Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

La propiedad del punto fijo en los hiperespacios de continuos

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

JESÚS DÁVILA SÁNCHEZ

DIRECTORES DE TESIS

Dr. David Herrera Carrasco

Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 4 de mayo, 2023.

Agradecimientos

En memoria de mi gato Gauss

Agradezco el apoyo de mis padres y profesores por haber llegado hasta aquí. A la vida por todos los retos y obstáculos que ha puesto en mi camino. A mis profesores y asesores de tesis. A la Dra. Patricia Domínguez Soto, el Dr. Raúl Escobedo Conde y el M.C. Felipe Aguilar Romero por ser mi jurado y ayudarme haciendo las observaciones y correcciones correspondientes.

```
No es que tengamos poco tiempo, es que perdemos mucho.
```

Introducción

La teoría de los continuos y los hiperespacios es un área fascinante de la topología que ha atraído la atención de muchos matemáticos en las últimas décadas. Los continuos son objetos matemáticos que se utilizan para modelar una variedad de situaciones, como espacios físicos, gráficas y redes, mientras que los hiperespacios son conjuntos de subconjuntos de continuos que se estudian por sí mismos.

En el primer capítulo de esta tesis, se revisarán los conceptos básicos de continuos y los métodos para construirlos, como límites inversos, intersecciones anidadas y descomposiciones. También se discutirá la teoría de hiperespacios de continuos, enfocándose en los hiperespacios 2^X y $C(X)$.

En el segundo capítulo, se profundizará en la teoría de continuos, presentando los continuos de Peano, los tipo arco, tipo círculo, gráficas, dendroides, dendritas y continuos irreducibles. Estos objetos tienen propiedades interesantes y se han utilizado en una variedad de aplicaciones, como la teoría de grafos y la teoría de redes.

En el tercer capítulo, se revisará la teoría de hiperespacios para continuos de Peano, así como la contractibilidad de hiperespacios y la existencia de arcos en hiperespacios. Estos conceptos son importantes para entender cómo se comportan los hiperespacios en relación con los continuos que los componen.

En el cuarto capítulo, se examinará la propiedad del punto fijo en varios continuos y en sus hiperespacios. La propiedad del punto fijo es un concepto fundamental en la teoría de funciones y su estudio en los hiperespacios de continuos puede proporcionar información valiosa sobre la estructura y la topología de estos objetos matemáticos. Además, se revisarán algunos problemas abiertos relacionados con la propiedad del punto fijo en hiperespacios de continuos.

En general, la propiedad del punto fijo se refiere a la existencia de un punto en un espacio donde una función tiene el mismo valor que el punto mismo. En otras palabras, si f es una función continua de un espacio X en sí mismo, entonces existe un punto x en X tal que $f(x) = x$. Este punto se llama punto fijo de la función f.

La propiedad del punto fijo es importante porque es una herramienta útil para demostrar la existencia de soluciones a ciertos problemas matemáticos, como las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales. Además, la propiedad del punto fijo tiene aplicaciones en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo la geometría, la teoría de grafos y la teoría de juegos.

En el contexto de los hiperespacios de continuos, la propiedad del punto fijo puede proporcionar información valiosa sobre la estructura y la topología de estos objetos matemáticos. Por ejemplo, si un hiperespacio de continuos cumple la propiedad del punto fijo, entonces es posible que tenga una estructura topológica "simple" o "regular". Por otro lado, si un hiperespacio de continuos no cumple la propiedad del punto fijo, entonces puede tener una estructura topológica más "complicada" o "caótica".

En resumen, la propiedad del punto fijo es un concepto fundamental en la teoría de funciones y su estudio en los hiperespacios de continuos puede proporcionar información valiosa sobre la estructura y la topología de estos objetos matemáticos.

Índice general

Introducción I

1. Teoría básica de continuos 1

1.1. Preliminares . . . 2

1.1.1. Retractos y extensores . . . 5

1.1.2. Cadenas y espacios encadenables . . . 6

1.1.3. Metrizabilidad . . . 9

1.1.4. Componentes . . . 10

1.1.5. Homotopías y contractibilidad . . . 11

1.2. Teoría de continuos . . . 12

1.2.1. Definiciones y ejemplos . . . 12

1.2.2. Indescomponibilidad y Z-conjuntos . . . 17

1.3. Métodos de construcción . . . 17

1.3.1. Intersecciones anidadas . . . 17

1.3.2. Límites inversos . . . 22

1.3.3. Descomposiciones de continuos . . . 30

1.3.4. Contractibilidad . . . 39

1.4. Continuos tipo $\mathcal{P}$ . . . 39

1.5. Una introducción a los hiperespacios . . . 39

1.5.1. Metrizabilidad de hiperespacios . . . 48

1.5.2. Convergencia en hiperespacios . . . 50

1.5.3. Funciones de Whitney . . . 52

1.5.4. Continuos irreducibles . . . 53

1.5.5. La mayoría de continuos son indescomponibles . . . 53
1.6. Teoremas de delimitado de frontera . . . 55
1.6.1. Arcos ordenados . . . 59
1.6.2. Separabilidad . . . 60
1.7. Puntos de no corte . . . 61

2. Algunos continuos especiales **63**
2.1. Continuos de Peano . . . 63
2.2. Gráficas . . . 68
2.2.1. Árboles . . . 73
2.3. Dendroides y dendritas . . . 73
2.3.1. Dendritas . . . 74
2.3.2. Dendroides . . . 80
2.3.3. λ-dendroides . . . 81
2.3.4. Dendroides suaves . . . 81
2.4. Continuos irreducibles . . . 82
2.4.1. Tríodos . . . 84
2.5. Continuos tipo arco . . . 84
2.5.1. Funciones universales . . . 86
2.5.2. Continuos encadenables . . . 86
2.5.3. Continuos tipo círculo . . . 87

3. Más sobre hiperespacios **89**
3.1. Ejemplos . . . 89
3.2. Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ para continuos de Peano X . . . 91
3.3. Contractibilidad de hiperespacios . . . 91

4. La propiedad del punto fijo en los continuos y en sus hiperespacios **93**
4.1. Resultados básicos . . . 94
4.2. Continuos con la PPF . . . 95
4.2.1. El teorema del punto fijo de Brower . . . 99
4.2.2. El teorema de Lokuciewski . . . 101

4.2.3. Continuos tipo arco 102
4.2.4. Gráficas 102
4.2.5. Dendroides 102
4.3. Hiperespacios con la PPF 102
4.3.1. Continuos de Peano 102
4.3.2. Continuos tipo arco 103
4.3.3. Continuos tipo círculo 103
4.3.4. Conos y suspensiones 103
4.3.5. Un teorema general 104
4.3.6. Dendroides 104
4.3.7. Continuos hereditariamente indescomponibles 105
4.4. Problemas abiertos 105

Referencias **106**

Índice alfabético **108**

Capítulo 1

Teoría básica de continuos

En este capítulo, abordamos un tema fundamental en el estudio de la topología: los continuos. Los continuos, entendidos como espacios topológicos conexos y compactos, desempeñan un papel central en la comprensión de las propiedades geométricas y topológicas de los espacios. Estos objetos matemáticos han encontrado numerosas aplicaciones en diversas ramas de la matemática, como la geometría, el análisis funcional y la teoría de la medida, así como en la física y otras ciencias.

Comenzaremos el capítulo introduciendo el material necesario en los preliminares 1.1. En la sección siguiente 1.2 procederemos a introducir las definiciones básicas con las que trabajaremos en la tesis y explorar ejemplos clásicos y fundamentales de continuos, tales como arcos, n-celdas, n-esferas, el cubo de Hilbert, entre otros. Estos ejemplos ilustrarán las propiedades generales de los continuos y proporcionarán una base sólida para el estudio de sus propiedades y aplicaciones más avanzadas. También se introducirán los conceptos de retracción y retractos absolutos que se estudiarán con mayor profundidad en el capítulo 3 sobre la contractibilidad de los hiperespacios.

En la sección 1.3 analizaremos distintos métodos para construir nuevos continuos a partir de otros, como las intersecciones anidadas, los límites inversos y las descomposiciones. Analizaremos las implicaciones de estas propiedades para la estructura topológica de los espacios y cómo influyen en el comportamiento de las funciones que actúan sobre ellos.

Este capítulo pretende proporcionar una introducción rigurosa y completa al estudio de los continuos, pero también de los hiperespacios, como se verá en la sección 1.5, necesarias para abordar temas más avanzados y específicos en la propiedad del punto fijo.

1.1 Preliminares

Axioma 1.1. ***Axioma de Elección.*** *Para cualquier colección de conjuntos no vacíos* $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i\in I}$*, existe una función de elección* $f : \mathcal{C} \to \bigcup \mathcal{C}$ *tal que para cada* $A_i \in \mathcal{C}$ $f(A_i) \in A_i$*.*

Notación 1.1. Si X es un espacio topológico y $H \subset X$, denotaremos la frontera de H en X por $\mathbf{Bd_X(H)}$ o simplemente $\mathbf{Bd(H)}$. En otras ocasiones se denotará simplemente $\partial\mathbf{H}$.

Definición 1.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sean* $A, B \subset X$*. Se dice que* A *y* B *están* ***mutuamente separados*** *en* X *si* $A \cap \overline{B} = \varnothing$ *y* $\overline{A} \cap B = \varnothing$*.*

Definición 1.3. *Sea* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia arbitraria de espacios topológicos. Definimos la* ***topología producto*** *o* ***topología de Tychonoff*** *sobre* $\prod_{i\in I} X_i$ *como aquella que se obtiene al tomar como base para los conjuntos abiertos, conjuntos de la forma* $\prod_{i\in I} U_i$ *tales que:*

1. U_i *es abierto en* X_i *para cada* $i \in I$*,*
2. $U_i = X_i$ *para todos salvo una cantidad finita de coordenadas* i*.*

Definición 1.4. *Un espacio métrico* (X, d) *es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy en* X *converge.*

Definición 1.5. *Sean* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *espacios métricos. Definimos la función* $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ *como*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

Entonces $(X \times Y, d)$ *adquiere la estructura de espacio métrico.*

En general, si $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *es una familia numerable de espacios métricos, el espacio* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *puede metrizarse por la función* $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ *si definimos*

$$d_\infty((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d_i(x_i, y_i).$$

La definición 1.5 permite que la topología generada por la métrica del espacio producto coincida con la topología producto definida en 1.3.

Definición 1.6. *Un subconjunto de un espacio topológico X es un $\mathbf{G}_\delta$ si y solo si es una intersección numerable de conjuntos abiertos y es un $\mathbf{F}_\sigma$ si y solo si es una unión numerable de conjuntos cerrados.*

Definición 1.7. *Si Y es un espacio topológico, escribimos $\mathbf{Y = P|Q}$ para denotar que $Y = P \cup Q, P \neq \varnothing, Q \neq \varnothing, P \cap Q = \varnothing$ y P y Q son ambos abiertos en Y. Se dice que $P|Q$ es una **separación** o **cortadura** de (Y, τ).*

*Si $U|V$ es una separación de (Y, τ) y $U = \varnothing$ o $V = \varnothing$, decimos que $U|V$ es una **separación trivial**. Se dice que un espacio topológico (Y, τ) es **conexo** si toda separación de (Y, τ) es trivial.*

En otras palabras, $Y = P|Q$ siginifica que $Y = P \cup Q$ donde P y Q son sonjuntos no vacíos que están mutuamente separados en Y (1.2).

Definición 1.8. *Un espacio topológico (X, τ) es:*

1. $\mathbf{T_0}$ *si, dados $x \neq x' \in X$, existe $U \in \tau$ tal que ($x \in U$ y $x' \notin U$) o ($x \notin U$ y $x' \in U$) (fig 1.1).*

2. $\mathbf{T_1}$ *si, dados $x \neq x' \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $x' \notin U$, $x' \in V$ y $x \notin V$ (fig 1.2).*

3. $\mathbf{T_2}$ *o de **Hausdorff** si, dados $x \neq x' \in X$, existen $U, V \in \tau$ ajenos tales que $x \in U$ y $x' \in V$ (fig 1.3).*

4. ***Regular** si, dados un cerrado $C \subset X$ y $x \in X \setminus C$, existen $U, V \in \tau$ ajenos tales que $x \in U$ y $C \subset V$ (fig 1.4).*

5. ***Completamente regular** si, dados un cerrado $C \subset X$ y $x \in X \setminus C$, existe una función continua $f : (X, \tau) \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(C) = \{0\}$ (fig 1.5).*

6. ***Normal** si, dados dos cerrados $C, D \subset X$ ajenos, existen $U, V \in \tau$ ajenos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$ (fig 1.6).*

7. $\mathbf{T_3}$ *si es regular y* T_0.

8. *De* ***Tychonoff*** *si es completamente regular y* T_0.

9. $\mathbf{T_4}$ *si es normal y* T_1.

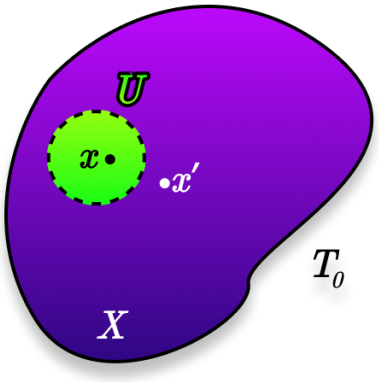


Figura 1.1: Espacio T_0

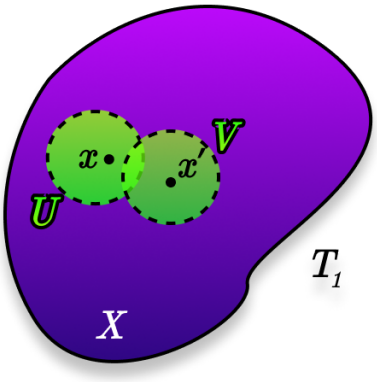


Figura 1.2: Espacio T_1

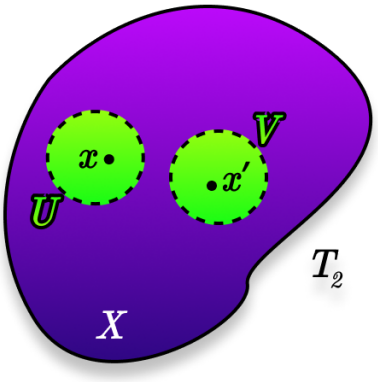


Figura 1.3: T_2 o Hausdorff

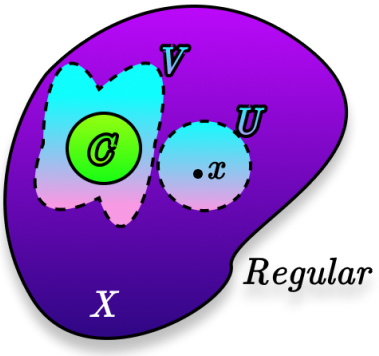


Figura 1.4: Espacio regular

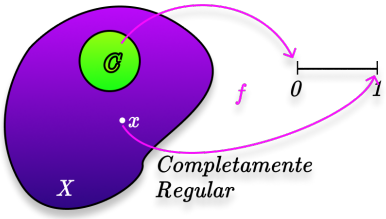


Figura 1.5: Completamente regular

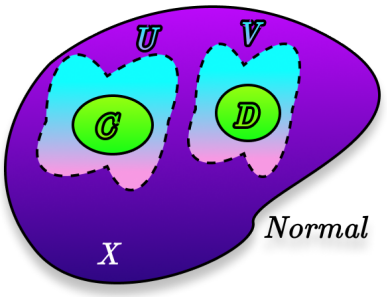


Figura 1.6: Espacio normal

Teorema 1.9 ([1], p.241). ***Teorema de Urysohn.*** *Todo espacio* T_1 *regular* X *con una base numerable es homeomorfo a un espacio métrico separable.*

Teorema 1.10 ([2], p.17). ***Teorema del producto de Tychonoff.*** *El espacio producto* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *de una familia* $\{X_i\}_{i\in I}$ *de espacios compactos es compacto.*

Teorema 1.11 ([2], p.137). ***Teorema de conexidad para productos.*** *El espacio producto* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *de una familia* $\{X_i\}_{i\in I}$ *de espacios conexos es conexo.*

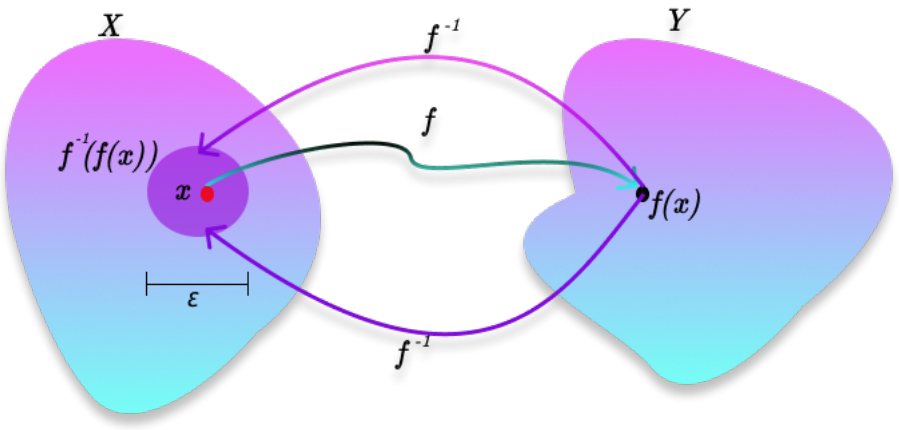


Figura 1.7: Definición de ε-función

Definición 1.12. *Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$. f es llamada una* ***ε-función*** *si f es continua y para toda $x \in X$: diám$(f^{-1}(f(x))) < \varepsilon$ (fig 1.7).*

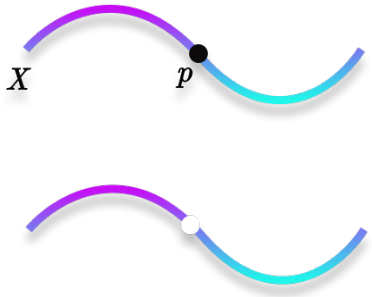


Figura 1.8: Punto de corte p de X

Definición 1.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico conexo y sea $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, se dice que p es un* ***punto de no corte*** *de X. Si $X \setminus \{p\}$ no es conexo entonces p es llamado* ***punto de corte*** *de X (fig 1.8).*

1.1.1 Retractos y extensores

Definición 1.14. *Sea X un espacio topológico. Una función continua $r : X \to X$ es llamada una* ***retracción*** *si $r \circ r = r$, es decir, si r es la identidad sobre su rango (fig 1.9). Un subconjunto $A \subset X$ para el cual existe una retracción suprayectiva $X \to A$ es llamado un* ***retracto de X*** *(fig 1.10).*

Un compacto K es llamado un ***retracto absoluto*** *(escrito* ***RA****) si siempre que K esté encajado en un espacio métrico X, la copia encajada de K es un retracto de X (fig 1.11).*

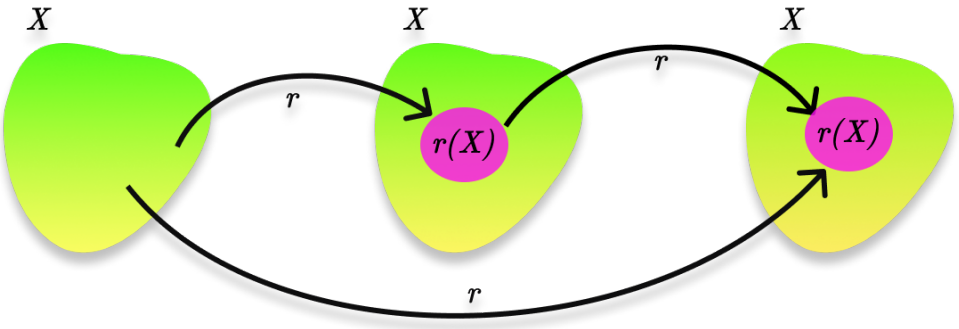


Figura 1.9: Retracción $r : X \to X$.

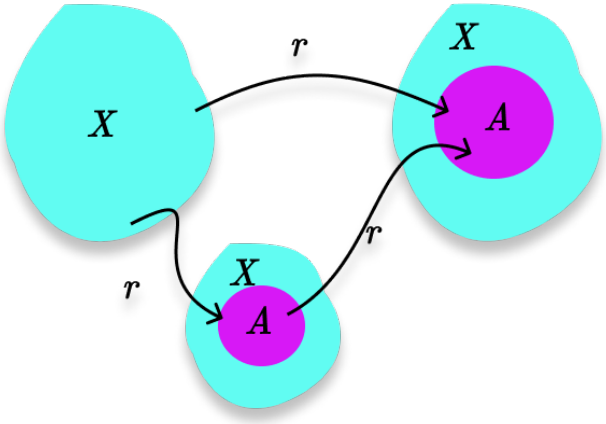


Figura 1.10: Retracto A de X.

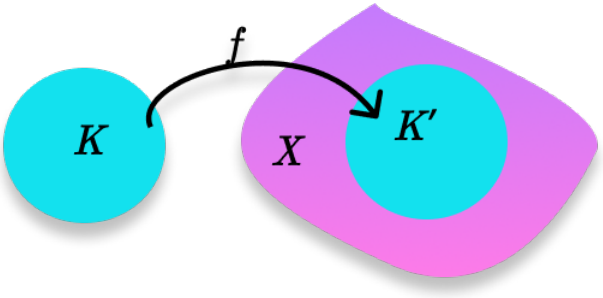


Figura 1.11: Retracto Absoluto K.

Definición 1.15. *Un compacto K es llamado un* ***extensor absoluto*** *(escrito* ***EA****) si siempre que B sea un subconjunto cerrado de un espacio métrico M y $f : B \to K$ sea continua, entonces f pueda ser extendida a una función continua $F : M \to K$. En este caso decimos que F es una* ***extensión*** *de f en el sentido de que $F|_B = f$ (fig 1.12).*

1.1.2 Cadenas y espacios encadenables

Definición 1.16. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una* ***cadena*** *en X es una colección indexada finita y no vacía $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ de subconjuntos abiertos $U_i \subset X$ tales que*

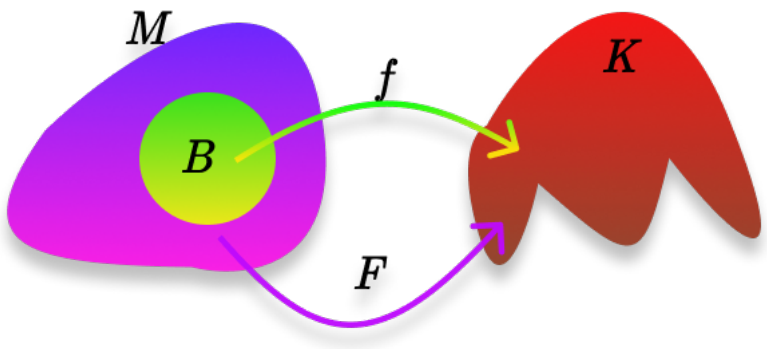


Figura 1.12: Extensor absoluto K (EA).
F extensión de f.

$$U_i \cap U_j \neq \varnothing \text{ si y solo si } |i-j| \leq 1.$$

Si $\mathcal{C}$ es una cadena en X, los miembros de $\mathcal{C}$ son llamados ***eslabones de $\mathcal{C}$****; U_i se llama el* **i-*ésimo eslabón*** *de $\mathcal{C}$; la* ***malla*** *de $\mathcal{C}$ se define como*

$$malla(\mathcal{C}) = \text{máx}\{\text{diam}(U_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Si $\mathcal{C}$ es una cadena en X y $malla(\mathcal{C}) < \varepsilon$, decimos que $\mathcal{C}$ es una ***ε-cadena*** *en X. Decimos que X es* ***encadenable*** *si existe una ε-cadena en X que cubre a X para cada $\varepsilon > 0$ (fig 1.13).*

Los continuos encadenables también suelen ser llamados ***linealmente encadenables*** *o* ***tipo serpiente****. Algunas otras veces son llamadas simplemente continuos tipo arco.*

Definición 1.17. *Una* ***cadena débil*** *es una colección finita no vacía $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ de conjuntos tales que*

$$L_i \cap L_{i+1} \neq \varnothing \text{ para cada } i = 1, \ldots, n-1.$$

Si $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ es una cadena débil, diremos que $\mathscr{L}$ es una ***cadena débil de $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_n}$*** *y , si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, diremos también que $\mathscr{L}$ es una* ***cadena débil de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$****. Cada L_i es llamado un* ***eslabón*** *de $\mathscr{L}$ (fig 1.14).*

Definición 1.18. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\varepsilon > 0$. Una* ***$(\mathbf{d}, \varepsilon)$-cadena*** *en X es un subconjunto finito no vacío indexado $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X, tal que*

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, n-1.$$

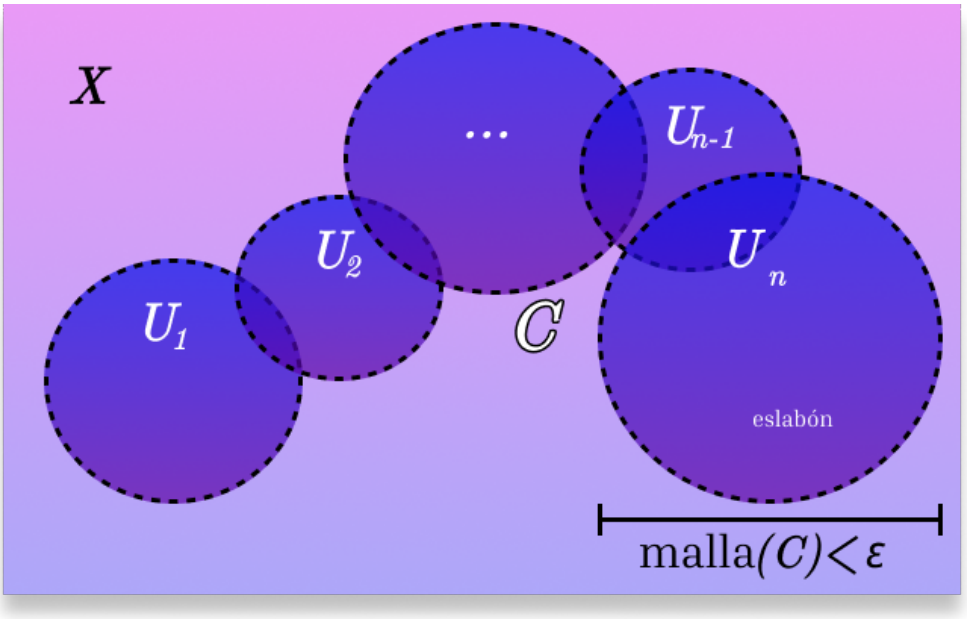


Figura 1.13: Cadena $\mathcal{C}$ en X.

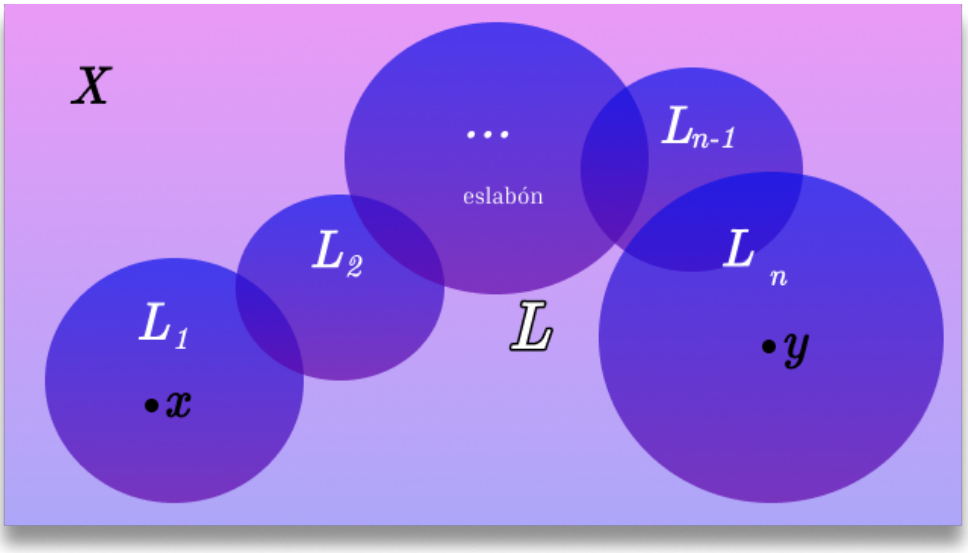


Figura 1.14: Cadena débil de L_1 a L_n o de x a y.

Decimos que una (d,ε)*-cadena* $\{x_1,\ldots,x_n\}$*, con* $p=x_1$ *y* $q=x_n$*,* ***va de*** p ***a*** q *o* ***une a*** p ***y*** q *(fig 1.15).*

Un subconjunto Z *de* X *está* $(\mathbf{d},\varepsilon)$***-encadenado*** *si cualesquiera dos puntos de* Z *pueden ser unidos por una* (d,ε)*-cadena en* Z*. Un subconjunto de* X *que está* (d,ε)*-encadenado para todo* $\varepsilon>0$ *se dice que está* **d*-bien-encadenado***.

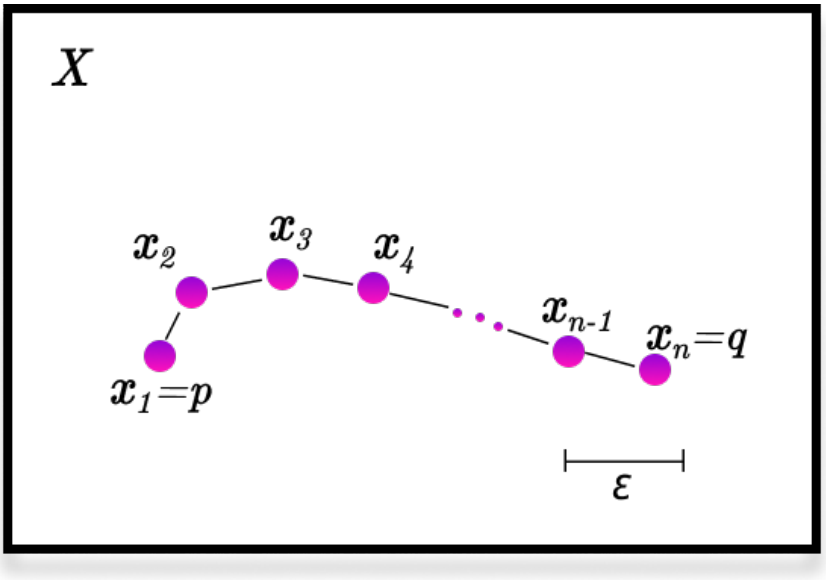


Figura 1.15: (d, ε)-cadena

1.1.3 Metrizabilidad

Teorema 1.19. *Si un espacio Hausdorff es una imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva y continua donde X es un espacio métrico compacto y Y es un espacio Hausdorff. Luego Y es compacto. Según el teorema 1.9 basta probar que Y tiene una base numerable. Sea entonces $\mathcal{C}$ una base numerable para X. Para cada subconjunto finito de $\mathcal{C}$, sea $E(\mathcal{L}) = Y - f(X - \cup\mathcal{L})$ y sea

$$\mathcal{P} = \{E(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{C}\}.$$

Entoncs $\mathcal{P}$ es numerable. Como X es compacto y Y es Hausdorff, f lleva conjuntos cerrados a conjunto cerrados, por lo que cada miembro de $\mathcal{P}$ es un subconjunto abierto de Y.

Sea ahora U un subconjunto abierto de Y y sea $q \in U$. Como $f^{-1}(q)$ es un sbconjunto compacto del conjunto abierto $f^{-1}(U)$ y $\mathcal{C}$ es una base, existe un subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$f^{-1}(q) \subset \bigcup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U).$$

Por lo tanto $q \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Así hemos probado que $\mathcal{P}$ es una base numerable de Y y terminamos.

■

Definición 1.20. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $E \subset X$, se dice que E es* ***denso*** *en (X,τ) si $\overline{E} = X$.*

1.1.4 Componentes

Definición 1.21. *Sea X un espacio topológico. Una* ***componente*** *de X es un subconjunto conexo maximal de X.*

Si $p \in X$, claramente el conjunto

$$\mathbf{C_p} = \bigcup\{A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}$$

es una componente de X, (ya que las componentes de X deben ser mutuamente disjuntas), la cual llamamos ***la componente de*** $\mathbf{p}$ ***en*** $\mathbf{X}$ *o bien,* ***la componente de*** $\mathbf{X}$ ***que contiene a*** $\mathbf{p}$ *(fig 1.16).*

Más generalmente, si $Y \subset X$, ***la componente de*** $\mathbf{Y}$ ***en*** $\mathbf{X}$ *o* ***la componente de*** $\mathbf{X}$ ***que contiene a*** $\mathbf{Y}$ *se refiere al subconjunto conexo maximal de X que contiene a Y (si es que existe).*

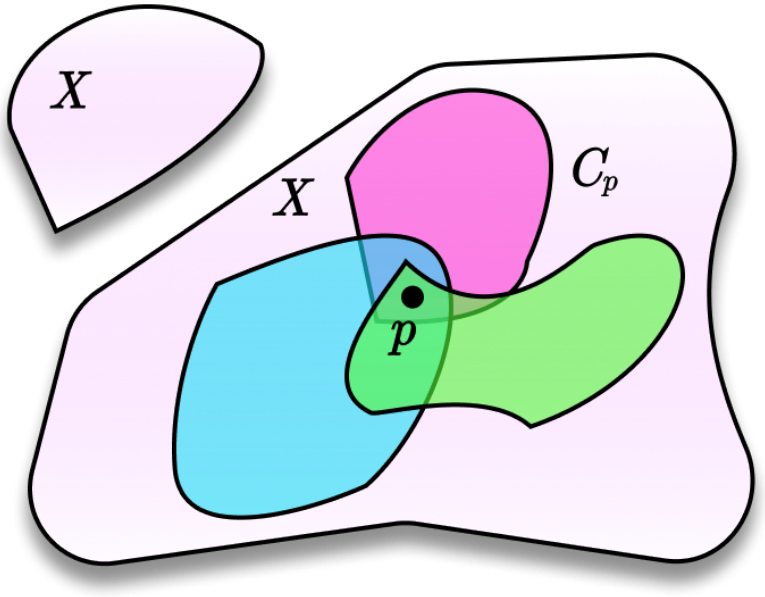


Figura 1.16: Componente C_p de un punto $p \in X$.

Sin embargo, para $Y \subset X$, la frase *componente de Y* se refiere a una componente de Y en Y donde Y tiene la topología de subespacio.

Proposición 1.22. *Cualquier componente de X es un subconjunto conexo y cerrado de X y todo subconjunto conexo de X está contenido en una componente de X.*

1.1.5 Homotopías y contractibilidad

Definición 1.23. *Sean X, Y espacios topológicos. Una* ***homotopía*** *es una función continua $X \times [0,1] \to Y$. Si $f, g : X \to Y$, se dice que f es* ***homotópica*** *a g si existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$ (fig 1.17).*

Si $h : X \times [0,1] \to Y$ es una homotopía y $t \in [0,1]$, entonces $h_t : X \to Y$ denota la función continua dada por $h_t(x) = h(x,t)$ para todo $x \in X$.

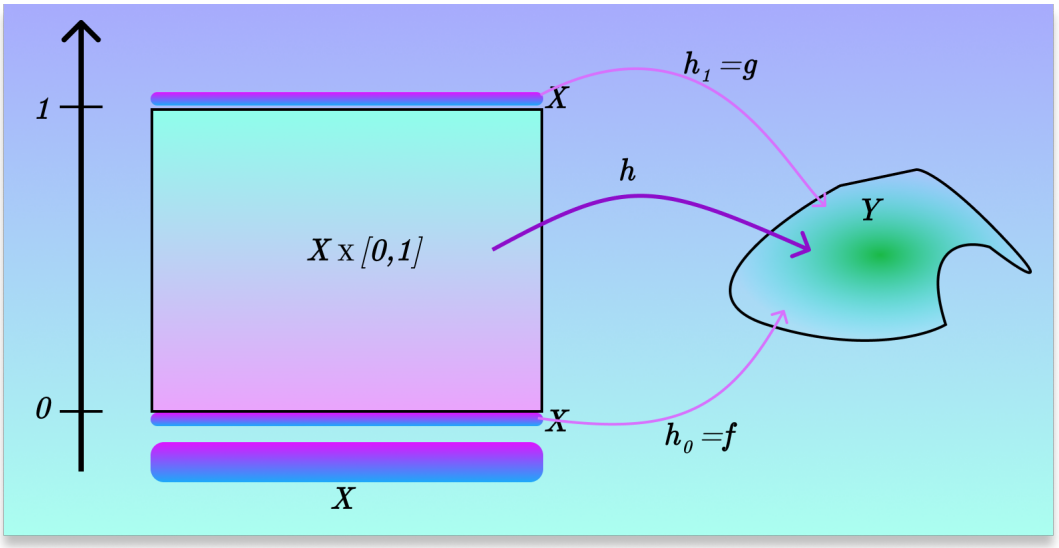


Figura 1.17: Homotopía h.
f y g homotópicas

Definición 1.24. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se llama* ***esencial*** *si f no es homotópica a ninguna función constante $X \to Y$. Una función $f : X \to Y$ se llama* ***no esencial*** *(también llamada* ***función con homotopía nula*** *o* ***función nulo-homotópica****) si f no es esencial (fig 1.18).*

Definición 1.25. *Para espacios topológicos X y Y, decimos que X es* ***contraíble con respecto a Y*** *(**cr**($\mathbf{Y}$)) si toda función continua $f : X \to Y$ es no esencial (fig 1.19).*

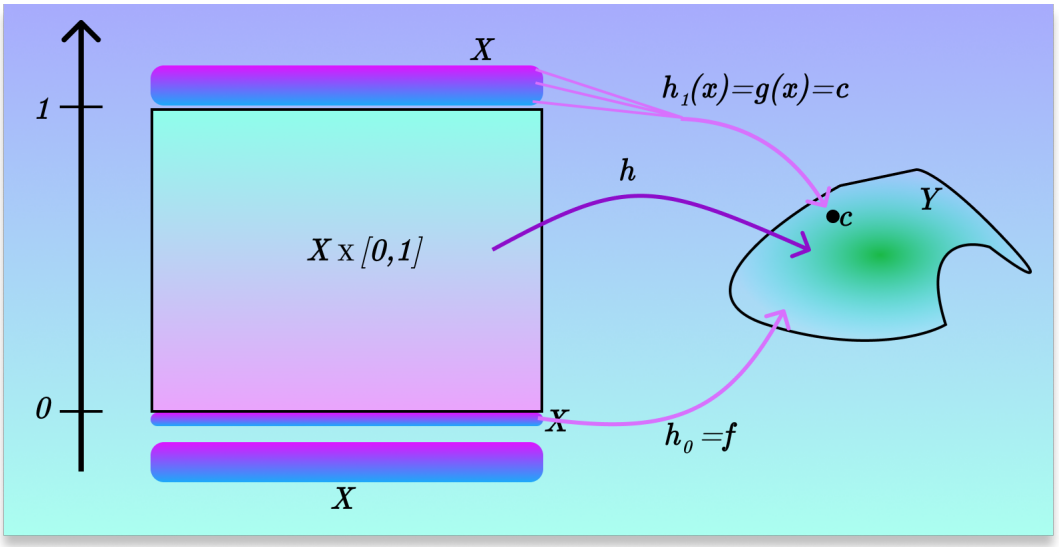


Figura 1.18: Función no esencial o nulo-homotópica $f : X \to Y$.
$g = h_1$ es constante para algún $c \in Y$.

Definición 1.26. *Un espacio topológico X se llama* ***contraíble*** *si id_X es nulo-homotópica, es decir, si existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to X$ tal que para cada $x \in X$: $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = p$ para algún $p \in X$. Dicha función h es llamada una* ***contracción*** *(fig 1.20).*

Intuitivamente, que X sea contraíble significa que X puede ser continuamente deformado a un punto en un intervalo de tiempo finito.

1.2 Teoría de continuos

Comenzaremos introduciendo el concepto de *continuo, subcontinuo, arco*, etc., y daremos algunos ejemplos de estos. Siempre que se hable de un espacio X nos estaremos refiriendo a que X es un espacio métrico, a menos que se declare otra cosa.

1.2.1 Definiciones y ejemplos

Definición 1.27. *Diremos que un espacio X es un* ***continuo*** *si es no vacío, conexo y compacto. Un* ***subcontinuo*** *es un continuo que es subconjunto de un espacio métrico.*

Un espacio X es ***no-degenerado*** *si contiene más de un punto.*

A continuación veremos algunos ejemplos de los continuos más comunes.

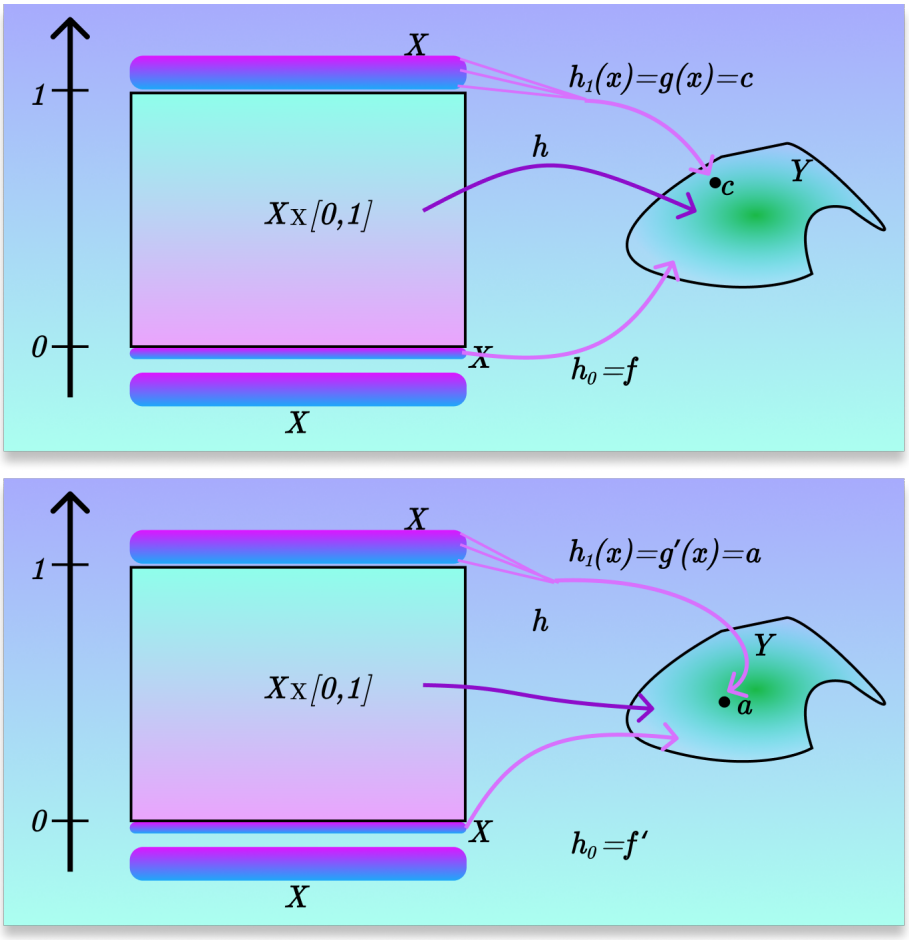


Figura 1.19: X contraíble con respecto a Y, $\mathrm{cr}(Y)$.

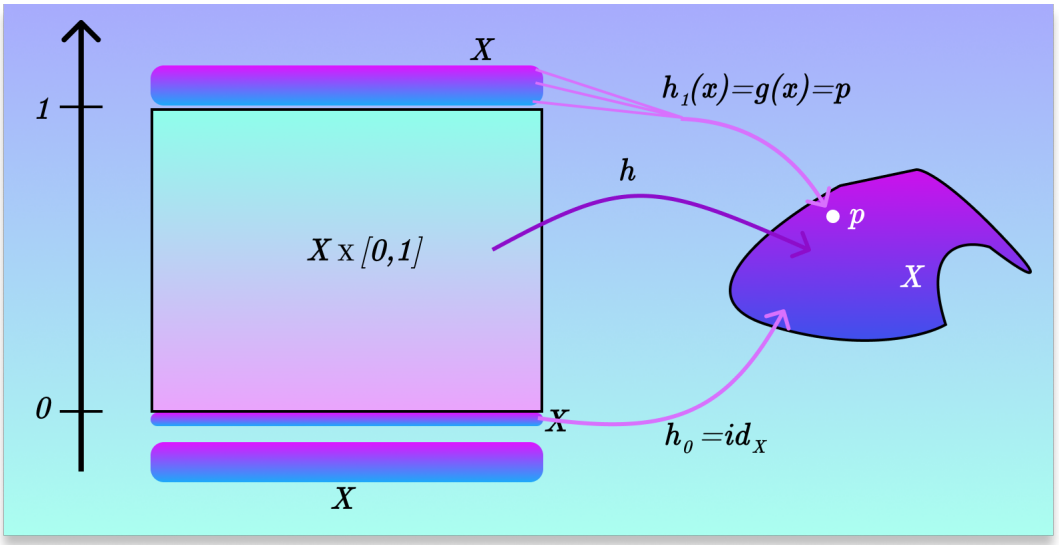


Figura 1.20: X es contraíble. h es una contracción.

Ejemplo 1.28. *Diremos que X es un* ***arco*** *si es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Los arcos son continuos debido a que $[0,1]$ es un continuo, ya que es conexo, compacto y no vacío. Si $h : [0,1] \to X$ es un homeomorfismo, diremos que $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos finales del arco X (fig 1.21).*

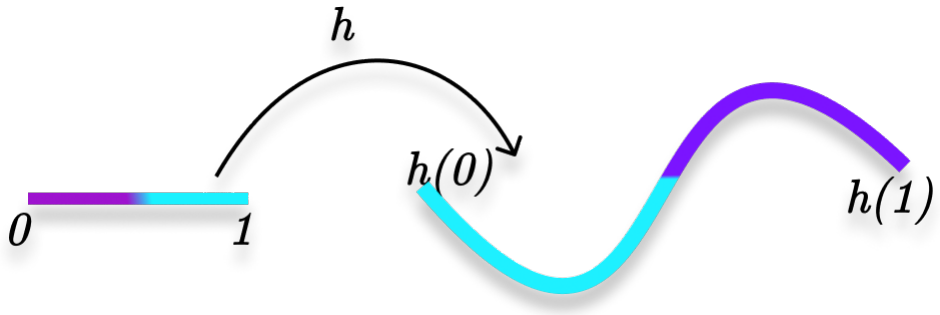


Figura 1.21: Arco

Ejemplo 1.29. *Diremos que X es una* **n-*celda*** *si es homeomorfo a la bola cerrada $\mathbf{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$. Como $\boldsymbol{B}^n$ es un continuo, las n-celdas son también continuos, donde $\mathbb{R}^n$ tiene la métrica euclidiana (fig 1.22).*

Ejemplo 1.30. *Diremos que X es una* ***n-esfera*** *si es homeomorfo a la esfera n-dimensional $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. Claramente las n-esferas son continuos y, por definición, $S^n \cong \partial B^{n+1}$ (fig 1.22).*

Definición 1.31. *Se dice que X es una* ***curva cerrada simple*** *si es una 1-esfera.*

Figura 1.22: $(n+1)$-celda y n-esfera para $n = 1$.

Ejemplo 1.32. *Un* ***cubo de Hilbert*** *es un espacio homeomorfo al producto cartesiano*

$$\prod_{i=1}^{\infty} I_i \quad \textit{donde} \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots\} : I_i = [0, 1]$$

y se denota por I^∞. La topología empleada en I^∞ es la topología producto (1.3). El cubo de Hilbert es un continuo por el teorema de Tychonoff (1.10) y conexo por el teorema de conexidad para productos (1.11).

El siguiente resultado nos da una propiedad interesante sobre el cubo de Hilbert.

Teorema 1.33 ([1], p.241)**.** *Todo continuo X puede encajarse topológicamente en un cubo de Hilbert.*

Los cuatro continuos de los ejemplos anteriores son todos *arco-conexos*, sin embargo no todo continuo es de esa forma como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.34. *El continuo* $\mathbf{sin(1/x)}$ *es la cerradura* $\overline{W}$ *del conjunto* W*, donde* $W = \{(x, sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$*. Este conjunto es un continuo que no es arco-conexo y se muestra en la figura 1.23.*

Se puede probar fácilmente que $\overline{W}$ es un continuo. En efecto, como W es conexo ya que es la imagen bajo la función continua $\operatorname{sen}(1/x)$ del intervalo conexo $(0, 1]$, entonces la cerradura $\overline{W}$ también debe ser conexa. Además, como $\overline{W}$ es acotada y cerrada ya que es una cerradura, entonces $\overline{W}$ es un compacto. Por tanto $\overline{W}$ es un continuo.

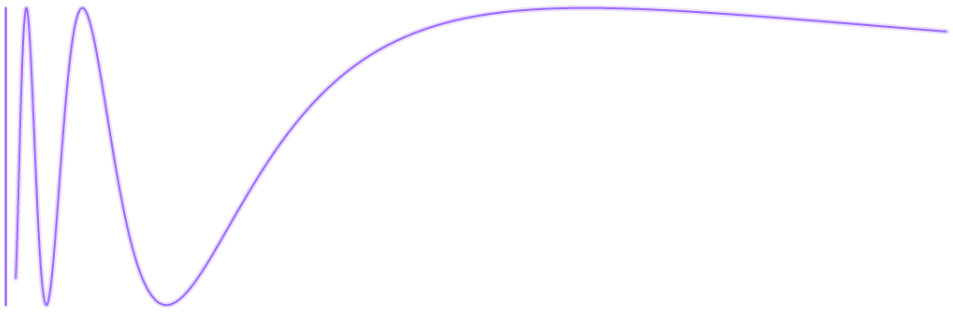


Figura 1.23: Continuo $sin(1/x)$.

Para mostrar que el continuo $\operatorname{sen}(1/x)$ no es arco-conexo, vamos a demostrar que no existe una función continua $f : [0, 1] \to X = \overline{W}$ tal que $f(0) = (1, \operatorname{sen}(1))$ y $f(1) = (0, 0)$. Primero,

tomemos el conjunto X como la gràfica de la función $\operatorname{sen}(1/x)$ *en el intervalo* $(0,1]$ *junto con el punto* $(0,0)$*, es decir:*

$$X = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) | x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}.$$

Supongamos por contradicción que existe una función continua $f : [0,1] \to X$ *tal que* $f(0) = (1, \operatorname{sen}(1))$ *y* $f(1) = (0,0)$*. Dado que* f *es continua, su imagen también es un conjunto conexo.*

Sea $Y = \{(x,y) \in X \mid x \neq 0\}$*. Este conjunto es conexo, ya que es la imagen de la función continua* $\operatorname{sen}(1/x)$ *en el intervalo* $(0,1]$*. Observamos que* $X = Y \cup (0,0)$*.*

Ahora, definimos $A = \{(x,y) \in X \mid y \geq 0\}$ *y* $B = \{(x,y) \in X \mid y \leq 0\}$*. Ambos conjuntos* A *y* B *son cerrados en* X*. Además,* A *y* B *son conjuntos conexos, ya que son las intersecciones de* Y *con semi-planos cerrados. Dado que* $(0,0) \in A \cap B$*, entonces* $X = A \cup B$*.*

Dado que la imagen de f *es un conjunto conexo y* $f(1) = (1, \operatorname{sen}(1)) \in A$ *y* $f(0) = (0,0) \in A \cap B$*, la imagen de* f *debe estar contenida en* A *o en* B*. Sin embargo, esto contradice el hecho de que la imagen de* f *es el conjunto* X*, que incluye puntos de ambos conjuntos* A *y* B*.*

Por lo tanto, no puede existir una función continua $f : [0,1] \to X$ *que cumpla con las condiciones dadas, lo que demuestra que el continuo* $\operatorname{sen}(1/x)$ *no es arco-conexo.* □

Además el continuo $\operatorname{sen}(1/x)$ es encadenable (1.16).

Ejemplo 1.35. *El **círculo de Varsovia** es cualquier continuo homeomorfo a* $Y \cup Z$*, donde* Y *es el continuo* $\operatorname{sen}(1/x)$ *y* Z *es la unión de tres arcos convexos en* $\mathbb{R}^2$*, uno de* $(0,-1)$ *a* $(0,-2)$*, otro de* $(0,-2)$ *a* $(1,-2)$ *y el tercero de* $(1,-2)$ *a* $(1, \operatorname{sen}(1))$*, como se muestra en la figura 1.24.*

El círculo de Varsovia sí es arco-conexo, sin embargo tiene puntos, algunos de los cuales no tienen vecindades pequeñas conexas, por ejemplo el punto $(0,0)$*.*

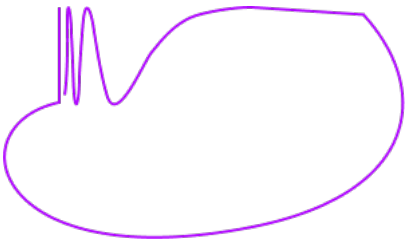


Figura 1.24: El círculo de Varsovia.

□

1.2.2 Indescomponibilidad y Z-conjuntos

Definición 1.36. *Un continuo X es llamado* ***descomponible*** *si X puede escribirse como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible se llama* ***indescomponible****.*

Resulta que la mayoría de continuos son indescomponibles como se demuestra en el teorema 1.121.

Definición 1.37. *Un continuo X es* ***hereditariamente indescomponible*** *si cada subcontinuo no degenerado de X (así como X mismo) es indescomponible (1.36).*

Análogamente, la "mayoría" de continuos son hereditariamente indescomponibles. La prueba es similar a la del teorema 1.121.

Definición 1.38. *Un* **Z-*conjunto*** *en X es un conjunto cerrado A en X tal que existen funciones continuas de X en $X - A$ arbitrariamente cercanas a la función identidad en X. Una* **Z-*función*** *es una función continua cuyo rango es un Z-conjunto en X.*

El siguiente teorema nos permite identificar al cubo de Hilbert mediante Z-funciones en retractos absolutos.

Teorema 1.39 ([3], p.4)**.** ***(de Torunczyk).*** *Un retracto absoluto, métrico y compacto X es un cubo de Hilbert si y solo si la función identidad $i : X \to X$ es un límite uniforme de Z-funciones.*

1.3 Métodos de construcción

A continuación veremos distintos métodos para construir continuos a partir de otros.

1.3.1 Intersecciones anidadas

La técnica de intersecciones anidadas es central en la teoría de continuos. Se usa tanto para construir ejemplos como en la demostración de varios teoremas, incluso en la construcción de funciones continuas. Para esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.40 ([3], 1.7). *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un subconjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $X_i \subset U$ para todo $i \geq N$. Por tanto X es compacto (fig 1.25).*

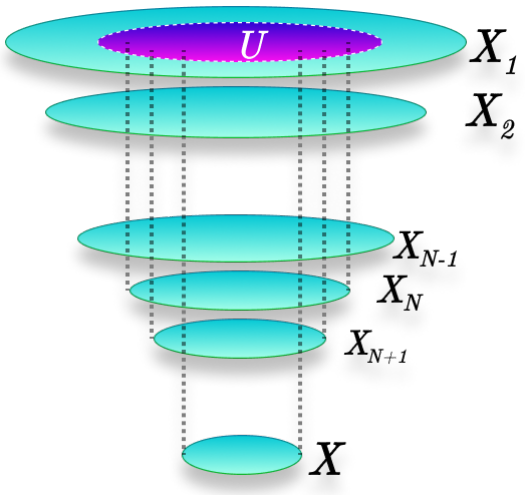


Figura 1.25: Intersección anidada de compactos.

Teorema 1.41. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tales que $X_{i+1} \subset X_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces X es un continuo.*

Demostración. Por la proposición anterior X es un espacio métrico compacto no vacío. Nos falta probar que X es conexo, supongamos que no lo es. Entonces podemos escribir $X = A \cup B$ donde A y B son conjuntos cerrados no vacíos y disjuntos. Luego, deben existir subconjutnos abiertos y disjuntos V y W de X_1 tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces, por el lema anterior, $X_n \subset U$ para algún n. Por lo tanto

$$X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W).$$

Como $A \cup B = X \subset X_n$ y dado que $A, B \neq \varnothing$, entonces $X_n \cap V \neq \varnothing$ y $X_n \cap W \neq \varnothing$, por lo que X_n no es conexo lo cual es una contradicción a la hipótesis. Luego, X es conexo. Por tanto X es un continuo. ■

Ejemplo 1.42. *Construiremos un continuo indescomponible (1.36) no degenerado X en el plano $\mathbb{R}^2$. Tomemos tres puntos distintos $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Podemos construir cadenas simples (1.16) $\mathcal{C}_n$ en*

$\mathbb{R}^2$ *para* $n = 1, 2, \ldots$, *cuyos eslabones sean 2-celdas (discos) de diámetro menor que* 2^{-n} *de manera que satisfagan las dos condiciones siguientes:*

(a) Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathcal{C}_{3n+1}$ *va de a a c a través de b,* $\mathcal{C}_{3n+2}$ *va de b a c y* $\mathcal{C}_{3n+3}$ *va de a a b a través de c;*

(b) Para cada $n = 1, 2, \ldots : \bigcup \mathcal{C}_{n+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_n$.

El continuo deseado X *será la intersección anidada de las uniones de estas cadenas, es decir,*

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n).$$

Así que en efecto, X *es un continuo.*

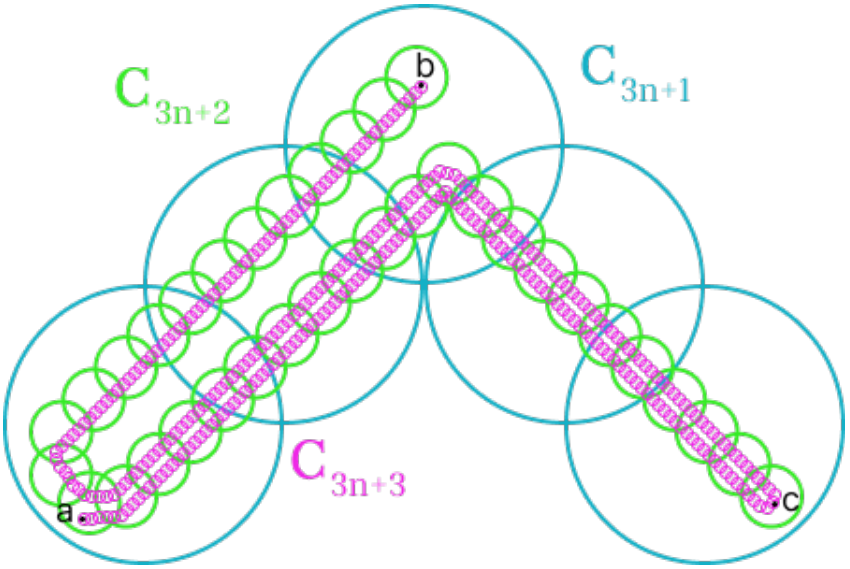


Figura 1.26: Cadenas simples $\mathcal{C}_n$ formadas por discos de radio menor que 2^{-n}.

Por la definición de X, *es evidente que este también puede escribirse como*

$$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3n+1})$$

y entonces podemos verificar que ningún subcontinuo propio Y *de* X *contiene a* $\{a, c\}$. *En efecto, si existiera un* Y *que contuviera a* $\{a, c\}$, *podríamos tomar un punto* $p \in X - Y$ *y fijar a* k *lo suficientemente grande de manera que los eslabones de* $\mathcal{C}_{3k+1}$ *que contengan a* p *no toquen a* Y, *luego usamos los eslabones de* $\mathcal{C}_{3k+1}$ *para contradecir la conexidad de* Y.

Similarmente, ningún subcontinuo propio de X contiene cualesquiera dos de los tres puntos a, b, c. Por tanto X es indescomponible. □

Definición 1.43. *Un continuo topológico X es **uno-dimensional** si existe una base de abiertos de X que consiste de conjuntos homeomorfos a intervalos abiertos en la recta real. Es decir, para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x, existe un conjunto U contenido en V que es homeomorfo a un intervalo abierto en la recta real (fig 1.27).*

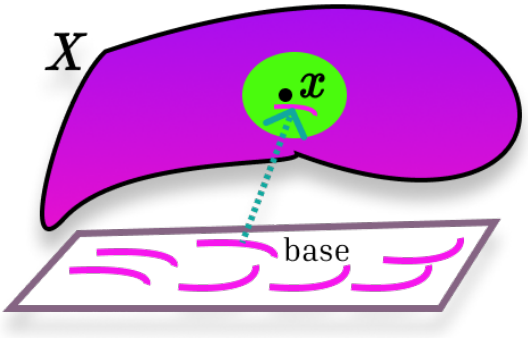


Figura 1.27: Espacio uno-dimensional

Ejemplo 1.44. *Tomemos el cuadrado unitario $S = [0,1] \times [0,1]$ y dividámoslo en nueve cuadrados congruentes. Si a S le quitamos el subcuadrado abierto central obtenemos el conjunto*

$$X_1 = S - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Podemos hacer este paso repetitivmaente: en cada uno de los 8 cuadrados restantes ejecutamos el mismo procedimiento eliminando el subcuadrado abierto central de cada uno de ellos obteniendo los conjuntos que se muestran en la Figura 1.28.

Es claro que cada X_i es un continuo por lo que definiendo

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i,$$

*resulta que X es un continuo y es llamado la **Curva Universal de Sierpinski**.*

El término universal se refiere al hecho de que este continuo uno-dimensional (1.43) contiene una copia topológica de cada continuo uno-dimensional en el plano.

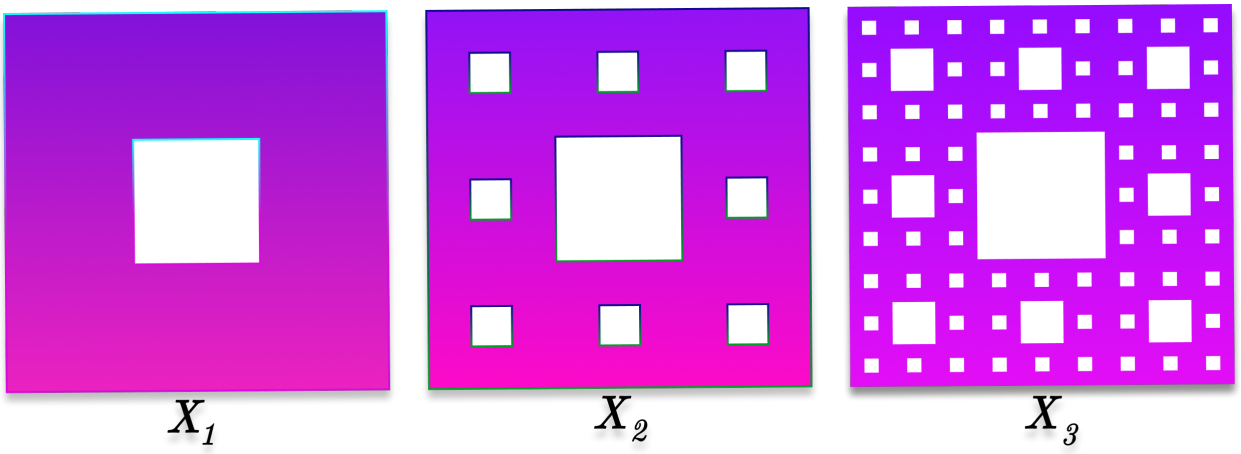


Figura 1.28: Curva universal de Sierpinski $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$

Para demostrar que X es universal, consideremos un continuo uno-dimensional arbitrario C en el plano. Nuestro objetivo es mostrar que C está contenido en una intersección anidada de copias topológicas Y_i de los conjuntos X_i, de tal manera que su intersección total sea homomorfa a X.

Primero, observemos que cada conjunto X_i tiene la propiedad de que cada cuadrado abierto en el plano que lo intersecta, también intersecta al menos un cuadrado abierto más pequeño contenido en X_i. Además, X también tiene esta propiedad, ya que es la intersección de todos los conjuntos X_i.

Para construir las copias topológicas Y_i de los conjuntos X_i, realizaremos el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con el continuo C. Como es un continuo uno-dimensional, existe un recubrimiento abierto finito de C por cuadrados abiertos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

2. Para cada cuadrado abierto Q_j, seleccionamos un conjunto $Y_{1,j}$ que sea una copia topológica de X_1 y que esté contenido en Q_j. Esto es posible porque cada cuadrado abierto en el plano que intersecta a X_1 también intersecta al menos un cuadrado abierto más pequeño contenido en X_1. Por lo tanto, podemos encontrar un conjunto $Y_{1,j}$ que esté contenido en Q_j y que sea homomorfo a X_1. Entonces, definimos $Y_1 = \bigcup_{j=1}^{n} Y_{1,j}$.

3. Para cada conjunto $Y_{1,j}$, aplicamos el mismo procedimiento que en el paso 2 para encontrar copias topológicas $Y_{2,j}$ de X_2 contenidas en $Y_{1,j}$. Entonces, definimos $Y_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Y_{2,j}$.

4. Continuamos este proceso de manera recursiva para construir Y_i a partir de Y_{i-1} para cada

$i \geq 2$.

La intersección anidada $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$ *es un continuo que contiene a* C*, y esta intersección es homomorfa a* X*. Esto se debe a que cada conjunto* Y_i *es una unión de copias topológicas de* X_i *que están anidadas y contienen a* C*, y su intersección es un conjunto que tiene la misma estructura que* X*.*

Por lo tanto, hemos demostrado que todo continuo uno-dimensional en el plano está contenido en una intersección anidada de copias topológicas Y_i *de los conjuntos* X_i*, siendo los* Y_i *elegidos en el plano de manera que su intersección total sea homomorfa a* X*. Esto demuestra que la Curva Universal de Sierpinski es, de hecho, universal.* □

1.3.2 Límites inversos

Anteriormente vimos cómo construir nuevos continuos usando intersecciones anidadas. Ahora veremos otro método para construir más continuos usando límites inversos a partir de otros continuos. Los límites inversos están definidos a partir de subconjuntos de espacios producto. Estaremos interesados únicamente en los productos cartesianos finitos o numerables y usaremos la topología producto a menos que se indique lo contrario. También asumiremos el Axioma de Elección.

Teorema 1.45 ([3], 2.1)**.** *El producto cartesiano finito o infinito numerable de continuos, o de espacios métricos compactos no vacíos, es un continuo o un espacio métrico compacto no vacío, respectivamente.*

Para definir los límites inversos se necesita de una sucesión doble de espacios y funciones continuas llamada sucesión inversa como se muestra a continuación.

Definición 1.46. *Una* ***sucesión inversa*** *es una sucesión doble* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de espacios* X_i*, llamados* ***espacios coordenados****, y funciones continuas* $f_i : X_{i+1} \to X_i$ *llamadas* ***funciones de unión*** *. Si* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa, algunas veces escrita como*

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots \xleftarrow{f_{i-1}} X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \cdots, \tag{1.1}$$

entonces el ***límite inverso*** *de* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$*, denotado por* $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *(fig 1.29), es el subespacio del espacio producto* $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *definido por*

$$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \ \forall i = 1, 2, \ldots\}. \tag{1.2}$$

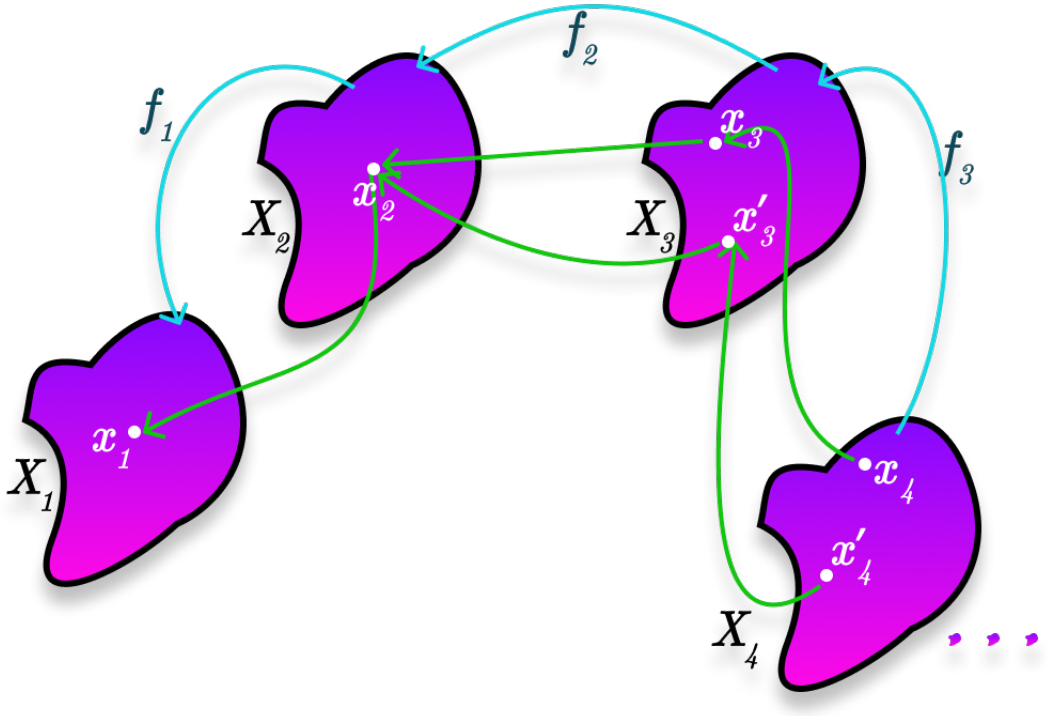


Figura 1.29: Sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ con límite inverso $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Proposición 1.47 ([3], 2.3). *Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, definamos $Q_n(X_i, f_i)$ por*

$$Q_n(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \ \forall i \leq n\}. \tag{1.3}$$

Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. *$Q_{n+1}(X_i, f_i) \subset Q_n(X_i, f_i)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$;*
2. *$Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para cada $n = 1, 2, \ldots$;*
3. *$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$.*

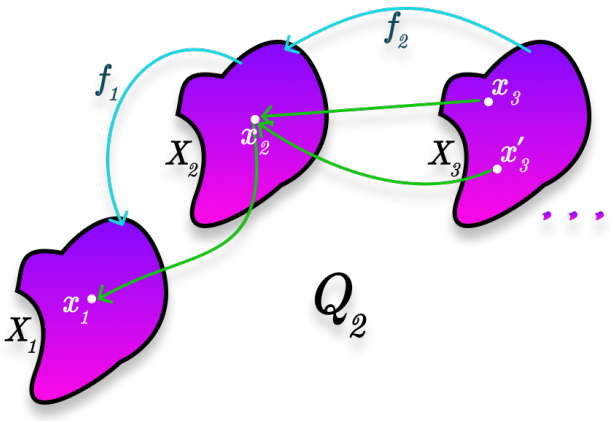


Figura 1.30: Espacio $Q_2(X_i, f_i)$.

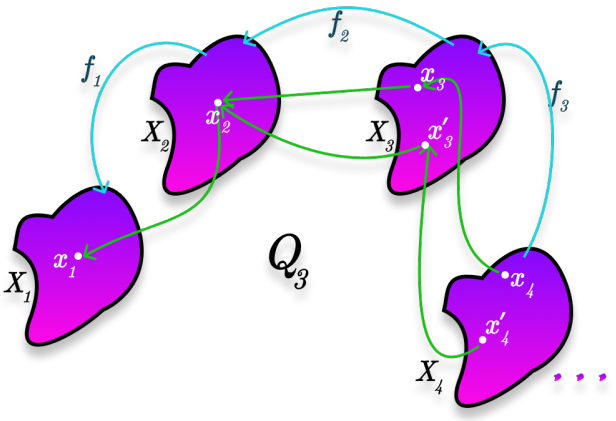


Figura 1.31: Espacio $Q_2(X_i, f_i)$.

Según la proposición anterior los límites inversos pueden estuidarse también mediante intersecciones anidada.

El siguiente resultado es el que nos permite construir nuevos continuos a partir de sucesiones inversas de otros continuos.

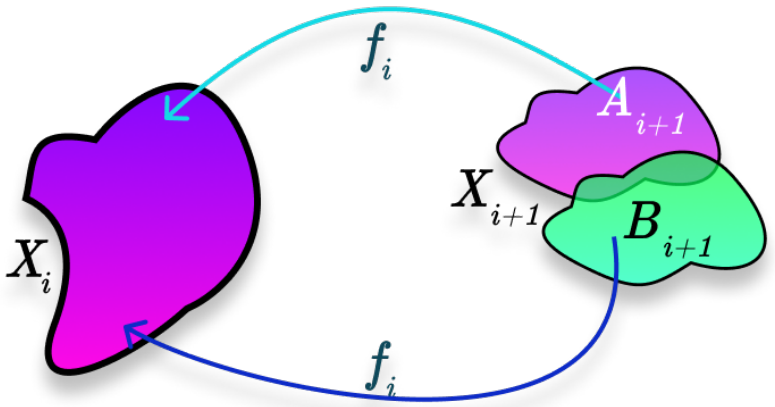
Teorema 1.48. *Todo límite inverso de continuos es un continuo y todo límite inverso de espacios métricos compactos no vacíos es un espacio métrico compacto no vacío.*

Demostración. Dada una sucesión inversa de continuos $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, queremos demostrar que su límite inverso es un continuo. Por la proposición 1.47, se tiene que $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$, y dado que $Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, entonces cada $Q_n(X_i, f_i)$ es un continuo por el teorema 1.45. Finalmente, como la intersección anidada de continuos es un continuo según 1.41, entonces el límite inverso $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo.

La demostración es análoga cuando los X_i son espacios métricos compactos. ■

Definición 1.49. *Una sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es un continuo es llamada una* ***sucesión inversa indescomponible*** *si para cada $i = 1, 2, \ldots$, siempre que A_{i+1} y B_{i+1} son subcontinuos de X_{i+1} tales que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, entonces $f_i(A_{i+1}) = X_i$ o $f_i(B_{i+1}) = X_i$ (fig 1.32).*

El teorema anterior puede extenderse para los continuos indescomponibles mediante una sucesión inversa indescomponible como se muestra en el siguiente teorema.



!h

Figura 1.32: Sucesión inversa indescomponible

Teorema 1.50. *Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa indescomponible con límite inverso X_∞, entonces X_∞ es un continuo indescomponible.*

Demostración. Por el teorema 1.48, X_∞ es un continuo, queda probar que X_∞ es indescomponible. Para ello tomemos A y B subcontinuos de X_∞ tales que $A \cup B = X_\infty$. Para cada i se tiene que $X_{i+1} = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B)$, donde las $\pi_i : X_\infty \to X_i$ son las proyecciones canónicas suprayectivas. Por tanto, según la definición 1.49, se tiene que $f_i[\pi_{i+1}(A)] = X_i$ o $f_i[\pi_{i+1}(B)] = X_i$ para cada i. Luego, como $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$ para cada i, se tiene que $\pi_i(A) = X_i$ o $\pi_i(B) = X_i$ para cada i. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\pi_i(A) = X_i$ para infinitamente muchos i, y entonces, como las funciones de unión son suprayectivas y como $f_j \circ \cdots \circ f_k \circ \pi_{k+1} = \pi_j$ siempre que $1 \leq j < k$, entonces $\pi_i(A) = X_i$ para todos los $i = 1, 2 \ldots$. Luego, según ([3], 2.6), $\varprojlim\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^{\infty} = A = [\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$ y entonces $A = X_\infty$. ■

Ejemplo 1.51. ***Los Solenoides p-Ádicos.*** *Para cada $p = 2, 3, 5, \ldots$, sea $f^p : S^1 \to S^1$ dada por $f^p(z) = z^p$ para cada $z \in S^1$ (donde S^1 es el círculo unitario en el plano y z^p denota la p-ésima potencia de z usando multiplicaión compleja). Para un p dado, sea*

$$\sum_p = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ donde cada } X_i = S^1, f_i = f^p. \tag{1.4}$$

Entonces, por el teorema 1.50, cada Σ_p para $p \geq 2$ es un continuo indescomponible y se llama el ***solenoide p-ádico****.*

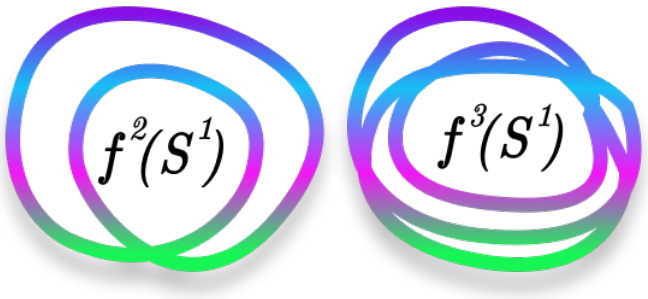


Figura 1.33: Imágenes de la 1-esfera bajo f^p cuando $p = 2, 3$.

Figura 1.34: Espacio homemorfo al producto $f^2(S^1) \times S^1$.

Ejemplo 1.52. ***El Arcoiris de Knaster.*** *Para cada $i = 1, 2 \ldots$, sea $X_i = [0, 1]$ y sea $f_i : X_{i+1} \to X_i$ definida por*

$$f_i(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -2t + 2 \text{ si } & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}. \tag{1.5}$$

Entonces, por 1.50, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo indescomponible el cual es homemorfo al continuo dibujado en la figura 1.35.

□

A continuación veremos un teorema que da condiciones suficientes para el encaje de un límite inverso en un espacio X que contenga los espacios coordenados de la sucesión inversa. Más aún, el encaje es obtenido como una intersección específica de subconjuntos de X.

Figura 1.35: Arcoirirs de Knaster.

Teorema 1.53 ([3], 2.10). ***El teorema de encaje Anderson-Choquet.*** *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa donde cada X_i es un subconjunto compacto no vacío de X y cada f_i tiene imagen X_i. Sea:*

$$f_{i,j} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to X_i \ \text{ si } \ j > i+1 \ \text{ y } \ f_{i,i+1} = f_i. \tag{1.6}$$

Asumamos que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe k tal que para todo $p \in X_k$, diám$[\cup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p)] < \varepsilon$;*

2. *Para cada i y cada $\delta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que siempre que $j > 1$ y $p, q \in X_j$ tales que $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$, entonces $d(p,q) > \delta'$.*

Entonces, $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\cap_{i=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\geq i} X_m}$. En particular: si $X_i \subset X_{i+1}$ para cada i, entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\overline{\cup_{i=1}^{\infty} X_i}$ (fig 1.36).

Ahora damos una aplicación de este teorema a encajes en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{2n}$.

Teorema 1.54. ***Teorema de Isbell.*** *Si $X = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es compacto y encajable en $\mathbb{R}^n$, entonces X es encajable en $\mathbb{R}^{2n}$.*

Demostración. Para cada X_i, como es compacto y encajable en $\mathbb{R}^n$, existe un homeomorfismo $h_i : X_i \to K_i \subset \mathbb{R}^n$, donde K_i es compacto.

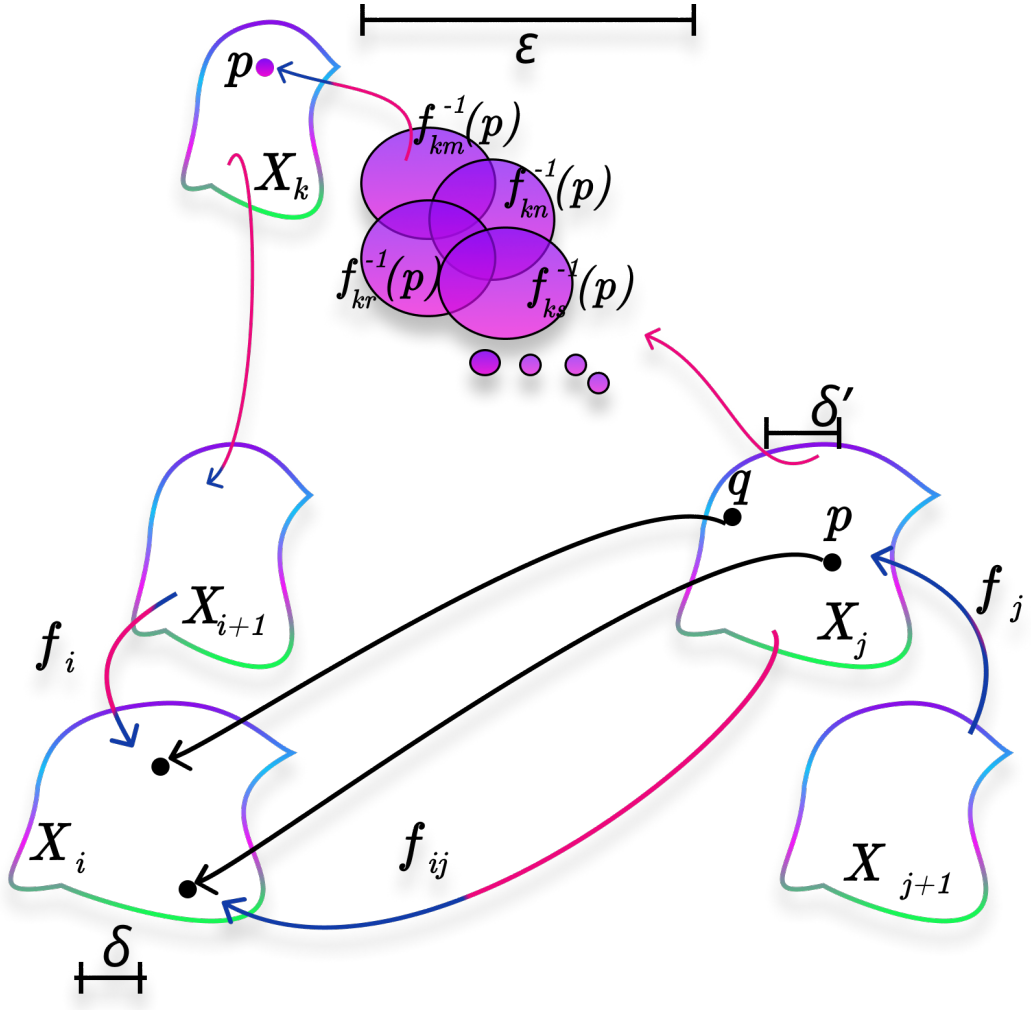


Figura 1.36: Teorema de encaje Anderson-Choquet

Definimos un homeomorfismo $H_i : X_i \times X_i \to K_i \times K_i \subset \mathbb{R}^{2n}$ dado por $H_i(x, y) = (h_i(x), h_i(y))$. Esto es posible porque el producto de homeomorfismos es un homeomorfismo y el producto de conjuntos compactos en espacios euclidianos es compacto.

Usando el Teorema de encaje Anderson-Choquet, sabemos que $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\cap_{i=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\geq i}X_m}$. Denotemos este homeomorfismo como $\phi : X \to \cap_{i=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\geq i}X_m}$.

Ahora definimos el siguiente conjunto:

$$Y = \{(x, y) \in X \times X : x \in X_i \text{ y } y \in X_{f_i(i)} \text{ para algún } i \in \{1, 2, \ldots\}\}.$$

Es importante notar que $Y \subseteq \cap_{i=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\geq i}X_m} \times \cap_{i=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\geq i}X_m}$.

Definimos la función $H : Y \to \mathbb{R}^{2n}$ como $H(x, y) = H_i(x, y)$ si $x \in X_i$ y $y \in X_{f_i(i)}$ para algún i. Como H_i es un homeomorfismo para cada i, la función H es continua.

Finalmente, definimos la función $G : X \times X \to \mathbb{R}^{2n}$ como $G(x, y) = H(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))$. Como ϕ y H son continuas, entonces G es continua.

Hemos construido una función continua $G : X \times X \to \mathbb{R}^{2n}$. Como X es compacto, siendo el límite inverso de una sucesión de conjuntos compactos, su producto $X \times X$ también es compacto. Entonces, $G(X \times X)$ es compacto en $\mathbb{R}^{2n}$, lo que implica que X es encajable en $\mathbb{R}^{2n}$. ■

Definición 1.55. *Un **tríodo simple** es un espacio homeomorfo a la letra T.*

Proposición 1.56 ([3], 2.20)**.** *Un límite inverso de arcos no puede contener una curva cerrada simple (fig 1.37). Más aún, un límite inverso de arcos, así como un límite inverso de curvas cerradas simples, no puede contener un triodo simple (fig 1.38).*

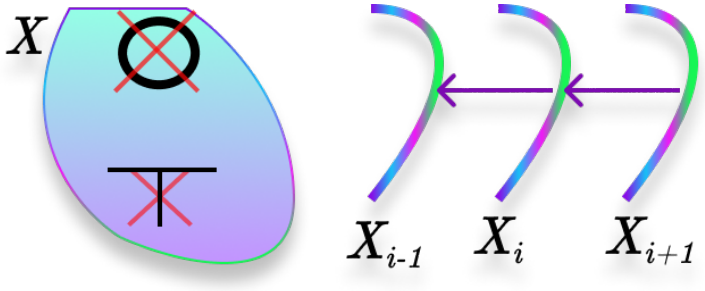


Figura 1.37: Límite inverso de arcos.

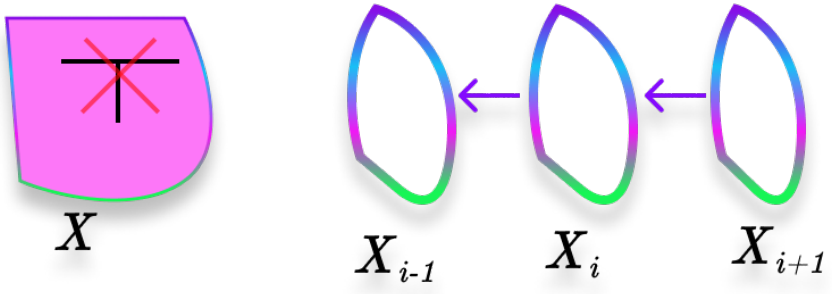


Figura 1.38: Límite inverso de curvas cerradas simples.

Proposición 1.57. *Todo continuo hereditariamente indescomponible (1.37) no contiene arcos.*

Demostración. Supongamos por contradicción que un continuo hereditariemente indescomponible X contiene un arco. Sea A un subconjunto de X que es un arco. Entonces A es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Denotemos este homeomorfismo por $f : A \to [0, 1]$.

Ahora, consideremos los conjuntos $A_0 = f^{-1}(\{0\})$ y $A_1 = f^{-1}(\{1\})$, que son los puntos extremos de A. Los conjuntos $\{0\}$ y $\{1\}$ son cerrados en $[0,1]$, y su preimagen bajo una función continua también es cerrada. Por lo tanto, A_0 y A_1 son cerrados en A.

Además, $A\backslash(A_0 \cup A_1)$ es homeomorfo al intervalo abierto $(0,1)$, que es un espacio conexo. Por lo tanto, $A\backslash(A_0 \cup A_1)$ es un subespacio conexo de A.

Observamos que $A = (A\backslash(A_0 \cup A_1)) \cup (A_0 \cup A_1)$, donde $(A\backslash(A_0 \cup A_1)) \cap (A_0 \cup A_1) = \varnothing$. Esto contradice el hecho de que A, como subespacio de un continuo hereditariamente indescomponible, también debe ser hereditariamente indescomponible.

Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción, lo que demuestra que un continuo hereditariamente indescomponible no puede contener arcos. ■

Teorema 1.58 ([3], 2.29). ***Teorema de Aproximación Interior***. *Sea Y un espacio métrico compacto y sea $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos de Y tales que, para cada $i = 1, 2, \ldots$, existen funciones continuas sobreyectivas $g_i : Y_{i+1} \to Y_i$ y $\varphi : Y \to Y_i$ tales que $g_i \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i$; si la sucesión $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre Y, entonces Y es homeomorfo a $\varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

1.3.3 Descomposiciones de continuos

Continuamos analizando métodos para construir continuos a partir de otros, este último será sobre descomposiciones semi-continuas superiores (1.63).

Definición 1.59. *Sea (X,τ) un espacio topológico no vacío. Sea $\mathcal{D}$ una partición de X y sea*

$$\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \tau\}.$$

Resulta que $\tau(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$; en efecto, tomando la función natural $\pi : X \to \mathcal{D}$ definida para cada $x \in X$ como

$$\pi(x) = \text{ el único } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } x \in D,$$

puede verse que $\tau(\mathcal{D})$ es la topología más grande para $\mathcal{D}$ tal que π es continua.

El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es llamado un ***espacio de descomposición*** *de X, o más sencillamente, una* ***descomposición*** *de X. La topología $\tau(\mathcal{D})$ es llamada la* ***topología de descomposición*** *(fig 1.39).*

Cuando los miembros de la partición $\mathcal{D}$ son cerrados se dice que $\mathcal{D}$ es una ***partición cerrada****.*

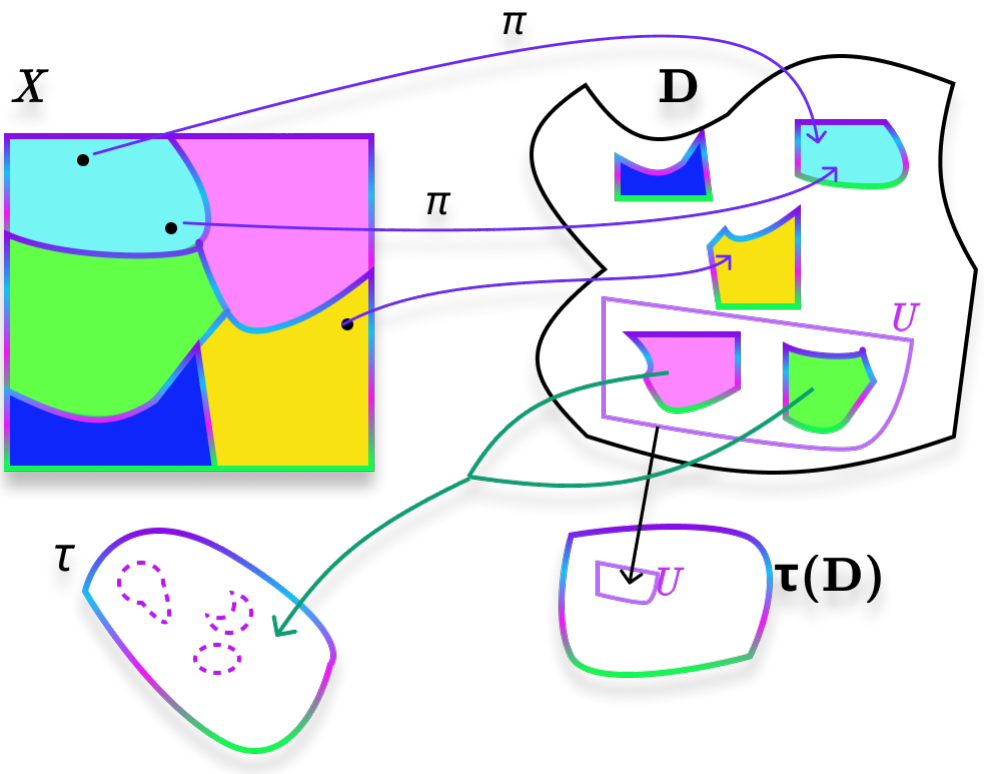


Figura 1.39: Espacio de descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ del espacio topológico (X, τ).

Intuitivamente, una descomposición es el espacio obtenido del espacio original al identificar todos los puntos de cada miembro de una partición dada. Por esta razón, las descomposiciones son frecuentemente llamadas **espacios de identidicación**. También son llamadas **espacios cocientes** por su íntima conexión entre relaciones de equivalencia y particiones en la teoría de conjuntos.

Hemos dicho que en esta sección construiremos continuos a partir de los espacios de descomposición, sin embargo no siempre se cumple que un espacio de descomposición de un continuo es también un continuo como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.60. *Sea el continuo $X = [-1, 1]$ y sea $\mathcal{D}$ la partición cerrada de X dada por*

$$\mathcal{D} = \{\{x, -x\} | -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}.$$

Entonces la descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ no es un continuo pues no es Hausdorff y por tanto tampoco es metrizable. □

Teorema 1.61. *Una descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un espacio métrico compacto X es metrizable si y solo si es Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es metrizable. Como la función canónica π definida en 1.59 es continua, por el teorema 1.19 se sigue que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es Hausdorff. El recíproco es trivial. ■

Ahora veremos cómo construir continuos nuevos usando descomposiciones.

Teorema 1.62. *Una descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un continuo es un continuo si y solo si es Hausdorff.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 1.61 y del hecho de que la conexidad y la compacidad son invariantes bajo funciones continuas, más precisamente, bajo la función continua π. ■

Sin embargo, usar este último teorema para checar si una descomposición es un continuo sería desgastante al tener que checar primero si es Hausdorff y por tanto metrizable, por lo cual introduciremos la siguiente definición y más adelante veremos una forma más sencilla de construir dichos continuos.

Definición 1.63. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X se dice que es* ***semi-continua superior*** *(**scs**), si siempre que $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \varnothing$, entonces $A \subset U$ (fig 1.40).*

Notemos que esta definición no toma en cuenta a la topología descomposición sino solamente a la partición. También haremos uso de la siguiente terminología.

Definición 1.64. *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición de X, entonces cualquier subconjunto de X que sea una unión de una subcolección de $\mathcal{D}$ se dice que es $\mathcal{D}$-**saturado**.*

Claramente, tomando la función canónica $\pi : X \to \mathcal{D}$, cualquier $\phi^{-1}(\mathcal{C})$ para $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ es $\mathcal{D}$-saturado. También, un subconjunto $A \subset X$ es $\mathcal{D}$-saturado si y solo si $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$. Por lo tanto:

Proposición 1.65 ([3], p.39). *Si V es $\mathcal{D}$-saturado y abierto en X, $\pi(V)$ es abierto en $\mathcal{D}$.*

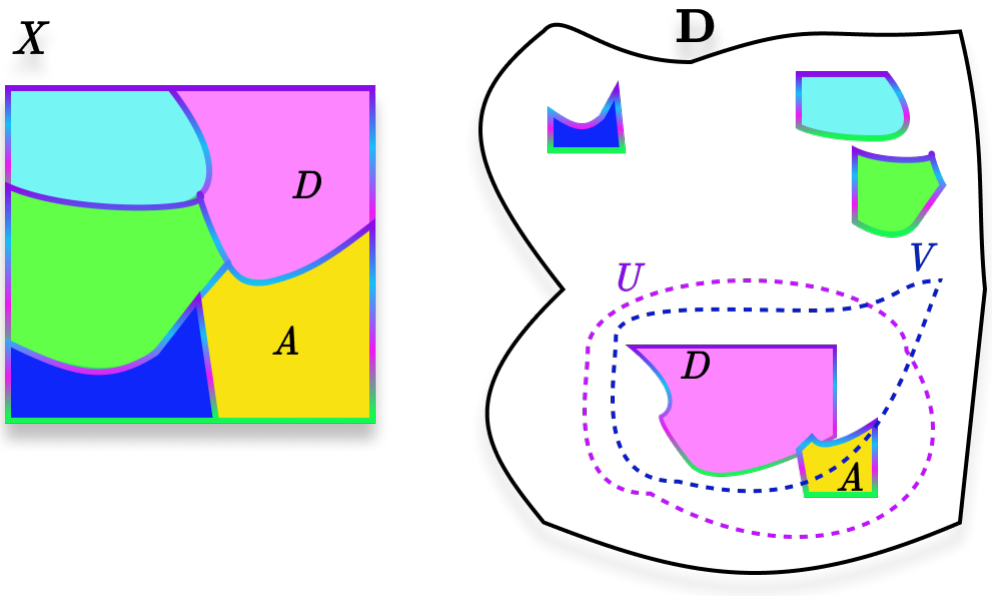


Figura 1.40: Partición semicontinua superior.

Al pensar sobre descomposiciones scs también podemos hacerlo como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.66 ([3], 3.7)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Tomemos la función canónica $\pi : X \to \mathcal{D}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{D}$ es una descomposición scs;*
2. *π es una función cerrada, es decir, las imágens de conjuntos cerrados en X mediante π son conjuntos cerrados respecto a $\tau(\mathcal{D})$;*
3. *Si $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$ y $D \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V \subset U$ es $\mathcal{D}$-saturado.*

Lema 1.67. *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición scs de un espacio T_1, (X, τ), entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Fijemos un conjunto $D \in \mathcal{D}$. Como X es T_1, para cada punto $x \in X \setminus D$, existe un conjunto abierto $U_x \in \tau$ que contiene a x y es disjunto de D. Entonces, por la propiedad 3 de la propisición anterior, existe un conjunto abierto $V_x \in \tau$ tal que $D \subset V_x \subset U_x$ y V_x es $\mathcal{D}$-saturado.

La colección $\{V_x\}_{x\in X\setminus D}$ es un conjunto de abiertos que cubre $X\setminus D$. Tomemos el complemento de la unión de estos conjuntos:

$$D^c = X\setminus D = \bigcup_{x\in X\setminus D}(X\setminus V_x).$$

Como la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, D^c es un conjunto abierto. Por lo tanto, su complemento $D = (D^c)^c$ es un conjunto cerrado en X. Como esto es válido para cada $D\in\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X. ■

Sin embargo no toda partición cerrada es necesariamente scs, según el ejemplo 1.60.

Teorema 1.68 (Teorema 3.9, [3])**.** *Cualquier descomposición scs de un espacio métrico compacto es metrizable.*

Demostración. Por el teorema 1.61, es suficiente demostrar que la descomposición es Hausdorff. Sea (X,τ) un espacio métrico compacto, $\mathcal{D}$ una descomposición scs de X y $\pi : X\to\mathcal{D}$ la función canónica (1.59). Para probar que $(\mathcal{D},\tau(\mathcal{D}))$ es Hausdorff, sean $D_1, D_2\in\mathcal{D}$ tales que $D_1\neq D_2$. Como D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de X por el teorema 1.67 y X es normal (1.8), entonces existen $U_1, U_2\in\tau$ tales que $U_1\cap U_2=\varnothing$ y $D_i\subset U_i$ para cada i. Como $\mathcal{D}$ es scs, la proposición 1.66 nos da $V_1, V_2\in\tau$ tales que $D_i\subset V_i\subset U_i$ y V_i es $\mathcal{D}$-saturado para cada i. Notemo que $D_i\in\pi(V_i)$ para cada i ya que $D_i\subset V_i$ y $D_i\in\mathcal{D}$. Luego $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos en $\mathcal{D}$ por 1.65. Como $U_1\cap U_2=\varnothing$ y $V_i\subset U_i$, se tiene $V_1\cap V_2=\varnothing$. Como $\pi^{-1}[\pi(V_i)]=V_i$ para cada i, $\pi(V_1)\cap\pi(V_2)=\varnothing$. Por lo tanto $(\mathcal{D},\tau(\mathcal{D}))$ es Hausdorff. Esto termina la demostración. ■

Finalmente veremos cómo construir nuevos continuos a partir de otros, esta vez usando descomposiciones scs:

Teorema 1.69. *Cualquier descomposición scs de un continuo es un continuo.*

Demostración. Sea (X,τ) un continuo, y supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición scs de X. Dado que X es un continuo, es compacto y conexo.

Por el teorema anterior, sabemos que $\mathcal{D}$ es metrizable. Entonces, existe una métrica d en $\mathcal{D}$ que induce una topología τ_d en $\mathcal{D}$ tal que $(\mathcal{D},\tau_d)$ es un espacio métrico.

La función canónica $\pi : X\to\mathcal{D}$ es una función continua y cerrada ya que $\mathcal{D}$ es scs. Además, como X es compacto y π es continua, su imagen $\pi(X)=\mathcal{D}$ es compacta en la topología inducida τ_d. Por lo tanto, $(\mathcal{D},\tau_d)$ es un espacio compacto.

Para mostrar que $(\mathcal{D}, \tau_d)$ es conexo, supongamos por contradicción que no lo es. Entonces, existen conjuntos abiertos disjuntos $U, V \subseteq \mathcal{D}$ tales que $\mathcal{D} = U \cup V$. Consideremos los conjuntos $A = \pi^{-1}(U)$ y $B = \pi^{-1}(V)$. Estos conjuntos son disjuntos y su unión es X, es decir, $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = X$.

Dado que π es continua, A y B son conjuntos abiertos en X. Como X es conexo, esto implica que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, lo que contradice nuestra suposición inicial de que $\mathcal{D}$ se puede dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos U y V. Por lo tanto, $(\mathcal{D}, \tau_d)$ debe ser conexo.

Entonces, $(\mathcal{D}, \tau_d)$ es un continuo, lo que significa que cualquier descomposición scs de un continuo es un continuo. ■

A continuación mostramos algunos ejemplos de cómo obtener continuos a partir de descomposiciones scs usando el teorema previo.

Ejemplo 1.70. ***La cinta de Möbius****. Sea $\mathcal{D}$ la partición del cuadrado I^2 cuyos miembros tienen la forma*

$$\{(x, 0), (1 - x, 1)\} \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$
$$\{(x, y)\} \text{ para } 0 < y < 1.$$

Resulta que $\mathcal{D}$ es scs. Luego, por el teorema 1.69, el espacio de descomposición es un continuo el cual es llamado la cinta de Möbius.

□

Definición 1.71. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado no vacío de X. Sea $\mathcal{D}_A$ la partición de X dada por*

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{z\} : z \in X \setminus A\}.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{D}_A$ es scs. Denotamos el espacio de descomposición por $\mathbf{X/A}$ (fig 1.43).

Se puede pensar en X/A como el resultado de encojer A en un punto. El siguiente resultado se obtiene fácilmente al aplicar los teoremas 1.68 y 1.69.

Proposición 1.72. *Si X es un espacio métrico compacto o un continuo, así también lo será X/A.*

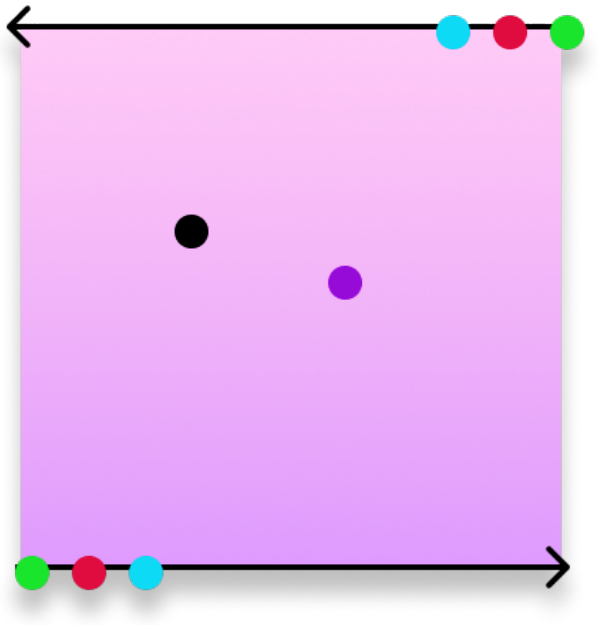


Figura 1.41: Espacio de identidicación de I^2.

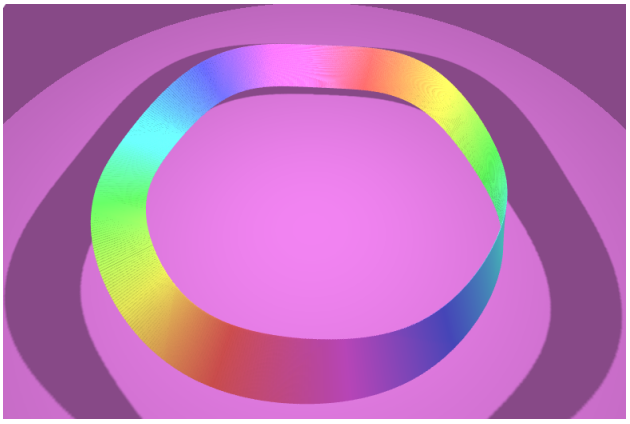


Figura 1.42: La cinta de Möbius

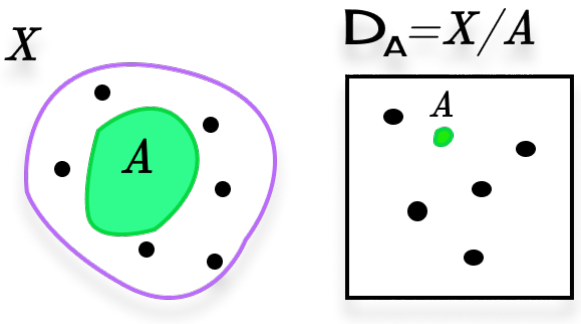


Figura 1.43: Espacio de descomposición X/A.

Definición 1.73. *Sea $S = X \times [0,1]$ donde X es un espacio topológico y S tiene la topología producto. Sea $A = \{(x,1) : x \in X\}$. El espacio de descomposición S/A es llamado el* ***cono topológico sobre*** $\mathbf{X}$ *y se denota por* $\mathbf{CT(X)}$ *(fig 1.44). El* ***vértice*** *de $CT(X)$ es el punto A y la* ***base*** *de $CT(X)$ es el conjunto*

$$\pi(\{(x,0) : x \in X\}) \qquad \text{con } \pi \text{ como en 1.59.}$$

A continuación damos algunas propiedades de $CT(X)$.

Proposición 1.74 ([3], 3.15). *1. $CT(X)$ siempre es arco-conexo.*

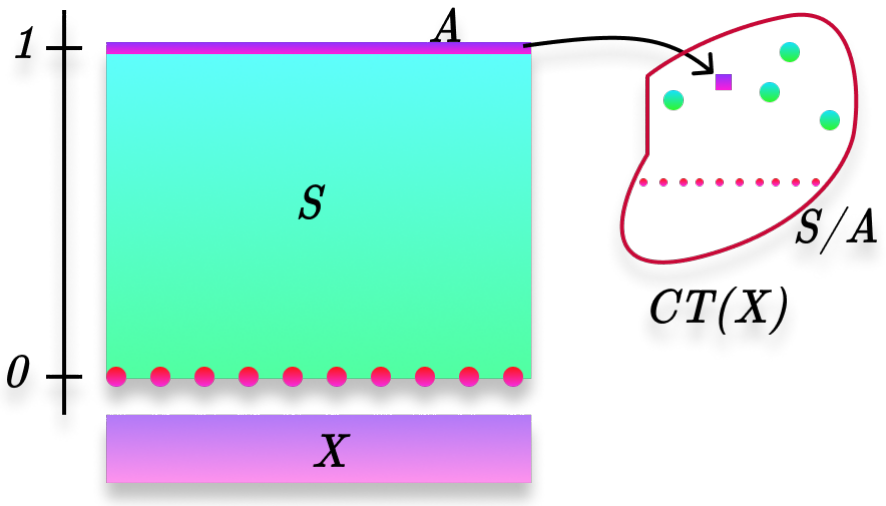


Figura 1.44: Cono topológico $CT(X)$ sobre un espacio X.

2. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $CT(X)$ es un continuo (por la proposición 1.72).*

3. *El cono doble $CT(CT(X))$ es homeomorfo a $CT(X) \times [0,1]$.*

Definición 1.75 (3.28, [3]). *Sea X un espacio métrico separable, entonces $X \subset I^\infty$ por 1.33. Sea θ el cero de I^∞. Para cada $x \in X$ formamos en el espacio $I^\infty \times I$ el segmento convexo L_x de $(\theta, 1)$ a $(x, 0)$ dado por*

$$L_x = \{t(\theta, 1) + [1-t](x, 0) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

*El **cono geométrico sobre** $\mathbf{X}$, $\mathbf{CG(X)}$, se define como*

$$CG(X) = \bigcup_{x \in X} L_x.$$

Proposición 1.76 (3.28, [3]). *Si X es compacto, entonces $CG(X)$ y $CT(X)$ son homeomorfos. Si X es un espacio discreto infinito contable, entonces $CG(X)$ y $CT(X)$ no son homeomorfas.*

Definición 1.77. *Tomando el cono topológico $CT(X)$ con base B, el espacio de descomposición (1.59) $CT(X)/B$ es llamado la **suspensión topológica** sobre X y se denota por $\mathbf{ST(X)}$ (fig 1.46).*

*La **suspensión geométrica** $SG(X)$ sobre un espacio métrico separable X se define de manera similar a la del cono geométrico.*

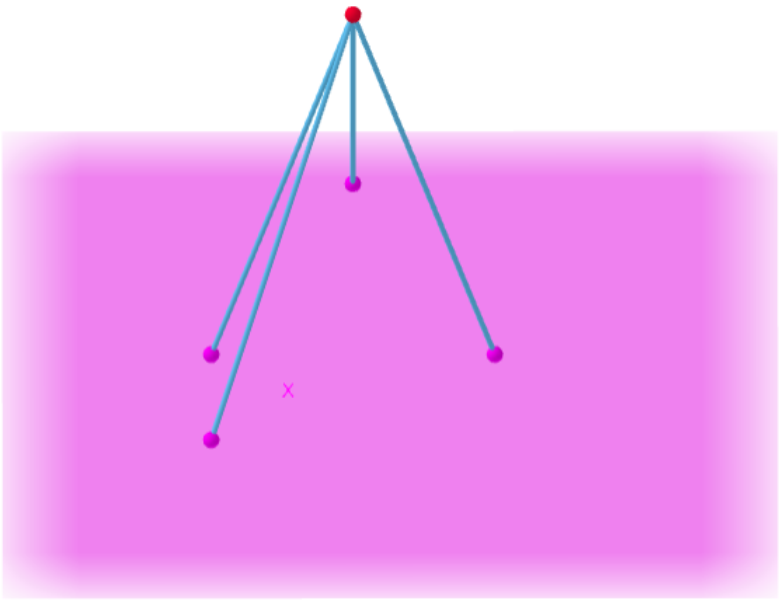


Figura 1.45: Cono geométrico sobre un espacio discreto de cuatro puntos.

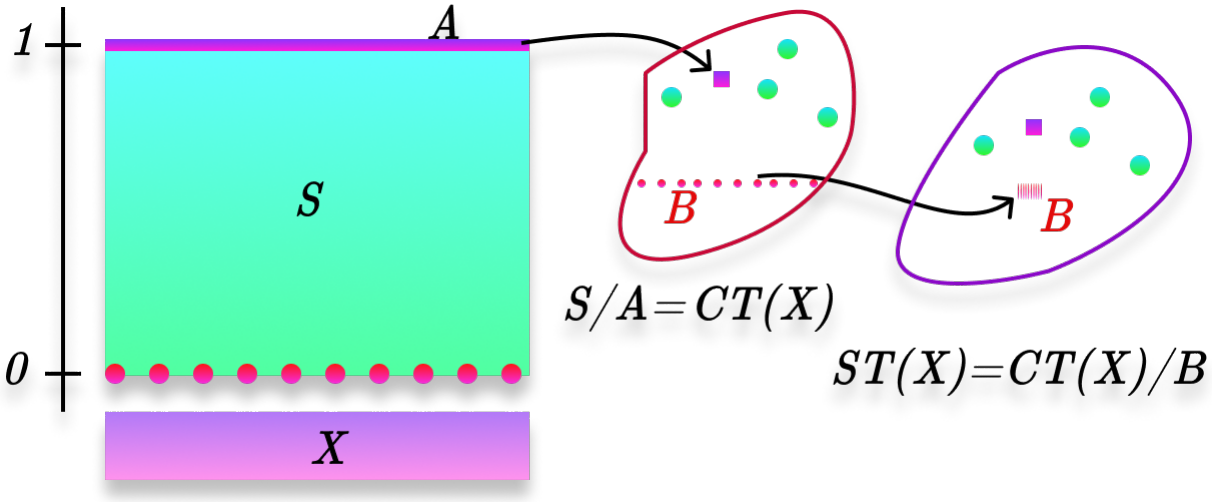


Figura 1.46: Suspensión topológica $ST(X)$.

Proposición 1.78. *Cuando X es un espacio métrico compacto $ST(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como X es compacto, entonces $CT(X)$ es un continuo por la proposición 1.74. Luego, por la proposición 1.72 se tiene que $CT(X)/B$ es un continuo y terminamos. ■

1.3.4 Contractibilidad

Ahora veremos cómo se comporta la contractibilidad en los conos y suspensiones.

Proposición 1.79 ([5], 2.17). *S^n no es contraíble (1.26) para ningún n.*

Proposición 1.80 ([5], 5.4). *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $CT(X)$ (1.73) es contraíble.*

Proposición 1.81 ([5], 5.7). *Si X es un continuo, entonces $ST(X)$ (1.77) es $cr(S^1)$ (1.25).*

1.4 Continuos tipo $\mathcal{P}$

A continuación introduciremos el concepto de **espacios tipo $\mathcal{P}$**, donde $\mathcal{P}$ es alguna familia de espacios dados. Estos permiten estudiar propiedades abstractas de los espacios topológicos a través de construcciones concretas y bien definidas.

Definición 1.82. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathscr{P}$ una colección dada de espacios métricos compactos. Se dice que X es de **tipo** $\mathscr{P}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función sobreyectiva $f_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$ para algún $Y_\varepsilon \in \mathscr{P}$.*

Teorema 1.83 ([3], 2.13). *Todo continuo es un límite inverso de poliedros conexos compactos con funciones de unión sobreyectivas. Más aún: si X es un continuo y $\mathscr{P}$ es una colección de poliedros conexos compactos, entonces todos los espacios coordenados usados en la representación de límite inverso de X (con funciones de enlace sobreyectivas) pueden ser escogidos a partir de $\mathscr{P}$ si y solo si X es de tipo $\mathscr{P}$.*

1.5 Una introducción a los hiperespacios

Si (X, τ) es un espacio topológico, usaremos el término **hiperespacio** para referirnos a una colección de subconjuntos de X con la topología de Vietoris, la cual se define en 1.84. Aunque el conjunto vacío debe ser parte de la topología, por conveniencia suele excluirse. Además restringimos nuestra atención a los hiperespacios cuyos puntos son subconjuntos cerrados de X, por lo que el hiperespacio más grande de X es

$$\mathbf{CL(X)} = \{A \subset X : A \neq \varnothing \text{ es cerrado en } X\}$$

con la topología de Vietoris que se define a continuación.

Definición 1.84. *Sea (X, τ) un espacio topológico. La* ***topología de Vietoris*** *(fig 1.47) para $CL(X)$ es la topología más pequeña τ_V para $CL(X)$ que tiene la propiedad:*

$$\{A \in CL(X) : A \subset U\} \in \tau_V \text{ siempre que } U \in \tau$$
$$y \ \{A \in CL(X) : A \subset B\} \text{ es } \tau_V\text{-cerrado siempre que } B \text{ es } \tau\text{-cerrado.}$$

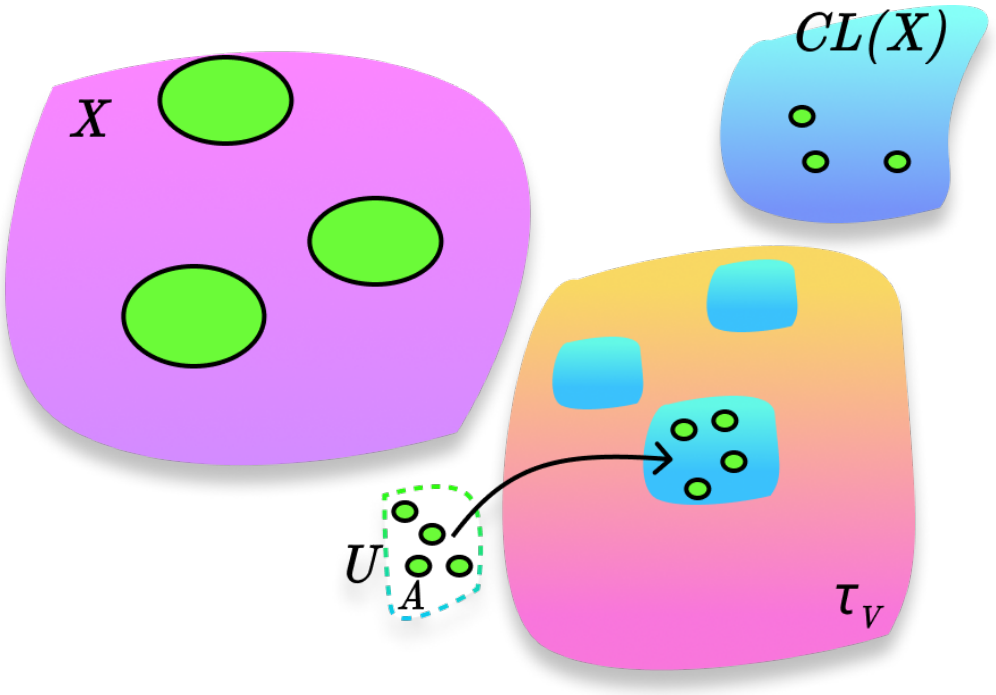


Figura 1.47: Topología de Vietoris τ_V para el hiperespacio $CL(X)$.

Proposición 1.85. *Para cualquier espacio topológico X, $CL(X)$ es un espacio T_0.*

Demostración. Para demostrar que $CL(X)$ es un espacio T_0, es decir, que para cualquier par de puntos distintos en $CL(X)$, existe un abierto que contiene a uno de ellos pero no al otro, podemos utilizar la siguiente estrategia:

Supongamos que $A, B \in CL(X)$ son tales que $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Como B es cerrado, sabemos que $X \setminus B$ es un abierto que

contiene a x. Ahora, como A es cerrado, tenemos que $X \setminus A$ es un abierto que no contiene a x. Por lo tanto, $X \setminus A$ es un abierto que contiene a B pero no a A, lo que demuestra que $CL(X)$ es un espacio T_0. ■

Definición 1.86. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $(CL(X), \tau_V)$ el espacio definido anteriormente. Si $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$, definimos (fig 1.48)*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \varnothing \text{ para cada } i\}.$$

Para el espacio $(CL(X), \tau_V)$ definido anteriormente, puede hallarse una base para la topología τ_V definiendo

$$B_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_i \in \tau \text{ para cada } i \text{ y } n < \infty\}.$$

Dicha colección resulta ser una base como se muestra en ([6], 1.2).

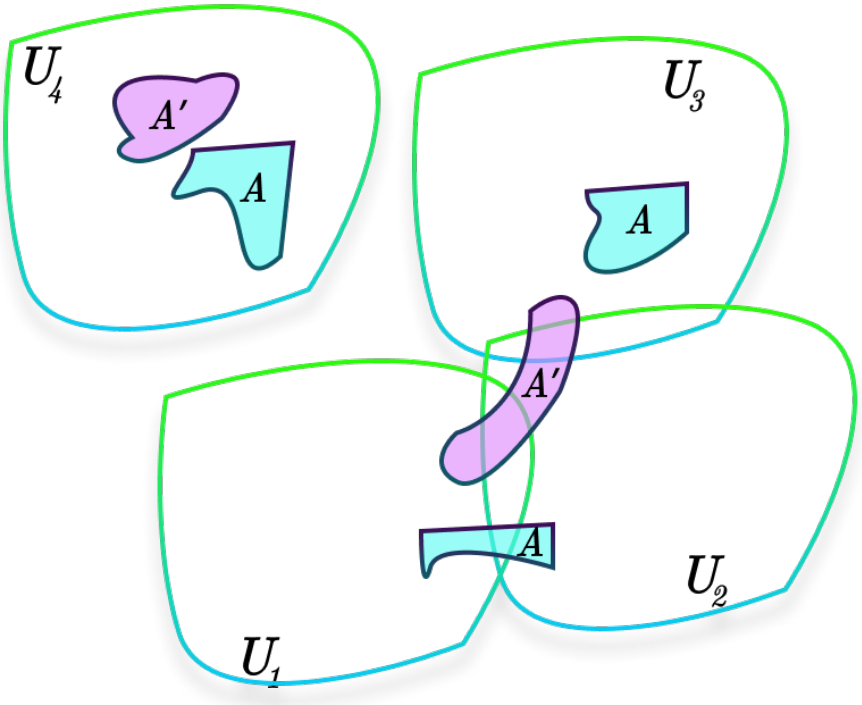


Figura 1.48: $A, A' \in \langle U_1, \ldots U_4 \rangle$

Proposición 1.87. *1. Si X es un espacio regular (1.8), entonces $CL(X)$ es un espacio de Hausdorff.*

2. Si $CL(X)$ es un espacio de Hausdorff y X es un espacio T_1 entonces X es un espacio regular.

Demostración. 1. Es suficiente demostrar que para cualesquiera dos conjuntos cerrados $A, B \in CL(X)$, existen abiertos disjuntos $U, V \in \tau_V$ tales que $A \in U$ y $B \in V$.

Como X es un espacio regular, para cualquier par de subconjuntos cerrados $A, B \in CL(X)$ con $A \neq B$, existen abiertos disjuntos U_a, V_b en X tales que $a \in U_a$, $b \in V_b$, y $U_a \cap V_b = \varnothing$. Podemos suponer que U_a y V_b son disjuntos con respecto a A y B, respectivamente.

Ahora consideremos los siguientes subconjuntos cerrados de X:

$$C_A = \bigcap_{a \in A} \overline{U_a} \text{ y } C_B = \bigcap_{b \in B} \overline{V_b}$$

Notemos que, por la regularidad de X, C_A y C_B son subconjuntos cerrados de X. Además, como $A \subseteq C_A$ y $B \subseteq C_B$, podemos considerar A y B como subconjuntos cerrados de C_A y C_B, respectivamente.

Definamos U como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados $C \subseteq C_A$ tales que $C \cap \overline{V_b} = \varnothing$ para todo $b \in B$, y definamos V como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados $D \subseteq C_B$ tales que $D \cap \overline{U_a} = \varnothing$ para todo $a \in A$.

Ahora vamos a demostrar que U y V son abiertos disjuntos en $CL(X)$ tales que $A \in U$ y $B \in V$. Primero, notemos que U y V son abiertos ya que para cada $C \in U$ y $D \in V$, tenemos $C \subseteq C_A$ y $D \subseteq C_B$, y además $C \cap \overline{V_b} = \varnothing$ y $D \cap \overline{U_a} = \varnothing$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto, podemos elegir abiertos disjuntos U_C y V_D en X tales que $C \subseteq \bigcap_{a \in A} U_a \subseteq U_C$ y $D \subseteq \bigcap_{b \in B} V_b \subseteq V_D$, y entonces U y V son simplemente las intersecciones de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a U_C y V_D, respectivamente.

Además, U y V son disjuntos ya que si $C \in U \cap V$, entonces tenemos $C \subseteq C_A \cap C_B$, y además $C \cap \overline{U_a} = \varnothing$ y $C \cap \overline{V_b} = \varnothing$ para todo a y b en A y B, respectivamente. Pero entonces $C \subseteq C_A$ y $C \subseteq C_B$, lo que implica que $C \subseteq C_A \cap C_B$. Por lo tanto, C debe tener una intersección no vacía con algún subconjunto cerrado $D \subseteq C_B \setminus A$, lo que contradice la definición de U.

Finalmente, tenemos que demostrar que $A \in U$ y $B \in V$. Supongamos que $A \notin U$. Entonces, por definición, para todo $B \in V$, tenemos que $C_B \cap A \neq \varnothing$. Esto implica que $A \subseteq C_A \subseteq X \setminus C_B$ para todo $B \in V$. Pero entonces $\bigcap_{B \in V}(X \setminus C_B)$ es un abierto que contiene a A, lo que contradice el hecho de que A es un subconjunto cerrado de X. Por lo tanto, $A \in U$. De manera similar, podemos demostrar que $B \in V$.

2. Para demostrar que X es un espacio regular, debemos demostrar que para todo punto $x \in X$ y todo subconjunto cerrado $A \subseteq X$ que no contenga a x, existen abiertos disjuntos U y V en X que contienen a x y A, respectivamente.

   Como X es un espacio T_1, para todo punto $x \in X$, el conjunto x es un subconjunto cerrado de X. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X que no contenga a x. Entonces, $A \in CL(X)$. Como $CL(X)$ es un espacio de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U y V en $CL(X)$ que contienen a A y x, respectivamente. Es decir, $A \subseteq U$ y $x \subseteq V$, y $U \cap V = \varnothing$ en $CL(X)$.

   Como U es un abierto en $CL(X)$, entonces $U = C_U$ para algún subconjunto cerrado C_U de X. Entonces, $A \subseteq C_U$, lo que implica que $C_U^c \subseteq A^c$. Como $x \notin A$, entonces $x \in A^c$, lo que implica que $x \in C_U^c$. Por lo tanto, C_U^c es un abierto en X que contiene a x y está contenido en A^c.

   Como V es un abierto en $CL(X)$, entonces $V = C_V$ para algún subconjunto cerrado C_V de X. Como $x \subseteq V$, entonces $x \in C_V$, lo que implica que C_V^c es un abierto en X que contiene a A y está contenido en V^c.

   Finalmente, como $U \cap V = \varnothing$ en $CL(X)$, entonces $C_U \cap C_V = \varnothing$ en X. Por lo tanto, hemos encontrado abiertos disjuntos C_U^c y C_V^c en X que contienen a x y A, respectivamente, lo que demuestra que X es un espacio regular.

   ■

Otro resultado interesante es el siguiente:

Teorema 1.88. *Si X es un espacio T_1 entonces $CL(X)$ es un espacio T_1. El recíproco es falso.*

Demostración. Para demostrar que $CL(X)$ es T_1, debemos demostrar que para cualquier par de puntos $A, B \in CL(X)$, existen abiertos $U, V \subseteq CL(X)$ tales que $A \in U$, $B \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Sea $A, B \in CL(X)$ tales que $A \neq B$. Entonces, existen subconjuntos cerrados $C_A, C_B \subseteq X$ tales que $A = C_A$ y $B = C_B$. Como X es T_1, existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $C_A \subseteq U$, $C_B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$. Entonces, $A = C_A \in CL(X)$ está contenido en $C_U = U$, que es un abierto en $CL(X)$. De manera similar, $B = C_B \in CL(X)$ está contenido en $C_V = V$, que es también un abierto en $CL(X)$. Además, $C_U \cap C_V = \varnothing$, ya que $U \cap V = \varnothing$ en X. Por lo tanto, $CL(X)$ es T_1.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Un contraejemplo es el espacio de dos puntos $X = \{a, b\}$ con la topología discreta. Es fácil comprobar que $CL(X) = \{\varnothing, a, b, X\}$ es T_1, ya que cada punto

tiene su propio conjunto cerrado. Pero X no es T_1, ya que los puntos a y b no son distinguibles por abiertos. ■

A partir de este hiperespacio general $CL(X)$ para X, podemos definir varios hiperespacios específicos que comúnmente se usan en la teoría de hiperespacios de continuos, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.89. *Para un espacio topológico (X, τ) definimos:*

1. $\mathbf{CLC(X)} = \{A \in CL(X) : A \text{ es conexo}\}$;
2. $\mathbf{2^X} = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$;
3. $\mathbf{C(X)} = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$.

Es fácil notar lo siguiente:

Proposición 1.90. *Si X es compacto entonces $2^X = CL(X)$; por otro lado, si X es Hausdorff entonces $2^X = \{A \subset X : A \neq \varnothing \text{ es compacto}\}$.*

Además, para cualquier X, se satisface $C(X) = 2^X \cap CLC(X)$.

Definición 1.91. *Supongamos que X es un espacio T_1. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, sea*

$$\mathbf{F_n(X)} = \{A \subset X : 1 \leq |A| \leq n\},$$

al cual se cosidera como subespacio de $CL(X)$ o de 2^X. $|A|$ denota la cardinalidad de A. El espacio $F_n(X)$ es llamado el **n-*ésimo producto simétrico de* X**; *$F_1(X)$ suele llamarse el* ***espacio de singulares*** *de X.*

Proposición 1.92. 1. *Si X es un espacio T_1 entonces $X \cong F_1(X)$.*
2. *Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $CL(X)$ para cada $n = 1, 2 \ldots$.*

Demostración. 1. Si X es un espacio T_1, entonces el espacio de singulares $F_1(X)$ está definido como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X. Para demostrar que $X \cong F_1(X)$, definimos una función $f : X \to F_1(X)$ como $f(x) = x$ para todo $x \in X$. Es fácil ver que f es biyectiva y que su inversa está dada por $f^{-1}(A) = \text{cl}(A)$ para todo $A \in F_1(X)$.

2. Para demostrar que $F_n(X)$ es cerrado en $CL(X)$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, consideremos un punto $A \in CL(X)$ que no está en $F_n(X)$. Entonces, $|A| > n$ o $|A| = 0$.

   Si $|A| > n$, podemos encontrar un subconjunto finito B de A tal que $|B| = n + 1$. Como X es de Hausdorff, para cada $b \in B$, podemos encontrar un abierto U_b que contenga a b y no contenga a los demás elementos de B. Sea $U = \bigcap_{b \in B} U_b$ y observe que U es un abierto que contiene a B pero no a A. Por lo tanto, $A \notin \overline{F_n(X)}$, lo que implica que $F_n(X)$ es cerrado en $CL(X)$.

   Si $|A| = 0$, entonces $A = \varnothing$ y $\varnothing \in F_n(X)$ para cualquier n. Por lo tanto, $F_n(X)$ es cerrado en $CL(X)$ para cada $n = 1, 2, \ldots$.

   Por lo tanto, hemos demostrado que si X es un espacio de Hausdorff, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $CL(X)$ para cada $n = 1, 2 \ldots$.

■

Ejemplo 1.93. *Ahora daremos un ejemplo de cuando X es un espacio T_1 y $F_1(X)$ no es cerrado en $CL(X)$.*

Consideremos el espacio $X = \{a, b\}$ con la topología discreta.

Entonces, $CL(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. El espacio $F_1(X)$ está formado por todos los subconjuntos no vacíos de X, es decir, $F_1(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Ahora, observe que el conjunto $\{a\}$ es el complemento del cerrado $\{b\}$ en X, por lo que $\{a\}$ es abierto en X y, por lo tanto, también es abierto en $CL(X)$. Como $\{a\}$ es un punto en $F_1(X)$, concluimos que $F_1(X)$ no es cerrado en $CL(X)$.

Por lo tanto, hemos encontrado un ejemplo de un espacio T_1 donde $F_1(X)$ no es cerrado en $CL(X)$. □

Proposición 1.94. *1. Si X es un espacio T_1 conexo, entonces $F_n(X)$ es conexo para cada n; por lo cual $CL(X)$ es conexo.*

2. Si X es un espacio T_1, entonces X es separable si y solo si $CL(X)$ es separable.

Demostración. 1. Sea X un espacio T_1 conexo y supongamos que $F_n(X)$ no es conexo, es decir, existen $A, B \subset F_n(X)$ tales que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = F_n(X)$. Sea $x_1, \ldots, x_n \in A$ y $y_1, \ldots, y_n \in B$ (notar que por definición de $F_n(X)$, A y B tienen n elementos).

Como X es T_1, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 \neq y_1$. Luego, como X es conexo, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x_1) = 0$ y $f(y_1) = 1$. Extendemos f a una función continua $g : F_n(X) \to [0,1]$ tal que $g(x_i) = 0$ para todo i y $g(y_i) = 1$ para todo i. Es fácil ver que $g|A$ y $g|B$ son funciones continuas que toman valores en $[0,1]$ y que $g|A \equiv 0$ y $g|B \equiv 1$, lo que contradice que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(X)$ es conexo para cada n, lo que implica que $CL(X)$ es conexo.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es separable y sea D un conjunto denso y numerable en X. Para demostrar que $CL(X)$ es separable, consideremos la familia de conjuntos $\{A_D(x)\}_{x \in X}$ definida por

$$A_D(x) = \{D \cap U : U \text{ es un entorno abierto de } x\}.$$

Observemos que cada $A_D(x)$ es numerable, ya que D es numerable y cada entorno abierto U de x también lo es.

Ahora, sea $A \in CL(X)$ y sea $x \in A$. Como X es T_1, sabemos que x es cerrado en X, y como $A \cap x \neq \emptyset$, debe ser $A \cap x = x$. Por tanto, $x \in A_D(x)$, y como A es cerrado, podemos concluir que $A \subseteq \overline{A_D(x)}$.

De esta manera, para cada $A \in CL(X)$, podemos asociarle un elemento $x_A \in X$ tal que $A \subseteq \overline{A_D(x_A)}$.

Ahora, consideremos el conjunto $D' = \{x_A : A \in CL(X)\}$. Veamos que D' es numerable y denso en $CL(X)$.

Para ver que D' es numerable, notemos que cada $A_D(x)$ se puede asociar a lo más a un elemento de D'. Por tanto, como cada $A_D(x)$ es numerable, se tiene que D' es numerable.

Para ver que D' es denso en $CL(X)$, sea $A \in CL(X)$ y $\varepsilon > 0$ dado. Como $x_A \in A$, podemos elegir un punto $y \in D \cap A$ (ya que D es denso en X). Ahora, como X es T_1, podemos elegir un entorno abierto U de x_A tal que $y \notin U$. Entonces, $D \cap U$ es un abierto de X, y como $y \in A \cap D \cap U$, se tiene que $A \cap D \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, $D \cap U \in A_D(x_A)$ y $D \cap U \in B_\varepsilon(A)$. De esta manera, podemos concluir que D' es denso en $CL(X)$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $CL(X)$ es separable. Entonces existe un conjunto $D \subseteq CL(X)$ denso y numerable. Definimos $E = \bigcup_{A \in D} A$. Veamos que E es un conjunto denso y numerable en X.

Primero, como D es denso en $CL(X)$, para cada abierto $U \subseteq X$ y cada $x \in U$, existe $A \in D$ tal que $x \in A \subseteq \overline{A} \subseteq U$, es decir, A es un subconjunto cerrado de X que contiene a x y está contenido en U. Por lo tanto, $x \in E$.

Segundo, como D es numerable, entonces E también es numerable, ya que es una unión numerable de conjuntos finitos o numerables.

Por lo tanto, hemos demostrado que X es separable.

■

Definición 1.95. *Para un espacio T_1, X, sea*

$$\mathbf{F(X)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X).$$

*$F(X)$ es llamado el **espacio de subconjuntos finitos de X**.*

Teorema 1.96. *Los hiperspacios $CL(X)$, $CLC(X)$, 2^X, $C(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ son invariantes topológicos, es decir, si $X \cong Y$, entonces hip$(X) \cong$ hip(Y), donde "hip" varía entre todos los sufijos anteriores.*

Demostración. Como $X \cong Y$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$. Definimos $h^* :$ hip$(X) \to$ hip(Y) por $h^*(A) = h(A)$ para cada $A \in$ hip(X). Como h es una función cerrada, ya que hip$(X) \subset CL(X)$ para cualquier hip, entonces h^* está bien definida. Más aún, h^* es suprayectiva pues para cualquier $B \in$ hip(Y), $h^{-1}(B) \in$ hip(X) y $h^*(h^{-1}(B)) = B$. Además h^* es inyectiva pues h lo es.

Como h es una función cerrada entonces

$$(h^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n\rangle) = \langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_n)\rangle,$$

donde cada W_i es abierto en Y; y dado que h es continua y B_V es base para τ_V, entonces h^* es continua.

Ahora, como h es biyectiva y continua, entonces

$$h^*(\langle U_1, \ldots, U_m\rangle) = \langle h(U_1), \ldots, h(U_m)\rangle,$$

donde cada U_i es abierto en X. Como h es una función abierta y B_V es base de τ_V, entonces h^* es una función abierta y por tanto $(h^*)^{-1}$ es continua.

Por lo tanto h^* es un homeomorfismo y así hip$(X) \cong$ hip(Y), como queríamos. ■

Definición 1.97. *Sea (X, d) un espacio métrico acotado. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in CL(X)$, definimos*

$$\mathbf{N_d}(\varepsilon, \mathbf{A}) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}. \tag{1.7}$$

Llamamos a $N_d(\varepsilon, A)$ la d-bola abierta generalizada en X sobre A de radio ε (fig 1.49). Además, para cada $A, B \in CL(X)$ definimos:

$$\mathbf{H_d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\} \tag{1.8}$$

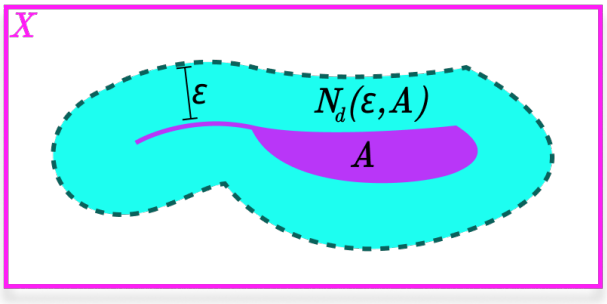


Figura 1.49: d-bola abierta generalizada sobre A de radio ε.

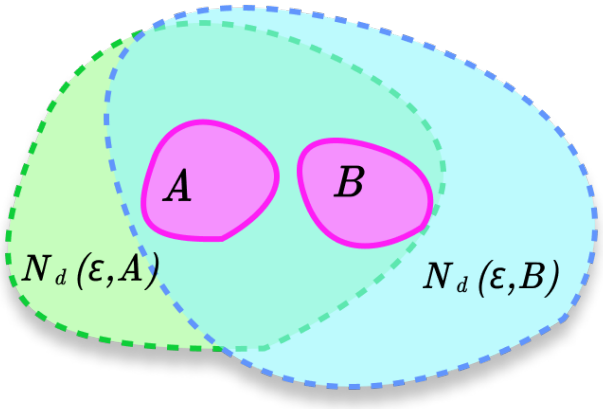


Figura 1.50: Métrica de Hausdorff $H_d(A, B) = \varepsilon$ para $A, B \in CL(X)$.

Teorema 1.98 ([6], 2.2)**.** *La función H_d definida en la ecuación 1.8 es una métrica para el hiperespacio $CL(X)$ cuando X es acotado y es llamada la* ***métrica de Hausdorff*** *inducida por d (fig 1.50).*

1.5.1 Metrizabilidad de hiperespacios

Teorema 1.99 ([6], 2.4)**.** *Sea (X, τ) un espacio T_1. Si $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable, entonces (X, τ) es un espacio metrizable y compacto.*

Siempre ocurrirá que cuando los espacios $(CL(X), \tau_V)$ y $(2^X, \tau_V|_{2^X})$ sean metrizables, lo serán por la métrica de Haussdorff como veremos más adelante.

Teorema 1.100 ([6], 2.10)**.** *Sea (X, τ) un espacio T_1. Si $(CL(X), \tau_V)$ tiene una base numerable, entonces (X, τ) es compacto.*

Teorema 1.101 ([6], 2.14)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico acotado. Si (X, d) es completo (1.4) entonces $(CL(X), H_d)$ es completo.*

Corolario 1.102. *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces $(2^X, H_d)$ es completo.*

De ahora en adelante, cuando nos enfoquemos en el hiperespacio 2^X (o subespacios $\mathcal{H}$ de 2^X), τ_{H_d} denotará la topología para $\mathcal{H}$ inducida por la métrica de Hausdorff H_d para $\mathcal{H}$. También, si $A \in \mathcal{H}$ y $r > 0$, $B_{H_d}(r, A)$ denotará la H_d-bola abierta con radio r y centro A.

Teorema 1.103 ([6], 3.1)**.** *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $(2^X, \tau_V)$ es metrizable. En efecto, $\tau_V = \tau_{H_d}$.*

Más generalmente, si (X, τ) es un espacio topológico metrizable, entonces $(2^X, \tau_V)$ es metrizable.

Teorema 1.104. *Sea (X, τ) un espacio T_1. Entonces, $(2^X, \tau_V)$ es metrizable si y solo si (X, τ) es metrizable.*

Demostración. Supongamos que $(2^X, \tau_V)$ es metrizable, entonces, como $F_1(X) \subset 2^X$ y dado que $X \cong F_1(X)$ por la proposición 1.92, podemos concluir que (X, τ) es metrizable. El recíproco se cumple por el teorema 1.103. ■

Si queremos generalizar el teorema anterior para que se satisfaga en $CL(X)$, debe agregarse la condición de compacidad para X, como se muestra a continuación.

Teorema 1.105. *Sea (X, τ) un espacio T_1. $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable si y solo si (X, τ) es un espacio metrizable compacto.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio metrizable compacto, entonces $(2^X, \tau_V)$ es metrizable por el teorema 1.103. Como $2^X = CL(X)$ ya que X es compacto, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable. El recíproco es el teorema 1.99. ■

Teorema 1.106. *Si (X,τ) es un espacio metrizable compacto, entonces $(CL(X),\tau_V)$ es compacto.*

Demostración. Sea d una métrica para X que induzca τ. Entonces (X,d) es totalmente compacto y completo. por lo tanto $(CL(X),H_d)$ es totalmente acotado y completo por 1.101. Por tanto $(CL(X),H_d)$ es compacto ([2], p.20). Como X es compacto se tiene $CL(X)=2^X$ y entonces $\tau_{H_d}=\tau_V$. Por lo cual $(CL(X),\tau_V)$ es compacto. ■

Corolario 1.107.

1. *Sea (X,τ) un espacio T_1. Si $(CL(X),\tau_V)$ es metrizable, entonces $(CL(X),\tau_V)$ es compacto.*
2. *Si (X,τ) es un espacio metrizable compacto, entonces $(C(X),\tau_V)$ y $(2^X,\tau_V)$ son compactos.*

1.5.2 Convergencia en hiperespacios

Definición 1.108. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el **límite inferior** y **límite superior** de la sucesión como sigue:*

$$\begin{aligned}\lim\inf \mathbf{A_i} =&\{x\in X:\ \textit{para cada } U\in\tau \textit{ tal que } x\in U, U\cap A_i\neq\varnothing\\ &\textit{para todos excepto un nùmero finito de } i\};\\ \lim\sup \mathbf{A_i} =&\{x\in X:\ \textit{para cada } U\in\tau \textit{ tal que } x\in U, U\cap A_i\neq\varnothing\\ &\textit{para infinitamente muchos } i\}.\end{aligned}$$

*El **límite** de la sucesión se define cuando el límite superior e inferior son iguales, es decir:*

$$A=\lim A_i=\lim\inf A_i=\lim\sup A_i.$$

*En este caso también se dice que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es **L-convergente** en X al límite A.*

*Cuando la convergencia ocurre en $CL(X)$ en lugar de X, diremos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es **τ_V-convergente** en $CL(X)$ al límite A.*

Teorema 1.109 ([6], 4.4). *Sea (X,τ) un espacio topológico regular. Entonces la τ_V-convergencia en $CL(X)$ implica la L-convergencia en X.*

Teorema 1.110 ([6], 4.6). *Sea (X,τ) un espacio topológico compacto numerable. La L-convergencia en X para sucesiones en $CL(X)$ implica la τ_V-convergencia en $CL(X)$.*

Teorema 1.111. *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff compacto. Entonces la L-convergencia en X para sucesiones en $CL(X)$ es equivalente a la τ_V-convergencia en $CL(X)$.*

Demostración. Como los espacios Hausdorff compactos son regulares y numerables, entonces, por los dos teoremas previos se concluye la demostración. ■

Corolario 1.112. *Sea (X,τ) un espacio metrizable compacto. Entonces la L-convergencia en X para sucesiones en $CL(X)$ es equivalente a la convergencia en $CL(X)$ con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Demostración. El corolario se sigue de los teoremas 1.111 y 1.103. ■

Notemos que cuando (X,τ) es un espacio metrizable compacto, el operador Lim es el operador de cerradura en sucesiones para la topología de Vietoris en $CL(X)$. Sin embargo, cuando (X,τ) solamente es metrizable, Lim puede no ser un operador de clausura de sucesiones para cualquier topología para $CL(X)$ o incluso $F_2(X)$ ([6], 4.20).

Teorema 1.113 ([6], 4.9). *Sea (X,τ) un espacio T_1. Si la L-convergencia en X para* ***sucesiones no triviales*** *($\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es no trivial si $\lim A_i \neq \varnothing$) en $F_2(X)$ implica la τ_V-convergencia en $F_2(X)$, entonces (X,τ) es compacto numerable.*

Corolario 1.114 ([3], 4.14). *Sea X un espacio métrico compacto. Toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 1.115 ([3], 4.16). *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X que converge a $A \in 2^X$. Si cada A_i está (d,ε_i)-encadenado donde $\varepsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, entonces $A \in C(X)$.*

1.5.3 Funciones de Whitney

Definición 1.116. *Sea X un espacio métrico compacto. Una* ***función de Whitney para*** $\mathcal{H} \subset \mathbf{CL(X)}$ *es una función continua $w : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ tal que:*

1. *para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$, $w(A) < w(B)$;*

2. *$w(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.*

Además se define un ***bloque de Whitney*** *en $\mathcal{H}$ como un conjunto de la forma $w^{-1}([s, t])$, donde w es una función de Whitney para $\mathcal{H}$ y $0 \leq s \leq t \leq w(X)$ (fig 1.51).*

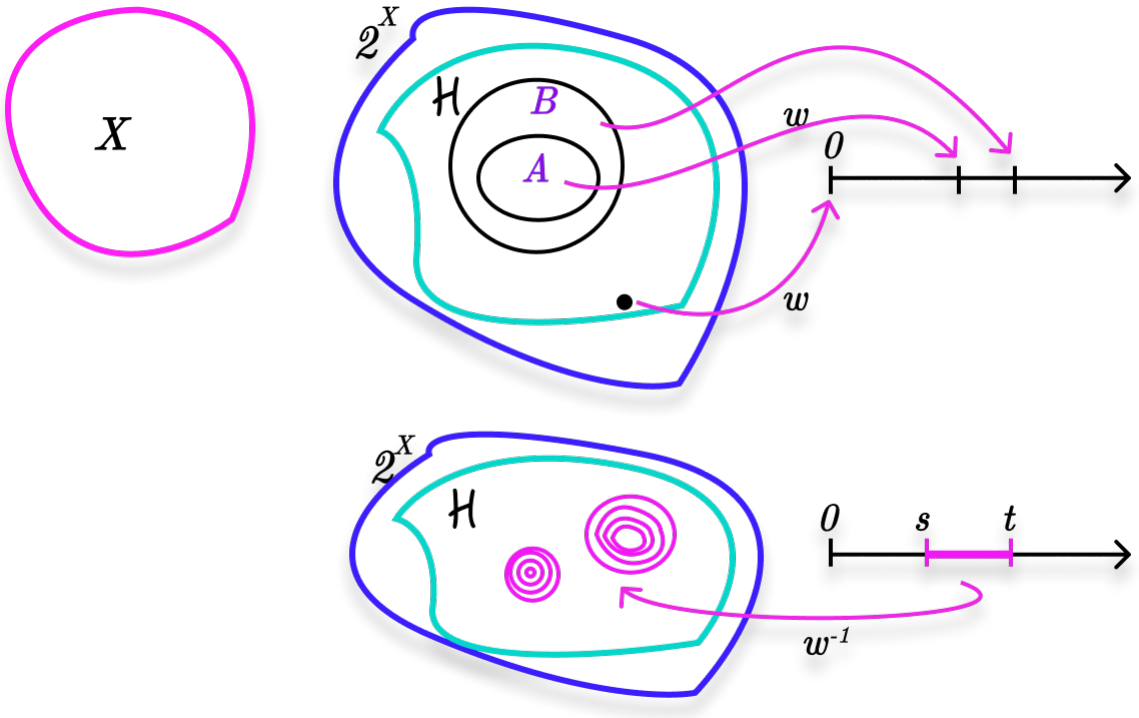


Figura 1.51: Función de Whitney w y bloque de Whitney $w^{-1}([s, t])$.

Un hecho importante sobre las funciones de Whitney es que estas siempre existen para cualquier hiperespacio de un espacio metrizable compacto.

Teorema 1.117 ([6], 13.4)**.** *Si X es un espacio metrizable compacto, entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio de X.*

Teorema 1.118 ([6], p.110). ***Teorema del máximo-mínimo***. *Sea X un espacio metrizable compacto. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado no vacío de 2^X, entonces existe un miembro maximal de $\mathcal{C}$ y un miembro minimal de $\mathcal{C}$.*

1.5.4 Continuos irreducibles

Definición 1.119. *Sea X un continuo y $A \subset X$. Se dice que X es **irreducible sobre** A si ningún subcontinuo propio de X contiene a A.*

*Un continuo X se llama **irreducible** si X es irreducible sobre $\{p, q\}$ para alguna pareja de puntos $p, q \in X$. En este caso también se dice que X es **irreducible entre** p **y** q.*

Proposición 1.120 ([3], 4.35). *1. Si X es un continuo y A es un subconjunto cerrado de X, entonces X contiene un subcontinuo que es irreducible sobre A.*

2. Si X es un continuo y $p, q \in X$, entonces X contiene un subcontinuo que es irreducible sobre A.

Del segundo inciso de la proposición anterior podemos ver que cualquier continuo no degenerado contiene muchos continuos irreducibles no degenerados, haciendo que los continuos irreducibles sean abundantes y por tanto, su estudio sea de interés, como veremos en el capítulo siguiente.

1.5.5 La mayoría de continuos son indescomponibles

Ahora probaremos un resultado muy importante sobre los continuos y su indescomponibilidad.

Proposición 1.121. *La "mayoría" de continuos son indescomponibles.*

Demostración. Vamos a demostrar que "la mayoría" de los continuos son indescomponibles en el sentido de que los continuos indescomponibles ocupan un subconjunto denso y G_δ (1.6) del espacio de todos los continuos. Para ello, consideremos el espacio $C(M)$, donde M denota una n-celda, $n \geq 2$, o el cubo de Hilbert, y d denota una métrica para M. Sabemos que el espacio $C(M)$ con la métrica H_d es un espacio métrico compacto.

Sea $\mathcal{L} = \{X \in C(M) : X$ es un continuo indescomponible no degenerado$\}$. Queremos probar que $\mathcal{L}$ es un G_δ denso en $C(M)$.

Primero, definamos los conjuntos $\mathcal{C}_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n =&\{X \in C(M) : X = A \cup B \text{ donde } A \text{ y } B \\ &\text{son subcontinuos de} X, A \not\subseteq N_d(1/n, B) \text{ y } B \not\subseteq N_d(1/n, A)\}\end{aligned}$$

Nuestro objetivo es demostrar que $\mathcal{L} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^c$.

$\subseteq$) Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces, X es un continuo indescomponible no degenerado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $X \in \mathcal{C}_n$. Entonces, $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X que cumplen con las condiciones dadas en la definición de $\mathcal{C}_n$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que X es indescomponible. Por lo tanto, $X \notin \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $X \in \mathcal{C}_n^c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^c$, y hemos demostrado que $\mathcal{L} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^c$.

$\supseteq$) Sea $X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^c$. Entonces, $X \notin \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que X no es indescomponible. Entonces, existe una descomposición de X en dos subcontinuos no vacíos y disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$. Sin embargo, esto implicaría que $X \in \mathcal{C}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X debe ser indescomponible. Además, como $X \in C(M)$, X es un continuo no degenerado. Entonces, $X \in \mathcal{L}$, y hemos demostrado que $\mathcal{L} \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^c$.

Para demostrar que $\mathcal{L}$ es un G_δ, necesitamos probar que los conjuntos $\mathcal{C}_n^c$ son cerrados en $C(M)$.

Para probar que $\mathcal{C}_n^c$ es cerrado en $C(M)$, considere una sucesión (X_k) en $\mathcal{C}_n^c$ que converge a algún continuo $X \in C(M)$. Necesitamos mostrar que $X \in \mathcal{C}_n^c$. Supongamos, por contradicción, que $X \in \mathcal{C}_n$. Entonces, $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X que cumplen las condiciones dadas en la definición de $\mathcal{C}_n$. Sin embargo, esto implicaría que para algún k suficientemente grande, X_k también cumple con las condiciones dadas en la definición de $\mathcal{C}_n$, lo cual es una contradicción porque todos los X_k están en $\mathcal{C}_n^c$. Por lo tanto, $X \in \mathcal{C}_n^c$, y podemos concluir que $\mathcal{C}_n^c$ es cerrado en $C(M)$.

Dado que cada $\mathcal{C}_n^c$ es un conjunto cerrado en $C(M)$, la intersección de conjuntos cerrados es cerrada, y $\mathcal{L}$ es un G_δ en $C(M)$.

Para demostrar que $\mathcal{L}$ es denso en $C(M)$, necesitamos mostrar que cada conjunto abierto no vacío en $C(M)$ contiene al menos un elemento de $\mathcal{L}$. Tomemos un conjunto abierto $U \subseteq C(M)$ y un continuo $X \in U$.

Debemos encontrar un continuo indescomponible no degenerado $Y \in U$. Primero, podemos construir una sucesión de continuos $X_n \in C(M)$ que convergen a X. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos modificar X_n ligeramente para obtener un continuo Y_n que satisface las condiciones dadas en la definición de C_n. Específicamente, podemos elegir Y_n de tal manera que Y_n tenga dos subcontinuos A_n y B_n que cumplan con las condiciones de la definición de C_n.

Ahora, podemos tomar una subsucesión convergente (Y_{n_k}) de (Y_n) que converja a un continuo $Y \in U$. Afirmamos que Y es indescomponible no degenerado. Si Y fuera degenerado, entonces alguno de los continuos Y_{n_k} también sería degenerado para k suficientemente grande, lo cual es una contradicción porque todos los Y_n son no degenerados. Además, si Y fuera descomponible, entonces existirían dos subcontinuos no vacíos y disjuntos A y B de Y tales que $Y = A \cup B$. Pero entonces, alguno de los continuos Y_{n_k} también sería descomponible para k suficientemente grande, lo cual es una contradicción porque todos los Y_n son indescomponibles. Por lo tanto, Y es un continuo indescomponible no degenerado en U.

Hemos demostrado que cada conjunto abierto no vacío en $C(M)$ contiene al menos un continuo indescomponible no degenerado. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es denso en $C(M)$.

En resumen, hemos demostrado que $\mathcal{L}$, el conjunto de continuos indescomponibles no degenerados, es un G_δ denso en $C(M)$. Esto nos permite afirmar que "la mayoría"de los continuos en $C(M)$ son indescomponibles, en el sentido de que ocupan un subconjunto denso y G_δ del espacio de todos los continuos. ■

Análogamente puede probarse que la "mayoría" de continuos son hereditariamente indescomponibles.

Estos dos resultados indican la importancia que tiene el estudiar la indescomponibilidad en los continuos y sus hiperespacios.

1.6 Teoremas de delimitado de frontera

Teorema 1.122 ([3], 5.2). ***Teorema del Cable Cortado***. *Sea (X, d) un espacio métrico com-*

pacto y sean A y B subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta a ambos A y B (equivalentemente, ninguna componente de X lo hace), entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.

Teorema 1.123 ([3], 5.4). ***Teorema de Delimitado de Frontera I.*** *Sea X un continuo y sea $\varnothing \neq U \subsetneq X$ abierto. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Bd(U) \neq \varnothing$.*

Definición 1.124. *Sea X un espacio métrico. Si A es un subcontinuo no degenerado de X, decimos que A es un* ***continuo de convergencia*** *(de X) si existe de sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos A_i de X tal que*

$$A = \lim A_i \qquad y \qquad A \cap A_i = \varnothing \text{ para cada } i.$$

En caso de que X sea compacto, los continuos A_i pueden elegirse de manera que además sean mutuamente disjuntos.

Definición 1.125. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $p \in X$, se dice que X es* ***conexo en pequeño en*** **p**, *escrito* ***CEP en*** **p**, *si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p (fig 1.52).*

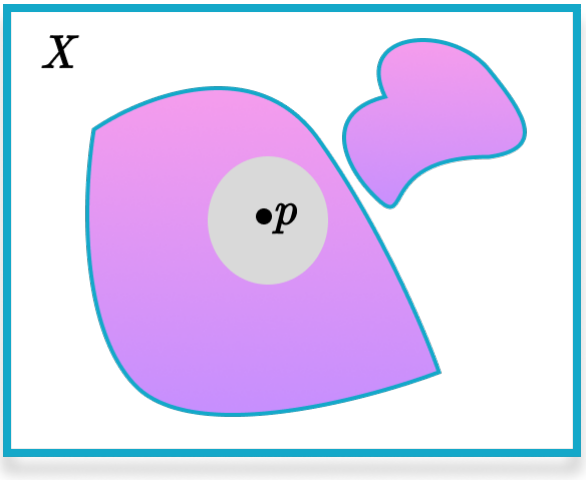


Figura 1.52: Espacio conexo en pequeño (CEP).

Teorema 1.126 ([3], 5.12). *Sea X un continuo y sea*

$$N = \{x \in X : X \text{ no es cep en } x\}.$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

Definición 1.127. *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Definimos la* ***composante de*** **p** ***en*** **X** *como*

$$\kappa(p) = \{x \in X : \text{ existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in A\}.$$

Las composantes juegan un papel muy importante en la teoría sobre los continuos irreducibles que veremos en el capítulo siguiente. A continuación vemos que toda composante de un punto es un conjunto denso y conexo.

Proposición 1.128 ([3], 5.20). *Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, entonces $\kappa(p)$ es un subconjunto conexo y denso de X.*

Los cep en p sirven para localizar la noción de conexidad. Otra forma de hacerlo es como sigue.

Definición 1.129. *Un espacio topológico (X, τ) es* ***localmente conexo en*** **p** *(escrito* ***LC en*** **p***), con $p \in X$, si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p que es abierta en X (fig 1.53).*

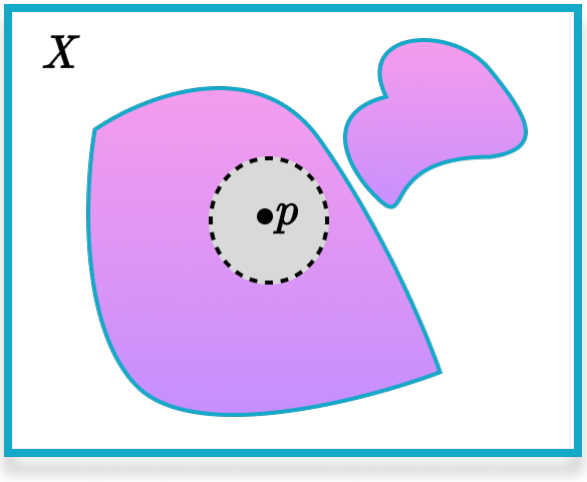


Figura 1.53: Espacio localmente conexo (LC).

Proposición 1.130. *Si (X, τ) es LC en p entonces (X, τ) es CEP en p.*

Proposición 1.131. *1. Un espacio topológico es LC en cada punto si y solo si cada componente de cada conjunto abierto es abierta.*

2. Un espacio topológico es CEP en cada punto si y solo si es LC en cada punto. Por lo tanto, cuando se asumen globalmente, las dos nociones son las mismas.

3. Sea X un continuo y sea $F = \{p \in X : X \text{ no es } LC \text{ en } p\}$. Entonces F es denso en sí mismo, (es decir, cada punto de F es un punto límite de F), y si $F \neq \varnothing$, F contiene un continuo no degenerado.

Definición 1.132. *Una **nidificación** es una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos tales que para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathcal{C} : C_1 \subset C_2$ o $C_2 \subset C_1$.*

Figura 1.54: Nidificación $\mathcal{C}$.

Proposición 1.133 ([3], 5.25). *Sea (X, d) un continuo y sea $A \in C(X)$ tal que $A \neq X$.*

1. Si $0 < \varepsilon < H_d(A, X)$, entonces existe $A_\varepsilon \in C(X)$ tal que $A \subset A_\varepsilon$ y $H_d(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$.

2. Si $0 < \varepsilon < H_d(A, X)$, entonces existe una (H_d, ε)-cadena (1.18) $\mathcal{C}_\varepsilon$ en $C(X)$ de A a X tal que $\mathcal{C}_\varepsilon$ es una nidificación.

3. Existe un subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(X)$ tal que $A, X \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ es una nidificación.

4. El continuo $\mathcal{L}$ en el inciso anterior es un arco. Por lo tanto $C(X)$ es arco-conexo.

5. *Si $B \in 2^X$ y $B \neq X$, existe un subcontinuo $\mathcal{P}$ de 2^X tal que $B, X \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ es una nidificación y, por tanto, $\mathcal{P}$ es un arco. Por lo tanto 2^X es arco-conexo.*

Definición 1.134. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A, B \subset X$, decimos que X es **conexo entre** A **y** B si $X \neq U \cup V$ donde $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ y $U, V \in \tau$ (fig 1.55).*

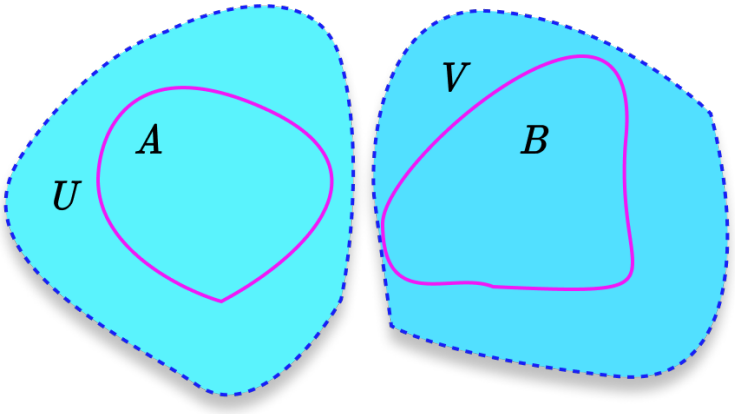


Figura 1.55: Espacio X disconexo entre A y B.

1.6.1 Arcos ordenados

Definición 1.135. *Sea (X, d) un compacto y sea $\mathcal{H} \subset 2^X$. Un **arco ordenado** en $\mathcal{H}$ es un arco α, en $\mathcal{H}$, tal que α es una nidificación.*

Proposición 1.136 ([5], 6.7). *Sea X un continuo y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ de A a B.*

Teorema 1.137 ([3],5.25). ***Teorema del Arco Ordenado**. Si $A \in 2^X$ y $A \neq X$, existe un arco ordenado α en 2^X de A a X y, si $A \in C(X)$, $\alpha \subset C(X)$.*

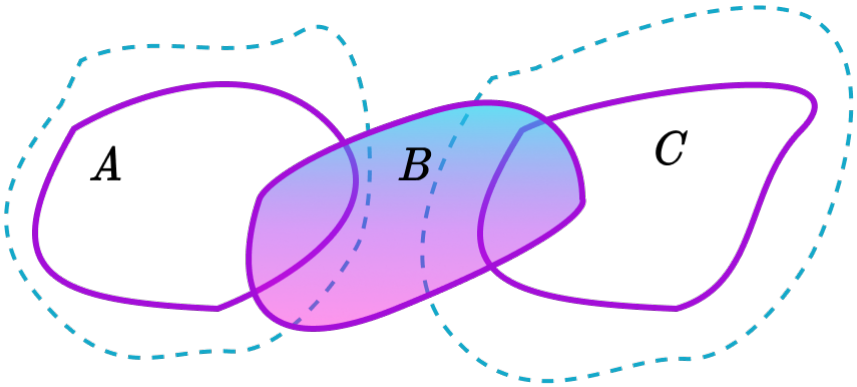


Figura 1.56: B separa a A y C.

1.6.2 Separabilidad

Definición 1.138. *Sean X un espacio topológico y $A, B, C \subset X$. Decimos que B **separa** a A y C en X si $X \setminus B$ es disconexo entre A y C (1.134), es decir, $X \setminus B = P|Q$ con $A \subset P$ y $C \subset Q$ (fig 1.56).*

Proposición 1.139. *Si K es un continuo de convergencia (1.124) en un espacio X y $x, y \in K$, entonces ningún subconjunto de K puede separar a x y y en X.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un subconjunto B de K que separa a x y y en X, es decir, $X \setminus B$ es disconexo entre x y y. Entonces, podemos escribir $X \setminus B = P \mid Q$ con $x \in P$ y $y \in Q$.

Como K es un continuo de convergencia, existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que $K = \lim A_i$ y $A_i \cap K = \varnothing$ para cada i. En particular, dado que $x \in K$, existe un índice i_1 tal que $x \in Ai_1$.

Por otro lado, como $B \subseteq K$, se tiene que $B \cap A_{i_1} = \varnothing$. Por lo tanto, podemos escribir $A_{i_1} = U \mid V$ con $B \subseteq U$ y $y \in V$.

Ahora, como $K = \lim A_i$, existen índices $i_2 > i_1$ y $i_3 > i_2$ tales que $A_{i_2} \subseteq U$ y $A_{i_3} \subseteq V$. Pero entonces $A_{i_2} \cap A_{i_3} \neq \varnothing$, lo cual contradice el hecho de que $A_i \cap K = \varnothing$ para cada i. Por lo tanto, no puede existir un subconjunto de K que separe a x y y en X, lo que completa la demostración. ■

1.7 Puntos de no corte

Teorema 1.140 ([3], 6.5). ***Principio Maximal de Hausdorff (PMH).*** *Si $\mathcal{L}$ es una colección de conjuntos, entonces cualquier nidificación (1.132) en $\mathcal{L}$ está contenida en una nidificación maximal $\mathcal{C}$.*

Teorema 1.141 ([3], 6.6). ***Existencia de punto de no corte.*** *Sea (X, τ) un continuo T_1 no-degenerado. Supongamos que X tiene un punto de corte c tal que $S \setminus \{c\} = U \mid V$. Entonces existe un punto de no corte de X en U y existe un punto de no corte de X en V. Por lo tanto X tiene al menos dos puntos de no corte.*

El siguiente teorema sirve para caracterizar a los arcos

Teorema 1.142 ([3], 6.17). *Un continuo X es un arco si y solo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.*

Definición 1.143. *Sea (X, τ) un continuo. Un punto $p \in X$ es llamado un **punto final** de X si siempre que $p \in U \in \tau$, existe $V \in \tau$ tal que $p \in V \subset U$ y $Bd(V)$ consiste únicamente de un punto.*

El símbolo $\mathbf{X}^{[1]}$ denota el conjunto de todos los puntos finales de X.

Proposición 1.144 ([3], 6.25).

1. *p es un punto final de X si y solo si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas con fronteras de un punto.*
2. *Todo punto final de un continuo X es un punto de no corte de X. El recíproco caracteriza a las dendritas (2.46).*
3. *Todo punto final de un continuo X tiene vecindades abiertas V arbitrariamente pequeñas tales que $X \setminus V$ es conexo. La proposición no es cierta si las vecindades son cerradas.*
4. *Si p es un punto final de un continuo X, entonces X es cep en p. X no necesariamente es LC en un punto final p.*

Lo anterior es una generalización del punto final de un arco.

Capítulo 2

Algunos continuos especiales

Ahora analizaremos las propiedades de varios tipos de continuos importantes en la materia y que nos servirán más adelante para trabajar con sus hiperespacios y la propiedad del punto fijo. Entre estos continuos veremos los de Peano los cuales permiten tomar la conexidad como una propiedad local; también estudiaremos las gráficas que son continuos compuestos por arcos; un caso especial de las gráficas son los árboles los cuales no contienen curvas cerradas simples. Análogamente, las dendritas son continuos de Peano que no contienen curvas cerradas simples, mientras que los dendroides son una genralización de las dendritas, definiéndose como continuos arco-conexos hereditariamente unicoherentes.

2.1 Continuos de Peano

Los continuos de Peano son la clase más fundamental de continuos que se puede estudiar debido a que se definen puramente haciendo de la conexidad una propiedad local como se enuncia a continuación.

Definición 2.1. *Un espacio métrico X es llamado un* ***espacio de Peano*** *si para cada $p \in X$ y cada vecindad N de p, existe un subconjunto abierto y conexo $U \subset X$ tal que $p \in U \subset N$. Un* ***continuo de Peano*** *es un espacio de Peano que es un continuo.*

La conexidad local ya la habíamos revisado en el capítulo anterior al definir los espacios conexos en pequeño o CEP (1.125) en un punto y los espacios localmente conexos o LC (1.129). En los espacios métricos estas propiedades asumidas globalmente son equivalentes a la de ser un continuo de Peano.

Proposición 2.2. *Un espacio métrico X es un espacio de Peano si y solo si:*

1. *X es LC en cada punto;*
2. *cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierta en X, o*
3. *X es CEP en cada punto.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Supongamos que X es un espacio de Peano. Entonces, para cada $p \in X$ y cada vecindad N de p, existe un subconjunto abierto y conexo $U \subset X$ tal que $p \in U \subset N$. Esto implica que X es LC en cada punto.

$\Leftarrow$) Supongamos que X es LC en cada punto. Dado que X es un espacio métrico, también es normal. Por el teorema de Urysohn, 1.9, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(p) = 0$ y $f(N) = 1$. Consideremos el conjunto abierto $U = f^{-1}((0,1))$. Como f es continua, U es abierto. Además, $p \in U$ y $U \subset N$. Dado que X es LC en cada punto, existe un subconjunto abierto y conexo $V \subset X$ tal que $p \in V \subset U \subset N$. Entonces, X es un espacio de Peano.

2. Usando el inciso 1 de la proposición 1.131, queda claro que la equivalencia es cierta.

3. Por el inciso 2 de la proposición 1.131, se tiene que los CEP son equivalentes a los LC y por lo tanto, según el inciso 1 de esta proposición, la equivalencia será cierta.

En resumen, un espacio métrico X es un espacio de Peano si y solo si se cumple una de las tres condiciones. ■

Para algunos autores, un espacio es de Peano es lo mismo que un continuo de Peano; otros definen un espacio de Peano como una imagen Hausdorff continua de $[0,1]$.

Definición 2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Y de X se dice que tiene la* ***propiedad* S** *si para cada $\varepsilon > 0$ existen finitamente muchos subconjuntos conexos $A_1, \ldots, A_n$ de Y tales que*

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \textit{donde} \quad \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon \ \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Esta propiedad S nos será de gran utilidad para trabajar con los continuos de Peano pues como podrá verse más adelante, que tener la propiedad S es equivalente a ser un continuo de Peano.

Teorema 2.4 ([3], 8.3). *Si un espacio métrico (X,d) tiene la propiedad S, entonces (X,d) es un espacio de Peano.*

Teorema 2.5 ([3], 8.4). *Un espacio métrico compacto no vacío (X,d) es un espacio de Peano si y solo si (X,d) tiene la propiedad S. En particular, un continuo (X,d) es un continuo de Peano si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, X es la unión de finitamente muchos subcontinuos cada uno teniendo diámetro $< \varepsilon$.*

Definición 2.6. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\varepsilon > 0$. Una* $\mathbf{S}(\varepsilon)$***-cadena*** *es una colección finita y no vacía $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. *$L_i \cap L_{i+1} \neq \varnothing$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$ (cadena débil);*
2. *L_i es conexo para cada $i = 1, \ldots, n$;*
3. *$\operatorname{diam}(L_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ para cada $i = 1, 2 \ldots, n$.*

Si $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ es una $S(\varepsilon)$-cadena, cada L_i es llamado un ***eslabón*** *de $\mathscr{L}$; si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, decimos que $\mathscr{L}$ es una* $\mathbf{S}(\varepsilon)$***-cadena de x a y***. *Si $A \subset X$, definimos* $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ *como*

$$S(A,\varepsilon) = \{y \in X : \text{existe una } S(\varepsilon)\text{-cadena desde algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

Teorema 2.7 ([3], 8.9). *Si un espacio métrico (X,d) tiene la propiedad S, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, X es la unión de finitamente muchos conjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S y es de diámetro $< \varepsilon$.*

Teorema 2.8. *Si (X,d) es un continuo de Peano entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, X es la unión de finitamente muchos continuos de Peano, cada uno de los cuales es de diámetro $< \varepsilon$.*

Demostración. Por el teorema 2.5, (X, d) tiene la propiedad S. Por lo tanto podemos usar el teorema anterior para ver que X es la unión de finitamente muchos conjuntos conexos $A_1, \ldots, A_n$ los cuales tienen la propiedad S, tienen diámetro menor a ε y son cerrados en X. Por lo cual cada A_i es un continuo y por el teorema 2.4, cada A_i es un continuo de Peano. ■

Teorema 2.9 ([3], 8.14)**.** ***Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.*** *Todo continuo de Peano es una imagen continua del intervalo cerrado* $[0, 1]$.

Corolario 2.10. *Cualquier imagen Hausdorff continua de un continuo de Peano es un continuo de Peano.*

Teorema 2.11. *Un continuo Hausdorff X es un continuo de Peano si y solo si X es una imagen continua de* $[0, 1]$.

Demostración. Sea X un continuo Hausdorff.

⇒) Si X es un continuo de Peano, por el teorema 2.9 se tiene que X es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$.

⇐) Si ahora suponemos que X es una imagen continua de $[0, 1]$, por ser también de Hausdorff, se tendrá que X es un continuo de Peano.

■

Teorema 2.12 ([3], 8.18)**.** *Cualesquiera dos continuos de Peano no degenerados son imágenes continuas uno del otro.*

El siguiente teorema nos permite ver que se pueden determinar todas las descomposiciones scs de cualquier continuo de Peano dado.

Corolario 2.13. *Sea X un continuo de Peano no degenerado. Un espacio topológico Y es una descomposición scs de X si y solo si Y es un continuo de Peano.*

Definición 2.14. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Una función $f : X_1 \to X_2$ se llama* ***monótona*** *si f es continua y $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in X_2$.*

Se dice que $f : X_1 \to X_2$ es ***cuasi-monótona*** *(o* ***confluente****) si es continua y satisface:*

1. *Si $A \subset X_1$ es un subconjunto conexo, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de X_2.*

2. *Si $A \subset X_1$ es un subconjunto conexo y $B \subset X_1$ es otro subconjunto conexo que se interseca con A, entonces $f(A \cup B)$ es un subconjunto conexo de X_2.*

Proposición 2.15 ([3], 8.22)**.** *Si Y es un espacio de Hausdorff no degenerado y $f : [0,1] \to Y$ es una función monótona sobreyectiva, entonces Y es un arco.*

Teorema 2.16 ([3], 8.23)**.** ***Teorema de arco-conexidad****. Todo continuo de Peano no degenerado es arco-conexo.*

Teorema 2.17 ([5], 6.4)**.** *Todo continuo es una intersección decreciente de continuos de Peano.*

Definición 2.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $p \in X$, se dice que X es* ***localmente arco-conexo en*** **p***, escrito* ***LAC en*** **p***, si cada vecindad de p contiene una vecindad de p arco-conexa.*

Se dice que X es ***localmente arco-conexo*** *(**LAC**) si X es LAC en cada punto.*

Teorema 2.19 ([3], 8.25)**.** *Todo subconjunto abierto de un continuo de Peano es LAC. En particular, todo continuo de Peano es LAC.*

Teorema 2.20 ([3], 8.26)**.** *Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano es arco-conexo.*

Corolario 2.21. *Todo espacio de Peano localmente conexo y separable es arco-conexo.*

Teorema 2.22 ([3], 8.48)**.** *X es un continuo de Peano si y solo si 2^X es un continuo de Peano. Lo mismo ocurre si se reemplaza 2^X por $C(X)$.*

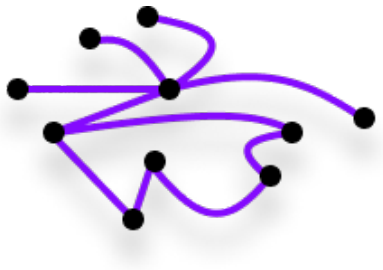


Figura 2.1: Gráfica.

2.2 Gráficas

Definición 2.23. *Se dice que un continuo X es una* ***gráfica*** *si puede ser escrito como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son disjuntos o se intersectan solamente en uno o ambos de sus puntos finales (fig 2.1).*

Proposición 2.24. *Toda gráfica es un continuo de Peano.*

No toda unión de dos gráficas es una gráfica, pero sí se cumple lo siguiente:

Proposición 2.25. *Si X y Y son gráficas tales que $X \cap Y \neq \varnothing$ es finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica.*

Definición 2.26. *Sea (x, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Sea β un número cardinal. Decimos que A* ***es de orden menor o igual que*** *β* ***en*** *X,*

$$ord(A, X) \leq \beta,$$

si para cada $U \in \tau$ tal que $A \subset U$, existe $V \in \tau$ tal que

$$A \subset V \subset U \qquad y \qquad |Bd(V)| \leq \beta.$$

Decimos que A ***es de orden*** *β* ***en*** *X, escrito*

$$ord(A, X) = \beta,$$

si $ord(A, X) \leq \beta$ y $ord(A, X) \nleq \alpha$ para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$ (fig 2.2).

Si $A = \{p\}$ la notación usada es $ord(p, X)$.

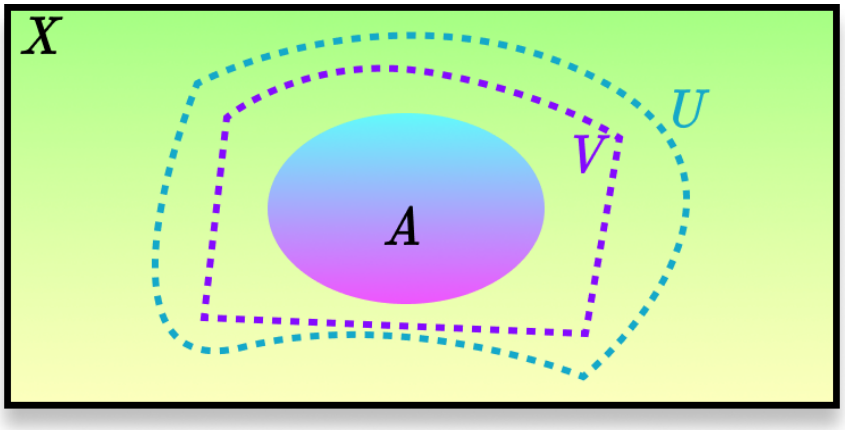


Figura 2.2: ord(A, X).

Proposición 2.27. *ord$(p, X) = 1$ si y solo si p es un punto final de X.*

Podemos caracterizar a las gráficas en términos de la noción de orden como veremos en los teoremas 2.31, 2.32 y 2.33.

Definición 2.28. *Si $n \geq 3$, definimos un* **n-*odo simple*** *como un espacio homeomorfo al cono (1.73) sobre un espacio discreto de n puntos. Si Z es un n-odo simple, el único punto de Z que es de orden ≥ 3 en Z es llamado el* ***vértice*** *de Z.*

Otra forma de definir al n-odo simple es como la unión de n arcos que emanan de un único punto v el cual será el vértice. Cada uno de los n arcos es llamado un ***radio*** *del n-odo simple. Un* **n-*odo simple estándar*** *es un n-odo simple en algún espacio métrico lineal tal que cada radio del n-odo simple es un segmento de línea recta.*

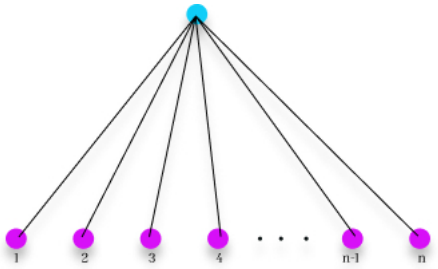


Figura 2.3: n-odo simple

Claramente un n-odo simple es una gráfica y un 3-odo simple es un tríodo simple (1.55).

Definición 2.29. *Una* **n-*aleta*** *($n \geq 3$) es un continuo que es la unión de n 2-celdas, llamadas* ***aletas****, las cuales se intersectan en un único punto y cualesquiera dos de ellas se intersectan únicamente en dicho punto.*

Es evidente que cualquier n-aleta A contiene un n-odo simple de manera que los radios del n-odo yacen en las fronteras de las respectivas aletas de A; cuando un n-odo está situdado de dicha manera, se dice que el n-odo es una ***base*** *de la n-aleta A.*

Figura 2.4: n-aleta

El hecho de que en la anterior definición el n-odo Y con vértice v se llame base de la n-aleta es porque podemos tomar el espacio de descomposición de de $Y \times [0,1]$ al encoger $\{v\} \times [0,1]$ a un punto. Dicha descomposición es una n-aleta y $Y \times \{0\}$ es una base de esta n-aleta.

Ejemplo 2.30. *El* ***libro con* n *páginas*** *es el producto cartesiano $X \times I$, donde X es un n-odo simple.*

Teorema 2.31 ([3], 9.10)**.** *Un continuo X es una gráfica si y solo si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *$ord(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$ y*
2. *$ord(x, X) \leq 2$ para todos menos una cantidad finita de $x \in X$.*

Teorema 2.32. *Un continuo X es una gráfica si y solo si $ord(A, X) < \aleph_0$ para todos los subcontinuos A de X.*

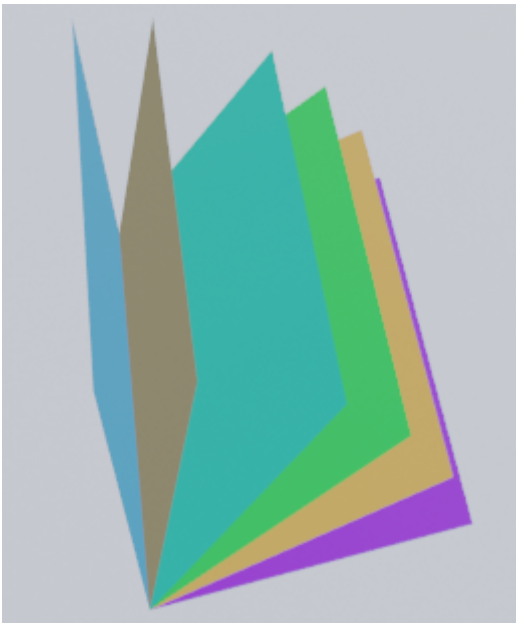


Figura 2.5: Libro de n páginas

Teorema 2.33 ([3], 9.13)**.** *Un continuo de Peano X es una gráfica si y solo si cada subcontinuo de X tiene solamente una cantidad finitamente grande de puntos finales (1.143).*

Además las gráficas pueden también caracterizarse mediante su número de desconexión como se muestra en el teorema 2.36.

Definición 2.34. *Sea X un espacio conexo. Un número cardinal $n \leq \aleph_0$ es llamado un* ***número de desconexión para*** $\mathbf{X}$ *si siempre que $A \subset X$ es tal que $|A| = n$, entonces $X \setminus A$ es no conexo*

Escribimos $\mathbf{D(X)} \leq \aleph_\mathbf{0}$ para decir que existe un número de desconexión para X. Cuando $D(X) \leq \aleph_0$, usaremos $\mathbf{D^m(X)}$ para denotar el número de desconexión más pequeño para X.

Proposición 2.35. *Si X es un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$, entonces $D^m(X) \geq 2$.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo no degenerado tal que $D(X) \leq \aleph_0$. Por definición, existe un conjunto $A \subset X$ tal que $|A| \leq \aleph_0$ y $X \setminus A$ es no conexo. Tomemos un punto de corte $c \in X$ tal que $X \setminus \{c\} = U \mid V$.

Por el teorema 1.141, existe un punto de no corte de X en U y existe un punto de no corte de X en V. Denotemos estos puntos de no corte como $p \in U$ y $q \in V$.

Ahora, consideremos el conjunto $B = \{p, q\}$. Si quitamos este conjunto de X, obtenemos $X \setminus B = (X \setminus \{p\}) \cup (X \setminus \{q\})$. Dado que p y q son puntos de no corte, $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son conexos. Por lo tanto, $X \setminus B$ es no conexo, ya que consiste en dos componentes conexas disjuntas.

Entonces, hemos encontrado un conjunto $B \subset X$ con $|B| = 2$ tal que al eliminarlo, el espacio resultante $X \setminus B$ es no conexo. Por lo tanto, $D^m(X) \geq 2$. ■

Teorema 2.36 ([3], 9.24). *Sea X un continuo no degenerado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es una gráfica;*
2. *$D(X) \leq \aleph_0$;*
3. *$D^m(X) < \aleph_0$.*

Definición 2.37. *Se dice que X es un **lazo** (fig 2.6) si es homeomorfo al número 6; es decir, si $X = S^1 \cup J$ donde $J = [1, 2] \times \{0\}$ y S^1 es el círculo unitario centrado en el origen. Una **mancuerna** (fig 2.7) es un espacio homeomorfo a $C_1 \cup A \cup C_2$ donde C_i es el círculo con centro en $(i, 0)$ y radio $1/4$ y A es el segmento entre $(5/4, 0)$ y $(7/4, 0)$.*

Figura 2.6: Lazo

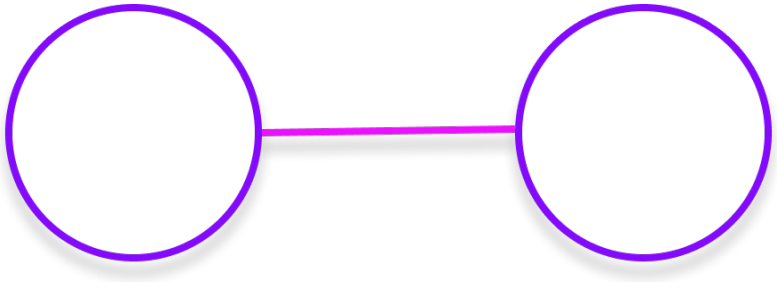


Figura 2.7: Mancuerna

Teorema 2.38 ([3], 9.33). *Sea X un continuo. Entonces $D^s(X) = 3$ si y solo si X es uno de los siguientes cinco continuos: un arco, un lazo, un ocho, una curva theta (continuo homeomorfo al símbolo θ) o una mancuerna.*

2.2.1 Árboles

Veremos ahora algunas aplicaciones del teorema 2.36. Para ello introuciremos el concepto de árbol:

Definición 2.39. *Un* ***árbol*** *o* ***gráfica acíclica****, es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.*

Teorema 2.40 ([3], 9.28)**.** *Un continuo X es un árbol si y solo si X tiene únicamente una cantidad grande pero finita de puntos de no corte.*

A partir del teorema anterior puede obtenerse el siguiente resultado que es el mismo que el teorema 1.142, solo que en este caso la demostración es más sencilla.

Corolario 2.41. *Un continuo X es un arco si y solo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo con exactamente dos puntos de no corte p y q. Por el teorema anterior (2.40) X es un árbol. Por lo tanto X es una gráfica. Como las gráficas son arco-conexas, existe un arco A en X de p a q. Así que por consecuencia del teorema 1.141, $A = X$ y por tanto X es un arco. El recíproco es evidente usando la definición de un arco. ■

El siguiente teorema sirve para probar que las dendritas tienen la PPF.

Teorema 2.42 ([5], 3.8)**.** *Sea X un continuo arco-conexo y sea $\varepsilon > 0$. Existe un árbol A_ε en X tal que $d(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

El siguiente resultado nos permite acaracterizar a las curvas cerradas simples mediante su número mínimo de desconexión usando el teorema 2.36.

Teorema 2.43 ([3], 9.31)**.** *Un continuo X es una curva cerrada simple si y solo si X se convierte en disconexo al remover cualesquiera dos puntos, es decir, $D^m(X) = 2$.*

2.3 Dendroides y dendritas

2.3.1 Dendritas

Definición 2.44. *Una **dendrita** es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples.*

Ahora veremos una caracterización de las dendritas en términos de la separabilidad de sus puntos.

Teorema 2.45. *Un continuo X es una dendrita si y solo si cualesquiera dos puntos de X están separados en X por un tercer punto en X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es una dendrita. Sean $p, q \in X$ distintos. Por 2.16 existe un arco A en X de p a q. Sea $r \in A \setminus \{p, q\}$. Sea U la componente de p en $X \setminus \{r\}$. Supongamos que $q \in U$. Entonces, como U es abierto en X, por 2.20 debe existir un arco B en U de p a q. Claramente $A \cap B$ es disconexo. Se sigue que $A \cup B$ contiene un curva cerrada simple lo cual contradice la suposición de que X es una dendrita. Luego $q \notin U$ y por tanto p y q están separados en X por r ya que U es abierto y cerrado en $X \setminus \{r\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que cualesquiera ds puntos de X están separados en X por un tercer punto de X. Entonces, por 1.139 X no puede contener un continuo de convergencia (1.124). Por tanto, por 1.126 X es un continuo de Peano. Claramente X no puede contener curvas cerradas simples pues si así fuera entonces ningún par de puntos de dicha curva podrían ser separados en X por algún punto de X. Por tanto X es una dendrita.

■

Teorema 2.46 ([3], 10.7)**.** *Un continuo no degenerado X es una dendrita si y solo si cada punto de X es un punto de corte de X (1.13) o bien un punto final (1.143) de X.*

Ejemplo 2.47 ([6], 6.1)**.** *El **punto peludo** es un continuo que es homeomorfo a la unión de una cantidad infinita numerable de arcos $H_1, H_2, \ldots$ que satisfacen:*

1. *Todos los arcos H_i emanan de un único punto v.*
2. $\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam}(H_i) = 0$.

Cada uno de los arcos H_i es llamado un ***cabello*** *y el vértice v se llama* ***folículo*** *del punto peludo (fig 2.8).*

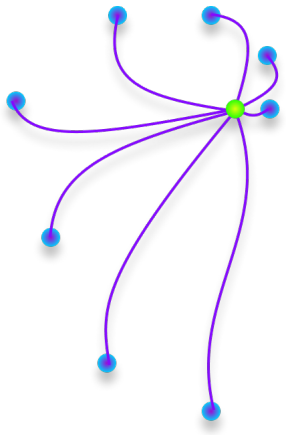


Figura 2.8: Punto peludo

El punto peludo puede verse como una extensión infinita de un n-odo.

Ejemplo 2.48. *Una* ***∞-aleta*** *es un continuo que es la unión de una cantidad infinita numerable de 2-celdas $A_1, A_2, \ldots$ las cuales se intersectan todas en un único punto de manera que cualesquiera dos de ellas se intersectan también en un único punto común a todas, y además $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}(A_i) = 0$. Las 2-celdas son llamadas* ***aletas****.*

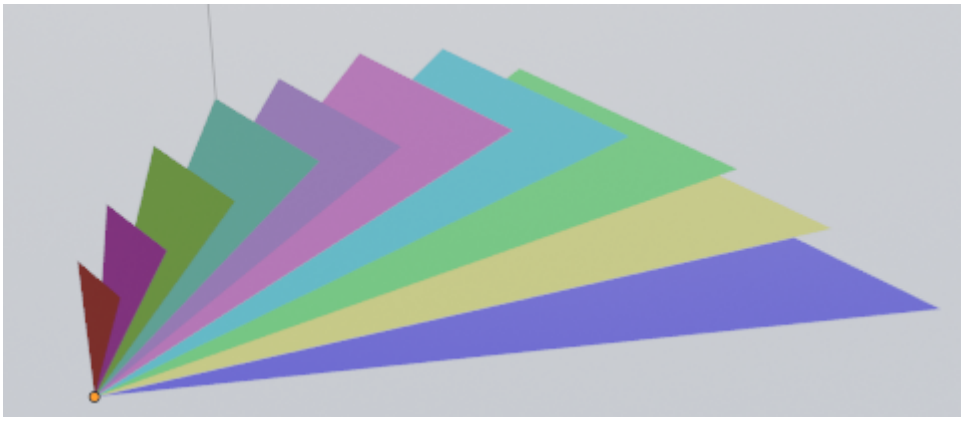


Figura 2.9: ∞-aleta

Evidentemente una ∞-aleta es una extensión infinita de una n-aleta. Además, toda ∞-aleta contiene (al menos) un punto peludo de manera que cada cabello yace en un aleta. Un punto peludo que está situado de esta manera se llama un base de dicha ∞-aleta.

Ejemplo 2.49. *El* ***abanico armónico*** *es un continuo homeomorfo al continuo obtenido al unir el punto* $(0,1)$ *con cada uno de los puntos* $(0,0)$ *y* $(\frac{1}{m},0)$ *en* $\mathbb{R}^2$, $n = 1,2,\ldots$ *mediante segmentos de rectas (fig 2.10).*

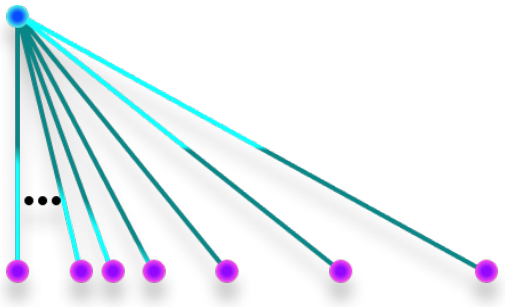


Figura 2.10: Abanico armónico.

El siguiente teorema tiene una variación interesante para los continuos Hausdorff:

Teorema 2.50 ([3], 10.8)**.** *Un continuo* X *es una dendrita si y solo si cada subcontinuo no degenerado de* X *contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de* X*.*

Ahora vemos una forma de caracterizar a las dendritas usando intersecciones de subconjuntos conexos:

Teorema 2.51 ([3], 10.10)**.** *Un continuo* X *es una dendrita si y solo si la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de* X *es conexa.*

Definición 2.52. *Si* X *es un espacio conexo y* $p \in X$*, decimos que el* ***número de componentes de*** p ***en*** X*, escrito* $c(p,X)$*, es la cardinalidad del conjunto de todas las componentes de* $X \setminus \{p\}$*.*

El siguiente teorema nos permite caracterizar a las dendritas a través del número de componentes de sus puntos y de su orden.

Teorema 2.53 ([3], 10.13)**.** *Un continuo no degenerado* X *es una dendrita si y solo si* $c(p,X) = ord(p,X)$ *siempre que alguno de estos sea finito.*

Definición 2.54. *Si* X *es un continuo y* $p \in X$*, se dice que* X *es* ***regular en*** p *si existe una base local* $\mathcal{L}_p$ *en* p *tal que la frontera de cada miembro de* $\mathcal{L}_p$ *es de cardinalidad finita.*

Se dice que un continuo X *es* ***regular*** *si* X *es regular en cada uno de sus puntos.*

Teorema 2.55 ([3], 10.20)**.** *Toda dendrita es regular.*

Definición 2.56. *Un punto p de una dendrita X es llamado un* ***punto rama*** *de X si $ord(p, X) > 2$.*

Teorema 2.57. *El conjunto de todos los puntos rama de una dendrita es numerable.*

Teorema 2.58 ([3], 10.28)**.** *Si X es una dendrita no degenerada, entonces X puede escribirse como*

$$X = X^{[1]} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

donde $X^{[1]}$ es como en 1.143 y cada A_i es un arco con puntos finales p_i y q_i tales que

$$A_{i+1} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j \right) = \{p_{i+1}\} \qquad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots$$

y $\operatorname{diam}(A_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Teorema 2.59 ([3], 10.32)**.** *Toda dendrita es de tipo árbol.*

Ahora veremos un ejemplo de una dendrita **universal** y que cada dendrita es encajable en $\mathbb{R}_2$. Con universal nos referimos a que para la clase $\mathcal{D}$ de todas las dendritas, existe una dendrita en $\mathbf{R}_2$ que es universal para $\mathcal{D}$.

Recordemos que en general, para cualquier clase $\mathcal{C}$ de espacios, un espacio $X \in \mathcal{C}$ se dice que es **universal para** $\mathcal{C}$, si es minimal, en algún sentido, en el cual cada miembro de $\mathcal{C}$ pueda ser encajado. Por ejemplo, vimos que la curva universal de Sierpinski (1.44) es en efecto, universal.

Definición 2.60. *Se dice que un espacio topológico conexo X es* ***unicoherente*** *si siempre que A y B son subconjuntos conexos y cerrados de X tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo.*

Un espacio topológico conexo se llama ***hereditariamente unicoherente*** *si cada uno de sus subconjuntos conexos y cerrados son unicoherentes.*

Proposición 2.61 ([5], 3.2)**.** *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X contiene un subconjunto denso D tal que D es una imagen continua uno-a-uno de $[0, \infty)$ e $int_X(D) = \varnothing$, entonces X es indescomponible (1.36).*

El siguiente resultado nos permite caracterizar a las dendritas a través de los continuos de Peano usando la unicoherencia.

Teorema 2.62. *Un continuo de Peano X es una dendrita si y solo si X es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Por 2.51, toda dendrita es hereditariamente unicoherente. Recíprocamente, como las curvas cerradas simples no son unicoherentes, todo continuo de Peano hereditariamente unicoherente es una dendrita, por definición de dendrita. ■

Teorema 2.63 ([3], 10.36)**.** *Todo límite inverso de dendritas con funciones de unión monótonas (2.14) (no necesariamente suprayectivas) es una dendrita.*

Definición 2.64. *Una **estrella** con **centro** $c \in \mathbb{R}^2$ y **rayos** B_j es una unión numerable $\bigcup_{j=1}^{\infty}$ de arcos convexos B_j en $\mathbb{R}^2$, cada uno de los cuales tiene a c como punto final (1.143), tales que*

$$B_j \cap B_k = \{c\} \text{ cuando } j \neq k \quad y \quad \operatorname{diam}(B_j) \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

En otras palabras, una estrella es lo mismo que un punto peludo donde los términos de folículo y centro además de radios y rayos, coinciden.

Ejemplo 2.65. ***Dendrita universal de Wazewski.*** *A continuación construiremos una dendrita universal, la cual contiene una copia topológica de cualquier dendrita, basándonos en el ejemplo 10.37 de [3]. la construcción se hace en cuatro pasos:*

1. *Construcción de D_∞. Sea $c \in \mathbb{R}^2$ y D_1 una estrella con centro c y rayos B_j. Sea m_j el punto medio de cada rayo B_j de D_1.*

   Para cada j formamos una estrella X_j con centro m_j y de otra forma disjunta de D_1 asegurándonos de que

   $$X_j \cap X_k \neq \varnothing \text{ cuando } j \neq k \quad y \quad \operatorname{diam}(X_j) \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

   Sea $D_2 = D_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right)$. Se define D_3 de manera similar colocando una estrella en cada punto medio de dos subarcos convexos de cada B_j determinados por m_j y en el punto medio

de cada rayo de cada X_j (asegurándonos de que las nuevas estrellas sean ajenas entre sí, que intersecten a D_2 únicamente en sus centros y se hagan más y más pequeñas.

Veamos que cada D_i así generada es una dendrita y que $D_i \subset D_{i+1}$ para cada i.

Definamos funciones $f_i : D_{i+1} \to D_i$ tales que

$$f_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in D_i \\ m_j \text{ si } x \in X_j \end{cases}.$$

Cada f_i resulta ser una función monótona (2.14). Definimos

$$\mathbf{D}_\infty = \varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

2. *D_∞ es una dendrita. Esto es evidente por el teorema 2.63.*

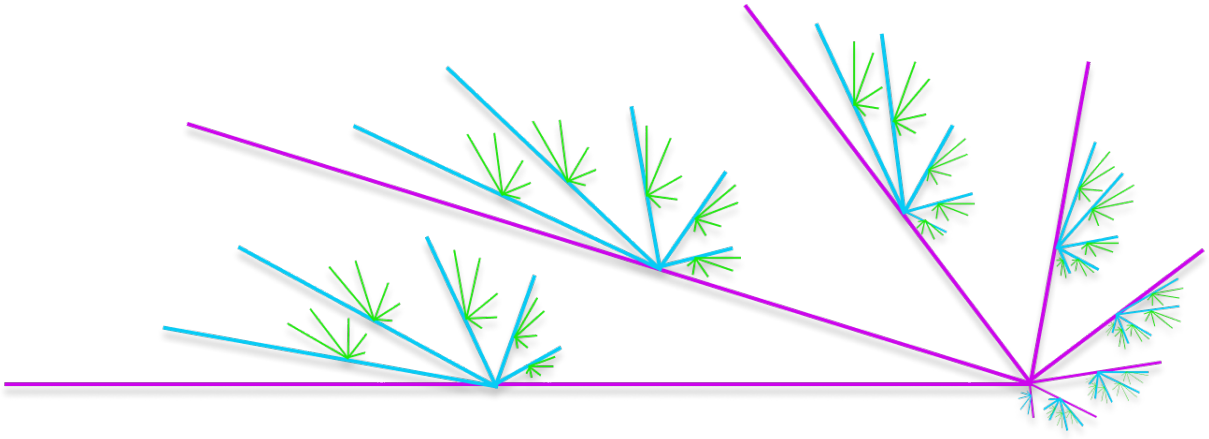


Figura 2.11: Dendrita universal de Wazewski

3. *D_∞ es encajable en $\mathbb{R}^2$. La demostración se hace usando el teorema 1.53.*

4. *D_∞ es universal para las dendritas. Por el inciso anterior y como $D_i \subset D_{i+1}$ para cada i, entonces*

$$(1) \quad D_\infty = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i}.$$

Sea $C_1 = \{c\}$ donde c es el centro de la estrella D_1 y, para cada $i = 2, 3 \ldots$, sea C_i el conjunto de todos los centros de estrellas en $\cup_{j=i}^{\infty} D_j$ que no sean centros de ninguna estrella en D_{i-1}. Sea $C = C_1 \cup C_2$, es claro que C es el conjunto de todos los puntos rama (2.56) de D_∞ y que las siguientes dos condiciones se satisfacen:

(2) $ord(z, D_\infty) = \aleph_0$ *para todo* $z \in C$*;*

(3) para cada $i \geq 2$, $C_i \cap (A - \{x, y\})$ *es un subconjunto denso numerable de cualquier arco* A *en* D_∞ *con puntos finales* x *y* y*.*

También se usará la siguiente notación, donde las f_i *se definen como en el paso 1:*

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : D_j \to D_i & si\ j > i+1 \\ f_i & si\ j = i+1 \end{cases}.$$

La demostración de que D_∞ *es universal se puede hallar en ([3], p.183).*

2.3.2 Dendroides

Definición 2.66. *Un* ***dendroide*** *es un continuo arcoconexo hereditariamente unicoherente.*

Teorema 2.67. *Toda dendrita es un dendroide.*

Demostración. Sea X una dendrita, como X es un continuo de Peano por definición, por el teorema 2.62 sabemos que X es hereditariamente unicoherente. Dado que todo continuo de Peano no degenerado es arco-conexo según el teorema 2.16, concluimos que X es un dendroide. ■

Proposición 2.68. *Todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.*

Demostración. Sea Y un subcontinuo de un dendroide X. Para probar que Y es un dendroide solo necesitamos probar que Y es arco-conexo. Sean $p, q \in Y$ tales que $p \neq q$. Entonces existe un arco A en X con puntos finales p y q. Como $Y \cup A$ es un subcontinuo de X y X es hereditariamente unicoherente, $Y \cap A$ es conexo. Por lo tanto, como p y q son los puntos finales de A y $p, q \in Y$, se tiene que $A \subset Y$. Luego Y es arco-conexo. ■

Teorema 2.69. *Los dendroides no degenerados son hereditariamente descomponibles.*

Demostración. Sea X un dendroide Como los continuos arco-conexos no degenerados son descomponibles y cada subdendroide es un dendroide por la proposición anterior, entonces cada subcontinuo de X es descomponible y por tanto X es hereditariamente descomponible. ■

Teorema 2.70 ([5], 3.3). *Sea X un dendroide y sea $\varphi : [0,\infty) \to X$ una función continua inyectiva. Entonces $\overline{\varphi([0,\infty))}$ es un arco de $\varphi(0)$ a un único punto $p \in \overline{\varphi([0,\infty))} \setminus \varphi([0,\infty))$.*

El teorema anterior sirve para demostrar en el capítulo 4 que los dendroides tienen la propiedad del punto fijo (4.38).

Proposición 2.71. *Los dendroides son uno-dimensionales.*

Proposición 2.72 ([6], p.194). *Un árbol es un dendroide localmente conexo.*

2.3.3 λ-dendroides

Definición 2.73. *Un **λ-dendroide** es un continuo hereditariamente unicoherente (2.60) que es también hereditariemente descomponible (1.37).*

Teorema 2.74. *Todo dendroide es un λ-dendroide.*

Demostración. La prueba se sigue de inmediato a partir de las definiciones de dendroide, λ-dendroide y el teorema 2.69. ■

2.3.4 Dendroides suaves

Definición 2.75. *Sea X un dendroide y sea $p \in X$; entonces X es **suave en** $\mathbf{p}$ si siempre que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en X convergente a un punto $x \in X$, entonces $\lim px_i = px$. Un dendroide que es suave en algún punto es llamado un **dendroide suave**.*

Teorema 2.76 ([6], p.194). ***Teorema de Fugate**. Si X es un dendroide suave y $\varepsilon > 0$, entonces existe una retracción suprayectiva $r_\varepsilon : X \to T$ donde T es un árbol, tal que $|r_\varepsilon - id_X| < \varepsilon$.*

El teorema anterior es muy útil para probar resultados sobre la propiedad del punto fijo (4.1), en particular se usa para demostrar el teorema 4.56.

2.4 Continuos irreducibles

Teniendo en cuenta el conceptos de continuos irreducibles (1.119) podemos dar una defínción equivalente de la composante (1.127) de un punto:

Teorema 2.77. *Sea X un continuo no degerado y $p \in X$, definimos la* ***composante*** *de p como*

$$\kappa(p) = \{x \in X : X \text{ no es irreducible entre } p \text{ y } x\}.$$

Definición 2.78. *Si X es un continuo y $p \in X$, se dice que p es un* ***punto de ireducibilidad de*** $\mathbf{X}$ *si X es irreducible entre p y algún punto $q \in X$.*

Ahora vemos cómo este nuevo término está relacionado con la componente de un punto.

Teorema 2.79. *Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, entonces p es un punto de irreducibilidad de X si y solo si $\kappa(p) \neq X$.*

Demostración. Que $p \in X$ sea un punto de irreducibilidad de X, es equivalente a que exista un punto $q \in X$ tal que X es irreducible entre p y q segun 2.78. Esto último es equivalente a que $q \notin \kappa(p)$ por la definición de $\kappa(p)$. Es decir $\kappa(p) \neq X$. ■

Corolario 2.80. *Un continuo X no degenerado es irreducible si y solo si alguna composante de X es un subconjunto propio de X.*

Por 1.128 sabemos que cualquier composante de un punto es conexa y densa. Ahora veremos que el complemento de cualquier composante es también conexo.

Teorema 2.81 ([3], 11.14)**.** *Si X es un continuo y $p \in X$, entonces $X \setminus \kappa(p) = \{x \in X : X \text{ es irreducible entre } p \text{ y } x\}$ es conexa.*

Teorema 2.82 ([3], 11.6)**.** *Sea X un continuo irreducible no degenerado y sea p un punto de irreducibilidad de X. Entonces, para cualquier subcontinuo A de X tal que $p \in A$, $X \setminus A$ es conexo.*

Teorema 2.83 ([3], 11.8). *Sea X un continuo no degenerado irreducible entre dos puntos p y q. Si A y B son subcontinuos de X tales que $p \in A$ y $q \in B$, entonces $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.*

Lema 2.84 ([3], p.201). *1. Si X es un continuo descomponible (1.36), entonces X es una composante de X.*

2. Si X es un continuo descomponible tal que X es irreducible entre p y q, entonces X, $\kappa(p)$ y $\kappa(q)$ son tres composantes distintas de X.

3. Sea X un continuo descomponible tal que X es irreducible entre p y q. Si K es una composante de X, entonces $p \in K$ o $q \in K$; más aún, si $p, q \in K$ entonces $K = X$.

Teorema 2.85 ([3], 11.13). *Sea X un continuo descomponible. Si X no es irreducible, entonces X tiene exactamente una composante (X mismo). Por otro lado, si X es irreducible, entonces X tiene exactamente tres composantes (las mencionadas en el lema anterior).*

Teorema 2.86 ([3], 11.15). *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Corolario 2.87 ([3], 11.15.1). *Todo continuo indescomponible es irreducible.*

Teorema 2.88 ([3], 11.17). *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces las componentes de X son mutuamente disjuntas.*

Teorema 2.89 ([3], 11.19). *Un continuo X es indescomponible si y solo si cada punto de X es un punto de irreducibilidad de X.*

Teorema 2.90 ([3], 11.20). *Un continuo no degenerado X es indescomponible si y solo si existen tres puntos de X tales que X es irreducible entre cada dos de estos tres puntos.*

El teorema anterior está relacionado con el ejemplo 1.42.

Teorema 2.91 ([3], 11.21). ***Teorema de Kuratowski**. Sea X un continuo y sea $p \in X$. Entonces p es un punto de irreducibilidad de X si y solo si*

(#) X no es la unión de dos subcontinuos propios tales que ambos contengan a p.

Por lo tanto, X es irreducible si y solo si existe $p \in X$ tal que (#) se satisface.

El teorema anterior caracteriza a los continuos irreducibles mediante sus subcontinuos propios y puntos.

2.4.1 Tríodos

Definición 2.92. *Un continuo X es llamado un **tríodo** si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres conjuntos no vacíos tales que cualesquiera dos de ellos están mutuamente separados (1.2) en X (fig 2.12).*

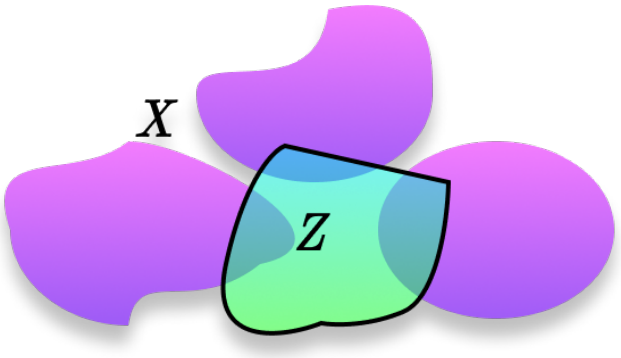


Figura 2.12: Tríodo

Teorema 2.93 ([3], 11.34)**.** ***Teorema de Sorgenfrey**. Todo continuo unicoherente (2.60) no degenerado que no es tríodo, es irreducible.*

Corolario 2.94. *Un continuo unicoherente no degenerado X es irreducible si y solo si X no es un triodo.*

2.5 Continuos tipo arco

Definición 2.95. *Un continuo es **hereditariamente irreducible** si cada uno de sus subcontinuos es irreducible (1.119).*

El siguiente teorema da una característica importante sobre los continuos tipo arco.

Teorema 2.96 ([3], 12.5)**.** *Todo continuo tipo arco es irreducible y, en efecto, hereditariamente irreducible.*

Corolario 2.97. *El único continuo tipo arco que es arco-conexo es un arco.*

El siguiente teorema nos permite caracterizar a los continuos tipo arco mediante cadenas.

Teorema 2.98 ([3], 12.11)**.** *Un continuo X no degenerado es de tipo arco si y solo si es encadenable.*

Algunas descomposiciones scs (1.63) de continuos tipo arco también pueden ser continuos tipo arco como veremos en seguida.

Teorema 2.99 ([3], 12.13)**.** *Sea X un continuo tipo arco y sea $\mathcal{D}$ una descomposición scs no degenerada de X. Si cada miembro de $\mathcal{D}$ es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{D}$ es un continuo tipo arco.*

Teorema 2.100 ([3], 12.14)**.** *Si X es un continuo tipo arco y $f : X \to Y$ es una función monótona suprayectiva con Y un continuo no degenerado, entonces Y es tipo arco.*

Teorema 2.101 ([3], 12.15)**.** *Si X es un continuo tipo arco y $f : X \to Y$ es una función abierta suprayectiva con Y un continuo no degenerado, entonces Y es tipo arco. En particular, si X es un arco entonces Y es un arco.*

Ahora usamos límites inversos de arcos para construir continuos tipo arco:

Teorema 2.102 ([3], 12.19)**.** *Un continuo X es tipo arco si y solo si X es un límite inverso de arcos con funciones de unión suprayectivas.*

Ahora un teorema que nos permitirá representar cualquier continuo tipo arco dentro del plano.

Teorema 2.103 ([3], 12.20)**.** *Todo continuo tipo arco es encajable en el plano $\mathbb{R}^2$.*

Así como vimos anteriormente que existe una dendrita universal, en el caso de los continuos tipo arco también puede hallarse uno que sea universal.

Teorema 2.104 ([3], 12.22)**.** *Existe un continuo tipo arco universal $\mathbf{A}_\infty$.*

2.5.1 Funciones universales

Ahora estudiaremos el concepto de funciones univerales que, como veremos más adelante, tienen una estrecha relación con los continuos tipo arco.

Definición 2.105. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ se llama* ***función universal*** *si para cualquier función continua $g : X \to Y$ existe $p \in X$ tal que $f(p) = g(p)$.*

Esta noción de función universal nos sirve para trabajar con la propiedad del punto fijo como se muestra en 4.27.

Teorema 2.106 ([3], 12.26)**.** *Si X es un espacio topológico y Y es un arco, cualquier función continua suprayectiva $f : X \to Y$ es universal.*

A continuación se muestra un resultado similar al teorema anterior.

Teorema 2.107 ([3], 12.29)**.** *Si X es un continuo y Y es un continuo tipo arco, cualquier función continua suprayectiva $f : X \to Y$ es una función universal.*

2.5.2 Continuos encadenables

El siguiente resultado es similar a los dos anteriores y está relacionado con los continuos encadenables.

Teorema 2.108. *Cualquier función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ donde X es un continuo y Y es un continuo encadenable (1.16) es universal.*

Problema no Resuelto 2.109 ([5], p.43)**.** *Si Y es un continuo tal que toda función continua sobreyectiva de cualquier continuo a Y es universal, ¿Y es un continuo encadenable?.*

Un resultado que nos permite caracterizar a los continuos encadenables mediante los cntinuos tipo arco (1.82) es el siguiente.

Teorema 2.110 ([5], 4.7)**.** *Un continuo es encadenable si y solo si es de tipo arco.*

Proposición 2.111 ([5], 4.15). *Sean X y Y espacios métricos compactos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función (1.12) $f_\varepsilon : Y \to Z_\varepsilon$ tal que $f_\varepsilon \circ f : X \to Z_\varepsilon$ es una función universal (2.105). Entonces f es una función universal.*

Proposición 2.112. *Un espacio X es contraíble (1.26) si y solo si X es contraíble con respecto a cualquier espacio.*

Teorema 2.113 ([3], 12.42). *SI X es cualquier continuo, entonces $C(X)$ y 2^X son contraíbles con respecto a cualquier retracto de vecindad absoluto métrico; por tanto, $C(X)$ y 2^X son contraíbles con respecto a cualquier curva cerrada simple.*

Teorema 2.114 ([3], 12.46). *Si $f : X \to Y$ es cualquier función continua suprayectiva donde X es un continuo cualquiera y Y es un continuo tipo arco, entonces todo subcontinuo de Y es la imagen de un subcontinuo de X bajo f.*

2.5.3 Continuos tipo círculo

Teorema 2.115 ([5], 6.15). *Si X es un continuo no degenerado tal que existe una ε-función nulo-homotópica de $X \to S^1$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces X es tipo arco.*

Capítulo 3

Más sobre hiperespacios

3.1 Ejemplos

Definición 3.1. *Sea X un espacio metrizable compacto y K un subcompacto de X. Definimos $\mathbf{2^X_K}$ y $\mathbf{C_K(X)}$ como sigue:*

$$2^X_K = \{A \in 2^X : K \subset A\};$$
$$C_K(X) = \{A \in C(X) : K \subset A\}.$$

*Llamamos a 2^X_K el **hiperespacio de contención para $\mathbf{K}$ en $\mathbf{2^X}$** y a $C_K(X)$ el **hiperespacio de contención para $\mathbf{K}$ en $\mathbf{C(X)}$**.*

Para un punto $p \in X$ escribimos $\mathbf{2^X_p}$ y $\mathbf{C_p(X)}$ para los hiperespacios de contención de $\{p\}$.

Definición 3.2. *Si (X, d) es un continuo definimos*

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, n < \infty$$

*al cual llamaremos el **hiperespacio $\mathbf{n}$-plegado**.*

Para no confundir al hiperespacio de contención C_p con el hiperespacio n-plegado C_n especificaremos cuando sea necesario.

Definición 3.3. *Para un continuo X, el **hiperespacio de suspensión** de X, denotado por $\mathbf{HS(X)}$, es el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$.*

Proposición 3.4. *Los hiperespacios de contención 2^X_K y $C_K(X)$ son compactos.*

Demostración. Usaremos el hecho de que para espacios T_1, X, y subconjuntos cerrados K de X, el conjunto $CL_K(X) = \{A \in CL(X) : K \subset A\}$ es cerrado en $CL(X)$. Ejercicio 1.19 [6]. ■

Teorema 3.5 (6.1, [5]). *Para cualquier continuo X, 2^X y $C(X)$ son continuos arco-conexos.*

Ejemplo 3.6. Si X es un arco con puntos finales p y q, entonces $C(X)$ es una 2-celda y

$$\partial C(X) = F_1(X) \cup C_p(X) \cup C_q(X).$$

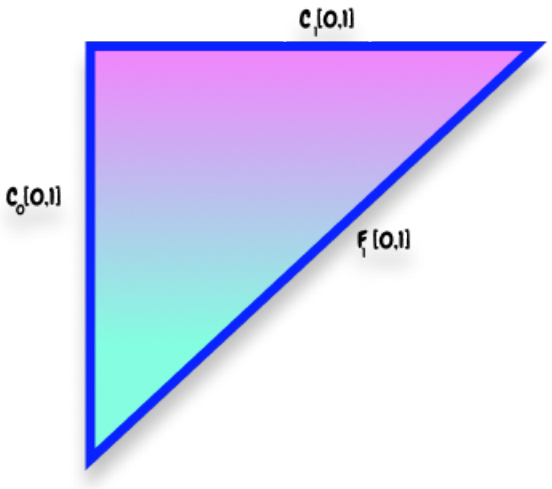


Figura 3.1: $C(X)$ cuando $X = [0, 1]$.

Para demostrarlo, primero se trabaja con el intervalo $[0, 1]$. Vemos que

$$C([0, 1]) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

por definición. Se puede tomar la función dada por

$$h : C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2$$
$$[a, b] \mapsto (a, b)$$

Evidentemente $h(\{0\}) = (0, 0)$, $h(\{1\}) = (1, 1)$ e $Im(h) = T$, donde T es el triángulo con vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. También h es un homeomorfismo.

Además, $F_1([0,1]) = \{\{x\} : x \in [0,1]\}$, $C_0([0,1]) = \{[0,b] : 0 \leq b \leq 1\}$ *y* $C_1([0,1]) = \{[a,1] : 0 \leq a \leq 1\}$, *por lo cual* $h(F_1([0,1])) = \{(x,x) : 0 \leq x \leq 1\}$, $h(C_0([0,1]) = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq b \leq 1\}$ *y* $h(C_1([0,1]) = \{(a,1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq 1\}$. *Por tanto*

$$\partial C(X) = F_1([0,1]) \cup C_0([0,1]) \cup C_1([0,1]).$$

Como $X \cong [0,1]$ *ya que* X *es un arco, entonces por el teorema 1.96 se tiene que* $C(X) \cong C([0,1]) \cong T$, *y como los homemormismos preservan las fronteras se tendrá que* $\partial C(X) = F_1(X) \cup C_p(X) \cup C_q(X)$. *El homeomorfismo que puede tomarse está dado por:*

$$h^* : C(X) \to C([0,1])$$
$$A \mapsto h(A)$$

□

Ejemplo 3.7. Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda con $\partial C(X) = F_1(X)$.

3.2 Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ para continuos de Peano X

Teorema 3.8. *Un compacto* K *es un RA (1.14) si y solo si* K *es un EA (1.15).*

Teorema 3.9 ([7], p.8)**.** ***Teorema de Wojdyslawski****. Si* X *es un continuo de Peano entonces* 2^X *y* $C(X)$ *son retractos absolutos.*

3.3 Contractibilidad de hiperespacios

Teorema 3.10 ([5], 6.3)**.** *Si* X *es un continuo de Peano, entonces* $C(X)$ *y* 2^X *son contraíbles (1.26).*

Teorema 3.11 ([5], 6.5)**.** *Para cualquier continuo* X, 2^X *y* $C(X)$ *son* $cr(S^1)$.

Demostración. Se usa 2.17 y 3.5 ■

Capítulo 4

La propiedad del punto fijo en los continuos y en sus hiperespacios

En este capítulo, abordamos la relevancia de la propiedad del punto fijo en el contexto de continuos y sus hiperespacios, centrando nuestra atención en 2^X y $C(X)$. Este análisis se basa en los fundamentos teóricos de los capítulos previos, donde examinamos continuos, retractos absolutos, continuos de Peano, gráficas, dendroides y contractibilidad de hiperespacios.

La presente sección tiene como objetivo exponer de manera rigurosa las relaciones subyacentes entre la propiedad del punto fijo y las características de los continuos en hiperespacios. Para ello, se presentarán definiciones y conceptos clave, así como teoremas esenciales que vinculan la propiedad del punto fijo con aspectos específicos de los continuos y sus hiperespacios.

Esta aproximación nos permitirá abordar con profundidad y precisión la interacción entre la propiedad del punto fijo y los hiperespacios 2^X y $C(X)$, proporcionando una visión integral de cómo estos conceptos se relacionan en el marco de la teoría de continuos.

Definición 4.1. *Un* ***punto fijo*** *de una función $f : X \to X$ es un punto p tal que $f(p) = p$. Diremos que un espacio topológico X tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *o* ***PPF*** *si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.*

Teorema 4.2. *La PPF es un invariante topológico. Es decir, si X tiene la PPF entonces cualquier espacio homeomorfo a X tiene la propiedad.*

Demostración. Sean X un espacio con la PPF y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Si $f : Y \to Y$ es una función entonces $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ tiene un punto fijo p, es decir, $(h^{-1} \circ f \circ h)(p) = p$, por lo que $f[h(p)] = h(p)$ y así f tiene un punto fijo $h(p)$. ■

No cualquier espacio tiene la PPF, pero podemos "debilitar" dicha propiedad de la siguiente forma:

Definición 4.3 ([5], 2.15). *Se dice que un espacio métrico (X, d) tiene la **propiedad del punto casi fijo (PPCF)**, si para cualquier función continua $f : X \to X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un punto $p_\varepsilon \in X$ tal que $d(f(p_\varepsilon), p_\varepsilon) < \varepsilon$.*

La PPCF es una propiedad métrica pero no topológica. Solo cuando X es compacto entonces la PPF y la PPCF coinciden.

4.1 Resultados básicos

Teorema 4.4 ([3], 1.19). *Si X tiene la PPF entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Entonces, X puede ser dividido en dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos A y B, es decir, $X = A \cup B$ y $A \cap B = \varnothing$.

Definimos una función $f : X \to X$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ \text{algún elemento fijo } a \in A & \text{si } x \in B \end{cases}.$$

Esta función es continua porque es constante en B y es la identidad en A, además, ambos A y B son abiertos, por lo que f es continua en la frontera entre A y B. Ahora, vamos a mostrar que f no tiene un punto fijo:

Para $x \in A$, $f(x) = x$, por lo que x no puede ser un punto fijo en B. Para $x \in B$, $f(x) = a$, donde $a \in A$, por lo que x no puede ser un punto fijo en B tampoco. Entonces, la función f no tiene un punto fijo, lo que contradice nuestra hipótesis de que X tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto, si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces X debe ser conexo. ■

Ejemplo 4.5. *El intervalo unitario $I = [0, 1]$ tiene la PPF.*

Demostración. Tomemos una función continua $f : I \to I$ y sean

$$A = \{x \in I : x \leq f(x)\}, \quad B = \{x \in I : x \geq f(x)\}.$$

Es evidente que $I = A \cup B$. Además A y B son subconjuntos cerrados de I, $0 \in A$ y $1 \in B$. Por lo cual, como I es conexo, existe un punto $p \in A \cap B$ y por tanto $f(p) = p$. ■

4.2 Continuos con la PPF

Teorema 4.6. *Todo arco tiene la PPF.*

Demostración. Dado que los arcos son homemorfos al intervalo unitario y hemos probado que este tiene la PPF entonces cualquier arco tendrá la PPF. ■

Teorema 4.7. *Si $f : X \to [0,1]$ es cualquier función continua y sobreyectiva para cualquier espacio conexo X, entonces, para cualquier función continua $g : X \to [0,1]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Esta es una generalización del teorema anterior.*

Demostración. Para demostrar que para cualquier función continua $g : X \to [0,1]$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$, primero notamos que el rango de f es todo el intervalo cerrado $[0,1]$ debido a que es sobreyectiva.

Ahora, definimos la función $h : X \to [0,1]$ como $h(x) = f(x) - g(x)$. Esta función es continua porque es la diferencia de dos funciones continuas, f y g.

Además, notamos que h satisface $h(X) \subseteq [-1,1]$, ya que $f(x)$ y $g(x)$ están en el intervalo $[0,1]$ para todo $x \in X$.

Por lo tanto, el conjunto $h(X)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ que contiene los valores $h(x)$ para todo $x \in X$.

Ahora, si podemos demostrar que $h(X)$ contiene el valor 0, entonces hay un $x \in X$ tal que $h(x) = 0$, lo que significa que $f(x) - g(x) = 0$ y por lo tanto $f(x) = g(x)$.

Para demostrar que $h(X)$ contiene el valor 0, supongamos por contradicción que $h(X)$ no lo contiene. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $h(X) \subseteq (-\infty, 0)$.

Como $0 \in [0,1]$, y f es sobreyectiva, existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$. Entonces, $h(x_0) = -g(x_0) \leq 0$, lo que implica que $h(x_0) \in h(X)$.

Por otro lado, como g es continua, el conjunto $g(X)$ es también conexo, y como $g(X) \subseteq [0,1]$, entonces $g(X) \subseteq [a,b]$ para algunos $a, b \in [0,1]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Entonces, $h(X) = f(X) - g(X) \subseteq [-b,-a]$. Como $h(X) \subseteq (-\infty, 0)$, esto implica que $h(X) \subseteq [-b,0)$.

Ahora, notamos que $0 \in [-a,b]$ Pero esto contradice el hecho de que $h(X) \subseteq [-b,0)$ y que $h(x_1) \geq -a > -b$, lo que significa que nuestra suposición inicial de que $h(X)$ no contiene el valor 0 debe ser falsa.

Por lo tanto, $h(X)$ contiene el valor 0, y por lo tanto existe un $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$, lo que demuestra la generalización deseada para la PPF en arcos. ■

El continuo $\operatorname{sen}(1/x)$ es un claro ejemplo de un continuo que es conexo pero no arco-conexo que tiene la PPF como se muestra a continuación.

Proposición 4.8. *El continuo* $\operatorname{sen}(1/x)$ *tiene la PPF.*

Demostración. Sea X el continuo $\operatorname{sen}(1/x)$ y $f : X \to X$ una función continua. Sean $X_1 = \{0\} \times [-1,1]$ y $X_2 = \{(x \operatorname{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$. Es claro que $X = X_1 \cup X_2$.

Como X_1 y X_2 son conexos por arcos la imagen de cada uno de ellos debe estar enteramente contenida en X_1 o X_2.

Si $f(X_1) \subset X_1$ entonces f tendrá un punto fijo pues X_1 es un arco.

Si $f(X_2) \subset X_1$ entonces $f(X) = f(\overline{X_2}) \subset \overline{f(X_2)} \subset X_1$ y en particular $f(X_1) \subset X_1$ y entonces f tiene un punto fijo.

El caso que resta es que $f(X) \subset X_2$. Como X es compacto, su proyección en la primer coordenada debe ser también compacta por lo que debe ser un intervalo $[a,b]$ con $a > 0$. Así que $f(X) \subset \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x \in [a,b]\} =: S$. Pero como podemos ver S es un arco, por lo cual S tiene la PPF y así X tiene la PPF. ■

Teorema 4.9. *Todo continuo encadenable (1.16) tiene la PPF.*

Demostración. Sea X un continuo encadenable y supongamos que existe una función continua $f : X \to X$ que no tiene puntos fijos. Tomemos $\varepsilon = \text{ínf}\{d(x, f(x)) | x \in X\}$. Evidentemente $\varepsilon > 0$

pues X es compacto. Tomemos una $\frac{\varepsilon}{2}$-cadena $\mathcal{C} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ que cubra a X y sean

$$V = \{x \in X : \text{ si } x \in U_i \text{ y } f(x) \in U_j, \text{ entonces } i < j\},$$
$$W = \{x \in X : \text{ si } x \in U_i \text{ y } f(x) \in U_j, \text{ entonces } j < i\}.$$

Es claro que $U_1 \subset V$ y $U_n \subset W$; por lo que V y W son no vacíos. Además, V y W son abiertos en X y $X = V \cup W$.

Como X es conexo debe existir un punto $q \in V \cap W$. Luego, podemos tomar eslabones U_a, U_b, U_c, U_d de $\mathcal{C}$ tales que $q \in U_a \cap U_b$, $f(q) \in U_c \cap U_d$ con $a < c$ y $d < b$. Entonces, por la definición de ε, vemos que $d \leq \text{mín}\{a, b\} - 2$ y $\text{máx}\{a, b\} + 2 \leq c$. Así $c - d \geq 4$; pero como $U_c \cap U_d \neq \varnothing$, entonces $c - d \leq 1$ y hemos llegado a una contradicción. Por lo cual f debe tener un punto fijo. ■

Dado que el continuo $\text{sen}(1/x)$ es encadenable, puede usarse el teorema anterior para ver inmediatamente que dicho continuo tiene la PPF.

Proposición 4.10. *El círculo de Varsovia (1.35) tiene la PPF.*

Demostración. Para demostrar que el círculo de Varsovia tiene la propiedad del punto fijo, primero notamos que cualquier función continua f del círculo de Varsovia C a sí mismo se puede restringir a una función continua del continuo Y a sí mismo y una función continua del continuo Z a sí mismo, ya que la unión de dos conjuntos conexos por arcos es también un conjunto arco-conexo.

Por lo tanto, para demostrar que cualquier función continua f del círculo de Varsovia C a sí mismo tiene un punto fijo, basta demostrar que cualquier función continua del continuo Y a sí mismo y cualquier función continua del continuo Z a sí mismo tiene un punto fijo.

Para el continuo Y, podemos demostrar que tiene la propiedad del punto fijo usando el mismo argumento que en la otra pregunta, es decir, utilizando el hecho de que Y es arco-conexo.

Para el continuo Z, notamos que es el resultado de pegar tres arcos convexos en el plano. En particular, cada arco convexo tiene la propiedad del punto fijo (por ejemplo, la recta que une los extremos de cada arco es un segmento que tiene la propiedad del punto fijo). Entonces, por el teorema del punto fijo de Brouwer (4.18), se puede demostrar que cualquier función continua del continuo Z a sí mismo tiene un punto fijo.

En resumen, cualquier función continua del círculo de Varsovia C a sí mismo se puede restringir a una función continua del continuo Y a sí mismo y una función continua del continuo Z a sí mismo,

y ambas tienen la propiedad del punto fijo. Por lo tanto, cualquier función continua del círculo de Varsovia C a sí mismo también tiene la propiedad del punto fijo. ■

Ejemplo 4.11 ([5], 1.6). *El abanico armónico (2.49) tiene la PPF.*

Ejemplo 4.12 ([5], 1.5). *Cualquier n-odo simple (2.28) tiene la PPF.*

Proposición 4.13 ([5], 1.14). *El punto peludo (2.47) tiene la PPF. Si un punto de no corte es removido, ¿sigue teniendo la PPF?*

Teorema 4.14. *Si X es un continuo y existe una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funciones continuas $f_i : X \to X$ que convergen uniformemente a la función identidad sobre X tales que $f_i(X)$ tiene la PPF para cada i, entonces X tiene la PPF.*

Demostración. Supongamos que X no tiene la PPF. Entonces, existe una función continua $f : X \to X$ sin puntos fijos, es decir, no existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Definimos $f_i(x) = \begin{cases} f^{(i)}(x) & \text{si } i \leq n \\ x & \text{si } i > n \end{cases}$ donde n es un entero tal que $n > |f - \mathrm{id}X|_{\infty}^{-1}$. Es decir, n es suficientemente grande para que f_i sea lo suficientemente cercana a la identidad en el sentido uniforme.

Cada f_i es continua ya que es una composición finita de funciones continuas, y $f_i(X) \subseteq X$ porque $f^{(i)}(X) \subseteq X$. Además, por la elección de n, tenemos que $|f_i - \mathrm{id}X|_{\infty} < \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $f_i(x) \to x$ uniformemente en X cuando $i \to \infty$.

Sin embargo, f_i no puede tener puntos fijos para todo i. En efecto, si $f_i(x_0) = x_0$ para algún i, entonces x_0 es un punto fijo de f_j para todo $j \geq i$, lo cual contradice la hipótesis de que f no tiene puntos fijos. Por lo tanto, f_i no tiene puntos fijos para ningún i.

Esto contradice la hipótesis inicial de que cada $f_i(X)$ tiene la PPF, ya que f_i no tiene puntos fijos para ningún i. Por lo tanto, X debe tener la PPF si existe una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funciones continuas $f_i : X \to X$ que convergen uniformemente a la función identidad sobre X tales que $f_i(X)$ tiene la PPF para cada i. ■

Teorema 4.15 ([3], 1.20). *El **disco de Varsovia** (que es el círculo de Varsovia junto con el componente acotado de su complemento en $\mathbb{R}^2$), tiene la PPF.*

Ejemplo 4.16 ([5], 1.17)**.** *El triodo simple con una espiral envolviéndolo tiene la PPF.*

Proposición 4.17 ([5], 1.21)**.** *Si X es un espacio métrico que no contiene arcos, entonces el cono $CT(X)$ (1.73) tiene la PPF.*

4.2.1 El teorema del punto fijo de Brower

Teorema 4.18 ([6], 21.1)**.** ***El Teorema del punto fijo de Brower****. Cualquier n-celda tiene la PPF.*

Teorema 4.19. *Si un espacio topológico X tiene la PPF, entonces todo retracto (1.14) de X tiene la PPF.*

Demostración. Supongamos que X tiene la PPF y que $Y \subset X$ es un retracto de X. Sea $r : X \to Y$ una retracción suprayectiva y $f : Y \to Y$ una función continua. Como X tiene la PPF entonces $f \circ r : X \to Y \subset X$ que es continua, tiene un punto fijo p, es decir $f(r(p)) = p$.

Como $f(r(X)) \subset Y$, tenemos que $p \in Y$ y por tanto $r(p) = p$ y así $f(p) = p$, por lo que f tiene un punto fijo. ■

Definición 4.20. *Usamos el término ε-**retracción** para referirnos a una retracción (1.14) que es también una ε-función (1.12).*

Proposición 4.21. *Si $r_\varepsilon : X \to X$ es una ε-retracción con respecto a una métrica d para X, entonces $d(r_\varepsilon, id_X) < \varepsilon$.*

Demostración. Si $r_\varepsilon(x) = y$, entonces $x, y \in r_\varepsilon^{-1}(y)$; por lo tanto $d(x, y) < \varepsilon$ y así $d(x, r_\varepsilon(x))\varepsilon$. ■

Teorema 4.22 ([5], 1.10)**.** *Sea X un espacio métrico compacto. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f_\varepsilon : X \to X_\varepsilon \subset X$ tal que X_ε tiene la PPF y $d(f_\varepsilon, id_X) < \varepsilon$. Entonces X tiene la PPF.*

Proposición 4.23. *El cubo de Hilbert I^∞ tiene la PPF.*

Demostración. Para cada $n = 1, 2 \ldots$, sea I_n^∞ la n-celda en I^∞ dada por

$$I_n^\infty = \{(t_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty : t_i = 0 \text{ para cada } i \geq n+1\},$$

y sea r_n la retracción natural de I^∞ sobre I_n^∞ dada por

$$r_n((t_i)_{i=1}^\infty) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \text{ para cada } (t_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty.$$

Vemos que para cada n, r_n es una 2^{-n}-retracción con respecto a la métrica d_∞ para I^∞. También I_n^∞ tiene la PPF por el teorema 4.18, por lo tanto, por 4.22, se tiene que I^∞ tiene la PPF. ■

Proposición 4.24 ([5], 1.22)**.** *Si X es un continuo con la PPF que no contiene arcos y Y es un continuo arco-conexo con la PPF, entonces $X \times Y$ tiene la PPF.*

Ejemplo 4.25 ([5], 2.11)**.** *El libro con n páginas tiene la PPF. Cuando en 2.30 reemplazamos X por el abanico armónico (2.49) se tiene que $X \times I$ también tiene la PPF.*

Corolario 4.26. *Todo RA (1.14) tiene la PPF.*

Demostración. Por el teorema de metrización de Urysohn ([1], p.241), todo RA puede encajarse en el cubo de Hilbert $I^\infty = \prod_{i=1}^\infty [0,1]$. Por lo tanto, por el teorema 4.19 y como I^∞ tiene la PPF entonces todo RA tiene la PPF. ■

Proposición 4.27 (4.3, [3])**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Si existe una función universal (2.105) $u : X \to Y$, entonces Y tiene la PPF.*

Demostración. Sea $f : Y \to Y$ una función continua, entonces $f \circ u$ es continua. Existe $x \in X$ tal que $f \circ u(x) = u(x)$, es decir existe $y = u(x) \in Y$ tal que $f(y) = y$. ■

Proposición 4.28 ([3], p.251)**.** *Un espacio topológico X tiene la PPF si y solo si la función identidad $i : X \to X$ es una función universal.*

Proposición 4.29 ([6], 21.5; [3], 12.28; [5], 4.14)**.** *Sea X un compacto. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función universal, $u_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$ para un espacio topológico Y_ε. Entonces X tiene la PPF.*

El siguiente es una generalización del teorema 4.9.

Proposición 4.30 ([5], 4.8). *Cualquier subconjunto conexo no vacío de un continuo tipo-arco tiene la PPCF (4.3).*

Proposición 4.31 ([5], 4.9). *Si X es un continuo encadenable, A es un subcontinuo de X y $f : A \to X$ es una función continua suprayectiva, entonces f tiene un punto fijo.*

4.2.2 El teorema de Lokuciewski

El teorema de Lokuciewski nos permite determinar si una función continua con codominio una n-celda es universal o no y con ello saber si el dominio tiene la PPF. Para ello se debe introducir el concepto de función AH-esencial.

Definición 4.32. *Sea X un espacio topológico y Y una n-celda. Una función $\varphi : X \to Y$ es una función **AH-esencial** si φ es continua y la restricción $\varphi|_{\varphi^{-1}(\partial Y)}$ no puede ser extendida a una función continua $X \to \partial Y$. (AH proviene de Alexandroff-Hopf).*

Proposición 4.33. *Sea X un espacio topológico y sea Y una n-celda. Una función $X \to Z$ es universal si y solo si es AH-esencial.*

Teorema 4.34. ***Teorema de Lokuciewski**. Sea X un compacto. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función AH-esencial de X a una n_ε-celda. Entonces X tiene la PPF.*

Demostración. Sea Y_ε la n_ε-celda y $u_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$ la ε-función AH esencial para X y ε. Por la proposición 4.33 se tiene que u_ε es universal y entonces por la propoisición 4.29 podemos concluir que X tiene la PPF. ■

Proposición 4.35 ([6], 21.8). *Sea X un espacio topológico que es contraíble con respecto a una $(n-1)$-esfera para algún n. Sean Y una n-celda y $g : X \to Y$ una función continua. Si existe $A \subset g^{-1}(\partial Y)$ tal que $g|_A : A \to \partial Y$ es una función esencial, entonces g es una función AH-esencial. El recíproco también es cierto.*

4.2.3 Continuos tipo arco

Teorema 4.36 ([3], 12.30)**.** *Todo continuo tipo arco tiene la PPF.*

4.2.4 Gráficas

Teorema 4.37 ([5], 3.7)**.** *Todo árbol (2.39) tiene la PPF.*

4.2.5 Dendroides

Teorema 4.38 ([5], 3.4)**.** *Toda dendroide tiene la PPF.*

Demostración. Se usa 2.70 ■

Corolario 4.39 ([3], 10.31; [5], 3.5)**.** *Toda dendrita tiene la PPF.*

Ahora puede darse una generalización del teorema 4.38.

Teorema 4.40 ([5], p.36)**.** ***de Charatonik****. Todo λ-dendroide (2.73) tiene la PPF.*

Teorema 4.41 ([5], 3.6)**.** ***de R. Mańka****. Para cualquier λ-dendroide X, $X \times [0,1]$ tiene la PPF. Más aún, $X \times Y$ tiene la PPF cuando Y es cualquier RA (1.14) compacto.*

4.3 Hiperespacios con la PPF

4.3.1 Continuos de Peano

Teorema 4.42. *Si X es un continuo de Peano entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

Demostración. Usando el teorema 3.9 y el teorema 4.19 concluimos que 2^X y $C(X)$ tienen la PPF. ■

4.3.2 Continuos tipo arco

Teorema 4.43 ([5], 6.10). *Si X es un continuo tipo arco, entonces $C(X)$ tiene la PPF.*

Macías Romero, R. Escobedo y J. Bustamante han dado una genralización para el teorema anterior:

Teorema 4.44 ([5], 6.11). *Si X es un continuo tipo arco, entonces cualquier bloque de Whitney (1.116) en $C(X)$ tiene la PPF.*

4.3.3 Continuos tipo círculo

Teorema 4.45 ([5], 6.16). *Si X es un continuo tipo círculo, entonces $C(X)$ tiene la PPF.*

4.3.4 Conos y suspensiones

A continuación vemos cómo aplicar el teorema de Lokuciewski para determinar si los conos topológicos tienen la PPF.

Proposición 4.46 ([5], 5.13). *El cono (1.73) sobre cualquier continuo tipo arco tiene la PPF.*

Proposición 4.47 ([5], 5.15). *La suspensión (1.77) sobre un continuo encadenable (1.16) tiene la PPF.*

Proposición 4.48 ([5], 5.17). *El producto cartesiano de dos continuos encadenables tiene la PPF.*

Proposición 4.49 ([5], 5.18). *El cono sobre un continuo tipo círculo tiene la PPF.*

Proposición 4.50 ([5], 5.20). *Si X es el abanico armónico (2.49) o una dendrita (2.44), entonces $CT(X)$ (1.73) y $ST(X)$ (1.77) tienen la PPF.*

Proposición 4.51 ([5], 5.24). *1. Si X es un continuo contraíble (1.26), entonces $CT(X)$ tiene la PPF si y solo si $X \times I$ tiene la PPF.*

2. *Si X es un espacio métrico compacto tal que $CT(ST(X))$ tiene la PPF, entonces $CT(X)$ tiene la PPF.*

Teorema 4.52 ([5], 6.14)**.** *Si X es un continuo tipo arco, entonces $HS(X)$ (3.3) tiene la PPF.*

4.3.5 Un teorema general

El siguiente teorema puede ser aplicado a una gran variedad de continuos, por lo que tiene una gran importancia.

Teorema 4.53 ([6], 22.8)**.** *Sea X un continuo. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua, $f_\varepsilon : X \to X_\varepsilon$, donde X_ε es un continuo de Peano en X, tal que $|f_\varepsilon - id_X| < \varepsilon$ (por ejemplo, cuando f_ε es una ε-retracción). Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

4.3.6 Dendroides

No se sabe si 2^X y $C(X)$ tienen la PPF para cualquier dendroide X, sin embargo sí la tienen cuando X es una dendroide suave o un abanico.

Teorema 4.54 ([5], 6.12)**.** *Sea $X = \varprojlim\{D_n, f_n\}$ (1.46) donde cada D_n es una dendrita y cada f_n es cuasi-monótona (2.14) (o equivalentemente confluente). Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

En particular, si $X = \varprojlim\{I, f_n\}$, donde cada f_n es una función abierta, entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.

Teorema 4.55 ([5], 6.13)**.** *Sea $X = \varprojlim\{D_n, f_n\}$, donde cada D_n es una dendrita y cada f_n es confluente (2.14). Entonces el hiperespacio n-plegado (3.2) $C_n(X)$ tiene la PPF para cualquier n.*

Teorema 4.56 ([6], 22.12)**.** *Si X es un dendroide suave, entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

Demostración. 2.76 ■

Teorema 4.57 ([6], 22.13)**.** *Si X es un abanico, entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

Teorema 4.58 ([6], 22.16)**.** *Sea $X = ST(Y)$, donde Y es un abanico o un dendroide suave. Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la PPF.*

4.3.7 Continuos hereditariamente indescomponibles

Teorema 4.59 ([6], 22.17). *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces $C(X)$ tiene la PPF. Más aún, si $\mathcal{H}$ es un subcontinuo arco-conexo de $C(X)$, entonces $\mathcal{H}$ tiene la PPF.*

4.4 Problemas abiertos

El siguiente problema se pregunta si puede existir una generalización del teorema de Brower (4.18) concerniente a la topología del plano. Para ello damos la siguiente definición.

Definición 4.60. *Sea X un subconjunto compacto y conexo del plano euclidiano. X se llama* ***separable*** *si existe un par de conjuntos disjuntos no vacíos A y B de X tales que:*

1. *A y B son abiertos en X,*
2. *A y B son cerrados en X, y*
3. *la eliminación de un punto de X hace que A y B sean conjuntos disjuntos y abiertos.*

A continuación el problema:

Problema 4.1. ***Problema del continuo plano no separable***. *¿Todo continuo plano no separable tiene la PPF?*

Este problema data de la decada de 1930 y es el problema no resuelto más famoso dobre la topología del plano. Aunque hay un agran variedad de resultados que resuelven casos particulares, la solución no ha sido encontrada aún.

Problema 4.2 ([5], p.46). *¿Todo continuo tipo tríodo simple tiene la PPF?*

Problema 4.3 ([5], p.58). *¿La suspensión y/o el cono topológico sobre cualquier dendroide tiene la PPF?*

Problema 4.4 ([5], p.76). *¿2^X tiene la PPF cuando X es un continuo tipo arco?*

Ya vimos en el teorema 4.52 que cuando X es un continuo tipo arco $HS(X)$ tiene la PPF, además, el teorema 4.45 estipula que cuando X es un continuo tipo círculo $C(X)$ tiene la PPF. Sin embargo, el hiperespacio de suspensión de un continuo tipo círculo no necesariamente tiene la PPF, por ejemplo, cuando $HS(S^1)$ es una 2-esfera (**??**, p.77), pero esta no tiene la ppf. Además, cuando X es un continuo tipo círculo con la PPF no se sabe si $HS(X)$ tiene la PPF como lo dicta el siguiente problema.

Problema 4.5 ([5], p.77)**.** *Si X es un continuo tipo círculo con la PPF, ¿el hiperespacio de suspensión $HS(X)$ tiene la PPF?*

Problema 4.6. *¿$F_n(X)$ tiene la PPF cuando X es tipo arco y $n \geq 3$?*

Problema 4.7 ([5], p.78)**.** *¿2^X tiene la PPF cuando X es un continuo tipo círculo?*

Problema 4.8 ([5], p.80)**.** *¿2^X tiene la PPF para cualquier continuo hereditariamente indescomponible X?*

Una pregunta muy importante que puede surgir sobre los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X es la siguiente:

Problema 4.9 ([5], p.86)**.** *¿Existe un continuo X tal que alguno de los hiperespacios 2^X o $C(X)$ tenga la PPF y el otro no?*

Referencias

[1] K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, Academic Press, New York, N.Y., 1966.

[2] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[3] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Editorial Board, New York.

[4] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, Conf. Board of the Math. Sci., Reg. Conf. Series in Math., No. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[5] Sam B. Nadler, *The Fixed Point Property for Continua*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[6] Sam B. Nadler, *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc.

[7] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

Índice alfabético

(d, ε)-cadena, 7

(d, ε)-encadenado, 8

2^X, 44

2^X_K, 89

2^X_p, 89

A_∞, 85

$Bd_X(H)$, $Bd(H)$, 2

$C(X)$, 44

$CG(X)$, 37

$CL(X)$, 39

$CLC(X)$, 44

$CT(X)$, 36

$C_K(X)$, 89

C_p, 10

$C_p(X)$, 89

$D(X)$, 71

$D^m(X)$, 71

D_∞, 79

$F(X)$, 47

F_σ, 3

$F_n(X)$, 44

G_δ, 3

$HS(X)$, 89

$H_d(A, B)$, 48

L-convergente, 50

$N_d(\varepsilon, A)$, 48

$S(A, \varepsilon)$, 65

$S(\varepsilon)$-cadena, 65

$SG(X)$, 37

$ST(X)$, 37

T_0, 3

T_1, 3

T_2, 3

T_3, 4

T_4, 4

X/A, 35

$X^{[1]}$, 61

∞-

- aleta, 75

$\kappa(p)$, 57

λ-dendroide, 81

τ_V-convergente, 50

ε-

- cadena, 7
- función, 5
- retracción, 99

$c(p, X)$, 76
d-bien-encadenado, 8
n-
    aleta, 70
    celda, 14
    esfera, 14
    odo simple, 69
    odo simple estándar, 69
    ésimo producto simétrico, 44

abanico armónico, 76
AH-esencial, 101
arco, 14
    ordenado, 59
arcoiris de Knaster, 26

bloque de Whitney, 52

cadena, 6
    (d, ε)-cadena, 7
    (d, ε)-encadenado, 8
    $S(\varepsilon)$-cadena, 65
    d-bien-encadenado, 8
    débil, 7
cep, 56
completamente regular, 3
completo, 2
componente, 10
composante, 82
    de un punto, 57
conexo
    en pequeño, 56
    entre dos conjuntos, 59
confluente, 66
conjuntos
    mutuamente separados, 2
cono
    geométrico, 37
    topológico, 36
continuo, 12
    sen$(1/x)$, 15
    de convergencia, 56
    de Peano, 63
    descomponible, 17
    hereditariamente indescomponible, 17
    hereditariamente irreducible, 84
    indescomponible, 17
    irreducible, 53
    irreducible sobre un conjunto, 53
    regular, 76
    regular en un punto, 76
    tipo serpiente, 7
continuos
    linealmente encadenables, 7
contracción, 12
contraíble, 12
    con respecto a, 11
cr(Y), 11
cuasi-monótona, 66
cubo de Hilbert, 15
curva
    cerrada simple, 14
    universal de Sierpinski, 20

círculo
de Varsovia, 16
de Tychonoff, 4
dendrita
universal de Wazewski, 78
dendroide, 80
λ-dendroide, 81
suave, 81
suave en un punto, 81
descomponible, 17
descomposición, 30

EA, 6
encadenable, 7
esencial, 11
eslabón, 65
espacio
T_0, 3
T_1, 3
T_2, 3
T_3, 4
T_4, 4
cociente, 31
completamente regular, 3
contraíble, 12
coordenado, 22
de descomposición, 30
de Hausdorff, 3
de identificación, 31
de Peano, 63
de singulares, 44
de subconjuntos finitos, 47
de Tychonoff, 4
hereditariamente unicoherente, 77
LC en p, 57
localmente arco-conexo, 67
localmente conexo en p, 57
no degenerado, 12
normal, 3
regular, 3
tipo $\mathcal{P}$, 39
unicoherente, 77
estrella, 78
extensión, 6
extensor
absoluto, 6

función
AH-esencial, 101
confluente, 66
contracción, 12
cuasi-monótona, 66
de unión, 22
de Whitney, 52
esencial, 11
homotópica, 11
monótona, 66
no esencial, 11
nulo-homotópica, 11
universal, 86

gráfica, 68
acíclica, 73

hereditariamente
indescomponible, 17
hereditariamente irreducible, 84
hereditariamente unicoherente, 77
hiperespacio, 39
n-plegado, 89
de contención, 89
de suspensión, 89
homotopía, 11
homotópica, 11

indescomponible, 17
irreducible, 53
sobre un conjunto, 53

LAC, 67
lazo, 72
libro con n páginas, 70
linealmente encadenables, 7
localmente arco-conexo, 67
límite, 50
inferior, 50
inverso, 22
superior, 50

malla, 7
métrica
de Hausdorff, 48

nidificación, 58
no esencial, 11
normal, 3
número
de desconexión, 71
de componentes de un punto en un espacio conexo, 76

partición
cerrada, 31
PMH, 61
PPCF, 94
principio
maximal de Hausdorff, 61
problema
del continuo plano no separable, 105
propiedad
S, 64
del punto casi fijo, 94
punto
de corte, 5
de irreducibilidad, 82
de no corte, 5
final, 61
peludo, 74
rama, 77

RA, 6
rayo, 78
regular, 3
retracción, 5
retracto, 5
absoluto, 6

saturado, 32
scs, 32

semi-continua superior, 32
separa, 60
separable, 105
solenoide, 25
subcontinuo, 12
sucesión
    inversa, 22
    inversa indescomponible, 24
    no trivial, 51
suspensión
    geométrica, 37
    topológica, 37

teorema
    de arco-conexidad, 67
    de encaje Anderson-Choquet, 27
    de Hahn-Mazurkiewicz, 66
    de Isbell, 27
    de Kuratowski, 83
    de Sorgenfrey, 84
    de Urysohn, 4
    del arco ordenado, 59
    del cable cortado, 55
    del producto de Tychonoff, 4
    existencia de punto de no corte, 61
tipo
    serpiente, 7
topología
    de descomposición, 30
    de Tychonoff, 2
    de Vietoris, 40
    producto, 2
tríodo, 84
    simple, 29

unicoherente, 77

árbol, 73