Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

EL ZOCLO Y RETÍCULAS DE TORSIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JESÚS OMAR PÉREZ VALENCIA

DIRECTOR DE TESIS
DR. CÉSAR CEJUDO CASTILLA

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 2019

A mis padres
Leonor y Benjamín

A mi hermana
Elizabeth

Agradecimientos

Las palabras son insuficientes para describir el profundo agradecimiento que le tengo a mis padres, Leonor y Benjamín; y a mi hermana, Elizabeth, por el apoyo incondicional, el amor y la paciencia que han tenido a lo largo de mi vida, agradezco que siempre han estado a mi lado en toda situación, me han dado ánimos, consejos invaluables, han creído en mí y que, a pesar de las carencias, constantemente se han esforzado para darme todo cuanto he necesitado. Aprendo cada día que estar con mi familia es la fortaleza de mi vida, por todo lo que me han dado, por todo lo que me otorgarán, por su amor incondicional, muchas pero muchas gracias.

A mi director de tesis, el Dr. César Cejudo Castilla, quien aún sin conocerme, ya que no tuve el privilegio de tomar algún curso con él durante la licenciatura, aceptó asesorarme para realización la de este trabajo. Por el apoyo, las constantes enseñanzas, por su tolerancia y paciencia; y por su tiempo. Muchas gracias.

A mis amigos de FCFM y mis amigos de la FCC, por esas tardes de videojuegos y de risas interminables, realmente hicieron que mi estadía en la universidad fuera de lo más divertida. A los profesores que contribuyeron en mi formación académica y que me inspiraron a mejorar. A la universidad que siempre tiene las puertas abiertas para el conocimiento y que me ha permitido adoptarla como hogar.

A los doctores: Iván Fernando Vilchis Montalvo, Carlos Alberto López Andrade y Mauricio Gabriel Medina Bárcenas, por tomarse el tiempo para revisar esta tesis, hacer observaciones, dar sugerencias y hacer la crítica necesaria para mejorarla significativamente.

Introducción

En la primera mitad del siglo XIX, el intento de George Boole por la formalización de la lógica proposicional condujo al concepto de álgebras booleanas. Por otro lado, Charles S. Peirce y Ernst Schroder encontraron a este concepto útil para introducir el concepto de *retícula*. Independientemente, la investigación de Richard Dedekind en ideales de números algebraicos condujo al mismo concepto. De hecho, Dedekind también introdujo la *modularidad* (para ideales), una forma debilitada de *distributividad*. Aunque algunos de los primeros resultados de estos matemáticos y de Edward V. Huntington son muy elegantes y lejos de ser triviales, no lograron atraer la atención de la comunidad matemática.

Fue el trabajo de Garrett Birkhoff a mediados de los años treinta lo que inició el desarrollo de la teoría de retículas. Desde la publicación de su primer artículo sobre retículas, *On the Combination of Subalgebras*, en 1933, Birkhoff demostró la importancia de esta teoría y mostró que proporciona un marco unificador entre disciplinas de la matemática aparentemente no relacionadas. El propio Birkhoff, Valere Glivenko, Karl Menger, John von Neumann, Oystein Ore y otros habían desarrollado lo suficiente en este nuevo campo para que Birkhoff intentara presentarlo a la comunidad matemática, lo que hizo con un éxito asombroso en la primera edición de su *Lattice Theory* (1940).

Históricamente, la teoría de retículas comenzó con las retículas distributivas (booleanas); como resultado, la teoría de retículas distributivas es el capítulo más extenso y satisfactorio en la historia de la teoría de retículas, mismas que han proporcionado la motivación para muchos resultados de la teoría general de retículas. Muchas condiciones sobre retículas, sobre elementos e ideales de retículas son formas "debilitadas" de distributividad. Por lo tanto, un conocimiento profundo sobre retículas distributivas es indispensable para el trabajo en teoría de retículas. Además, en muchas aplicaciones se impone la condición de distributividad sobre las retículas que surgen en varias áreas de la matemática, especialmente el álgebra.

Posteriormente a Dedekind, Emmy Noether y Emil Artin generalizaron algunos teoremas de descomposición y estructura de anillos para aquéllos que satisficieran las condiciones abstractas de cadena ascendente y descendente, respectivamente. Con todo esto, el estudio de las retículas, por parte de los algebristas, se hizo cada vez más frecuente sobretodo a partir de 1970, como lo afirma Grigore Călugăreanu, cuando se volvió cada vez más habitual, para cada libro de teoría de módulos, enunciar y demostrar algunas generalizaciones de retículas (en su mayoría modulares). Esto era justificado por la percepción, hoy en día ampliamente aceptada, de que la estructura de un módulo sobre un anillo se entiende mejor en términos de la estructura reticular que forman sus submódulos, más aún, algunos resultados de la teoría de módulos se pueden probar usando únicamente la teoría de retículas.

Por ejemplo, el Teorema de Jordan-Hölder, análogamente el Teorema Fundamental de la Aritmética, establece la unicidad, en cierta forma, de descomponer un grupo en grupos simples indescomponibles. Tanto el enunciado del teorema como el tratamiento de su demostración y los principales conceptos involucrados, como el de serie de composición, hablan de propiedades de la retícula de submódulos, grupos, etc. y no propiamente de propiedades de las operaciones algebraicas del objeto en cuestión.

Las retículas, aunque pueden ser estudiadas por sí solas, tienen una aplicación fundamental en el estudio de las estructuras algebraicas, ya que proporcionan información de su estructura interna y además brindan otro enfoque en el estudio de la mismas. En general a cada retícula se le puede asociar una subestructura a la que llamaremos *zoclo*, que cuando no es trivial, nos permite entender a la retícula en términos de cadenas cuyos eslabones abarcan a todos los *átomos* intermedios.

El objetivo principal del presente trabajo se centra justamente en describir esta subestructura, dar algunas de sus propiedades y aplicaciones, para posteriormente definir las llamadas *retículas de torsión* dar algunas de sus propiedades elementales, además de ciertas condiciones necesarias y suficientes para que una retícula tenga torsión y con ello mostrar la gran utilidad de entender los aspectos puramente reticulares envueltos en el estudio de las estructuras algebraicas en general, a través de resultados clásicos y ejemplos. Con este fin en el capítulo 1 abordamos las nociones de *conjuntos parcialmente ordenados* y *morfismos de orden*, además de dar algunas propiedades de éstos. Introducimos las definiciones de retícula, retícula *completa*, *modular*, *distributiva* y *continua superiormente*, además de dar ejemplos y demostrar algunas propiedades que serán de utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores. En el capítulo 2, se introduce la definición de retícula *compactamente generada*, se habla sobre *series de composición* y acerca de elementos especiales en algunas retículas particulares, entre otras cosas, se prueba que toda retícula compactamente generada es continua superiormente. Finalmente en el capítulo 3, abordamos la noción de zoclo y mostraremos algunas de sus propiedades elementales para posteriormente definir cuando una retícula tiene torsión y dar algunas condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Mientras que las propiedades aritméticas del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, pueden ser expresadas en términos de la adición y la multiplicación, las propiedades de orden; y por tanto las propiedades topológicas, pueden ser expresadas en términos de la relación de orden, $\leq$. Existen además muchos otros ejemplos de relaciones binarias que satisfacen las mismas propiedades que la relación de orden en $\mathbb{R}$, más aún, numerosos resultados que se satisfacen en $\mathbb{R}$, pueden ser probados para todas aquellas relaciones binarias que satisfacen las mismas propiedades que la relación de orden en el conjunto de números reales.

Como hemos mencionado en la introducción, existe una conexión íntima entre los conjuntos parcialmente ordenados y los conjuntos con operaciones binarias dada mediante la asociación a un objeto algebraico de su retícula de subobjetos, la cual nos da información sobre propiedades del objeto mismo. En este capítulo desarrollamos los conceptos y herramienas básicos de la teoría de conjuntos parcialmente ordenados y retículas, en particular de las modulares, que son de gran interés para el Álgebra.

1.1. Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definición 1.1.1. *Un sistema* $(A_1, \ldots, A_n; R)$ *con* A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *conjuntos arbitrarios y* $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ *es llamado* ***relación*** n***-aria*** *entre los elementos de* $A_1, \ldots, A_n$. *Si* $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ *el sistema* $(A, \ldots, A; R)$ *se llama* ***homogéneo****, cuando* $n = 2$ *se llama* ***relación binaria****.*

Definición 1.1.2. *Una relación binaria* $(A, A; R)$ *se llama:*
(R) ***Reflexiva*** *si para todo* $a \in A$ *se cumple que* $(a, a) \in R$*.*
(T) ***Transitiva*** *si para todo* $a, b, c \in A$*,* $(a, b), (b, c) \in R$*, implica* $(a, c) \in R$*.*
(A) ***Antisimétrica*** *si para todo* $a, b \in A$*,* $(a, b), (b, a) \in R$*, implica* $a = b$*.*

Definición 1.1.3. *Un* ***preorden*** *o* ***relación de preorden*** *es una relación binaria que satisface* (R) *y* (T)*. Una* ***relación de orden parcial*** *es un preorden que satisface* (A)*.*

Observación 1.1.4. *Dada una relación binaria* $(A, A; R)$ *podemos definir una nueva relación binaria,* $(A, A; R^{-1})$ *donde* $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$*, a la que llamamos relación binaria* ***inversa****. Además, si* $(A, A; R)$ *es una relación de orden parcial, entonces* $(A, A; R^{-1})$ *es relación de orden parcial.*

En efecto, sean $a, b, c \in A$. Es claro que $(a, a) \in R^{-1}$, por lo que $(A, A; R^{-1})$ satisface (R). Si $(a, b), (b, c) \in R^{-1}$ entonces $(b, a), (c, b) \in R$, como R es transitiva $(c, a) \in R$ y por lo tanto $(a, c) \in R^{-1}$, así que $(A, A; R^{-1})$ satisface (T). Finalmente, si $(a, b), (b, a) \in R^{-1}$ entonces $(b, a), (a, b) \in R$, como R es antisimétrica $a = b$ y por lo tanto $(A, A; R^{-1})$ satisface (A).

Notación 1.1.5. *Si* $(A, A; R)$ *es una relación de orden parcial, denotaremos mediante el símbolo "*$\leq$*" al conjunto* $R \subseteq A \times A$*, además escribiremos "*$a \leq b$*" en lugar de* $(a, b) \in R$*. Al conjunto* $R^{-1} \subseteq A \times A$ *de la relación inversa lo denotamos por "*$\geq$*" y escribimos "*$a \geq b$*" en lugar de* $(a, b) \in R^{-1}$*.*

Definición 1.1.6. *Si* X *es un conjunto donde está definida una relación de orden parcial* $(X, X; \leq)$*, entonces diremos que* $(X, \leq)$ *o simplemente* X *es un* ***conjunto parcialmente ordenado*** $(COPO)$*.*

En el presente escrito los COPOS serán no vacíos, salvo que indiquemos lo contrario. Note que dado un COPO $(X, \leq)$, podemos escribir las propiedades (R), (T) y (A) de la siguiente forma:

(R) Para todo $a \in X$ se cumple que $a \leq a$.

(T) Para todo $a, b, c \in X$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

(A) Para todo $a, b \in X$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Si $a \leq b$ decimos que a ***es menor o igual que*** b, note además que $a \leq b$ equivale a $b \geq a$. Si $b \geq a$ decimos que b ***es mayor o igual que*** a.

Notación 1.1.7. *En lo sucesivo,* $\mathbb{N}^*$ *denotará al conjunto de números enteros positivos, es decir,* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

Ejemplo 1.1.8.

(1) *Dado un conjunto* X*, el conjunto potencia de* X*,* $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$*, ordenado por contención es un COPO.*

(2) $(\mathbb{N}, \leq)$ *es un COPO, donde* $\leq$ *es el orden usual.*

(3) $(\mathbb{N}^*, |)$ *es un COPO, donde "*$|$*" es la relación "divide a".*

(4) *Dado un grupo* G *denotaremos por* $Sub(G)$ *al conjunto de todos los subgrupos de* G*. El conjunto* $Sub(G)$ *ordenado por contención es un COPO.*

(5) *Dados* R *un anillo con uno y* M *un* R*-módulo izquierdo, denotaremos por* $S_R(M)$ *al conjunto de todos los submódulos izquierdos de* M*. El conjunto* $S_R(M)$ *ordenado por contención es un COPO.*

(6) $(\mathbb{Z} - \{0\}, |)$ *claramente satisface (R) y (T), sin embargo no satisface (A) ya que* $3, -3 \in \mathbb{Z} - \{0\}$*,* $3 | -3$ *y* $-3|3$ *pero* $3 \neq -3$*, así que* $(\mathbb{Z} - \{0\}, |)$ *es un conjunto preordenado, pero* $(\mathbb{Z} - \{0\}, |)$ *no es un conjunto parcialmente ordenado.*

Definición 1.1.9. *Sean* $(A, \leq)$ *un COPO y* $B \subseteq A$*. Entonces* B *es llamado* ***subconjunto parcialmente ordenado de*** A *si* B *está ordenado parcialmente por restricción de la relación* $\leq$*, esto es, para cualesquiera* $a, b \in B$*,* $a \leq_B b$ *si y sólo si* $a \leq_A b$*.*

Definición 1.1.10. *En un COPO decimos que dos nociones o propiedades son* ***duales*** *si una se obtiene a partir de la otra mediante la permutación de la relación dada, por su relación inversa. El término* ***autodual*** *se define para aquellas nociones o propiedades que no presentan cambios luego de hacer dichas permutaciones.*

Definición 1.1.11. *Sea* $(A, \leq)$ *un COPO.*

(1) $a, b \in A$ *son llamados* ***comparables*** *si* $a \leq b$ *o bien* $b \leq a$*. En caso contrario diremos que* a *y* b *son* ***incomparables*** *y esto se denota por* $a \parallel b$*.*

(2) $C \subseteq A$ *es un* ***conjunto totalmente ordenado*** *o* ***cadena*** *si cualesquiera dos de sus elementos son comparables.*

Ejemplo 1.1.12.

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$ *es claramente una cadena.*

(2) $(\mathbb{N}^*, |)$ *es un COPO pero no una cadena ya que* $3, 5 \in \mathbb{N}$*,* $3 \nmid 5$ *y* $5 \nmid 3$*, es decir,* $3 \parallel 5$.

Definición 1.1.13. *Sean* $(A, \leq)$ *un COPO,* $X \subseteq A$ *y* $m \in X$*.*

(1) m *se llama* ***elemento mayor*** *de* X*, si* $x \leq m$ *para cada* $x \in X$*.*

(2) m *se llama* ***máximo*** *en* X *si para cada* $x \in X$*,* $m \leq x$ *implica* $m = x$*.*

De manera dual obtenemos las nociones de ***elemento menor*** *y* ***mínimo****.*

Observación 1.1.14.

(1) Todo elemento mayor es máximo.

(2) No todo máximo es elemento mayor.

En efecto, para mostrar (1) considere al COPO $(A, \leq)$, sean $X \subseteq A$, $m \in X$ un elemento mayor de X y $x \in X$ tal que $m \leq x$, como m es elemento mayor de X se cumple que $x \leq m$ entonces, por antisimetría, se tiene $m = x$, por lo tanto m es elemento máximo en X. Para mostar (2) considere $N = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ordenado por contensión, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{n\}$ es máximo en N ya que si $\{m\} \in N$ es tal que $\{n\} \subseteq \{m\}$, entonces $m = n$, es decir, $\{m\} = \{n\}$. Sin embargo, si $k \neq n$, entonces $\{k\} \nsubseteq \{n\}$ lo cual nos dice que $\{n\}$ no es elemento mayor.

Observación 1.1.15. *Si un elemento mayor existe es único. Dualmente: Si el elemento menor existe es único.*

En efecto, sean $(A, \leq)$ un COPO y $X \subseteq A$. Supongamos que m_1 y m_2 son elementos mayores de X, como m_1 es elemento mayor, se cumple que $m_2 \leq m_1$, además m_2 es elemento mayor, así que $m_1 \leq m_2$ luego, por la propiedad antisimétrica, $m_1 = m_2$.

Ejemplo 1.1.16. *Consideremos* $A = S_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) - \{\{0\}, \mathbb{Z}\}$ *ordenado por contensión. Si* $p \in \mathbb{N}$ *es primo, entonces* $p\mathbb{Z}$ *es máximo en* $(A, \subseteq)$*.*

En efecto, supongamos que $p \in \mathbb{N}$ es primo. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\mathbb{Z} \in A$ y $p\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, entonces $n|p$ por lo que $n = 1$ o bien $n = p$, como $n\mathbb{Z} \in A$ se tiene que $n \neq 1$ y por tanto $n = p$, así que $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ por lo tanto $p\mathbb{Z}$ es elemento máximo en $(A, \subseteq)$. Note que $p\mathbb{Z}$ es máximo en $(A), \subseteq)$ pero no es elemento mayor, además este ejemplo nos muestra que los elementos máximos no necesariamente son únicos.

Definición 1.1.17. *Sean $(A, \leq)$ un COPO y $X \subseteq A$. Un elemento $a \in A$ se llama **cota superior** de X si para cada $x \in X$ se cumple que $x \leq a$. Dualmente definimos **cota inferior** de X.*

Definición 1.1.18. *Sean $(A, \leq)$ un COPO y $X \subseteq A$. Un elemento $a \in A$ se llama **supremo** o **yunta** de X si a es el elemento menor del conjunto de todas las cotas superiores de X. Al supremo del conjunto X lo denotaremos por $\bigvee X$ o sup X. Dualmente definimos al **ínfimo** o **cuña** de X al cual denotaremos por $\bigwedge X$ o ínf X.*

Observación 1.1.19. *De 1.1.15 obtenemos que si un supremo existe, éste es único. Dualmente, si un ínfimo existe es único*

Notación 1.1.20. *Si $(A, \leq)$ es un COPO y $X = \{x_i\}_{i \in I} \subseteq A$ es una familia de elementos de A usaremos $\bigvee_{i \in I} x_i$, $\bigvee_{x \in X} x$ o simplemente $\bigvee x_i$ para denotar al supremo de X. Análogamente para el ínfimo. En particular, si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ al supremo y al ínfimo de X lo denotaremos por $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ y $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$, respectivamente.*

Definición 1.1.21. *Todo COPO con la propiedad de que cada uno de sus subconjuntos no vacíos tiene al menos un elemento máximo se llama **neteriano**. Dualmente, un COPO en el que todo subconjunto no vacío tiene al menos un elemento mínimo se llama **artiniano**.*

Definición 1.1.22. *Un COPO A se llama **bien ordenado** si es artiniano y totalmente ordenado.*

En el presente escrito se asume el Axioma de Elección y por tanto todas sus equivalencias. El Axioma de Elección garantiza que podemos "elegir" un elemento de cada conjunto de una familia arbitraria de conjuntos no vacíos, con el fin de precisar lo anterior recordemos que dado un conjunto A una ***función selectora*** de A es una función $f : \mathcal{P}'(A) \longrightarrow A$ tal que para cada $B \in \mathcal{P}'(A)$ se cumple que $f(B) \in B$, donde $\mathcal{P}'(A) = \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$.

Axioma de Elección : *Todo conjunto no vacío tiene una función selectora.*

Algunas equivalencias del Axioma de Elección son:

Lema de Zorn : *Si toda cadena C en un COPO no vacío A tiene cota superior en A, entonces A tiene al menos un elemento máximo.*

Principio de Hausdorff : *Toda cadena en un COPO A, se puede extender a una cadena máxima en A.*

Teorema de Zermelo : *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Definición 1.1.23. *Diremos que un COPO A satisface la **condición de la cadena ascendente**, para abreviar (CCA) (respectivamente, **descendente** (CCD)) si para toda familia $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$ tal que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ (respectivamente, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$), existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_k = a_{k+1} = \cdots$, es decir, la sucesión es estacionaria.*

Notación 1.1.24. *En un COPO $(A,\leq)$, si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$ y $a \neq b$ entonces diremos que a es **menor** que b o bien que b es **mayor** que a, este hecho lo denotaremos por $a < b$ o bien $b > a$.*

Teorema 1.1.25. *Un COPO $(A,\leq)$ es neteriano (respectivamente, artiniano) si y sólo si $(A,\leq)$ satisface CCA (respectivamente, CCD).*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$ tal que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$, como $(A,\leq)$ es neteriano, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que a_k es elemento máximo en $\in \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$, claramente la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ se estaciona en a_k.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $(A,\leq)$ satisface CCA. Sea $B \subseteq A$ con $B \neq \varnothing$. Haciendo uso del Axioma de Elección escogemos $a_1 \in B$, si a_1 es elemento máximo en B terminamos, en otro caso $B_1 = \{b \in B \mid a_1 < b\}$ no es vacío y por tanto podemos escoger $a_2 \in B_1$, si a_2 es máximo en B terminamos, en otro caso $B_2 = \{b \in B \mid a_2 < b\}$ no es vacío, continuando este proceso se construye una sucesión $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ que no es estacionaria, lo cual contradice que $(A \leq)$ satisface CCA, a menos que encontremos un elemento máximo en B. Dualmente para el caso artiniano. $\square$

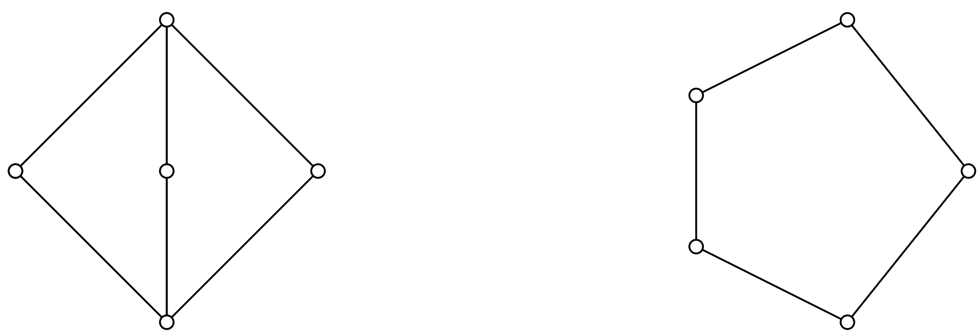
Definición 1.1.26. *Sean $(a, \leq)$ un COPO y $a, b \in A$. Si $a < b$ y no existe $c \in A$ tal que $a < c < b$, entonces diremos que a **es cubierto por** b o que b **cubre a** a, este hecho lo denotaremos por $a \prec b$.*

Notación 1.1.27. *Escribiremos $a \preceq b$ cuando $a \prec b$ o $a = b$.*

Muchos conjuntos parcialmente ordenados, sobre todo los finitos, pueden ser representados mediante gráficas a las que se les conoce como diagrama de Hasse, más precisamente tenemos:

Definición 1.1.28. *El **diagrama de Hasse** asociado a un COPO $(A, \leq)$ es una gráfica donde cada elemento en A es representado mediante un único círculo pequeño ($\circ$) y donde la relación $x \prec y$ es representada por una línea descendente que une a y con x.*

Ejemplo 1.1.29. *Los siguientes diagramas de Hasse representan órdenes distintos para un conjunto de 5 elementos.*



Observación 1.1.30. *En un diagrama de Hasse asociado a un COPO el hecho de que un círculo que representa a un elemento "x" esté "por debajo" de otro círculo que represente a un elemento "y" no garantiza que $x \leq y$, más aún, $x \| y$ a menos que exista una línea (o líneas) descendente que los una.*

Con el fin de precisar cuando dos conjuntos parcialmente ordenados poseen la misma estructura de orden introducimos la siguiente:

Definición 1.1.31. *Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : A \longrightarrow B$ una función.*

*(1) f se llama **morfismo de orden** si para cada $a, b \in A$, si $a \leq_A b$, entonces $f(a) \leq_B f(b)$.*

(2) *Si f es un morfismo de orden inyectivo, entonces f se llama* ***morfismo de orden estricto****.*

(3) *Si f es un morfismo de orden, entonces f se llama* ***isomorfismo de orden*** *si existe $g : B \longrightarrow A$ morfismo de orden tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$, donde I_A es el morfismo de orden identidad en A e I_B es el morfismo de orden identidad en B. En este caso diremos que A y B son* ***isomorfos****.*

Observación 1.1.32. *Un morfismo de orden biyectivo no necesariamente es un isomorfismo de orden.*

En efecto, consideremos a $(\mathbb{N}^*, \leq)$ y $(\mathbb{N}^*, |)$. Sea $f : (\mathbb{N}^*, |) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, \leq)$ definida por: $f(n) = n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Claramente f es biyectiva con inversa $f^{-1} : (\mathbb{N}^*, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, |)$ dada por: $f^{-1}(n) = n$, para toda $n \in \mathbb{N}^*$. Además, si $n|m$, entonces $f(n) = n \leq m = f(m)$ y por tanto f es morfismo de orden. Sin embargo $3, 5 \in \mathbb{N}$, $3 \leq 5$ y $f^{-1}(3) = 3 \nmid 5 = f^{-1}(5)$, es decir, f^{-1} no es morfismo de orden.

Observación 1.1.33. *Dos conjuntos finitos parcialmente ordenados son isomorfos si y sólo si son representados por el mismo diagrama de Hasse.*

1.2. Retículas

La teoría de retículas centra su estudio en una clase especial de conjuntos parcialmente ordenados, mismos que aparecen en distintas ramas de la matemática tales como el análisis, topología, lógica, álgebra y geometría. Por lo tanto un estudio general de esa clase de conjuntos parcialmente ordenados proporciona un marco unificador y conduce a un mejor entendimiento sobre el comportamiento de numerosos ejemplos que surgen en la matemática.

Definición 1.2.1. *Sea $(L, \leq)$ un COPO.*

(1) *Llamamos a L* ***retícula*** *si para cualesquiera $a, b \in L$ existen $a \wedge b$ y $a \vee b$.*

(2) *Llamamos a L* ***retícula completa*** *si para cualquier $X \subseteq L$ existen $\bigwedge X$ y $\bigvee X$.*

Observación 1.2.2. *Sean $(L, \leq)$ una retícula y $X \subseteq L$.*

(1) *Es evidente que para cada* $a, b \in L$, $a \wedge b = b \wedge a$ *y* $a \vee b = b \vee a$. *También es claro que para cada* $a \in L$ *se cumple que* $a \vee a = a = a \wedge a$.

(2) *Si* L *es completa no es necesario que* $\bigwedge X \in X$ *o que* $\bigvee X \in X$.

(3) *Podemos proceder inductivamente para ver que cualquier subconjunto finito de* L *tiene supremo e ínfimo.*

Ejemplo 1.2.3.

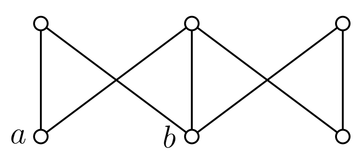
(1) *Si* X *es un conjunto, entonces* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ *es una retícula completa, donde para cualquier* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\bigvee_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$ *y* $\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$.

(2) $(\mathbb{N}, \leq)$ *es retícula pero no es completa pues no existe el supremo de* $\mathbb{N}$.

(3) *Si* G *es en grupo, entonces* $(Sub(G), \subseteq)$ *es una retícula completa, donde para cualquier* $\mathcal{A} = \{H_i\}_{i\in I} \subseteq Sub(G)$, $\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} H_i$ *y* $\bigvee \mathcal{A} = \langle \bigcup_{i\in I} H_i \rangle$.

(4) *Si* M *es un* R*-módulo izquierdo, entonces* $(S_R(M), \subseteq)$ *es una retícula completa, donde para cualquier* $\mathcal{A} = \{N_i\}_{i\in I} \subseteq S_R(M)$, $\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} N_i$ *y* $\bigvee \mathcal{A} = \sum_{i\in I} N_i$.

(5) *El COPO representado por el siguiente diagrama de Hasse no es una retícula pues no existe el supremo ni el ínfimo de* $\{a, b\}$.



Ejemplo 1.2.4. *Los conjuntos parcialmente ordenados representados por los siguientes diagramas de Hasse son retículas.*

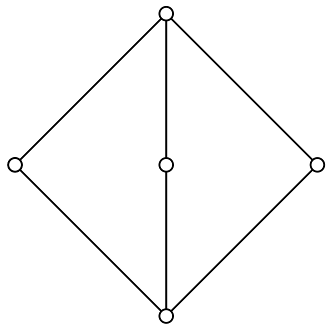


Figura 1

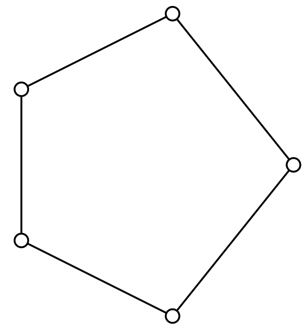


Figura 2

La retícula en la figura 1, es conocida como retícula ***diamante****. La retícula en la figura 2, es conocida como retícula* ***pentágono****.*

Lema 1.2.5. *Sean* $(L, \leq)$ *una retícula y* $a, b \in L$*. Son equivalentes:*

(1) $a \leq b$

(2) $a \wedge b = a$

(3) $a \vee b = b$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] $a \leq b$ y $a \leq a$ implican que a es cota inferior de $\{a, b\}$ y por tanto $a \leq a \wedge b$, por otro lado es claro que $a \wedge b \leq a$, así, por la propiedad antisimétrica, $a \wedge b = a$.
[(2) $\Rightarrow$ (3)] $a = a \wedge b \leq b$ y $b \leq b$ implican que b es cota superior de $\{a, b\}$ y por tanto $a \vee b \leq b$, por otro lado es claro que $b \leq a \vee b$, así, por la propiedad antisimétrica, $a \vee b = b$.
[(3) $\Rightarrow$ (1)] $a \vee b = b$ nos dice que b es el supremo de $\{a, b\}$ y por tanto $a \leq b$.
$\square$

Dada una retícula se puede definir un *álgebra universal* con dos operaciones binarias que satisfacen ciertas propiedades. Un ***álgebra universal*** es un par $\langle A; \{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \rangle$ donde A es un conjunto y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de ***operaciones*** n_α***-arias***, $n_\alpha \in \mathbb{N}$, es decir, $\{f_\alpha : A^{n_\alpha} \longrightarrow A\}_{\alpha \in I}$ es una familia de funciones. En particular, si $n_\alpha = 2$ la operación se llama ***binaria***. Recíprocamente, un álgebra universal $\langle A; \{\vee, \wedge\} \rangle$ con dos operaciones binarias que satisfacen ciertas propiedades define una retícula $(A, \leq)$. Así que se establece una "equivalencia" entre retículas y cierto tipo de álgebras universales.

Teorema 1.2.6.

*(1) Toda retícula $(A, \leq)$ define un álgebra universal $\langle A; \{\vee, \wedge\}\rangle$ con dos operaciones binarias asociativas, conmutativas y que satisfacen la **ley de absorción**: para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $(a \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee a = a$.*

(2) Toda álgebra universal $\langle A; \{\vee, \wedge\}\rangle$, con dos operaciones binarias asociativas, conmutativas y que satisfacen la ley de absorción, define una retícula $(A, \leq)$ cuyo orden parcial está dado como sigue: para toda $a, b \in A$, $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$. Además, ínf $\{a, b\} = a \wedge b$ y sup $\{a, b\} = a \vee b$.

Demostración. Demostración de (1): Suponga que $(A, \leq)$ es una retícula. Se definen: $\vee : A \times A \longrightarrow A$ por $\vee(a, b) = a \vee b = \sup\{a, b\}$, para toda $a, b \in A$; y $\wedge : A \times A \longrightarrow A$ por $\wedge(a, b) = a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}$, para toda $a, b \in A$. Como $(A, \leq)$ es retícula, siempre existe el supremo y el ínfimo de $\{a, b\}$, además la unicidad del supremo y el ínfimo garantiza que $\vee$ y $\wedge$ están bien definidas y por lo tanto son operaciones binarias, así $\langle A; \{\vee, \wedge\}\rangle$ es un álgebra universal. Claramente $\vee$ y $\wedge$ son conmutativas. Veamos que son asociativas y satisfacen la ley de absorción. Sean $a, b, c \in A$. Como $a \leq a \vee (b \vee c)$ y $b \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c)$ entonces $a \vee (b \vee c)$ es cota superior de $\{a, b\}$ y por lo tanto $a \vee b \leq a \vee (b \vee c)$, además $c \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c)$, así que $a \vee (b \vee c)$ también es cota superior de $\{a \vee b, c\}$ luego $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$. De forma análoga obtenemos $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$, concluimos por antisimetría que $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. Dualmente se obtiene que $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. Como $a \leq a \vee b$ entonces, por el Lema 1.2.5, $(a \vee b) \wedge a = a$, por otro lado $a \wedge b \leq a$, nuevamente gracias al Lema 1.2.5 $(a \wedge b) \vee a = a$.

Demostración de (2): Sea $\langle A; \{\vee, \wedge\}\rangle$ una álgebra universal, con dos operaciones binarias asociativas, conmutativas y que satisfacen la ley de absorción. Veamos que la relación dada por: $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$, para cualesquiera $a, b \in A$ es un orden parcial sobre A. Sean $a, b, c \in A$. Por la ley de absorción tenemos que $a = a \vee (a \wedge a)$, entonces $a \wedge a = a \wedge [a \vee (a \wedge a)] = a$, luego $a \wedge a = a$, es decir, $a \leq a$, se tiene (R). Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces, por definición de la relación, $a \wedge b = a$ y $b \wedge c = b$, luego por la propiedad asociativa,

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$$

(i. e., $a \wedge c = a$) y por lo tanto $a \leq c$, se tiene (T). Finalmente, si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces, por definición de la relación, $a \wedge b = a$ y $b \wedge a = b$, luego por la propiedad conmutativa $a = a \wedge b = b \wedge a = b$, se tiene (A). Por lo tanto $(A, \leq)$ es un COPO.

Veamos que ínf $\{a, b\} = a \wedge b$:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(asociatividad)}\\
&= a \wedge (a \wedge b) && \text{(conmutatividad)}\\
&= (a \wedge a) \wedge b && \text{(asociatividad)}\\
&= a \wedge b && (a \leq a, \text{ i.e., } a \wedge a = a)
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$, es decir, $a \wedge b \leq a$, analogamente obtenemos $a \wedge b \leq b$ y por lo tanto $a \wedge b$ es cota inferior de $\{a, b\}$. Sea c otra cota inferior de $\{a, b\}$, entonces $c \leq a$ y $c \leq b$, esto es, $c \wedge a = c$ y $c \wedge b = c$, luego

$$\begin{aligned}
c \wedge (a \wedge b) &= (c \wedge a) \wedge b && \text{(asociatividad)}\\
&= c \wedge b && (c \wedge a = c)\\
&= c
\end{aligned}$$

Así que $c \leq a \wedge b$ y por lo tanto $a \wedge b$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{a, b\}$.

Veamos que sup $\{a, b\} = a \vee b$:
Por la ley de absorción tenemos $a \wedge (a \vee b) = a$ y $b \wedge (a \vee b) = b$, esto es, $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, por lo tanto $a \vee b$ es cota superior de $\{a, b\}$. Sea c otra cota superior de $\{a, b\}$, entonces $a \leq c$ y $b \leq c$, es decir, $a \wedge c = a$ y $b \wedge c = b$ luego, por las leyes de absorción, $a \vee c = (a \wedge c) \vee c = c$ y $b \vee c = (b \wedge c) \vee c = c$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge c &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) && (a \vee c = c)\\
&= (a \vee b) \wedge [a \vee (b \vee c)] && (b \vee c = c)\\
&= (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c] && \text{(asociatividad)}\\
&= a \vee b && \text{(absorción)}
\end{aligned}$$

Así que $a \vee b \leq c$ y por lo tanto $a \vee b$ es la menor de las cotas superiores de $\{a, b\}$. □

De aquí en adelante trataremos indistintamente a las retículas como un COPO $(L, \leq)$ en el que cualesquiera dos de sus elementos tienen supremo e ínfimo o como el álgebra universal $\langle L; \{\vee, \wedge\} \rangle$ definida en el Teorema 1.2.6.

Lema 1.2.7. *Sean* $(L, \leq)$ *una retícula y* $a, b, c \in L$. *Entonces:*

(1) Si $b \leq c$ *entonces* $a \wedge b \leq a \wedge c$ *y* $a \vee b \leq a \vee c$.

(2) Si $a \leq b$ *y* $a \leq c$ *entonces* $a \leq b \wedge c$ *y* $a \leq b \vee c$.

(3) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

(4) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

(5) Si $a \leq c$ *entonces* $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Demostración. Sean $a, b, c \in L$. Demostración de (1): Si $b \leq c$ entonces, por Lema 1.2.5, $b \wedge c = b$, debido al mismo lema, basta mostrar que $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = a \wedge b$. Haciendo uso de las propiedades conmutativas, asociativas y el hecho de que $x \wedge x = x$ para toda $x \in L$, obtenemos $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = (a \wedge a) \wedge (b \wedge c) = a \wedge b$. Dualmente obtenemos que $a \vee b \leq a \vee c$. Demostración de (2): Si $a \leq b$ y $a \leq c$ entonces a es cota inferior de $\{b, c\}$ y por lo tanto $a \leq b \wedge c$. Además $a \leq b \leq b \vee c$. Demostración de (3): Como $a \leq a \vee b$ y $a \leq a \vee c$ entonces, por (2),

$$a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad (A)$$

por otro lado $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ y $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$, nuevamente por (2),

$$b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \qquad (B)$$

De (A) y (B) obtenemos que $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ es cota superior de $\{a, b \wedge c\}$ y por lo tanto $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. La demostración de (4) es dual a la demostración de (3). Demostración de (5): Si $a \leq c$ entonces, por Lema 1.2.5, $a \vee c = c$. Además, por (3), $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$. □

Teorema 1.2.8. *Un COPO* $(A, \leq)$ *es una retícula completa si y sólo si todo subconjunto de* A *tiene ínfimo.*

Demostración.
[⇒] Lo garantiza la definición de retícula completa.
[⇐] Solo resta mostrar que todo subconjunto de A tiene supremo. Sean $B \subseteq A$ y $C = \{a \in A \mid \text{ para toda } b \in B, b \leq a\}$. Por hipótesis existe ínf C. Sea $u =$ ínf C y veamos que $u =$ sup B. Note que dado $b \in B$ arbitrario se cumple que $b \leq c$ para cada $c \in C$ y por lo tanto $b \leq$ ínf $C = u$, es decir, u es cota superior de B. Sea $e \in A$ otra cota superior de B, entonces para toda $b \in B$, $b \leq e$, así que $e \in C$, luego $u =$ ínf $C \leq e$ y por lo tanto $u =$ sup B. □

Observación 1.2.9. *Dualmente obtenemos la siguiente caracterización de retículas completas: Un COPO* $(A, \leq)$ *es una retícula completa si y sólo si todo subconjunto de* A *tiene supremo.*

Notación 1.2.10. *Si* L *es una retícula completa existen* $\bigwedge L = \bigvee \varnothing$ *y* $\bigvee L = \bigwedge \varnothing$ *a los cuales denotaremos por 0 y 1, respectivamente.*

Observación 1.2.11. *Si* L *es retícula completa, entonces para toda* $a \in L$ *se cumplen:*

(1) $0 \leq a$ *y por lo tanto* $a \wedge 0 = 0$ *y* $a \vee 0 = a$.

(2) $a \leq 1$ *y por lo tanto* $a \wedge 1 = a$ *y* $a \vee 1 = 1$.

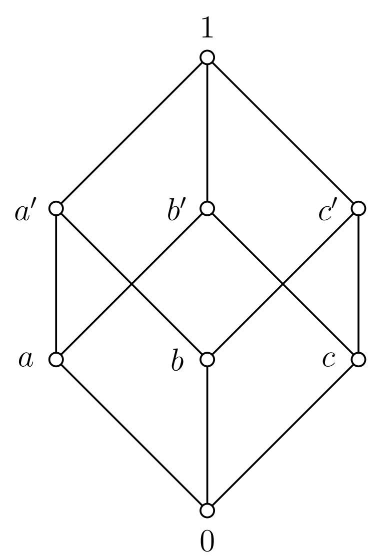
Definición 1.2.12. *Sean* $(L, \leq)$ *una retícula y* $B \subseteq L$.

(1) B *se llama* ***subretícula*** *de* L *si para toda* $a, b \in B$ *se tiene que* $a \wedge b \in B$ *y* $a \vee b \in B$.

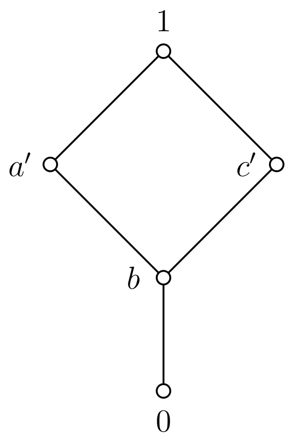
(2) Si $(L, \leq)$ *es completa,* B *se llama* ***subretícula completa*** *de* L *si para cualquier* $X \subseteq B$ *se tiene que* $\bigwedge X \in B$ *y* $\bigvee X \in B$.

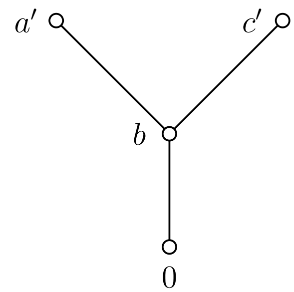
Ejemplo 1.2.13. *Si* G *es un grupo denotaremos por* $N(G)$ *al conjunto de todos los subgrupos normales de* G. *El conjunto* $N(G)$ *ordenado por contensión es subretícula completa de* $(Sub(G), \subseteq)$.

Ejemplo 1.2.14. *El COPO* $L = \{0, a, b, c, a', b', c', 1\}$ *representado por el siguiente diagrama de Hasse es una retícula.*



Tenemos, por ejemplo, que $\{0, b, a', c', 1\}$ *es subretícula de* L*, pero* $\{0, b, a', c'\}$ *no es subretícula de* L *pues* $a' \vee c' = 1$ *y* $1 \notin \{0, b, a', c'\}$*, esto se representa en los siguientes diagramas.*





Definición 1.2.15. *Sea* $(L \leq)$ *una retícula. El conjunto* $I \subseteq L$ *se llama* ***ideal*** *en* L *si para cualesquiera* $a, b, x \in L$ *se cumplen:*

(i) *si* $a \in I$ *y* $x \leq a$*, entonces* $x \in I$*.*

(ii) *si* $a, b \in I$*, entonces* $a \vee b \in I$*.*

Dualmente obtenemos la noción de ***filtro****:* $F \subseteq L$ *es un* ***filtro*** *en* L *si para cualesquiera* $a, b, x \in L$ *se cumplen:*

(i') *si* $a \in F$ *y* $a \leq x$*, entonces* $x \in F$*.*

(ii') *si* $a, b \in F$*, entonces* $a \wedge b \in F$*.*

Proposición 1.2.16. *Todo ideal en* L *es subretícula de* L*. (Dualmente: Todo filtro en* L *es subretícula de* L*).*

Demostración. Sean I un ideal en L y $a, b \in I$. De (ii) obtenemos que $a \vee b \in I$. Además, como $a \in I$ y $a \wedge b \leq a$ entonces, por (i), $a \wedge b \in I$. Por lo tanto I es subretícula de L. Dualmente obtenemos la demostración para filtros. $\square$

Observación 1.2.17. *Sea* L *una retícula. Si* $\{I_k\}_{k \in K}$ *es una familia de ideales en* L*, entonces* $\bigcap_{k \in K} I_k$ *es ideal en* L*.*

Observación 1.2.18. *La unión de ideales en una retícula no necesariamente es un ideal.*

En efecto, consideremos a la retícula dada en el Ejemplo 1.2.14, en esta retícula claramente $\{0, a, b, a'\}$ y $\{0, b, c, c'\}$ son ideales, pero $\{0, a, b, a'\} \cup \{0, b, c, c'\} = \{0, a, b, c, a', c'\}$ no es ideal ya que $a' \vee c' = 1 \notin \{0, a, b, c, a', c'\}$.

Definición 1.2.19. *Sean L una retícula y $X \subseteq L$. El* ***ideal generado*** *por X se define como:*

$$\bigcap \{I \subseteq L \mid \ I \text{ es ideal en } L, X \subseteq I\}$$

y se denotará por $(X]$.

Proposición 1.2.20. *Si $(L, \leq)$ es una retícula denotaremos por $I(L)$ al conjunto de todos los ideales en L. El conjunto $I(L)$ ordenado por contención es una retícula completa.*

Demostración. Sea $\{I_k\}_{k \in K} \subseteq I(L)$ una familia de ideales en L. Veamos que siempre existen $\bigwedge_{k \in K} I_k$ y $\bigvee_{k \in K} I_k$. No es dfícil ver que $\bigwedge_{k \in K} I_k = \bigcap_{k \in K} I_k$, veamos que $\bigvee_{k \in K} I_k = (\bigcup_{k \in K} I_k]$. Claramente $I_j \subseteq \bigcup_{k \in K} I_k \subseteq (\bigcup_{k \in K} I_k]$ para cada $j \in K$, así que $(\bigcup_{k \in K} I_k]$ es cota superior de $\{I_k\}_{k \in K}$. Ahora, sea $H \in I(L)$ otra cota superior de $\{I_k\}_{k \in K}$, esto es, para cada $j \in K$ se cumple que $I_j \subseteq H$, entonces $\bigcup_{k \in K} I_k \subseteq H$ luego, por definición de ideal generado, $(\bigcup_{k \in K} I_k] \subseteq H$. □

Proposición 1.2.21. *Si $(L, \leq)$ es una retícula completa y $a, b \in L$, con $a \leq b$, entonces $A = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ es subretícula completa de L.*

Demostración. Sea $X \subseteq A$. Veamos que $\bigwedge X \in A$ y $\bigvee X \in A$. Si $X \subseteq A$ entonces $x \leq b$ para toda $x \in X$, así que b es cota superior de X, luego $\bigvee X \leq b$. Por otro lado $a \leq x \leq \bigvee X$ para toda $x \in X$. Por lo tanto $a \leq \bigvee X \leq b$, es decir, $\bigvee X \in A$. De forma análoga obtenemos $a \leq \bigwedge X \leq b$, es decir, $\bigwedge X \in A$. □

La subretícula A en la Proposición 1.2.21 se llama ***subretícula cociente*** o ***intervalo*** de L y será denotada por b/a o bien $[a, b]$. Una prueba similar a la de la Proposición 1.2.21 muestra que si L es una retícula (no necesariamente completa) y $a, b \in L$ con $a \leq b$, entonces $A = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ es subretícula de L. En este caso la notación para A será la misma que la anteriormente dada y también será llamada cociente o intervalo de L. Utilizaremos $a/0$ para denotar a la retícula $\{x \in L \mid x \leq a\}$. En particular, si $a \prec b$, entonces $b/a = \{a, b\}$, en este caso el cociente será llamado ***simple***.

Para terminar la sección introduciremos la noción de función que preserva la estructura de retícula y demostraremos algunos resultados que involucran a estas funciones.

Definición 1.2.22. *Sean L y L' retículas. Sea $f : L \longrightarrow L'$ una función. Entonces:*

*(1) f se llama **morfismo de retículas** si para cualesquiera $a, b \in L$ se cumple que $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.*

*(2) Si f es morfismo de retículas, entonces f se llama **isomorfismo de retículas** si existe $g : L' \longrightarrow L$ morfismo de retículas tal que $g \circ f = I_L$ y $f \circ g = I_{L'}$.*

Notación 1.2.23. *Si $f : L \longrightarrow L'$ es un isomorfismo de retículas diremos que L y L' son **isomorfas** y escribiremos $L \cong L'$.*

Proposición 1.2.24. *Si $f : L \longrightarrow L'$ es morfismo de retículas, entonces f es morfismo de orden.*

Demostración. Veamos que f preserva el orden. Si $a, b \in L$ con $a \leq b$, entonces $a = a \wedge b$ luego, como f es morfismo de retículas, $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \leq f(b)$. $\square$

Observación 1.2.25. *El recíproco de la Proposición 1.2.24 en general es falso.*

En efecto, consideremos a la retícula $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ y $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por: $f(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } y \in A : y^2 = x\}$ para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Veamos que f es morfismo de orden. Sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con $A \subseteq B$. Si $x \in f(A)$, entonces existe $y \in A \subseteq B : y^2 = x$ así que existe $y \in B : y^2 = x$, es decir, $x \in f(B)$. Por lo tanto $f(A) \subseteq f(B)$. Sin embargo f no preserva cuñas. En efecto, si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{-1, 0\}$, entonces $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, por otro lado

$$f(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } y \in \{0, 1\} : y^2 = x\} = \{0, 1\}$$

y

$$f(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } y \in \{-1, 0\} : y^2 = x\} = \{0, 1\}.$$

Así que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Observación 1.2.26. *Sean L y L' retículas. Sea $f : L \longrightarrow L'$ una función. Entonces, f es isomorfismo de retículas si y sólo si f es biyectiva y f es un morfismo de retículas.*

Proposición 1.2.27. *Si L es una retícula, entonces $f : L \longrightarrow I(L)$, definida por $f(a) = a/0$, para cada $a \in L$, es un morfismo de retículas.*

Demostración. Primeramente veamos que $f(a) = a/0 \in I(L)$ para cada $a \in L$, es decir, f está bien definida. Sea $a \in L$, como $a/0$ es subretícula de L, para cualesquiera $x, y \in a/0$, $x \vee y \in a/0$. Por otro lado si $y \in a/0$ y $x \leq y$, entonces $x \leq y \leq a$ luego $x \in a/0$. Por lo tanto $a/0$ es ideal en L. Ahora veamos que f es morfismo de retículas, es decir, para cualesquiera $a, b \in L$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Por definición de f y de acuerdo a como están dados el ínfimo y el supremo en $I(L)$ debemos probar que $(a \wedge b)/0 = a/0 \cap b/0$ y $(a \vee b)/0 = (a/0 \cup b/0]$.

Veamos que $(a \wedge b)/0 = a/0 \cap b/0$: $x \in (a \wedge b)/0$ si y sólo si $x \leq a \wedge b$ si y sólo si $x \leq a$ y $x \leq b$ si y sólo si $x \in a/0 \cap b/0$.

Veamos que $(a \vee b)/0 = (a/0 \cup b/0]$: Vamos a mostrar que $(a \vee b)/0$ es el menor ideal (en el sentido de la contención) tal que $a/0 \cup b/0 \subseteq (a \vee b)/0$ lo cual garantiza que $(a \vee b)/0$ es el supremo de $\{a/0, b/0\}$ y por lo tanto $(a \vee b)/0 = (a/0 \cup b/0]$. (i) Sea $x \in a/0 \cup b/0$, entonces $x \leq a$ o $x \leq b$, en cualquier caso obtenemos $x \leq a \vee b$, así que $x \in (a \vee b)/0$. Por lo tanto $a/0 \cup b/0 \subseteq (a \vee b)/0$. (ii) Sea $K \in I(L)$ tal que $a/0 \cup b/0 \subseteq K$. Claramente $a \in K$ y $b \in K$ entonces, por ser K un ideal, $a \vee b \in K$. Ahora, si $x \in (a \vee b)/0$, entonces $x \leq a \vee b$ y $a \vee b \in K$ luego, como K es ideal, $x \in K$. Por lo tanto $(a \vee b)/0 \subseteq K$. De (i) y (ii) concluimos que $(a \vee b)/0 = (a/0 \cup b/0]$. $\square$

Observación 1.2.28. *Un razonamiento inductivo nos muestra que para cualquier conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq L$,*

$$(a_1/0) \wedge (a_2/0) \wedge \cdots \wedge (a_n/0) = (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)/0$$

y

$$(a_1/0) \vee (a_2/0) \vee \cdots \vee (a_n/0) = (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)/0.$$

Además es claro que $a/0 = (\{a\}]$.

Definición 1.2.29. *Si L es una retícula y $a \in L$. Entonces $a/0$ se llama ideal **principal**.*

Proposición 1.2.30. *Si $f : L \longrightarrow L'$ es un isomorfismo de retículas, entonces $f^{-1} : L' \longrightarrow L$ es un isomorfismo de retículas.*

Demostración. Claramente f^{-1} es biyectiva. Veamos que f^{-1} es morfismo de retículas. Sean $a', b' \in L'$, como f es biyectiva, existen $a, b \in L$ tales que $a' = f(a)$ y $b' = f(b)$. Entonces $f^{-1}(a' \vee b') = f^{-1}(f(a) \vee f(b)) = f^{-1}(f(a \vee b)) = a \vee b = f^{-1}(a') \vee f^{-1}(b')$. De forma análoga obtenemos $f^{-1}(a' \wedge b') = f^{-1}(a') \wedge f^{-1}(b')$. □

Proposición 1.2.31. *Una función $f : L \longrightarrow L'$ entre dos retículas es un isomorfismo de orden si y sólo si f es un isomorfismo de retículas.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Veamos que f preserva yuntas. Sean $a, b \in L$, es claro que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ entonces, por ser f morfismo de orden, $f(a) \leq f(a \vee b)$ y $f(b) \leq f(a \vee b)$, así que $f(a \vee b)$ es cota superior de $\{f(a), f(b)\}$. Sea $c' \in L'$ otra cota superior de $\{f(a), f(b)\}$, entonces $f(a) \leq c'$ y $f(b) \leq c'$. Como f es biyectiva existe $c \in L$ tal que $f(c) = c'$ y por tanto $f(a) \leq f(c)$ y $f(b) \leq f(c)$. Además, f^{-1} es morfismo de orden, luego $a \leq c$ y $b \leq c$ lo cual nos dice que c es cota superior de $\{a, b\}$ y por lo tanto $a \vee b \leq c$. Finalmente, gracias a que f preserva el orden, $f(a \vee b) \leq f(c) = c'$. Hemos probado que $f(a \vee b)$ es la menor de las cotas superiores de $\{f(a), f(b)\}$, esto es, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. De forma dual probamos que $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$.
[$\Leftarrow$] Es consecuencia de las proposiciones 1.2.30 y 1.2.24. □

1.3. Retículas Modulares

En esta sección introducimos un tipo particular de retículas: uno que abstrae una propiedad característica de algunas retículas de subestructuras algebraicas de especial interés, como la de submódulos izquierdos de un $R-$módulo izquierdo y la de subgrupos normales de un grupo. Las retículas modulares fueron introducidas por Dedekind.

Definición 1.3.1. *Una retícula L se llama **modular** si para cualesquiera $a, b, c \in L$, si $a \leq c$, entonces $(a \vee b) \wedge c \leq a \vee (b \wedge c)$.*

Observación 1.3.2. *Debido al Lema 1.2.7 (5) sabemos que en toda retícula* L*, para cualesquiera* $a, b, c \in L$*, si* $a \leq c$*, entonces* $(a \vee b) \wedge c \geq a \vee (b \wedge c)$*. Por lo tanto* L *es modular si y sólo si para cualesquiera* $a, b, c \in L$*, si* $a \leq c$*, entonces* $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$*. Para probar que una retícula es modular basta mostrar se cumple la desigualdad que exige la definición.*

Observación 1.3.3. *Toda subretícula de una retícula modular es modular.*

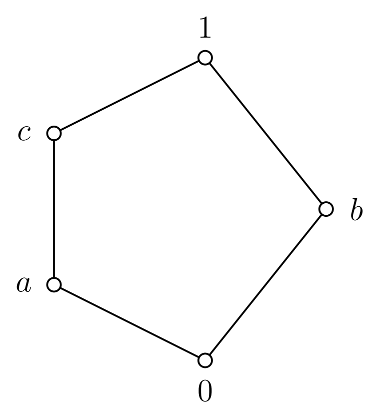
Ejemplo 1.3.4. *Si* G *es un grupo, entonces* $(N(G), \subseteq)$ *es una retícula modular.*

En efecto, sabemos que si $A, B \in N(G)$, entonces AB es subgrupo normal de G. Además notamos que $A \cup B \subseteq AB$ entonces, por definición de subgrupo generado, $\langle A \cup B \rangle \subseteq AB$. Por otro lado es claro que $AB \subseteq \langle A \cup B \rangle$ y por lo tanto $AB = \langle A \cup B \rangle = A \vee B$. Ahora, sean $H, J, K \in N(G)$ con $H \subseteq K$ y veamos que $(HJ) \cap K \subseteq H(J \cap K)$. Si $x \in (HJ) \cap K$ entonces $x = hj$ y $x \in K$, con $h \in H$ y $j \in J$, luego $j = h^{-1}x$ pertenece a K pues $h^{-1} \in H \subseteq K$ y $x \in K$. Por lo tanto $x = hj$ con $h \in H$ y $j \in J \cap K$, es decir, $x \in H(J \cap K)$.

Ejemplo 1.3.5. *Si* M *es un* R*-módulo,* $(S_R(M), \subseteq)$ *es una retícula modular.*

Ejemplo 1.3.6. *La retícula pentágono no es modular.*

En efecto, recordemos que la retícula pentágono es un conjunto de 5 elementos, $L = \{0, a, b, c, 1\}$, cuyo orden se representa por el siguiente diagrama de Hasse:



Supongamos que L es modular. Entonces, como $a \leq c$, se tiene que $c = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee (b \wedge c) = a$, luego $c \leq a$ y por lo tanto $a = c$ lo cual claramente no ocurre.

Teorema 1.3.7. *Una retícula L es modular si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in L$, si $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$ y $a \vee b = c \vee b$, entonces $a = c$.*

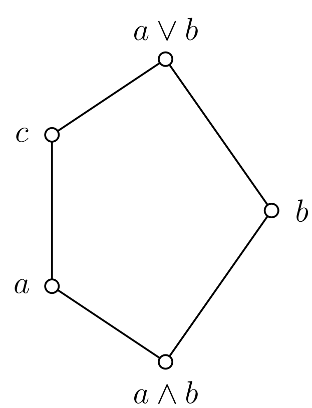
Demostración.
[$\Rightarrow$] Sean $a, b, c \in L$ tales que $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$ y $a \vee b = c \vee b$. Tenemos por la ley de absorción, la conmutatividad y las hipótesis: $a \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge a) = a$ y $(a \vee b) \wedge c = (c \vee b) \wedge c = c$. Finalmente, ya que L modular y $a \leq c$,

$$a = a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = c.$$

[$\Leftarrow$] Sean $a, b, c \in L$ con $a \leq c$. Denotemos por $a' = a \vee (b \wedge c)$ y $c' = (a \vee b) \wedge c$. Por nuestra hipótesis basta mostrar que $a' \leq c'$, $a' \wedge b = c' \wedge b$ y $a' \vee b = c' \vee b$ para concluir que $a' = c'$ (i.e., $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$). Como $a \leq c$ entonces, por Lema 1.2.7 (5), $a' = a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c = c'$ por tanto $a' \leq c'$, luego, por Lema 1.2.7 (1), $a' \vee b \leq c' \vee b$. Por otro lado, $c' = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b \leq a' \vee b$ y $b \leq a' \vee b$, por lo tanto $c' \vee b \leq a' \vee b$. De donde concluimos que $c' \vee b = a' \vee b$. De forma análoga se prueba que $c' \wedge b = a' \wedge b$. $\square$

Teorema 1.3.8. *Sea L una retícula. Entonces L es modular si y sólo si L no contiene subretículas isomorfas a la retícula pentágono.*

Demostración.
[$\Leftarrow$] [Por contradicción] Supongamos que L no tiene subretículas isomorfas al pentágono y que L no es modular. Como L no es modular entonces, por el Teorema 1.3.7, existen $a, b, c \in L$ tales que $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ y $a \neq c$. Note además que $a \neq b$ y $c \neq b$ pues de otro modo se tendría $a = c$. Así que podemos ordenar los elementos $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq L$ en una subretícula representada por el siguiente diagrama de Hasse:



Claramente esta subretícula es isomorfa al pentágono, pero esto contradice nuestra hipótesis.
[$\Rightarrow$] Supongamos que L es modular. Sabemos por el Ejemplo 1.3.6 que la retícula pentágono no es modular y como todas las subretículas de una retícula modular son modulares se concluye que L no puede tener subretículas isomorfas al pentágono. $\square$

Teorema 1.3.9. *Sean L una retícula y $a, b \in L$. Si L es modular, entonces las subretículas cociente $(a \vee b)/b$ y $a/(a \wedge b)$ son isomorfas.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.2.31, basta mostrar que existe algún isomorfismo de orden entre $(a \vee b)/b$ y $a/(a \wedge b)$. Proponemos $f : (a \vee b)/b \to a/(a \wedge b)$, definida por: $f(x) = x \wedge a$, para cada $x \in (a \vee b)/b$. Veamos que f está bien definida. Si $x \in (a \vee b)/b$ entonces $b \leq x \leq a \vee b$, así, por Lema 1.2.7 (1), $a \wedge b \leq a \wedge x \leq a$ y por lo tanto $f(x) = x \wedge a \in a/(a \wedge b)$. Sea $g : a/(a \wedge b) \to (a \vee b)/b$, definida por: $g(y) = y \vee b$, para cada $y \in a/(a \wedge b)$, una prueba similar a la anterior muestra que g está bien definida.
Veamos que $g = f^{-1}$:
Si $x \in (a \vee b)/b$, entonces

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \\
&= g(x \wedge a) && \text{(definición de } f) \\
&= (x \wedge a) \vee b && \text{(definición de } g) \\
&= x \wedge (a \vee b) && (b \leq x \text{ y modularidad}) \\
&= x = I_{(a \vee b)/b}(x) && (x \leq a \vee b)
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $y \in a/(a \wedge b)$, entonces

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= f(g(y)) && \\
&= f(y \vee b) && \text{(definición de } g) \\
&= (y \vee b) \wedge a && \text{(definición de } f) \\
&= y \vee (b \wedge a) && (y \leq a \text{ y modularidad}) \\
&= y = I_{a/(a \wedge b)}(y) && (a \wedge b \leq y)
\end{aligned}$$

Así que $g = f^{-1}$ y por tanto f es biyectiva. Finalmente, el hecho de que f y f^{-1} preservan orden es consecuencia del Lema 1.2.7 (1). $\square$

Observación 1.3.10. *El Teorema 1.3.9 aplicado a la retícula de submódulos de un R-módulo izquierdo M nos conduce al* ***segundo teorema de***

isomorfismo para módulos: *Si* $H, K \in S_R(M)$*, entonces* $(H+K)/K \cong H/(H \cap K)$*.*

Observación 1.3.11. *Si intercambiamos los papeles de* a *y* b *en el Teorema 1.3.9, obtenemos* $(a \vee b)/a \cong b/(a \wedge b)$*.*

Lema 1.3.12. *Sea* L *una retícula modular con cero. Si* $a, b, p \in L$ *son tales que* $p \wedge a = p \wedge b = 0$ *y* $(p \vee a) \wedge (p \vee b) = p$*, entonces* $p \wedge (a \vee b) = 0$*.*

Demostración. Supongamos que $p \wedge a = p \wedge b = 0$ y $(p \vee a) \wedge (p \vee b) = p$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = p \wedge a &= [(p \vee a) \wedge (p \vee b)] \wedge a && \text{(por hipótesis)} \\ &= [(p \vee a) \wedge a] \wedge (p \vee b) && \text{(asociatividad y conmutatividad)} \\ &= a \wedge (p \vee b) && \text{(absorción)} \end{aligned}$$

Por tanto $a \wedge (p \vee b) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} b = b \vee 0 = b \vee [a \wedge (p \vee b)] \\ &= (a \vee b) \wedge (p \vee b) && (b \leq a \vee b \text{ y modularidad}) \\ &= [(a \vee b) \wedge p] \vee b && (b \leq a \vee b \text{ y modularidad}) \end{aligned}$$

Así que $b = [p \wedge (a \vee b)] \vee b$ luego $p \wedge (a \vee b) \leq b$. Por otro lado es claro que $p \wedge (a \vee b) \leq p$. Así que $p \wedge (a \vee b)$ es cota inferior de $\{p, b\}$. Finalmente $p \wedge (a \vee b) \leq p \wedge b = 0$. □

Una importante generalización de la propiedad modular en una retícula son las llamadas *condiciones de cubrimiento.*

Definición 1.3.13. *Diremos que una retícula* L *satisface la* ***condición de cubrimiento superior*** *(respectivamente,* ***inferior****) si para cada* $a, b \in L$*, si* $a \wedge b \prec a$*, entonces* $b \prec a \vee b$ *(respectivamente, si* $b \prec a \vee b$*, entonces* $a \wedge b \prec a$*). Si una retícula* L *satisface esta condición la llamaremos* ***semimodular superior*** *(respectivamente,* ***inferior****).*

Observación 1.3.14.

(1) Cualquier retícula modular satisface ambas condiciones de cubrimiento y por lo tanto toda retícula modular es semimodular inferior y superior.

(2) *Si L es una retícula finita. Entonces L es modular si y sólo si L satisface ambas condiciones de cubrimiento.*

Proposición 1.3.15. *Una retícula L es semimodular superior si y sólo si para cada $x, y, z \in L$, si $x \prec y$, entonces $x \vee z \preceq y \vee z$. Dualmente: L es semimodular inferior si y sólo si para cada $x, y, z \in L$, si $x \prec y$, entonces $x \wedge z \preceq y \wedge z$.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Sean $x, y, z \in L$ con $x \prec y$. Es claro que $x \leq x \vee z$, luego $x \leq y \wedge (x \vee z) \leq y$; y como $x \prec y$, entonces $x = y \wedge (x \vee z)$ o $y = y \wedge (x \vee z)$. Si $x = y \wedge (x \vee z)$, entonces $y \wedge (x \vee z) \prec y$ luego, por definición de cubrimiento superior, $x \vee z \prec y \vee (x \vee z) = (y \vee x) \vee z = y \vee z$. Por otro lado, si $y = y \wedge (x \vee z)$ entonces, $x \prec y \leq x \vee z$ luego $x \vee z \leq y \vee z \leq x \vee z$, esto es, $x \vee z = y \vee z$.
[$\Leftarrow$] Sean $a, b \in L$ con $a \wedge b \prec a$ entonces, por hipótesis, $(a \wedge b) \vee b \preceq a \vee b$; y por ley de absorción, $b \preceq a \vee b$, sin embargo, cuando $b = a \vee b$ se implica que $a \leq b$ y luego $a = a \wedge b \prec a$ una contradicción. Por lo tanto $b \prec a \vee b$. $\square$

1.4. Retículas Distributivas

En esta sección introducimos el concepto de retícula distributiva el cual tiene un interés algebraico al ser una generalización de la distributividad de la unión y la intersección de conjuntos. Entre otras cosas mostraremos que la modularidad es una forma debilitada de la distributividad, en este sentido, las retículas ditributivas son una clase particular de retículas modulares.

Definición 1.4.1. *Una retícula L se llama* ***distributiva*** *si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se cumple que*

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Observación 1.4.2. *Toda subretícula de una retícula distributiva es distributiva.*

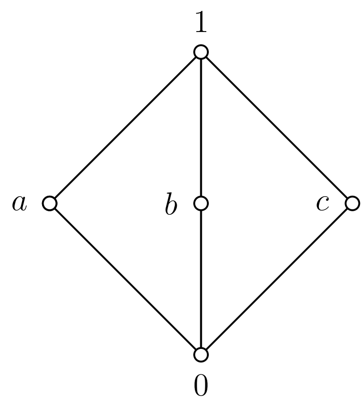
Ejemplo 1.4.3. *Si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula distributiva.*

Ejemplo 1.4.4. *Sean R un anillo conmutativo y $A = \{e \in A \mid ee = e\}$ ordenado parcialmente como sigue: para cada $e, f \in A$, $e \leq f$ si y sólo si $ef = e$. Entonces, $(A, \leq)$ es una retícula distributiva, donde $e \wedge f = ef$ y $e \vee f = e + f - ef$ para toda $e, f \in A$.*

En efecto, como R es conmutativo, para toda $e, f \in A$ se cumple que $ef = fe$, además, la realción definida sobre A es una relación de orden parcial, también es claro que $ef \in A$ y $e+f-ef \in A$. Sean $e, f \in A$. Veamos que ef es la mayor de las cotas inferiores de $\{e, f\}$, es decir, $e \wedge f = ef$. Haciendo uso de las propiedades del anillo obtenemos $(ef)e = e(ef) = (ee)f = ef$ entonces $ef \leq e$, de forma análoga se obtiene $ef \leq f$ y por tanto ef es cota inferior de $\{e, f\}$. Ahora, si c es otra cota inferior de $\{e, f\}$, entonces $ce = c$ y $cf = c$, luego $c(ef) = (ce)f = cf = c$ y por lo tanto $c \leq ef$. De forma similar se prueba que $e \vee f = e + f - ef$. Lo anterior muestra que $(A, \leq)$ es una retícula. Finalmente, veamos que $(A, \leq)$ es distributiva. Sean $e, f, g \in A$, entonces $(e \vee f) \wedge g = (e+f-ef)g = eg + fg - (ef)g = eg + fg - (ef)gg = eg + fg - (eg)(fg) = (eg) \vee (fg) = (e \wedge g) \vee (f \wedge g)$.

Ejemplo 1.4.5. *La retícula diamante no es distributiva.*

En efecto, recordemos que la retícula diamante es un conjunto con 5 elementos, $L = \{0, a, b, c, 1\}$, cuyo orden parcial se puede representar mediante el siguiente diagrama de Hasse:



Notamos que $(a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$, por otro lado $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$, además es claro que $c \neq 0$. Por lo tanto existen $a, b, c \in L$ tales que $(a \vee b) \wedge c \neq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, es decir, L no es distributiva.

Proposición 1.4.6. *Si L es una retícula distributiva, entonces L es modular.*

Demostración. Sean $a, b, c \in L$ con $a \leq c$. Como $a \leq c$ entonces $a \wedge c = a$, así que $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. $\square$

Observación 1.4.7. *El recíproco de la Proposición 1.4.6, en general es falso.*

En efecto, consideremos al $\mathbb{R}$-módulo $\mathbb{R}^2$. Sabemos que $(S_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ es retícula modular, sin embargo esta retícula no es distributiva ya que si $A = \langle(1,0)\rangle$, $B = \langle(0,1)\rangle$ y $C = \langle(1,1)\rangle \in S_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, entonces
$A = \mathbb{R}(1,0) = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$;
$B = \mathbb{R}(0,1) = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$;
$C = \mathbb{R}(1,1) = \{(z,z)|z \in \mathbb{R}\}$.
Luego, $(A+B)\cap C = \mathbb{R}^2 \cap C = C$ y $(A\cap C)+(B\cap C) = \{(0,0)\}+\{(0,0)\} = \{(0,0)\}$. Por lo tanto $(A+B)\cap C \neq (A\cap C)+(B\cap C)$ de donde concluimos que $(S_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ no es distributiva.

Observación 1.4.8. *Debido al Lema 1.2.7 (4), sabemos que en toda retícula L, para cualesquiera $a, b, c \in L$, $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$. Por lo tanto una retícula L es distributiva si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in L$, $(a \vee b) \wedge c \leq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.*

Proposición 1.4.9. *Una retícula L es distributiva si y solo si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se cumple que $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.*

Demostración.
[⇒]Sean $a, b, c \in L$, entonces

$$\begin{aligned}
(a \vee c) \wedge (b \vee c) &= [a \wedge (b \vee c)] \vee [c \wedge (b \vee c)] && \text{(distribución)}\\
&= [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \vee c && \text{(distribución y absorción)}\\
&= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee c] && \text{(asociatividad)}\\
&= (a \wedge b) \vee c && \text{(absorción)}
\end{aligned}$$

[⇐] La prueba es simétrica a la anterior. □

Teorema 1.4.10. *Una retícula L es distributiva si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in L$, si $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$, entonces $a = b$.*

Demostración.
[⇒] Sean $a, b, c \in L$ tales que $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$, entonces

$$\begin{aligned}
a = a \wedge (a \vee c) &= a \wedge (b \vee c) && (a \vee c = b \vee c)\\
&= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && \text{(distribución)}\\
&= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) && (a \wedge c = b \wedge c)\\
&= b \wedge (a \vee c) && \text{(distribución)}\\
&= b \wedge (b \vee c) && (a \vee c = b \vee c)\\
&= b && \text{(absorción)}
\end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que para cualesquiera $a, b, c \in L$, si $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$, entonces $a = b$. En particular se satisface lo siguiente: para cualesquiera $a, b, c \in L$, si $a \leq b$, $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$, entonces $a = b$. Así que, por el Teorema 1.3.7, L es modular. Notamos que $a \wedge b \leq a \vee b$ entonces, por modularidad,

$$[(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)].$$

Por otro lado $b \wedge c \leq b \vee c$ entonces, por modularidad,

$$[(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)].$$

Denotemos por

$$u = [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]$$

y

$$v = [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{(i) } u \wedge b &= [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \wedge b \\ &= [(a \wedge b) \vee c] \wedge b && \text{(asociatividad y absorción)} \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) && (a \wedge b \leq b \text{ y modularidad}) \end{aligned}$$

De forma similar se muestra que $v \wedge b = (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$ y por lo tanto $u \wedge b = v \wedge b$.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } v \vee b &= (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)] \vee b \\ &= [a \wedge (b \vee c)] \vee b && \text{(conmutativa, asoc. y absorción)} \\ &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) && (b \leq b \vee c \text{ y modularidad}) \end{aligned}$$

De forma similar se muestra que $u \vee b = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ y por lo tanto $u \vee b = v \vee b$.

De (i), (ii) y la hipótesis concluimos que $u = v$ luego $u \wedge a = v \wedge a$. Finalmente, por un lado tenemos

$$u \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee (c \wedge a)$$

y por otro lado

$$v \wedge a = a \wedge v = a \wedge [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c).$$

Por lo tanto $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. $\square$

Teorema 1.4.11. *Una retícula L es distributiva si y sólo si L es modular y no contiene subretículas isomorfas con la retícula diamante.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Si L es distributiva, entonces L es modular y todas sus subretículas son distributivas y por lo tanto L no contiene subretículas isomorfas al diamante.
[$\Leftarrow$] [Por contradición] Supongamos que L es modular y que L no contiene subretículas isomorfas al diamante. Además, supongamos que L no es distributiva. Por el Teorema 1.4.10, existen $a, b, c \in L$ tales que $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ y $a \neq b$. Notamos que si $a < b$, entonces se tiene que $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ y $a < b$, así, por ser L modular y el Teorema 1.3.7, necesariamente se tiene que $a = b$ lo que contradice $a \neq b$. Simétricamente no es posible que $b < a$ y por lo tanto $a \| b$. Por otro lado, si $a \leq c$, ya que $a \vee c = b \vee c$, entonces $c = b \vee c$; y por tanto $b \leq c$, así que $a \wedge c = b \wedge c$ implica $a = b$ lo cual es una contradicción. Simétricamente no puede ocurrir que $c \leq a$ y por tanto $a \| c$. Un argumento similar al anterior muestra que $b \| c$. Finalmente, se tiene que $a \| b$, $a \| c$, $b \| c$, $a \wedge c = b \wedge c$ y $a \vee c = b \vee c$. Así obtenemos $L' = \{a, b, c, a \wedge c, a \vee c\}$ una subretícula isomorfa al diamante lo cual contradice la hipótesis. $\square$

1.5. Retículas Continuas Superiormente

Definición 1.5.1. *Si A es un COPO, $D \subseteq A$ es llamado* ***dirigido superiormente*** *(respectivamente,* ***inferiormente****) si todo subconjunto finito de D tiene cota superior (respectivamente, cota inferior) en D.*

Definición 1.5.2. *Una retícula completa L se llama* ***continua superiormente*** *si para cualesquiera $a \in L$ y $D \subseteq L$ conjunto dirigido superiormente se cumple que $a \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$.*

Observación 1.5.3. *En toda retícula completa L para cualesquiera $a \in L$ y $X \subseteq L$, se cumple que $\bigvee_{x \in X}(a \wedge x) \leq a \wedge (\bigvee X)$.*

En efecto, como $x \leq \bigvee X$ para cada $x \in X$ entonces, por Lema 1.2.7 (1), $a \wedge x \leq a \wedge (\bigvee X)$ para cada $x \in X$, así que $a \wedge (\bigvee X)$ es cota superior del conjunto $\{a \wedge x\}_{x \in X}$ y por lo tanto $\bigvee_{x \in X}(a \wedge x) \leq a \wedge (\bigvee X)$.

Observación 1.5.4. *Por la Observación 1.5.3, tenemos: L es continua superiormente si y sólo si para cualesquiera $a \in L$ y $D \subseteq L$ dirigido superiormente se cumple que $a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. Además, claramente toda subretícula completa de una retícula continua superiormente es continua superiormente.*

Observación 1.5.5. *En toda retícula completa L para cualesquiera $a \in L$ y $X \subseteq L$, se cumple que $\bigvee_{x \in X}(a \vee x) = a \vee (\bigvee X)$.*

Ejemplo 1.5.6. *Si X es un conjunto, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula continua superiormente.*

Observación 1.5.7. *Si L es una retícula y $D \subseteq L$ es un conjunto dirigido superiormente entonces, para cualquier $a \in L$, $\{a \wedge d\}_{d \in D}$ y $\{a \vee d\}_{d \in D}$ son conjuntos dirigidos superiormente.*

Definición 1.5.8. *Sea L es una retícula con cero y uno. Sea $a \in L$, un elemento $a' \in L$ se llama **complemento** de a si se cumple que*

$$a \wedge a' = 0 \text{ y } a \vee a' = 1.$$

Notación 1.5.9. *Si $a' \in L$ es complemento de $a \in L$, la situación: $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$, será denotada por $a \oplus a' = 1$ y la llamaremos **suma directa** de a y a'.*

Definición 1.5.10. *Sea L una retícula con cero y uno.*

*(1) L se llama **complementada** si para cada $a \in L$, existe $a' \in L$ tal que $a \oplus a' = 1$.*

*(2) L se llama **relativamente complementada** si para cada $a \in L$ y para cada subretícula cociente $y/x \subseteq L$ tal que $a \in y/x$, existe $a' \in y/x$ tal que $a \oplus a' = y$ (i.e., $a \wedge a' = x$ y $a \vee a' = y$).*

Proposición 1.5.11. *Sea L una retícula con cero y uno.*

(1) Si L es distributiva, entonces los complementos son únicos.

(2) Si L es modular, $a \in L$ y $a', b' \in L$ son complementos de a comparables, entonces $a' = b'$.

Demostración.
Demostración de (2): Supongamos que L es modular. Sean $a \in L$ y $a', b' \in L$ complementos comparables de a. Sin pérdida de generalidad suponemos $a' \leq b'$. Como a' y b' son complementos de a tenemos $a \wedge a' = 0 = a \wedge b'$ y $a \vee a' = 1 = a \vee b'$ entonces, por Teorema 1.3.7, $a' = b'$. Para mostrar (1) usamos el hecho de que L es distributiva y el Teorema 1.4.10. $\square$

Proposición 1.5.12. *Toda retícula complementada y modular es relativamente complementada.*

Demostración. Sea L una retícula complementada y modular. Veamos que L es relativamente complementada. Sean $a \in L$ y $y/x \subseteq L$ tal que $a \in y/x$. Como L es complementada existe $a' \in L$ tal que $a \oplus a' = 1$. Además, ya que L es modular y $x \leq y$, tenemos $(x \vee a') \wedge y = x \vee (a' \wedge y)$. Denotemos por $s = (x \vee a') \wedge y = x \vee (a' \wedge y)$. Notamos que $x \leq x \vee (a' \wedge y) = (x \vee a') \wedge y \leq y$ y por tanto $s \in y/x$. Veamos que s es complemento de a en y/x, esto es, $a \wedge s = x$ y $a \vee s = y$. Se cumple que

$$\begin{aligned}
a \vee s &= a \vee [x \vee (a' \wedge y)] \\
&= a \vee (a' \wedge y) && \text{(asociativa y } x \leq a) \\
&= (a \vee a') \wedge y && (a \leq y \text{ y modularidad}) \\
&= 1 \wedge y && (a \vee a' = 1) \\
&= y.
\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $a \wedge s = x$. Así que a tiene complemento en cualquier subretícula cociente $y/x \subseteq L$ tal que $a \in y/x$ y por lo tanto L es relativamente complementada. $\square$

Proposición 1.5.13. *Sea L una retícula complementada y modular. Son equivalentes:*

(1) L es continua superiormente.

(2) Para cada $D \subseteq L$ dirigido superiormente, si existe $a \in L$, con $a \neq 0$, tal que $a \wedge d = 0$ para toda $d \in D$, entonces $\bigvee D \neq 1$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que L es continua superiormente. Sea $D \subseteq L$ dirigido superiormente para el cual existe $a \in L - \{0\}$ tal que $a \wedge d = 0$ para toda $d \in D$. Entonces, como L es continua superiormente, $a \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{d \in D}(a \wedge d) = \bigvee\{0\} = 0$. Por lo tanto $\bigvee D \neq 1$ (pues de lo contrario $0 = a \wedge (\bigvee D) = a \wedge 1 = a$, lo que no es posible).
[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sean $a \in L$ y $D \subseteq L$ dirigido superiormente. Sabemos que $0 \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee D)$, así que $\bigvee_{d \in D}(a \wedge d) \in (a \wedge (\bigvee D))/0$. Además, por la Proposición 1.5.12, L es relativamente complementada y por lo tanto para $\bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$ existe $b \in (a \wedge (\bigvee D))/0$ tal que

$$\big(\bigvee_{d\in D}(a\wedge d)\big)\oplus b = a\wedge\big(\bigvee D\big). \qquad (1)$$

Como L es complementada para $\bigvee D$ existe $c\in L$ tal que $(\bigvee D)\oplus c = 1$. Es claro que $\{d\vee c\}_{d\in D}\subseteq L$ es dirigido superiormente, además para toda $d\in D$ se cumple que

$$\begin{aligned}
0\leq (d\vee c)\wedge b &= (d\vee c)\wedge\big[\big(\bigvee D\big)\wedge b\big] && (\text{pues } b\leq a\wedge\big(\bigvee D\big)\leq\bigvee D)\\
&= \big[d\vee\big(c\wedge\bigvee D\big)\big]\wedge b && (\text{asociativa, } d\leq\bigvee D \text{ y mod.})\\
&= (d\vee 0)\wedge b && (c \text{ complemento de } \bigvee D \text{ en } L)\\
&= d\wedge b &&\\
&= d\wedge(a\wedge b) && (\text{pues } b\leq a\wedge\big(\bigvee D\big)\leq a)\\
&= (d\wedge a)\wedge b && (\text{asociatividad})\\
&\leq \big(\bigvee_{e\in D}(e\wedge a)\big)\wedge b && (d\wedge a\leq\bigvee_{e\in D}(e\wedge a))\\
&= 0 && (b \text{ complemento de } \bigvee_{e\in D}(e\wedge a))
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\{d\vee c\}_{d\in D}\subseteq L$ es un conjunto dirigido superiormente para el cual existe $b\in L$ tal que $(d\vee c)\wedge b = 0$ para toda $d\in D$. Luego, si suponemos $b\neq 0$, entonces la hipótesis principal garantiza que $\bigvee_{d\in D}(d\vee c)\neq 1$ y por lo tanto se tiene $1 = (\bigvee D)\vee c = \bigvee_{d\in D}(d\vee c)\neq 1$ lo cual no es posible. Así que, necesariamente $b = 0$. Finalmente de (1) obtenemo

$$\bigvee_{d\in D}(d\wedge a) = \big(\bigvee_{d\in D}(d\wedge a)\big)\vee 0 = \big(\bigvee_{d\in D}(d\wedge a)\big)\vee b = a\wedge\big(\bigvee D\big).$$

□

Terminaremos la sección mostrando algunos resultados que involucran a las retículas artinianas y neterianas, como ya se mostró son retículas que satisfacen CCD y CCA, respectivamente.

Notación 1.5.14. *Utilizaremos el símbolo* $\overset{mod}{=}$ *para denotar a una igualdad que utiliza la condición de modularidad. Además, el símbolo* $\overset{mod}{\cong}$ *denotará que existe un isomorfismo entre retículas que se debe gracias a la modularidad.*

Proposición 1.5.15. *Sea L un COPO tal que todo subconjunto no vacío de L tiene supremo (respectivamente, ínfimo). Son equivalentes:*

(1) L es neteriano (respectivamente, artiniano).

(2) Para cada $A \subseteq L$, con $A \neq \varnothing$, existe $F \subseteq A$ conjunto finito tal que $\bigvee F = \bigvee A$ (respectivamente, $\bigwedge F = \bigwedge A$).

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $A \subseteq L$, con $A \neq \varnothing$. Sea $U = \{\bigvee F \mid F \text{ es finito, } F \subseteq A\}$, claramente $U \neq \varnothing$ y como L es neteriano existe $F_0 \subseteq A$ finito tal que $\bigvee F_0$ es elemento máximo de U. Es evidente que $\bigvee F_0 \leq \bigvee A$. Por otro lado, si $a \in A$, entonces $F_0 \cup \{a\} \subseteq A$ es finito y por tanto $\bigvee(F_0 \cup \{a\}) = (\bigvee F_0) \vee a \in U$, además $\bigvee F_0 \leq (\bigvee F_0) \vee a$ así, por la maximalidad de $\bigvee F_0$ se tiene $\bigvee F_0 = (\bigvee F_0) \vee a$. Por lo tanto $a \leq \bigvee F_0$ para cada $a \in A$, entonces $\bigvee A \leq \bigvee F_0$.
[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq L$ tal que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$, por hipótesis, existe $F = \{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_i}\} \subseteq \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ tal que $\bigvee_{k\in\mathbb{N}^*} a_k = \bigvee F$. Sea $l = \text{máx}\{m_1, m_2, \ldots m_i\}$, entonces $\bigvee_{k\in\mathbb{N}^*} a_k = \bigvee F = a_l$ y por lo tanto $a_l = a_{l+1} = \cdots$ lo cual nos dice que la sucesión es estacionaria. De forma análoga se muestra el caso artiniano. $\square$

Observación 1.5.16. *Toda subretícula de una retícula neteriana (respectivamente, artiniana) es neteriana (respectivamente, artiniana).*

Proposición 1.5.17. *Si L es una retícula neteriana (respectivamente, artiniana), entonces L tiene elemento mayor (respectivamente, menor).*

Demostración. Como $L \subseteq L$ y L es neteriano, existe $m \in L$ elemento máximo en L. Si $a \in L$, entonces $m \leq m \vee a$, así, por la maximalidad de m, $m = m \vee a$ lo cual equivale a que $a \leq m$. Por lo tanto $a \leq m$ para cada $a \in L$, es decir, m es elemento mayor de L. $\square$

Proposición 1.5.18. *Sean L una retícula modular y $a \in L$. Entonces L es neteriana (respectivamente, artiniana) si y sólo si $a/0$ y $1/a$ son neterianas (respectivamente, artinianas).*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Claramente $a/0$ y $1/a$ son neterianas.
[$\Leftarrow$] Sea $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ una sucesión ascendente en L. Notamos que $a_k \leq a_{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}^*$, entonces $a \wedge a_k \leq a \wedge a_{k+1} \leq a$ para toda $k \in \mathbb{N}^*$ y por tanto $\{a \wedge a_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión ascendente en $a/0$. De forma analoga se muestra que $\{a \vee a_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ es sucesión ascendente en $1/a$. Como $a/0$ y $1/a$ son neterianas existen $m, n \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$a \wedge a_m = a \wedge a_{m+1} = a \wedge a_{m+2} = \cdots \text{ y } a \vee a_n = a \vee a_{n+1} = a \vee a_{n+2} = \cdots .$$

Sean $l = \text{máx}\{m, n\}$, $u = a \wedge a_l = a \wedge a_{l+1} = \cdots$ y $v = a \vee a_l = a \vee a_{l+1} = \cdots$. Entonces, como L es modular y $u \leq a_l \leq a_{l+1} \leq v$, tenemos

$$a_l = a_l \vee (a \wedge a_l) = a_l \vee (a \wedge a_{l+1}) \overset{\text{mod}}{=} (a_l \vee a) \wedge a_{l+1} = v \wedge a_{l+1} = a_{l+1}$$

De forma análoga, usando $u \leq a_{l+1} \leq a_{l+2} \leq v$ y la modularidad, tenemos $a_{l+1} = a_{l+2}$. De forma similar se muestra que $a_{l+2} = a_{l+3} = a_{l+4} = \cdots$. Por lo tanto la sucesión $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ es estacionaria. $\square$

Capítulo 2

Retículas Compactamente Generadas

Muchas estructuras algebraicas se pueden representar como suma de un número finito de subestructuras, más aún, los elementos de tales estructuras son combinaciones lineales finitas. En topología, por ejemplo, los espacios compactos poseen la virtud de ser representables como la unión finita de conjuntos abiertos. Estos hechos nos conducen al estudio de una clase particular de retículas: aquéllas cuyos elementos son supremos de elementos compactos. En este capítulo tratamos la noción de compacidad en una retícula y exponemos algunas propiedades de esta clase de retículas. Además, se introducen las nociones de series de composición y longitud, entre otras cosas, veremos una especie de unicidad de la descompocisión, y cuando una descomposición es irreducible.

2.1. Elementos Compactos

Definición 2.1.1. *Sea L una retícula completa, un elemento $c \in L$ se llama* ***compacto*** *en L si para todo $X \subseteq L$ tal que $c \leq \bigvee X$ existe $F \subseteq X$ finito tal que $c \leq \bigvee F$.*

Ejemplo 2.1.2. *Si A es un conjunto, consideremos la retícula completa $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Entonces, $X \in \mathcal{P}(A)$ es compacto si y sólo si X es finito.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Sea $X \in \mathcal{P}(A)$ compacto. Claramente $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ satisface que $X = \bigcup_{x \in X}\{x\} = \bigvee \mathcal{A}$ entonces, como X es compacto, existe

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que $X \subseteq \bigvee \mathcal{F}$. Por lo tanto X debe ser finito pues $\mathcal{F}$ lo es.
[$\Leftarrow$] Si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es tal que $X \subseteq \bigvee \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $A_i \in \mathcal{A}$ tal que $x_i \in A_i$. Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{F}$ satisface que $X \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigvee \mathcal{F}$ y por lo tanto X es compacto. □

Ejemplo 2.1.3. *Sea M un R-módulo izquierdo, consideremos la retícula completa $(S_R(M), \subseteq)$. Entonces, $N \in S_R(M)$ es compacto si y sólo si N es finitamente generado.*

En efecto, primero recordemos que si M es un R-módulo izquierdo, entonces se dice que M es *finitamente generado* si existe $X \subseteq M$ finito tal que

$$M = RX = \bigcap \{N \mid N \in S_R(M), X \subseteq N\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X \right\}$$

[$\Rightarrow$] Sea $N \in S_R(M)$ compacto. Como $N = \sum_{x \in N} Rx = \bigvee\{Rx \mid x \in N\}$ entonces, por ser N compacto, existe $\{Rx_1, Rx_2, \ldots, Rx_n\} \subseteq \{Rx \mid x \in N\}$ tal que $N \subseteq \sum_{i=1}^{n} Rx_i$. Por otro lado si $y \in \sum_{i=1}^{n} Rx_i$, entonces $y = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in N$, así que $\sum_{i=1}^{n} Rx_i \subseteq N$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} Rx_i = N$, es decir, N es finitamente generado.
[$\Leftarrow$] Sean $N \in S_R(M)$ finitamente generado y $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq S_R(M)$ tal que $N \subseteq \bigvee_{i \in I} N_i = \sum_{i \in I} N_i$. Como N es finitamente generado, existe $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq M$ tal que $RX = N \subseteq \sum_{i \in I} N_i$, entonces para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $N_{i_k} \in \{N_i\}_{i \in I}$ tal que $x_k \in N_{i_k}$. Finalmente $N = RX = \sum_{k=1}^{n} Rx_k \subseteq \sum_{k=1}^{n} N_{i_k}$ y por lo tanto N es compacto.

Notación 2.1.4. *Dado un conjunto arbitrario X denotaremos al conjunto de todos los subconjuntos finitos de X por $\mathcal{P}_0(X)$.*

Proposición 2.1.5. *Sean L una retícula con cero y $a \in L$. Entonces $a/0$ es un elemento compacto en la retícula completa $(I(L), \subseteq)$.*

Demostración. Recordemos que $(I(L), \subseteq)$ es una retícula completa, donde para cualquier $\mathcal{A} \subseteq I(L)$, $\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap_{I \in \mathcal{A}} I$ y $\bigvee \mathcal{A} = (\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I]$. Sean $\mathcal{A} \subseteq I(L)$ y $\mathcal{B} = \mathcal{P}_0(\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I)$. Sea $J_{\mathcal{A}} = \{x \in L \mid x \leq \bigvee F \text{ para algún } F \in \mathcal{B}\}$. Vamos a mostrar que $\bigvee \mathcal{A} = J_{\mathcal{A}}$, esto es, $(\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I] = J_{\mathcal{A}}$.

Veamos que $(\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I] \subseteq J_{\mathcal{A}}$: Primero vamos a mostrar que $J_{\mathcal{A}}$ es ideal en L. (i) Sean $x \in L$ y $b \in J_{\mathcal{A}}$ con $x \leq b$. Como $b \in J_{\mathcal{A}}$, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $x \leq b \leq \bigvee F$ y por lo tanto $x \leq \bigvee F$ con $F \in \mathcal{B}$, es decir, $x \in J_{\mathcal{A}}$. (ii) Si $a, b \in J_{\mathcal{A}}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ tales que $a \leq \bigvee F_1$ y $b \leq \bigvee F_2$, luego $a \vee b \leq (\bigvee F_1) \vee (\bigvee F_2) = \bigvee(F_1 \cup F_2)$ con $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{B}$ y por lo tanto $a \vee b \in J_{\mathcal{A}}$. De (i) y (ii) se concluye que $J_{\mathcal{A}}$ es ideal en L. Ahora vamos a mostrar que $\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I \subseteq J_{\mathcal{A}}$ para concluir, por definición de ideal generado, que $(\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I] \subseteq J_{\mathcal{A}}$. Sea $x \in \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I$, como $x = \bigvee\{x\}$ con $\{x\} \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I$, entonces $x \in J_{\mathcal{A}}$.

Veamos que $(\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I] \supseteq J_{\mathcal{A}}$: Si $x \in J_{\mathcal{A}}$, entonces existe $F \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I$ finito tal que $x \leq \bigvee F$. Como $F \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I \subseteq (\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I]$ es finito entonces, por ser $(\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I]$ ideal en L, $\bigvee F \in (\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I]$ y como $x \leq \bigvee F$ se concluye, nuevamente por definición de ideal, que $x \in (\bigcup_{I\in\mathcal{A}} I]$.

Finalmente, veamos que $a/0$ es compacto en $(I(L), \subseteq)$. Sea $\mathcal{A} \subseteq I(L)$ tal que $a/0 \subseteq \bigvee \mathcal{A}$, esto es, $a/0 \subseteq J_{\mathcal{A}}$. Claramente $a \in a/0 \subseteq J_{\mathcal{A}}$, así que, existe $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I$ tal que $a \leq \bigvee F$. Como $F \subseteq \bigcup_{I\in\mathcal{A}} I$, entonces para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ existe $I_k \in \mathcal{A}$ tal que $x_k \in I_k$ y por tanto $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k \subseteq (\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$. Note además que $\bigvee F \in (\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$ y como $a \leq \bigvee F$, entonces $a \in (\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$. Es inmediato ver que $a/0 \subseteq (\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$, pues $x \leq a$ para toda $x \in a/0$, además $a \in (\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$ y $(\bigcup_{k=1}^{n} I_k]$ es ideal en L. □

Proposición 2.1.6. *Sea L una retícula con cero. Entonces, $X \in I(L)$ es elemento compacto en $I(L)$ si y sólo si X es ideal principal en L.*

Demostración.
[⇒] Sea $X \in I(L)$ elemento compacto. Es evidente que $X = (\bigcup_{x\in X}(x/0)] = \bigvee_{x\in X}(x/0)$, luego, como X es compacto, existe $\{a_1/0, \ldots, a_n/0\} \subseteq \{x/0\}_{x\in X}$ tal que $X = \bigvee_{i=1}^{n}(a_i/0) = (a_1/0) \vee \cdots \vee (a_n/0) = (a_1 \vee \cdots \vee a_n)/0$. Por lo tanto X es ideal principal.
[⇐] Es consecuencia de la Proposición 2.1.5 □

Definición 2.1.7. *Sea L una retícula completa, un elemento $c \in L$ se llama **fuertemente compacto** en L si para todo $D \subseteq L$ dirigido superiormente tal que $c \leq \bigvee D$ existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$.*

Observación 2.1.8. *Si L es retícula completa y $X \subseteq L$, entonces el conjunto $\mathcal{F}_X = \{\bigvee F \mid F \in \mathcal{P}_0(X)\} \subseteq L$ es dirigido superiormente.*

En efecto, vamos a mostrar que todo conjunto finito en $\mathcal{F}_X$ tiene cota superior en $\mathcal{F}_X$. Sea $\{\bigvee F_1, \ldots, \bigvee F_n\} \subseteq \mathcal{F}_X$, es evidente que $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es finito y $\bigcup_{i=1}^n F_i \subseteq X$, así que $\bigvee(\bigcup_{i=1}^n F_i) \in \mathcal{F}_X$. Además, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $F_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i$ lo cual implica que para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\bigvee F_j \leq \bigvee(\bigcup_{i=1}^n F_i)$ y por lo tanto $\bigvee(\bigcup_{i=1}^n F_i) \in \mathcal{F}_X$ es cota superior de $\{\bigvee F_1, \ldots, \bigvee F_n\}$.

Proposición 2.1.9. *Sean L una retícula completa y $c \in L$. Entonces c es compacto en L si y sólo si c es fuertemente compacto en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que c es compacto en L. Sea $D \subseteq L$ un conjunto dirigido superiormente tal que $c \leq \bigvee D$. Como c es compacto existe $F \subseteq D$ finito tal que $c \leq \bigvee F$, además, por ser D dirigido superiormente, existe $d_0 \in D$ cota superior de F, así que $\bigvee F \leq d_0$. Por lo tanto existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$, es decir, c es fuertemente compacto.
[$\Leftarrow$] Supongamos que c es fuertemente compacto en L. Sea $X \subseteq L$ tal que $c \leq \bigvee X$. Por la Observación 2.1.8, se tiene que $\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido superiormente, además notamos que para cada $x \in X$, $x = \bigvee\{x\}$ y $\{x\} \subseteq X$ es finito, así que $X \subseteq \mathcal{F}_X$ y por tanto $c \leq \bigvee X \leq \bigvee \mathcal{F}_X$ entonces, por ser c fuertemente compacto y $\mathcal{F}_X$ dirigido superiormente, existe $\bigvee F_0 \in \mathcal{F}_X$ tal que $c \leq \bigvee F_0$, es decir, existe $F_0 \subseteq X$ finito tal que $c \leq \bigvee F_0$. Por lo tanto c es compacto. □

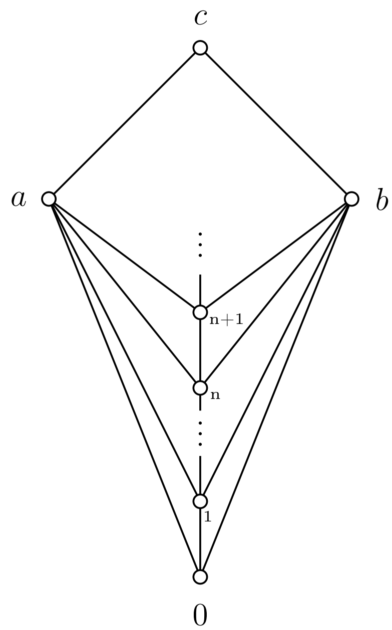
Proposición 2.1.10. *Si L es una retícula completa y $a, b \in L$ son compactos en L, entonces $a \vee b$ es compacto en L.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.9, basta mostrar que $a \vee b$ es fuertemente compacto en L. Sea $D \subseteq L$ dirigido superiormente tal que $a \vee b \leq \bigvee D$. Es vidente que $a \leq \bigvee D$ y $b \leq \bigvee D$ entonces, como a y b son compactos (i.e., fuertemente compactos) y D es dirigido superiormente, existen $d_1, d_2 \in D$ tales que $a \leq d_1$ y $a \leq d_2$. Además, $\{d_1, d_2\} \subseteq D$ y D es dirigido superiormente, así que existe $d_0 \in D$ tal que $d_1 \leq d_0$ y $d_2 \leq d_0$. Finalmente $a \leq d_1 \leq d_0$ y $b \leq d_2 \leq d_0$, entonces $a \vee b \leq d_0$ con $d_0 \in D$. Por lo tanto $a \vee b$ es fuertemente compacto. □

Observación 2.1.11. *Si $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq L$ es cualquier subconjunto finito conformado por elementos compactos en una retícula completa L, entonces $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ es compacto en L.*

Observación 2.1.12. *La cuña de dos elementos compactos en general no es elemento compacto.*

En efecto, consideremos a $\mathbb{N}$ con el orden usual y adjuntemos tres cotas superiores a, b y c tales $a \vee b = c$ y $a \| b$. Podemos representar el orden de $L = \mathbb{N} \cup \{a, b, c\}$ en el siguiente diagrama de Hasse:



Notamos que L es una semiretícula superior (esto es, un COPO en el que todo subconjunto finito no vacío tiene supremo) y por lo tanto la retícula $(I(L), \subseteq)$ es completa. Como ya se mostró en la Proposición 2.1.5, $a/0$ y $b/0$ son compactos en $I(L)$, sin embargo $(a/0) \wedge (b/0) = (a/0) \cap (b/0) = \mathbb{N}$ no es compacto pues claramente no es ideal principal en $I(L)$ (ver la Proposición 2.1.6).

2.2. Retículas Compactamente Generadas

Definición 2.2.1. *Una retícula completa L se llama* ***compactamente generada*** *o* ***algebraica*** *si para cada $a \in L$ existe $\{c_i\}_{i \in I} \subseteq L$ familia de elementos compactos en L tal que $a = \bigvee_{i \in I} c_i$.*

Ejemplo 2.2.2. *Si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es compactamente generada.*

En efecto, sea $A \in \mathcal{P}(X)$, claramente $A = \bigcup_{a \in A}\{a\} = \bigvee_{a \in A}\{a\}$, además $\{a\}$ es compacto en $\mathcal{P}(X)$ para cada $a \in A$. Por lo tanto, cada $A \in \mathcal{P}(X)$ es yunta de elementos compactos en $\mathcal{P}(A)$, esto es, $\mathcal{P}(X)$ es compactamente generada.

Ejemplo 2.2.3. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces $(S_R(M), \subseteq)$ es compactamente generada.*

En efecto, sea $N \in S_R(M)$, claramente $N = \sum_{x \in N} Rx = \bigvee_{x \in N} Rx$, además para cada $x \in N$, Rx es compacto en $S_R(M)$, pues Rx es finitamente generado. Por lo tanto, cada $N \in S_R(M)$ es yunta de elementos compactos en $S_R(M)$, es decir, $S_R(M)$ es compactamente generada.

Ejemplo 2.2.4. *Si L es una retícula con cero, entonces $(I_0(L), \subseteq)$ es compactamente generada.*

En efecto, sea $X \in I(L)$, es claro que $X = (\bigcup_{x \in X}(x/0)] = \bigvee_{x \in X}(x/0)$, además para cada $x \in X$, $x/0$ es compacto en $I(L)$, pues es ideal principal. Por lo tanto todo elemento en $I(L)$ es yunta de elementos compactos.

Lema 2.2.5. *Sean L una retícula compactamente generada y $a, b, k \in L$, con $k \in b/a$. Entonces $k \in b/a$ es compacto en la subretícula cociente b/a si y sólo si existe $c \in L$ compacto en L tal que $k = a \vee c$ y $a \vee c \leq b$.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Como L es compactamente generada, para $k \in b/a \subseteq L$ existe $\{c_i\}_{i \in I} \subseteq L$ familia de elementos compactos en L tal que $k = \bigvee_{i \in I} c_i$. Notamos que para cada $j \in I$, $a \leq a \vee c_j \leq a \vee (\bigvee_{i \in I} c_i) = a \vee k = k \leq b$ y por tanto $\{a \vee c_i\}_{i \in I} \subseteq b/a$. Además $k = a \vee k = a \vee (\bigvee_{i \in I} c_i) = \bigvee_{i \in I}(a \vee c_i)$ entonces, por ser $k \in b/a$ compacto en b/a, existe $J \subseteq I$ finito tal que $k = \bigvee_{i \in J}(a \vee c_i) = a \vee (\bigvee_{i \in J} c_i)$. Sea $c = \bigvee_{i \in J} c_i$, claramente c es compacto en L, pues es yunta finita de elementos compactos en L (ver Observación 2.1.11), además $a \vee c = k \leq b$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que existe $c \in L$ compacto en L tal que $a \vee c = k \leq b$. Sea $X \subseteq b/a$ tal que $k \leq \bigvee X$. Como $c \leq a \vee c \leq \bigvee X$ y c es compacto en L, existe $F \subseteq X$ finito tal que $c \leq \bigvee F$. Además, $F \subseteq X \subseteq b/a$, así que $a \leq \bigvee F$, luego $a \vee c \leq \bigvee F$ y por lo tanto $k = a \vee c$ es compacto en b/a. $\square$

Proposición 2.2.6. *Sea L retícula completa. Son equivalentes:*

(1) Todo elemento de L es compacto en L.

(2) L es neteriana.

Demostración.
[(1) ⇒ (2)] Sea $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ una sucesión ascendente en L, consideremos $c = \bigvee_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, por hipótesis, c es compacto, así que para el conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq L$, existe $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \subseteq \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $c = \bigvee_{j=1}^{k} a_{i_j}$. Sea $l = \text{máx}\{i_1, \ldots, i_n\}$, entonces $\bigvee_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = c = \bigvee_{j=1}^{k} a_{i_j} = a_l$ y por lo tanto $a_l = a_{l+1} = \cdots$, es decir, la sucesión $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ es estacionaria.
[(2) ⇒ (1)] Es consecuencia de la Proposición 1.5.15. □

Ejemplo 2.2.7. *Sea M un R-módulo izquierdo y consideremos la retícula completa $(S_R(M), \subseteq)$. Sabemos que $N \in S_R(M)$ es compacto si y sólo si N es finitamente generado, además es claro que M es neteriano si y sólo si $(S_R(M), \subseteq)$ es retícula neteriana. Aplicando la Proposición 2.2.6 a la retícula completa $(S_R(M), \subseteq)$ obtenemos: M es neteriano si y sólo si todo submódulo de M es finitamente generado.*

Proposición 2.2.8. *Si L es una retícula compactamente generada y $x, y \in L$. Entonces $x \leq y$ si y sólo si para cada $c \in L$ compacto en L, si $c \leq x$, entonces $c \leq y$.*

Demostración.
[⇒] Supongamos que $x \leq y$, es evidente que para toda $a \in L$, si $a \leq x$, entonces $a \leq y$, en particular, para toda $c \in L$ compacta en L, si $c \leq x$, entonces $c \leq y$.
[⇐] Como L es compactamente generada existe $\{c_i\}_{i\in I} \subseteq L$ familia de elementos compactos en L tal que $x = \bigvee_{i\in I} c_i$, es claro que $c_i \leq x$, para cada $i \in I$ entonces, por hipótesis, $c_i \leq y$, para cada $i \in I$. Por lo tanto $\bigvee_{i\in I} c_i \leq y$, es decir, $x \leq y$. □

La siguiente proposición establece que la clase de retículas compactamente generadas está incluida en la clase de retículas continuas superiormente.

Proposición 2.2.9. *Toda retícula compactamente generada es continua superiormente.*

Demostración. Sea L compactamente generada. Gracias a la Observación 1.5.4 basta mostrar que $a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$ para cada $a \in L$ y cada $D \subseteq L$ dirigido superiormente. Sean $a \in L$ y $D \subseteq L$ dirigido superiormente.

Sea $c \in L$ compacto en L tal que $c \leq a \wedge (\bigvee D)$. Como c es compacto (y por tanto, fuertemente compacto), $c \leq a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee D$ y D es dirigido superiormente, existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$, además $c \leq a \wedge (\bigvee D) \leq a$, así que $c \leq a \wedge d_0 \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. Hemos mostrado que para cada c compacto en L, $c \leq a \wedge (\bigvee D)$ implica que $c \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$, entonces, por la Proposición 2.2.8, $a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. $\square$

Definición 2.2.10. *Sean L una retícula y* P *una propiedad arbitraria de retículas. Diremos que $a \in L$* ***tiene la propiedad*** P *si la subretícula cociente $a/0$ tiene la propiedad* P.

Ejemplo 2.2.11. *Sea L una retícula, entonces:*

(1) $a \in L$ es neteriana (artiniana) si $a/0$ es neteriana (artiniana).

(2) $a \in L$ es modular (distributiva, continua superiormente, etc.) si $a/0$ es modular (distributiva, continua superiormente, etc.).

Como ya hemos mencionado, en el presente escrito se asume el Axioma de Elección. Una equivalencia de este axioma dicta lo siguiente: Para un conjunto arbitrario X, si α es el menor ordinal tal que $\alpha = |X|$, entonces los elementos de X se pueden acomodar en una (posiblemente transfinita) sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\rho, \ldots$ $(\rho < \alpha)$, esta equivalencia se cita en [3]. Utilizaremos este hecho para probar el siguiente:

Lema 2.2.12. *Una retícula L es continua superiormente si y sólo si para cualesquiera $a \in L$ y $X \subseteq L$ se cumple:*

$$a \wedge \left(\bigvee X\right) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} \left(a \wedge \left(\bigvee F\right)\right).$$

Demostración.
$[\Rightarrow]$ Sean $a \in L$ y $X \subseteq L$. Note que para cada $F \in \mathcal{P}_0(X)$, $a \wedge (\bigvee F) \leq a \wedge (\bigvee X)$ y por lo tanto $\bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)}(a \wedge (\bigvee F)) \leq a \wedge (\bigvee X)$. Además si X es finito la igualdad es evidente. Supongamos que X es infinito. Procedemos por inducción sobre el cardinal de X. Sea α el menor ordinal tal que $\alpha = |X|$ y supongamos que la igualdad se satisface para cualquier subconjunto de L de cardinal estrictamente menor a $|X|$. Ahora, arreglamos los elementos de X en una sucesión $\{x_\rho \mid \rho < \alpha\}$. Denotemos por $X_\xi = \{x_\rho \mid \rho < \xi\}$, es evidente que $|X_\xi| < |X|$ para cada $\xi < \alpha$. Sea $\mathcal{B} = \{\bigvee X_\xi \mid \xi < \alpha\}$, claramente $\mathcal{B}$ es

un conjunto dirigido superiormente. Además, para cada $\xi < \alpha$, $\bigvee X_\xi \leq \bigvee X$, así que $\bigvee_{\xi<\alpha}(\bigvee X_\xi) \leq \bigvee X$. Por otro lado, si $x \in X$, existe $\xi_x < \alpha$ tal que para cada $\rho > \xi_x$, $x = x_{\xi_x} \leq \bigvee X_\rho \leq \bigvee_{\xi<\alpha}(\bigvee X_\xi)$. Por lo tanto

$$\bigvee_{\xi<\alpha}(\bigvee X_\xi) = \bigvee X. \qquad (1)$$

Denotemos por $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_0(X_\xi)$. Es evidente que cada subconjunto finito de X está contenido en algún X_ξ y por tanto

$$\bigvee_{\xi<\alpha}(\bigvee_{F\in\mathcal{P}_\xi}(a \wedge (\bigvee F))) = \bigvee_{F\in\mathcal{P}_0(X)}(a \wedge (\bigvee F)). \qquad (2)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
a \wedge \left(\bigvee X\right) &= a \wedge \Big(\bigvee_{\xi<\alpha}\left(\bigvee X_\xi\right)\Big) && \text{(por (1))}\\
&= \bigvee_{\xi<\alpha}\Big(a \wedge \left(\bigvee X_\xi\right)\Big) && (L \text{ cont. sup. y } \mathcal{B} \text{ dirigido})\\
&= \bigvee_{\xi<\alpha}\Big(\bigvee_{F\in\mathcal{P}_\xi}\left(a \wedge \left(\bigvee F\right)\right)\Big) && \text{(Hipótesis de Inducción)}\\
&= \bigvee_{F\in\mathcal{P}_0(X)}\Big(a \wedge \left(\bigvee F\right)\Big) && \text{(por (2))}
\end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Sean $a \in L$ y $D \subseteq L$ dirigido superiormente. Como D es dirigido superiormente, para cada $F \subseteq D$ finito, existe $d_F \in D$ cota superior de F y por tanto $\bigvee F \leq d_F$, así que $a \wedge (\bigvee F) \leq a \wedge d_F \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$ para cada $F \in \mathcal{P}_0(D)$ y por lo tanto $\bigvee_{F\in\mathcal{P}_0(D)}(a \wedge (\bigvee F)) \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. Finalmente, por hipótesis, $a \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{F\in\mathcal{P}_0(D)}(a \wedge (\bigvee F)) \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. Recordemos que la otra desigualdad se satisface en cualquier retícula. $\square$

Ejemplo 2.2.13. *Sea M un R-módulo izquierdo. La propiedad en el Lema 2.2.12 se satisface en $(S_R(M), \subseteq)$ porque si $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq S_R(M)$ y $a \in \sum_{i\in I} N_i$ entonces existe $J \subseteq I$ finito tal que $a \in \sum_{i\in J} N_i$ ya que las operaciones en M son finitas.*

Proposición 2.2.14. *Si L es una retícula continua superiormente y $a \in L$ es neteriano, entonces a es compacto en L.*

Demostración. Sea $a \in L$ un elemento neteriano, esto es, $a/0$ es una retícula neteriana, entonces, por la Proposición 2.2.6, todo elemento de $a/0$ es compacto en $a/0$, en particular, a es compacto en $a/0$. Veamos que a es compacto en L. Sea $X \subseteq L$ tal que $a \leq \bigvee X$. Notamos que $a \wedge (\bigvee F) \leq a$ para cada $F \in \mathcal{P}_0(X)$ y por tanto $\{a \wedge (\bigvee F)\}_{F \in \mathcal{P}_0(X)} \subseteq a/0$, además, por el Lema 2.2.12, $a = a \wedge (\bigvee X) = \bigvee_{F \in \mathcal{P}_0(X)} (a \wedge (\bigvee F))$ entonces, como a es compacto en $a/0$, existe $\{a \wedge (\bigvee F_1), \ldots, a \wedge (\bigvee F_n)\} \subseteq \{a \wedge (\bigvee F)\}_{F \in \mathcal{P}_0(X)}$ tal que $a \leq \bigvee_{i=1}^{n} (a \wedge (\bigvee F_i))$. Sea $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, es evidente que F es finito y $F \subseteq X$, además para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $\bigvee F_i \leq \bigvee F$ y por lo tanto $\bigvee_{i=1}^{n} (\bigvee F_i) \leq \bigvee F$. Finalmente, $a \leq \bigvee_{i=1}^{n} (a \wedge (\bigvee F_i)) \leq a \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} (\bigvee F_i)) \leq a \wedge (\bigvee F) \leq \bigvee F$ con $F \subseteq X$ finito. Por lo tanto a es compacto en L. $\square$

Definición 2.2.15. *Una retícula completa L se llama **compacta** si $1 \in L$ es elemento compacto en L.*

Ejemplo 2.2.16.

(1) Sea X un conjunto, sabemos que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula compactamente generada, sin embargo, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es compacta solo si X es finito.

(2) Sea M un R-módulo izquierdo, sabemos que $(S_R(M), \subseteq)$ es una retícula compactamente generada, sin embargo, $(S_R(M), \subseteq)$ es compacta solo si M es finitamente generado.

Lema 2.2.17. *Toda retícula completa neteriana es compacta.*

Demostración. Si L es completa y neteriana entonces, por la Proposición 2.2.6, todo elemento de L es compacto en L, en particular $\bigvee L = 1$ es compacto en L y por lo tanto L es compacta. $\square$

Lema 2.2.18 (Krull). *Si L es retícula compacta y $a \in L$, con $a \neq 1$, entonces la subretícula $1/a$ tiene por lo menos un elemento máximo diferente de 1.*

Demostración. Sean $a \in L$, con $a \neq 1$, y $S = (1/a) - \{1\}$, claramente $S \neq \varnothing$, con el fin de aplicar el Lema de Zorn al conjunto S, vamos a garantizar que toda cadena de S tiene cota superior en S. Sea $C \subseteq S$ una cadena (y por tanto un conjunto dirigido superiormente) en S, es evidente que $\bigvee C$ es cota superior de C. Además, $\bigvee C \neq 1$, pues de lo contrario, esto es, si $1 = \bigvee C$ entonces, por ser C dirigido superiormente y $1 \in L$ compacto en L (i.e., fuertemente compacto), existe $c_0 \in C$ tal que $1 = c_0$, así que $1 = c_0 \in C \subseteq S = (1/a) - \{1\}$ lo cual es una contradicción. Entonces $a \leq c \leq \bigvee C < 1$ y por lo tanto $\bigvee C \in S$. Se sigue del Lema de Zorn que S tiene al menos un elemento máximo y por lo tanto $1/a$ tiene por lo menos un elemento máximo diferente de 1. $\square$

Con el fin de dar una prueba al recíproco del Teorema 1.3.9 es necesario el siguiente:

Lema 2.2.19. *Sea L una retícula en la que $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$ para cualesquiera $a, b \in L$ y sean $p, q, r \in L$ con $q \prec p$, entonces $r \wedge p = r \wedge q$ o bien $r \wedge q \prec r \wedge p$. (Dualmente: $r \vee p = r \vee q$ o bien $r \vee q \prec r \vee p$).*

Demostración. Como $q \prec p$, entonces $q \leq p$, así que $r \wedge q \leq r \wedge p$. Distinguimos dos casos: $r \wedge q = r \wedge p$ o bien $r \wedge q < r \wedge p$. Si $r \wedge q = r \wedge p$, el lema queda probado. Si $r \wedge q < r \wedge p$, veamos que necesariamente se tiene $r \wedge q \prec r \wedge p$. Supongamos que $r \wedge q$ no es cubierto por $r \wedge p$, entonces existe $z \in L$ tal que $r \wedge q < z < r \wedge p$, esto es, $z \in (r \wedge p)/(r \wedge q)$. Notamos que $q \prec p$, $r \wedge p \leq p$ y la hipótesis principal garantizan que

$$(r \wedge p)/(r \wedge q) = (r \wedge p)/((r \wedge p) \wedge q) \cong ((r \wedge p) \vee q)/q \subseteq p/q$$

Por lo tanto, haciendo uso del isomorfismo entre $(r \wedge p)/((r \wedge p) \wedge q)$ y $((r \wedge p) \vee q)/q$, se tiene que $q < z \vee q < (r \wedge p) \vee q \leq p$ lo cual contradice que $q \prec p$. $\square$

Definición 2.2.20. *Una retícula L se llama **débilmente atómica** si para cualesquiera $a, b \in L$, con $a < b$, existen $u, v \in L$ tales que $a \leq u \prec v \leq b$.*

Lema 2.2.21. *Toda retícula compactamente generada es débilmente atómica.*

Demostración. Sean L compactamente generada y $a, b \in L$, con $a < b$. Como L es compactamente generada, existe $\{c_i\}_{i \in I} \subseteq L$ familia de elementos compactos en L tal que $b = \bigvee_{i \in I} c_i$. Notamos que existe $k \in I$ tal que $c_k \nleq a$, pues de lo contrario, esto es, si para cada $i \in I$, $c_i \leq a$, entonces $b = \bigvee_{i \in I} c_i \leq a < b$ lo cual es una contradiccón. Por lo tanto existe $c \in L$ compacto en L tal que $c \nleq a$ y $c \leq b$, luego $a < a \vee c \leq b$. Sea $A = \{x \in L \mid a \leq x < a \vee c\}$, como $a \in A$, entonces $A \neq \varnothing$. Sea $C \subseteq A$ una cadena (y por tanto conjunto dirigido superiormente) en A. Claramente $d = \bigvee C$ es cota superior de C, además $a \leq d \leq a \vee c$. Sin embargo, si $d = a \vee c$, entonces $c \leq a \vee c = d = \bigvee C$, luego, como c es compacto (i.e., fuertemente compacto) y $C \subseteq L$ es dirigido superiormente, existe $c_0 \in C$ tal que $c \leq c_0$ equivalentemente $c_0 \vee c = c_0$. Como $c_0 \in C \subseteq A$, entonces $a \leq c_0 < a \vee c$, luego $a \vee c \leq c_0 \vee c = c_0 < a \vee c$ lo cual es una contradicción. Así obtenemos que necesariamente $a \leq d < a \vee c$, es decir, $\bigvee C = d \in A$. Lo anterior muestra que toda cadena de A tiene cota superior en A entonces, aplicando el Lema de Zorn, existe $u \in A$ elemento máximo en A. Sea $v = a \vee c$, entonces $a \leq u < v \leq b$, además, la maximalidad de u garantiza que $u \prec v$. □

Ejemplo 2.2.22. *Las retículas completas* $(S_R(M), \subseteq)$ *y* $(I(L), \subseteq)$ *son débilmente atómicas pues estas son compactamente generadas.*

Teorema 2.2.23 (Crawley). *Si* L *es una retícula compactamente generada tal que para cualesquiera* $a, b \in L$ *se cumple que* $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$*, entonces* L *es modular.*

Demostración. [Por contradicción] Supongamos que L no es modular entonces, por el Teorema 1.3.8, existe al menos una subretícula isomorfa al pentágono y por tanto existen $a, b, t, u, v \in L$ tales que $a \prec b$, $t \vee a = t \vee b = v$ y $t \wedge a = t \wedge b = u$. Sea T el conjunto conformado por los elementos $(x, y, z) \in L \times L \times L$ tales que:
(1) $b \leq x \leq v$; $a \leq y$ y $u \leq z$;
(2) $t \vee y = v$;
(3) $t \wedge x = z$;
(4) $z \leq y \prec x$;
(5) $b \wedge y = a$.
Notamos que $(b, a, u) \in T$ y por lo tanto $T \neq \varnothing$. No es difícil ver que la relación, $\leq^*$, definida para cada $(x, y, z), (x', y', z') \in T$ por:

$$(x, y, z) \leq^* (x', y', z') \text{ si y sólo si } x \leq x',\ y \leq y' \text{ y } z \leq z'$$

es un orden parcial sobre T y por lo tanto $(T, \leq^*)$ es un COPO. Sea $C = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i \in I} \subseteq T$ una cadena en T. Sean $\bar{x} = \bigvee_{i \in I} x_i$, $\bar{y} = \bigvee_{i \in I} y_i$ y $\bar{z} = \bigvee_{i \in I} z_i$. Es evidente que $(x_i, y_i, z_i) \leq^* (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ para cada $i \in I$, así que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es cota superior de C. Veamos que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in T$, es claro que para cada $i \in I$, (x_i, y_i, z_i) satisface las propiedades (1), (2), (3), (4) y (5) pues $C \subseteq T$. Entonces:
(1) Para cada $i \in I$ tenemos $b \leq x_i \leq v$, $a \leq y_i$ y $u \leq z_i$, luego $b \leq \bar{x} \leq v$; $a \leq \bar{y}$ y $u \leq \bar{z}$.
(2) $t \vee \bar{y} = t \vee (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I}(t \vee y_i) = \bigvee_{i \in I}\{v\} = v$.

(3) Como L es compactamente generada (y por tanto continua superiormente) tenemos $t \wedge \bar{x} = t \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I}(t \wedge x_i) = \bigvee_{i \in I} z_i = \bar{z}$.
(4) Es claro que $\bar{z} \leq \bar{y}$. Observe que para cada $i \in I$, $b \nleq y_i$, pues de lo contrario, esto es, si existe $k \in I$ tal que $b \leq y_k$, entonces $b = b \wedge y_k = a$ lo cual no es posible pues $a \prec b$. Así obtenemos que para cada $i \in I$ se cumple que $b \leq x_i$, $y_i \prec x_i$ y $b \nleq y_i$. Luego, $y_i < b \vee y_i \leq x_i$ y por lo tanto $b \vee y_i = x_i$ para cada $i \in I$. Entonces $b \vee \bar{y} = b \vee (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I}(b \vee y_i) = \bigvee_{i \in I} x_i = \bar{x}$. Finalmente, gracias a la hipótesis principal, tenemos $\bar{x}/\bar{y} = (b \vee \bar{y})/\bar{y} \cong b/(b \wedge \bar{y}) = b/a$. Por lo tanto $\bar{y} \prec \bar{x}$ pues $a \prec b$ y $\bar{x}/\bar{y} \cong b/a$.
(5) Por continuidad superior tenemos $b \wedge \bar{y} = b \wedge (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I}(b \wedge y_i) = \bigvee_{i \in I}\{a\} = a$.
Hemos mostrado que toda cadena en T tiene cota superior en T entonces, aplicando el Lema de Zorn, existe $(p, q, r) \in T$ elemento máximo. Nuevamente, por hipóteis, tenemos $v/q = (t \vee q)/q \cong t/(t \wedge q) = t/r$, además como $q \prec p < v$, entonces el isomorfismo garantiza que existe $r' \in t/r$ tal que $r \prec r' < t$. Sean $p' = p \vee r'$ y $q' = q \vee r'$. Es evidente que $(p, q, r) < (p', q', r')$. Veamos que $(p', q', r') \in T$ lo cual contradice que (p, q, r) es elemento máximo y con ello finalizamos la demostración.
(1) $b \leq p \leq v = t \vee q$ y $r' < t \leq t \vee q$ y por tanto $b \leq p \vee r' = p' \leq t \vee q = v$, además $a \leq q < q'$ y $u \leq r \prec r'$.
(2) $r' < t \leq t \vee q$ y por lo tanto $v = t \vee q = (t \vee q) \vee r' = t \vee (q \vee r') = t \vee q'$.
(3) Como $t \wedge p = r$, entonces $r' \nleq p$, así que $p \vee r = p < p \vee r' = p'$, como $r \prec r'$ entonces, por el Lema 2.2.19, $p = p \vee r \prec p \vee r' = p'$. Por otro lado, como $p \prec p'$, usando nuevamente el Lema 2.2.19 obtenemos $r = t \wedge p \prec t \wedge p'$, además $t \wedge p = r \prec r' \leq t \wedge p'$ y por lo tanto $t \wedge p' = r'$.
(4) De $p \prec p'$ obtenemos $q \prec q'$. Consecuentemente $p' \neq q'$ (pues de otro modo se tendría $q < p < q'$ lo que contradice que $q \prec q'$). Entonces $q \vee r' = q' \neq p' = p \vee r'$, además $q \prec p$, utilizando el Lema 2.2.19 obtenemos $q' \prec p'$. Además es claro que $r' \leq q \vee r' = q'$.
(5) Como $a < b < p$ y $a < q'$, entonces $b \wedge q' \leq p \wedge q' = q$, así que $a \leq b \wedge q' \leq b \wedge q = a$ y por lo tanto $b \wedge q' = a$. □

Ahora vamos a demostrar uno de los teoremas clásicos de la Teoría de Módulos utilizando herramientas de la Teoría de Retículas.

Teorema 2.2.24. *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

(1) R es neteriano izquierdo.

(2) R tiene un generador $_RG$ que es neteriano.

(3) Todo R-módulo izquierdo finitamente generado es neteriano.

(4) Todo submódulo izquierdo de cualquier R-módulo izquierdo finitamente generado es finitamente generado.

Demostración. Primero recordemos que un anillo R se llama *neteriano izquierdo* (respectivamente, *derecho*) si el R-módulo izquierdo $_RR$ (respectivamente, R-módulo derecho R_R) es neteriano. El anillo R se llama *neteriano* si es neteriano izquierdo y neteriano derecho.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Es evidente pues $_RR$ es generador neteriano de R.
[(2) $\Rightarrow$ (3)] Sea $_RG$ generador neteriano de R. Sabemos que para cada conjunto finito F la suma directa $G^{(F)}$ es neteriana. Ahora, si $_RM$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado, entonces existe algún F_0 finito tal que $_RM$ es isomorfo a algún factor de $G^{(F_0)}$. Como $G^{(F_0)}$ es neteriano entonces, por la Proposicíon 1.5.18, cada factor es neteriano y por lo tanto $_RM$ es neteriano.
[(3) $\Rightarrow$ (4)] Se sigue del Ejemplo 2.2.7.
[(4) $\Rightarrow$ (1)] Como $_RR$ es finitamente generado entonces, por hipótesis, cada uno de sus subódulos izquierdos son finitamente generados, así que, gracias al Ejemplo 2.2.7, $_RR$ es neteriano y por lo tanto R es neteriano izquierdo. $\square$

Definición 2.2.25. *Una retícula L se llama **H-neteriana** si el conjunto $C(L) = \{c \in L \mid c \text{ es compacto en } L\}$ es un ideal en L.*

Ejemplo 2.2.26. *Sea M un R-módulo izquierdo. Utilizando el Teorema 2.2.24 y el hecho de que $N \in S_R(M)$ es compacto si y sólo si N es finitamente generado obtenemos: $(S_R(M), \subseteq)$ es H-neteriana si y sólo si R es neteriano izquierdo.*

Observación 2.2.27. *Una retícula L es H-neteriana si y sólo si toda cota inferior de un elemento compacto en L es compacta en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Sean $m, c \in L$ con c compacto en L y $m \leq c$. Como L es H-neteriana entonces $C(L)$ es ideal en L y por tanto $m \in C(L)$ de donde se concluye que m es compacto en L.
[$\Leftarrow$] Sabemos que la yunta finita de elemento compactos es compacta entonces, si $a, b \in C(L)$ se cumple que $a \vee b \in C(L)$. Además si $c \in C(L)$ y $x \leq c$ entonces, por hipótesis, $x \in C(L)$. Por lo tanto $C(L)$ es ideal en L, es decir, L es H-neteriana. $\square$

Observación 2.2.28. *Debido a la Observación 1.5.16, tenemos que toda cota inferior de un elemento neteriano es neteriana.*

Teorema 2.2.29. *Si L es una retícula continua superiormente. Son equivalentes:*

(1) Todo elemento compacto en L es neteriano.

(2) L es H-neteriana.

Demostración.
[$\Rightarrow$] Sean $m, c \in L$ con c compacto en L y $m \leq c$. Como todo elemento compacto es neteriano, entonces c es neteriano y por tanto m es neteriana pues es cota inferior de c. Además, como L es continua superiormente y m es neteriano entonces, por la Proposición 2.2.14, m es compacto en L. Hemos probado que toda cota inferior de un elemento compacto es compacta entonces, por la Observación 2.2.27, L es H-neteriana.
[$\Leftarrow$] Sea $c \in L$ elemento compacto. Se sigue de la Observación 2.2.27 y la hipótesis (L es H-neteriana) que $c/0$ es una subretícula cuyos elementos son todos compactos. Entonces, por la Proposición 2.2.6, $c/0$ es neteriana y por lo tanto c es neteriano. □

Definición 2.2.30. *Sea L una retícula completa. Un elemento $c \in L$ se llama **yunta-inaccesible** en L si para todo $D \subseteq L$ dirigido superiormente tal que $c = \bigvee D$, existe $d_0 \in D$ tal que $c = d_0$.*

Proposición 2.2.31. *Si L es retícula completa y $c \in L$ es compacto en L, entonces c es yunta-inaccesible en L.*

Demostración. Sean $c \in L$ compacto y $D \subseteq L$ dirigido superiormente tal que $c = \bigvee D$. Como c es compacto, existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$, por otro lado $d_0 \leq \bigvee D = c$ y por lo tanto $c = d_0$. □

Proposición 2.2.32. *Si L es superiormente continua. Entonces $c \in L$ es compacto en L si y sólo si c es yunta-inaccesible en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Es consecuencia de la Proposición 2.2.31.
[$\Leftarrow$] Sean $c \in L$ yunta-inaccesible en L y $D \subseteq L$ dirigido superiormente tal que $c \leq \bigvee D$. Como $c \leq \bigvee D$ y L es superiormente continua, entonces $c = c \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{d \in D}(c \wedge d)$, además $\{c \wedge d\}_{d \in D}$ es un conjunto dirigido superiormente, luego, ya que c es yunta-inaccesible en L, existe $d_0 \in D$ tal que $c = c \wedge d_0$ y por lo tanto $c \leq d_0$. □

2.3. Series de Composición y Longitud

Definición 2.3.1. *Sean L una retícula y $A, B \subseteq L$ dos intervalos (subretículas cociente).*

(1) *A y B se llaman **similares** si existen $a, b \in L$ tales que $\{A, B\} = \{a/(a \wedge b), (a \vee b)/b\}$.*

(2) *A y B se llaman **proyectivos** si existen intervalos $A = I_0, I_1, \ldots, I_n = B$ tales que I_{k-1} e I_k son similares para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Observación 2.3.2. *La relación $\{A, B\} = \{a/(a \wedge b), (a \vee b)/b\}$ en la Definición 2.3.1, nos dice que $A = a/(a \wedge b)$ y $B = (a \vee b)/b$; o bien $A = (a \vee b)/b$ y $B = a/(a \wedge b)$.*

Observación 2.3.3. *En toda retícula L cualesquiera dos intervalos similares son proyectivos. Si además L es modular entonces, por el Teorema 1.3.9, cualesquiera dos intervalos similares son isomorfos.*

Definición 2.3.4. *Sean L una retícula y $a, b \in L$. Dos cadenas*

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = b$$

$$a = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n = b$$

*se llaman **equivalentes** si $m = n$ y existe una pemutación $\sigma \in S_n$ (es decir, una función biyectiva $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$) tal que las subretículas cociente a_i/a_{i-1} y $b_{\sigma(i)}/b_{\sigma(i)-1}$ son proyectivas para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definición 2.3.5. *Sean L es una retícula y $a, b \in L$. Diremos que la cadena $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = b$ es un **refinamiento** de la cadena $a = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n = b$ si para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ existe $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $b_i = a_j$, es decir, $\{b_k\}_{k=0}^{n} \subseteq \{a_i\}_{i=0}^{m}$.*

Observación 2.3.6. *Toda cadena $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = b$ entre dos elementos a y b es refinamiento de si misma. Además un refinamiento de una cadena $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = b$ se obtiene insertando nuevos elementos a dicha cadena.*

Teorema 2.3.7 (Schreier). *En toda retícula modular cualesquiera dos cadenas finitas entre un mismo par de elementos tienen refinamientos equivalentes.*

Demostración. Sean L una retícula modular y $a, b \in L$. Consideremos

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = b \qquad (1)$$

$$a = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n = b \qquad (2)$$

dos cadenas entre a y b. Para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$ y cada $j \in \{0, \ldots, n\}$ sean:

$$\begin{aligned} a_{(i,j)} &= (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-i} \overset{\text{mod}}{=} (a_i \vee b_{j-1}) \wedge b_j; \text{ y} \\ b_{(j,i)} &= (b_j \wedge a_i) \vee a_{i-i} \overset{\text{mod}}{=} (b_j \vee a_{i-1}) \wedge a_i. \end{aligned}$$

Denotemos por $x = a_i \wedge b_j$ y $y = a_{(i-1,j)}$, entonces:

$$\begin{aligned} x \vee y &= (a_i \wedge b_j) \vee [(a_{i-1} \wedge b_j) \vee b_{j-i}] \\ &= [(a_i \wedge b_j) \vee (a_{i-1} \wedge b_j)] \vee b_{j-i} && \text{(asociativa)} \\ &= [(a_i \wedge (b_j \vee (a_{i-1} \wedge b_j))] \vee b_{j-i} && (a_{i-1} \wedge b_j \leq a_{i-1} \leq a_i \text{ y mod.}) \\ &= (a_i \wedge b_j) \vee b_{j-i} && \text{(absorción)} \\ &= a_{(i,j)} \end{aligned}$$

Por otro lado $x \wedge y = (a_i \wedge b_j) \wedge [(a_{i-1} \vee b_{j-1}) \wedge b_j] = (a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1})$.

Por lo tanto

$$a_{(i,j)}/a_{(i-1,j)} = (x \vee y)/y$$

y

$$(a_i \wedge b_j)/[(a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1})] = x/(x \wedge y)$$

son subretículas similares. De forma análoga, denotando por $x' = b_j \wedge a_i$ y $y' = b_{(j-1,i)}$, se prueba que

$$(a_i \wedge b_j)/[(a_i \wedge b_j) \wedge (a_{i-1} \vee b_{j-1})] = x'/(x' \wedge y')$$

y

$$b_{(j,i)}/b_{(j-1,i)} = (x' \vee y')/y'$$

son subretículas similares. Entonces $a_{(i,j)}/a_{(i-1,j)}$ y $b_{(j,i)}/b_{(j-1,i)}$ son proyectivas. Además notamos que para cada $i \in \{0, \cdots, m\}$, $b_{(n,i)} = (b_n \wedge a_i) \vee a_{i-1} = (b \wedge a_i) \vee a_{i-1} = a_i$, de forma similar obtenemos $a_{(m,j)} = b_j$ para cada $j \in \{0, \cdots, n\}$. Así que

$$a = a_{(0,1)} \leq a_{(1,1)} \leq a_{(2,1)} \leq \cdots \leq a_{(m,1)} \leq a_{(1,2)} \leq \cdots \leq a_{(m,n)} = b \qquad (3)$$

es refinamiento de (2). Además,

$$a = b_{(0,1)} \leq b_{(1,1)} \leq b_{(2,1)} \leq \cdots \leq b_{(n,1)} \leq b_{(1,2)} \leq \cdots \leq b_{(n,m)} = b \qquad (4)$$

es refinamiento de (1). Finalmente, es claro que (3) y (4) son refinamientos equivalentes. □

Definición 2.3.8. *Sean L una retícula y $a, b \in L$. Una cadena finita entre a y b, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ se llama* ***cadena de composición*** *si dicha cadena no tiene refinamientos (salvo ella misma). Al entero n le llamaremos* ***longitud*** *de la cadena de composición.*

Observación 2.3.9. *Si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ es una cadena de composición entre a y b, entonces $a_k/a_{k-1} = \{a_{k-1}, a_k\}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Ejemplo 2.3.10. *Sea M es un R-módulo izquierdo. Una cadena de composición entre $\{0\}$ y M en $S_R(M)$ es una cadena de submódulos $\{0\} \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$ tal que M_i/M_{i-1} es simple para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Una consecuencia inmediata del Teorema del refinamiento de Schreier es el siguiente:

Corolario 2.3.11 (Jordan-Hölder). *En toda retícula modular, cualesquiera dos cadenas de composición entre un mismo par de elementos son cadenas equivalentes.*

El corolario anterior garantiza que dada una cadena de composición entre dos elementos esta es única (salvo equivalencia). Entonces podemos asociar a cada subretícula cociente un único numero natural al cual llamaremos *longitud*, más concretamente tenemos:

Definición 2.3.12. *Sean L una retícula modular y $a, b \in L$, con $a \leq b$.*

(1) Si los elementos a y b poseen una cadena de composición de longitud n, entonces diremos que la ***longitud del intervalo*** *(subretícula cociente) b/a es n.*

(2) Si L tiene cero y uno; y la longitud del intervalo $1/0$ es el entero m, entoces diremos que la ***longitud de*** L *es m. En este caso diremos que L tiene longitud finita.*

Notación 2.3.13. *Sean L una retícula modular y $a, b \in L$, con $a \leq b$.*

(1) *Denotaremos por $l(b/a)$ a la longitud de la subretícula cociente b/a.*

(2) *Si L tiene cero y uno. Denotaremos por $l(L)$ a la longitud de L, es decir, $l(L) = l(1/0)$.*

Observación 2.3.14. *Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.5.18 es la siguiente: En una retícula modular L, si $a, b, c \in L$, con $a < b < c$, entonces c/a es neteriana (respectivamente artiniana) si y sólo si b/a y c/b son neterianas (respectivamente, artinianas).*

Usando CCA y CCD se puede caracterizar a la clase de retículas modulares que tienen longitud finita, esto lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.15. *Si L es una retícula modular con cero y uno. Entonces L tiene longitud finita si y sólo si L es neteriana y artiniana.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que L tiene longitud finita, entonces existe una cadena de composición $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ entre 0 y 1. Además, $a_k/a_{k-1} = \{a_{k-1}, a_k\}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y por tanto a_k/a_{k-1} es evidentemente neteriana y artiniana para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Usando repetidamente la Observación 2.3.14 obtenemos que $1/0 = L$ es neteriana y artiniana.
[$\Leftarrow$] Supongamos que L es neteriana y artiniana. Como L es artiniana, entonces para $A_1 = \{x \in L \mid 0 < x\}$ existe $a_1 \in A_1$ elemento mínimo de A_1, además note que $0 < a_1$, para $A_2 = \{x \in L \mid a_1 < x\}$ existe $a_2 \in A_2$ elemento mínimo de A_2, además note que $a_1 < a_2$, continuando este proceso se construye una sucesión $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, pero L es neteriana, así que la sucesión anterior se estaciona y por lo tanto es finita con término final $a_m = 1$. Además es claro que para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, a_k/a_{k-1} es simple, concluimos que $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m = 1$ es una cadena de composición entre 0 y 1. Por lo tanto $l(L) = m$. $\square$

Ejemplo 2.3.16. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Entonces $S_F(V)$, la retícula de subespacios vectoriales de V ordenada por inclusión, tiene longitud finita si y sólo si V tiene dimensión finita.*

En efecto, supongamos que V tiene dimensión infinita y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un subconjunto numerable de la base de V. Entonces la sucesión

$$\langle\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}\rangle \supset \langle\{x_2, x_3, \ldots\}\rangle \supset \langle\{x_3, \ldots\}\rangle \supset \cdots$$

es decendente y no estacionaria lo cual implica que $S_F(V)$ no es artiniana. Por otro lado la sucesión

$$\langle\{x_1\}\rangle \subset \langle\{x_1, x_2\}\rangle \subset \langle\{x_1, x_2, x_3\}\rangle \subset \cdots$$

es ascendente y no estacionaria lo cual implica que $S_F(V)$ no es neteriana. Por lo tanto $S_F(V)$ no es neteriana y no es artiniana lo que implica que $S_F(V)$ no tiene longitud finita (note que la demostración se hizo por contraposición). Reciprocamente, supongamos que V tiene dimensión finita, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V \cong F^n$. Sabemos F^n es neteriano y artiniano, así que $S_F(F^n)$ es neteriana y artiniana. Por lo tanto $S_F(V)$ es neteriana y artiniana, luego $S_F(V)$ tiene longitud finita.

Lema 2.3.17. *Sean L retícula modular y $a, b, c \in L$, con $a \leq b \leq c$. Entonces la subretícula cociente c/a tiene longitud finita si y sólo si las subretículas b/a y c/b tienen longitud finita.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Es consecuencia del Teorema 2.3.15 y la Observación 2.3.14.
[$\Leftarrow$] Si b/a y c/b tienen longitud finita, entonces existen cadenas de composición $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ y $b = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = c$ entre a y b; y entre b y c, respectivamente. Entonces, es evidente que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = c$$

es una cadena de composición entre a y c y por lo tanto c/a tiene longitud finita. □

Observación 2.3.18. *Una consecuencia inmediata del Lema 2.3.17 es la siguiente: Si L es modular, $a, b, c \in L$, con $a \leq b \leq c$, y c/a tiene longitud finita, entonces $l(c/a) = l(b/a) + l(c/b)$.*

Si L es una retícula semimodular inferior (esto es, L satisface la condición del cubrimiento inferior) que tiene longitud finita, entonces se puede definir en L una función que asigna a cada elemento de L un número entero, concretamente:

Definición 2.3.19. *Sea L es una retícula semimodular inferior que tiene longitud finita. Definimos $l : L \longmapsto \mathbb{N}$ como $l(a) = l(a/0)$ para cada $a \in L$. A esta función la llamaremos **función longitud** de L.*

Algunas propiedades de la función longitud asociada a una retícula semimodular que tiene longitud finita se dan en el siguiente lema. También establecemos una caracterización de las retículas modulares de longitud finita mediante su función longitud asociada.

Lema 2.3.20. *Sean L una retícula semimodular superior que tiene longitud finita y $l : L \longrightarrow \mathbb{N}$ su función longitud. Entonces:*

(1) $l(a) = 0$ si y sólo si $a \in L$ es el elemento menor de L.

(2) Para cualesquiera $a, b \in L$, $a \prec b$ si y sólo si $a \leq b$ y $l(b) = l(a) + 1$.

(3) Para cualesquiera $a, b \in L$, $l(a \wedge b) + l(a \vee b) \leq l(a) + l(b)$.

(4) L es modular si y sólo si $l(x \wedge y) + l(x \vee y) = l(x) + l(y)$ para cada $x, y \in L$.

Demostración. (1) y (2) son inmediatas por definición de la función longitud.
Demostración de (3): Sea $(a \wedge b) = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ una cadena de composición entre $a \wedge b$ y b. Por como está definida la longitud de intervalos tenemos que la longitud de $b/(a \wedge b)$ es $l(b) - l(a \wedge b)$. La semimodularidad implica que $\{a \vee a_i\}_{i=0}^{n}$ es cadena de composición entre a y $(a \vee b)$, cuya longitud es a lo más la longitud de la cadena de composición entre $(a \wedge b)$ y b. Por otro lado es claro que la longitud de $(a \vee b)/a$ es $l(a \vee b) - l(a)$. Por lo tanto

$$l(a \vee b) - l(a) \leq l(b) - l(a \wedge b).$$

Demostración de (4): [$\Rightarrow$] Supongamos que L es modular. Sean $a, b \in L$, por el Teorema 1.3.9, $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$ y por tanto $l((a \vee b)/b) = l(a/(a \wedge b))$, además $0 \leq b \leq a \vee b$ y $0 \leq a \wedge b \leq a$, entonces, por la Observación 2.3.18, $l(a \vee b) = l(b) + l((a \vee b)/b)$ y $l(a) = l(a \wedge b) + l(a/(a \wedge b))$. Luego $l(a \vee b) - l(b) = l(a) - l(a \wedge b)$ y por lo tanto $l(a \vee b) + l(a \wedge b) = l(a) + l(b)$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $l(x \wedge y) + l(x \vee y) = l(x) + l(y)$ para cada $x, y \in L$ y que L no es modular, entonces L contiene alguna subretícula isomorfa al pentágono y por tanto existen $a, b, c, o, i \in L$ tales que $a < c$, $a \| b$, $c \| b$, $a \vee b = c \vee b = i$ y $a \wedge b = c \wedge b = o$. Entonces

$$l(o) + l(i) = l(a \wedge b) + l(a \vee b) = l(a) + l(b), \text{ i. e., } l(i) = l(a) + l(b) - l(o)$$

$$l(o) + l(i) = l(c \wedge b) + l(c \vee b) = l(c) + l(b), \text{ i. e., } l(i) = l(c) + l(b) - l(o)$$

Luego, $l(a) = l(c)$ lo cual es una contradicción ya que $a < c$. $\square$

Definición 2.3.21. *Sea L una retícula con cero.*

*(1) Diremos que L **satisface la condición** (B) si para cualesquiera $a \in L$ y $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq L$ cadena de L tales que $a \wedge b_i = 0$, para cada $i \in I$, se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = 0$.*

*(2) Diremos que L es **inductiva** si todas sus subretículas cociente satisfacen la condición (B).*

Lema 2.3.22. *Sea L es una retícula inductiva. Si $\{c_i\}_{i\in I} \subseteq L$ una cadena en L y $a \in L$ son tales que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} c_i) \neq 0$, entonces existe $F \subseteq I$ finito tal que $a \wedge (\bigvee_{i\in F} c_i) \neq 0$.*

Demostración. Si la cadena es finita y por tanto I es finito, tomamos $F = I$. Supongamos que I es infinito, procederemos por contradicción. Supongamos que I es el mínimo ordinal con la siguiente propiedad: Existe una cadena $C = \{c_i\}_{i\in I} \subseteq L$ y existe $a \in L$ tales que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} c_i) \neq 0$ y para cada $J \subseteq I$ finito se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i\in J} c_i) = 0$. Para cada $i \in I$ denotemos por $b_i = \bigvee_{j\in I-\{i\}}(\bigvee_{k\leq j} c_k)$, como C es cadena entonces $\{b_i\}_{i\in I}$ es una cadena, más aún, se tiene que $\bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} c_i$, luego

$$a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = a \wedge (\bigvee_{i\in I} c_i) \neq 0. \qquad (1)$$

Es evidente que $a, (\bigvee_{i\in I} b_i) \in (a \vee (\bigvee_{i\in I} b_i))/0$, además, como L es inductiva, $(a \vee (\bigvee_{i\in I} b_i))/0$ satisface la condición (B), así que existe $k \in I$ tal que $a \wedge b_k \neq 0$, de lo contrario, esto es, si para cada $k \in L$ se cumple que $a \wedge b_k = 0$ entonces, por la condición (B), $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = 0$ lo que contradice (1). Luego, como $a \wedge b_k \neq 0$, entonces $a \wedge (\bigvee_{i\leq k} c_i) \neq 0$. Sea $K = \{i \in I \mid i \leq k\}$. Notamos que $K \subseteq I$ es un ordinal tal que $a \wedge (\bigvee_{i\in K} c_i) \neq 0$. Además, para cada $J \subseteq K$ finito se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i\in J} c_i) = 0$. Entonces, por la minimalidad de I, se tiene que $I = K$ y por lo tanto k es el elemento mayor de I. Sea $T = \{i \in I \mid i < k\}$, claramente K es ordinal sucesor cuyo predecesor es T, además T y K son ordinales infinitos y por tanto $\omega \leq T < K$. Podemos renombrar los elementos de C como sigue:

$$d_i = \begin{cases} c_k, & \text{si } i = 0; \\ c_{i-1}, & \text{si } 1 \leq i \leq \omega; \\ c_i, & \text{si } \omega \leq i. \end{cases}$$

Entonces $a \wedge (\bigvee_{i \in T} d_i) = a \wedge (\bigvee_{i \in K} c_i) \neq 0$ y para cada $J \subseteq T$ finito se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i \in J} d_i) = 0$ lo cual contradice la minimalidad de I. □

Proposición 2.3.23. *Sean L una retícula modular inductiva y $a \in L$. Si a tiene longitud finita, entonces a es compacto en L.*

Demostración. (Por inducción sobre la longitud de a) Sea $a \in L$ de longitud finita, $l(a) = n$. Sea $\{t_i\}_{i \in I} \subseteq L$ una cadena tal que $a \leq \bigvee_{i \in I} t_i$. Para $n = 1$, como $0 \leq a$ y $l(a) = 1 = 0 + 1 = l(0) + l(i)$ entonces, por el Lema 2.3.20 (2), se tiene que $0 \prec a$, así que $a \wedge (\bigvee_{i \in I} t_i) = a \neq 0$ luego, por el Lema 2.3.22, existe $F \subseteq I$ finito tal que $a \wedge (\bigvee_{i \in F} t_i) \neq 0$ (i.e., $0 < a \wedge (\bigvee_{i \in F} t_i)$), además es claro que $a \wedge (\bigvee_{i \in F} t_i) \leq a$ y como $0 \prec a$ se concluye que $a = a \wedge (\bigvee_{i \in F} t_i)$ y por lo tanto $a \leq (\bigvee_{i \in F} t_i)$.
Supongamos que para cada $k < n$ se cumple que si $l(x) = k$, entonces x es compacto. Para $n \geq 2$, se tiene que existe $b \in L$ tal que $l(b) = n - 1$ y $b \prec a$ (en efecto, basta tomar al elemento $b = a_{n-1}$ de la cadena de composión entre 0 y a: $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$). Así que $b \prec a \leq \bigvee_{i \in I} t_i$ y $l(b) = n - 1 < n$ entonces, por hipótesis de inducción, b es compacto y por tanto existe $F \subseteq I$ finito tal que $b \leq \bigvee_{i \in F} t_i$. Claramente la subretícula cociente $1/b$ es inductiva, además $b \prec a$, $a \leq \bigvee_{i \in I} t_i \leq b \vee \bigvee_{i \in I} t_i = \bigvee_{i \in I}(b \vee t_i)$ y $\{b \vee t_i\}_{i \in I}$ es una cadena en $1/b$, así que podemos proceder como en el caso $n = 1$ para garantizar la existencia de $F' \subseteq I$ finito tal que $a \leq \bigvee_{i \in F'}(b \vee t_i)$. Finalmente, $a \leq \bigvee_{i \in F'}(b \vee t_i) = b \vee (\bigvee_{i \in F'} t_i) \leq (\bigvee_{i \in F} t_i) \vee (\bigvee_{i \in F'} t_i) = \bigvee_{i \in F \cup F'} t_i$ con $F \cup F' \subseteq I$ finito y por lo tanto a es compacto. □

Aplicando el Teorema del Refinamiento de Schreier y el Lema 2.3.22 obtenemos:

Proposición 2.3.24. *En toda retícula modular inductiva de longitud finita, toda cadena finita admite una cadena de composición como refinamiento.*

2.4. Descomposiciones Irreducibles

Definición 2.4.1. *Si L es una retícula, definimos:*

*(1) $a \in L$ se llama **cuña-irreducible** o simplemente **irreducible** si para cualesquiera $x, y \in L$, si $x \wedge y = a$, entonces $x = a$ o $y = a$.*

(2) *Una cuña finita* $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ *de elementos en* L *se llama* ***irredundante*** *si para toda* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *se cumple que:*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i < \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_j.$$

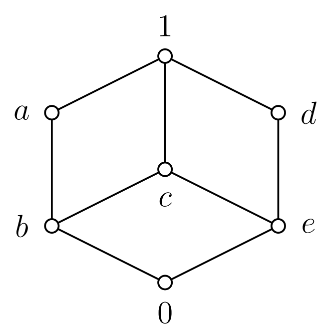
(3) *Una cuña finita* $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ *de elementos en* L *se llama* ***descomposición irreducible*** *si para cada* $k \in \{1, \ldots, n\}$, a_k *es irreducible.*

Observación 2.4.2. *Sean* L *es una retícula y* $a \in L$ *irreducible. Aplicando repetidamente la asociatividad y la definición de elemento irreducible obtenemos que si* $a = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$*, entonces existe* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $a = a_k$.

Observación 2.4.3. *Sean* L *una retícula y* L' *subretícula de* L*. Una consecuencia inmediata de la definición de elemento irreducible es la siguiente: Si* $a \in L'$ *y* a *es irreducible en* L*, entonces* a *es irreducible en* L'

Observación 2.4.4. *Sean* L *una retícula y* L' *subretícula de* L*. No todo elemento irreducible en* L' *es irreducible en* L*.*

En efecto, consideremos la retícula $L = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ cuyo orden representamos en el siguiente diagrama de Hasse:



Notamos que e es irreducible en la subretícula $L' = \{e, d, 1\}$, sin embargo $c \wedge d = e$ con $c \neq e$ y $d \neq e$ lo cual nos dice que e no es irreducible en L.

Observación 2.4.5. *Sean* L *una retícula y* $a \in L$*. Toda descomposición irreducible de* $a \in L$ *es igual a una descomposición irreducible (posiblemente con menos elementos) que también es irredundante. Diremos que "reducimos" una descomposición irreducible cuando pasamos de esta a una descomposición irreducible que también es irredundante.*

Teorema 2.4.6 (Kurosh-Ore). *Sean L una retícula modular y $a \in L$. Si*

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_n = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_m = a$$

son descomposiciones irreducibles e irredundantes, entonces $n = m$.

Demostración. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ denotemos por $\overline{b}_i = b_1 \wedge \cdots \wedge b_{i-1} \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_n$. Es evidente que $a = \overline{b}_i \wedge b_i = \bigwedge_{i=1}^{n} b_i$, además como $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i$ es irredundante se tiene que $a = \bigwedge_{k=1}^{n} b_k < \overline{b}_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ denotemos por $d_j = \overline{b}_i \wedge c_j$, claramente $a \leq c_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, así que $a \leq \overline{b}_i \wedge c_j = d_j \leq \overline{b}_i$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, luego $a \leq \bigwedge_{j=1}^{m} d_j$. Por otro lado $\bigwedge_{j=1}^{m} d_j \leq d_k = \overline{b}_i \wedge c_k \leq c_k$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, así que $\bigwedge_{j=1}^{m} d_j \leq \bigwedge_{k=1}^{m} c_k = a$. Por lo tanto

$$a = \bigwedge_{j=1}^{m} d_j. \qquad (1)$$

Como L es modular, por Teorema 1.3.9, $\overline{b}_i/a = \overline{b}_i/(\overline{b}_i \wedge b_i) \cong (\overline{b}_i \vee b_i)/b_i$, además b_i es irreducible en L y por tanto b_i es irreducible en cualquier subretícula que lo contenga, en particular, b_i es irreducible en $(\overline{b}_i \vee b_i)/b_i$. Haciendo uso del isomorfismo entre $(\overline{b}_i \vee b_i)/b_i$ y $\overline{b}_i/a$ podemos garantizar que $a \in \overline{b}_i/a$ es irreducible en $\overline{b}_i/a$, así que, por (1) y la Observación 2.4.2, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$a = d_k = \overline{b}_i \wedge c_k = c_k \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} b_l \Big). \qquad (2)$$

Denotemos por $N = \{1, \ldots, n\}$ y $M = \{1, \ldots, m\}$. Si $i_1 \in N$ podemos concluir, debido a la expresión en (2), que existe $j_1 \in M$ tal que

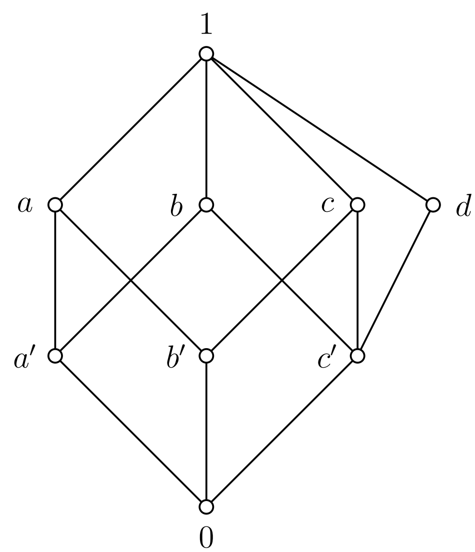
$$a = d_{j_1} = \overline{b}_{i_1} \wedge c_{j_1} = c_{j_1} \wedge \Big(\bigwedge_{i \in N - \{i_1\}} b_i \Big).$$

Observamos que en la descomposición anterior todos los elementos son irreducibles y por tanto podemos reducirla a una descomposición irredundante (ver Observación 2.4.5). En esta nueva descomposición de a el elemento c_{j_1} no es eliminado, ya que de lo contrario, esto es, si existe $A \subseteq N - \{i_1\}$ tal que $a = \bigwedge_{i \in A} b_i$ entonces, como $\bigwedge_{i \in N} b_i$ es irredunante, $a = \bigwedge_{i \in N} b_i < \bigwedge_{i \in N - \{i_1\}} b_i \leq \bigwedge_{i \in A} b_i = a$, una contradicción. Por lo tanto debe existir

$N_1 \subseteq N$ tal que $a = c_{j_1} \wedge (\bigwedge_{i \in N_1} b_i)$ es una descomposición irredundante de elementos irreducibles. Ahora escogemos $i_2 \in N_1$, se puede proceder como anteriormente para garantizar la existencia de $j_2 \in M$ tal que $a = c_{j_1} \wedge c_{j_2} \wedge (\bigwedge_{i \in N_1 - \{i_2\}} b_i)$, nuevamente podemos reducir esta descomposición a una descomposición irredundante, donde al menos c_{j_2} no es eliminado, es decir, existe $N_2 \subseteq N_1 - \{i_2\}$ tal que $a = c_{j_1} \wedge c_{j_2} \wedge (\bigwedge_{i \in N_2} b_i)$ es irredundante o bien $a = c_{j_2} \wedge (\bigwedge_{i \in N_2} b_i)$ es irredundante. Este proceso puede continuar y terminar en, digamos t pasos, por lo que existe $M' \subseteq M$ con a lo más t elementos tal que todos lo elementos b_i, $i \in N$, son eliminados y por tanto $a = \bigwedge_{j \in M'} c_j$. Claramente $t \leq n$. Finalmente, como $\bigwedge_{j \in M} c_j = a = \bigwedge_{j \in M'} c_j$ es irredundante, necesariamente se tiene que $M' = M$. Por lo tanto $m \leq t \leq n$. Simétricamente obtenemos $n \leq m$. $\square$

Observación 2.4.7. *En teorema de Kuros-Ore es falso en las retículas no modulares.*

En efecto, consideremos $L = \{0, a, b, c, d, a', b', c', 1\}$ con el orden representado en siguiente diagrama de Hasse:



Notamos que L no es modular pues contiene pentágonos, además $a, b, c, d \in L$ son elementos irreducibles. Por tanto $a \wedge d = 0 = a \wedge b \wedge c$ son descomposiciones irredundantes de elementos irreducibles

Proposición 2.4.8. *Si L es retícula neteriana, entonces todo elemento de L es cuña finita de elementos irreducibles en L.*

Demostración. Denotemos por A al conjunto de todos los elementos en L que no son cuña finita de elementos irreducibles en L y veamos que $A = \varnothing$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ entonces, por ser L neteriana, existe $m \in A$ elemento máximo en A. Como $m \in A$, entonces m no es irreducible (ya que si m es irreducible entonces $m = m \wedge m$ es cuña finita de elementos irreducibles, lo que contradice que $m \in A$), así que existen $x, y \in L$ tales que $m = x \wedge y$, $x \neq m$ y $y \neq m$, más aún, se tiene que $m < x$ y $m < y$; y como m es elemento máximo en A se concluye que $x \notin A$ y $y \notin A$. Luego x y y son cuñas finitas de elementos irreducibles en L, digamos $x = \bigwedge_{i \in I} a_i$ y $y = \bigwedge_{j \in J} b_j$. Entonces, $m = x \wedge y = (\bigwedge_{i \in I} a_i) \wedge (\bigwedge_{j \in J} b_j)$ lo cual nos dice que m es cuña finita de elementos irreducibles en L, esto contradice que $m \in A$. $\square$

Lema 2.4.9. *Sean L una retícula modular continua superiormente y $a, b \in L$, con $a \leq b$. Entonces $a \in b/0$ es irreducible en $b/0$ si y sólo si existe $c \in L$ irreducible en L tal que $a = b \wedge c$.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que $a \in b/0$ es irreducible en $b/0$. Sea $C = \{x \in L \mid a = b \wedge x\}$, $a \in C$ y por tanto $C \neq \varnothing$. Si $C' \subseteq C$ es una cadena en C entonces, por ser L continua superiormente, $b \wedge (\bigvee C') = \bigvee_{c \in C'} (b \wedge c) = \bigvee \{a\} = a$ y por lo tanto $\bigvee C' \in C$. De lo anterior concluimos que toda cadena en C tiene cota superior en C entonces, por Lema de Zorn, existe $c \in C$ elemento máximo. Como $c \in C$ entonces $a = b \wedge c$. Veamos que c es irreducible en L. Sean $x, y \in L$ tales que $x \wedge y = c$, entonces $a = b \wedge c = b \wedge (x \wedge y) = (b \wedge x) \wedge (b \wedge y)$ con $(b \wedge x), (b \wedge y) \in b/0$, luego, como a es irreducible en $b/0$, $a = b \wedge x$ o bien $a = b \wedge y$. Si $a = b \wedge x$, entonces $x \in C$. Además, $c = x \wedge y \leq x$, así que, por la maximalidad de c, $c = x$. Por otro lado, si $a = b \wedge y$, análogamente concluimos que $c = y$.
[$\Leftarrow$] Sea $c \in L$ irreducible en L tal que $a = b \wedge c$. Veamos que $a \in b/0$ es irreducible en $b/0$. Sean $x, y \in b/0$ tales que $x \wedge y = a$. Como L es modular podemos hacer uso del isomorfismo de retículas $g : b/(b \wedge c) \longrightarrow (b \vee c)/c$, recordemos que g está definido por $g(y) = y \vee c$ para cada $y \in b/(b \wedge c)$. Notamos que $g(x) \wedge g(y) = g(x \wedge y) = g(a) = g(b \wedge c) = c$ y por tanto $c = (x \vee c) \wedge (y \vee c)$, luego, como c es irreducible en L, $c = x \vee c$ o bien $c = y \vee c$. Si $c = x \vee c$, entonces $x \leq c$. Además $x \in b/0$, así que $a = x \wedge y \leq x \leq b \wedge c = a$ y por lo tanto $x = a$. Por otro lado, si $c = y \vee c$, análogamente concluimos que $y = a$. $\square$

Capítulo 3

El Zoclo y Retículas de Torsión

Como hemos visto en el capítulo anterior, hay dos nociones generales de descomposición y composición: la primera está dada en forma de un supremo particular de la retícula; la segunda, por una cadena máxima de elementos entre, por ejemplo, 0 y el sujeto en cuestión a la cual se le conoce como serie de composición. Vimos además que el Teorema de Jordan-Hölder afirma la unicidad, salvo permutaciones, de los factores simples que componen la serie de composición. Sin embargo, no todas las retículas tienen una serie de composición. Por lo tanto es necesario introducir un nuevo concepto que nos proporcione una forma de de producir una serie ascendente en una retícula, tomando en cuenta en cada paso todos los elementos máximos. Con este fin en el presente capítulo introducimos las nociones necesarias para definir a lo que se conoce como *Zoclo*, también desarrollamos las herramientas necesarias para enunciar y demostrar algunas de sus propiedades esenciales.

3.1. Elementos Esenciales y Seudo-complementos

Durante esta sección L es siempre una retícula completa, como es usual denotaremos con 0 al elemento menor de L y con 1 a su elemento mayor.

Definición 3.1.1. *Sea L una retícula. Definimos:*

*(1) $e \in L$ se llama **esencial** en L si $e \wedge a \neq 0$ para cada $a \in L - \{0\}$.*

*(2) $b \in L$ se llama **extensión esencial** de $a \in L$ si $a \leq b$ y a es esencial en la subretícula cociente $b/0$.*

(3) $c \in L$ se llama ***seudo-complemento*** *de $b \in L$ si $b \wedge c = 0$ y c es elemento máximo respecto a esta propiedad.*

(4) L se llama ***seudo-complementada*** *si todo elemento de L tiene al menos un seudo-complemento en L.*

(5) L se llama ***relativamente seudo-complementada*** *si toda subretícula cociente de L es seudo-complementada.*

Observación 3.1.2. *e es esencial en L si y sólo si para cada $x \in L$, si $e \wedge x = 0$, entonces $x = 0$*

Observación 3.1.3. *Sea L una retícula, entonces $e \in L$ esencial en L y $e \in L'$, con $L' \subseteq L$ subretícula de L tal que $\bigwedge L = 0 \in L'$. Entonces $e \in L'$ es esencial en L'. Sin embargo, no todo elemento esencial en L' es esencial en L.*

Observación 3.1.4. *Todo elemento $e \in L - \{0\}$ es extensión esencial de si mismo.*

En efecto, ya que $e \leq e$, además si $a \in e/0 - \{0\}$, entonces $e \wedge a = a \neq 0$, es decir, $e \in e/0$ es esencial en $e/0$.

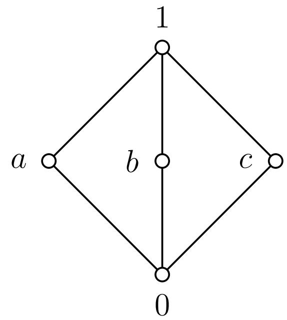
Entonces, todo elemento $a \in L - \{0\}$ tiene al menos una extensión esencial. Si $b \in L$ es extensión esencial de $a \in L$ tal que $b \neq a$ (i. e., $a < b$), entonces b se llama ***extensión esencial propia*** de a. Un elemento $a \in L$ que no tiene extensiones esenciales propias se llama ***esencialmente cerrado***.

Observación 3.1.5. *Por definición, $c \in L$ es seudo-complemento de $b \in L$ si c es máximo respecto a la propiedad $b \wedge c = 0$. Lo anterior equivale que: $b \wedge c = 0$ y para cada $c' \in L$, si $b \wedge c' = 0$ y $c \leq c'$, entonces $c = c'$.*

En general, si P es una propiedad de los elementos en una retícula L, entonces diremos que un elemento $c \in L$ es máximo respecto a la propiedad P si c es elemento máximo del conjunto $\{x \in L \mid \mathrm{P}(x)\} \subseteq L$.

Observación 3.1.6. *Un elemento en una retícula puede tener más de un seudo-complemento.*

En efecto, consideremos $L = \{0, a, b, c, 1\}$ con el orden representado en el siguiente diagrama de Hasse:



Notamos que $a \wedge b = a \wedge c = 0$, además b y c son máximos respecto a la propiedad $a \wedge x$. Por lo tanto b y c son seudo-complementos de a y $b \neq c$. Note que a es seudo-complemento de b y b es seudo-complemento de a.

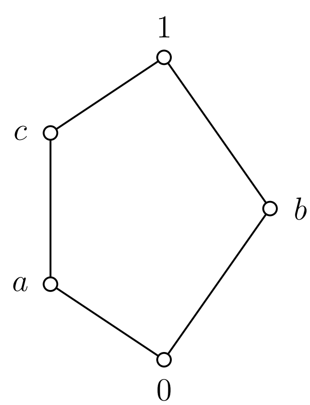
En general, si $a, b \in L$ son tales que a es seudo-complemento de b y b es seudo-complemento de a, entonces a y b se llaman ***mutuos seudo-complementos***.

Lema 3.1.7. *Sea L una retícula modular. Si $c \in L$ es complemento de $a \in L$, entonces c es seudo-complemento de a.*

Demostración. Si c complemento de a, entonces $a \oplus c = 1$. Sea $c' \in L$ tal que $a \wedge c' = 0$ y $c \leq c'$, entonces $c = c \vee 0 = c \vee (a \wedge c') \overset{\text{mod}}{=} (c \vee a) \wedge c' = 1 \wedge c' = c'$.
$\square$

Observación 3.1.8. *El Lema 3.1.7, no siempre se satisface si L no es modular.*

En efecto, consideremos la retícula pentágono, es decir, $L = \{0, a, b, c, 1\}$ cuyo orden representamos en el siguiente diagrama de Hasse:



Sabemos que L no es modular, además $b \oplus a = 1$, es decir, a es complemento de b, sin embargo $b \wedge c = 0$ y $a < c$, lo cual nos dice que a no es seudo-complemento de b.

Recordar que si L es una retícula completa, entonces L satisface la condición (B) si para cualesquiera $a \in L$ y $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq L$ cadena de L tales que $a \wedge b_i = 0$, para cada $i \in I$, se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = 0$ y es inductiva si todas sus subretículas cociente satisfacen la condición (B).

Observación 3.1.9. *Toda subretícula cociente de una retícula inductiva es inductiva.*

Proposición 3.1.10. *Si L es continua superiormente, entonces L es inductiva.*

Demostración. Veamos que toda subretícula cociente de L satisface la condición (B). Sea $y/x \subseteq L$ una subretícula cociente. Sean $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq y/x$ una cadena y $a \in y/x$ tales que $a \wedge b_i = x$ para cada $i \in I$. Como $\{b_i\}_{i\in I}$ es una cadena y L es continua superiormente, entonces $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge b_i) = \bigvee_{i\in I}\{x\} = x$, es decir, y/x satisface la condición (B). Por lo tanto L es inductiva. $\square$

Proposición 3.1.11. *Si L tiene longitud finita, entonces L es inductiva.*

Demostración. Sea $y/x \subseteq L$ una subretícula cociente. Sean $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq y/x$ una cadena y $a \in y/x$ tales que $a \wedge b_i = x$, para cada $i \in I$. Claramente $b_i/0 \subseteq 1/0 = L$, para cada $i \in I$, así que $l(b_i) \leq l(L)$, para cada $i \in I$, por tanto existe $k \in I$ tal que $b_i \leq b_k$ para cada $i \in I$. Finalmente, $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = a \wedge b_k = x$, es decir, y/x satisface la condición (B). Por lo tanto L es inductiva. $\square$

Lema 3.1.12. *Si L es inductiva, entonces L es seudo-complementada.*

Demostración. Sea $a \in L$. Veamos que a tiene seudo-complemento en L. Consideremos $A = \{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$, claramente $0 \in A$ y por tanto $A \neq \varnothing$. Si $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq A$ es una cadena, entonces $a \wedge b_i = 0$ para cada $i \in I$ y como L es inductiva se cumple que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = 0$, así que $\bigvee_{i\in I} b_i \in A$, además es claro que $b_k \leq \bigvee_{i\in I} b_i$ para cada $k \in I$. Hemos probado que toda cadena en A tiene cota superior en A entonces, por el Lema de Zorn, existe $c \in A$ elemento máximo de C. Es evidente que c es seudo-complemento de a en L. $\square$

Corolario 3.1.13. *Si L es continua superiormente, entonces L es seudo-complementada.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 3.1.10 y el Lema 3.1.12. $\square$

Proposición 3.1.14. *Sean L una retícula modular y $a, b \in L$. Son equivalentes:*

(1) b es seudo-complemento de a en L

(2) $a \wedge b = 0$ y para cada $c \in L$, si $b < c$, entonces $a \wedge c \neq 0$.

(3) $a \wedge b = 0$ y para cada $c \in 1/b$, si $c \neq b$, entonces $a \wedge c \nleq b$.

(4) $a \wedge b = 0$ y para cada $c \in 1/b$, si $c \neq b$, entonces $b < b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge c$.

(5) $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en $1/b$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Como b es seudo-complemento de a entonces $a \wedge b = 0$. Supongamos que existe $c' \in L$ tal que $b < c'$ (i. e., $b \leq c'$ y $b \neq c'$) y $a \wedge c' = 0$ entonces, como b es seudo-complemento de a, $b = c'$, una contradicción.
[(2) $\Rightarrow$ (3)] Es claro que $a \wedge b = 0$. Supongamos que existe $c' \in 1/b$ tal que $c' \neq b$ (i. e., $b < c'$) y $a \wedge c' \leq b$ entonces, por hipótesis, $a \wedge c' \neq 0$. Además, $a \wedge c' \leq b$ y $a \wedge c' \leq a$, así que $a \wedge c' \leq a \wedge b = 0$ y por tanto $a \wedge c' = 0$ una contradicción.
[(3) $\Rightarrow$ (4)] Claramente $a \wedge b = 0$. Además, si $c \in 1/b$ con $c \neq b$ entonces, por hipótesis, $a \wedge c \nleq b$. Por otro lado, como $b < c$ y $b \leq b \vee a$, tenemos $b \leq (b \vee a) \wedge c \overset{\text{mod}}{=} b \vee (a \wedge c)$. Sin embargo, si $b = b \vee (a \wedge c)$, entonces $a \wedge c \leq b$ una contradicción. Por lo tanto $b < (b \vee a) \wedge c \overset{\text{mod}}{=} b \vee (a \wedge c)$.
[(4) $\Rightarrow$ (5)] Es evidente que $a \wedge b = 0$. Veamos que $a \vee b$ es esencial en $1/b$. Si $c \in 1/b - \{b\}$, entonces $a \vee b \in 1/b$ y $c \neq b$, así que, por hipótesis, $b < (b \vee a) \wedge c$, es decir, $b \neq (b \vee a) \wedge c$ y por lo tanto $a \vee b$ es esencial en $1/b$.
[(5) $\Rightarrow$ (1)] Supongamos que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en $1/b$. Veamos que b es elemento máximo en el conjunto $\{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$. Sea $b' \in L$ tal que $a \wedge b' = 0$ y $b \leq b'$. Procedemos por contradicción para mostrar que $b = b'$. Supongamos que $b \neq b'$ (i. e., $b < b'$) entonces, como $a \vee b \in 1/b$ es esencial en $1/b$, tenemos $b \neq (a \vee b) \wedge b' \overset{\text{mod}}{=} b \vee (a \wedge b') = b \vee 0 = b$, una contradicción.
$\square$

Corolario 3.1.15. *Sean L retícula modular y $a, b \in L$. Si b es seudo-complemento de a en L, entonces $a \vee b$ es esencial en L.*

Demostración. Sea $x \in L - \{0\}$. Distinguimos dos casos: (i) $x \leq b$ y (ii) $x \nleq b$. Si $x \leq b$, entonces $x \leq a \vee b$ y por tanto $(a \vee b) \wedge x = x \neq 0$. Por otro lado, si $x \nleq b$, entonces $b < x \vee b$. Luego, por (4) de la Proposición 3.1.12, tenemos $b \neq (b \vee a) \wedge (x \vee b) \overset{\text{mod}}{=} [(a \vee b) \wedge x] \vee b$. Para mostrar que $(a \vee b) \wedge x \neq 0$ procedemos por contradicción suponiendo $(a \vee b) \wedge x = 0$, lo que implica que $b \neq [(a \vee b) \wedge x] \vee b = 0 \vee b = b$, una contradicción. Entonces, $(a \vee b) \wedge x \neq 0$ para cada $x \in L - \{0\}$ y por lo tanto $a \vee b$ es esencial en L. $\square$

Lema 3.1.16. *Sean L continua superiormente y modular y $a, b \in L$, con b seudo-complemento de a en L. Si $c \in L$ es máximo respecto a la propiedad $a \leq c$ y $b \wedge c = 0$, entonces c es extensión esencial máxima de a en L.*

Demostración. Primero vamos a garantizar la existencia de c. Consideremos $C = \{x \in L \mid a \leq x, b \wedge x = 0\}$, note que $a \in C$ y por lo tanto $C \neq \varnothing$. Si $C' \subseteq C$ es una cadena en C, entonces la continuidad superior garantiza que $\bigvee C' \in C$. Así que toda cadena en C tiene cota superior en C entonces, por el Lema de Zorn, existe $c \in C$ elemento máximo de C. Veamos que c es extensión esencial de a en L. Como $c \in C$, entonces $a \leq c$. Además, si $x \in c/0$, con $a \wedge x = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
a \wedge (b \vee x) &= (a \wedge c) \wedge (b \vee x) && (a \leq c) \\
&= a \wedge [c \wedge (b \vee x)] && (\text{asociatividad}) \\
&= a \wedge [(c \wedge b) \vee x] && (x \leq c \text{ y modularidad}) \\
&= a \wedge [0 \vee x] && (c \in C) \\
&= a \wedge x = 0.
\end{aligned}
$$

Así que $a \wedge (b \vee x) = 0$, además $b \leq b \vee x$ entonces, como b es seudo-complemento de a, tenemos $b = b \vee x$ (i. e., $x \leq b$), luego $b \wedge x = x$. Finalmente, $x = x \wedge b \leq c \wedge b = 0$ y por tanto $x = 0$. Hemos probado que para cada $x \in c/0$, si $a \wedge x = 0$, entonces $x = 0$, es decir, $a \in c/0$ es esencial en $c/0$. Para finalizar garantizaremos que c es extensión esencial máxima de a. Sea $c' \in L$ una extensión esencial de a en L tal que $c \leq c'$. Para mostrar que $c = c'$ procedemos por contradicción suponiendo $c \neq c'$, lo que implica que $0 \neq b \wedge c' \in c'/0$, además, como a es esencial en $c'/0$, se tiene que $a \wedge (b \wedge c') \neq 0$, entonces $0 \neq a \wedge (b \wedge c') = (a \wedge b) \wedge c' = 0 \wedge c' = 0$, una contradicción. $\square$

Proposición 3.1.17. *Bajo las hipótesis del Lema 3.1.16, tenemos que b y c son mutuos seudo-complementos.*

Demostración. Es evidente que c es seudo-complemento de b en L. Veamos que b es seudo-complemento de c en L. Sabemos que $c \wedge b = 0$, falta mostrar que b es máximo con tal propiedad. Sea $b' \in L$ tal que $c \wedge b' = 0$ y $b \leq b'$. Para mostrar que $b = b'$ procedemos por contradicción suponiendo $b \neq b'$, lo que implica que $a \wedge b' \neq 0$ entonces, como $a \leq c$, tenemos $0 \neq a \wedge b' \leq c \wedge b'$, esto es, $0 \neq c \wedge b'$, una contradicción. □

Corolario 3.1.18. *Sean L una retícula modular continua superiormente y $a \in L$. Entonces a es seudo-complemento (de algún elemento en L) si y sólo si a es esencialmente cerrado en L.*

Demostración.
[⇒] Supongamos que a es seudo-complemento de b en L. Procedemos por contradicción suponiendo que existe $c > a$ extensión esencial de a. Notamos que $b \wedge c \neq 0$ pues de lo contrario, esto es, si $b \wedge c = 0$ entonces, como a es seudo-complemento de b, tenemos $a = c$ lo que contradice $a < c$. Así que $b \wedge c \in (c/0) - \{0\}$, además c es extensión esencial de a y por tanto a es esencial en $c/0$, entonces $0 \neq a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = 0 \wedge c = 0$, una contradicción.
[⇐] Supongamos que a es esencialmente cerrada. Como L es continua superiormente entonces, por el Corolario 3.1.13, L es seudo-complementada y por tanto existe b seudo-complemento de a en L. Consideremos $C = \{x \in L \mid a \leq x, b \wedge x = 0\}$. La continuidad superior de L y el Lema de Zorn garantizan que existe $c \in C$ elemento máximo de C. Notamos que se tienen todas las hipótesis del Lema 3.1.16, así que c es extensión máxima de a y como a no tiene extensiones esenciales propias concluimos que $a = c$. Además, por la Proposisión 3.1.17, b y $c = a$ son mutuamente seudo-complementos, en particular, a es seudo-complemento de b. □

Una consecuencia inmediata del Corolario 3.1.18 se establece en el siguiente:

Corolario 3.1.19. *En una retícula modular continua superiormente los elementos mutuos seudo-complementos son esencialmente cerrados.*

Corolario 3.1.20. *Sean L modular continua superiormente y $a, b \in L$, con b seudo-complemento de a en L. Entonces a es esencialmente cerrado en L si y sólo si a es seudo-complemento de b en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] La continuidad superior de L garantiza que existe $c \in L$ elemento máximo respecto a las propiedades $a \leq c$ y $b \wedge c = 0$. Entonces, por el Lema 3.1.16, c es extensión esencial máxima de a y como a es esencialmente cerrada se concluye que $a = c$. Finalmente, por la Proposición 3.1.17, b y $c = a$ son mutuamente seudo-complementos, en particular, a es seudo-complemento de b en L.
[$\Leftarrow$] Es consecuencia del Corolario 3.1.18. $\square$

Observación 3.1.21. *Notamos que en la prueba de la suficiencia del Corolario 3.1.18 solo basta que el elemento a sea seudo-complemento de algún elemento en L, así que de forma inmediata obtenemos: Si L es modular seudo-complementada y a es seudo-complemento de b en L, entonces a es esencialmente cerrada en L.*

Proposición 3.1.22. *Sean L modular seudo-complementada y $b, c \in L$. Entonces c es seudo-complemento de b en L si y sólo si $b \wedge c = 0$, $b \vee c$ es esencial en L y c es esencialmente cerrado en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Es consecuencia del Lema 3.1.16 y la Observación 3.1.21.
[$\Leftarrow$] Debido a la Proposición 3.1.14, basta mostrar que $b \vee c$ es esencial en $1/c$. Procedemos por contradicción suponiendo que $b \vee c$ no es esencial en $1/c$ lo que implica que existe $d \in (1/c) - \{c\}$ tal que

$$(b \vee c) \wedge d = c. \qquad (1)$$

Como c es esencialmente cerrado y $c < d$, entonces d no es extensión esencial de c y por tanto c no es esencial en $d/0$, así que existe $d' \in (d/0) - \{0\}$ tal que $c \wedge d' = 0$. Entonces, por (1), $0 = c \wedge d' = [(b \vee c) \wedge d] \wedge d' = (b \vee c) \wedge (d \wedge d') = (b \vee c) \wedge d'$. Por lo tanto existe $d' \neq 0$ tal que $(b \vee c) \wedge d' = 0$ lo que contradice que $b \vee c$ es esencial en L. $\square$

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 3.1.23. *Sean L modular seudo-complementada y $b, c \in L$, con $b \wedge c = 0$. Entonces b y c son mutuamente seudo-complementados si y sólo si b y c son esencialmente cerrados y $b \vee c$ es esencial en L.*

3.2. El Zoclo

Definición 3.2.1. *Sea L una retícula con cero. Definimos:*

(1) $a \in L$ se llama ***átomo*** *en L si $0 \prec a$.*

(2) L se llama ***atómica*** *si para cada $a \in L - \{0\}$ la subretícula cociente $a/0$ contiene al menos un átomo.*

Definición 3.2.2. *Sea L una retícula con cero y uno. Un elemento máximo en $L - \{1\}$ se llama* ***átomo dual*** *en L.*

Observación 3.2.3. *$a \in L$ es átomo en L si y sólo si para cada $x \in L$, si $0 \leq x \leq a$, entonces $x = 0$ o bien $x = a$.*

Observación 3.2.4. *Si L tiene cero y uno. Entonces $a \in L$ es átomo dual en L si y sólo si $a \prec 1$.*

Ejemplo 3.2.5. *Sea G un grupo abeliano. Los átomos en $(Sub(G), \subseteq)$ son los subgrupos cíclicos de orden primo de G, esto se sigue del hecho de que los grupos cíclicos de orden primo son grupos simples y por lo tanto átomos.*

Proposición 3.2.6. *Sean L retícula complementada modular y $a, a' \in L$, con a' complemento de a en L. Entonces a es átomo en L si y sólo si a' es átomo dual en L.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que a es átomo en L. Si $a' \in L$ un complemento de a en L, esto es, $a \oplus a' = 1$. Entonces, por el Teorema 1.3.9, $\{0, a\} = a/0 = a/(a \wedge a') \cong (a \vee a')/a' = 1/a'$. Haciendo uso del isomorfismo entre $\{0, a\}$ y $1/a'$; y el hecho de que $0 \prec a$ obtenemos que $a' \prec 1$ y por lo tanto a' es átomo dual en L.
[$\Leftarrow$] Se sigue de un argumento dual al anterior. $\square$

Definición 3.2.7. *Sea L una retícula con cero. El supremo de todos los átomos de L será llamado* ***zoclo*** *de L y será denotado por $z(L)$.*

Ejemplo 3.2.8. *Considere al $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}^*$. Veamos quien es $z(\mathbb{Z}_n)$, es decir, $z(S_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n))$. Si $n = 1$, claramente $z(S_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)) = \{0\}$. Si $n > 1$, sea $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ la descomposición en primos de n. Sabemos que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo simple (y por lo tanto,* *átomo) si y sólo si m es un número primo. Es claro que $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \cong \frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, así que $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es átomo en $S_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}\right)/n\mathbb{Z} = \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subseteq z(\mathbb{Z}_n).$$

Por otro lado, si $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, con $n = qm$, es un áotmo en $S_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$, acorde al isomorfismo $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ debe existir $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $m = p_i$, luego $q = \dfrac{n}{p_i}$. Por lo tanto, $z(\mathbb{Z}_n) = \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}\mathbb{Z}_n$.

Lema 3.2.9. *Si L es una retícula con cero, $a, b \in L$ y $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq L$, entonces:*

(1) $z(a/0) \leq a$.

(2) *Si $a \leq b$, entonces $z(a/0) \leq z(b/0)$.*

(3) $z((\bigwedge_{i\in I} b_i)/0) \leq \bigwedge_{i\in I} z(b_i/0)$.

(4) $\bigvee_{i\in I} z(b_i/0) \leq z((\bigvee_{i\in I} b_i)/0)$.

Demostración.
Demostración de (1): Es evidente que todo átomo en $a/0$ está contenido en a, es decir, a es cota superior del conjunto de todos los átomos en $a/0$ y por lo tanto $z(a/0) \leq a$.
Demostración de (2): Si $a \leq b$, entonces $a/0 \subseteq b/0$, así que todo átomo en $a/0$ es átomo en $b/0$ y por lo tanto $z(a/0) \leq z(b/0)$.
Demostración de (3): Como $\bigwedge_{i\in I} b_i \leq b_k$ para cada $k \in I$ entonces, por (2), $z((\bigwedge_{i\in I} b_i)/0) \leq z(b_k/0)$ para cada $k \in I$, así que $z((\bigwedge_{i\in I} b_i)/0)$ es cota inferior de $\{z(b_i/0)\}_{i\in I}$ y por lo tanto $z((\bigwedge_{i\in I} b_i)/0) \leq \bigwedge_{i\in I} z(b_i/0)$. La demostración de (4) se sigue de un argumento dual al de (3). □

Proposición 3.2.10. *Sea L una retícula complementada y modular. Si $c \in L$ es compacto en L y no es un átomo en L, entonces existe $x \in L$ tal que $x \leq c$ y x es átomo en L.*

Demostración. Si c es compacto en L, entonces la subretícula cociente $c/0$ es compacta luego, por el Lema de Krull, existe $x' < c$ elemento máximo de $(c/0) - \{c\}$, es decir, x' es átomo dual en $c/0$. Además, como L es complementada y modular, tenemos que L es relativamente complementada, en particular $c/0$ es complementada; y por tanto para $x' \in c/0$ existe $x \in c/0$

complemento de x' en $c/0$. Finalmente como x' es átomo dual en $c/0$, por la Proposición 3.2.6, x es átomo en $c/0$. Por lo tanto $x \leq c$ y x es átomo en L. $\square$

Lema 3.2.11. *Si L es retícula compactamente generada, complementada y modular, entonces todo elemento de L distinto de cero es yunta de átomos en L.*

Demostración. Sea $a \in L - \{0\}$, como L es compactamente generada, existe $\{c_i\}_{i \in I} \subseteq L$ familia de elementos compactos en L tal que $a = \bigvee_{i \in I} c_i$. Si para cada $i \in I$, c_i es átomo en L hemos terminado. Por otro lado, si existe $j \in I$ tal que c_j no es átomo en L entonces, por la Proposición 3.2.10, existe $x \in L$ tal que $x \leq c_j$ y x es átomo en L, además es claro que $x \leq a$. Por lo tanto $a/0$ contiene al menos un átomo de L. Sea u la yunta de todos los átomos en L que son menores o iguales que a, claramente $0 < u \leq a$. Veamos que $a = u$, procedemos por contradicción suponiendo $u < a$ como L es relativamente complementada, existe $v \in a/0$ complemento de u en $a/0$, notamos que $v \neq 0$ (pues de lo contrario, es decir, si $v = 0$ entonces $a = u \vee v = u \vee 0 = u < a$, una contradicción) y por tanto podemos proceder como antes para mostrar que $v/0$ contiene al menos un átomo de $a/0$, finalmente, como $u/0$ y $v/0$ contienen átomos de $a/0$, se concluye que $u \wedge v \neq 0$ lo que contradice que v es complemento de u en $a/0$. Por lo tanto $a = u$, es decir, a es yunta de átomos en L. $\square$

Definición 3.2.12. *Diremos que una retícula L está* ***generada por átomos*** *si para cada $a \in L$ existe $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ familia de átomos en L tal que $a = \bigvee_{i \in I} a_i$.*

Observación 3.2.13. *El Lema 3.2.11, establece que toda retícula compactamente generada, complementada y modular está generada por átomos.*

Lema 3.2.14. *Si L es una retícula con cero y $e \in L$ es un elemento esencial en L, entonces $z(L) \leq e$.*

Demostración. Sea $a \in L$ un átomo en L, como e es esencial se cumple que $e \wedge a \neq 0$, así que $0 < a \wedge e \leq a$, además $0 \prec a$ lo que implica que $a \wedge e = a$ equivalentemente $a \leq e$. Por lo tanto, $a \leq e$ para cada $a \in L$ átomo en L, es decir, e es cota superior del conjunto de todos los átomos en L y por lo tanto $z(L) \leq e$. $\square$

Observación 3.2.15. *En el Lema 3.2.14 el elemento esencial $e \in L$ es arbitrario, así que podemos concluir que $z(L)$ es cota inferior del conjunto de todos lo elementos esenciales de L, al cual denotaremos por $E(L)$. Por lo tanto $z(L) \leq \bigwedge E(L)$.*

Teorema 3.2.16. *Si L es compactamente generada y modular, entonces $z(L) = \bigwedge E(L)$.*

Demostración. Se tiene, por la Proposición 2.2.9 y el Corolario 3.1.13, que L es seudo-complementada. Por la Observación 3.2.15, $z(L) \leq \bigwedge E(L)$. Vamos a probar la otra desigualdad. Sea $s = \bigwedge E(L)$ y veamos que $s/0$ es complementada. Sean $a \in s/0$ y $c \in L$ seudo-complemento de a en L entonces, por el Corolario 3.1.15, $a \vee c$ es esencial en L, luego $s \leq a \vee c$, entonces $a \vee (c \wedge s) \overset{\text{mod}}{=} (a \vee c) \wedge s = s$, además $0 \leq a \wedge (c \wedge s) \leq a \wedge c = 0$, es decir, $a \wedge (c \wedge s) = 0$. Entonces, $c \wedge s \leq s$ es complemento de a en $s/0$. Por lo tanto $s/0$ es complementada, además $s/0$ es compactamente generada y modular entonces, por el Lema 3.2.11, $s/0$ es generada por átomos, en particular, $s = \bigwedge E(L)$ es yunta de átomos en $s/0$ (a su vez, átomos en L) y por lo tanto $\bigwedge E(L) \leq z(L)$. □

Corolario 3.2.17. *Si L es compactamente generada y modular, entonces la subretícula cociente $z(L)/0$ es complementada.*

Demostración. Como L es compactamente generada, entonces L es seudo-complementada. Ahora, si $a \in z(L)/0$ y $c \in L$ es seudo-complemento de a en L entonces, por el Corolario 3.1.15, $a \vee c$ es esencial en L, luego por el Teorema 3.2.16, $z(L) = \bigwedge E(L) \leq a \vee c$. No es difícil ver que $z(L) \wedge c$ es complemento de a en $z(L)/0$ y por lo tanto $z(L)/0$ es complementada. □

Proposición 3.2.18. *Si L es completa y atómica, entonces $z(L)$ es elemento esencial en L.*

Demostración. Veamos que $z(L) \wedge x \neq 0$ para cada $x \in L - \{0\}$. Sea $x \in L - \{0\}$, como L es atómica existe $a \in x/0$ átomo en L, entonces $0 \prec a \leq x$. Además, por definición de zoclo, $a \leq z(L)$ y por tanto $0 \prec a \leq z(L) \wedge x$ de donde concluimos que $z(L) \wedge x \neq 0$. □

Corolario 3.2.19. *En una retícula compactamente generada, modular y atómica el zoclo es el menor elemento esencial de L.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.16, $z(L) = \bigwedge E(L)$ y por la Proposición 3.2.18, $z(L)$ es esencial en L, es decir, $z(L) \in E(L)$ y por lo tanto $z(L)$ es el menor elemento esencial de L. □

3.3. Retículas de Torsión

El Zoclo es una herramienta que nos sirve para saber si una retícula contiene átomos, más aún, nos indica hasta qué "altura" existen átomos en una retícula. Lo cual nos lleva a pensar si existen retículas para las cuales a cualquier altura puedan encontrarse átomos. En la teoría de retículas, a esta propiedad se le llama *torsión*. En esta sección introducimos la noción de retícula de torsión, además enunciaremos y demostraremos algunas condiciones necesarias y suficientes para que una retícula tenga torsión.

Definición 3.3.1. *Sea L una retícula con cero y uno. Diremos que L* ***tiene torsión*** *o simplemente que es retícula de* ***torsión*** *si para cada $a \in L - \{1\}$ la subretícula cociente $1/a$ tiene por lo menos un átomo. Si para cada $a \in L - \{0\}$ la subretícula cociente $a/0$ es infinita, entonces L se llama retícula* ***libre de torsión****.*

Observación 3.3.2. *Si L tiene torsión, entonces para cada $a \in L - \{1\}$ la subretícula cociente $1/a$ tiene torsión.*

Observación 3.3.3. *Una retícula L no tiene torsión si y sólo si existe $x \in L - \{1\}$ tal que $1/x$ es libre de torsión.*

Proposición 3.3.4. *Toda retícula artiniana es de torsión.*

Demostración. Sea $a \in L - \{1\}$. Si $a \prec 1$, entonces 1 es átomo en $1/a$. Por otro lado, si $a \not\prec 1$, entonces existe $x \in L$ tal que $a < x < 1$ y por tanto $(1/a) - \{a\} \neq \varnothing$ luego, como L es artiniana, existe $a' \in 1/a$ elemento mínimo en $1/a$, claramente a' es átomo en $1/a$. En cualquier caso $1/a$ tiene átomo y por lo tanto L tiene torsión. $\square$

Lema 3.3.5. *Si L es una retícula modular seudo-complementada que tiene torsión, entonces L es atómica.*

Demostración. Sea $a \neq 0$. Veamos que $a/0$ tiene por lo menos un átomo. Como L es seudo-complementada existe $b \in L$ elemento máximo respecto a la propiedad $a \wedge b = 0$, si suponemos $b = 1$ obtenemos: $0 = a \wedge b = a \wedge 1 = a$, una contradicción y por lo tanto $b \neq 1$ luego, como L tiene torsión, $1/b$ tiene al menos un átomo $s \in 1/b$ (i. e., $b \prec s$). Se mostrará que $a \wedge s$ es átomo en $a/0$. Primero note que $a \wedge s \neq 0$ (pues de lo contrario, esto es, si $a \wedge s = 0$, entonces $b = s$, ya que b es máximo con tal propiedad, lo cual contradice que

$b \prec s$). Ahora, si $x \in L$ con $0 < x \leq a \wedge s$, entonces $x \leq s$ luego, como $b \prec s$, $b \leq b \vee x \leq s$, sin embargo $b \neq b \vee x$ (pues de lo contrario, esto es, si $b = b \vee x$, entonces $x \leq b$ luego, como $x \leq a$, $x \leq a \wedge b = 0$ por lo que $x = 0$, pero esto contradice que $0 < x$), así obtenemos $b < b \vee x \leq s$ y como $b \prec s$ se concluye que $b \vee x = s$. Entonces, $a \wedge s = a \wedge (b \vee x) \overset{\text{mod}}{=} (a \wedge b) \vee x = 0 \vee x = x$. Hemos probado que para cada $x \in L$, $0 < x < a \wedge s$ implica que $x = a \wedge s$, esto nos dice que $a \wedge s$ es átomo en L, además es claro que $a \wedge s \leq a$ y por lo tanto $a \wedge s$ es átomo en $a/0$. $\square$

Una consecuencia del Lema 3.3.5 y de la Proposición 3.2.18 se establece a contuación.

Proposición 3.3.6. *Si L es modular seudo-complementada y tiene torsión, entonces $z(L)$ es elemento esencial en L.*

Proposición 3.3.7. *Sean L modular continua superiormente y $a \in L$. Entonces L es de torsión si y sólo si $1/a$ y $a/0$ son subretículas de torsión.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Es claro que $1/a$ tiene torsión. Veamos que $a/0$ tiene torsión. Sea $x \in (a/0) - \{a\}$, por la Observación 3.3.2, $1/x$ tiene torsión, además es claro que $1/x$ es seudo-complementada (pues es continua superiormente) y modular entonces, por el Lema 3.3.5, $1/x$ es atómica, en particular, como $x \neq a$, existe $y \in a/x$ átomo en $1/x$ que a su vez es átomo en a/x. Hemos probado que para cada $x \in a/0 - \{a\}$ el cociente a/x tiene al menos un átomo y por lo tanto $a/0$ tiene torsión.
[$\Leftarrow$] Supongamos que para $a \in L$ fijo las subretículas $1/a$ y $a/0$ tienen torsión. Sea $b \in L - \{1\}$. Distinguimos dos casos: (i) $a \leq b$ y (ii) $a \nleq b$.
(i) Si $a \leq b$, tenemos que $b \in 1/a - \{1\}$ luego, como $1/a$ tiene torsión, $1/b$ tiene al menos un átomo.
(ii) Si $a \nleq b$, entonces $a \wedge b < a$ y por tanto $a \wedge b \in a/0 - \{a\}$ luego, como $a/0$ tiene torsión, $a/(a \wedge b)$ tiene al menos un átomo. Además, como L es modular, $a/(a \wedge b) \cong (a \vee b)/b$, por lo que $(a \vee b)/b$ tiene al menos un átomo que a su vez es átomo en $1/b$.
De (i) y (ii) concluimos que para cada $b \in L - \{1\}$, $1/b$ tiene al menos un átomo y por lo tanto L tiene torsión. $\square$

Proposición 3.3.8. *Sean L modular y $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ una familia tal que $a = \bigvee_{i \in I} a_i$. Si para cada $i \in I$ la subretícula $a_i/0$ tiene torsión, entonces $a/0$ tiene torsión.*

Demostración. Sea $b \in a/0 - \{a\}$. Notamos que existe $k \in I$ tal que $a_k \nleq b$ (pues de lo contrario, esto es, si para cada $i \in I$, $a_i \leq b$ entonces $b < a = \bigvee_{i \in I} a_i \leq b$ una contradicción), entonces $b \wedge a_k < a_k$, esto es, $b \wedge a_k \in a_k/0 - \{a_k\}$ luego, como $a_k/0$ tiene torsión, $a_k/(b \wedge a_k)$ tiene al menos un átomo. Además, como L es modular, $a_k/(b \wedge a_k) \cong (b \vee a_k)/b$, por lo que $(b \vee a_k)/b$ tiene al menos un átomo que a su vez es átomo en a/b. $\square$

Teorema 3.3.9. *Si L es modular, neteriana y tiene torsión, entonces L es artiniana.*

Demostración. Consideremos $A = \{x \in L \mid x/0 \text{ es artiniana}\}$, es claro que $0 \in A$ y por tanto $A \neq \varnothing$ entonces, por ser L neteriana, existe $a \in A$ elemento máximo. Vamos a probar que $a = 1$ de donde concluiremos que $a/0 = 1/0 = L$ es artiniana. Procedemos por contradicción suponiendo $a \neq 1$ entonces, como L tiene torsión, existe $b \in 1/a$ átomo en $1/a$, es decir, $a \prec b$. Primero note lo siguiente:
(i) Si $c \in L$ es tal que $c \leq b$ y $c \nleq a$, entonces $a \vee c = b$. En efecto, como $c \nleq a$ entonces $a < a \vee c$, además $a < b$ y $c \leq b$, luego $a \vee c \leq b$. Finalmente, como $a < a \vee c \leq b$ y $a \prec b$, obtenemos $a \vee c = b$.
(ii) Si $c, c' \in L$ son tales que $c < c'$, $c \leq b$, $c' \leq b$, $c \nleq a$ y $c' \nleq a$, entonces $c' \wedge a < c \wedge a$. En efecto, por (i) se tiene que $a \vee c = b = a \vee c'$, además es claro que $a \wedge c' \leq a \wedge c$, sin embargo, si suponemos $a \wedge c' = a \wedge c$ entonces, por modularidad y el Teorema 1.3.7, se tiene $c' = c$ una contradicción. Por lo tanto $a \wedge c' < a \wedge c$.
Afirmamos que $b/0$ es artiniana, en efecto, sea $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > \cdots$ una sucesión decreciente en $b/0$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \nleq a$ entonces, por (ii), $a \wedge c_{n+1} < a \wedge c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, luego $\{a \wedge c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq a/0$ no es estacionaria, pero esto contradice que $a/0$ es artiniana. Por tanto debe existir $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $c_k \leq a$ y como $a/0$ es artiniana, entonces $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es estacionaria. Hemos probado que $b/0$ es artiniana, es decir, $b \in A$, además $a \prec b$ lo cual contradice que a es elemento máximo de A. $\square$

La construcción del zoclo en una retícula L con cero proporciona una cadena que comienza en cero, luego consideramos a $z(L)$ en seguida $z(1/z(L))$ y así sucesivamente. Más concretamente tenemos:

Definición 3.3.10. *Sea L una retícula con cero. Se define la **serie de Loewy** asociada a L como sigue: $z_0(L) = 0$, $z_1(L) = z(L)$ y para un ordinal arbitrario σ, $z_{\sigma+1}(L) = z(1/z_\sigma(L))$. Si σ es ordinal límite, entonces $z_\sigma(L) = \bigvee_{\alpha < \sigma} z_\alpha(L)$.*

Observación 3.3.11. *Dada una retícula con cero L, se cumple que* $z_0(L) \leq z_1(L) \leq \cdots z_\eta(L) \leq z_{\eta+1}(L) \leq \cdots$. *Además, existe un ordinal* σ *tal que* $z_\sigma(L) = z_\alpha(L)$ *para cada* $\alpha > \sigma$, *además* $|\sigma| \leq |L|$.

Definición 3.3.12. *Al mínimo ordinal* σ *tal que* $z_\sigma(L) = z_{\sigma+1}(L) = \cdots$ *le llamaremos* ***longitud de Loewy*** *de L.*

Proposición 3.3.13. *Sea L una retícula modular. La retícula L tiene torsión si y sólo si existe un ordinal* σ *tal que* $z_\sigma(L) = 1$.

Demostración.
[$\Rightarrow$] Como L tiene torsión, entonces para cada ordinal α la subretícula cociente $1/z_\alpha(L)$ contiene átomos y por tanto $z_\alpha(L) < z_{\alpha+1}(L)$. Entonces la serie de Loewy de L es estrictamente creciente por lo cual debe alcanzar a 1, es decir, existe un ordinal σ tal que $z_\sigma(L) = 1$.
[$\Leftarrow$] Usaremos inducción transfinita.
[CASO: $\sigma = 0$] En este caso se tiene que $0 = z_0(L) = 1$, es decir, $L = \{0\}$. Por lo tanto L tiene torsión.
[CASO: Sucesor] Supongamos que el enunciado es verdadero para σ y veamos que también lo es para el sucesor de σ. Supongamos que $z_{\sigma+1} = 1$ y sea $x \in L - \{1\}$ (i. e., $x < 1$). Sabemos que $z_\sigma(L) \leq z_{\sigma+1}(L)$. Distinguimos dos casos:
(I) $z_\sigma(L) = z_{\sigma+1}(L) = 1$. En este caso la hipótesis de inducción garantiza que L tiene torsión.
(II) $z_\sigma(L) < z_{\sigma+1}(L)$. En este caso, si $x = z_\sigma(L)$, entonces $1 = z_{\sigma+1}(L) \overset{\text{def}}{=} z(1/z_\sigma(L)) = z(1/x)$ y por tanto $1/x$ tiene átomos. Si $x < z_\sigma(L)$ entonces, por hipótesis de inducción, L tiene torsión y por tanto $1/x$ tiene átomos. Si por el contrario $x \nleq z_\sigma(L)$, entonces $x \wedge z_\sigma(L) < x$ y $x \wedge z_\sigma(L) \leq z_\sigma(L)$ luego, si $x \wedge z_\sigma(L) < z_\sigma(L)$ entonces, por hipótesis de inducción, $z_\sigma(L)/(x \wedge z_\sigma(L))$ tiene átomos, además $z_\sigma(L)/(x \wedge z_\sigma(L)) \overset{\text{mod}}{\cong} (x \vee z_\sigma(L))/x$ y por lo tanto $(x \vee z_\sigma(L))/x$ tiene átomos, a su vez, átomos en $1/x$; y si $z_\sigma(L) = x \wedge z_\sigma(L) < x$, debe existir $a_0 \in 1/z_\sigma(L)$ átomo en $1/z_\sigma(L)$ tal que $a_0 \nleq x$ (ya que de lo contrario, esto es, si para cada $a \in 1/z_\sigma(L)$ átomo se cumple que $a \leq x$, entonces $1 = z_{\sigma+1}(L) \overset{\text{def}}{=} z(1/z_\sigma(L)) \leq x < 1$, una contradicción), entonces $x \wedge a_0 < a_0$, además $z_\sigma(L) < x$ y $z_\sigma(L) \prec a_0$, entonces $z_\sigma(L) \leq x \wedge a_0 < a_0$ y por tanto $z_\sigma(L) = x \wedge a_0$, finalmente, como $\{a_0, z_\sigma(L)\} = a_0/z_\sigma(L) = a_0/(x \wedge a_0) \overset{\text{mod}}{=} (a_0 \vee x)/x$, entonces $(a_0 \vee x)/x$ tiene un átomo, que a su vez es átomo en $1/x$.

En cualquier caso $1/x$ contiene al menos un átomo y por lo tanto L tiene torsión.
[CASO: Límite] Supongamos que el enunciado es verdadero para cada $\alpha < \sigma$ cuando σ es ordinal límite y veamos que también lo es para σ. Supongamos que $1 = z_\sigma(L) \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{\alpha<\sigma} z_\alpha(L)$ y sea $x < 1$. Distinguimos dos casos:
(I) Existe $\alpha_0 < \sigma$ tal que $x \leq z_{\alpha_0}(L)$. En este caso, si $x < z_{\alpha_0}(L)$ entonces, por hipótesis de inducción, $z_{\alpha_0}(L)/x$ tiene átomos, a su vez, átomos en $1/x$. Por otro lado, si $x = z_{\alpha_0}(L)$ es claro que para cada $\eta > \sigma_0$, $x = z_{\alpha_0}(L) < z_\eta(L)$ (pues la serie de Loewy es no decreciente) entonces, por hipótesis de inducción, $z_\eta(L)/x$ tiene átomos, a su vez, átomos en $1/x$.
(II) Para cada $\alpha < \sigma$ se cumple que $x \nleq z_\alpha(L)$. En este caso, para cada $\alpha < \sigma$ se tiene que $x \wedge z_\alpha(L) < x$ y $x \wedge z_\alpha(L) \leq z_\alpha(L)$. Sin embargo debe existir $\alpha_0 < \sigma$ tal que $z_{\alpha_0}(L) \nleq x$ (i. e., $x \wedge z_{\alpha_0}(L) < z_{\alpha_0}(L)$), pues de lo contrario, esto es, si para cada $\alpha < \sigma$ se cumple que $z_\alpha(L) \leq x$, entonces $1 = \bigvee_{\alpha<\sigma} z_\alpha(L) \leq x < 1$, una contradicción. Entonces, por hipótesis de inducción, $z_{\alpha_0}(L)/(x \wedge z_{\alpha_0}(L))$ tiene átomos, además $z_{\alpha_0}(L)/(x \wedge z_{\alpha_0}(L)) \overset{\text{mod}}{\cong} (x \vee z_{\alpha_0}(L))/x$ y por tanto $(x \vee z_{\alpha_0}(L))/x$ tiene átomos, a su vez, átomos en $1/x$.
En cualquier caso $1/x$ contiene al menos un átomo y por lo tanto L tiene torsión. $\square$

Recordemos que si P es una propiedad de retículas, entonces un elemento a de una retícula tiene la propiedad P si la retícula cociente $a/0$ tiene la propiedad P. En este sentido, si L es una retícula con cero y uno, entonces un elemento $a \in L$ se llama ***elemento de torsión*** de L si la subretícula $a/0$ tiene torsión.

Notación 3.3.14. *Sea L una retícula con cero y uno. Denotaremos por $T(L)$ al conjunto de todos los elementos de torsión de L.*

Observación 3.3.15. *Sea L retícula con cero y uno. Entonces, $x \in T(L)$ si y sólo si para cada $a \in L$, con $a \leq x$, si $z(x/a) = a$, entonces $x = a$. Además es claro que todo átomo de L es elemento de torsión de L.*

Lema 3.3.16. *Sea L una retícula modular, seudo-complementada con cero y uno. Sean $a, b \in L$, se cumple que:*

(T1) *Si $b \leq a$ y $a \in T(L)$, entonces $b \in T(L)$ y a/b tiene torsión.*

(T2) *Si* $b \leq a$, $b \in T(L)$ *y* a/b *tiene torsión, entonces* $a \in T(L)$.

(T3) *Si* $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq T(L)$, *entonces* $\bigvee_{i \in I} a_i \in T(L)$.

Demostración. Las propiedades (T1) y (T2) son consecuencia de la Proposición 3.3.7 y (T3) es consecuencia de la Proposición 3.3.8. □

Definición 3.3.17. *Sea* L *una retícula con cero y uno. Al supremo de* $T(L)$ *le llamaremos* ***parte de torsión*** *de* L *y lo denotaremos por* $t(L)$.

Observación 3.3.18. *Si* L *tiene cero y uno entonces, por la Observación 3.3.15 y por definición de parte de torsión de* L, *se tiene que* $z(L) \leq t(L)$.

Proposición 3.3.19. *Si* L *es modular y completa, entonces* $T(L)$ *es un ideal principal, más aún,* $T(L) = t(L)/0$.

Demostración. Por un lado, si $a \in T(L)$ es claro que $a \leq t(L)$ y por tanto $a \in t(L)/0$. Por otro lado, si $a \in t(L)/0$, entonces $a \leq t(L)$, además, por (T3), $t(L) \in T(L)$ y por tanto $a/0$ tiene torsión, es decir, $a \in T(L)$. Por lo tanto $T(L) = t(L)/0$ que claramente es ideal principal. □

Proposición 3.3.20. *Sea* L *modular y completa. Entonces* $z(L) = 0$ *si y sólo si* $t(L) = 0$.

Demostración.
[$\Rightarrow$] Si $z(L) = 0$ entonces para cada $x \in L$ la subretícula cociente $x/0$ no tiene átomos, así que para cada $x \in L$, $x/0$ no tiene torsión, luego $T(L) = \varnothing$ y por lo tanto $t(L) = \bigvee T(L) = \bigvee \varnothing = 0$.
[$\Leftarrow$] Si $t(L) = 0$ entonces, como $z(L) \leq t(L)$, se tiene que $0 \leq z(L) \leq t(L) = 0$, es decir, $z(L) = 0$. □

Proposición 3.3.21. *Sea* L *completa y modular. Si* $c \in L$ *satisface que* $t(1/c) = c$, *entonces* $t(L) \leq c$.

Demostración. Basta mostrar que c es cota superior de $T(L)$. Sea $a \in T(L)$. Como $t(1/c) = c$ entonces, por la Proposición 3.3.20, tenemos $z(1/c) = c$, es decir, $1/c$ no tiene átomos y por tanto $(a \vee c)/c$ no tiene átomos, además $(a \vee c)/c \overset{\text{mod}}{\cong} a/(a \wedge c)$, luego $a/(a \wedge c)$ no tiene átomos. Finalmente, como a es elemento de torsión y $a/(a \wedge c)$ no tiene átomos, se concluye que $a \wedge c = a$, es decir, $a \leq c$. □

Proposición 3.3.22. *Sea L una retícula modular y completa. Si σ es la longitud de Loewy de L, entonces $z_\sigma(L) = t(L)$.*

Demostración. Como los zoclos forman una cadena no decreciente, entonces $z_\sigma(L) = \bigvee_{\alpha\leq\sigma} z_\alpha(L)$. Vamos a garantizar primero que $z_\sigma(L) \leq t(L)$ para lo cual basta mostrar que $z_\alpha(L) \leq t(L)$ para cada $\alpha \leq \sigma$, es decir, basta mostrar que $z_\alpha(L) \in T(L)$ para cada $\alpha \leq \sigma$. Procedemos por inducción sobre la longitud de Loewy de L. Para $\sigma = 0$ tenemos, por definición, $z_0(L) = 0 = z_1(L) = z(L)$ entonces, por la Proposición 3.3.20, se tiene $0 = t(L) \in T(L)$. Supongamos que el enunciado se satisface para σ y veamos que también se satisface para el sucesor de σ. Supongamos que L tiene longitud de Loewy $\sigma + 1$ y sea $x < z_{\sigma+1}(L)$. Veamos que $z_{\sigma+1}(L)/x$ tiene átomos. Abrimos dos casos:
(i) $z_\sigma(L) \nleq x$. En este caso tenemos $z_\sigma(L) \wedge x < z_\sigma(L)$, así que, por hipótesis de inducción, $(z_\sigma(L) \wedge x)/z_\sigma(L)$ tiene átomos; y como $z_\sigma(L)/(z_\sigma(L) \wedge x) \overset{\text{mod}}{\cong} (z_\sigma(L) \vee x)/x$ se concluye que $z_{\sigma+1}(L)/x$ tiene átomos.
(ii) $z_\sigma(L) \leq x$. Notamos que $z_{\sigma+1}(L) = z(1/z_\sigma(L)) \leq t(1/z_\sigma(L))$ luego $z_{\sigma+1}(L)/z_\sigma(L)$ tiene torsión y por lo tanto, ya que $z_\sigma(L) \leq x < z_{\sigma+1}(L)$, se concluye que $z_{\sigma+1}(L)/x$ tiene átomos.
Ahora veamos que $t(L) \leq z_\sigma(L)$. Como σ es la longitud de Loewy se cumple que $z_\sigma(L) = z_{\sigma+1}(L) = z(1/z_\sigma(L))$ entonces, por la Proposición 3.3.20, se tiene $t(1/z_\sigma(L)) = z_\sigma(L)$. Finalmente, por la Proposición 3.3.21, tenemos $t(L) \leq z_\sigma(L)$. $\square$

Proposición 3.3.23. *En una una retícula modular y completa, L, se cumple que $t(1/t(L)) = t(L)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.3.20, basta mostrar que $z(1/t(L)) = t(L)$, es decir, $1/t(L)$ no tiene átomos. Procedemos por contradicción suponiendo que $b \in 1/t(L)$ es átomo en $1/t(L)$. Afirmamos que $b/0$ es subretícula de torsión, en efecto, sea $a < b$ y veamos que b/a tiene átomos. Como $t(L) \prec b$ podemos distinguir dos casos:
(i) $a \leq t(L)$. En este caso, si $a = t(L)$ entonces b es átomo en b/a. Por otro lado, si $a < t(L)$ entonces, como $t(L)$ es elemento de torsión, $t(L)/a$ tiene átomos que a su vez son átomos en b/a.
(ii) $a \nleq t(L)$. En esta caso $t(L) < a \vee t(L) \leq b$; y como $t(L) \prec b$, entonces $a \vee t(L) = b$. Notamos que $t(L)/(a \wedge t(L))$ tiene átomos, pues $t(L)$ es elemento de torsión, además $t(L)/(a \wedge t(L)) \overset{\text{mod}}{\cong} (a \vee t(L))/a = b/a$ y por lo tanto b/a

tiene átomos.
Nuestra afirmación garantiza que $b \in T(L)$ y por lo tanto $b \leq \bigvee T(L) = t(L) \prec b$, una contradicción. $\square$

Definición 3.3.24. *Sea L una retícula con cero y uno, diremos que L satisface la **condición del zoclo restringido** (para abreviar CZR) si para cada $b \in L - \{1\}$ elemento esencial en L la subretícula cociente $1/b$ tiene al menos un átomo, es decir, $z(1/b) \neq b$.*

Ejemplo 3.3.25. *Sea G un grupo abeliano. La retícula $(Sub(G), \subseteq)$ satisface CZR.*

En efecto, sea $H \in Sub(G)$ esencial en $Sub(G)$, con $H \neq G$. Si $x \in G$ con $x \neq 0$, entonces $\langle x \rangle \cap H \neq \{0\}$, luego existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $0 \neq nx \in H$ y $n(x + H) = H$. Por lo tanto G/H es un grupo de torsión que claramente es distinto del grupo trivial nulo, entonces G/H posee algún elemento de orden primo que a su vez genera un subgrupo simple (i. e., átomo en le retícula cociente G/H), luego $z(G/H) \neq H$.

Proposición 3.3.26. *Sea L una retícula átomica y modular. Entonces L tiene torsión si y sólo si L satisface CZR.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Se sigue por definición de retícula de torsión.
[$\Leftarrow$] Sea $b \in L - \{1\}$. Veamos que $1/b$ tiene átomos. Podemos distinguir dos casos:
(i) b es esencial en L. En este caso CZR garantiza que $1/b$ tiene al menos un átomo.
(ii) b no es esencial en L. En este caso existe $a \in L$, con $a \neq 0$, tal que $b \wedge a = 0$. Como L es atómica, se tiene que $a/0 = a/(b \wedge a)$ tiene átomos, además $a/(b \wedge a) \overset{\text{mod}}{\cong} (b \vee a)/b$ y por lo tanto $1/b$ tiene átomos. $\square$

Proposición 3.3.27. *Sea L una retícula compactamente generada, modular y que satisface CZR. Son equivalentes:*

(1) $e \in L$ es esencial en L.

(2) $z(L) \leq e$ y $1/e$ tiene torsión.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Si e es esencial en L entonces, por el Lema 3.2.14, $z(L) \leq e$. Ahora veamos que $1/e$ tiene torsión. Sea $a \in (1/e) - \{1\}$, es claro que a es elemento esencial de L entonces, por CZR, la subretícula cociente $1/a$ tiene átomos. Por lo tanto $1/e$ tiene torsión.
[(2) $\Rightarrow$ (1)] [Por contradicción] Supongamos que e no es esencial en L entonces existe $a \in L - \{0\}$ tal que $e \wedge a = 0$. Notamos que $1/e$ es modular y seudo-complementada, además, por hipótesis, $1/e$ tiene torsión entonces, por el Lema 3.3.5, $1/e$ es atómica luego $(e \vee a)/e$ tiene átomos. Además, $(e \vee a)/e \overset{\text{mod}}{\cong} a/(e \wedge a) = a/0$ y por lo tanto $a/0$ tiene átomos. Finalmente, si $a' \in a/0$ es átomo en $a/0$ entonces, como $a' \leq z(L)$, $a' \leq a$ y $z(L) \leq e$, se tiene $0 \prec a' = a' \wedge z(L) \leq a \wedge e = 0$, una contradicción. $\square$

Ejemplo 3.3.28. *Sea G un grupo abeliano. Debido al Ejemplo 3.3.25, a la Proposición 3.3.27 y al hecho de que $Sub(G)$ es compactamente generada y modular, obtenemos: $H \in Sub(G)$ es esencial en $Sub(G)$ si y sólo si $z(G) \subseteq H$ y G/H tiene torsión.*

Corolario 3.3.29. *Sea L una retícula compactamente generada, modular y que satisface CZR. Son equivalentes:*

(1) $c \in L$ es seudo-complemento de b en L.

(2) $b \wedge c = 0$ y $b \vee c$ es esencial en $1/c$.

(3) $b \wedge c = 0$, $z(L) \leq b \vee c$ y $1/(b \vee c)$ tiene torsión.

Demostración.
[(1) $\Leftrightarrow$ (2)] Es consecuencia de la Proposición 3.1.14.
[(3) $\Leftrightarrow$ (3)] Lo garantiza la Proposición 3.3.27. $\square$

Definición 3.3.30. *Sea L una retícula. Un elemento $a \in L$ se llama elemento **libre de torsión** en L si no tiene elementos que lo cubran.*

Observación 3.3.31. *Si L es una retícula con uno, es claro que $1 \in L$ es libre de torsión en L.*

Lema 3.3.32. *Sean L retícula modular con cero y uno; y $x, y, z \in L$, entonces:*

(1) Si $x \in T(L)$, $x \vee y \leq z$ y z/y no contiene átomos, entonces $x \leq y$.

(2) Si $x \in T(L)$ e y es elemento libre de torsión, entonces $x \leq y$.

(3) Si $x \in T(L)$ y $x \prec y$, entonces $y \in T(L)$.

Demostración.
Demostración de (1): [Por Contradicción] Supongamos que $x \nleq y$, entonces $x \wedge y < x$ y como $x \in T(L)$ se tiene que $x/(x \wedge y)$ tiene átomos, además $x/(x \wedge y) \overset{\text{mod}}{\cong} (x \vee y)/y$ y por tanto z/y tiene átomos lo cual contradice la hipótesis.
Demostración de (2): Es claro que $x \vee y \leq 1$ y $1/y$ no tiene átomos (pues y es libre de torsión) entonces, aplicando (1) para $z = 1$, se tiene $x \leq y$.
Demostración de (3): Vamos a probar que para cada $a \in L$, con $a \leq y$, si y/a no tiene átomos (i. e., $z(y/a) = a$), entonces $a = y$. Lo cual equivale a que $y \in T(L)$ (ver la Observación 3.3.15). Sea $a \leq y$ y supongamos que y/a no tiene átomos. Es claro que $x \in T(L)$, $x \vee a \leq y$ y y/a no tiene átomos entonces, por (1), $x \leq a$. Si $x = a$, entonces $y/a = y/x$ y como $x \prec y$ se tiene que y/a tiene átomo, pero esto contradice nuestra hipótesis y por lo tanto $x < a$. Finalmente, $x < a \leq y$ y como $x \prec y$, se concluye que $a = y$. □

Proposición 3.3.33. *Sea L una retícula modular completa. Si $A \subseteq L$ es un conjunto de elementos libres de torsión en L, entonces $\bigwedge A$ es elemento libre de torsión en L.*

Demostración. Supongamos que $\bigwedge A$ no es libre de torsión en L, entonces existe $s \in L$ tal que $\bigwedge A \prec s$. Sea $a \in A$, es claro que $\bigwedge A \leq a$ (i. e., $a = a \vee (\bigwedge A)$), ademas, como $\bigwedge A \prec s$ y L es modular, se tiene que $a = a \vee (\bigwedge A) \preceq a \vee s$ (ver la Proposición 1.3.15), pero a es libre de torsión en L y por lo tanto $a = a \vee s$, esto es, $s \leq a$. Lo anterior muestra que s es cota inferior de A y por tanto $s \leq \bigwedge A$, finalmente $s \leq \bigwedge A \prec s$, una contradicción. □

Lema 3.3.34. *En una retícula modular completa existe un elemento que es el mayor de los elementos de torsión y a la vez el menor de los elementos libres de torsión.*

Demostración. Sea t el supremo del conjunto de todos los elementos de torsión; por (T3), el elemento t es de torsión y por lo tanto, al ser un supremo, es el mayor de los elemento de torsión. Sea a el ínfimo del conjunto de todos los elementos libres de torsión; por la Proposición 3.3.33, el elemento a es libre de torsión y por lo tanto, al ser un ínfimo, es el menor de los elementos libres de torsión. Además, por el Lema 3.3.32 (2), se tiene $t \leq a$. Si $t < a$ entonces, como a es el menor de los elementos libres de torsión, el elemento t no es libre de torsión, así que existe t' tal que $t \prec t'$; y como t es de torsión entonces, por Lema 3.3.32 (3), se tiene que t' es de torsión, pero esto contradice que t es el mayor de los elemento de torsión. Por lo tanto $t = a$. $\square$

Teorema 3.3.35. *Para cada elemento a de una retícula modular completa, existe un menor elemento libre de torsón $t(a) \geq a$. Más aún, $t(a)/a$ es retícula de torsión.*

Demostración. Tomemos un elemento a. Por el Lema 3.3.34 existe $t(a)$ el menor de los elementos libres de torsión de la subretícula cociente $1/a$. Por lo tanto $t(a)$ es el menor de los elementos libres de torsión y $t(a) \geq a$. Además es claro que $t(a)$ es el menor de los elementos libres de torsión para la subretícula cociente $t(a)/a$, lo que implica que para cada $x \in (t(a)/a) - \{t(a)\}$ existe $y \in t(a)/a$ tal que $x \prec y$, es decir, $t(a)/x$ tiene átomo. Por lo tanto $t(a)/a$ tiene torsión. $\square$

Como consecuencia del Teorema 3.3.35 y el Lema 3.3.5 obtenemos:

Corolario 3.3.36. *Sea L continua superiormente y modular. Entonces para cada $a \in L$ la subretícula cociente $t(a)/a$ es atómica.*

Proposición 3.3.37. *Si L es modular continua superiormente y $a, b \in L$, entonces $t(a \wedge b) = t(a) \wedge t(b)$.*

Demostración. Es evidente que $t(a)$ y $t(b)$ son elementos libres de torsión en la subretícula cociente $1/(a \wedge b)$, además, por el Teorema 3.3.35, $t(a \wedge b)$ es el menor de los elementos libres de torsión de la subretícula $1/(a \wedge b)$ y por lo tanto $t(a \wedge b) \leq t(a) \wedge t(b)$. Ahora veamos que $t(a) \wedge t(b) \leq t(a \wedge b)$. Consideremos $X = \{x \in L \mid a \leq x \leq t(a), x \wedge b \leq t(a \wedge b)\}$ ordenado por restricción, es claro que $b \in X$ y por tanto $X \neq \varnothing$. Sea $C \subseteq X$ una cadena, notamos que $a \leq \bigvee C \leq t(a)$ y, por la continuidad superior, $(\bigvee C) \wedge b = \bigvee_{c \in C}(c \wedge b) \leq t(a \wedge b)$ y por lo tanto $\bigvee C \in X$. Lo anterior muestra que toda cadena en X tiene cota superior en X entonces, por el Lema de Zorn, existe $m \in X$ elemento máximo. Como $m \in X$ se cumple que $a \leq m \leq t(a)$ y $m \wedge b \leq t(a \wedge b)$. Afirmamos que $m = t(a)$, para mostrar esto procedemos por contradicción suponiendo $m \neq t(a)$ lo que implica que $m < t(a)$, luego, como $t(a)/a$ es de torsión y $m < t(a)$, existe $m' \in t(a)/a$ tal que $m \prec m'$ entonces,

por modularidad, se tiene $m \wedge b \preceq m' \wedge b$ y por lo tanto, nuevamente por modularidad, $t(a \wedge b) = (m \wedge b) \vee t(a \wedge b) \preceq (m' \wedge b) \vee t(a \wedge b)$, pero $t(a \wedge b)$ es elemento libre de torsíon, así que $t(a \wedge b) = (m' \wedge b) \vee t(a \wedge b)$ lo cual equivale a que $m' \wedge b \leq t(a \wedge b)$, finalmente $a \leq m' \leq t(a)$ y $m' \wedge b \leq t(a \wedge b)$, es decir, $m' \in X$, con $m \prec m'$, lo cual contradice la maximalidad de m. Por lo tanto $m = t(a)$. Así obtenemos que $t(a) \wedge b \leq t(a \wedge b)$.
Sea $Y = \{y \in L \mid b \leq y \leq t(b), t(a) \wedge y \leq t(a \wedge b)\}$, es claro que $b \in Y$ y por tanto $Y \neq \varnothing$. Un argumento similar al del párrafo anterior muestra que Y tiene un elemento máximo que necesariamente es $t(b)$, obtenemos con ello la desigualdad requerida, $t(a) \wedge t(b) \leq t(a \wedge b)$. $\square$

Definición 3.3.38. *En una retícula con cero, L, un elemento $c \in L$ se llama **ciclo** de L si la subretícula cociente $c/0$ es neteriana y distributiva.*

Observación 3.3.39.

(1) Como toda subretícula de una retícula neteriana y distributiva es neteriana y distributiva, entonces toda cota inferior de un ciclo es un ciclo.

(2) Sabemos que todo elemento neteriano en una retícula continua superiormente es compacto (ver la Proposición 2.2.14), así que, en una retícula continua superiormente todo ciclo es compacto.

(3) Si $0 \prec a$, entonces $a/0 = \{0, a\}$ es claramente neteriana y distributiva, por lo tanto todo átomo en una retícula es un ciclo.

(4) Sabemos que toda retícula modular, neteriana y de torsión es artiniana y por tanto de longitud finita (ver Teorema 3.3.9 y Teorema 2.3.15), entonces todo ciclo que es elemento de torsión tiene longitud finita.

Conclusión

Las retículas son muy efectivas para el estudio de las propiedades de numerosas estructuras algebraicas pues las técnicas reticulares nos permiten desprendernos de las operaciones internas del objeto algebraico en cuestión y con ello proveen de otro enfoque para su análisis.

Además, al trabajar con la relación de orden de una retícula de un objeto algebraico resulta natural tratar de describir a tal objeto en términos de sus subobjetos y de como estos están ordenados, cuando esto se logra obtenemos numerosas herramientas para clasificar al objeto algebraico.

La dualidad que presentan las retículas de ser a la vez conjuntos ordenados y algebraicos, habla de la estrecha relación entre operaciones y estructuras, las cuales son mutuamente dependientes. Finalmente, al abstraer las propiedades esenciales del orden, las retículas son idóneas para estudiar subestructuras comunes a los objetos algebraicos, como el zoclo, el cual es útil para la clasificación de la retícula de alguna estructura algebraica.

Por lo tanto las retículas merecen un lugar central en el estudio del Álgebra, pues constituyen un aspecto esencial de sus objetos.

Bibliografía

[1] Anderson, F. W., Fuller, R. K. *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, New York, Springer Verlag, 1992.

[2] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Revised Edition, New York, AMS Colloquium Publications vol. XXV, 1948.

[3] Călugăreanu, G., *Lattice Concepts of Module Theory*, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] Grätzer, G., *General Lattice Theory*, Second Edition, Berlín, Birkhäuser Verlag, 2003.

[5] Grätzer, G., *Lattice Theory* First Concepts and Distributive Lattices, New York, Dover Publications, 2008.

[6] Grätzer, G., *Universal Algebra*, Second Edition, New York, Springer Verlag, 2008.

[7] Kasch, F., *Modules and Rings*, London, Academic Press, 1982.

[8] Rutherford, D. E., *Introduction to Lattice Theory*, Corrected Edition, London, Oliver & Boyd, 1966.

[9] Stenström, Bo, *Rings of Quotients* An Introduction to Methods of Ring Theory, New York, Springer Verlag, 1975.