&= \frac{1}{\ln(2a+3)} \cdot \frac{a}{\pi} - \frac{1}{a\ln^2(a+3)} \cdot \frac{4a}{\pi} \\
&\leq \frac{1}{\ln(2a+3)} \cdot \int_a^{2a} |\cos x|\, dx - \frac{1}{a\ln^2(a+3)} \cdot \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x|\, dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(2a+3)} \right| dx - \int_a^{2a} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(a+3)\ln^2(a+3)} \right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} \right| dx - \int_a^{2a} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(x+3)} - \frac{\operatorname{sen} x}{(x+3)\ln^2(x+3)} \right| dx \\
&= \int_a^{2a} |f'(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \to \infty \quad \text{cuando} \quad a \to \infty.$$

Sin embargo, para $4 \leq 2\lambda < a$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}|f(x)|\;dx &= \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\ln(x+3)}\right|\;dx \\
&\leq \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\ln(\frac{a}{\lambda}+3)}\right|\;dx \\
&\leq \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\ln(\frac{a}{\lambda})}\right|\;dx \\
&\leq \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\ln 2}\right|\;dx \\
&\leq \frac{C}{a\ln 2}\int_{a/\lambda}^{\lambda a}|\operatorname{sen} x|\;dx \\
&\leq \frac{C}{a\ln 2}\cdot\frac{4\lambda a}{\pi} \\
&= \frac{4C\lambda}{\pi\ln 2}.
\end{aligned}$$

Del análisis previo podemos concluir que no existen constantes C, A y λ, que satisfagan la Definición 3.1. Así, $f \notin MVBVF(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Para el espacio $SBVF(\mathbb{R}_+)$ obtenemos un enunciado similar al Teorema 3.5.

Teorema 3.12. *Sea $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. Si para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ se define $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ como $g_n(x) = x^n f(x)$, entonces $g_n \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.*

Demostración. Por el Corolario 1.17, $g_n \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si $n = 0$, tenemos que $g_0(x) = f(x)$ y trivialmente, $g_0 \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$, realizamos la prueba mediante inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, sucede que $g_1(x) = xf(x)$. Sean $C_1 = 2C\lambda + 1$, $A_1 = A$ y $\lambda_1 = \lambda$ donde C, A y λ son las constantes asociadas a f según la Definición 3.8. Para $a > A_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_a^{2a} |g_1'(x)|\,dx \\
&= \int_a^{2a} |xf'(x) + f(x)|\,dx \\
&\leq \int_a^{2a} |xf'(x)|\,dx + \int_a^{2a} |f(x)|\,dx \\
&\leq 2a \int_a^{2a} |f'(x)|\,dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} |xf(x)|\,dx \\
&\leq 2a \cdot \frac{C}{a} \sup_{b\geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\,dx\right) + \frac{1}{a}\int_a^{2a} |g_1(x)|\,dx \\
&\leq 2C \cdot \frac{\lambda}{a} \sup_{b\geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |xf(x)|\,dx\right) + \frac{1}{a}\int_a^{2a} |g_1(x)|\,dx \\
&= \frac{2C\lambda}{a} \sup_{b\geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |g_1(x)|\,dx\right) + \frac{1}{a} \sup_{b\geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |g_1(x)|\,dx\right) \\
&= \frac{2C\lambda + 1}{a} \sup_{b\geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |g_1(x)|\,dx\right) \\
&= \frac{C_1}{a} \sup_{b\geq a/\lambda_1} \left(\int_b^{2b} |g_1(x)|\,dx\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_1 \in SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Para $n = k$, tenemos que $g_k(x) = x^k f(x)$ y supongamos que $g_k \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. Es decir, existen constantes $C_k, A_k > 0$ y $\lambda_k \geq 2$, que dependen solamente de g_k, tales que:

$$\int_a^{2a} |g_k'(x)|\,dx \leq \frac{C_k}{a} \sup_{b\geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_k(x)|\,dx\right) \quad \text{para} \quad a > A_k.$$

Entonces, para $n = k+1$ tenemos que $g_{k+1}(x) = x^{k+1} f(x)$ y si elegimos $C_{k+1} = 2C_k\lambda_k + 1$,

$A_{k+1} = A_k$ y $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, para $a > A_{k+1}$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{2a} \left|g'_{k+1}(x)\right| dx \\
&= \int_a^{2a} \left|x^{k+1} f'(x) + (k+1)x^k f(x)\right| dx \\
&= \int_a^{2a} \left|x\left(x^k f'(x) + kx^{k-1} f(x)\right) + x^k f(x)\right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left|x\left(x^k f'(x) + kx^{k-1} f(x)\right)\right| dx + \int_a^{2a} \left|x^k f(x)\right| dx \\
&\leq 2a \int_a^{2a} |g'_k(x)|\, dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left|x^{k+1} f(x)\right| dx \\
&\leq 2a \cdot \frac{C_k}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_k(x)|\, dx \right) + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_{k+1}(x)|\, dx \\
&\leq 2C_k \cdot \frac{\lambda_k}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_{k+1}(x)|\, dx \right) + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_{k+1}(x)|\, dx \\
&= \frac{2C_k\lambda_k}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_{k+1}(x)|\, dx \right) + \frac{1}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_{k+1}(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{2C_k\lambda_k + 1}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_k} \left(\int_b^{2b} |g_{k+1}(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{C_{k+1}}{a} \sup_{b \geq a/\lambda_{k+1}} \left(\int_b^{2b} |g_{k+1}(x)|\, dx \right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $g_{k+1} \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. ■

3.3. El espacio $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$

Introducimos en nuestro estudio el último espacio de funciones sobre el que probaremos la convergencia uniforme de la integral seno de Fourier. Notemos que es una generalización de la clase $SBVS_2$ de sucesiones estudiada en el Capítulo 2 (ver Definición 2.13).

Definición 3.13. El *espacio* $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ (*Supremum Bounded Variation Functions of 2nd type on* $\mathbb{R}_+$ */ Funciones de Variación Supremo-Acotada del tipo 2 sobre* $\mathbb{R}_+$) está definido como el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ tales que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ para las cuales existen constantes $C, A > 0$ y una función $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que tiende monótonamente a infinito y que satisface que $\beta(a) \leq a$ para $a \in \mathbb{R}_+$, que dependen solamente de f, que satisfacen la condición:

$$
\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \quad \text{para} \quad a > A.
$$

Proseguimos con un teorema que asegura que $SBVF(\mathbb{R}_+) \subset SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ y con un ejemplo que nos precisa que $SBVF_2(\mathbb{R}_+) \not\subset SBVF(\mathbb{R}_+)$. Si recordamos el Teorema 3.9, podemos resumir que: $MVBVF(\mathbb{R}_+) \subset SBVF(\mathbb{R}_+) \subset SBVF_2(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.14. *Si* $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$, *entonces* $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$.

Demostración. Sean $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$ las constantes asociadas a f según la Definición 3.8. Observemos que $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida como $\beta(x) = \frac{x}{\lambda}$ tiende monótonamente a infinito. Considerando $C' = C$, $A' = A$ y β, para $a > A'$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &\leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{C}{a} \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&= \frac{C'}{a} \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$. ■

Ejemplo 3.15. La función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3}$ pertenece al espacio $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ pero no a $SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Recordemos la Observación 1.27. En el Ejemplo 1.14 probamos que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Recordemos que $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $\beta(x) = \sqrt{x}$ tiende monótonamente a infinito. Si elegimos $C = 320$, $A = 4\pi^2$ y β, para $a > A$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx &= \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} - \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} \right| dx + \int_a^{2a} \left| \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| dx \\
&\leq \frac{1}{(a+1)^3} \cdot \int_a^{2a} |\cos x|\, dx + \frac{3}{(a+1)^4} \cdot \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x|\, dx \\
&\leq \frac{1}{(a+1)^3} \cdot \frac{4a}{\pi} + \frac{3}{(a+1)^3} \cdot \frac{4a}{\pi} \\
&= \frac{16a}{\pi(a+1)^3} \\
&= \frac{16\sqrt{a}\,(2\sqrt{a}+1)^3}{(a+1)^3} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{a}+1)^3} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\pi} \\
&\leq \frac{16\sqrt{a}\,(2\sqrt{a}+1)^3}{(a+1)^3} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{a}+1)^3} \cdot \int_{\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}} |\operatorname{sen} x|\, dx \\
&\leq \frac{16}{a} \cdot \frac{a\sqrt{a}\,(2\sqrt{a}+1)^3}{(a+1)^3} \cdot \int_{\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3} \right| dx \\
&\leq \frac{16}{a} \cdot \frac{(2a+\sqrt{a})^3}{(a+1)^3} \cdot \sup_{b \geq \sqrt{a}} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3} \right| dx \right) \\
&\leq \frac{16}{a} \cdot 20 \cdot \sup_{b \geq \sqrt{a}} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3} \right| dx \right) \\
&= \frac{320}{a} \sup_{b \geq \sqrt{a}} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3} \right| dx \right) \\
&= \frac{C}{a} \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right).
\end{aligned}$$

Es decir, $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$.

Ahora mostramos que $f \notin SVBVF(\mathbb{R}_+)$. Para $2\pi < a$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\pi(2a+1)^3} - \frac{12a}{\pi(a+1)^4} \\
&= \frac{1}{(2a+1)^3} \cdot \frac{a}{\pi} - \frac{3}{(a+1)^4} \cdot \frac{4a}{\pi} \\
&\leq \frac{1}{(2a+1)^3} \cdot \int_a^{2a} |\cos x| \; dx - \frac{3}{(a+1)^4} \cdot \int_a^{2a} |\operatorname{sen} x| \; dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} \right| dx - \int_a^{2a} \left| \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| dx \\
&\leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(x+1)^3} - \frac{3 \operatorname{sen} x}{(x+1)^4} \right| dx \\
&= \int_a^{2a} |f'(x)| \; dx.
\end{aligned}$$

Para $4\pi \leq 2\pi\lambda < a$ tenemos que la función $g : [a/\lambda, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(b) = \frac{b}{(b+1)^3}$ es decreciente, de esta forma $\sup\limits_{b \geq a/\lambda} (g(b)) = \frac{a}{\lambda(a/\lambda+1)^3}$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \; dx \right) &= \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x+1)^3} \right| dx \right) \\
&\leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\frac{1}{(b+1)^3} \cdot \int_b^{2b} |\operatorname{sen} x| \; dx \right) \\
&\leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\frac{1}{(b+1)^3} \cdot \frac{4b}{\pi} \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\frac{b}{(b+1)^3} \right) \\
&= \frac{4C}{\pi a} \cdot \frac{a}{\lambda \left(\frac{a}{\lambda} + 1 \right)^3} \\
&= \frac{4C\lambda^2}{\pi \left(a + \lambda \right)^3}.
\end{aligned}$$

Cuando a es lo suficientemente grande, por una parte, tenemos que

$$\frac{4C\lambda^2}{\pi \left(a + \lambda \right)^3} \sim \frac{4C\lambda^2}{\pi a^3},$$

por otro lado,

$$\frac{1}{8\pi a^2} \sim \frac{a}{\pi(2a)^3} - \frac{12a}{\pi a^4} \sim \frac{a}{\pi(2a+1)^3} - \frac{12a}{\pi(a+1)^4}.$$

Concluimos que no existen constantes C, A y λ, que satisfagan la Definición 3.8. □

Presentamos una propiedad muy interesante para funciones que pertenecen al espacio $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ pero no a $SBVF(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.16. *Si* $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+) \setminus SBVF(\mathbb{R}_+)$, *entonces* $xf(x) \to 0$ *cuando* $x \to \infty$.

Demostración. Sean C', A' y β las constantes y función asociadas a f por su pertenencia al espacio $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$.

Para cada $a > 0$, definimos:

$$I_a = \sup_{b \geq a} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right). \tag{3.2}$$

Notemos que I_a es una función no negativa y no creciente. Por consiguiente,

$$I = \limsup_{a \to \infty} (I_a) = \inf_{a>0} \left(\sup_{b \geq a} (I_b) \right) = \inf_{a>0} (I_a).$$

Existen tres posibilidades para el valor de I:

Si $I = \infty$, entonces $I_a = \infty$ para toda $a > 0$. Escogiendo $C, A > 0$ y $\lambda \geq 2$, para $a > A$ tenemos que $I_{a/\lambda} = \infty$. Por consecuencia,

$$\int_a^{2a} |f'(x)| \, dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right).$$

De acuerdo a la Definición 3.8, $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. Pero esto contradice la hipótesis.

Si $0 < I < \infty$, existen $K = \inf\{a > 0 : I_a < \infty\}$ y $J > 0$ tal que $I_a \leq J$ para todo $a \geq K$. También se cumple que $I \leq I_a$ para todo $a > 0$. Notemos que debe existir $L > 0$ tal que $\beta(a) \geq K$ para todo $a \geq L$. Consideremos $C'' = C' \cdot J/I$, $A'' = \max\{A', L\}$ y $\lambda'' \geq 2$. Para $a \geq A''$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} |f'(x)| \, dx &\leq \frac{C'}{a} \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right) \\
&= \frac{C'}{a} \, I_{\beta(a)} \\
&\leq \frac{C'}{a \, I} \, I \cdot J \\
&\leq \frac{C' \cdot J/I}{a} \, I_{a/\lambda} \\
&\leq \frac{C'}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right).
\end{aligned}$$

Es decir, $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$. De nuevo, por hipótesis esto es imposible.

Conforme al análisis previo, el único caso posible es $I = 0$. Dado que $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$, por el *Teorema Fundamental del Cálculo* (ver Teorema 1.22), tenemos que:

$$\int_a^t f'(x) \, dx = f(t) - f(a) \quad \text{para} \quad a < t.$$

De la ecuación anterior, para $a < t < 2a$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f(a)| &\le |f(t)| + \left| \int_a^t f'(x)\, dx \right| \\
&\le |f(t)| + \int_a^t |f'(x)|\, dx \\
&\le |f(t)| + \int_a^{2a} |f'(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior con respecto a t en el intervalo $[a, 2a]$ y como $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$, para $a > A'$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
a\,|f(a)| &= \int_a^{2a} |f(a)|\, dt \\
&\le \int_a^{2a} |f(t)|\, dt + \int_a^{2a} \left(\int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \right) dt \\
&= \int_a^{2a} |f(t)|\, dt + a \int_a^{2a} |f'(x)|\, dx \\
&\le \int_a^{2a} |f(x)|\, dx + a \cdot \frac{C'}{a} \sup_{b \ge \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&\le \sup_{b \ge \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) + C' \sup_{b \ge \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\, dx \right) \\
&= I_{\beta(a)} + C'\, I_{\beta(a)} \\
&= (C' + 1)\, I_{\beta(a)}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Puesto que $\beta(a) \to \infty$ cuando $a \to \infty$, entonces $I_{\beta(a)} \to 0$ cuando $a \to \infty$. De (3.3) obtenemos que $af(a) \to 0$ cuando $a \to \infty$. ■

A continuación probamos un par de lemas que utilizamos en la prueba del teorema siguiente, ambos estan relacionados con funciones que satisfacen que $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Lema 3.17. *Si $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ y $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces*

$$a \int_a^{\infty} |f'(x)|\, dx \to 0 \quad \textit{cuando} \quad a \to \infty. \tag{3.4}$$

Demostración. Sean C, $A > 0$ y β, las constantes y función asociadas a f según la Definición 3.13.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C \ln 4}$ existe $M_{\varepsilon'} > A$ tal que para todo $x > M_{\varepsilon'}$ se tiene que:

$$x\,|f(x)| < \varepsilon'.$$

Debido a que $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$, para a que satisface que $\beta(a) > M_{\varepsilon'}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty |f'(x)|\,dx &= \int_{2^0 a}^{2\cdot 2^0 a} |f'(x)|\,dx + \int_{2^1 a}^{2\cdot 2^1 a} |f'(x)|\,dx + \cdots + \int_{2^k a}^{2\cdot 2^k a} |f'(x)|\,dx + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{2^k a}^{2\cdot 2^k a} |f'(x)|\,dx \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C}{2^k a} \sup_{b \geq \beta(2^k a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)|\,dx \right) \right) \\
&\leq \frac{C}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sup_{b \geq \beta(2^k a)} \left(\int_b^{2b} \frac{\varepsilon'}{x}\,dx \right) \right) \\
&= \frac{C\varepsilon'}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sup_{b \geq \beta(2^k a)} (\ln 2) \right) \\
&= \frac{C\varepsilon' \ln 2}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{C\varepsilon' \ln 2}{a} \cdot 2 \\
&= \frac{C\varepsilon' \ln 4}{a} \\
&= \frac{\varepsilon}{a}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a \int_a^\infty |f'(x)|\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty. \blacksquare$$

Lema 3.18. *Sea f tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$. Si $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces*

$$\frac{1}{b} \int_0^b x\,|f(x)|\,dx \to 0 \quad \textit{cuando} \quad b \to \infty. \tag{3.5}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, para ε existe $M_\varepsilon > 0$ tal que para todo $x > M_\varepsilon$ tenemos que:

$$x\,|f(x)| < \varepsilon.$$

Debido a que f satisface que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, para $b > M_\varepsilon$ tenemos:

$$\int_0^b x\,|f(x)|\,dx < \int_0^b \varepsilon\,dx = b\varepsilon.$$

Es decir,

$$\frac{1}{b} \int_0^b x\,|f(x)|\,dx < \varepsilon \quad \text{para} \quad b > M_\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{b} \int_0^b x\,|f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad b \to \infty. \blacksquare$$

Como lo comentamos anteriormente, el objetivo de todo nuestro trabajo es la generalización del Teorema 3.4 y la presentamos en el teorema siguiente.

Teorema 3.19. *Sea $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Sean C, $A > 0$ y β, las constantes y función asociadas a f según la Definición 3.13. Supongamos que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.

(1) Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4}$. Como $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, para ε' existe $K_{\varepsilon'} > 0$ tal que para todo $x > K_{\varepsilon'}$ tenemos que:

$$x\,|f(x)| < \varepsilon'. \tag{3.6}$$

Debido a que $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$ y $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, por (3.4), para ε' existe $M_{\varepsilon'} > 0$ tal que:

$$a\int_a^\infty |f'(x)|\,dx < \varepsilon' \quad \text{para todo} \quad a > M_{\varepsilon'}. \tag{3.7}$$

Dado que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$ y $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, por (3.5), para ε' existe $N_{\varepsilon'} > 0$ tal que:

$$\frac{1}{b}\int_0^b x\,|f(x)|\,dx < \varepsilon' \quad \text{para todo} \quad b > N_{\varepsilon'}. \tag{3.8}$$

Sea $N = \text{máx}\{K_{\varepsilon'}, M_{\varepsilon'}, N_{\varepsilon'}\} > 0$ y elijamos $t \in \mathbb{R}_+$ arbitrario. Probaremos que:

$$\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad b \geq a > N. \tag{3.9}$$

Revisemos las posibilidades:

Si $N < a \leq b \leq \frac{1}{t}$, por (3.8),

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(tx)\,dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)\operatorname{sen}(tx)|\,dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)|\,|tx|\,dx \\ &= t\int_a^b x\,|f(x)|\,dx \\ &\leq \frac{1}{1/t}\int_0^{1/t} x\,|f(x)|\,dx \\ &< \varepsilon'.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Si $N < \frac{1}{t} \leq a \leq b$, integrando por partes y por (3.6) y (3.7) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx\right| &= \left|\left[-f(x)\ \frac{\cos(tx)}{t}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\ \frac{\cos(tx)}{t}\,dx\right| \\
&\leq \left|-f(b)\ \frac{\cos(tb)}{t}\right| + \left|f(a)\ \frac{\cos(ta)}{t}\right| + \left|\int_a^b f'(x)\ \frac{\cos(tx)}{t}\,dx\right| \\
&\leq |f(a)|\left|\frac{\cos(ta)}{t}\right| + |f(b)|\left|\frac{\cos(tb)}{t}\right| + \int_a^b |f'(x)|\left|\frac{\cos(tx)}{t}\right|\,dx \\
&\leq \frac{1}{t}\,|f(a)| + \frac{1}{t}\,|f(b)| + \frac{1}{t}\int_a^b |f'(x)|\ dx \\
&< a\,|f(a)| + b\,|f(b)| + a\int_a^\infty |f'(x)|\ dx \\
&< \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' \\
&= 3\varepsilon'.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Si $N < a \leq \frac{1}{t} \leq b$, por (3.10) y (3.11),

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^{1/t} f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx\right| + \left|\int_{1/t}^b f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx\right| \\
&< \varepsilon' + 3\varepsilon' \\
&< 4\varepsilon'.
\end{aligned}
$$

Con esto queda probado (3.9). Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$
J_b(t) = \int_b^{2b} f(x)\,\mathrm{sen}(tx)\,dx \to 0 \ \text{ cuando } \ b \to \infty,
$$

uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$. Notemos que:

$$
\sup_{b \geq \beta(a)} \left(\sup_t \left(J_b(t)\right)\right) \to 0 \ \text{ cuando } \ a \to \infty.
$$

Para $b > 0$, definimos $t_b = \frac{\pi}{4b}$.

Si $b \leq x \leq 2b$, entonces $\frac{\pi}{4} \leq t_b x \leq \frac{\pi}{2}$. Como la función seno es positiva y creciente en el intervalo

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ y considerando I_a como en (3.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot I_{\beta(a)} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \, dx \right) \\
&= \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \, dx \right) \\
&\leq \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\int_b^{2b} f(x) \operatorname{sen}\left(t_b x\right) \, dx \right) \\
&\leq \sup_{b \geq \beta(a)} \left(\sup_t \left(J_b(t)\right) \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I_{\beta(a)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty.$$

Por (3.3) de la prueba del Teorema 3.16 sabemos que:

$$a\,|f(a)| \leq (C+1) I_{\beta(a)}.$$

De las dos últimas afirmaciones concluimos que:

$$a\,|f(a)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad a \to \infty. \blacksquare$$

El corolario siguiente es consecuencia del teorema previo y el Teorema 3.14.

Corolario 3.20. *Sea $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$ tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $xf(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Por el Teorema 3.14 sabemos que $SBVF(\mathbb{R}_+) \subset SBVF_2(\mathbb{R}_+)$. Dado que $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$, entonces $f \in SBVF_2(\mathbb{R}_+)$. Por el Teorema 3.19, obtenemos las afirmaciones (1) y (2) de este corolario. $\blacksquare$

Finalizamos este trabajo con un resultado que se deduce del corolario anterior y el Teorema 3.12. Éste generaliza al Corolario 3.6 que involucra a la *derivada formal respecto de t* de $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$.

Corolario 3.21. *Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$ tal que $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$.*

(1) Si $x^{2n+1} f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces la $2n-$ésima derivada formal respecto de t de $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Recíprocamente, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\int_0^\infty x^{2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, entonces $x^{2n+1} f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Si $n = 0$, el corolario se transforma en el Corolario 3.20. Si $n \in \mathbb{N}$, dado que $f \in SBVF(\mathbb{R}_+)$, por el Teorema 3.12, $g_{2n} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definida como $g_{2n}(x) = x^{2n} f(x)$ pertenece a $SBVF(\mathbb{R}_+)$. Como $xf \in L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, por el Teorema 1.21,también $x^{2n+1} f = xg_{2n} \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la $2n-$ésima derivada formal respecto de t de $\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$ es

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx.$$

Por hipótesis $x^{2n+1} f(x) = xg_{2n}(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces por el Corolario 3.20 (1),

$$\int_0^\infty g_{2n}(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx = \int_0^\infty x^{2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

De lo anterior deducimos que:

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$.

(2) Como $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$, entonces $g_{2n}(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$. Puesto que

$$\int_0^\infty x^{2n} f(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx = \int_0^\infty g_{2n}(x) \operatorname{sen}(tx)\, dx$$

converge uniformemente con respecto a $t \in \mathbb{R}_+$, por el Corolario 3.20 (2),

$$xg_{2n}(x) = x^{2n+1} f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty. \blacksquare$$

Conclusiones

El objetivo fundamental de esta tesis era buscar bajo qué condiciones la Transformada seno de Fourier, para una función medible en el sentido de Lebesgue, converge uniformemente. Las condiciones halladas son precisamente las dadas en las definiciones de los espacios $MVBVF(\mathbb{R}_+)$, $SBVF(\mathbb{R}_+)$ y $SBVF_2(\mathbb{R}_+)$, complementadas por las hipótesis del Teorema 3.4.

Durante el estudio, decidimos ampliar los objetivos con el fin de realizar una analogía del caso continuo con el discreto. Por ello, también buscamos condiciones para que la serie seno presente convergencia uniforme. En este caso, las condiciones son las proporcionadas en las definiciones de las clases $MVBVS$, $SBVS$ y $SBVS_2$, añadiendo las hipótesis del Teorema 2.5.

Los resultados presentados en esta tesis no son propios. El Capítulo 2 se basa en [7] y el Capítulo 3 se fundamenta en [6], ambos artículos de P. Kórus. Nuestra aportación consiste en presentar los conceptos y resultados preliminares, el desarrollo de las pruebas con mayor detalle y, la organización y diseño del trabajo.

El estudio realizado despierta inquietudes que nos muestran el panorama sobre las posibles líneas futuras. Las aplicaciones, el comportamiento algebraico de los elementos de las clases y espacios estudiados, la relación con otros resultados conocidos, son ejemplo de cuestiones a resolver.

Bibliografía

[1] M. Y. Antimirov, A. A. Kolyshkin, R. Vaillantcourt, *Applied Integral Transforms*, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, USA, 1993.

[2] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, New York, 2000.

[3] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela, M. Raja, *Análisis Funcional*, Ediciones Electolibris - Real Sociedad Matemática Española, 2012.

[4] T. W. Chaundry, A. E. Jolliffe, *The uniform convergence of a certain class of trigonometric series*, Proc. London Math. Soc., **15** (1916), 214-216.

[5] M. Dyachenko, E. Liflyand, S. Tikhonov, *Uniform convergence and integrability of Fourier integrals*, J. Math. Anal. Appl., **372** (2010), 328-338.

[6] P. Kórus, *On the uniform convergence of special sine integrals*, Acta Math. Hungar., **133 (1-2)** (2011), 82-91.

[7] P. Kórus, *Remarks on the uniform and L^1-convergence of trigonometric series*, Acta Math. Hungar., **128 (4)** (2010), 369-380.

[8] F. J. Mendoza, M. G. Morales, *On the convolution theorem for the Fourier Transform of BV_0 Functions*, Journal of Classical Analysis, **1 (7)** (2015), 63-71.

[9] F. Móricz, *On the uniform convergence of sine integrals*, J. Math. Anal. Appl., **354** (2009), 213-219.

[10] I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.

[11] S. Tikhonov, *On L_1-convergence of Fourier series*, J. Math. Anal. Appl., **347** (2008), 416-427.

[12] D. S. Yu, S. P. Zhou, *A generalization of monotonicity condition and applications*, Acta Math. Hungar., **115** (2007), 247-267.

[13] S. P. Zhou, P. Zhou, D. S. Yu, *Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series*, Science China Mathematics, **53 (7)** (2010), 1853-1862.

Índice alfabético

$AC\big([a,b]\big)$, 12
$AC_{loc}(I)$, 12
$L\big([a,b]\big)$, 16
$L_{loc}(\mathbb{R}_+)$, 17
$L_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+})$, 17
$L_{loc}(I)$, 16
$MVBVF(\mathbb{R}_+)$, 50
$MVBVS$, 23
$SBVF(\mathbb{R}_+)$, 56
$SBVF_2(\mathbb{R}_+)$, 62
$SBVS$, 31
$SBVS_2$, 36
Δa_n, 24
$\blacksquare$, 11
$\mathbb{C}$, 11
$\mathbb{N}$, 11
$\mathbb{R}$, 11
$\mathbb{R}_+$, 10
$\mathbb{Z}$, 11
$\overline{\mathbb{R}_+}$, 16
$\square$, 11

derivada formal
  de la serie seno, 28
  de la Transformada seno de Fourier, 54

función
  absolutamente continua, 12
  absolutamente continua localmente, 12
  creciente, 11
  Lebesgue integrable, 16
  Lebesgue integrable localmente, 16
  no creciente, 11
  parte entera, 11
  que tiende monótonamente a infinito, 12

integral formal
  de la serie seno, 29
  de la Transformada seno de Fourier, 55

serie seno, 23
sucesión
  creciente, 11
  no creciente, 11
  que tiende monótonamente a infinito, 11

Teorema Fundamental del Cálculo, 17
Transformada
  coseno de Fourier, 9
  de Fourier, 9
  seno de Fourier, 9