# Espacios emplumados

Jesus Diaz Reyes

27 de septiembre de 2011

Las matemáticas son un mundo
donde no existen los problemas

El que yo llegue a este pasaje de la vida y haya conocido tan hermosa ciencia como lo son las matemáticas, se debe a que personas como Gerardo, Irma, Eusebia, Alberto, Alejandra y Daniel, me han regalado un inmenso y sincero apoyo, sin olvidar el ánimo y los consejos que me dieron día a día. Nunca se los he dicho y hoy lo hago con estas humildes palabras, muchas gracias y este pequeño logro no es sólo mío, es de todos nosotros.

Quiero agradecer al profesor Manuel Ibarra Contreras todo el apoyo y el conocimiento que me transmitió; quien sin dudar y gustosamente aceptó dirigir este trabajo, mostrando un compromiso sorprendente y dedicando gran cantidad de su tiempo hasta la presentación final de este escrito.

También quiero dar gracias a los profesores Juan Angoa, Agustín Contreras y Armando Martínez quienes con sus acertadas sugerencias han logrado un mejor resultado en este trabajo.

Por último, gracias a todos mis amigos y amigas por su compañía, paciencia y ayuda en todo momento.

# Introducción

Los espacios métricos por un lado y los espacios localmente compactos por otro, son dos clases de espacios que ocupan un lugar importante en la topología de conjuntos y sus aplicaciones. Al mismo tiempo es fácil ver que todas las clases de espacios estudiados en topología tienen propiedades muy diferentes; hasta el año de 1964 se conocía sólo una clase natural de espacios que abarcara a todos los espacios métricos y localmente compactos, a saber, la clase de espacios completamente regulares, estudiada por A. N. Tychonoff en 1930. Es evidente que la clase mencionada es extremadamente amplia y, como consecuencia, en ella se pierden las características específicas de los espacios localmente compactos y los espacios métricos. A pesar de todas las diferencias entre estas dos clases de espacios, se tienen un gran número de propiedades en común; por ejemplo, se preservan bajo productos finitos, bajo la imagen de una función perfecta, y en subespacios cerrados; también el Teorema 2.42, de este trabajo, es igualmente válido para ambas clases de espacios. Por lo tanto, es muy tentador intentar encontrar una clase de espacios que contenga a todos los espacios métricos y los espacios localmente compactos en la que las propiedades que comparten tengan un significado común, por decir algo, lo que se probará en el Teorema 2.16, Teorema 2.26 y la Proposición 2.12.

En el presente trabajo se estudia tal clase, basandonos en el artículo *On a Class of Spaces Containing All Metric Spaces and All Locally Compact Spaces* publicado por el matemático ruso A. V. Arhangel'skiĭ en 1965 (ver [4]), con el objetivo de hacer accesible el tema a un público más amplio que tenga gusto por la topología general.

En el capítulo 1, se presentan todos los resultados necesarios para acceder a la clase de espacios que estudiaremos. Recomendamos en especial, no pasar por alto las secciones 1.4 y 1.5 ya que son temas que probablemente no se ven en un curso de topología general.

Los dos capítulos siguientes son el tratado de nuestro tema principal. Es fundamental saber que en todos los espacios en que no especifiquemos qué axioma de separabilidad se está suponiendo, deberá ser tomado como un espacio completamente regular. Todas las funciones con las que trabajamos son continuas. Cuando tenemos un subconjunto de un espacio topológico, $Y \subseteq X$, se asume que $Y$ tiene la topología heredada de $X$.

En cuestión de la notación, $X \in \mathcal{T}_i$ significa que el espacio $X$ satisface el axioma de separación $T_i$; usamos el símbolo † para indicar que la prueba de lo planteado ha terminado (como lo hace el profesor Manuel Ibarra en sus cursos) y, por último, la cardinalidad de un conjunto $A$ es denotada como $|A|$.

*Jesus Diaz Reyes*
*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas*
*Benemérita Universiad Autónoma de Puebla*

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar aquellos resultados que son fundamentales para el desarrollo de nuestro trabajo; la mayoría de ellos no tiene una demostración salvo teoremas y proposiciones que atrajeron mi atención y curiosidad, tal es el caso del tema de compactaciones y el de funciones multivaluadas.
En la sección 1.1, presentamos resultados y conceptos que son vistos en un primer curso de topología general pero que será bueno recordarlos.
En las secciones 1.2, 1.3 y 1.4, se expone brevemente el amplio tema de compactaciones. En la definición principal de este trabajo (Definición 2.4) y, a lo largo de él, se habla de compactaciones lo cual nos motiva a probar muchos de los resultados expuestos en estas secciones.
En la sección 1.5 se trata el tema de funciones multivaluadas; tal concepto aparece continuamente en un gran número de resultados, lo cual fue un motivo para dar una demostración de lo presentado ahí.
En la última sección enunciamos las definiciones y propiedades que utilizamos acerca de la clase de los espacios paracompactos.

## 1.1. Definiciones y resultados básicos

Cuando decimos "resultados básicos", no debe entenderse que son resultados sencillos, sino resultados conocidos o que se ven en un primer curso de topología general. Por ejemplo el siguiente (Teorema 3.2.4 en [7]).

**Teorema 1.1** (Tychonoff). *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios topológicos, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si cada $X_\alpha$ es compacto.*

Ahora, por otro lado, recordemos las siguientes clases de espacios topológicos.

**Definición 1.2.** *Diremos que un espacio topológico $X$ es $T_1$ si para cualesquiera dos puntos diferentes $x$ e $y$ en $X$, existe un conjunto abierto $U_x$ en $X$, tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$; y existe también un conjunto abierto $V_y$ en $X$, tal que $y \in V_y$ y $x \notin V_y$. En este caso escribiremos $X \in \mathcal{T}_1$.*

Aquí, veamos la siguiente equivalencia para espacios $T_1$ (Teorema 13.4 en [11]).

**Proposición 1.3.** *$X \in \mathcal{T}_1$ si y sólo si todo subconjunto $A$ de $X$, cumple que $A = \bigcap\{U : U \text{ es abierto y } A \subseteq U\}$.*

**Definición 1.4.** *Un espacio topológico $X$ es $T_2$, o también comúnmente llamado Hausdorff, si para cualesquiera $x$, $y \in X$, con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos $U$ y $V$ en $X$, tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si $X$ es un espacio $T_2$, este hecho se denotará como $X \in \mathcal{T}_2$.*

**Definición 1.5.** *Un espacio topológico $X$ es completamente regular si para todo conjunto cerrado $A$ en $X$ y todo punto $x \in X \setminus A$, existe una función $f : X \to [0,1]$ de forma que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Un espacio $T_1$ que es completamente regular, es llamado Tychonoff o $T_{3,5}$. Este hecho se denotará como $X \in \mathcal{T}_{3,5}$.*

**Definición 1.6.** *Diremos que un espacio $X$ es normal si para todo par de cerrados ajenos $A$ y $B$ en $X$, existe un par de conjuntos abiertos $U$ y $V$ en $X$, tal que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ con $U \cap V = \emptyset$. Un espacio $X$ el cual es $T_1$ y normal, es llamado $T_4$. Análogamente escribiremos $X \in \mathcal{T}_4$.*

A continuación damos una caracterización de utilidad para espacios $T_4$.

**Proposición 1.7.** *$X \in \mathcal{T}_4$ si y sólo si para todo conjunto cerrado $A \subseteq X$ y todo conjunto abierto $V \subseteq X$ que contiene a $A$, existe un conjunto abierto $U$ en $X$ de forma que $A \subseteq U \subseteq c\ell U \subseteq V$.*

**Demostración.** $\Rightarrow]$ Si tomamos un conjunto cerrado $A$ y un conjunto abierto $V$ tal que $A \subseteq V$, entonces por hipótesis existen abiertos ajenos $U$ y $W$ con la propiedad de que $A \subseteq U$ y $(X \setminus V) \subseteq W$, y de donde es fácil ver que $A \subseteq U \subseteq c\ell U \subseteq V$.
$\Leftarrow]$ Sean $A$ y $B$ conjuntos cerrados y ajenos; como $A \subseteq (X \setminus B)$, podemos encontrar un conjunto abierto $U$ de forma que $A \subseteq U \subseteq c\ell U \subseteq (X \setminus B)$. Ahora, como $B \subseteq (X \setminus c\ell U)$, es posible encontrar un conjunto abierto $V$ tal que $B \subseteq V \subseteq c\ell V \subseteq (X \setminus c\ell U)$. Entonces no es complicado ver que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. †

Las clases de espacios topológicos definidas anteriormente son principalmente las de nuestro interés. Ahora pasemos a lo siguiente.

**Definición 1.8.** *Diremos que un subconjunto $A$ de un espacio topológico $X$ es un:*

*a) $G_\delta$ si $A$ es la intersección numerable de conjuntos abiertos en $X$;*

*b) $F_\sigma$ si $A$ es la unión numerable de conjuntos cerrados en $X$.*

**Observación 1.9.** *$A$ es un conjunto $G_\delta$ en un espacio $X$ si y sólo si $X \setminus A$ es un conjunto $F_\sigma$ en $X$.*

Ahora definamos el concepto de conjunto denso.

**Definición 1.10.** *Sea $D$ un subconjunto de un espacio topológico $X$. $D$ es denso en $X$ si $c\ell_X D = X$.*

Veamos una propiedad que tienen los conjuntos densos la cual usaremos frecuentemente (Teorema 1.3.6 en [7]).

**Proposición 1.11.** *Dados $D$ un conjunto denso y $U$ un conjunto abierto, en $X$. Entonces $c\ell_X U = c\ell_X(U \cap D)$.*

Otros de los conceptos que son importantes en este trabajo son los de compacidad y compacidad local que se definen a continuación. Para esto recordemos que una cubierta de un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de $X$ tal que $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Si además $X$ es un espacio topológico y $A_s$ es un conjunto abierto para cada $s \in S$, diremos que la familia $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de $X$. Una cubierta $\mathcal{A}' = \{A'_s\}_{s\in S'}$ de $X$ es una subcubierta de $\mathcal{A}$ si $S' \subseteq S$ y $A'_s = A_s$ para todo $s \in S'$.

**Definición 1.12.** *Un espacio topológico $X$ es compacto si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita, es decir, para toda cubierta $\{U_s\}_{s\in S}$ del espacio $X$ existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, ..., s_k\} \subseteq S$ tal que $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup ... \cup U_{s_k}$.*

**Definición 1.13.** *Un espacio $X$ es localmente compacto si cada punto en $X$ tiene una base de vecindades que consiste de espacios compactos.*

Otra forma de definir a los espacios localmente compactos es la siguiente.

**Definición 1.14.** *Un espacio Hausdorff $X$ es localmente compacto si todo $x \in X$ tiene una vecindad $U$ tal que $c\ell U$ es un espacio compacto.*

Ahora, por otro lado, recordemos la siguiente propiedad que tienen los espacios localmente compactos, que es una consecuencia inmediata de la definición de dichos espacios.

**Proposición 1.15.** *Si $X$ es localmente compacto , entonces todo subespacio de $X$, abierto, es localmente compacto.*

Para terminar esta sección, hablemos un poco sobre funciones perfectas y algunas de sus propiedades.

**Definición 1.16.** *Una función continua $f : X \to Y$ es perfecta si $f$ es cerrada y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto.*

Los siguientes dos resultados corresponden respectivamente a el Teorema 3.7.2, el Corolario 3.7.3, el Teorema 3.7.9 y el Teorema 3.8.9 en [7].

**Teorema 1.17.** *Si $f : X \to Y$ es una función perfecta, entonces para todo compacto $B \subseteq Y$, la imagen inversa $f^{-1}(B)$ es compacto.*

**Corolario 1.18.** *Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones perfectas, entonces $g \circ f$ es una función perfecta.*

**Teorema 1.19.** *Sean $f_s : X_s \to Y_s$ y $X_s \neq \emptyset$ para cada $s \in S$. Entonces la función natural $f : \prod_{s \in S} X_s \to \prod_{s \in S} Y_s$ es perfecta si y sólo si $f_s : X_s \to Y_s$ es una función perfecta para cada $s \in S$.*

**Teorema 1.20.** *Sea $f : X \to Y$ una función perfecta. Si $X$ es Lindelöf, entonces $Y$ es Lindelöf*

## 1.2. Compactaciones

Nuestro trabajo está ampliamente relacionado con compactaciones, por ello es preciso dar una buena idea de este tema, así como escribir aquellas propiedades principales que son útiles para desarrollar nuestro trabajo.

**Definición 1.21.** *Dada un función $f : X \to Y$. Diremos que $f$ es un encaje de $X$ a $Y$ si $f' : X \to f(X)$, definida como $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, es un homeomorfismo, en otras palabras, $f$ es un homeomorfismo sobre su imagen.*

**Definición 1.22.** *Una compactación para un espacio topológico $X$ es una pareja $(c, K)$ en donde:*

*i)* *$K$ es compacto.*

*ii)* *$c : X \to K$ es un encaje de $X$ a $K$.*

*iii)* *$c(X)$ es denso en $K$.*

*Si además se tiene que $K$ es Hausdorff, entonces diremos que la compactación es Hausdorff.*

**Observación 1.23.** *Recordemos que si un espacio $X$ es compacto y Hausdorff, entonces $X$ es normal; por este hecho si $(c, K)$ es una compactación Hausdorff de algún espacio topológico, se sigue que $K$ es normal.*

**Notación 1.24.** *Para referirnos a la compactación de un espacio $X$, no la denotaremos con una pareja como dice la definición, sino las escribiremos usualmente por $cX$, $eX$, $\alpha X$, etc, donde $c$, $e$ y $\alpha$, son los encajes de $X$ a $cX$, $eX$, $\alpha X$ respectivamente; también por el hecho de que $X$ es homeomorfo a $c(X)$, $e(X)$ y $\alpha(X)$, es lo mismo referirnos a $X$ que a $c(X)$, $e(X)$ y $\alpha(X)$, pues topológicamente son el mismo.*

**Proposición 1.25.** *Dados un espacio topológico $X$ y $cX$ una compactación Hausdorff de $X$, para todo $K \subseteq X$ compacto, se cumple que $c\ell_{cX} K = K$.*

**Demostración.** Sea $K \subseteq X$ compacto, es claro que $K$, visto como subespacio de $cX$, es compacto, y puesto $cX$ es Hausdorff, se tiene que $K$ es un conjunto cerrado en $cX$, luego $c\ell_{cX} K = K$. †

Ahora, con lo visto anteriormente podemos definir la siguiente clase de espacios.

**Definición 1.26.** *Un espacio Tychonoff $X$ es $\check{C}ech-completo$ si para toda compactación $cX$ del espacio $X$, $cX \setminus c(X)$ es un conjunto $F_\sigma$ en $cX$.*

**Corolario 1.27.** *Todo espacio localmente compacto, es un espacio $\check{C}ech - completo$.*

**Demostración.** Ver Teorema 3.5.8 en [7]. †

Y ahora una de sus propiedades (Teorema 3.9.8 en [7]).

**Teorema 1.28.** *Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios $\check{C}ech-completos$, entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es un espacio $\check{C}ech - completos$.*

## 1.3. La compactación de Stone-Čech

¿Qué condiciones deberá tener un espacio para que este pueda ser encajado de manera densa en un compacto?, es decir, bajo qué hipótesis un espacio tiene una compactación. El siguiente resultado muestra una solución a este problema y puede ser consultado en [11]. Recordemos la siguiente definición.

**Definición 1.29.** *La función $P_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$, definida como $P_\beta(f) = f(\beta)$, es llamada la función proyección de $\prod X_\alpha$ en $X_\beta$.*

Una de sus principales características es la siguiente (Teorema 8.8 en [11]).

**Teorema 1.30.** *Una función $f : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ es continua si y sólo si la función $P_s \circ f$ es continua para todo $s \in S$.*

Ahora, continuamos con nuestro resultado anunciado.

**Teorema 1.31.** *$X$ es Tychonoff si y sólo si $X$ tiene una compactación Hausdorff.*

**Demostración.** $\Rightarrow]$ $C^*(X)$ denota la colección de todas las funciones continuas y acotadas definidas en $X$ y con valores en los números reales; el rango de cada $f \in C^*(X)$ puede ser tomado como un intervalo cerrado y acodato $I_f \subseteq \mathbb{R}$, por ello podemos considerar $C^*(X) = \{f : X \to I_f : f \text{ es continua}\}$. Para simplificar nuestra notación redefinamos $C^*(X) = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Ahora probemos lo siguiente:

($\star$) $\{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in A \text{ y } V_\alpha \text{ es un conjunto abierto en } I_{f_\alpha}\}$ es una base para $X$.

Sean $U$ un abierto en $X$ y $x \in U$ un punto arbitrario, luego, $X \setminus U$ es un conjunto cerrado y $x \notin X \setminus U$, puesto que $X$ es Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ de forma que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) = \{1\}$. Por la continuidad de $f$, $f^{-1}([0,1))$ es un conjunto abierto en $X$ y $x \in f^{-1}([0,1))$, pero $f^{-1}([0,1)) \subseteq U$ (ya que si $y \in$

$f^{-1}([0,1))$, $f(y) \notin \{1\} = f(X \setminus U)$, luego $y \notin X \setminus U$, es decir, $y \in U$ ), entonces $x \in f^{-1}([0,1)) \subseteq U$, y notemos que $f \in C^*(X)$, por lo tanto se tiene $(\star)$.
Definamos $\beta : X \to \prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}$, tal que para $x \in X$, $\beta(x) = F_x$, y donde $F_x(\alpha) = f_\alpha(x) \in I_{f_\alpha}$. Afirmamos que:

$(*)$ Para cualquier $\alpha \in A$, $P_\alpha \circ \beta$ es una función continua.

Es suficiente ver que para cada $\alpha \in A$, $P_\alpha \circ \beta = f_\alpha$: si $x \in X$, entonces $(P_\alpha \circ \beta)(x) = P_\alpha(\beta(x)) = P_\alpha(F_x) = F_x(\alpha) = f_\alpha(x)$. Como para todo $\alpha \in A$, $f_\alpha$ es continua se tiene $(*)$ y, del Teorema 1.30, $\beta$ es una función continua.
Ahora, si $x \neq y$ son dos puntos en $X$, nuevamente como $X$ es Tychonoff, existe $\gamma \in A$ tal que $f_\gamma(x) \neq f_\gamma(y)$, es decir, $F_x(\gamma) \neq F_y(\gamma)$, entonces $\beta(x) \neq \beta(y)$. Por tanto, $\beta$ es una función inyectiva.
Resta ver que $\beta$ es una función abierta. Para esto es suficiente ver que $\beta(U)$ es un conjunto abierto para todo básico $U$ en $X$. De $(\star)$, $U$ es de la forma $f_\alpha^{-1}(V)$, para algún $\alpha \in A$ y algún $V$ abierto en $I_{f_\alpha}$. Entonces como ya vimos

$$U = (P_\alpha \circ \beta)^{-1}(V) = \beta^{-1}(P_\alpha^{-1}(V))$$

y por lo tanto $\beta(U) = P_\alpha^{-1}(V) = P_\alpha^{-1}(V) \cap \beta(X)$, el cual es un abierto en $\beta(X)$. Así $\beta$ es un encaje de $X$ en $\prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}$.
Finalmente, como para cada $\alpha \in A$, $I_{f_\alpha}$ es compacto por el Teorema 1.1, $\prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}$ es compacto, y también notemos que $\prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}$ es Hausdorff. Así $c\ell_{\prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}} X$ es una compactación Hausdorff de $X$.
$\Leftarrow$] Esto es inmediato de la Observación 1.23. †

**Definición 1.32.** *La compactación de Stone – Čech de un espacio topológico $X$, denotada por $\beta X$, es la cerradura de $X$ en el $\prod_{\alpha \in A} I_{f_\alpha}$ (proceso descrito en el Teorema 1.31). Más formalmente, $(\beta, \beta X)$ es la compactación de Stone – Čech de $X$.*

La compactación de *Stone – Čech* fue introducida por *Čech* y por *M. H. Stone* en 1937; y otras propiedades publicadas posteriormente

constituyen los resultados fundamentales de $\beta X$.
Por otro lado, recordemos el siguiente resultado (Proposición 2.3.3 en [7]) que nos es útil para el próximo teorema.

**Lema 1.33.** *Si $\{A_s\}_{s\in S}$ es una familia de conjuntos , donde $A_s \subseteq X_s$, entonces $c\ell_{\prod_{s\in S} X_s} \prod_{s\in S} A_s = \prod_{s\in S} c\ell_{X_s} A_s$.*

**Teorema 1.34.** *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios Tychonoff. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $(e_n, \beta X_n)$ es la compactación de Stone − Čech de $X_n$, entonces $cX = \prod_{n\in\mathbb{N}} \beta X_n$ es una compactación Hausdorff de $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.*

**Demostración.** Definamos la función $e : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \beta X_n$, en donde $e(f)$ es una función tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $e(f)(n) = e_n(f(n))$.

(1) $e$ es una función inyectiva. Si $f, g \in X$ tal que $f \neq g$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$, puesto que $e_0$ es inyectiva, $e_{n_0}(f(n_0)) \neq e_{n_0}(g(n_0))$, es decir, $e(f) \neq e(g)$.

(2) $e$ es una función continua. Tomemos un conjunto abierto $U$ arbitrario en $e(X)$, sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $U = \bigcap_{i=1}^{n} P^{-1}_{(i,\beta X_i)}(U_i) \cap e(X)$, en donde $P_{(i,\beta X_i)}$ es la proyección de $cX$ en $\beta X_i$ y $U_i$ es un conjunto abierto en $\beta X_i$. Como para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $e_i$ y $P_{(i,\beta X_i)}$ son funciones continuas, $e^{-1}(U)$ es abierto debido a la igualdad $e^{-1}(U) = \bigcap_{i}^{n} (e_i \circ P_{(i,X_i)})^{-1}(U_i \cap e_i(X_i))$.

(3) $e$ es una función abierta. Tomemos un conjunto abierto $U$, nuevamente podemos suponer que $U = \bigcap_{j=1}^{l} P^{-1}_{(j,X_j)}(U_j)$, donde $U_j$ es un conjunto abierto en $X_j$, de la igualdad $e(U) = \bigcap_{j=1}^{l} P^{-1}_{(j,\beta X)}(e_j(U_j))$, se sigue que $e(U)$ es un conjunto abierto en $cX$.

De (1), (2) y (3), $e$ es un encaje de $X$ en $cX$.
Ahora, del Lema 1.33, $c\ell_{cX} X = \prod_{n\in\mathbb{N}} c\ell_{\beta X_n} X_n = cX$.
Así, $cX$ es una compactación Hausdorff de $X$. †

Continuando con esta sección, para los resultados siguientes ver sección 4.2 de [10] (Proposición C, pág. 247, Definición D, pág. 248, Teorema F, pág. 249 respectivamente).

**Proposición 1.35.** *Si $X$ y $Y$ son espacios Tychonoff y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces existe una única función continua $F : \beta X \to \beta Y$ con la propiedad de que $F|_X = f$.*

**Definición 1.36.** *Si $X$ y $Y$ son espacios Tychonoff y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces la única función continua $F : \beta X \to \beta Y$ tal que $F|_X = f$ es denotada por $\beta f$, y llamada la extensión de Stone sobre $f$.*

Ahora, por último presentamos una caracterización de las funciones perfectas y continuas (entre espacios Tychonoff) en términos de compactaciones.

**Teorema 1.37.** *Sean $X$ y $Y$ espacios Tychonoff y una función $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Entonces, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

*a)* *$f$ es perfecta.*

*b)* *Si $\alpha X$ y $\gamma Y$ son compactaciones de $X$ y $Y$ respectivamente, y si existe $F : \alpha X \to \gamma Y$ tal que $F|_X = f$; entonces $F^{-1}(Y) = X$ (es decir, $F(\alpha X \setminus X) = \gamma Y \setminus Y$).*

*c)* *$\beta f^{-1}(Y) = X$ (es decir, $\beta f(\alpha X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$).*

## 1.4. La compactación de Wallman

La compactación de Wallman se debe al matemático H. Wallman que en 1938 publicó tal construcción y probó sus propiedades principales. Aquí presentamos una construcción de tal compactación que puede consultarse en la sección 19K en [11]. Para esto es necesario introducir el concepto de $ultrafiltro$.

En esta sección todos los espacios topológicos tratados deben considerar como espacios $T_1$.

**Definición 1.38.** *Un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto $X$ es una familia no vacía de subconjuntos de $X$ con las siguientes propiedades:*

*a)* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

*b) Si* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, *entonces* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

*c) Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $F \subseteq F'$, *entonces* $F' \in \mathcal{F}$.

**Definición 1.39.** *Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si para cada filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$; es decir, los ultrafiltros son filtros maximales.*

Ahora veamos una caracterización muy conocida de los ultrafiltros (Teorema 12.11 en [11]).

**Teorema 1.40.** *Un filtro $\mathcal{F}$ en $X$ es un ultrafiltro si y sólo si para cada $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

**Teorema 1.41.** *Todo filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto $X$, está contenido en un ultrafiltro en $X$.*

**Demostración.** Teorema 12.12 en [11]. †

**Observación 1.42.** *Dado un espacio topológico $X$, sólo trabajaremos con ultrafiltros cerrados en $X$, es decir, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en $X$, entonces cada $A \in \mathcal{F}$ es un conjunto cerrado en $X$.*

De acuerdo con la observación anterior, veamos las siguientes notaciones.

**Notación 1.43.** *Dado un espacio topológico $X$,*

*1)* $\mathcal{D}(X) = \{D \subseteq X : D \text{ es cerrado en } X\}$.

*2)* $\omega X = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro en } X\}$.

3) *Para cada conjunto cerrado $D$ en $X$, sea $D^* \subseteq \omega X$ definido como $D^* = \{\mathcal{F} \in \omega X : D \in \mathcal{F}\}$.*

4) $\mathcal{C} = \{D^* : D \in \mathcal{D}(X)\}$.

Será de mucha utilidad probar las siguientes propiedades.

**Proposición 1.44.** *Sean $D_1,\ D_2 \in \mathcal{D}(X)$. Entonces:*

1) $D_1^* \cup D_2^* = (D_1 \cup D_2)^*$.

2) $D_1^* \cap D_2^* = (D_1 \cap D_2)^*$.

**Demostración.**

(1) Sea $\mathcal{F} \in D_1^* \cup D_2^*$ un ultrafiltro arbitrario, luego $D_1 \in \mathcal{F}$ o $D_2 \in \mathcal{F}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $D_1 \in \mathcal{F}$, así del inciso $(c)$ de la Definición 1.38, como $D_1 \subseteq D_1 \cup D_2$ se sigue que $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \in (D_1 \cup D_2)^*$. Por tanto $D_1^* \cup D_2^* \subseteq (D_1 \cup D_2)^*$. Ahora, si $\mathcal{F} \in (D_1 \cup D_2)^*$, entonces $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{F}$. Supongamos que $D_1 \notin \mathcal{F}$ y que $D_2 \notin \mathcal{F}$, del Teorema 1.40, $X \setminus D_1 \in \mathcal{F}$. Pero, si $A = (X \setminus D_1) \cap (D_1 \cup D_2)$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq D_2$, luego $D_2 \in \mathcal{F}$ lo cual no es posible, por tanto $D_1 \in \mathcal{F}$ o $D_2 \in \mathcal{F}$, de aquí que $\mathcal{F} \in D_1^* \cup D_2^*$. Por tanto $(D_1 \cup D_2)^* \subseteq D_1^* \cup D_2^*$.

(2) $D_1^* \cap D_2^* = \{\mathcal{F} \in \omega X : D_1 \in F \text{ y } D_2 \in \mathcal{F}\} = (D_1 \cap D_2)^*$. †

El propósito ahora es dotar de una topología al conjunto $\omega X$, para ello necesitamos recordar lo siguiente.

**Definición 1.45.** *Diremos que un familia $\mathcal{B}$ de conjuntos cerrados en un espacio topológico $X$, es una base para los conjuntos cerrados en $X$ siempre que todo conjunto cerrado en $X$ es la intersección de alguna subfamilia $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$.*

**Lema 1.46.** *$\mathcal{B}$ es una base para los conjuntos cerrados de alguna topología en $X$ si y sólo si* *a)* *Para todo* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2$ *es la intersección de alguna subfamilia* $\mathcal{B}_0$ *de* $\mathcal{B}$.

*b)* $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$.

**Proposición 1.47.** *Sea* $X \in \mathcal{T}_1$. *La familia* $\mathcal{C}$ *(ver Notación 1.43) es una base de conjuntos cerrados para una topología en* $\omega X$.

**Demostración.** Para esta prueba utilicemos el Lema 1.46. Sean $D_1^*, D_2^* \in \mathcal{C}$, de la Proposición 1.44, $D_1^* \cap D_2^* = (D_1 \cap D_2)^* \in \mathcal{C}$, por tanto se cumple $(a)$ del Lema.
Supongamos que existe $\mathcal{F} \in \bigcap \mathcal{C}$. Dados $x \neq y$ dos puntos en $X$, puesto que $X \in \mathcal{T}_1$, se sigue que $\mathcal{F} \in \{x\}^*$ y $\mathcal{F} \in \{y\}^*$, luego $\emptyset = \{x\} \cap \{y\} \in \mathcal{F}$, lo cual no es posible. Por tanto se cumple $(b)$ del Lema1.46. †

Entonces consideramos al conjunto $\omega X$ con la topología generada por la familia $\mathcal{C}$ y veamos qué propiedades resultan de esta topología.

**Proposición 1.48.** $\omega X$ *es compacto.*

**Demostración.** Para esto, será suficiente probar que toda familia de conjuntos cerrados básicos con la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía. Supongamos lo contrario, que existe una familia $\{D_\alpha^*\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{C}$ con la propiedad de la intersección finita y tal que $\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha^* = \emptyset$. Definamos

$$\mathcal{F} = \{D \in \mathcal{D}(X) : \text{ existe } L \subseteq I \text{ con } |L| < \aleph_0 \text{ y } \bigcap_{\alpha \in L} D_\alpha \subseteq D\}$$

notemos que $\mathcal{F}$ es un filtro y que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que cualquier $D_\alpha \in \mathcal{F}$. Por el Teorema 1.41, $\mathcal{F}$ está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{F}'$; ahora $\mathcal{F}' \notin \bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha^*$, luego existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\mathcal{F}' \notin D_{\alpha_0}^*$, es decir, $D_{\alpha_0} \notin \mathcal{F}'$, entonces existe $F \in \mathcal{F}'$ tal que $F \cap D_{\alpha_0} = \emptyset$. Pero de la definición de $\mathcal{F}$, $D_{\alpha_0} \in \mathcal{F}$ y consecuentemente $D_{\alpha_0} \in \mathcal{F}'$ lo cual no es posible ya que $F \cap D_{\alpha_0} = \emptyset$. †

**Proposición 1.49.** *Dado* $X \in \mathcal{T}_1$, *definamos* $e : X \to \omega X$ *de forma que para todo* $x \in X$, $e(x) = \mathcal{F}_x$, *donde* $\mathcal{F}_x = \{D \subseteq X : D \in \mathcal{D}(X) \text{ y } x \in D\}$. *Entonces* $e$ *es un encaje de* $X$ *en* $\omega X$.

**Demostración.**

(1) $e$ es una función inyectiva. Para esto sean $x, y \in X$, diferentes, si $e(x) = e(y)$, es decir, $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$, entonces $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{F}_x$, de donde $\emptyset = \{x\} \cap \{y\} \in \mathcal{F}$ lo cual no es posible. Por tanto $e(x) \neq e(y)$.

(2) $e$ es una función continua. En efecto, dado $D^* \cap e(X)$ un conjunto básico cerrado en $e(X)$, $e^{-1}(D^* \cap e(X)) = D$ (ya que si $x \in e^{-1}(D^* \cap e(X))$, $\mathcal{F}_x \in D^*$, $D \in \mathcal{F}_x$, $x \in D$) y $D$ es un conjunto cerrado en $X$, por tanto $e^{-1}(D^*)$ es un conjunto cerrado en $X$.

(3) $e$ es una función cerrada. Sea $D$ un conjunto cerrado en $X$, para esto, es suficiente probar que $e(D) = D^* \cap e(X)$.
Si $\mathcal{F} \in e(D)$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d$ para algún $d \in D$, luego $D \in \mathcal{F}_d$, y de aquí que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d \in D^*$. Por tanto $e(D) \subseteq D^* \cap e(X)$.
Ahora, si $\mathcal{F} \in D^* \cap e(X)$, $D \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_y$ para algún $y \in X$. Pero si $y \notin D$, entonces $\emptyset = D \cap \{y\} \in \mathcal{F}$ lo cual no es posible; entonces $y \in D$, y así $\mathcal{F} \in e(D)$. Por tanto $D^* \cap e(X) \subseteq e(D)$.

De (1), (2) y (3), obtenemos que $e$ es un homeomorfismo sobre su imagen, es decir, $e$ es un encaje de $X$ en $\omega X$. †

**Proposición 1.50.** *Sea $X \in \mathcal{T}_1$. Para todo conjunto $D$ cerrado en $X$, se cumple que $c\ell_{\omega X} D = D^*$.*

**Demostración.** De la parte (3), en la Proposición 1.49, $c\ell_{\omega X} D = c\ell_{\omega X}(D^* \cap e(X))$, pero $c\ell_{\omega X}(D^* \cap e(X)) \subseteq c\ell_{\omega X} D^* \cap c\ell_{\omega X} e(X) \subseteq D^*$. Por tanto $c\ell_{\omega X} D \subseteq D^*$.
Por otro lado, dado $\mathcal{F} \in D^*$ arbitrario, verifiquemos que:

$$\mathcal{F} \in \bigcap \{C^* \in \mathcal{C} : e(D) \subseteq C^*\} = c\ell_{\omega X} D.$$

En efecto, si $C^*$ es un conjunto cerrado en $\omega X$, con $e(D) \subseteq C^*$, notemos que $D \subseteq C$ ( dado un punto arbitrario $d \in D$, se sigue que $\mathcal{F}_d \in e(D)$, luego $\mathcal{F}_d \in C^*$, es decir, $C \in \mathcal{F}_d$, por lo que $d \in C$); ahora puesto que

$D \in \mathcal{F}$ y $D \subseteq C$, se tiene que $C \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \in C^*$. Debido a la elección de $\mathcal{F}$, tenemos que $D^* \subseteq c\ell_{\omega X} D$. †

**Teorema 1.51.** *Dado $X \in \mathcal{T}_1$, $(e, \omega X)$ es una compactación de $X$.*

**Demostración.** De la Proposición 1.48, $\omega X$ es compacto; de la Proposición 1.49, la función $e$ es un encaje de $X$ en $\omega X$; por último probemos que $e(X)$ es denso en $\omega X$, pero de la Proposición 1.50, $c\ell_{\omega X} X = X^* = \omega X$. †

**Definición 1.52.** *Para todo $X \in \mathcal{T}_1$, $(e, \omega X)$ es la compactación de Wallman de $X$, que usualmente la denotaremos sólo por $\omega X$.*

Ahora veamos algunas propiedades de esta compactación.

**Proposición 1.53.** *Si $A$ y $B$ son conjuntos cerrados en $X$, entonces $c\ell_{\omega X}(A \cap B) = c\ell_{\omega X} A \cap c\ell_{\omega X} B$*

**Demostración.** Sean $A$ y $B$ conjuntos cerrados en $X$, de la Proposición 1.50, $c\ell_{\omega X}(A \cap B) = (A \cap B)^*$, pero de la Proposición 1.44, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, y nuevamente usando la Proposición 1.50, se concluye que $c\ell_{\omega X}(A \cap B) = c\ell_{\omega X} A \cap c\ell_{\omega X} B$. †

**Proposición 1.54.** *Sean $X$ un espacio topológico Hausdorff, $x \in X$ un punto arbitrario y $F \subseteq X$ un compacto tal que $x \in F$. Entonces para todo $\mathcal{F} \in \omega X \setminus X$, existe un conjunto cerrado $P \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} \in c\ell_{\omega X} P$ y $F \cap P = \emptyset$.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{F} \in \omega X \setminus X$ arbitrario. Puesto que $F$ es compacto, de la Proposición 1.25, $F = c\ell_{\omega X} F$; entonces $\mathcal{F} \notin c\ell_{\omega X} F$, pero como también $F$ es un conjunto cerrado en $X$, de la Proposición 1.50, $c\ell_{\omega X} F = F^*$. Entonces $\mathcal{F} \notin F^*$, es decir, $F \notin \mathcal{F}$, luego existe $P \in \mathcal{F}$ de forma que $F \cap P = \emptyset$. Observemos que $P$ es un conjunto cerrado en $X$ y que $\mathcal{F} \in P^* = c\ell_{\omega X} P$, de donde $P$ es el conjunto deseado. †

**Proposición 1.55.** *Si $A$ es un conjunto cerrado de $X$, entonces $c\ell_{\omega X} A$ es homeomorfo a la compactación de Wallman de $A$, es decir, a $\omega A$*

**Demostración.** Ver Proposición 3 en [6]. †

## 1.5. Funciones multivaluadas

Cuando hablamos de una función entre dos conjuntos $f : X \to Y$ , entendemos que a cada elemento en $X$, $f$ le asigna un único elemento de $Y$, por ello a este tipo de funciones les llamamos univaluadas. En esta sección damos una generalización de nuestro concepto de función univaluada.
Las definiciones y resultados presentados de esta sección, pueden consultarse en [9].

**Definición 1.56.** *Una función $F : X \to Y$ es multivaluada siempre que a cada $x \in X$, le asocie un conjunto $A_x$, tal que $A_x \subseteq Y$.*
*Las funciones multivaluadas la denotaremos con letras mayúsculas, es decir, F, G, etc, para así representar las funciones univaluadas con letras minúsculas, es decir, f, g, etc.*

Para una función univaluada $f$, se tiene definida la imagen y preimagen de conjuntos bajo $f$. Veamos la manera análoga para definir estos conceptos, ahora para funciones que son multivaluadas. Para definir la preimagen es necesario antes definir la función inversa de una función multivaluada.

**Definición 1.57.** *Dada $F : X \to Y$ una función multivaluada, y sean $A$ y $B$ subconjuntos de $X$ y $Y$ respectivamente. Se define*

*a) La función inversa de $F$ como $F^{-1} : Y \to X$ tal que para todo $y \in Y$, $F^{-1}(y) = \{x : y \in F(x)\}$.*

*b) $F(A) = \bigcup\{F(x) : x \in A\}$, llamada la imagen del conjunto $A$ bajo $F$.*

*c) $F^{-1}(B) = \{x : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$, llamada la imagen inversa del conjunto $B$ bajo $F$*

*d) Diremos que $F$ es abierta (cerrada) si la imagen de todo conjunto abierto (cerrado) en $X$, es abierto (cerrado) en $Y$*

Nuestra notación podría resultar confusa por lo siguiente: dada una función $F : X \to Y$ multivaluada, tenemos definida la imagen inversa de un algún conjunto $B \subseteq Y$ bajo $F$, es decir, $F^{-1}(B) = \{x : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$; pero por otro lado, $F^{-1}(B)$ podría denotar la imagen de $B$ bajo $F^{-1}$, es decir, $F^{-1}(B) = \bigcup\{F^{-1}(y) : y \in B\}$. La siguiente proposición muestra que no hay de que preocuparse pues los dos conjuntos coinciden.

**Proposición 1.58.** *Si $F : X \to Y$ es una función multivaluada, entonces para todo $B \subseteq Y$, la imagen inversa $U$ de $B$ bajo $F$, es igual a la imagen $V$ de $B$ bajo $F^{-1}$.*

**Demostración.** Por definición se tiene que, $V = \bigcup\{F^{-1}(y) : y \in B\} = \bigcup\{\{x : y \in F(x)\} : y \in B\} = \{x : y \in F(x) \text{ y } y \in B\}$, es decir, $V = \{x : F(x) \cap B \neq \emptyset\} = U$. †

**Observación 1.59.** *El nombre de función inversa es inspirado por el hecho de que $(F^{-1})^{-1} = F$. Debido a que el dominio y contradominio, de $(F^{-1})^{-1}$ y $F$ son iguales; y si $x$ es un punto en el dominio de $F$, $(F^{-1})^{-1}(x) = \{y : x \in F^{-1}(y)\} = \{y : y \in F(x)\} = F(x)$.*

Ahora veamos como definir la continuidad de una función multivaluada.

**Definición 1.60.** *Decimos que una función multivaluada $F$ es continua si $F^{-1}$ es cerrada.*

**Observación 1.61.** *Notemos que $F^{-1}$ es continua si y sólo si $(F^{-1})^{-1}$ es cerrada, entonces por la Observación 1.59 se tiene que $F^{-1}$ es continua si y sólo si $F$ es cerrada*

Al principio de la sección decíamos que la clase de las funciones multivaluadas es una generalización de las funciones univaluadas, veamos entonces que toda función univaluada la podemos tratar como una función multivaluada, sin que pierda sus propiedades.

**Observación 1.62.** *Si $f : X \to Y$ es una función univaluada, la podemos considerar como una función multivaluada como sigue: $F : X \to Y$ donde para todo $x \in X$, $F(x) = \{f(x)\} \subset Y$.*

Veamos la siguiente propiedad.

**Proposición 1.63.** *Sean $f : X \to Y$ una función univaluada y $F : X \to Y$ una función multivaluada tal que para todo $x \in X$, $F(x) = \{f(x)\}$. Entonces todo conjunto $A \subseteq X$ y todo $B \subseteq Y$ cumplen que:*

*a)* $f(A) = F(A)$.

*b)* $f^{-1}(B) = F^{-1}(B)$.

**Demostración.** (a) De las siguientes igualdades obtenemos lo deseado, $F(A) = \bigcup\{F(x) : x \in A\} = \bigcup\{\{f(x)\} : x \in A\} = \{f(x) : x \in A\}$, es decir, $F(A) = f(A)$.
(b) Sea $B \subseteq Y$ un conjunto arbitrario; de la Definición 1.57, $F^{-1}(B) = \{x : F(x) \cap B \neq \emptyset\}$, puesto que $F(x) = \{f(x)\}$, se sigue que $F^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$, es decir, $F^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. †

Y ahora veamos que si consideramos una función univaluada como una función multivaluada, no pierde sus propiedades de ser abierta, cerrada y continua.

**Teorema 1.64.** *Sea $f : X \to Y$ es una función univaluada. Si definimos a $F : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, $F(x) = \{f(x)\} \subseteq Y$, entonces:*

*a) Si $f$ es continua, entonces $F$ es continua.*

*b) Si $f$ es abierta, entonces $F$ es abierta.*

*c) Si $f$ es cerrada, entonces $F$ es cerrada.*

**Demostración.** (a) Tomemos un conjunto cerrado $B \subseteq Y$, arbitrario. Del inciso (b) de la Proposición 1.63, $F^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, y por la continuidad de $f$, se sigue que $F^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado. Por

tanto $F^{-1}$ es una función cerrada y de la Definición 1.60, obtenemos que $F$ es continua.
(b) y (c) se siguen inmediatamente del inciso (a) de la Proposición 1.63. †

El Teorema 1.64, muestra lo que veníamos diciendo, toda función univaluada se puede considerar como una función multivaluada sin perder que sea cerrada, abierta y continua.
Ahora por último veamos funciones perfectas multivaluadas, la definición debera ser un tanto análoga a la definición para funciones univaluadas.

**Definición 1.65.** *Dada $F : X \to Y$ una función multivaluada.*

*a) $F$ es bicompacta si para cada $x \in X$ e $y \in Y$, $F(x)$ y $F^{-1}(y)$ son subespacios compactos.*

*b) $F$ es bicontinua si $F$ y $F^{-1}$ son funciones continuas.*

*c) $F$ es una función perfecta si $F$ es bicompacta y bicontinua.*

Cuando tenemos una función multivaluada, la imagen de un punto es un subconjunto del contradominio, es por ello que para hablar de funciones perfectas pedimos que tanto $F$ como $F^{-1}$ sean cerradas, y pedir además que la imagen y preimagen de puntos, sean compactos.

**Teorema 1.66.** *Supongamos que $F : X \to Y$ es una función perfecta y, $X$ y $Y$ son espacios $T_{3,5}$. $X$ $(Y)$ es paracompacto si y sólo si $Y$ $(X)$ es paracompacto.*

A continuación definimos una clase especial de funciones.

**Definición 1.67.** *Una función continua $f : X \to Y$ diremos que es una k-función si para cualesquiera conjuntos compactos, $H \subseteq X$ y $G \subseteq Y$, tanto la imagen $f(H)$ como la preimagen $f^{-1}(G)$ son espacios compactos.*

Si tenemos una función multivaluada, el concepto de $k-función$ no cambia, pero debe ser con las definiciones correspondientes a la imagen y preimagen de una función multivaluada.
Por otra parte, ahora hablemos del siguiente tipo de espacios topológicos.

**Definición 1.68.** *Un espacio $X \in \mathcal{T}_2$ es un $k-espacio$ si existen, un espacio $W$ localmente compacto, y una función cociente y sobreyetiva $q : W \to X$, es decir, $X$ puede ser representado como la imagen de un espacio localmente compacto bajo una función cociente.*

Una de sus propiedades, que usaremos en la Sección 2.3, está enunciada en el siguiente teorema, que es la Proposición 2.2 en [3].

**Teorema 1.69.** *Dada $F : X \to Y$ una función multivaluada de un espacio topológico $X$ en un k-espacio $Y$, con la propiedad de que para todo compacto $B \subseteq Y$, $F^{-1}(B)$ es compacto; y también para todo $x \in X$, $F(x)$ es un conjunto cerrado en $Y$. Entonces $F$ es cerrada.*

## 1.6. Paracompacidad

En esta sección queremos hacer un breve repaso del concepto de paracompacidad y ver sólo algunos resultados que ocuparemos en la Sección 3.2, para así tambíen recordar la definición de *estrella* de un conjunto ya que tal concepto es fundamental en nuestro trabajo.

**Definición 1.70.** *Sea $X$ un espacio topológico.*

*a)* *Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de $X$ diremos que es localmente finita si todo $x \in X$ tiene una vecindad $U_x$ tal que $|\{s \in S : U_x \cap A_s \neq \emptyset\}| < \aleph_0$.*

*b)* *Sean $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ cubiertas de $X$, diremos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para todo $\beta \in B$, existe $\alpha \in A$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$.*

*c)* *Diremos que $X$ es paracompacto si $X \in \mathcal{T}_2$ y toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto y localmente finito.*

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Stone.

**Teorema 1.71.** *Todo espacio métrico es paracompacto.*

**Demostración.** Teorema 20.9 en [11] †

**Definición 1.72.** *Dado $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta de un conjunto $X$; la estrella de un conjunto $A \subseteq X$ con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto $St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U_s : U_s \cap A \neq \emptyset\}$. La estrella de un conjunto singular $\{x\}$ con respecto a $\mathcal{U}$, es llamada la estrella del punto $x$ con respecto a $\mathcal{U}$ y denotada por $St(x,\mathcal{U})$.*

**Definición 1.73.** *Diremos que una cubierta $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ es un refinamiento estrella de otra cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $X$ si para todo $\beta \in B$, existe $\alpha \in A$ tal que $St(V_\beta, \mathcal{V}) \subseteq U_\alpha$.*

Veamos las siguientes caracterizaciones de los espacios paracompactos.

**Teorema 1.74.** *Para todo $X \in \mathcal{T}_1$ son equivalentes:*

*i)* *$X$ es un espacio paracompacto.*

*ii)* *Toda cubierta abierta del espacio $X$ tiene un refinamiento estrella que es abierto.*

*iii)* *Toda cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ del espacio $X$ tiene un refinamiento abierto $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ tal que para todo $\beta \in B$ existe $\alpha \in A$ con $c\ell_X V_\beta \subseteq U_\alpha$.*

Otra propiedad interesante de los espacios paracompactos, y que usaremos en este trabajo, es la siguiente (Teorema 5.1.35 en [7]):

**Teorema 1.75.** *Si $f : X \to Y$ es una función perfecta sobreyectiva y $Y$ es un espacio paracompacto, entonces $X$ es paracompacto.*

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Michael (Teorema 5.1.33 en [7]).

**Teorema 1.76.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua y cerrada. Si $X$ es paracompacto, entonces $Y$ es paracompacto.*

# Capítulo 2

# Espacios emplumados

¿Existirá una clase de espacios que contenga a todos los espacios métricos y localmente compactos? Como veremos en este capítulo la clase de los espacios emplumados es una respuesta a esta pregunta.
En la sección 2.1 comenzamos a desarrollar el estudio de la clase de espacios emplumados y damos las definiciones básicas.
La sección 2.2 es con el fin de ubicar nuestra clase de espacios estudiados, es decir, saber qué otras clases de espacios topológicos están contenidas y que clases contienen a la de los espacios emplumados.
La sección 2.3 tiene como propósito describir aquellas propiedades necesarias para la preservación de espacios emplumados bajo funciones continuas.
En la última sección generalizamos a la clase de espacios emplumados, un teorema que fue propuesto por P. S. Alexandroff y P. S Urysohn y probado por M. Smirnov para espacios compactos.

## 2.1. Teorema de invariancia

**Definición 2.1.** *Sean $Y$ un espacio topológico y $X$ un conjunto tal que $X \subseteq Y$. Diremos que una familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas de $X$ por conjuntos abiertos en $Y$, es un plumaje de $X$ en $Y$, si todo $x \in X$ cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq X$.*

**Observación 2.2** (Observación 1.2, [4]). *Si tenemos que $X$ es un conjunto $G_\delta$ en $Y$, entonces $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde cada $G_n$ es un conjunto abierto en $Y$, entonces es claro que $\mathcal{P} = \{\{G_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un plumaje de $X$ en $Y$.*

**Proposición 2.3** (Proposición 1.3, [4]). *Si $X$ tiene un plumaje en $Y$ y $Y$ tiene un plumaje en $Z$, entonces $X$ tiene un plumaje en $Z$.*

**Demostración.** Sean $\mathcal{P}_X^Y = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$, un plumaje de $X$ en $Y$ y $\mathcal{P}_Y^Z = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{V}_n = \{V_\alpha^n : \alpha \in L_\alpha\}$, un plumaje de $Y$ en $Z$.
Dado que $Y$ es un subespacio de $Z$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in M_n$ existe un conjunto abierto en $Z$, $\widetilde{U}_\alpha^n$, de forma que $U_\alpha^n = \widetilde{U}_\alpha^n \cap Y$. Si definimos $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{\mathcal{U}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$, entonces probemos que la familia $\mathcal{P}_X^Z = \widetilde{\mathcal{P}} \cup \mathcal{P}_Y^Z = \{\widetilde{\mathcal{U}}_n, \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un plumaje de $X$ en $Z$. En efecto, dado que $\widetilde{\mathcal{P}}$ y $\mathcal{P}_Y^Z$ son numerables podemos escribir $\mathcal{P}_X^Z = \{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$\mathcal{W}_n = \begin{cases} \mathcal{V}_{n/2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \widetilde{\mathcal{U}}_{n+1/2} & \text{si } n \text{ no es par.} \end{cases}$$

Observemos que todos los elementos de $\mathcal{P}_X^Z$ son cubiertas de $X$ por abiertos en $Z$. Resta ver que todo $x \in X$ cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{W}_n) \subseteq X$; pero

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{W}_n) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_n)) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n)$$

y como $\mathcal{P}_Y^Z$ es un plumaje de $Y$ en $Z$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq Y$, luego

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_n)) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n)) =$$

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_n)) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n)) \cap Y \subseteq (\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_n)) \cap Y$$

ahora es claro que

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_n)) \cap Y = \bigcap_{n=1}^{\infty}(St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_n) \cap Y)$$

y que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_n) \cap Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n),$$

y como $\mathcal{P}_X^Y$ es un plumaje de $X$ en $Y$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq X$, lo cual prueba que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{W}_n) \subseteq X$ y por tanto $\mathcal{P}_X^Z$ es un plumaje de $X$ en $Z$. †

Veamos ahora el concepto de espacio emplumado.

**Definición 2.4.** *Si $X \in \mathcal{T}_1$ diremos que $X$ es un espacio emplumado si $X$ tiene un plumaje en $\omega X$, es decir, sobre su compactación de Wallman.*

**Definición 2.5.** *Si $X$ es un espacio $T_1$, $cX$ será una compactación regular si existe una función cerrada, continua y sobreyectiva $f : \omega X \to cX$, tal que para todo $x \in X$, $f^{-1}(\{x\}) = x$.*[1]

Nuestro objetivo en esta sección es ver que para que un espacio sea *emplumado* será suficiente que tenga un plumaje en culaquier compactación regular. Para la prueba de esto primero necesitamos de las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 2.6** (Proposición 1.5, [4]). *Si $X$ tiene un plumaje en $\omega X$, entonces $X$ tiene un plumaje en cualquier compactación Hausdorff regular de él.*

**Demostración.** Dado $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$, un plumaje de $X$ en $\omega X$, denotemos por $cX$ cualquier compactación regular y Hausdorff de $X$, entonces existe una función $f : \omega X \to cX$ que es continua, cerrada y para todo $x \in X$, $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$.

[1]En particular la compactación de Wallman y todas las compactaciones Hausdorff son compactaciones regulares (ver [8] ).

Puesto que $f$ es cerrada y cada $U_\alpha^n$ es abierto en $\omega X$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in M_\alpha$, $V_\alpha^n = cX \setminus f(\omega X \setminus U_\alpha^n)$ es abierto en $cX$. Si definimos $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{V}_n = \{V_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$ y, $V_\alpha^n = cX \setminus f(\omega X \setminus U_\alpha^n)$, afirmamos que $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X$ en $cX$. En efecto:

1) Para cada número natural $n$, si tomamos un arbitrario $x \in X$, por el supuesto que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de $X$, existe $\alpha_0 \in M_n$ tal que $x \in U_{\alpha_0}^n$. Si $x \in f(\omega X \setminus U_{\alpha_0}^n)$, entonces $f^{-1}(\{x\}) \subseteq \omega X \setminus U_{\alpha_0}^n$, y dado que $f$ es regular se tendría que $x \in \omega X \setminus U_{\alpha_0}^n$, lo cual no es posible. Por tanto $x \notin f(\omega X \setminus U_{\alpha_0}^n)$, es decir, $x \in V_{\alpha_0}^n$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n$ es una cubierta de $X$ y por conjuntos abiertos en $cX$.

2) Ahora veamos que todo $x \in X$ cumple que $\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq X$. Supongamos lo contrario, es decir, existe un $x_0 \in X$ de tal manera que existe $x_1 \in cX \setminus X$ y $x_1 \in \bigcap_{n=1}^\infty St(x_0, \mathcal{V}_n)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in M_n$ tal que $x_1 \in V_{\alpha_n}^n$ y $x_0 \in V_{\alpha_n}^n$ luego, $x_1 \in \bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_n}^n$ y también $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_n}^n$, para alguna sucesión $\{V_{\alpha_n}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos lo siguiente: $x_1 \in V_{\alpha_n}^n$ y así, por definición, $x_1 \in cX \setminus f(\omega X \setminus U_{\alpha_n}^n)$, por lo que $x_1 \notin f(\omega X \setminus U_{\alpha_n}^n)$, y en consecuencia, $(\omega X \setminus U_{\alpha_n}^n) \cap f^{-1}(\{x_1\}) = \emptyset$; entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{x_1\}) \subseteq U_{\alpha_n}^n$ y por tanto $f^{-1}(\{x_1\}) \subset \bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n$. Como $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_n}^n$, haciendo el mismo procedimiento que se hizo para $x_1$ llegaremos a que $f^{-1}(\{x_0\}) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n$, y dado que $f$ es regular se tiene que $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n$. Por último, si tomamos un $z \in \bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n$ arbitrario, entonces todo $n \in \mathbb{N}$ satisface que $z \in U_{\alpha_n}^n$ y, de lo anterior, $x_0 \in U_{\alpha_n}^n$ y así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $z \in U_{\alpha_n}^n \subseteq St(x_0, \mathcal{U}_n)$, es decir, $z \in \bigcap_{n=1}^\infty St(x_0, \mathcal{U}_n)$. Dado que $z$ fue arbitrario, $\bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty St(x_0, \mathcal{U}_n)$; dado que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X$ en $\omega X$ tenemos que $\bigcap_{n=1}^\infty St(x_0, \mathcal{U}_n) \subseteq X$, para así obtener que $f^{-1}(\{x_1\}) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty U_{\alpha_n}^n \subseteq X$ y de como se definió $f$, $\{x_1\} = f(f^{-1}(\{x_1\})) \subseteq X$ luego $x_1 \in X$ lo cual es una contradicción.

De (1) y (2) podemos implicar que $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X$ en $\omega X$ que es lo que se necesitaba probar. †

**Proposición 2.7** (Proposición 1.6, [4]). *Dados $X$, $Y$ espacios topológi-*

*cos, sean $X_0$, $Y_0$ subespacios de $X$, $Y$ respectivamente y $f : X \to Y$ una función continua tal que $f^{-1}(Y_0) = X_0$. Entonces si $Y_0$ tiene un plumaje en $Y$, $X_0$ tiene un plumaje en $X$.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{V}_n = \{V_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$ un plumaje de $Y_0$ en $Y$. Definamos $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in M_\alpha$, $U_\alpha^n = f^{-1}(V_\alpha^n)$. Afirmamos que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X_0$ en $X$.
Primero, dado que $f$ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in M_\alpha$, se tiene que $U_\alpha^n$ es abierto en $X$; y si tomamos un $x \in X_0$ puesto que $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, entonces $x \in f^{-1}(Y_0)$, luego $f(x) \in Y_0$, entonces existe $\alpha_0 \in M_n$ tal que $f(x) \in V_{\alpha_0}^n$ y con esto $x \in f^{-1}(V_{\alpha_0}^n)$, es decir, $x \in U_{\alpha_0}^n$; por tanto para cada cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de $X_0$ y formada por conjuntos abiertos en $X$.
Por último, dado $x_0 \in X_0$ arbitrario, notemos para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si tomamos un $z \in St(x_0,\mathcal{U}_n)$, entonces existe $\alpha_0 \in M_n$ tal que $z \in U_{\alpha_0}^n = f^{-1}(V_{\alpha_0}^n)$ y $x_0 \in U_{\alpha_0}^n$, de aquí $f(z) \in V_{\alpha_0}^n$ y $f(x_0) \in V_{\alpha_0}^n$, entonces $f(z) \in St(f(x_0),\mathcal{V}_n)$, luego $z \in f^{-1}(St(f(x_0),\mathcal{V}_n))$; como $z$ fue arbitrario tenemos que $St(x_0,\mathcal{U}_n) \subseteq f^{-1}(St(f(x_0),\mathcal{V}_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por propiedades de función, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x_0,\mathcal{U}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(St(f(x_0),\mathcal{V}_n)) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} St(f(x_0),\mathcal{V}_n))$$

pero $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $Y_0$ en $Y$ luego, $f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} St(f(x_0),\mathcal{V}_n)) \subseteq f^{-1}(Y_0) = X_0$, por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x_0,\mathcal{U}_n) \subseteq X_0$, es decir, $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X_0$ en $X$. †

**Teorema 2.8** (Teorema 1.7, [4]). *[Invariancia] Si $X$ es un espacio topológico que tiene un plumaje en alguna compactación Hausdorff y regular, entonces $X$ tiene un plumaje en cualquier compactación Hausdorff y regular.*

**Demostración.** Sea $cX$ una compactación regular Hausdorff, y supongamos que $X$ tiene un plumaje en $cX$; sea $f : \omega X \to cX$ la función natural debido a la compactación regular $cX$. Ahora, $f$ es continua, $X$ tiene un plumaje en $cX$ y $f^{-1}(X) = X$, entonces por la Proposición 2.7, $X$ tiene un plumaje en $\omega X$ y por la Proposición 2.6, tenemos que $X$ tiene un plumaje en cualquier compactación regular Hausdorff. †

Como consecuencia de este resultado, al hablar de un espacio emplumado, diremos que tiene un plumaje en la compactación de *Stone−Čech* o en cualquier compactación regular y Hausdorff, según nos convenga.

**Corolario 2.9** (Proposición 1.8, [4]). *Si $X$ es un subespacio de $Y$ tal que $X$ tiene un plumaje en $Y$ y $Y$ es un espacio emplumado, entonces $X$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $cY$ una compactación Hausdorff de $Y$. Como $Y$ tiene un plumaje en $\omega Y$, por el Teorema 2.8, $Y$ tiene un plumaje en $cY$ y dado que $X$ tiene un plumaje en $Y$, por la Proposición 2.3, $X$ tiene un plumaje en $cY$, es decir, existe una familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada $\mathcal{U}_n = \{U^n_\alpha : \alpha \in M_n\}$ es cubierta de $X$ y los $U^n_\alpha$ son conjuntos abiertos en $cY$, que es un plumaje de $X$ en $cY$.
Ahora, sea $cX = c\ell_{cY}X$, entonces $cX$ es un cerrado en $cY$ que es compacto y Hausdorff, por tanto $cX$ es una compactación Hausdorff de $X$ y veamos que $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\mathcal{V}_n = \{V^n_\alpha : \alpha \in M_n\}$ y donde $V^n_\alpha = U^n_\alpha \cap cX$ es un plumaje de $X$ en $cX$. En efecto, es claro que cada $V^n_\alpha$ es un conjunto abierto en $cX$ y que cada $\mathcal{V}_n$ es una cubierta de $X$; ahora si tomamos un $x \in X$ arbitrario, por la definición de $\mathcal{V}_n$, $\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{U}_n)$ y como $\mathcal{P}$ es plumaje de $X$ en $cY$, $\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq X$, por tanto $\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq X$ y por tanto $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X$ en $cX$. Entonces, otra vez por el Teorema 2.8, $X$ es un espacio emplumado. †

## 2.2. La clase de espacios emplumados

Hay dos clases de espacios que ocupan un lugar importante en topología, los espacios métricos y los espacios localmente compactos y Hausdorff. En esta sección veremos que la clase de los espacios emplumados contiene las dos clases de espacios topológicos mencionadas anteriormente y aun más. Como podemos ver inmediatamente del Teorema de invariancia, si un espacio es emplumado, entonces tiene un plumaje en la compactación de $Stone - \check{C}ech$, es decir, en particular el espacio tiene que ser completamente regular. Por tanto la clase de los espacios emplumados sera una "clase más pequeña" que la de los espacios completamente regulares.

**Proposición 2.10.** *Si $X$ es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces $X$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Esto es inmediato; dado que $X$ es compacto y Hausdorff, $(id, X)$ es una compactación Hausdorff y regular de $X$ y es claro que $X$ tiene un plumaje en $X$, entonces por el Teorema 2.8, $X$ tiene un plumaje en $\omega X$; por tanto, $X$ es un espacio emplumado. †

**Lema 2.11** (Proposición 2.1, [4]). *Si $X$ es un espacio emplumado y $A$ es un conjunto $G_\delta$ en $X$, entonces $A$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $A$ un conjunto $G_\delta$ en $X$; por la Observación 2.2, $A$ tiene un plumaje en $X$ y también se tiene que $X$ es un espacio emplumado, luego por el Corolario 2.9, llegamos a que $A$ es un espacio emplumado. †

**Proposición 2.12** (Proposición 2.2, [4]). *Sea $X$ un espacio emplumado. Si $A$ es un subconjunto cerrado en $X$, entonces $A$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $A$ un conjunto cerrado en $X$, como $X$ es un espacio emplumado, existe una familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_n = \{U^n_\alpha : \alpha \in M_n\}$ tal que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X$ en $\omega X$. Definamos $\mathcal{P}_A = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{V}_n = \{V^n_\alpha : V^n_\alpha = U^n_\alpha \cap c\ell_{\omega X} A \text{ y } \alpha \in M_n\}$.
Probemos que $\mathcal{P}_A$ es un plumaje de $A$ en $c\ell_{\omega X} A$. En efecto, claramente $\mathcal{P}_A$ es una familia de cubiertas abiertas de $A$ por conjuntos abiertos

en $c\ell_{\omega X}A$. Ahora, tomamos un punto arbitrario $a \in A$; notemos que si $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(a, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup\{U_\alpha^n \cap c\ell_{\omega X}A : a \in V_\alpha^n\})$, entonces $S = \bigcap_{n=1}^{\infty}(c\ell_{\omega X}A \cap St(a, \mathcal{U}_n))$, de donde $S = c\ell_{\omega X}A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} St(a, \mathcal{U}_n) \subseteq c\ell_{\omega X}A \cap X = c\ell_X A = A$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(a, \mathcal{V}_n) \subseteq A$. Por lo tanto $\mathcal{P}_A$ es un plumaje de $A$ en $c\ell_{\omega X}A$, pero, de la Proposición 1.55, $A$ tiene un plumaje en $\omega A$, es decir, $A$ es un espacio emplumado. †

La Proposición 2.12, muestra una de las propiedades interesantes de los espacios emplumados, ya que como es bien sabido esta propiedad la tiene tanto los espacios localmente como los espacios métricos.

**Proposición 2.13.** *Si $X$ es un espacio topológico Čech − completo, entonces $X$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Si $X$ es un espacio *Čech − completo*, por la Definición 1.26, $\beta X \setminus X$ es un conjunto $F_\sigma$ en $\beta X$, luego por la Observacion 1.9, $X$ es un conjunto $G_\delta$ en $\beta X$. Ahora por la Observación 1.23, $\beta X$ es compacto y Hausdorff, luego, por la Propcisión 2.10, $\beta X$ es un espacio emplumado y $X$ es un conjunto $G_\delta$ en él, entonces por la Lema 2.11, se tiene que $X$ es un espacio emplumado. †

**Proposición 2.14.** *Si $X$ es un espacio métrico, entonces $X$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Demos $cX$, una compactación Hausdorff de $X$; ahora para cada número natural $n$, definimos

$$\mathcal{U}_n = \{U \subseteq cX : U \text{ es abierto en } cX \text{ y } diam(U \cap X) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Notemos que para cada $x \in X$, dada $B_{1/2n}(x)$ (aquí, por supuesto $B_{1/2n}(x)$ es la bola abierta en X de radio $1/2^n$ y centro en $x$ ) existe un conjunto abierto $B_n^x$ en $cX$, tal que, $B_n^x \cap X = B_{1/2n}(x)$. Es claro que $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_{1/2n}(x) \subseteq \bigcup_{x \in X} B_n^x$ y $diam(B_n^x \cap X) = diam(B_{1/2n}(x)) \leq 1/n$, por ello cada $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de $X$ y por abiertos en $cX$. Probemos que $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un plumaje de $X$ sobre $cX$.
Veamos entonces que todo $x \in X$ satisfoce que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq$

$X$. Para esto, por la Proposición 1.3, es suficiente ver que la familia $\{St(x,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de todo $x \in X$ ya que, probado esto, se tendría que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$, que claramente está contenido en $X$. Así que tomemos $U_x$, una vecindad arbitraria de $x$ en $cX$; como $cX$ es normal, de la Proposición 1.7, existe $V_x$ vecindad de $x$ en $cX$, de tal forma que $x \in c\ell_{cX}V_x \subseteq U_x$.
Si $A = X \setminus V_x = X \cap (cX \setminus V_x)$, entonces $A$ es un conjunto cerrado en $X$ y $x \notin A$, de aquí que $d(x, A) > 0$, y así, por la famosa propiedad Arquimediana de los números reales, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < d(x, A)$. Finalmente, verifiquemos que $n_0$ es el candidato deseado, es decir, que $x \in St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subset U_x$. En efecto si $U \in \mathcal{U}_{n_0}$ tal que $x \in U$, entonces $(U \cap X) \cap A = \emptyset$, lo que implica que $U \cap X \subseteq X \setminus A = V_x$, pero dado que $X$ es denso en $cX$, por la Proposición 1.11, se sigue que, $c\ell_{cX}U = c\ell_{cX}(U \cap X)$ y así, $U \subseteq c\ell_{cX}U = c\ell_{cX}(U \cap X) \subseteq c\ell_{cX}V_x \subseteq U_x$. Con esto, $X$ tiene un plumaje en $cX$ luego, por el Teorema 2.8, $X$ es un espacio emplumado. †

En resumen, de todo lo probado hasta ahora tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.15** (Teorema 2.3, [4]). *La clase de los espacios emplumados contiene a todos los espacios que son:*

*a) Compactos y Hausdorff.*

*b) Métricos.*

*c) Čech − completos.*

*d) Localmente compactos y Hausdorff.*

**Demostración.** La prueba de (a), (b) y (c) es justo lo que probamos en las Proposiciones 2.10, 2.14 y 2.13, respectivamente.
Para (d), si $X$ es localmente compacto por el Corolario 1.27, $X$ es *Čech − completo* y por (c), $X$ es emplumado y esto completa la prueba del teorema. †

Los resultados del Teorema 2.15 muestra la amplitud de nuestra clase; sin embargo, algo que nos da mayor información de la riqueza de los espacios emplumados es el siguiente resultado. Recordemos, por ejemplo, que el producto de dos espacios localmente compactos no necesariamente es localmente compacto (ver Ejemplo 3.3.14 en [7]). Sin embargo, esto útimo no sucede en la clase de los espacios emplumados.

**Teorema 2.16** (Teorema 2.4, [4]). *Si* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una colección de espacios emplumados, entonces* $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Denotemos para cada $i \in \mathbb{N}$, como $\beta X_i$ y como $\mathcal{P}_i = \{\mathcal{U}_n^i : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\mathcal{U}_n^i = \{U_{n,\alpha}^i : \alpha \in M_{n,i}\}$, la compactación de *Stone* $-$ *Čech* de $X_i$ y su respectivo plumaje de $X_i$ en $\beta X_i$. Entonces probemos que $X$ tiene un plumaje en $cX = \prod_{i\in\mathbb{N}} \beta X_i$.
Por el Teorema 1.1, $cX$ es compacto y del Teorema 1.34, se tiene que $cX$ es una compactación Hausdorff de $X$. Ahora, si tomamos $\mathcal{P} = \{\mathcal{V}_n^k : n, k \in \mathbb{N}\}$, donde $\mathcal{V}_n^k = \{\prod_{i\leq k} U_{n,\alpha}^i \times \prod_{i>k} \beta X_i : U_{n,\alpha}^i \in \mathcal{U}_n^i \text{ y } \alpha \in M_{n,i}\}$, demostremos que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X$ en $cX$.
Por construcción, cada $\mathcal{V}_n^k$ es una cubierta de $X$ y por conjuntos abiertos en $cX$. Por último, probemos que para todo $f \in X$, $\bigcap_{n,\,k\in\mathbb{N}} St(f, \mathcal{V}_n^k) \subseteq X$. Para esto sea $f \in X$ y $g \in cX \setminus X$ puntos arbitrarios; necesitamos encontrar $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ de tal suerte que $g \notin St(f, \mathcal{V}_{n_0}^{k_0})$.
Dado que $g \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \beta X_i \setminus \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(k_0) \in \beta X_{k_0} \setminus X_{k_0}$ y por definición $f(k_0) \in X_{k_0}$, pero como $\mathcal{P}_{k_0}$ es un plumaje de $X_{k_0}$ en $\beta X_{k_0}$, se sigue que:

($\star$) $g(k_0) \notin St(f(k_0), \mathcal{U}_{n_0}^{k_0})$.

Ahora tenemos lo siguiente:

$$St(f, \mathcal{V}_{n_0}^{k_0}) \subseteq \prod_{i\leq k_0} St(f(x_i), \mathcal{U}_{n_0}^i) \times \prod_{i>k_0} \beta X_i$$

y por ($\star$):

$$\prod_{i\leq k_0} St(f(x_i), \mathcal{U}_{n_0}^i) \times \prod_{i>k_0} \beta X_i \subseteq \beta X \setminus \{g\}$$

es decir, $g \notin St(f, \mathcal{V}_{n_0}^{k_0})$. Y así, $X$ es emplumado. †

**Corolario 2.17** (Corolario 2.5, [4]). *Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de espacios topológicos Čech − completos, entonces $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Por el Teorema 2.15, cada $X_i$ es un espacio emplumado así que, usando el Teorema 2.16, se obtiene el resultado. †

Después del Teorema 2.15, que nos muestra la amplitud de la clase de los espacios emplumados, ahora veamos una clase de espacios topológicos que contiene a todos los espacios emplumados. Para esto es necesario definir la siguiente función cardinal.

**Definición 2.18.** *Una familia $\mathcal{B}(A)$ de subconjuntos abiertos de un espacio $X$ es llamada una base para el espacio $X$ en un conjunto $A \subseteq X$, si todos los elementos de $\mathcal{B}(A)$ continen a $A$ y para todo conjunto abierto $V$ que contiene a $A$, existe un $U \in \mathcal{B}(A)$ tal que $A \subseteq U \subseteq V$.*

**Definición 2.19.** *El carácter de un conjunto $A$ en un espacio topológico $X$, el cual denotamos como $\chi(A, X)$, se define como*

$$\text{mín}\{|\mathcal{B}(A)| : \mathcal{B}(A) \text{ es una base para } X \text{ en el conjunto } A\} + \aleph_0.$$

**Definición 2.20.** *Un espacio Hausdorff $X$ es puntual numerable si para todo punto $x \in X$, existe un conjunto compacto $K \subseteq X$ de forma que $x \in K$ y $\chi(F, X) \leq \aleph_0$.*

Damos una caracterización de los espacios *puntual numerable* y Tychonoff que usaremos en la siguiente sección (ver Teorema 3.14 en [3]).

**Teorema 2.21.** *Sea $X$ un espacio Tychonoff. $X$ es puntual numerable si y sólo si existe un espacio métrico $W$ y una función $F : W \to X$ que es multivaluada, continua, abierta y sobreyectiva, y tal que para todo $w \in W$, $F(w)$ es compacto.*

El siguiente resultado es de gran ayuda para lograr nuestro propósito (Ver Teorema 3.13 en [3]).

**Lema 2.22.** *Para todo espacio Tychonoff $X$, es equivalente que:*

*a) $X$ es puntual numerable.*

*b) Para toda compactación $cX$ del espacio $X$, el subespacio $X$ puede ser representado como la unión de una familia de conjuntos $G_\delta$ en $cX$.*

*c) Existe una compactación $cX$ de $X$ tal que, el subespacio $X$ puede ser representado como la unión de una familia de conjuntos $G_\delta$ en $cX$.*

**Corolario 2.23** (Teorema 2.6, [4])**.** *Si $X$ es un espacio emplumado, entonces $X$ es puntual numerable.*

**Demostración.** Sean $X$ un espacio emplumado y $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un plumaje de $X$ en $\omega X$. Por el hecho de que podemos escribir que $X = \bigcup_{x\in X}(\bigcap_{i=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_i))$, podemos decir que $X$ es la unión de conjuntos $G_\delta$ en $\omega X$, luego, por el Lema 2.22, se sigue que $X$ es puntual numerable. †

La clase de los $k-$*espacios* (ver Definición 1.68) contiene también a todos los espacios emplumados, esto es inmediato usando el Teorema $3{,}7'$ en [3]:

**Teorema 2.24.** *Todo espacio topológico puntual numerable, es un k-espacio.*

**Corolario 2.25** (Corolario 2.7, [4])**.** *Si $X$ es un espacio emplumado, entonces $X$ es un k-espacio.*

**Demostración.** Esto es consecuencia inmediata del Corolario 2.23 y del Teorema 2.24. †

Terminamos esta sección, esperando que el lector ya tenga una idea más precisa de donde están situados los espacios emplumados.

## 2.3. Espacios emplumados y funciones

Los resultados presentados en esta sección, junto con los teoremas vistos en la sección 3.4, establecen un analisis detallado sobre la preservación de espacios emplumados bajo funciones continuas.

**Teorema 2.26** (Teorema 3.1, [4]). *Si $Y$ es un espacio emplumado, entonces existe un espacio localmente compacto $X$ y una función cociente $f : X \to Y$.*

**Demostración.** Puesto que $Y$ es un espacio emplumado, por el Corolario 2.25, tenemos que $Y$ es un $k-$ *espacio* y por la Definición 1.68, se tiene la tesis del teorema. †

El siguiente teorema nos da una conexión que hay entre los espacios emplumados y los espacios métricos.

**Teorema 2.27** (Teorema 3.2, [4]). *Si $Y$ es un espacio emplumado, entonces existe un espacio métrico $X$ y una función multivaluada $F : X \to Y$, que es sobreyectiva, abierta, continua y tal que para cada $x \in X$, $F(x)$ es compacto.*

**Demostración.** Dado $Y$ un espacio emplumado, por el Corolario 2.23, $Y$ es puntual numerable, luego por el Teorema 2.21, tenemos la tesis del teorema. †

Para terminar esta sección, nos preguntamos bajo qué condiciones la preimagen de un espacio emplumado resulta ser también un espacio emplumado. Por ahora veamos que si tenemos la preimagen de un espacio emplumado, bajo una función abierta y cerrada, no necesariamente es un espacio emplumado.

**Ejemplo 2.28.** *Consideremos un espacio topológico $X$ que no sea emplumado, consideremos una función constante $f : X \to \{1\}$; claramente $f$ es cerrada y abierta, y $\{1\}$ es un espacio emplumado, pero*

$f^{-1}(\{1\}) = X$ *no es un espacio emplumado. Por tanto, la preimagen bajo una función abierta y cerrada de un espacio emplumado, no necesariamente resulta un espacio emplumado.*

A continuación el siguiente teorema nos muestra una de las condiciones que andamos buscando.

**Teorema 2.29** (Teorema 3.3, [4]). *La preimagen de un espacio emplumado bajo una función perfecta, es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ una función perfecta donde $Y$ es un espacio emplumado. Por el Teorema 2.8, $Y$ tiene un plumaje en $\beta Y$. De la Proposición 1.35, existe una función continua $\beta f : \beta X \to \beta Y$ de tal manera que $\beta f|_X = f$; ahora, puesto que $f$ es perfecta, por el Teorema 1.37, $\beta f^{-1}(Y) = X$. Entonces notemos que para la función $\beta f$ se cumplen las hipótesis de la Proposición 2.7, por ello $X$ tiene un plumaje en $\beta X$, luego por el Teorema 2.8, $X$ es un espacio emplumado. †

Como ahora ya sabemos, la preimagen de un espacio emplumado bajo una función perfecta es un espacio emplumado. Sin embargo, hay otra clase muy especial de funciones que así como las perfectas solucionan nuestro problema, a saber, las $k$-$funciones$ (Definición 1.67). Usaremos el siguiente lema para la prueba.

**Lema 2.30** (Proposición 3.4, [4]). *Si $f : X \to Y$ es una k-función sobreyectiva donde $Y$ es un espacio emplumado, entonces $f$ es cerrada.*

**Demostración.** Puesto que $Y$ es un espacio emplumado, por el Corolario 2.25, $Y$ es un k-espacio y, por la definición de k-función, podemos ver que cumple las hipótesis del Teorema 1.69, y de aquí obtenemos que $f$ es cerrada. †

Ahora sí, el resultado esperado.

**Teorema 2.31** (Teorema 3.3’, [4]). *La preimagen de un espacio emplumado bajo una k-función continua, es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ una k-función continua donde $Y$ es un espacio emplumado, queremos verificar que $f^{-1}(Y) = X$ es un espacio emplumado. Por el Lema 2.30, tenemos que $f$ es cerrada y por la definición de k-función se cumple que dado un $y \in Y$ (claramente $\{y\}$ es compacto en $Y$), $f^{-1}(\{y\})$ es un compacto, entonces $f$ es perfecta, luego por el Teorema 2.29, se tiene que $f^{-1}(Y)$ es un espacio emplumado. †

La siguiente pregunta natural es, bajo qué condiciones la imagen de un espacio emplumado, es un espacio emplumado. La respuesta a esta cuestión la veremos mucho más adelante (sección 3.4)ya que son necesarios otros resultados.
Por el momento, veamos que pasa con la imagen de un espacio emplumado bajo una función que es cerrada. Este caso es más complicado que el anterior y necesitamos los siguientes resultados.

**Teorema 2.32.** *Si $f : X \to Y$ es una función cerrada y sobreyectiva, donde $X$ es un espacio métrico y $Y$ un espacio puntual numerable. Entonces $Y$ es metrizable.*

**Demostración.** Teorema 3.11 en [3]. †

**Teorema 2.33** (Teorema 3.5, [4])**.** *Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva y cerrada donde $X$ es un espacio métrico. Entonces $Y$ es un espacio métrico si y sólo si $Y$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.**
$\Rightarrow$] Esto se sigue de inmediato de el Teorema 2.15 parte (b).
$\Leftarrow$] Supongamos entonces que $Y$ es un espacio emplumado, luego por el Corolario 2.23, tenemos que $Y$ es puntual numerable, pero así se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.32, y de aquí se sigue que $Y$ es un espacio métrico. †

Usando los resultados anteriores, podemos ahora dar un ejemplo de lo buscado.

**Ejemplo 2.34.** *Sea $X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$, donde $X_n = [0,1] \times \{n\}$. Definamos la siguiente relación de equivalencia en $X$:*

$$(x,n) \sim (z,m) \text{ si y sólo si } (x,n) = (z,m) \text{ o } x = z = 0$$

*Notemos que el espacio cociente $X/\sim$, es esencialmente el espacio $X$, salvo que todos los puntos de la forma $(0,n)$ son pegados en un sólo punto $p$, a saber, la clase de equivalencia del $(0,1)$. Ahora consideremos la función natural cociente, $q : X \to X/\sim$, es decir, para todo $x \in X$, $q(x) = [x]$ ($[x] = \{y : y \sim x\}$). Notemos que $q$ es una función cerrada y, como $X$ es un espacio métrico, por el Teorema 2.15, $X$ es emplumado; restaría ver que $X/\sim$ no es un espacio emplumado.*
*En efecto, $p$ no tiene una base de vecindades numerable. Supongamos lo contrario, es decir, existe $\{U_p^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades para $p$, como $q$ es una función continua, para cada $n \in \mathbb{N}$, $q^{-1}(U_p^n)$ es un conjunto abierto en $X$, además, $(0,n) \in q^{-1}(U_p^n)\cap X_n$, más aún, $q^{-1}(U_p^n)\cap X_n$ es infinito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un punto $(a_n,b_n) \in q^{-1}(U_p^n)\cap X_n$ de forma que $(a_n,b_n) \neq (0,n)$, notemos que $(q^{-1}(U_p^n) \cap X_n) \setminus \{(a_n,b_n)\} = G_n$ es un conjunto abierto en $X_n$, luego $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es un conjunto abierto en $X$, y además $q(G)$ es un conjunto abierto en $X/\sim$ y tal que $p \in q(G)$, pero, observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $[(a_n,b_n)] \in U_p^n$ y $[(a_n,b_n)] \notin q(G)$, es decir, $U_p^n \nsubseteq q(G)$ lo cual no es posible. Entonces $X/\sim$ no es primero numerable, luego $X/\sim$ no es metrizable, y por el Teorema 2.33, $X/\sim$ no es un espacio emplumado. Por tanto la propiedad de ser espacio emplumado no necesariamente se preserva bajo funciones cerradas y continuas.*

## 2.4. El peso de los espacios emplumados

En esta sección usaremos la siguiente función cardinal.

**Definición 2.35.** *Sea $X$ un espacio topológico. El peso de $X$ denotado por $\omega(X)$ se define como $\text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base para } X\} + \aleph_0$.*

**Observación 2.36.** *Un espacio topológico $X$ tiene una base numerable (o también llamado segundo numerable) si y sólo si $\omega(X) = \aleph_0$.*

El siguiente problema fue planteado por P. S. Alexandroff y P. S. Urysohn. Dado $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ un espacio topológico, donde la cardinali-

dad de $S$ y el peso de cada $X_s$ no excede cierto número cardinal $\tau$, ¿bajo qué condiciones se tiene que el peso de $X$ no excede a $\tau$? El problema fue resuelto 30 años después, en 1956, por M. Smirnov quien probó que si $X$ es compacto y es la unión numerable de espacios que tienen una base numerable, entonces $X$ tiene una base numerable. Tres años más tarde A. V. Arhangel'skiĭ obtiene con éxito el siguiente teorema, usando un método completamente diferente: si $X$ es *Čech−completo* y para cada $s \in S$, $\omega(X_s) \leq \tau$, entonces $\omega(X) \leq \tau$. Para llegar a tal resultado fue de mucha ayuda introducir el concepto de red.
En esta sección probaremos tal resultado, ahora para espacios emplumados.

**Definición 2.37.** *Diremos que una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de $X$ es una red para $X$, siempre que para todo $x \in X$ y toda vecindad $U$ de $x$, existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$.*

**Definición 2.38.** *Sea $Y \subseteq X$. Diremos que una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos en $X$, es una base externa de $Y$ en $X$ si para todo $y \in Y$ y toda vecindad $V_y$ de $y$ en $X$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $y \in B \subseteq V_y$.*

**Teorema 2.39** (Teorema 4.2, [4])**.** *Si $X$ es un espacio emplumado que tiene una red $\mathcal{N}$ tal que $|\mathcal{N}| \leq \tau$, entonces existe una base externa $\mathcal{B}$ de $X$ en $\omega X$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \tau$.*

**Demostración.** Demos $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_n = \{U^n_\alpha : \alpha \in M_n\}$ un plumaje de $X$ en alguna compactación Hausdorff y regular $cX$.
Para cada $M \in \mathcal{N}$ elegimos un único $U^n_{\alpha,M} \in \{U \in \mathcal{U}_n : M \subseteq U\}$ y formemos la siguiente familia $\mathcal{U}'_n = \{U^n_{\alpha,M} : \alpha \in M'_n \, y \, M \in \mathcal{N}\}$; si hacemos lo anterior para cada número natural $n$ obtenemos una familia $\mathcal{P}' = \{\mathcal{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que $\mathcal{P}'$ también es un plumaje de $X$ en $cX$. En efecto; dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ arbitrarios, existe $\alpha \in M_n$ tal que $x \in U^n_\alpha$, luego, podemos encontrar un $M \in \mathcal{N}$ de tal forma que $x \in M \subseteq U^n_\alpha$, y así $\mathcal{U}'_n \neq \emptyset$, por esto podemos elegir un $U \in \mathcal{U}'_n$ que tenga a $x$. Por lo tanto $\mathcal{P}'$ es una familia de cubiertas de $X$ y por conjuntos abiertos

en $cX$; y debido a que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}'_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq X$ se tiene también que $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X$ en $cX$.

Ahora definamos las siguientes familias: para cada número natural $n$, $\mathcal{V}_n = \{cX \setminus U^n_{\alpha,M} : U^n_{\alpha,M} \in \mathcal{U}'_n\}$, $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, $\overline{\mathcal{N}} = \{c\ell_{cX} M : M \in \mathcal{N}\}$ y por último $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{N}} \cup \mathcal{V}$; notemos que $\mathcal{H}$ es una familia de compactos y $|\mathcal{H}| \leq \tau$ pues $|\overline{\mathcal{N}}| \leq \tau$ y $|\mathcal{V}| \leq \sup\{|\mathcal{V}_n| : n \in \mathbb{N}\} \cdot \aleph_0 \leq \tau \cdot \aleph_0 = \tau$. Para cada par de elementos en $\mathcal{H}$ ajenos, tomamos dos abiertos ajenos en $cX$ garantizados por la normalidad de $cX$ y con estos abiertos formemos la famila $\mathcal{B}'$. Si $\mathcal{B}$ es la familia que consiste de todos los elementos de $\mathcal{B}'$, de los complementos de sus cerraduras tomadas en $cX$ y de todas las posibles intersecciones finitas, de los conjuntos indicados anteriormente, entonces $|\mathcal{B}| \leq \tau$. Sólo resta probar que $\mathcal{B}$ es la base externa deseada.

Sean $x \in X$ y $U_x$ una vecindad arbitraria en $cX$ de $x$; definamos $F = cX \setminus U_x$ y verifiquemos que:

($\star$) Para todo $x_F \in F$ existe $V_{x_F} \in \mathcal{B}$ tal que $x_F \in V_{x_F}$ y $x \notin c\ell_{cX} V_{x_F}$.

Tomemos entonces $x_F \in F$, para esto tenemos dos casos:

($\cdot$) $x_F \in X$. Como $x_F \neq x$ y debido a la normalidad de $cX$ y por la Proposición 1.7, existen $V_{x_F}$ y $V_x$ vecindades en $cX$ de $x_F$ y $x$ respectivamente de tal suerte que $c\ell_{cX} V_{x_F} \cap c\ell_{cX} V_x = \emptyset$, también podemos encontrar $M_{x_F}$, $M_x \in \mathcal{N}$ tales que $M_{x_F} \subseteq V_{x_F}$ y $x \in M_x \subseteq V_x$. Entonces si $c\ell_{cX} M_{x_F} = A$ y $c\ell_{cX} M_x = B$ se tiene que $A \cap B = \emptyset$ y $A, B \in \overline{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{H}$, luego existen $V'_{x_F}, V'_x \in \mathcal{B}'$ de forma que $A \subseteq V'_{x_F}$ y $B \subseteq V'_x$. Por lo tanto $V'_{x_F} \in \mathcal{B}$, $x_F \in V'_{x_F}$ y $x \notin c\ell_{cX} V'_{x_F}$, es decir, se satisface ($\star$).

($\cdot\cdot$) $x_F \in cX \setminus X$. Como $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X$ en $cX$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x_F \notin St(x,\mathcal{U}'_{n_x})$. Sea $U \in \mathcal{U}'_{n_x}$ de forma que $x \in U$ y $x_F \notin U$, por esto podemos elegir $V_{n_0} \in \mathcal{V}_{n_0}$ de tal manera que $x_F \in V_{n_0}$ y $x \notin V_{n_0}$. Entonces $x \in cX \setminus V_{n_0}$ y, como $cX$ es normal por la Proposición 1.7, podemos encontrar un abierto $U'_x$ tal que $x \in U'_x \subseteq c\ell_{cX} U'_x \subseteq cX \setminus V_{n_0}$; ahora, dado que $\mathcal{N}$ es una red de $X$, existe $M_x \in \mathcal{N}$, donde, $x \in M_x \subseteq U'_x$. Definimos $V_x = c\ell_{cX} M_x$. Ahora se tiene que $V_{n_0}$, $V_x \in \mathcal{H}$ y $V_{n_0} \cap V_x = \emptyset$, luego existen $B_{x_F}$, $B_x \in \mathcal{B}'$ ajenos y tales que, $V_{n_0} \subseteq B_{x_F}$ y $V_x \subseteq B_x$.

Por lo tanto $x_F \in B_{x_F} \subseteq c\ell_{cX} B_{x_F} \subseteq cX \setminus \{x\}$ y $B_{x_F} \in \mathcal{B}$, es decir, se cumple $(\star)$ para $x_F \in cX \setminus X$.
Por $(\star)$, $F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$, pero como $F$ es compacto, existen $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_k}$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=k} V_{x_i}$, por definición, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $x \notin c\ell_{cX} V_{x_i}$, luego $x \notin \bigcup_{i=1}^{i=k} c\ell_{cX} V_{x_i}$, entonces $x \notin c\ell_{cX} \bigcup_{i=1}^{i=k} V_{x_i}$, por ello $V = cX \setminus c\ell_{cX} \bigcup_{i=1}^{i=k} V_{x_i}$ es una vecindad de $x$, y es claro que $x \in V \subseteq U_x$, sólo resta ver que $V \in \mathcal{B}$. En efecto, por definición cada $cX \setminus c\ell_{cX} V_{x_i} \in \mathcal{B}$, entonces también $V = \bigcap_{i=1}^{i=k} (cX \setminus c\ell_{cX} V_{x_i}) \in \mathcal{B}$, es decir $V \in \mathcal{B}$ y esto prueba lo deseado. †

**Corolario 2.40** (Corolario 4.3, [4]). *Si $X$ es un espacio emplumado que tiene una red $\mathcal{N}$ tal que $|\mathcal{N}| \leq \tau$, entonces $\omega(X) \leq \tau$.*

**Demostración.** Por el Teorema 2.39, $X$ tiene una base externa digamos $\mathcal{B}$, pero si $\mathcal{B}' = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}\}$ es claro que $\mathcal{B}'$ es es una base de $X$ y así también $|\mathcal{B}'| \leq \tau$, luego $\omega(X) \leq \tau$. †

Para probar el siguiente resultado primero probaremos el siguiente lema no complicado.

**Lema 2.41** (Lema 4.5, [4]). *Sea $X = \bigcup_{\alpha \in M} X_\alpha$, donde $X$ es un espacio emplumado, $\omega(X_\alpha) \leq \tau$ para todo $\alpha \in M$, y $|M| \leq \tau$; además si para cada $\alpha \in M$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una base de $X_\alpha$ de tal manera que $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \tau$. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in M} \mathcal{B}_\alpha$ forma una red para $X$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \tau$.*

**Demostración.** $|\mathcal{B}| \leq \sup\{|\mathcal{B}_\alpha| : \alpha \in M\} \cdot |M| \leq \tau \cdot \tau = \tau$, por tanto $|\mathcal{B}| \leq \tau$. Por último probemos que $\mathcal{B}$ es una red para $X$. Tomemos $x \in X$ y $U_x$ una vecindad arbitraria de $x$, entonces existe $\gamma \in M$ tal que $x \in X_\gamma$; por otro lado, $X_\gamma \cap U_x$ es un conjunto abierto en $X_\gamma$ y como por hipótesis $\mathcal{B}_\gamma$ es una base para $X_\gamma$, existe $B_\gamma \in \mathcal{B}_\gamma$ tal que $x \in B_\gamma \subseteq X_\gamma \cap U_x$. Por lo tanto $B_\gamma \in \bigcup_{\alpha \in M} \mathcal{B}_\alpha$ y $x \in B_\gamma \subseteq U_x$. †

Los siguientes dos resultados son bien conocidos para espacios localmente compactos y espacios métricos, probados también para espacios $\check{C}ech-completos$ y ahora veamos que se pueden extender a la clase de espacios emplumados.

**Teorema 2.42** (Teorema 4.4, [4]). *Si* $X = \bigcup_{\alpha \in M} X_\alpha$*, donde* $X$ *es un espacio emplumado,* $\omega(X_\alpha) \leq \tau$ *para todo* $\alpha \in M$*, y* $|M| \leq \tau$*; entonces* $\omega(X) \leq \tau$*.*

**Demostración.** Observemos que las hipótesis del Lema 2.41 se satisfacen, entonces tenemos que $X$ tiene una red de cardinalidad no más grande que $\tau$, y ahora, por el Corolario 2.40, se sigue que $\omega(X) \leq \tau$. †

El teorema anterior da una solución al problema planteado por Alexandroff y Urysohn que comentamos al principio de la sección.

**Corolario 2.43** (Corolario 4.6, [4]). *Si* $X$ *es un espacio topológico emplumado, entonces* $\omega(X) \leq |X|$*.*

**Demostración.** Es claro que $\mathcal{N} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una red para $X$ y que $|\mathcal{B}| = |X|$, luego por el Corolario 2.40, $\omega(X) \leq |X|$. †

En particular, del corolario anterior, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.44** (Corolario 4.7, [4]). *Si* $X$ *es un espacio emplumado tal que* $|X| = \aleph_0$*, entonces* $\omega(X) = \aleph_0$*.*

**Demostración.** Se sigue inmediatamente del Corolario 2.43. †

**Proposición 2.45** (Proposición 4.9, [4]). *Si* $f : X \to Y$ *es una función continua y sobreyectiva entre espacios topológicos tal que* $\omega(X) = \tau$*, entonces* $Y$ *tiene una red* $\mathcal{N}$ *con* $|\mathcal{N}| \leq \tau$*; inversamente si* $Y$ *tiene una red* $\mathcal{N}$ *con* $|\mathcal{N}| = \tau$*, entonces existe una función* $f : X \to Y$ *que es continua y biyectiva (también dicho,* $Y$ *es una condensación de* $X$*), donde* $\omega(X) \leq \tau$*.*

**Demostración.** Supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva tal que $\omega(X) = \tau$, entonces podemos encontrar $\mathcal{B}$ base de $X$ con $|\mathcal{B}| \leq \tau$; así definamos $\mathcal{N} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ y probemos que $\mathcal{N}$ es una red en $Y$, que es lo que necesitamos debido a que $|\mathcal{N}| \leq \tau$. En efecto, sean $y \in Y$ y $V$ una vecindad de $y$ arbitrarios, ahora si $x$

es tal que $y = f(x)$, entonces $x \in f^{-1}(V)$, debido a la continuidad de $f$ se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto en $X$ y dado que $\mathcal{B}$ es una base, existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_0 \subseteq f^{-1}(V)$, luego $y \in f(B_0) \subseteq V$ y, por definición, $f(B_0) \in \mathcal{N}$; por tanto $\mathcal{N}$ es una red de $Y$.
Inversamente si $\mathcal{N}$ es una red de $Y$ con $|\mathcal{N}| \leq \tau$, formemos el siguiente conjunto $\mathcal{B} = \{N_\alpha = \bigcap \mathcal{M}_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{N}\, y\, |\mathcal{M}_\alpha| < \aleph_0\}$, notemos que:

(1) Si $N_\alpha$, $N_\beta \in \mathcal{B}$ y $z \in N_\alpha \cap N_\beta$, entonces $z \in \bigcap \mathcal{M}_\alpha \cap \bigcap \mathcal{M}_\beta$, luego $z \in \bigcap(\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta) = N_\gamma$, y es claro que $N_\gamma \in \mathcal{B}$ y que $N_\gamma \subseteq N_\alpha \cap N_\beta$.

(2) Si $y \in Y$, dado que $\mathcal{N}$ es una red, podemos escoger $\{M_y\} \subseteq \mathcal{N}$ para el cual $y \in M_y \subseteq Y$, pero es claro que $M_y \in \mathcal{B}$; por lo tanto $Y = \bigcup \mathcal{B}$.

De (1) y (2) se concluye que $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ en $Y$. Consideremos $X = Y$ con la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ y definamos $f : X \to Y$ donde $f = Id_Y$(la identidad en Y). Otra vez, dado que $\mathcal{N}$ es una red, se tiene que $f$ es continua; también es claro que $f$ es biyectiva, y $|\mathcal{B}| = [\mathcal{N}]^{<\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot \tau \leq \tau$, de aquí que $\omega(X) \leq \tau$. †

El siguiente teorema es conocido para la clase de los espacios localmente compactos; aquí se prueba para la clase de los espacios emplumados que como ya sabemos, contiene a todos los espacios localmente compactos.

**Teorema 2.46** (Teorema 4.8, [4])**.** *Si $X$ es un espacio topológico arbitrario y $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva tal que $Y$ es un espacio emplumado, entonces $\omega(Y) \leq \omega(X)$.*

**Demostración.** Definimos $\kappa = \omega(X)$. Dado que $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, por la Proposición 2.45, $Y$ tiene una red $\mathcal{N}$ con $|\mathcal{N}| \leq \kappa$ y, como $Y$ es un espacio emplumado, por el Corolario 2.40, se tiene que $\omega(Y) \leq \kappa$. †

**Corolario 2.47** (Corolario 4.10, [4])**.** *Un espacio emplumado que es la* *imagen continua de un espacio segundo numerable, es segundo numerable.*

**Demostración.** Se sigue inmediatamente del Teorema 2.46. †

# Capítulo 3

# Espacios emplumados y paracompacidad

La clase de los espacios paracompactos y emplumados son el objeto de estudio en este capítulo.
En las secciones 3.1, 3.2 y 3.4, se hace un análisis sobre la preservación de espacios paracompactos y emplumados bajo funciones continuas.
Y en la sección 3.3, tratamos lo siguiente: ¿qué espacios topológicos son la preimagen perfecta de un espacio con base numerable?

## 3.1. Resultados previos

En esta sección presentamos ocho proposiciones las cuales nos dan la pauta para poder probar la mayoría de los resultados presentados en este capítulo.

**Proposición 3.1** (Proposición A, [4]). *Si $f : X \to Y$ es una función perfecta, continua y sobreyectiva donde $Y$ es un espacio métrico, entonces existe una k-función multivaluada $F' : Y \to X$ que es continua, abierta y cerrada.*

**Demostración.** Consideremos la función multivaluada $F : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, $F(x) = \{f(x)\}$, como $f$ es continua y cerrada, del Teorema 1.64, se obtiene que $F$ es continua y cerrada. Sea $F^{-1} : Y \to X$ la función inversa de $F$, es decir, tal que para todo $y \in Y$, $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in \{f(x)\}\}$ (ver Definición 1.57), entonces de la Observación 1.61, se sigue que $F^{-1}$ es cerrada y continua. Ahora, si tomamos un conjunto abierto $B$ en $Y$, de la Proposición 1.63, $F^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ y de la continuidad de $f$, $F^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en $X$. En resumen, $F^{-1}$ es continua, abierta y cerrada; sólo resta ver que es una $k - función$. Veamos esta última parte:

$(\cdot)$ Si tomamos un compacto $B \subseteq Y$, verifiquemos que $F^{-1}(B)$ es compacto. En efecto, de la Proposición 1.63, $F^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ y puesto que $f$ es perfecta, del Teorema 1.17 se tiene que $f^{-1}(B)$ es compacto, así, $F^{-1}(B)$ es compacto.

$(\cdot\cdot)$ Sea $A \subseteq X$ compacto, queremos probar que $(F^{-1})^{-1}(A)$ es compacto en $Y$. En efecto, de la Proposición 1.58 y de la Observación 1.59 obtenemos que $(F^{-1})^{-1}(A) = F(A)$, y recordemos que $F(A) = f(A)$, y puesto que $f$ es continua y $A$ es compacto, $f(A)$ es compacto.

De $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ se verifica que $F^{-1}$ es una k-función y, como habiamos visto, también continua, abierta y cerrada, así $F^{-1}$ es la función deseada. †

**Proposición 3.2** (Proposición B, [4]). *Si $F : X \to Y$ una k-función, donde $X$ es un espacio métrico y $F$ es cerrada, abierta y continua, entonces $Y$ es paracompacto.*

**Demostración.** Puesto que $X$ es métrico, del Teorema 1.71, $X$ es paracompacto. Ahora dado que $F$ es continua y cerrada, $F$ preserva cerrados bajo la imagen y preimagen de cerrados, y como $F$ es una k-función, $F$ preserva compacidad bajo imagen y preimagen. Entonces, de acuerdo a la Definición 1.65, $F$ es una función perfecta y ya teníamos que $X$ es paracompacto, luego del Teorema 1.66, podemos decir que $Y$ es paracompacto, que es lo deseado. †

Hacemos una pausa para dar algunos conceptos y resultados necesarios para probar la siguiente proposición. La siguiente definición puede consultarse en [7], pag. 331.

**Definición 3.3.** *Una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico $X$, diremos que es regular si para todo $x \in X$ y toda vecindad $U$ de $x$ existe una vecindad $V \subseteq U$ del punto $x$ de forma que el conjunto de elementos $B \in \mathcal{B}$ que cumplen que $B \cap V \neq \emptyset$ y $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ es de cardinalidad finita.*

El siguiente resultado fue probado por Arhangel'skiĭ en 1960.

**Teorema 3.4** (Metrización de Arhangel'skiĭ)**.** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es un espacio $T_1$ que tiene una base regular.*

**Demostración.** Teorema 5.4.6 en [7]. †

En lo que prosigue, a menudo usaremos el concepto de familia $k$-$fina$ que se define a continuación.

**Definición 3.5.** *Una familia $\mathcal{D}$, formada por abiertos de un espacio topológico $X$, se dice que es k-fina si para todo punto $x \in X$, existe un compacto $H$ de tal forma que para toda vecindad $U$ de $H$, el conjunto de elementos $V \in \mathcal{D}$ que tienen a $x$ como elemento y $V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, es de cardinalidad finita; y existe al menos un $V_x \in \mathcal{D}$ con $x \in V_x \subseteq U$. En este caso diremos que la familia $\mathcal{D}$ es regular en el par $(x, H)$.*

Veamos una propiedad que tiene una familia $k$-$fina$, la cual usaremos más adelante.

**Lema 3.6** (Lema, pág 17, [4])**.** *Si $\mathcal{D}$ es una familia k-fina de un espacio topológico $X$, entonces la familia $\widetilde{\mathcal{D}}$ de todas las posibles intersecciones finitas de $\mathcal{D}$, es también una familia k-fina en $X$.*

**Demostración.** Sea $x \in X$, puesto que $\mathcal{D}$ es k-fina en $X$, existe un compacto $G$ con la propiedad de que $\mathcal{D}$ es regular en $(x, G)$. Probemos que $\widetilde{\mathcal{D}}$ también es regular en $(x, G)$.
Para esto tomamos una vecindad arbitraria $U$ con $G \subseteq U$, luego existe

una subfamilia $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ la cual cumple que todos sus elementos tienen a $x$ e intersectan a $X \setminus U$, y $|\mathcal{D}'| < \aleph_0$. Notemos que si $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ y cumple que $x \in \widetilde{V}$ y $\widetilde{V} \cap X \setminus U \neq \emptyset$, por definición $\widetilde{V} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ donde los $V_i \in \mathcal{D}$, entonces cada $V_i \in \mathcal{D}'$. Por tanto, podemos decir que todo elemento en $\widetilde{\mathcal{D}}$ que tiene a $x$ e intersecta a $X \setminus U$, lo podemos considerar como la intersección finita de elementos de $\mathcal{D}'$, y de ahí tenemos la conclusión del lema. †

Continuando con el estudio de los espacios emplumados, veamos el siguiente resultado.

**Proposición 3.7** (Proposición C, [4])**.** *Sea $X$ un espacio métrico y $F : X \to Y$ una k-función multivaluada que es continua, sobreyectiva y abierta. Entonces $Y$ tiene una familia k-fina.*

**Demostración.** Sean $\mathcal{B}$ una base regular en $X$ (garantizada por el Teorema 3.4) y $\mathcal{D} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Notemos que $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos abiertos en $Y$, así que probemos que $\mathcal{D}$ es una familia k-fina en $Y$.

Sea $y_0 \in Y$ un punto arbitrario; puesto que $F$ es una k-función y $\{y_0\}$ es compacto, $F^{-1}(y_0) = G$ es un compacto en $X$, y luego, también $F(F^{-1}(y_0)) = H$ es compacto en Y. Veamos que $\mathcal{D}$ es regular en $(y_0, H)$. En efecto, sea $U$ una vecindad arbitraria de $H$, luego como $F$ es continua, $V = X \setminus F^{-1}(Y \setminus U)$ es un conjunto abierto en $X$. Ahora si tomamos un punto $z \in G$ y suponemos que $z \notin V$, entonces $z \in F^{-1}(Y \setminus U)$, es decir, $F(z) \cap Y \setminus U \neq \emptyset$, lo cual no es posible ya que como $z \in G$, $F(z) \subseteq F(G) = H \subseteq U$, por tanto $G \subseteq V$. Observemos que, si $z \in F(V)$, entonces existe $x \in V$ tal que $z \in F(x)$, es decir, $x \notin F^{-1}(Y \setminus U)$ tal que $z \in F(x)$, pero entonces $F(x) \subseteq U$, lo cual muestra que $z \in U$ y por tanto $F(V) \subseteq U$.

Como $\mathcal{B}$ es una base regular de $X$, para todo $w \in V$ (en particular para todo $w \in G$) podemos encontrar una vecindad $U_w$ de $w$, con la propiedad que el subconjunto $\mathcal{B}_w$ de $\mathcal{B}$, cuyos elementos intersectan a $U_w$ y a $X \setminus H$, es vacío o finito. Con estos $U_w$ podemos formar una cubierta para $G$, es decir, $G \subseteq \bigcup_{w \in G} U_w$ y por la compacidad de $G$, existe un

conjunto finito $\{w_1, w_2, ..., w_n\} \subseteq G$ que cumple que $G \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{w_i}$; sea $V' = \bigcup_{i=1}^{n} U_{w_i}$. Si algún $B \in \mathcal{B}$ cumple que $B \cap V' \neq \emptyset$ y $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, entonces $B \cap U_{w_i} \neq \emptyset$ y $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$, pero entonces $B \in \mathcal{B}_{w_i}$. Por tanto si el conjunto $\mathcal{B}_{y_0}$ es formado con todos los elementos en $\mathcal{B}$ que intersectan a $V'$ y a $X \setminus V$, $|\mathcal{B}_{y_0}| \leq |\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{w_i}| < \aleph_0$. Por otro lado, si $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{y_0}$ tal que $y_0 \in F(B)$, de la Definición 1.57, existe $z \in B$ que cumple que $y \in F(z)$, luego $z \in B$ y $z \in F^{-1}(y) = G$, y de aquí que $z$ es elemento de algún $U_{w_j} \in V'$; y por ello podemos decir que $V' \cap B \neq \emptyset$ y por la elección de $B$, tenemos que $B \cap (X \setminus V) = \emptyset$, es decir, $B \subseteq V$ y de aquí que $F(B) \subseteq F(V) \subseteq U$, es decir, $F(B) \cap (Y \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto entre los elementos de $\mathcal{D}$ que tienen a $y_0$ como elemento, sólo los elementos de $\mathcal{B}_{y_0}$ podrían intersectar a $Y \setminus U$, y $|\mathcal{B}_{y_0}| < \aleph_0$. De esto último se tiene lo deseado.
Sólo restaría ver que existe al menos un $F(B) \in \mathcal{D}$ tal que $y_0 \in F(B) \subseteq U$. Para esto, si tomamos $x \in G$, como $G \subseteq V$ y $V$ es un conjunto abierto en $X$ y $\mathcal{B}$ es una base para $X$, es posible encontrar un $B_0 \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B_0 \subseteq V$, entonces $y_0 \in F(z) \subseteq F(B_0) \subseteq F(V) \subseteq U$. †

Ahora, regresemos a la necesidad del Teorema 3.4; si $X$ es un espacio metrizable y además pedimos que el espacio $X$ tenga una base numerable, entonces ¿también tendrá una base regular numerable?. Para resolver esta cuestión recordemos que:

**Lema 3.8.** *Si un espacio $X$ es segundo numerable, entonces en toda base $\mathcal{B}$ de $X$ existe una subcolección $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}_0$ es una base para $X$ y $|\mathcal{B}_0| \leq \aleph_0$.*

El siguiente corolario da respuesta a lo planteado.

**Corolario 3.9.** *Un espacio topológico metrizable y segundo numerable, tiene una base regular numerable.*

**Demostración.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\{B_{1/4n}(x)\}_{x \in X}$. Del Teorema 1.71, para cada número natural $n$, $\mathcal{B}_n$ es un refinamiento localmente finito de $\{B_{1/4n}(x)\}_{x \in X}$.

Veamos que $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es una base para $X$. Si tomamos $x \in X$ y $U_x$ una vecindad de $x$, luego, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{1/2i}(x) \subseteq B_{1/i}(x) \subseteq U_x$. Ahora, puesto que $\mathcal{B}_{i+1}$ es una cubierta de $X$, existe $B \in \mathcal{B}_{i+1}$ tal que $x \in B$. También podemos encontrar $y \in X$ tal que $B \subseteq B_{1/4(i+1)}(y)$. Afirmamos que $B_{1/4(i+1)}(y) \subseteq U_x$; en efecto, tomemos un punto arbitrario $w \in B_{1/4(i+1)}(y)$; por otro lado notemos que $x \in B_{1/4(i+1)}(y)$, entonces

$$d(w,x) < \frac{1}{4(i+1)} < \frac{1}{i}$$

por lo tanto $w \in B_{1/i}(x) \subseteq U_x$ y se tiene probada la afirmación. Entonces, $x \in B \subseteq U_x$ y $B \in \mathcal{B}$, es decir, $\mathcal{B}$ es una base para $X$.
Veamos que $\mathcal{B}$ es una base regular. Dado $x \in X$ y cualquier vecindad $U$ de $x$, existe un número natural $i$ tal que $B_{1/i}(x) \subseteq U$. Sea $V_0 = B_{1/2i}(x)$, y para todo $j \in \{1, 2, ..., i\}$ sea $V_j$ una vecindad de $x$ que intersecta sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}_j$. Definamos $V = \bigcap_{j=0}^{i} V_j$ y verifiquemos que el conjunto de elementos en $\mathcal{B}$ que intersectan a $V$ y a $X \setminus U$ es finito. Pero el conjunto de elementos en $\bigcup_{n=1}^{i} \mathcal{B}_n$ que intersectan a $V$ y a $X \setminus U$ por construcción es finito, y si existiera $B \in \bigcup_{n=i+1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ tal que $B \cap V \neq \emptyset$ se tendría que $B \cap (X \setminus U) = \emptyset$ por lo siguiente; sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $B = B_{i+1} \in \mathcal{B}_{i+1}$, luego existe $y \in X$ tal que $B_{i+1} \subseteq B_{1/4(i+1)}(y)$, de donde podemos tomar un punto $a \in B_{1/4(i+1)}(y) \cap V_0$, notemos que si $w \in B_{1/4(i+1)}(y)$ un punto arbitrario

$$d(w,x) \leq d(w,a) + d(a,x) < \frac{1}{4(i+1)} + \frac{1}{2i} < \frac{1}{i}$$

por lo que $w \in B_{1/i}(x)$; así, $B_{i+1} \subseteq B_{1/4(i+1)}(y) \subseteq B_{1/i}(x) \subseteq U$, es decir, $B \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base regular.
Por último, del Lema 3.8 es posible encontar la base regular numerable deseada. †

El corolario anterior es con el siguiente fin.

**Corolario 3.10.** *Sea $X$ un espacio métrico con $\omega(X) = \aleph_0$ y $F : X \to Y$ una k-función multivaluada que es continua, sobreyectiva y abierta. Entonces $Y$ tiene una familia k-fina numerable.*

**Demostración.** La prueba es completamente análoga a la de la Proposición 3.7, basta tomar una base regular numerable, lo cual es posible ya que $\omega(X) = \aleph_0$ (Corolario 3.9). †

Antes de continuar, para la siguiente proposición es necesaria la siguiente propiedad que tiene la compactación de *Stone* − *Čech*, el resultado es igualmente válido para cualquier compactación Hausdorff.

**Lema 3.11.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $U$ es un conjunto abierto en $X$ y localmente compacto, entonces $U$ es un conjunto abierto en $\beta X$.*

**Demostración.** Tomamos $x \in U$, puesto que $U$ es localmente compacto, existe una vecindad de $x$ en $U$, $V_x^U$, tal que $c\ell_U V_x^U$ es un subespacio compacto y, así, cerrado en $\beta X$. Por lo tanto $c\ell_{\beta X}(c\ell_U V_x^U) = c\ell_U V_x^U$. Como $V_x^U \subseteq c\ell_U V_x^U$, entonces $c\ell_{\beta X} V_x^U \subseteq c\ell_{\beta X}(c\ell_U V_x^U) = c\ell_U V_x^U$, y como siempre es cierto que $c\ell_U V_x^U \subseteq c\ell_{\beta X} V_x^U$, obtenemos que:

$$c\ell_{\beta X} V_x^U = c\ell_U V_x^U.$$

Por otro lado, como $V_x^U$ es un conjunto abierto en $X$, existe un conjunto $U_{\beta X}$ abierto en $\beta X$ tal que $V_x^U = U_{\beta X} \cap X$; de la densidad de $X$ en $\beta X$ y de la Proposición 1.11, $c\ell_{\beta X} U_{\beta X} = c\ell_{\beta X}(U_{\beta X} \cap X) = c\ell_{\beta X} V_x^U$, de donde:

$$c\ell_{\beta X} V_x^U = c\ell_{\beta X} U_{\beta X}.$$

Finalmente lo que necesitamos probar es que $U_{\beta X} \subseteq X$. Pero, si existiera un punto $z \in U_{\beta X} \backslash X$, entonces $z \in c\ell_{\beta X} U_{\beta X} = c\ell_{\beta X} V_x^U$, y por otra parte $z \notin c\ell_U V_x^U = c\ell_{\beta X} V_x^U$, es decir, $z \in c\ell_{\beta X} V_x^U$ y $z \notin c\ell_{\beta X} V_x^U$. Por lo tanto, $U$ es un conjunto abierto en $\beta X$. †

La siguiente notación la utilizamos para simplificar lo expuesto en nuestra siguiente proposición.

**Notación 3.12.** *Por $\mathcal{MF}$, donde $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, denotaremos la colección de los elementos maximales en $\mathcal{F}$ respecto a la inclusión, es decir, aquellos elementos que no están contenidos en algún otro elemento de $\mathcal{F}$.*

**Proposición 3.13** (Proposición D, [4])**.** *Si $X$ es un espacio topológico que tiene una familia k-fina, entonces $X$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio con una familia k-fina $\mathcal{D}$. Por el Lema 3.6, podemos suponer que dicha familia contiene todas las intersecciones de subfamilias finitas de $\mathcal{D}$.
Definamos la siguiente subfamilia:

$$\mathcal{D}_{LC} = \{D \in \mathcal{D} : D \text{ es localmente compacto}\}$$

Ahora, usando recursión construyamos las familias $\{\mathcal{C}_k\}$ y $\{\mathcal{D}_k\}$ como sigue.
Para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{D},\ \mathcal{D}_k = \mathcal{MC}_k,\ \mathcal{C}_{k+1} = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i.$$

Para lo que sigue definamos la colección $\{\mathcal{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_k = \mathcal{D}_k \cup \mathcal{D}_{LC}$.
Probemos la siguiente afirmación:

($\star$) Para todo natural $k$, $\mathcal{U}_k$ es una cubierta abierta para $X$.

Para esto tomemos arbitrarios $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$; como la familia $\mathcal{D}$ es $k$-$fina$ podemos agenciarnos un compacto $H$ con la propiedad de que $\mathcal{D}$ es regular en $(x, H)$. Nuevamente por recursión construyamos una sucesión $\{D_n\}$ en $\mathcal{D}$ de la siguiente forma: como base tomemos un elemento fijo $D_1 \in \mathcal{D}$ que tenga a nuestro punto arbitrario $x$. Supongamos ahora ya construido $D_n$ para todo $n \leq k$, $x \in D_n$. Consideremos $U = \bigcap_{n=1}^{k} D_n$. Notemos que $x \in U$ y que por la definición de nuestra familia $\mathcal{D}$ también se tiene que $U \in \mathcal{D}$. Supongamos que hay una cantidad infinita de $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$ ya que de lo contrario, de la

construcción de $U$, $U \in \mathcal{C}_k$ y entonces podemos encontrar el elemento maximal $U_k^0$ en $\mathcal{C}_k$, y tendríamos que $x \in U_0^k \in \mathcal{MC}_k = \mathcal{D}_k$ lo cual probaría $(\star)$.
Continuando, tenemos dos casos posibles aquí:

(1) $U$ es localmente compacto, es decir, $U \in \mathcal{D}_{LC}$; pero entonces $x \in U \in \mathcal{D}_{LC}$, y así para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $U \in \mathcal{U}_k$ y por lo tanto $\mathcal{U}_k$ es cubierta de $X$, es decir, se tiene la afirmación $(\star)$.

(2) $U$ no es localmente compacto. Entonces $U \cap (X \setminus H) \neq \emptyset$, ya que si $U \cap (X \setminus H) = \emptyset$, $U \subseteq H$ y, por otro lado $U \cap H$ es un conjunto abierto en $H$, pero $H$ es localmente compacto entonces de la Proposición 1.15, tendríamos que $U$ es localmente compacto, lo cual es una contradicción. Así, podemos tomar un punto $z \in U \cap (X \setminus H)$, luego $V = X \setminus \{z\}$ es una vecindad de $H$; ahora, si para todo $D \in \mathcal{D}$, tal que $x \in D$, se tiene que $U \cap (X \setminus D) = \emptyset$, tenemos que $U \subseteq D$ y entonces $D \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, lo cual no es posible dado que $\mathcal{D}$ es regular en $(x, H)$. Entonces existe $D \in \mathcal{D}$, tal que $x \in D$ y $U \cap (X \setminus D) \neq \emptyset$. Sea $D_{k+1} = D$.

Si en algún momento de la construcción de nuestra sucesión sucede (1), entonces tenemos probada la afirmación $(\star)$ y no hay que hacer más. De lo contrario:
El caso (2).
Sea $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} D_i$, notemos que $\{U_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}$ que es estrictamente decreciente. Verifiquemos que cada $U_k \in \mathcal{C}_k$.
Hagamos una prueba por inducción. Para $k = 1$ tenemos que $U_1 \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_1$; supongamos que $U_k \in \mathcal{C}_k$ y probemos que $U_{k+1} \in \mathcal{C}_{k+1}$. De nuestra hipótesis de inducción $U_k \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{D}_i$, consecuentemente todo $m \in \{1, 2, ..., k-1\}$ cumple que: $U_k \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{D}_i$, y como también $U_{k+1} \subsetneq U_k$, entonces $U_{k+1} \notin \mathcal{M}(\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{D}_i) = \mathcal{MC}_{m+1} = \mathcal{D}_{m+1}$; por tanto $U_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$, luego $U_{k+1} \in \mathcal{C}_{k+1}$.
Ahora como $x \in U_k$, y también como vimos en (2), $U_k \cap (X \setminus H) \neq \emptyset$, entonces podemos encontrar un punto $z \in U_k$ y $z \in (X \setminus H)$. Luego

$V = X \setminus \{z\}$ es una vecindad de $H$ y $U_k \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, entonces por la regularidad en $(x, H)$, $U_k$ está contenido en a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D}$. Por lo tanto podemos encontrar $M \in \mathcal{MC}_k$ tal que $x \in M \in \mathcal{MC}_k = \mathcal{D}_k \subseteq \mathcal{U}_k$. Con lo que tenemos finalmente probada nuestra afirmación $(\star)$.
Veamos la siguiente propiedad

$(*)$ Si $i \neq j$, entonces $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{D}_{LC}$

Sea $D \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, entonces ($D \in \mathcal{D}_i$ o $D \in \mathcal{D}_{LC}$) y ($D \in \mathcal{D}_j$ o $D \in \mathcal{D}_{LC}$). Veamos que pasa si $D \in \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, luego $i \leq j - 1$; ahora, como $D \in \mathcal{D}_j$, $D \in \mathcal{MC}_j$, y debido a que:

$$\mathcal{MC}_j = \mathcal{M}(\mathcal{D} \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{D}_k) = \mathcal{M}(\mathcal{D} \setminus ((\bigcup_{k \in \{1,..,j-1\} \setminus \{i\}} \mathcal{D}_k) \cup \mathcal{D}_i))$$

tenemos que $D \notin \mathcal{MC}_i$, que es lo mismo que, $D \notin \mathcal{D}_i$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $D \in \mathcal{D}_{LC}$ y se tiene probado $(*)$.
Sea $\beta X$ la compactación de *Stone* $-$ *Čech* de $X$. Para cada $U_\alpha^k \in \mathcal{U}_k$, sea $\widetilde{U}_\alpha^k$ un conjunto abierto en $\beta X$ para el cual $U_\alpha^k = \widetilde{U}_\alpha^k \cap X$ y con estos últimos conjuntos abiertos formamos la familia $\widetilde{\mathcal{U}}_k = \{\widetilde{U}_\alpha^k : U_\alpha^k \in \mathcal{U}_k\}$. Si $U_\alpha^k \in \mathcal{D}_{LC}$, es decir, $U_\alpha^k$ el localmente compacto, entonces del Lema 3.11, $U_\alpha^k = \widetilde{U}_\alpha^k$. Por último probemos que la familia $\mathcal{P} = \{\widetilde{\mathcal{U}}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un plumaje de $X$ en $\beta X$.
De $(\star)$ es claro que $\mathcal{P}$ es una familia de cubiertas de $X$ con conjuntos abiertos en $\beta X$, entonces sólo restaría ver que todo $x \in X$ cumple que $\bigcap_{k=1}^\infty St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_k) \subseteq X$.
Para esto supongamos que es falso, es decir, que podemos encontrar un punto $x_0 \in X$ para el cual $\bigcap_{k=1}^\infty St(x_0, \widetilde{\mathcal{U}}_k) \nsubseteq X$, entonces para tal $x_0$, podemos encontrar un compacto $F$ de modo que $\mathcal{D}$ es regular en $(x_0, F)$. Como $\bigcap_{k=1}^\infty St(x_0, \widetilde{\mathcal{U}}_k) \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$, existe una familia $\mathcal{V} = \{\widetilde{U}_{\alpha_k}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{U}_{\alpha_k}^k \in \widetilde{\mathcal{U}}_k$ y $x_0 \in \widetilde{U}_{\alpha_k}^k$ y satisfacen que $\bigcap_{k=1}^\infty \widetilde{U}_{\alpha_k}^k \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$. Consideremos la familia $\mathcal{V}' = \{U_{\alpha_k}^k\}$,

donde, $U^k_{\alpha_k} = \widetilde{U}^k_{\alpha_k} \cap X$. Si $\widetilde{U}^k_{\alpha_k} = U^k_{\alpha_k}$, entonces $U^k_{\alpha_k} \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$ lo cual no es posible; por ello, para todo $k$, $\widetilde{U}^k_{\alpha_k} \neq U^k_{\alpha_k}$, es decir, ningún $U^k_{\alpha_k}$ es localmente compacto y usando la propiedad $(*)$ se tiene que todos los elementos de la familia $\mathcal{V}'$ son diferentes. Tomemos $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} St(x_0, \widetilde{\mathcal{U}}_k) \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$, como para todo $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{U}^k_{\alpha_k} \subseteq c\ell_{\beta X} \widetilde{U}^k_{\alpha_k}$ y de la Proposición 1.11, $c\ell_{\beta X} \widetilde{U}^k_{\alpha_k} = c\ell_{\beta X}(\widetilde{U}^k_{\alpha_k} \cap X) = c\ell_{\beta X} U^k_{\alpha_k}$, entonces $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} c\ell_{\beta X} U^k_{\alpha_k}$. Pero $y \notin F$ y dado que $F$ es compacto, de las Proposiciones 1.25 y 1.7, podemos encontrar un conjunto abierto en $\beta X$, digamos $\widetilde{U}$, tal que $F \subseteq \widetilde{U} \subseteq c\ell_{\beta X} \widetilde{U} \subset \beta X \setminus \{y\}$, luego sea $U = \widetilde{U} \cap X$ que es abierto en $X$ y satisface claramente que $F \subseteq U \subseteq c\ell_{\beta X} U \subset c\ell_{\beta X} \widetilde{U} \subseteq \beta X \setminus \{y\}$. Para cada $U^k_{\alpha_k}$ tenemos que $U^k_{\alpha_k} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ ya que de lo contrario $c\ell_{\beta X} U^k_{\alpha_k} \subseteq c\ell_{\beta X} U \subseteq \beta X \setminus \{y\}$, es decir, $y \notin c\ell_{\beta X} U^k_{\alpha_k}$ lo cual no es posible. Resumiendo, $U$ es una vencindad abierta de $F$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, $U^k_{\alpha_k}$ intersecta a $X \setminus U$ lo que contradice la regularidad de $\mathcal{D}$ en la pareja $(x, F)$. Por tanto todo $x \in X$ satisface que $\bigcap_{k=1}^{\infty} St(x, \widetilde{\mathcal{U}}_k) \subseteq X$ y así, $X$ es emplumado. †

Antes del siguiente resultado son necesarios algunos conceptos y resultados. Convengamos lo siguiente.

**Notación 3.14.** *$A < \mathcal{U}$, donde $A$ es un conjunto y $\mathcal{U}$ una cubierta , significa que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq U$.*

**Notación 3.15.** *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de un espacio $X$, dado $x \in X$:*

*a)* $St^2(x, \mathcal{U}) = St(x, \{St(y, \mathcal{U})\}_{y \in X})$.

*b)* $St^3(x, \mathcal{U}) = St(x, \{St^2(y, \mathcal{U})\}_{y \in X})$.

Usaremos el siguiente criterio de metrización (ver [2]).

**Teorema 3.16.** *Un espacio topológico $T_1$ es metrizable si y sólo si existe una familia $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de $X$ tal que para todo $x \in X$ la familia $\{St^2(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma una base local para $x$.*

Por otro lado, necesitamos de los siguientes resultados (ver la página 41, la Definición 13 y la Proposición 18 del capítulo 1, en [5]).

**Definición 3.17.** *Sea $E$ una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$. Diremos que un conjunto $A \subseteq X$ es distinguido si existe $X_0/E \subseteq X/E$ tal que $A = \bigcup X_0/E$.*

**Definición 3.18.** *Una partición $X/E$ de un espacio topológico $X$ es semicontinua si para cada $[x] \in X/E$ y cualquier abierto $U$ en $X$ tal que $[x] \subseteq U$, existe una vecindad distinguida $V$ tal que $[x] \subseteq V \subseteq U$.*

**Teorema 3.19.** *La función natural cociente $q : X \to X/E$, donde $E$ es una relación de equivalencia en el espacio $X$, es cerrada si y sólo si $X/E$ es semicontinua.*

Y para terminar una última notación.

**Notación 3.20.** *Sea $E$ una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$. Dado $V \subset X$ denotamos:*

*·) $AV = \bigcup\{[a] \in X/E : [a] \cap V \neq \emptyset\}$.*

*··) $(V) = \{[a] \in X/E : [a] \subseteq V\}$.*

Ahora podemos continuar.

**Proposición 3.21** (Proposición E, [4])**.** *Sea $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, un plumaje de $X$ en alguna compactación Hausdorff $cX$ de $X$, y que satisface la siguiente condición:*
*para todo $x \in X$ y $n_2 < n_1$*

$$c\ell_{cX} St(x, \mathcal{U}_{n_1}) < \mathcal{U}_{n_2} \tag{3.1}$$

*Entonces existe una función perfecta $f : X \to Y$ y sobreyectiva, donde $Y$ es un espacio métrico, en otras palabras, $X$ puede ser perfectamente mapeado sobre un espacio métrico.*

**Demostración.** Para cada $x \in X$, sea $A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n)$, dado que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $X$ en $cX$, se obtiene que $A_x \subseteq X$ para cada $x \in X$. Definamos la siguiente relación en $X$:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } y \in A_x.$$

Veamos que "$\sim$" es una relación de equivalencia. Para esto, antes veamos que:

$(*)$ Dado $w \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $St^2(w,\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq St(w,\mathcal{U}_n)$.

Si se toma un punto arbitrario $a \in St^2(w,\mathcal{U}_{n+1})$, entonces existe $y' \in X$ tal que $a \in St(y',\mathcal{U}_{n+1})$ y $w \in St(y',\mathcal{U}_{n+1})$; de la condición 3.1, $St(y',\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq U_n$ para algún $U_n \in \mathcal{U}_n$, entonces $a \in U_n$ y $w \in U_n$, luego $w \in St(w,\mathcal{U}_n)$ y se tiene probado la afirmación $(*)$.

1. Si $x \sim y$ entonces $y \in A_x$, luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que: $y \in St(x,\mathcal{U}_n)$, es decir, existe $U_{\alpha_n} \in \mathcal{U}_n$ tal que $y \in U_{\alpha_n}$ y $x \in U_{\alpha_n}$, entonces $x \in St(y,\mathcal{U}_n)$; y así $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(y,\mathcal{U}_n)$, es decir, $y \sim x$. Por tanto "$\sim$" es simétrica.

2. Tomemos $x \in X$; puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de $X$, se sigue que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n)$, es decir, $x \sim x$. Por tanto "$\sim$" es reflexiva.

3. Supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$, probemos que $x \sim z$. Tenemos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(y,\mathcal{U}_n)$ y $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(y,\mathcal{U}_n)$, así que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que: $z \in St(y,\mathcal{U}_{n+1})$ y $x \in St(y,\mathcal{U}_{n+1})$, y usando la propiedad $(*)$ se obtiene que, $z \in St^2(x,\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq St(x,\mathcal{U}_n)$; entonces $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n)$, es decir, $x \sim z$. Por lo tanto "$\sim$" es transitiva.

De (1), (2) y (3) obtenemos que "$\sim$" es una relación de equivalencia, es decir, $X = \bigcup_{x \in X} A_x$, y para todo $x, y \in X$ ya sea que $A_x = A_y$ o $A_x \cap A_y = \emptyset$.
Veamos las propiedades que obtenemos:

a) Para todo punto $x \in X$ el conjunto $A_x$ es compacto. En efecto, de la condición 3.1, dado $x \in X$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, se tiene que: $c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U_{n-1}$ para algún $U_{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}$, así obtenemos que, $c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq St(x,\mathcal{U}_{n-1})$; por tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq \bigcap_{n=2}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n)$$

de donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq A_x$, y como también, es claro que $A_x \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n)$, entonces se tiene la igualdad de conjuntos y con esto $A_x$ es un conjunto cerrado en $cX$ y por lo tanto compacto.

b) Para todo conjunto $U$ abierto en $cX$ tal que $A_x \subseteq U$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U$. Supongamos que hay un abierto $U$ en $cX$ tal que $A_x \subseteq U$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $St(x,\mathcal{U}_n) \setminus U \neq \emptyset$.
Por otro lado, como se vió en $(a)$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) \cap (cX \setminus U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \cap (cX \setminus U) = \emptyset.$$

Sea $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $F_n = c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \cap (cX \setminus U)$, una familia de cerrados en $cX$. Tomemos un conjunto finito $S \subseteq \mathbb{N}$ y denotemos $k = máx\, S$. De nuestra hipótesis es posible tomar $x_k \in c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_k) \setminus U$ y de la condición 3.1, para todo $j < k$, $c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_k) \subseteq c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_j)$, y de aquí que $x_k \in F_s$ para cada $s \in S$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, y puesto que $cX$ es compacto, se sigue que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x,\mathcal{U}_n) \cap (cX \setminus U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c\ell_{cX} St(x,\mathcal{U}_n) \cap (cX \setminus U) \neq \emptyset.$$

lo cual no es posible. Por tanto se tiene probado $(b)$.

c) $X/\sim$ es semicontinua. Para esto, primero probemos que dado $n \in \mathbb{N}$, $ASt(x,\mathcal{U}_n) \subseteq St^2(x,\mathcal{U}_n)$. En efecto, si $w \in ASt(x,\mathcal{U}_n)$ es un punto arbitrario, entonces podemos encontrar $A_y \in X/\sim$ con $z \in A_y \cap St(x,\mathcal{U}_n) \neq \emptyset$ y tal que $w \in A_y$, así que $w \in A_y = A_z$ y $z \in St(x,\mathcal{U}_n)$, luego $w \in St(z,\mathcal{U}_n)$ y $x \in St(z,\mathcal{U}_n)$, por lo tanto $w \in St^2(x,\mathcal{U}_n)$.
Continuando, sea $U$ una vecindad de $A_x$ en $X$, necesitamos encontrar una vecindad distinguida $V$ tal que $A_x \subseteq V \subseteq U$. Denotemos por $U'$ al abierto en $cX$ tal que $U' \cap X = U$; usando

(b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U'$, luego de la afirmación $(*)$, $St^2(x,\mathcal{U}_{n_0+1}) \subseteq St(x,\mathcal{U}_{n_0})$. Eligiendo $V = ASt(x,\mathcal{U}_{n_0+1})$, obtenemos que $A_x \subseteq V \subseteq St^2(x,\mathcal{U}_{n_0+1}) \subseteq St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U'$; pero entonces $A_x \subseteq V \subseteq U' \cap X = U$ y se tiene probado $(c)$.

d) $X/\sim$ es metrizable. Para cada número natural $n$, definamos $\mathcal{V}_n = \{(St(x,\mathcal{U}_n)) : x \in X\}$. $a_x$ denota el elemento $A_x$ visto como un punto en el espacio cociente.
Tomemos un punto arbitrario $a_x \in X/\sim$ y sea $U_{a_x}$ una vecindad de $a_x$ en $X/\sim$. De la definición de la topología en $X/\sim$, $\bigcup U_{a_x}$ es un abierto en $X$, por ello $U = (V_{A_x})$, donde $V_{A_x}$ es una vecindad distinguida de $A_x$, más precisamente, $V_{A_x} = \bigcup\{A_x : A_x \in U_{a_x}\}$. Del inciso $(b)$, existe $n_0$ tal que $St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq V_{A_x}$.
Ahora, observemos que si se toma un punto $w \in St^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2})$, $w \in St^2(x',\mathcal{U}_{n_0+2})$ tal que $x \in St^2(x',\mathcal{U}_{n_0+2})$; usando $(*)$ y la condición 3.1, $St^2(x',\mathcal{U}_{n_0+2}) \subseteq St(x',\mathcal{U}_{n_0+1}) \subseteq U_{n_0}$ para algún $U_{n_0} \in \mathcal{U}_{n_0}$; entonces $w, x \in U_{n_0}$, es decir, $w \in St(x,\mathcal{U}_{n_0})$. Por lo tanto $St^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2}) \subseteq St(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq V_{A_x}$.
Afirmamos que $St^2(a_x,\mathcal{V}_{n_0+2}) \subseteq (ASt^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2}))$. Notemos que $(ASt^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2})) = \bigcup\{A_x : A_x \cap St^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2}) \neq \emptyset\}$. Sea $A_w \in St^2(a_x,\mathcal{V}_{n_0+2})$, luego existe $A_{x'} \in X/\sim$ con $A_w \in St(A_{x'},\mathcal{V}_{n_0+2})$ y $A_x \in St(A_{x'},\mathcal{V}_{n_0+2})$, luego existen $y, y' \in X$ tales que $A_w \subseteq St(y,\mathcal{U}_{n_0+2})$ con $A_{x'} \subseteq St(y,\mathcal{U}_{n_0+2})$ y $A_x \subseteq St(y',\mathcal{U}_{n_0+2})$ con $A_{x'} \subseteq St(y',\mathcal{U}_{n_0+2})$. Si tomamos un punto $a \in A_w$, se tiene lo siguiente: $a \in St(y,\mathcal{U}_{n_0+2})$ y $x' \in St(y,\mathcal{U}_{n_0+2})$; $x \in St(y',\mathcal{U}_{n_0+2})$ y $x' \in St(y',\mathcal{U}_{n_0+2})$, luego $a \in St^2(x',\mathcal{U}_{n_0+2})$ y $x \in St^2(x',\mathcal{U}_{n_0+2})$, es decir, $a \in St^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2})$ y así $A_w \cap St^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2}) \neq \emptyset$ y por lo tanto $A_w \in (ASt^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2}))$.
De lo anterior:

$$St^2(a_x,\mathcal{V}_{n_0+2}) \subseteq (ASt^3(x,\mathcal{U}_{n_0+2})) \subseteq (AV_{A_x}) = (V_{A_x}) = U_{a_x}.$$

Esto prueba que la familia $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma una base local para $a_x$. De $(a)$, $X/\sim \in \mathcal{T}_1$ y así del Teorema 3.16, $X/\sim$ es metrizable.

La función natural cociente $q : X \to X/\sim$ es continua por definición, es cerrada debido al inciso $(c)$ y el Teorema 3.19. Del inciso $(a)$, para todo $a_x \in X/\sim$, $q^{-1}(a_x) = A_x$ es compacto. Por lo tanto $q$ es la función deseada. †

**Proposición 3.22** (Proposición F, [4]). *Sea $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de cubiertas abiertas de $X$, donde $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$, las cuales cumplen que $c\ell_X(St(U_\alpha^{i+1},\mathcal{U}_{i+1})) < \mathcal{U}_i$ para todo número natural $i$ y todo $U_\alpha^{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$. Consideremos la compactación de Wallman $\omega X$ de $X$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ sean también los siguientes conjuntos y familias respectivamente:*

$$\widetilde{U}_\alpha^n = \omega X \setminus c\ell_{\omega X}(X \setminus U_\alpha^n),\ \widetilde{\mathcal{U}}_n = \{\widetilde{U}_\alpha^n : \alpha \in M_n\}.$$

*A la familia $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{\mathcal{U}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le llamaremos la extensión de $\mathcal{P}$ a $\omega X$. Entonces para todo $\alpha$ y $n$, $U_\alpha^n \subseteq \widetilde{U}_\alpha^n$, es decir, cada $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ es una cubierta de $X$ por conjuntos abiertos en $\omega X$, y cumplen la siguiente condición: para todo $\alpha \in M_{n_1}$ y todo $n_2 < n_1$*

$$c\ell_{\omega X}(St(\widetilde{U}_{\alpha_{n_1}},\widetilde{\mathcal{U}}_{n_1})) < \widetilde{\mathcal{U}}_{n_2} \tag{3.2}$$

**Demostración.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha \in M_n$, probemos que:

1. Todo $U_\alpha^n \subseteq \widetilde{U}_\alpha^n$. Supongamos que existe un punto $z \in U_\alpha^n$, y $z \notin \widetilde{U}_\alpha^n$, es decir, $z \in c\ell_{\omega X}(X \setminus U_\alpha^n)$. Por otro lado podemos encontrar un abierto $W$ en $\omega X$ tal que $W \cap X = U_\alpha^n$ y notar que $z \in W$, por ello que $W \cap (X \setminus U_\alpha^n) \neq \emptyset$, luego $(W \cap X) \setminus U_\alpha^n \neq \emptyset$, y así $U_\alpha^n \setminus U_\alpha^n \neq \emptyset$ y esto no es posible, por tanto $U_\alpha^n \subseteq \widetilde{U}_\alpha^n$.

2. $\widetilde{U}_\alpha^n \subseteq c\ell_{\omega X} U_\alpha^n$. Sea $x \in \omega X$ arbitrario de forma que $x \notin c\ell_{\omega X} U_\alpha^n$. Debido a que $X$ es denso en $\omega X$ podemos decir que $x \in c\ell_{\omega X} X = c\ell_{\omega X}((X \setminus U_\alpha^n) \cup U_\alpha^n) = c\ell_{\omega X}(X \setminus U_\alpha^n) \cup c\ell_{\omega X} U_\alpha^n$. Entonces $x \in c\ell_{\omega X}(X \setminus U_\alpha^n)$, luego $x \notin \omega X \setminus c\ell_{\omega X}(X \setminus U_\alpha^n) = \widetilde{U}_\alpha^n$.

3. Si $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$. En efecto; dado $w \in \widetilde{U} \cap \widetilde{V}$, se tiene que $w \notin c\ell_{\omega X}(X \setminus U)$ y $w \notin c\ell_{\omega X}(X \setminus V)$, luego existen

abiertos $G$ y $H$ en $\omega X$ de forma que $w \in G \cap H$ con $G \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y $H \cap (X \setminus V) = \emptyset$, así $G \cap H \subseteq (\omega X \setminus (X \setminus U)) \cap (\omega X \setminus (X \setminus V))$. Por la densidad de $X$ en $\omega X$, existe $t \in X \cap (G \cap H)$, pero entonces $t \notin (X \setminus U)$ y $t \notin (X \setminus V)$ y así, obtenemos que $t \in U$ y $t \in V$ que es lo mismo que decir $U \cap V \neq \emptyset$.

4. $St(\widetilde{U}^n_\alpha, \widetilde{\mathcal{U}}_n) \subseteq c\ell_{\omega X} St(U^n_\alpha, \mathcal{U}_n)$. Sea $z \in St(\widetilde{U}^n_\alpha, \widetilde{\mathcal{U}}_n)$, luego algún $\alpha' \in M_\alpha$ satisface que $z \in \widetilde{U}^n_{\alpha'}$ con $\widetilde{U}^n_{\alpha'} \cap \widetilde{U}^n_\alpha \neq \emptyset$. Entonces, por la parte (3), $z \in \widetilde{U}^n_{\alpha'}$ tal que $U^n_{\alpha'} \cap U^n_\alpha \neq \emptyset$. Ahora, por la parte (2), $z \in c\ell_{\omega X} U^n_{\alpha'}$, es decir, cualquier abierto $G$ en $\omega X$ y que tenga a $z$ cumple que $G \cap U^n_{\alpha'} \neq \emptyset$, y por otra parte teníamos que $U^n_{\alpha'} \cap U^n_\alpha \neq \emptyset$, entonces $G \cap St(U^n_\alpha, \mathcal{U}_n) \neq \emptyset$ y como esto es para todo abierto $G$, se tiene que $z \in c\ell_{\omega X} St(U^n_\alpha, \mathcal{U}_n)$.

Para terminar nuestra prueba, veamos que se satisface la condición (3.2) de nuestra proposición. Demos $n_2 < n_1$; por hipótesis tenemos que $c\ell_X(St(U^{n_1}_\alpha, \mathcal{U}_{n_1})) < \mathcal{U}_{n_2}$. Denotaremos $S = c\ell_X St(U^{n_1}_\alpha, \mathcal{U}_{n_1})$. Entonces existe $U^{n_2}_{\alpha'} \in \mathcal{U}_{n_2}$ tal que $S \subseteq U^{n_2}_{\alpha'}$, que es equivalente a que $S \cap (X \setminus U^{n_2}_{\alpha'}) = \emptyset$. De la Proposición 1.53, tenemos que $c\ell_{\omega X} S \cap c\ell_{\omega X}(X \setminus U^{n_2}_{\alpha'}) = \emptyset$, pero entonces también $c\ell_{\omega X} St(U^{n_1}_\alpha, \mathcal{U}_{n_1}) \cap c\ell_{\omega X}(X \setminus U^{n_2}_{\alpha'}) = \emptyset$, luego por la parte (4) también $c\ell_{\omega X} St(\widetilde{U}^n_\alpha, \widetilde{\mathcal{U}}_n) \cap c\ell_{\omega X}(X \setminus U^{n_2}_{\alpha'}) = \emptyset$, es decir que $c\ell_{\omega X} St(\widetilde{U}^n_\alpha, \widetilde{\mathcal{U}}_n) \subseteq \widetilde{U}^{n_2}_{\alpha'}$ y se tiene lo deseado. †

**Proposición 3.23** (Proposición G, [4]). *Sea $X$ un espacio topológico que tiene una familia de cubiertas abiertas $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{U}_n = \{U^n_\alpha : \alpha \in M_n\}$, y que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Todo $x \in X$ tiene un compacto $H$, con $x \in H$, y de tal forma que la familia $\{St(H, \mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma una base de $H$ en $X$.*

2. *Si $j < i$, $\mathcal{U}_i$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_j$.*

*Entonces $X$ tiene un plumaje en $\omega X$ que cumple la condición 3.1 de la Proposición 3.21.*

**Demostración.** Primero probemos la siguiente afirmación:

$\star$) Si $G < \mathcal{U}_{i+2}$, entonces $c\ell_X St(G,\mathcal{U}_{i+2}) < \mathcal{U}_i$

En efecto, dado $x$ un punto arbitrario con $x \in c\ell_X St(G,\mathcal{U}_{i+2})$, como $\mathcal{U}_{i+1}$ es una cubierta de $X$, existe $U^{i+1}_{\alpha_x} \in \mathcal{U}_{i+1}$ tal que $x \in U^{i+1}_{\alpha_x}$. Entonces $U^{i+1}_{\alpha_x} \cap St(G,\mathcal{U}_{i+2}) \neq \emptyset$; ahora como $G < \mathcal{U}_{i+2}$, se puede encontrar $U^{i+2}_{\alpha_G} \in \mathcal{U}_{i+2}$ de forma que $G \subseteq U^{i+2}_{\alpha_G}$; se tiene entonces que $U^{i+1}_{\alpha_x} \cap St(U^{i+2}_{\alpha_G},\mathcal{U}_{i+2}) \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{U}_{i+2}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_{i+1}$, tomamos $U^{i+1}_{\alpha} \in \mathcal{U}_{i+1}$ que satisface que $St(U^{i+2}_{\alpha_G},\mathcal{U}_{i+2}) \subseteq U^{i+1}_{\alpha}$, luego $U^{i+1}_{\alpha_x} \cap U^{i+1}_{\alpha} \neq \emptyset$ y $x \in U^{i+1}_{\alpha_x}$, que es lo mismo que decir, $x \in St(U^{i+1}_{\alpha},\mathcal{U}_{i+1})$; y ahora nuevamente como $\mathcal{U}_{i+1}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_i$, tomamos ahora $U^i_\alpha \in \mathcal{U}_i$ de manera que $St(U^{i+1}_{\alpha},\mathcal{U}_{i+1}) \subseteq U^i_\alpha$, así $x \in U^i_\alpha$. Como $x$ fue tomado arbitrariamente, $c\ell_X St(G,\mathcal{U}_{i+2}) \subseteq U^i_\alpha$; ahora notemos que la elección de $U^i_\alpha$ no depende de nuestro punto $x$; por lo tanto, podemos decir que $c\ell_X St(G,\mathcal{U}_{i+2}) < \mathcal{U}_i$ y se tiene ($\star$).

Consideremos la familia $\mathcal{P}' = \{\mathcal{U}_m : \text{ m es par}\}$, $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ y así es claro que $\mathcal{P}'$ satisface la afirmación ($\star$). Veamos ahora que también $\mathcal{P}'$ satisface la condición (1); en efecto, dado $x \in X$ la misma condición (1) nos proporciona un compacto $H$ de forma que $\{St(H,\mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $H$ en $X$, entonces para toda vecindad $U$ tal que $H \subseteq U$ es posible encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ el cual cumple que $H \subseteq St(H,\mathcal{U}_{n_1}) \subseteq U$. Fijemos un entero $m$ que sea par y que $m > n_1$, luego por (2) $\mathcal{U}_m$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_{n_1}$. Entonces $H \subseteq St(H,\mathcal{U}_m) \subseteq St(H,\mathcal{U}_{n_1}) \subseteq U$, pero así $\{St(H,\mathcal{U}_m) : \text{ m es par}\}$ forma una base de $H$ en $X$. Entonces $\mathcal{P}'$ cunple (1).

Afirmamos ahora que $\mathcal{P}'$ satisface la condición 3.2 de la Proposición 3.22. Efectivamente; si $U^{m+1}_\alpha \in \mathcal{U}_{m+1} \in \mathcal{P}'$ es inmediato que $U^{m+1}_\alpha < \mathcal{U}_{m+1}$ y por (3), $c\ell_X St(U^{m+1}_\alpha,\mathcal{U}_{m+1}) < \mathcal{U}_m$ que es lo que pide la condición 3.2. Entonces, por la Proposición 3.22, $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\widetilde{\mathcal{U}}_n\}$ es la extensión de $\mathcal{P}'$ a $\omega X$, luego entonces para todo $\alpha \in M_{n_1}$ y $n_1 > n_2$ tenemos que $c\ell_{\omega X} St(\widetilde{U}^{n_1}_\alpha,\widetilde{\mathcal{U}}_{n_1}) < \widetilde{\mathcal{U}}_{n_2}$. Si $x \in X$ y $n_1 > n_2$, $c\ell_{\omega X} St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_{n_1}) \subseteq c\ell_{\omega X} St(\widetilde{U}^{n_1}_\alpha,\widetilde{\mathcal{U}}_{n_1}) < \widetilde{\mathcal{U}}_{n_2}$ y así $\mathcal{P}'$ también cumple la condición 3.1 de la Proposición 3.21.

Por último probemos que $\widetilde{\mathcal{P}}$ es un plumaje de $X$ en $\omega X$. Sea $x \in X$, por (1) existe un compacto $F$ tal que $x \in F \subseteq X$. Por otro lado consideremos un punto arbitrario $y \in \omega X \setminus X$, dado que $y \notin F = c\ell_X F$, de la Proposición 1.25 y de la Proposición 1.54, podemos encontrar un cerrado $P$ en $X$ de forma que $y \in c\ell_{\omega X} P$ y $P \cap F = \emptyset$. Ahora $F \subseteq X \setminus P$, por la regularidad de $X$, todo $x \in F$ tiene un abierto $V_x$ con $x \in V_x \subseteq c\ell_X V_x \subseteq X \setminus P$. Con lo anterior podemos formar una cubierta abierta para $X$ la cual es tal que $F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x \subseteq X \setminus P$ y por la compacidad de $F$, se sigue que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} c\ell_X V_{x_i} \subseteq X \setminus P$. Demos $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, luego $c\ell_X U = \bigcup_{i=1}^{n} c\ell_X V_{x_i}$; por lo tanto $U$ es una vecindad de $F$ con la característica que $c\ell_X \cup P = \emptyset$, y de la Proposición 1.53, se sigue que, $c\ell_{\omega X} U \cap c\ell_{\omega X} P = \emptyset$ y de aquí que $y \notin c\ell_{\omega X} U$. Pero $U$ es una vecindad de $F$, por la condición (1) existe $n' \in \mathbb{N}$ de forma que $St(F,\mathcal{U}_{n'}) \subseteq U$. De la parte (2) de la Proposición 3.22, $\widetilde{U}_\alpha^{n'} \subseteq c\ell_{\omega X} U_\alpha^{n'}$, luego si $U_\alpha^{n'} \subseteq U$, entonces $\widetilde{U}_\alpha^{n'} \subseteq c\ell_{\omega X} U$. Si tomamos un punto $z \in St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_{n'})$, entonces $z \in \widetilde{U}_{\alpha_x}^{n'}$; pero notemos que al tomar un punto $w \in U_{\alpha_x}^{n'}$, se tiene que $w \in St(x,\mathcal{U}_{n'}) \subseteq St(F,\mathcal{U}_{n'},) \subseteq U$, es decir, $U_{\alpha_x}^{n'} \subseteq U$, luego $\widetilde{U}_{\alpha_x}^{n'} \subseteq c\ell_{\omega X} U$; entonces $z \in c\ell_{\omega X} U$. Por otra parte $St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_n) \subseteq c\ell_{\omega X} U \subseteq \omega X \setminus \{y\}$ y como $y$ fue arbitrario, $\bigcup_{n=1}^{\infty} St(x,\widetilde{\mathcal{U}}_n) \subseteq X$. Por lo tanto $\widetilde{\mathcal{P}}$ es un plumaje de $X$ en $\omega X$, es decir, $X$ es emplumado. †

**Proposición 3.24** (Proposición H, [4])**.** *Sean $X$ un espacio paracompacto, $cX$ una compactación Hausdorff de $X$, y dado $X \subseteq Y \subseteq cX$, donde $Y$ es un espacio emplumado con un plumaje en $cX$, digamos, $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha^n : \alpha \in M_n\}$. Entonces existe un espacio $X'$ tal que $X \subseteq X' \subseteq Y \subseteq cX$ con un plumaje en $cX$, $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y que satisface la condición 3.1 de la Proposición 3.21.*

**Demostración.** Para todo conjunto $M \subseteq X$, sea $\widetilde{M} = cX \setminus c\ell_{cX}(X \setminus M)$. Entonces:

1. Si $M_1 \subseteq M_2$, entonces $\widetilde{M}_1 \subseteq \widetilde{M}_2$. En efecto; se tiene que $M_1 \subseteq M_2$, de aquí que $c\ell_{cX}(X \setminus M_2) \subseteq c\ell_{cX}(X \setminus M_1)$, luego $cX \setminus c\ell_{cX}(X \setminus M_1) \subseteq c\ell_{cX}(X \setminus M_2)$, es decir, $\widetilde{M}_1 \subseteq \widetilde{M}_2$ que es lo deseado.

2. Todo $M \subseteq X$ cumple que: $\widetilde{M}$ es abierto en $cX$ y $\widetilde{M} \cap X \subseteq M$. Esto se sigue del hecho que $cX \setminus c\ell_{cX}(X \setminus M) \subseteq cX \setminus (X \setminus M)$, luego $\widetilde{M} \cap X \subseteq (cX \setminus (X \setminus M)) \cap X \subseteq M$.

3. $\widetilde{M} \subseteq c\ell_{cX} M$. Si tomamos un arbitrario $x \notin c\ell_{cX} M$, dado que $x \in c\ell_{cX} X = c\ell_{cX}((X \setminus M) \cup M) = c\ell_{cX}(X \setminus M) \cup c\ell_{cX} M$, entonces $x \in c\ell_{cX}(X \setminus M)$, luego $x \notin \widetilde{M}$. Por lo tanto se tiene lo deseado.

4. $\widetilde{M} \cap \widetilde{N} = \emptyset$ si $M \cap N = \emptyset$. Efectivamente; si $M \cap N = \emptyset$, entonces $M \subseteq X \setminus N$, usando la parte (1) $\widetilde{M} \subseteq \widetilde{X \setminus N}$, es decir, $\widetilde{M} \subseteq cX \setminus c\ell_{cX} N$ y ahora por el paso (3) $\widetilde{M} \subseteq cX \setminus \widetilde{N}$, que es lo mismo que decir $\widetilde{M} \cap \widetilde{N} = \emptyset$.

Construyamos por recursión una sucesión de cubiertas en $X$, digamos $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_n, ...$ por conjuntos abiertos en $cX$. Sea $\mathcal{V}_0$, cualquier cubierta de $X$ por abiertos en $cX$. Supongamos ya construida la sucesión hasta el elemento $\mathcal{V}_k$ con $k > 0$.
Denotemos $\mathcal{U}_k|_X = \{U_k \cap X : U_k \in \mathcal{U}_k\}$, es claro que $\mathcal{U}_k|_X$ es una cubierta abierta de $X$, luego, puesto que $X$ es paracompacto, $\mathcal{U}_k|_X$ tiene un refinamiento $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ que satisface $(iii)$ del Teorema 1.74. Para todo $A_s \in \mathcal{A}$, $c\ell_X A_s \subseteq U_k$, para algún $U_k \in \mathcal{U}_k$; veamos que $c\ell_{cX} A_s \subseteq U_k$, ya que de lo contrario podemos tomar un punto $z \in c\ell_{cX} A_s$ y $z \notin U$, luego $z \notin c\ell_X A_s$, es decir, existe un abierto $W$ en $X$ tal que $W \cap A = \emptyset$; si $W'$ es un abierto en $cX$ tal que $W' \cap X = W$, entonces $(W' \cap X) \cap A = \emptyset$, lo cual diría que $W' \cap A = \emptyset$ que no es posible ya que $z \in c\ell_{cX} A_s$. Para la cubierta $\mathcal{V}_k$ podemos hacer lo mismo que hicimos con la cubierta $\mathcal{U}_k$ para obtener una cubierta abierta $\mathcal{B}$ de $X$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}$, $c\ell_{cX} B \subseteq V_k$ para algún $V_k \in \mathcal{V}_k$. Sea $\mathcal{W}_k = \{A \cap B : A \in \mathcal{A} \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$; $\mathcal{W}_k$ es una familia de abiertos en $X$ que cubre a $X$ y es tal que para todo $W_k \in \mathcal{W}_k$, $c\ell_{cX} W_k < \mathcal{U}_k$ y $c\ell_{cX} W_k < \mathcal{V}_k$.
Ahora, nuevamente del Teorema 1.74, $\mathcal{W}_{k+1} = \{V_\alpha^{k+1} : \alpha \in L_{k+1}\}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{W}_k$, es decir, para todo $\alpha \in L_{k+1}$ se cumple

que $St(V_\alpha^{k+1}, \mathcal{W}_{k+1}) < \mathcal{W}_k$ . Sea $\mathcal{V}_{k+1} = \widetilde{\mathcal{W}}_{k+1} = \{\widetilde{V}_\alpha^{k+1} : \alpha \in L_{k+1}\}$, y tenemos así bien definida nuestra sucesión.

Probemos que la familia $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición 3.1. Demos algún $\widetilde{V}_\alpha^{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$; por hipótesis existe $G \in \mathcal{W}_n$ tal que $St(V_\alpha^{n+1}, \mathcal{W}_{n+1}) \subseteq G$, o equivalentemente, todo $V_{\alpha'}^{n+1} \in \mathcal{W}_{n+1}$ tal que $V_{\alpha'}^{n+1} \cap V_\alpha^{n+1} \neq \emptyset$ cumple que $V_{\alpha'}^{n+1} \subseteq G$. Dado $\widetilde{V}_{\alpha''}^{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ con $\widetilde{V}_{\alpha''}^{n+1} \cap \widetilde{V}_\alpha^{n+1} \neq \emptyset$, por (4) $V_{\alpha''}^{n+1} \cap V_\alpha^{n+1} \neq \emptyset$. Entonces $V_{\alpha''}^{n+1} \subseteq G$ y por (1), $\widetilde{V}_{\alpha''}^{n+1} \subseteq \widetilde{G}$. Por tanto $St(\widetilde{V}_\alpha^{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}) \subseteq \widetilde{G}$, y así $c\ell_{cX} St(\widetilde{V}_\alpha^{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}) \subseteq c\ell_{cX}\widetilde{G}$. Usando la parte (3) y la definición de $\mathcal{W}_n$, llegamos a que $c\ell_{cX} St(\widetilde{V}_\alpha^{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}) < \mathcal{V}_n$.

Esta condición es más fuerte que 3.1, pero de ahí se tiene la afirmación requerida.

Definamos $X' = \bigcup_{x\in X}(\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n))$ y veamos que $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X'$ en $cX$.

Por construcción, los $\mathcal{V}_n$ son cubiertas de $X$ y por conjuntos abiertos en $cX$. Ahora demos cualquier $x' \in X'$, por definición, es posible encontrar $x \in X$ de forma que $x' \in \bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n)$. Observemos lo siguiente: para cualquier $n$ natural, si $w \in St(x', \mathcal{V}_{n+1})$, entonces $w \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}$ con $x' \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}$. Así $w \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}$ tal que $x' \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1} \cap St(x, \mathcal{V}_{n+1})$, luego $w \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}$ tal que $x' \in \widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}$ y existe $\widetilde{V}^{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ de forma que $x' \in \widetilde{V}^{n+1}$ con $x \in \widetilde{V}^{n+1}$, y usando 3.1, $x \in \widetilde{V}^{n+1} \subseteq St(\widetilde{V}_{\alpha'}^{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}) \subseteq \widetilde{V}^n$ para algún $\widetilde{V}^n \in \mathcal{V}_n$, entonces $w \in \widetilde{V}^n$ y también $x \in \widetilde{V}^n$, es decir, $w \in St(x, \mathcal{V}_n)$. Como $n$ y $w$ fueron arbitrarios concluimos que $St(x', \mathcal{V}_{n+1}) \subseteq St(x, \mathcal{V}_n)$; de aquí y de la definición de $X'$ tenemos lo siguiente:

$$\bigcap_{n=1}^\infty St(x', \mathcal{V}_n) \subseteq \bigcap_{n=2}^\infty St(x', \mathcal{V}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq X'$$

por lo tanto $\mathcal{P}'$ es un plumaje de $X'$ en $cX$ y como ya vimos cumple la condición 3.1.

Para terminar: de la construcción de la familia $\mathcal{P}'$ y de la afirmación (3) se sigue que para todo $n$ natural, $\mathcal{V}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$, por ello y por el hecho de que $\mathcal{P}$ es un plumaje de $Y$ en $cX$ tenemos que, si $x \in X$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{V}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq Y$$

lo cual implica que $X' \subseteq Y$, y también es claro que $X \subseteq X'$ y la prueba está completa. †

**Observación 3.25.** *En la Proposición 3.24 si tomamos $cY$, una compactación Hausdorff de $Y$, y lo sustituimos en vez de $cX$, la prueba no cambia y es igualmente válida.*

Bueno, hasta aquí tenemos ocho proposiciones y todas ellas encaminadas a probar los resultados que se exponen en las siguientes secciones.

## 3.2. Aplicación y consecuencias

Aquí presentamos las consecuencias de las proposiciones probadas en la sección anterior.
Si $f : X \to Y$ es una función perfecta una pregunta interesante es, ¿bajo qué condiciones en $X$ resulta ser $Y$ un espacio métrico? En 1960, Z. Frolík prueba que una condición necesaria y suficiente para que un espacio $\check{C}ech - completo$ $X$ se pueda mapear perfectamente sobre un espacio métrico es que $X$ sea *paracompacto*; como bien sabemos (Teorema 2.8) si $X$ es $\check{C}ech - completo$ entonces $X$ es un espacio emplumado, así que es natural preguntarse si el resultado probado por Frolík será válido para espacios emplumados, la respuesta a esto es el siguiente teorema.

**Teorema 3.26** (Teorema 5.1, [4])**.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces existe un espacio métrico $Y$ y una función perfecta y sobreyectiva $f : X \to Y$ si y sólo si $X$ es paracompacto y emplumado.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Sea $f : X \to Y$ perfecta y sobreyectiva, donde $Y$ es métrico. Por lo expuesto en la Proposición 3.1, existe una k-función multivaluada $F : X \to Y$ que es continua, abierta y cerrada.

Ahora, aplicando la Proposición 3.2, se sigue inmediatamente que $X$ es paracompacto. Usando ahora la Proposición 3.7 tenemos que $X$ tiene una familia k-fina y así, por la Proposición 3.13, también tenemos que $X$ es un espacio emplumado. Por lo tanto tenemos que $X$ es un espacio paracompacto y emplumado.
$\Leftarrow$] Supongamos que $X$ es un espacio paracompacto y emplumado, como $X \subseteq X \subseteq cX$, donde $cX$ es una compactación Hausdorff, por la Proposición 3.24, existe un espacio $X'$ tal que $X \subseteq X' \subseteq X \subseteq cX$ con un plumaje en $cX$ y que satisface la condición 3.1 de la Proposición 3.21. Entonces $X$ satisface la condición 3.1 y es emplumado, luego por la Proposición 3.21 encontramos una función perfecta $f : X \to Y$ donde $Y$ es métrico. †

**Observación 3.27.** *Otra prueba para la necesidad del Teorema 3.26 es la siguiente: demos $f : X \to Y$ perfecta y sobreyectiva con $Y$ un espacio métrico. Por la Proposición 2.14, $Y$ es un espacio emplumado, ahora recordemos que del Teorema 2.29 se sigue que $X$ es emplumado, mientras que del Teorema 1.75, también tenemos que $X$ es paracompacto.*

**Teorema 3.28** (Teorema 5.1', [4])**.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces existe un espacio métrico $Y$ y una función perfecta y sobreyectiva $f : X \to Y$ si y sólo si existe una familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de $X$ que satisfacen:*

1. *Todo $x \in X$, tiene un compacto $H$ con $x \in H$ y la familia $\mathcal{B} = \{St(H,\mathcal{U}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma una base de $H$ en $X$.*
2. *Todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i > j$ cumple que $\mathcal{U}_i$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_j$.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Sea $f : X \to Y$ una función perfecta y sobreyectiva donde $Y$ es un espacio métrico. Definamos la familia $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{U}_n = \{B_{1/4^n}(y) : y \in Y\}$. Es claro que $\mathcal{P}$ es una familia de cubiertas abiertas de $Y$ y ahora veamos que satisface la condición

(2).

Es suficiente ver que para todo natural $n$, $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_n$. Tomemos cualquier $U_{n+1} = B_{1/4^{n+1}}(y) \in \mathcal{U}_{n+1}$ con $y \in Y$, demostremos entonces que $St(U_{n+1},\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq B_{1/4^n}(y)$ ya que $B_{1/4^n}(y) \in \mathcal{U}_n$. Para esto consideremos $x$ un punto arbitrario con $x \in St(U_{n+1},\mathcal{U}_{n+1})$, luego existe $U'_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ de forma que $x \in U'_{n+1}$ y $U'_{n+1} \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, entonces $d(x,y) \leq d(x,w) + d(w,y)$, donde $w \in U'_{n+1} \cap U_{n+1}$; pero $d(x,w) < 2/4^{n+1}$ y $d(w,y) < 1/4^{n+1}$, de aquí que $d(x,y) < 2/4^{n+1} + 1/4^{n+1} = 3/4^{n+1} < 4/4^{n+1} = 1/4^n$, es decir, $x \in U_{n+1}$ y por lo tanto $St(U_{n+1},\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq B_{1/4^n}(y)$, que es lo deseado.
Sea $\mathcal{P}' = \{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U_n) : U_n \in \mathcal{U}_n\}$. Es claro que cada $\mathcal{V}_n$ es una cubierta abierta de $X$ y ahora veamos que también cumple (1) y (2)

1. Demos $x \in X$, $y = f(x)$ y $H = f^{-1}(\{f(x)\})$, entonces $x \in H$ y $H$ es compacto. Sea $U$ una vecindad arbitraria de $H$ en $X$. Como $f$ es cerrada, $U_y = Y \setminus f(X \setminus U)$ es una vecindad de $y$ tal que $f^{-1}(U_y) \subseteq U$. Ahora $k = d(y, Y \setminus U_y)$, luego $n_0$ es tal que $1/2^{n_0} < k$.

   (·) $St(y,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U_y$. Sea $w \in St(y,\mathcal{U}_{n_0})$, luego $w \in U_{n_0}$ tal que $y \in U_{n_0}$ con $U_{n_0} \in \mathcal{U}_{n_0}$, pero $d(w,y) < 1/4^{n_0}$ y si $w \in Y \setminus U_y$, tendríamos que $d(w,y) \geq 1/4^{n_0}$ que no es posible, por tanto $w \in U_y$.

   (··) $St(H,\mathcal{V}_{n_0}) \subseteq f^{-1}(St(y,\mathcal{U}_{n_0}))$. Si $w \in St(H,\mathcal{V}_{n_0})$, entonces es posible encontrar $V^{n_o} \in \mathcal{V}_{n_0}$ de forma que $w \in V^{n_o}$ con $V^{n_o} \cap H \neq \emptyset$, entonces $f(w) \in U^{n_o}$ y $y \in U^{n_o}$, es decir, $w \in f^{-1}(St(y,\mathcal{U}_{n_0}))$.

   Ahora de (··) y de (·) se obtiene que

   $$St(H,\mathcal{V}_{n_0}) \subseteq f^{-1}(St(y,\mathcal{U}_{n_0})) \subseteq f^{-1}(U_y) \subseteq U$$

   que es lo que necesitabamos.

2. Es suficiente ver que para todo natural $n$, $\mathcal{V}_{n+1}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{V}_n$. Demos $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$. De manera análoga a la parte $(\cdot\cdot)$, $St(V_{n+1}, \mathcal{V}_{n_0}) \subseteq f^{-1}(St(U_{n+1}, \mathcal{U}_{n_0}))$, pero la familia $\mathcal{P}$ cumple (2), luego es posible encontrar $U_n \in \mathcal{U}_n$ de manera que $St(U_{n+1}, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq U_n$; así $f^{-1}(St(U_{n+1}, \mathcal{U}_{n_0})) \subseteq f^{-1}(U_n) \in \mathcal{V}_n$, es decir, se cumple (2).

De la parte (1) y de (2), $\mathcal{P}'$ es la familia deseada.
$\Leftarrow$] Para esta parte, usando la Proposición 3.23, $X$ tiene un plumaje en $\omega X$ y satisface la condición 3.1, luego por la Proposición 3.21, se tiene lo deseado. †

**Teorema 3.29** (Teorema 5.3, [4])**.** *Sea $X$ un espacio paracompacto. Entonces existen un espacio métrico $Y$ y una función perfecta y sobreyectiva $f : X \to Y$ si y sólo si $X$ tiene una familia k-fina.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Primero usamos la Proposición 3.1 y luego, de la Proposición 3.7, se tiene lo deseado.
$\Leftarrow$] Suponemos que $X$ tiene una familia k-fina; de la Proposición 3.13, $X$ es emplumado. Ahora de la Proposición 3.24, $X$ es emplumado y satisface la condición 3.1, finalmente por la Proposición 3.21 se tiene lo requerido. †

Recordemos que el producto de dos espacios paracompactos no necesariamente es un espacio paracompacto (Ejemplo 5.1.31 en [7]), pero si ahora pedimos que nuestros espacios sean no sólo paracompactos sino también espacios emplumados, se tiene un resultado muy interesante.

**Teorema 3.30** (Teorema 5.4, [4])**.** *Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de espacios paracompactos y emplumados, entonces $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es un espacio paracompacto y emplumado.*

**Demostración.** Denotemos para cada número natural $i$, $M_i$ el respectivo espacio métrico garantizado por el Teorema 3.26. Entonces, del Teorema 1.19, $f : X \to \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ es una función perfecta y como es bien sabido $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ es metrizable, luego nuevamente por el Teorema 3.26, $X$ es paracompacto y emplumado. †

**Teorema 3.31** (Teorema 5.5, [4]). *Si $f : X \to Y$ es una función perfecta y sobreyectiva donde $Y$ es un espacio paracompacto y emplumado, entonces $X$ es un espacio paracompacto y emplumado.*

**Demostración.** Por el supuesto que $Y$ es un espacio paracompacto y emplumado, del Teorema 3.26, podemos encontrar una función perfecta $f$ y un espacio métrico $Z$, tal que $g : Y \to Z$. Entonces, del Corolario 1.18, $g \circ f : X \to Z$ es una función perfecta y $Z$ es métrico, otra vez por el Teorema 3.26, $X$ es un espacio paracompacto y emplumado. †

**Teorema 3.32** (Teorema 5.6, [4]). *Dada $f : X \to Y$ una k-función que es abierta, continua y donde $X$ es un espacio métrico. Entonces $Y$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Es inmediato usando la Proposición 3.7 y luego la Proposición 3.13. †

**Teorema 3.33** (Teorema 5.7, [4]). *$X$ es un espacio paracompacto y emplumado si y sólo si existe un espacio métrico $Y$ y una k-función $f : Y \to X$ sobreyectiva que es continua, abierta y cerrada.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Dado que $X$ es un espacio paracompacto y emplumado, por el Teorema 3.26, existe una función perfecta $g : X \to Y$, donde $Y$ es un espacio métrico, luego aplicando la Proposición 3.1, existe una función $f$ y un espacio $Y$ con las condiciones requeridas para la necesidad del teorema.
$\Leftarrow$] Usando la hipótesis y la Proposición 3.2, se sigue que $X$ es paracompacto; luego, de la Proposición 3.7, $X$ tiene una familia k-fina y, finalmente de la Proposición 3.13, también obtenemos que $X$ es emplumado. Por tanto $X$ es un espacio paracompacto y emplumado. †

**Teorema 3.34** (Teorema 5.8, [4]). *Sea $X$ paracompacto y $Y$ un espacio emplumado con $X \subseteq Y$. Entonces existe un espacio $X'$ paracompacto y emplumado tal que $X \subseteq X' \subseteq Y$.*

**Demostración.** Consideremos $cY$ una compactación Hausdorff de $Y$, entonces $X \subseteq Y \subseteq cY$ y de la Observación 3.25, existe un espacio $X'$ con un plumaje en $cY$ tal que $X \subseteq X' \subseteq Y$ y que satisface la condición 3.1. Ahora, de la Proposición 3.21 y del Teorema 3.26 se sigue que $X$ es también un espacio paracompacto. †

## 3.3. El caso numerable

Despues de lo visto en la sección anterior, la pregunta ahora es: ¿qué espacios se pueden llevar, mediante una función perfecta, a un espacio con base numerable? El siguiente teorema nos da la respuesta. Antes enunciamos algunas propiedades útiles para la prueba (ver Teorema 4.2.9, Corolario 4.1.16 y el Teorema 5.1.2 en [7]).

**Teorema 3.35.** *Un espacio segundo numerable es metrizable si y sólo si es un espacio regular.*

**Teorema 3.36.** *Para todo espacio metrizable $X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i) El espacio $X$ es segundo numerable.*

*ii) El espacio $X$ es Lindelöf.*

**Teorema 3.37.** *Si $X$ es un espacio Lindelöf, entonces $X$ es paracompacto.*

**Teorema 3.38** (Teorema 6.1, [4])**.** *Sea $X$ un espacio topológico. Existe una función perfecta $f : X \to Y$, con $\omega(Y) = \aleph_0$ si y sólo si $X$ es emplumado y Lindelöf.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Dado que $Y$ es regular y $\omega(Y) = \aleph_0$ por el Teorema 3.35, $Y$ es metrizable, luego por el Teorema 3.26 se sigue que $X$ es un espacio emplumado. Por otra parte como $Y$ es metrizable y $\omega(Y) = \aleph_0$, del Teorema 3.36, $Y$ es Lindelöf, luego puesto que $f$ es perfecta, del Teorema 1.20, $X$ es Lindelöf. Por lo tanto $X$ es un espacio emplumado y Lindelöf.

$\Leftarrow$] Puesto que $X$ es Lindelöf, del Teorema 3.37, $X$ es un espacio paracompacto y por hipótesis también un espacio emplumado, luego por el Teorema 3.26 existe $f : X \to Y$ perfecta, donde $Y$ es un espacio métrico. Pero también del Teorema 1.20, $Y$ es Lindelöf y así nuevamente del Teorema 3.36, se sigue que $\omega(Y) = \aleph_0$. †

El Teorema 3.38 da respuesta a nuestra pregunta planteada al principio de la sección, pero para nuestro trabajo sería de utilidad tener un resultado que sólo dependa de plumajes. Para esta cuestión tenemos el siguiente teorema pero, para su demostración, primero es necesario el siguiente resultado.

**Lema 3.39** (Lema 6.3, [4])**.** *Todo espacio $X$ paracompacto que tiene una familia numerable $\mathcal{D}$ k-fina, tiene la propiedad de Lindelöf.*

**Demostración.** Puesto que $X$ es paracompacto, es suficiente ver que toda cubierta $\mathcal{U}$ localmente finita de $X$ es numerable. Por $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ denotamos la subcolección de elementos de $\mathcal{D}$ que intersectan a lo más una cantidad finita de elementos en $\mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{D}$ es numerable y $\mathcal{D}_\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$, se sigue que $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ es numerable. Notemos que si $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ es una cubierta de $X$, entonces $\mathcal{U}$ es numerable; probemos que $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ es una cubierta de $X$.

Consideremos un punto $x \in X$, $H$ es un compacto tal que $\mathcal{D}$ es regular en $(x, H)$. Ahora, puesto que $\mathcal{U}$ es localmente finita, para todo $y \in H$ se tiene una vecindad $U_y$ que intersecta a sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$; de esta manera podemos formar una cubierta abierta para $H$, $H \subseteq \bigcup_{y \in H} U_y$, luego, es posible extraer una subcubierta finita, $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Definamos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. $U$ es una vecindad de $H$ y por su construcción intersecta en a lo más una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Por la regularidad de $\mathcal{D}$ en $(x, H)$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D \subseteq U$ y entonces también $D$ intersecta a lo más una cantidad finita de elementos en $\mathcal{U}$, es decir, $D \in \mathcal{D}_\mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $X$ y se tiene la prueba. †

Ahora sí:

**Teorema 3.40** (Teorema 6.2, [4]). *Sea $X$ paracompacto. Existe una función perfecta $f : X \to Y$, donde $\omega(Y) = \aleph_0$ si y sólo si $X$ tiene una familia k-fina numerable.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Si $f : X \to Y$ satisface las hipótesis del teorema, entonces también se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.1 y, usando el Corolario 3.10, se sigue que $X$ tiene una familia k-fina.
$\Leftarrow$] Puesto que $X$ es paracompacto y tiene una familia k-fina y numerable, por el Lema 3.39, $X$ es Lindelöf; pero también, por la Proposición 3.13, $X$ es emplumado. Entonces del Teorema 3.38 se tiene lo deseado. †

## 3.4. Otros resultados

En esta sección concluimos con el análisis que comenzamos en la sección 2.3 acerca de la preservación de la propiedad de ser emplumado bajo funciones continuas.
Primero vamos a dar un ejemplo de que la imagen de un espacio emplumado bajo una función abierta no necesariamente es un espacio emplumado, es decir, necesitamos encontrar espacios $X$, $Y$ y una función abierta $f : X \to Y$ tales que $X$ sea un espacio emplumado y $Y$ no lo sea. Para esto usaremos el siguiente teorema probado por V. I. Ponomarev en 1960 (Ejercicio 4.2.D.(a) en [7]).

**Teorema 3.41.** *Sea $X \in \mathcal{T}_1$, $X$ es primero numerable si y sólo si $X$ es la imagen continua de un espacio métrico bajo una función abierta.*

Ahora, vemos el ejemplo anunciado.

**Ejemplo 3.42.** *Primero probaremos que la línea de Sorgenfrey, denotada usualmente por la letra $K$, no es un espacio emplumado.*

- $(\cdot)$ *$K$ es un espacio primero numerable, normal, no es metrizable y es de Lindelöf ( Proposición 2.1, Proposición 2.4, Corolario 2.8 y Proposición 2.9 en [1]). Del Teorema 3.37 (todo espacio de*

*Lindelöf es paracompacto) obtenemos que $K$ es un espacio paracompacto.*

*$(\cdot\cdot)$ $K$ no es un espacio emplumado. Supongamos lo contrario, entonces de $(\cdot)$, $K$ es un espacio paracompacto y emplumado, luego, del Teorema 3.33, es posible encontrar un espacio métrico $X'$ y una función $f : X' \to K$ sobreyectiva, continua y cerrada asi que, del Teorema 2.33 concluimos que $K$ es un espacio métrico lo cual no es cierto. Por lo tanto $K$ no es un espacio emplumado.*

*Del Teorema 3.41, existe un espacio métrico $X$ y una función continua y abierta $f : X \to K$. Notemos que $X$ es un espacio emplumado y de $(\cdot\cdot)$ $K$ no es un espacio emplumado.*

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias para que la imagen de un espacio emplumado sea también un espacio emplumado.

**Teorema 3.43.** *Si $f : X \to Y$ es una k-función que es continua, abierta y sobreyectiva, y $X$ es un espacio paracompacto y emplumado, entonces $Y$ es un espacio emplumado.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio paracompacto y emplumado. En vista del Teorema 3.33, existe un espacio métrico $Z$ y una k-función $g : Z \to X$ que es continua, abierta, cerrada y sobreyectiva. Si $f : X \to Y$ es una función que satisface las hipótesis del teorema, consideremos $h = f \circ g$, $h : Z \to Y$. De la definición de las funciónes $f$ y $g$, $h$ es una k-función que es continua, abierta y sobreyectiva, así, de la Proposición 3.7, se sigue que $Y$ tiene una familia k-fina, luego, por la Proposición 3.13, $Y$ resulta ser un espacio emplumado. †

Para el siguiente teorema necesitamos de los siguientes resultados.

**Lema 3.44.** *Si $f : X \to Y$ es una función continua, abierta y sobreyectiva, donde $X$ es un k-espacio, entonces $Y$ es un k-espacio.*

**Demostración.** Puesto que $X$ es un k-espacio, existe un espacio localmente compacto $L$ y una función cociente $q : L \to X$. Entonces, dado que $f$ es una función abierta y continua se sigue que $q \circ f$ es una función cociente, así, $Y$ es un k-espacio. †

**Lema 3.45.** *Si $F : X \to Y$ una k-función multivaluada, donde $X$ y $Y$ son k-espacios, entonces $F$ es una función continua y cerrada.*

**Demostración.** Teorema 2.1 en [3]. †

**Teorema 3.46** (Teorema S.2, [4])**.** *Si $f : X \to Y$ es una k-función continua, abierta y sobreyectiva tal que $X$ es un espacio paracompacto y emplumado, entonces $Y$ es un espacio paracompacto y emplumado.*

**Demostración.** Del Teorema 3.43, tenemos que $Y$ es un espacio emplumado.
Como $X$ es un espacio emplumado, se sigue que $X$ es un k-espacio (Corolario 2.25). Puesto que $f$ es una función abierta y continua, del Lema 3.44, se sigue que $Y$ es un k-espacio; del Lema 3.45, $f$ es una función cerrada. Entonces $f$ es una función cerrada y $X$ es paracompacto, así, del Teorema 1.76, $Y$ es paracompacto. †

Para nuestro último teorema necesitamos del siguiente lema (ver Teorema 2.3.13 en [7]).

**Lema 3.47.** *Si $\{X_s\}_{s\in S}$ es una familia de espacios topológicos tales que para todo $s \in S$, $\omega(X_s) \leq \tau$ y $|S| \leq \tau$, entonces $\omega(\prod_{s\in S} X_s) \leq \tau$.*

**Teorema 3.48.** *Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de espacios Lindelöf y emplumados, entonces $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es un espacio Lindelöf y emplumado.*

**Demostración.** Como $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios *Lindelöf* y emplumados, del Teorema 3.38, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un espacio $Y_i$, con $\omega(Y_i) = \aleph_0$, y una función perfecta $f_i : X_i \to Y_i$. Entonces del Teorema 1.19, la función natural $f : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ es perfecta, y del Lema 3.47, $\omega(\prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i) = \aleph_0$, así, del Teorema 3.38, $X$ es un espacio *Lindelöf* y emplumado. †

# Bibliografía

[1] Angoa Amador J; Ibarra Contreras M; López Toriz M. Martínez García A., *La Línea de Alexandroff-Sorgenfrey*, Topología y Sistemas Dinámicos III, Textos Científicos, Buap (2010).

[2] Arhangel'skiĭ A. V., *New Criteria for Paracompactness and Metrizability of an Arbitrary $T_1$-Space*, Soviet Math. Dokl. 2, 1367-1369, (1961).

[3] Arhangel'skiĭ A. V., *Bicompact Sets and Topology of Spaces*, Trans. Mosc. Math. Soc. 13, 1-62, (1965).

[4] Arhangel'skiĭ A. V., *On a Class of Spaces Containing All Metric Spaces and All Locally Compact Spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) vol 92, 1-39, (1970).

[5] Arhangel'skiĭ A. V., Pontryagin L. S., *General Topology I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990).

[6] Arhangel'skiĭ A. V., *General Topology II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1996).

[7] Engelking R.,*General Topology*, Heldermann Verlag Berlin (1989).

[8] Osmatesku P. K., *$\omega\alpha$-Compactifications*, Vestnik Moskov. Uni. Ser. I. Math. Meh. (1963), no. 6, 45-54.

[9] Ponomarev V. I., *Properties of Topological Spaces Preserved under Multivalued Continuous Mappings*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 38, 119-140, (1965).

[10] Porter J., Grant W., *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag New York Inc.(1988).

[11] Willard S.,*General Topology*, Dover Publications, Inc. (2004).