BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE $e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JERÓNIMO QUISTIANO LARA

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO (FCFM, BUAP)
DR. CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS (IMATE, UNAM)

PUEBLA, PUEBLA. SEPTIEMBRE 2017

Agradecimientos

A mi familia (que como diría la Esfinge de Edipo) por todos los gratos momentos a lo largo de mi mañana y las primeras horas subsecuentes, especialmente a mi mamá que sostiene su buena intuición de confiar en la educación. Aprovecho también este párrafo para agradecer al CONACYT por el apoyo brindado para la realización de esta tesis.

Considero que la Licenciatura es la etapa en la que he tenido varios de mis mayores y mejores aprendizajes, principalmente debido a que me he encontrado con personas muy interesantes, por esta razón me gustaría agradecer a los profesores que me han introducido y motivado para profundizar en diversos tópicos relacionados con la ciencia, especialmente debo mencionar a la Dra. López Toriz, al Dr. Apolonio Juárez, al Dr. Fernando Macías, a la Dra. Lucia Cervantes, al Dr. Julio Poisot y al M.C. Pablo Zeleny, sus palabras, tiempo y recomendaciones me han sido y serán de mucha ayuda.

También, debo ofrecer un especial agradecimiento a los amigos que me he encontrado durante la carrera y me han ayudado a avanzar como persona, y a los compañeros que conocí durante el evento de Prototipos de Inovación Tecnológica. Por encontrar tiempo para escucharme y estar dispuestos a apoyarme si se los pidiera, sepan que los aprecio mucho.

Por último, pero no menos importante, agradezco a mis asesores de tesis, por sus observaciones, disposición y paciencia, en especial a la Dra. Patricia Domínguez por extenderme la mano de forma tan natural y sencilla en un momento de mucha incertidumbre para mí, por apostar fuertemente por las personas de una manera que no sólo se queda en la teoría, tiene mi más sincera admiración.

La ciencia es un juego, pero un juego con la realidad, un juego con los cuchillos afilados... Si alguien corta con cuidado una imagen en mil trozos, puedes resolver el rompecabezas si vuelves a colocar las piezas en su sitio. En un juego científico, tu rival es el Buen Señor. No sólo ha dispuesto el juego, sino también las reglas, aunque éstas no sean del todo conocidas. Ha dejado la mitad para que tú las descubras o las determines. Un experimento es la espada templada que puedes empuñar con éxito contra los espíritus de la oscuridad pero que también puede derrotarte vergonzosamente.
La incertidumbre radica en cuántas de esas reglas ha creado el propio Dios de forma permanente y cuántas parecen provocadas por tu inercia mental; la solución sólo se vuelve posible mediante la superación de este límite. Tal vez esto sea lo más apasionante del juego. Porque, en tal caso, luchas contra la frontera imaginaria entre Dios y tú, una frontera que quizás no exista.

Erwin Schrödinger

To every man is given the key to the gates of heaven; the same key opens the gates of hell.

Buddhist proverb

Índice general

Introducción ii

1. Preliminares **1**

1.1. Aspectos Métricos y Topológicos 1

1.1.1. Compacidad 4

1.1.2. Conexidad 5

1.2. El Campo de los Números Complejos 6

1.2.1. Plano extendido y Proyección Estereográfica 9

1.3. Funciones de Variable Compleja 11

2. Familias Normales **21**

2.1. El Espacio $C(G, \Omega)$ 21

2.1.1. Familias normales 25

2.1.2. Teorema de Montel y Otros Resultados 29

3. Funciones Casiconformes **35**

3.1. Coeficientes de Beltrami y Pullbacks 36

3.2. Funciones Casiconformes 41

3.2.1. Propiedades de las funciones casiconformes 43

3.2.2. Funciones casiregulares, casisimétricas y casicírculos 45

3.3. Extensión de Funciones 48

3.3.1. De dominios a fronteras 48

3.3.2. De fronteras a interiores 50

4. Dinámica Compleja **51**

4.1. Iteración y Puntos Fijos 53

4.2. Homeomorfismos del Círculo 60

4.3. Conjuntos de Fatou y Julia 61

4.3.1. Teoría local de puntos fijos 64

4.3.2. Componentes del conjunto de Fatou 68

5. Dinámica de $e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{sen}(z)$ **73**

5.1. El Espacio de Parámetros 73

5.2. Caso $\theta \in \mathbb{Q}$ 74

5.3. Caso $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 77

5.3.1. Dinámica de $e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{sen}(z)$, θ de tipo acotado 79

A. Números Irracionales **87**

A.1. Números Diofantinos 87

A.2. Fracciones Continuas 89

Referencias **92**

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas tiene su inicio a finales del siglo XIX, motivado por el análisis de la convergencia del método de Newton, para encontrar ceros de polinomios. Pero no fue hasta los trabajos de Pierre Fatou (1878−1929) y de Gaston Julia (1893−1978), alrededor de los años 20, que la teoría global fue seriamente estudiada. Pierre Fatou fue el primero en estudiar, en 1926, las funciones enteras trascendentes (funciones con una singularidad esencial en infinito). La innovación más importante en los trabajos de Fatou y Julia fue el uso de la teoría de familias normales, para dividir la esfera de Riemann en dos conjuntos de comportamiento dinámico totalmente diferente; estos conjuntos hoy son conocidos como los conjuntos de Julia y Fatou, o equivalentemente el conjunto caótico y el conjunto estable.

En este trabajo desarrollaremos algunos aspectos de la teoría de dinámica compleja, generada por la iteración de funciones holomorfas, para estudiar algunos aspectos relacionados con la dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$, centrándonos principalmente en el caso cuando $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Algunas preguntas que abordaremos son: ¿Es linealizable la función $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen}(z)$ para cada θ?, es decir, ¿es f_θ conjugada a su parte lineal en una vecindad de cero? Veremos que la respuesta depende del parámetro θ. En 1919, G. A. Pfeiffer dio contra ejemplos a la primera pregunta, y en 1927, Crémer probó que para algunos valores del parámetro θ las funciones racionales no son linealizables. En 1942 Siegel probó que hay valores de θ (números Diofantinos, véase Apéndice A) para los que la correspondiente función f es linealizable. La pregunta finalmente fue resuelta por Brjuno [6] y Yoccoz [36]. Sin embargo, la naturaleza de la frontera del máximo dominio de linealización no es completamente conocida.

En el Capítulo 5 analizaremos con detalle las construcciones necesarias para demostrar lo siguiente: Para cualquier número irracional de tipo acotado (véase Apéndice A) $0 < \theta < 1$, la frontera del disco de Siegel (véase capítulo 4) de $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$ es un casicírculo (véase capítulo 3) y pasa por los puntos críticos $\pi/2$ y $-\pi/2$ (véase capítulo 1).

Tabla de Símbolos

$\mathbb{C}$	El plano complejo
$\widehat{\mathbb{C}}$	El plano complejo extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$C^r(U),\ r \geq 1$	El espacio de funciones r veces diferenciables en U cuya n-ésima derivada es continua para $1 \leq n \leq r$
$C^\infty(U)$	El espacio de funciones que pertenecen a $C^r(U)$ para toda $r \geq 1$
$\mathrm{Crit}(f)$	El conjunto de puntos críticos finitos de f
$\partial_z, \partial_{\overline{z}}$	Derivadas parciales con respecto a z y a $\overline{z}$
$\mathbb{D}$	Disco unitario $\{\lvert z\rvert < 1\}$ en $\mathbb{C}$
$\mathbb{D}_r(z)$	Disco abierto $\{\lvert z\rvert < r\}$
$\mathcal{E}$	El conjunto de funciones enteras trascendentes
$\mathrm{ext}(\gamma)$	El dominio a la derecha de γ, donde γ es una curva de Jordan orientada
$\boldsymbol{F}(f)$	El conjunto de Fatou de f
$f^{\circ n}$	$f^{\circ n} := f \circ \cdots \circ f,$ la función f compuesta con si misma n veces
$\mathrm{Im} z$	La parte imaginaria de z
$\mathrm{int}(\gamma)$	El dominio a la izquierda de γ, donde γ es una curva de Jordan orientada
$\mathrm{int}(X)$	El interior del conjunto X
$\boldsymbol{J}(f)$	El conjunto de Julia de f

$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales $\{1, 2, ...\}$
$\mathcal{O}(X)$	La órbita de X, donde X es un punto o un conjunto
$\mathbb{Q}$	El conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales
$\mathrm{Re}z$	La parte real de z
R_θ	La rotación rígida por $\theta \in \mathbb{R}$
$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z_1, z_2)$	La distancia cordal entre los puntos z_1 y z_2 en la esfera de Riemann
$\mathbb{S}^1$	El círculo unitario $\{z : \lvert z\rvert = 1\}$
$\mathbb{T}$	El espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo supondremos que el lector está familiarizado con el análisis real y complejo. Sin embargo, en este capítulo daremos un breve repaso de los principales resultados que serán de vital importancia para los temas que se desarrollarán en los capítulos posteriores de esta tesis.

1.1. Aspectos Métricos y Topológicos

El lector interesado en más detalles sobre la teoría, comentarios y ejemplos de esta sección puede consultar [12] y [17].

Sea A un conjunto y $x, y, z \in A$. Si $d : A \times A \to \mathbb{R}$ es una función que cumple las siguientes propiedades:

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) $d(x, y) \leq d(x, y) + (y, z)$,

entonces diremos que d es una *distancia* (o *métrica*) en A, y al par (A, d) lo llamaremos *espacio métrico*.

Definición 1.1. Sea (A, d) un espacio métrico, si $x \in A$ y $r > 0$, definimos:

$$B(x, r) = \{y \in A : d(x, y) < r\},$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in A : d(x, y) \leq r\}.$$

A los conjuntos $B(x, r)$ y $\overline{B}(x, r)$ les llamaremos *bola abierta* y *bola cerrada*, respectivamente, con centro en x y radio r.

En un espacio métrico (A, d), las bolas abiertas nos serán de utilidad para caracterizar a los subconjuntos de A. Diremos que $E \subset A$ es *abierto* si para todo $x \in E$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset E$. Observe que en particular $B(x, \varepsilon)$ es abierto en A.

Definición 1.2. Sean (A, d) un espacio métrico y $x \in A$, diremos que un conjunto $V \subset A$ es una *vecindad* o *entorno* de x, si existe una bola abierta con centro en x y radio r, que está contenida en V. Denotaremos esto por $V(x)$.

Si en la definición anterior el conjunto V es abierto, diremos que V es una vecindad abierta del punto x. Al conjunto de todas las vecindades de x lo denotaremos por:

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset A : V \text{ es vecindad de } x\}.$$

Definición 1.3. Sea (A, d) un espacio métrico, $x \in A$ y $E \subset A$. Diremos que x es un *punto de acumulación* de E si toda vecindad de x contiene puntos de E distintos de x, es decir, para toda $V \in \mathcal{V}(x)$ tenemos que $V_0 \cap E \neq \emptyset$, donde $V_0 = V \setminus \{x\}$.

Si $E \subset A$, denotamos al conjunto de todos sus puntos de acumulación por E'. Además, diremos que el subconjunto $D \subset A$ es *cerrado* si su complemento $A \setminus D$ es abierto.

El siguiente teorema es un resultado conocido.

Teorema 1.1. *[17]. Sea (A, d) un espacio métrico, un conjunto $F \subset A$ es cerrado si, y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Ahora, sea $E \subset A$, donde (A, d) es un espacio métrico.

(a) Definimos el *interior* de E como el conjunto:

$$int\ E \ = \cup\{G : G \text{ es abierto y } G \subset E\}.$$

(b) Definimos la *clausura* de E como el conjunto:

$$\overline{E} \ = \cap\{F : F \text{ es cerrado y } E \subset F\}.$$

No es difícil demostrar que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto y que la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Así, usando las leyes de D'Morgan se deduce que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $int\ E$ es abierto y $\overline{E}$ es cerrado.

Es común que al hablar de un espacio métrico (A, d) sólo se mencione al conjunto A cuando la métrica se sobreentiende o cuando sólo nos interesa mencionar alguna propiedad que cumplen los elementos de A en cualquier espacio métrico, en lo posterior seguiremos esta convención.

Definición 1.4 (Espacio topológico)**.** Un *espacio topológico* es una pareja (X, τ) tal que los elementos de τ son subconjuntos de X (τ está contenido en el conjunto potencia de X) y cumplen las siguientes propiedades:

(a) $X, \emptyset \in \tau$,

(b) La unión arbitraria de elementos de τ es a su vez elemento de τ,

(c) La intersección finita de elementos de τ es elemento de τ.

Observe que si (A, d) es un espacio métrico, entonces (A, d) es a su vez un espacio topológico, en este caso τ está formada por uniones arbitrarias e intersecciones finitas de bolas abiertas contenidas en A.

De forma análoga a los espacios métricos, es común que al hablar de un espacio topológico (X, τ), sólo se mencione al conjunto X, cuando la topología se sobreentiende.

1.1.1. Compacidad

Si f es una función definida en un conjunto A que consiste en todos los enteros $n \geq n_0$, con $n_0 \in \mathbb{Z}$, entonces f recibe el nombre de *sucesión.* Al tratar con sucesiones es usual que se utilice la siguiente notación:

$$f(n) = a_n,$$

con el fin de presentar los términos de la sucesión de una forma más conocida. También es usual indicar la sucesión, escribiendo el término típico entre llaves $\{a_n\}$, el entero n_0 con el cual comienza la sucesión generalmente será 0 o 1, y se establecerá o se dará por supuesto dependiendo del contexto.

Definición 1.5. Una sucesión $\{a_n\}$, en un espacio métrico M, se llama *sucesión de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m > N$.

Si M es un espacio métrico que tiene la propiedad de que cada sucesión de Cauchy tiene límite en M, entonces diremos que M es un *espacio métrico completo.*

Teorema 1.2. *[12]. Sea M un espacio métrico completo y $G \subset M$, entonces (G, d) es un espacio métrico completo si, y sólo si G es cerrado en M.*

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X tales que $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B$ recibe el nombre de *cubierta* de A. Además, si cada elemento de $\mathcal{G}$ es abierto, entonces diremos que $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de A.

Definición 1.6. (a) El conjunto A es *precompacto* si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

(b) El conjunto A posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo subconjunto infinito $T \subset A$ admite un punto de acumulación en A.

(c) Diremos que A es *compacto*, si toda cubierta abierta de A admite una subcubierta finita.

(d) Diremos que A es *relativamente compacto* si $\overline{A}$ es compacto.

(e) Sea $A \neq \emptyset$. Decimos que A es *secuencialmente compacto*, si cada sucesión en A posee una subsucesión convergente en A.

Con las definiciones antes mencionadas se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.3. *[17]. Todo espacio métrico compacto es completo.*

Teorema 1.4. *[17]. Si M es un espacio métrico, entonces son equivalentes:*

(a) El espacio métrico M es compacto.

(b) Cada conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

(c) El espacio métrico M es secuencialmente compacto.

(d) El espacio métrico M es completo y precompacto.

Observe que un subconjunto A de un espacio métrico M es relativamente compacto si, y sólo si toda sucesión en A admite una subsucesión convergente (no necesariamente en A).

1.1.2. Conexidad

Sea M un espacio métrico y $A \subset M$, tal que $A \neq \emptyset$, decimos que A es *disconexo* si existen dos conjuntos abiertos S y T en M tales que,

(a) $(A \cap S) \neq \emptyset \neq (T \cap A)$ y $(A \cap S) \cap (T \cap A) = \emptyset$.

(b) $A = (A \cap S) \cup (T \cap A)$.

Si A no es disconexo, decimos que A es *conexo*.

Proposición 1.1. *[17]. M es conexo si, y sólo si los únicos conjuntos de M que son simultáneamente abiertos y cerrados son M y $\emptyset$.*

Definición 1.7. Decimos que M es localmente conexo si para cada punto $x \in M$ y toda vecindad abierta V de x, existe una vecindad abierta V_0 de x tal que $V_0 \subset V$ y V_0 es un conjunto conexo.

Un ejemplo de un conjunto que es conexo, pero no localmente conexo es el siguiente, véase Figura 1.1.

$$E = \left\{ \left(x,\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1] \right\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Para un estudio más profundo y más ejemplos sobre conexidad el lector puede consultar [12].

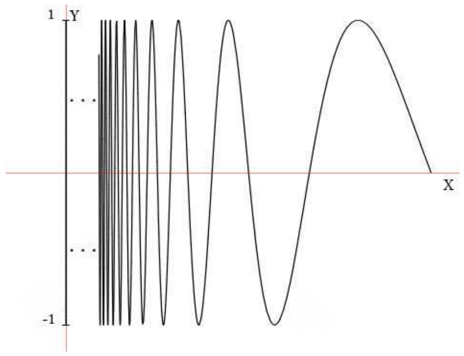

Figura 1.1: Gráfica del conjunto E.

1.2. El Campo de los Números Complejos

Los números complejos aparecen por primera vez a principios del siglo XVI. Gerolamo Cardano (1501−1576) trabajó con los números complejos para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas. En el siglo XVIII Euler utilizó las funciones de números complejos para resolver ecuaciones diferenciales, pero no fue hasta mediados del siglo XIX que los números complejos fueron considerados como números legítimos. Descartes rechazó raíces complejas de ecuaciones y las llamó "imaginarias". Su aceptación se debe a la representación geométrica de los números complejos que hizo Gauss.

Al conjunto de los (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ junto con las operaciones de suma y multiplicación dadas por:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w),$$

$$(x, y) * (z, w) = (xz - yw, xw + yz),$$

donde $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ se le llama el *conjunto de los números complejos* y se denota por $\mathbb{C}$.

Para un número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, la cantidad a se llama la parte real de z y b se llama la parte imaginaria de z. Así, denotaremos por $Re(z)$ a a y por $Im(z)$ a b. Dos números complejos, $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son iguales si, y sólo si sus partes real e imaginaria son iguales, es decir, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Además, se puede demostrar que el conjunto $\mathbb{C}$ es un campo, véase [23].

También podemos ver al conjunto $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, puesto que se puede demostrar la identidad $z = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, donde consideramos que el número real a equivale a $(a, 0)$. Si además denotamos al número $(0, 1)$ por i, entonces podemos escribir $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observe que el número i cumple que $i^2 = -1$, de donde resulta que este número (también llamado unidad imaginaria) es raíz cuadrada de -1 (y por lo tanto, una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$).

Ahora se muestra una serie de definiciones y resultados básicos sobre los números complejos.

Definición 1.8. Sea $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, un número complejo, el *conjugado* de z se define como $a - bi$ y se denota por $\overline{z}$.

Definición 1.9. Sea $z = a+bi$ un número complejo, la *norma*, *valor absoluto* o *módulo* de z está definida por $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observe que si definimos la función $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

entonces d define una métrica sobre el conjunto $\mathbb{C}$. Por lo tanto, $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico y también un espacio topológico considerando la topología inducida por la métrica d.

Definición 1.10. La *forma trigonométrica* de un número complejo $z = a+bi$ está dada por, $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, donde $a = r\cos\theta$, $b = r\,\text{sen}\,\theta$ y $r = |z|$.

La forma trigonométrica de un número complejo z adquiere claridad si se toma en cuenta su representación gráfica, véase Figura 1.2.

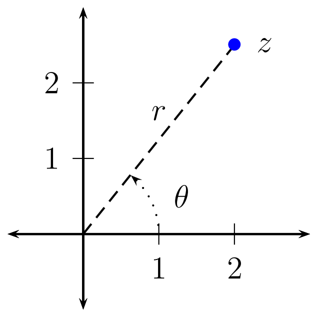

Figura 1.2: Representación gráfica de un número complejo, en este ejemplo $z = (2, 2.5)$.

Al ángulo θ se le llama el *argumento* de z, y es denotado por $\theta = arg\ z$, este ángulo es medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, y tiene periodicidad de 2π.

Definición 1.11. Si $z = a+bi$ es un número complejo, definimos la expresión e^z como:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i\,\text{sen}\,b).$$

Además, dado un $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, si un número complejo w cumple que $w^n = z$, entonces diremos que w es una *raíz n-ésima* de z.

Un resultado importante es el siguiente, véase [33]; Dados $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ con $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\,\mathrm{sen}\,\theta_j)$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ se cumple que:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)]$$

Así, no es difícil deducir los siguientes teoremas.

Teorema 1.5 (Teorema de De Moivre [23]). *Si* $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, *entonces*

$$z^n = [r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta).$$

Teorema 1.6. *[23]. Un número complejo* $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$*, diferente de cero, tiene exactamente* n *raíces diferentes, las cuales están dadas por la siguiente fórmula:*

$$z_k = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.1}$$

1.2.1. Plano extendido y Proyección Estereográfica

Para desarrollar una teoría menos restrictiva conviene extender el plano complejo $\mathbb{C}$ añadiendo un punto asociado a infinito, con lo que obtenemos el plano extendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Aunado a las operaciones de $\mathbb{C}$, en $\widehat{\mathbb{C}}$ definimos:

$$\begin{gathered} \tfrac{a}{0} = \infty,\ a \neq 0, \\ \tfrac{a}{\infty} = 0,\ a \neq \infty, \\ a\infty = \infty,\ a \neq 0, \\ a + \infty = \infty. \end{gathered} \tag{1.2}$$

El modelo canónico para este nuevo conjunto es la esfera unitaria (también llamada *esfera de Riemann*):

$$\mathbb{S}^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\right\}.$$

Para asociar cada punto en el plano con un punto en la esfera de Riemann, utilizamos el método de la proyección estereográfica:

Sea $N = (0, 0, 1)$, es decir, N es el polo norte de $\mathbb{S}^2$, e identifiquemos a $\mathbb{C}$ con $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, entonces $\mathbb{C}$ corta a $\mathbb{S}^2$ a lo largo de su ecuador. Para cada punto $z \in \mathbb{C}$ consideramos la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por z y N. Esta intersecta a la esfera en un solo punto $s \neq N$, si $|z| > 1$, entonces s está en el hemisferio norte de la esfera, como lo muestra la Figura 1.3.

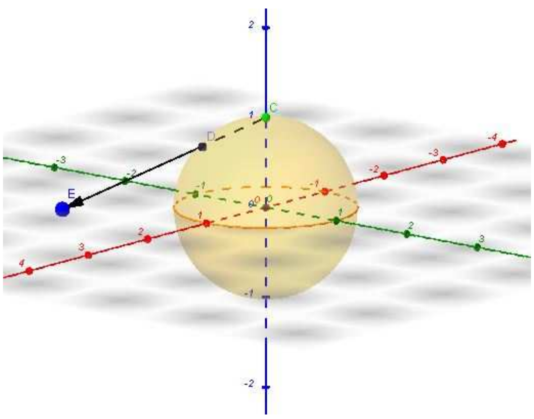

Figura 1.3: Proyección estereográfica.

Con lo mencionado anteriormente obtenemos la biyección:

$$\Phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{C},$$

definida por:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Con inversa dada por:

$$\Phi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\},$$

tal que,

$$\Phi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i\,(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Observe que si hacemos corresponder a ∞ con el polo norte N, se obtiene una biyección entre $\mathbb{S}^2$ y $\widehat{\mathbb{C}}$.

La topología de $\mathbb{C}$ es la inducida por la métrica $d(w,z) = |w-z|$. Ahora, la topología de $\widehat{\mathbb{C}}$ es la topología de $\mathbb{C}$ unión la familia de los complementos de conjuntos compactos en $\mathbb{C}$, por lo tanto, $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico compacto, véase [1]. También, es de importancia notar que la topología de $\widehat{\mathbb{C}}$ es la inducida por la métrica definida a continuación, véase [19].

Definición 1.12. La *métrica esférica* (*métrica cordal*) en el plano complejo extendido es la siguiente:

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z_1,z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} & si\ z_1, z_2 \neq \infty; \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & si\ z_2 = \infty; \\ 0 & si\ z_1 = z_2 = \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.3. Funciones de Variable Compleja

En esta sección daremos un resumen de algunos de los resultados más importantes en cuanto a funciones de variable compleja se refiere, veremos que algunas definiciones son parecidas al caso de variable real. Recomendamos al lector interesado en más detalles consultar [1] o [23].

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un *dominio* (conjunto abierto y conexo, no vacío). Si asignamos a cada punto $z \in \Omega$ un único número complejo $f(z)$ decimos que la ecuación $w = f(z)$ define una *función de valores complejos* en Ω. Una función de valores complejos puede escribirse en la siguiente forma:

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

donde $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones de variables reales.

Definición 1.13 (Continuidad)**.** Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, se dice que f es *continua* en z_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para cada z que cumpla $|z - z_0| < \delta$ tenemos que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Si una función de variable compleja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua para todo $z \in \Omega$, simplemente diremos que f es continua en Ω.

Definición 1.14 (Límite)**.** Sea una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Decimos que el número $l \in \mathbb{C}$ es el *límite* de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 si dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para cada $|z - z_0| < \delta$ tenemos que $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Escribiremos lo anterior como $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$.

Definición 1.15. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua en Ω si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ siempre que $z, w \in \Omega$ y $|z - w| < \delta$.

Proposición 1.2. *[23]. Una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.*

Por el teorema de Heine-Borel se sabe que un subconjuto de $\mathbb{C}$ es compacto si, y sólo si es cerrado y acotado, véase [12].

Definición 1.16 (Función holomorfa)**.** Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *holomorfa* si f es derivable (en el sentido complejo), es decir, si la derivada

$$z \mapsto f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

está definida como una función de Ω en $\mathbb{C}$.

Análogamente a las funciones de variable real, se cumple el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z \in \Omega$, entonces f es continua en z.*

Definición 1.17 (Función analítica)**.** Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *analítica* en $A \subset \Omega$, si para todo $z_0 \in A$ existen $r_0 > 0$ y una serie de potencias centrada en z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tal que la bola abierta $B(z_0, r_0)$ esté contenida en A y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r_0)$.

Dentro de la teoría de funciones de variable compleja hay diversos resultados interesantes, y uno de ellos relaciona los conceptos de función holomorfa y función analítica.

Teorema 1.7. *[7]. Una función f es analítica en A si, y sólo si es holomorfa en A.*

Si $f(z) = w$ es una relación tal que a cada valor de z corresponde sólo un valor de w, decimos que f es una *función unívoca* de z. Si más de un valor de w corresponde a cada valor de z, decimos que w es una *función multívoca* o multivaluada (este último caso se da por ejemplo en la función raíz cuadrada). Una función multivaluada puede considerarse una colección de funciones unívocas; cada miembro de esta colección es llamada una rama de la función. Además, cuando tenemos una función multívoca se acostumbra considerar a un miembro particular como la rama principal de la función y el valor de la función correspondiente a esta rama recibe el nombre de valor principal.

Por otra parte, al trabajar con conjuntos con ciertas características, nos es muy útil en la práctica relacionarlos mediante alguna función y estudiar las propiedades que se conservan bajo la transformación. Las siguientes definiciones nos servirán para tal fin.

Definición 1.18 (Homeomorfismo)**.** Sean X, Y espacios topológicos, y f una función de X a Y, entonces f es un *homeomorfismo* si se cumple lo siguiente:

- f es una biyección.
- f es continua.
- La inversa de f es continua.

Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, diremos que X es homeomorfo a Y. Si dos espacios son homeomorfos estos tienen las mismas propiedades topológicas y la forma de ver esto es a través de f.

Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ son funciones continuas, decimos que f y g son *funciones conjugadas topológicamente* o simplemente *funciones conjugadas*, si existe $h : X \to Y$ homeomorfismo tal que:

$$h \circ f \circ h^{-1} = g. \tag{1.4}$$

Denotaremos esto último escribiendo $f \underset{top}{\sim} g$ o simplemente $f \sim g$.

Diremos que la función $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo* si f es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

Definición 1.19 (Isomorfismo conforme)**.** Sean $X, Y \subset \mathbb{C}$ abiertos. Si la función $f : X \to Y$ es analítica y biyectiva, entonces diremos que f es un *isomorfismo conforme* (o analítico) y que X, Y son conformemente isomorfos (lo cual denotaremos por $X \simeq Y$).

Teorema 1.8. *[7]. Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo conforme, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es también un isomorfismo conforme.*

Es importante observar que en la práctica es común encontrarse con funciones holomorfas en casi todo su dominio, por ejemplo, una función de la forma $P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en la variable z, es claro que la función $P(z)/Q(z)$ es holomorfa en todos los puntos donde $Q(z) \neq 0$. Con esto en mente enunciamos las siguientes definiciones.

Definición 1.20 (Punto singular)**.** Sea Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Un punto en el que f no es holomorfa se llama *punto singular* o *singularidad* de f.

Además, diremos que el punto $z = z_0$ es una *singularidad aislada* de f si z_0 es un punto singular de f y es posible hallar un $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta)$ no contenga ningún otro punto singular distinto de z_0. En caso contrario diremos que z_0 es un singularidad no aislada.

Las singularidades aisladas se clasifican de la siguiente manera:

(a) *Singularidad removible.* Un punto singular aislado z_0 es una singularidad removible de f si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe. Al definir $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ se muestra que f no sólo es continua en z_0, sino también analítica en z_0.

(b) *Polos.* Si z_0 es una singularidad aislada y es posible hallar un entero positivo n tal que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = l \neq 0$, entonces $z = z_0$ es un polo de orden n. Si $n = 1$, diremos que z_0 es un polo simple.

(c) *Singularidades esenciales.* A una singularidad aislada que no es un polo o una singularidad removible se le llama singularidad esencial.

(d) *Singularidades al infinito.* Cuando estemos trabajando en $\widehat{\mathbb{C}}$ diremos que el tipo de singularidad de f en $z = \infty$ es el mismo que el de $f(1/w)$ en $w = 0$.

Para funciones multivaluadas llamaremos *puntos de ramificación* a sus puntos singulares no aislados. Observe que una función multivaluada no puede ser continua y por tanto no es holomorfa en una vecindad agujerada de un punto de ramificación.

Algunos ejemplos son los siguientes:

- Para $f(z) = \operatorname{sen}(z)/z$ tenemos que $z = 0$ es una singularidad removible, porque $\lim_{z\to z_0} \operatorname{sen}(z)/z = 1$.
- Para $f(z) = (7z+2)/(z-4)^{53}(z+i)$ tiene un polo de orden 53 en $z = 4$ y un polo simple en $z = -i$.
- Para $f(z) = e^{2/(z+2)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 2$.
- Para la función $f(z) = z^7$, en ∞ hay un polo de orden 7, porque $f(1/w) = 1/w^7$ tiene un polo de orden 7 en cero.
- Para $f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación en los ceros de $z^2 + z - 2$.

Diremos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *meromorfa* si es holomorfa en Ω salvo en los polos. En cambio, si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en todo su dominio diremos que f es una *función entera*.

Definición 1.21. Un punto z es un *punto crítico* de f si $f^{'}(z) = 0$. El valor de f en un punto crítico se llama *valor crítico* de f.

A continuación enunciaremos algunas definiciones que hacen alusión a conjuntos lineales en el plano complejo y que nos servirán para estudiar la regularidad de los conjuntos en $\mathbb{C}$.

Definición 1.22. Un subconjunto γ de $\mathbb{C}$, se llama *arco* o *curva* que une los puntos $x, y \in \mathbb{C}$ si existe un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, donde $b > a$ y una aplicación $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua en $[a, b]$ tal que $\phi([a, b]) \subset \mathbb{C}$ con $\phi(a) = x$, y $\phi(b) = y$.

Si en la definición anterior $x = y$, entonces diremos que γ es una curva cerrada, y si además γ es inyectiva en (a, b), diremos que γ es una curva cerrada simple.

Decimos que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es *arco conexo*, si para cada par $x, y \in \Omega$ existe un arco en Ω que une los puntos x, y.

Es usual denotar por γ a la función o a su imagen.

Definición 1.23. Para $n \geq 1$, una curva γ es de *clase* C^n, si γ es n veces continuamente diferenciable y satisface que $\gamma^{'}(t) \neq 0$, para todo t de su dominio.

Una región Ω es simplemente conexa si toda curva simple cerrada que esté en Ω, puede contraerse continuamente a un punto en Ω sin salirse de Ω (este concepto se encuentra en la literatura como homotopía). A una región que no es simplemente conexa se le llama múltiplemente conexa.

Toda curva continua cerrada que no se intersecte a sí misma se llama curva de Jordan y el siguiente teorema es muy importante.

Teorema 1.9 (Teorema de la curva de Jordan [1]). *Una curva de Jordan divide el plano en dos regiones que tienen a la curva como frontera común. La región, que queda* *acotada, se llama interior de la curva, mientras que la otra región se llama exterior de la curva.*

Con el teorema de la curva de Jordan se muestra que el interior de una curva simple cerrada es una región simplemente conexa.

Definición 1.24. Sea f una función entera, diremos que β es un *valor asintótico* de f si existe una curva continua $\gamma(t) \subset \mathbb{C},\ 0 \leq t < \infty$, tal que $\gamma(t) \to \infty$ y $f(\gamma(t)) \to \beta$ conforme $t \to \infty$.

Cuando nos refiramos a un *valor singular* de la función f entenderemos que estamos hablando de un valor crítico o un valor asintótico de f, y denotaremos por $SV(f)$ al conjunto de valores singulares de f.

El ángulo que forman dos curvas γ_1, γ_2 al intersectarse, es el ángulo que forman las tangentes de cada curva en el punto de intersección. Así, decimos que una función f *preserva ángulos* en el punto z_0, si el ángulo entre todo par de curvas γ_1 y γ_2 que se intersectan en z_0, donde z_0 pertenece al dominio de f, es igual al ángulo entre $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ en el punto $f(z_0)$. Observe que la orientación de los ángulos puede, o no, preservarse; si el ángulo se preserva, decimos que f es *conforme* en z_0.

Proposición 1.4. *[7] Sea f una función analítica en una región Ω, si $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.*

Comparar la Proposición 1.4 con la Definición 1.19.

A continuación, enunciaremos algunos teoremas que describen cómo puede ser el comportamiento de la integral de funciones analíticas (holomorfas) sobre curvas cerradas.

Teorema 1.10 (Cauchy [23])**.** *Si f es una funión analítica en una región Ω y en su frontera γ, donde γ es una curva de Jordan, entonces se cumple:*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Algunas consecuencias del Teorema 1.10 son las siguientes.

Teorema 1.11. *[23]. Sea f analítica en una región simplemente conexa Ω. Si w y z son dos puntos cualesquiera en Ω. Se cumple que,*

$$\oint_w^z f(z)dz$$

es independiente de la trayectoria en Ω que une w y z.

Teorema 1.12. *[33]. Sea f analítica en una región simplemente conexa Ω. Si w y z son dos puntos cualesquiera en Ω y $F'(z) = f(z)$. Se cumple que:*

$$\int_w^z f(z)dz = F(z) - F(w).$$

Teorema 1.13. *[33]. Sea f una función analítica en una región limitada por dos curvas simples cerradas γ y γ_1 (γ_1 en el interior de γ) y sobre estas curvas. Se cumple que*

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz,$$

donde γ y γ_1 se recorren en sentido positivo en relación con sus interiores.

El teorema anterior tiene una generalización para curvas simples cerradas que no se intersectan, para más detalles, consultar [23].

Las expresiones dadas en el siguiente teorema se conocen como *fórmulas integrales de Cauchy*, y muestran que si se conocen los valores de una función analítica f sobre una curva simple cerrada γ, entonces puede hallarse el valor de la función y los valores de todas sus derivadas en todos los puntos interiores de γ. Por tanto, si una función de una variable compleja tiene primera derivada en una región simplemente conexa Ω, entonces todas sus derivadas de orden superior existen en Ω. Esto no es necesariamente válido para funciones de variables reales.

Teorema 1.14. *[1]. Si f es analítica sobre y en el interior de una curva simple cerrada*

γ, y si z_1 es un punto en el interior de γ, entonces

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}dz,$$

donde γ se recorre en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj).

Además, la n-ésima derivada de f en z_1 es:

$$f^{(n)}(z_1) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}}dz \quad n = 1, 2, 3, ...$$

La primera expresión puede considerarse como un caso especial de la segunda para $n = 0$, teniendo en cuenta que 0!=1.

Algunos de los principales resultados que son consecuencia de las fórmulas integrales de Cauchy se enuncian a continuación.

Teorema 1.15 (Liouville [7])**.** *Suponga que para toda z en el plano complejo tenemos que $f(z)$ es analítica y $f(z)$ es acotada ($|f(z)| < M$ para alguna constante M), entonces f es una función constante.*

Por lo tanto, toda función analítica distinta de una constante no puede estar acotada.

Teorema 1.16 (Módulo Máximo)**.** *Si G es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{C}$ y supongamos que f es una función analítica en G y continua en ∂G, entonces*

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

Demostración. Por ser G acotado, existe un punto $a \in \overline{G}$ tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \overline{G}$. Si f es una función constante, entonces se cumple el resultado. Si f no es una función constante, entonces sea $\Omega = f(G)$ y $\alpha = f(a)$, tenemos que $|\alpha| \geq |\xi|$ para cada $|\xi| \in \Omega$, entonces α debe estar en la frontera de Ω porque de lo contrario existiría un α_1 en una vecindad contenida en Ω con $|\alpha_1| > |\alpha|$. ■

Teorema 1.17 (Lema de Schwarz). *Si $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y f es una función analítica en $\mathbb{D}$ que cumple:*

(a) $|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D},$

(b) $f(0) = 0.$

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$. Además, si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, entonces existe una constante c, $|c| = 1$ tal que $f(w) = cw$ para todo $w \in \mathbb{D}$.

Demostración. Definamos $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ para $z \neq 0$ y $g(0) = f^{'}(0)$, entonces g es analítica en $\mathbb{D}$. Usando el teorema del Módulo Máximo tenemos que $|g(z)| \leq r^{-1}$, para $|z| \leq r$ y $r \in (0,1)$, de donde $|g(z)| \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{D}$, y por tanto $|f(z)| \leq |z|$ y $|f^{'}(0)| = |g(0)| \leq 1$. Si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, o $|f^{'}(0)| = 1$, entonces $|g|$ toma su valor máximo dentro de $\mathbb{D}$ y por el teorema del Módulo Máximo $g(z) \equiv c$, con $|c| = 1$ y así $f(z) = cz$. ■

Capítulo 2

Familias Normales

En este capítulo se estudiará el importante concepto de familias normales de funciones, porque en los capítulos siguientes, este concepto nos permitirá analizar el comportamiento asintótico y la estabilidad local de un punto dada una familia de funciones enteras f_λ. Por lo tanto, podremos definir de manera precisa los conjuntos$-$regiones de estabilidad e inestabilidad del dominio común (en el caso que nos interesa este dominio común es $\mathbb{C}$) de los elementos de dicha familia. La bibliografía recomendada para profundizar en los temas de este capítulo es [1] y [7].

2.1. El Espacio $C(G,\Omega)$

Si G es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y (Ω, d) es un espacio métrico completo, entonces denotaremos por $C(G,\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas de G a Ω.

Observe que tal conjunto nunca es vacío (las funciones constantes están en $C(G,\Omega)$).

Proposición 2.1. *[7]. Si G es abierto en $\mathbb{C}$, entonces existe una sucesión de subconjuntos compactos de G tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Además, los conjuntos K_n pueden ser elegidos de tal forma que cumplan:*

(a) $K_n \subset$ int K_{n+1}.

(b) Si K es compacto y $K \subset G$, entonces $K \subset K_n$ para alguna n.

Demostración. Sea

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} - G) \geq \frac{1}{n}\},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Como K_n es acotado y es la intersección de dos subconjuntos cerrados, entonces K_n es compacto. Además, observe que el conjunto

$$\{z : |z| < n+1\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} - G) > \frac{1}{n+1}\}$$

es abierto, contiene a K_n y está contenido en K_{n+1} y por tanto se cumple (a).

Ahora, del hecho de que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ (esto se ve claramente por la construcción de nuestros K_n) y los comentarios anteriores se deduce que también $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} int\ K_n$. Así, si K es un subconjunto compacto de G, los conjuntos $\{int\ K_n\}$ forman una cubierta abierta de K y entonces existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_1}$ esto comprueba la parte (b) ■

Nuestro objetivo es dotar al conjunto $C(G,\Omega)$ de una métrica. Para tal fin, sea $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde K_n es compacto y $K_n \subset int\ K_{n+1}$, definimos:

$$\rho_n(f,g) = sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}, \tag{2.1}$$

para $f, g \in C(G,\Omega)$. También, definimos:

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}. \tag{2.2}$$

Observe que por ser $t(1+t)^{-1} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, la serie anterior converge porque está acotada por arriba, por $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$. Y tomando en cuenta el siguiente lema.

Lema 2.1. *[17]. Si (S,d) es un espacio métrico, entonces:*

$$\mu(s,t) = \frac{d(s,t)}{1+d(s,t)}$$

es también una métrica en S. Además, un conjunto es abierto en (S,d) si, y sólo si es abierto en (S,μ). Y una sucesión es una sucesión de Cauchy en (S,d) si, y sólo si es una sucesión de Cauchy en (S,μ).

Deducimos que $(C(G, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico, porque se cumple que $\rho(f, g) = \rho(g, f)$. También, como cada ρ_n cumple la desigualdad del triángulo, entonces ρ cumple la desigualdad del triángulo. Por último, del hecho de que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, se deduce que $f = g$ siempre que $\rho(f, g) = 0$.

Lema 2.2. *[7]. Sea la métrica ρ definida en (2.2). Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$ tal que para f y g en C(G, Ω) se cumple que:*

$$sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f, g) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Recíprocamente, dados $\delta > 0$ y algún conjunto compacto $K \subset G$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para f, $g \in$ C(G,Ω):

$$\rho(f, g) < \varepsilon \Rightarrow sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta. \tag{2.4}$$

Demostración. Si $\varepsilon > 0$ es fijo, sea p un entero positivo tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{2}\varepsilon$ y sea $K = K_p$. Elijamos $\delta > 0$ tal que $0 \leq t < \delta$ cumpla que $\frac{t}{1+t} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ahora, supongamos que f y g son funciones en $C(G, \Omega)$ que satisfacen $sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$. Como $K_n \subset K_p = K$ para $1 \leq n \leq p$, $\rho_n(f, g) < \delta$ para $1 \leq n \leq p$. Esto implica que:

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

donde $1 \leq n \leq p$, entonces

$$\rho(f, g) < \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

es decir, (2.3) se satisface.

Ahora, supongamos que K y δ están dados, como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} int\ K_n$ y K es compacto, entonces hay un entero $p \geq 1$ tal que $K \subset K_p$ y esto implica que:

$$\rho_p(f,g) \geq sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 \leq s < 2^p\varepsilon$ implica que $\frac{s}{1-s} < \delta$. Entonces $\frac{t}{1+t} < 2^p\varepsilon$ implica que $t < \varepsilon$. Por lo tanto si $\rho(f,g) < \varepsilon$, entonces $\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < 2^p\varepsilon$ y así $\rho_p(f,g) < \delta$. En conclusión, se satisface (2.4). ■

Proposición 2.2. *(a) Un conjunto $\mathcal{G} \subset (C(G,\Omega),\rho)$ es abierto si, y sólo si para cada $f \in \mathcal{G}$ hay un conjunto compacto K y un $\delta > 0$ tal que:*

$$\mathcal{G} \supset \{g : d(f(z),g(z)) < \delta, z \in K\}.$$

(b) Una sucesión $\{f_n\}$ en $(C(G,\Omega),\ \rho)$ converge a f si, y sólo si $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en todos los subconjuntos compactos de G.

Demostración. Si $\mathcal{G}$ es abierto y $f \in \mathcal{G}$, entonces para algún $\varepsilon > 0$, $\mathcal{G} \supset \{g : \rho(f,g) < \varepsilon\}$. Por la primera parte del Lema 2.1.2, tenemos que hay un $\delta > 0$ y un conjunto compacto K con las propiedades deseadas. Recíprocamente, si $\mathcal{G}$ cumple las propiedades y $f \in \mathcal{G}$, entonces la segunda parte del Lema 2.1.2 nos brinda un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{G} \supset \{g : \rho(f,g) < \varepsilon\}$, y esto significa que $\mathcal{G}$ es abierto. ■

Corolario 2.1. *La colección de conjuntos abiertos es independiente de la elección de los conjuntos $\{K_n\}$. En otras palabras, si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n'$, donde cada K_n' es compacto y $K_n' \subset int\ K_{n+1}'$ y si μ es la métrica definida por los conjuntos $\{K_n'\}$, entonces un conjunto es abierto en $(C(G,\Omega),\mu)$ si, y sólo si es abierto en $(C(G,\Omega),\rho)$*

El corolario anterior es una consecuencia directa de la parte (a) de la Proposición 2.2, porque la caracterización de los conjuntos abiertos no depende de la elección de los conjuntos $\{K_n\}$. Por lo tanto, de aquí en adelante siempre que consideremos a $C(G,\Omega)$

como un espacio métrico, supondremos que es con la métrica ρ dada en (2.2), para alguna sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos compactos tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ y $K_n \subset int\ K_{n+1}$.

Con lo anterior no es difícil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *[7]. $C(G, \Omega)$ es un espacio métrico completo.*

2.1.1. Familias normales

Diremos que un subconjunto (que en este caso es una familia de funciones) $\mathfrak{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal, si toda sucesión en $\mathfrak{F}$ tiene una subsucesión convergente a una función f en $C(G, \Omega)$. La función f no necesariamente pertenece a $\mathfrak{F}$, pero es claro de la que un subconjunto $\mathfrak{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal si, y sólo si su clausura es compacta. Por lo tanto, los conjuntos normales son relativamente compactos, véase Definición 1.1.6.

Recordando la definición de conjunto compacto y del hecho de que una familia normal $\mathfrak{F}$ tiene clausura compacta, no es de sorprender el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *[1]. Un conjunto $\mathfrak{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal si, y sólo si para todo conjunto compacto $K \subset G$ y $\delta > 0$ existen funciones $f_1, f_2, ...f_n \in \mathfrak{F}$ tales que para cualquier $f \in \mathfrak{F}$ hay al menos una k, $1 \leq k \leq n$ tal que:*

$$sup\ \{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \delta.$$

Definición 2.1. Un conjunto $\mathfrak{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinuo en un punto z_0 en G si, y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$,

$$d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon,$$

para toda f en $\mathfrak{F}$.

Observe que si el conjunto $\mathfrak{F}$ consta de una única función f, entonces afirmar que $\mathfrak{F}$ es equicontinua en z_0 es únicamente afirmar que f es continua en z_0, y decir que $\mathfrak{F}$ es equicontinua sobre un conjunto E sgnifica que f es uniformemente continua en E.

Pero lo realmente importante sobre la equicontinuidad es que la misma δ funciona para todas las funciones en $\mathfrak{F}$.

Proposición 2.5. *[7]. Suponga que $\mathfrak{F} \subset C(G,\Omega)$ es equicontinua en cada punto de G, entonces $\mathfrak{F}$ es equicontinua sobre cada subconjunto compacto de G.*

La siguiente definición nos será de ayuda para demostrar el teorema de Arzela-Ascoli, el cuál nos dará otro método para reconocer a los conjuntos normales.

Definición 2.2. Sea (X_n, d_n) un espacio métrico para cada n ≥ 1 y sea $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ su producto cartesiano, es decir X=$\{\xi = \{x_n\} : x_n \in X_n \; para \; cada \; n \geq 1\}$. Definimos $d(\xi, \eta)$ para $\xi, \eta \in X$ como:

$$d(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{2.5}$$

Proposición 2.6. *[7]. $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d)$, donde d está definida como en (2.5), es un espacio métrico. Además, si $\xi^k = \left\{x_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$ está en $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces $\xi^k \to \xi = \{x_n\}$ si, y sólo si $x_n^k \to x_n$ para cada n. También, si cada (X_n, d_n) es compacto, entonces X es compacto.*

Para finalizar esta sección enunciamos y demostramos el teorema de Arzela-Ascoli.

Teorema 2.1 (Arzela-Ascoli.). *Un conjunto $\mathfrak{F} \subset C(G,\Omega)$ es normal si, y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

(a) Para cada z en G, $\{f(z) : f \in \mathfrak{F}\}$ tiene clausura compacta en Ω.

(b) $\mathfrak{F}$ es equicontinua en cada punto de G.

Demostración. Primero supongamos que $\mathfrak{F}$ es normal, entonces, para cada $z \in G$, la función $F : C(G,\Omega) \to \Omega$ definida por $f \to f(z)$ es continua. Ahora, como $\overline{\mathfrak{F}}$ es compacto, entonces su imagen es compacta en Ω, y por lo tanto se satisface (a).

Para demostrar (b) fijemos un punto $z_0 \in G$ y sea $\varepsilon > 0$. Si elegimos $R > 0$ tal que $K = \overline{B}(z_0, R) \subset G$, entonces K es compacto, y por la Proposición 2.5, se tienen funciones $f_1, f_2, ...f_n \in \mathfrak{F}$ tales que, para cada $f \in \mathfrak{F}$, hay al menos una f_k, con

$$sup\ \{d(f(z), f_k(z)) : z \in K\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Además, como f_k es continua, tenemos que hay un $\delta,\ 0 < \delta < R$, tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que:

$$d(f_k(z) f_k(z_0)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

con $1 \leq k \leq n$. Entonces si $|z - z_0| < \delta,\ f \in \mathfrak{F}$, y k se elige tal que (2.6) se satisfaga, entonces

$$d(f(z), f(z_0)) \leq d(f(z), f_k(z)) + d(f_k(z), f_k(z_0)) + d(f_k(z_0), f(z_0)) < \varepsilon.$$

Lo que significa que $\mathfrak{F}$ es equicontinua en z_0.

Ahora supongamos que $\mathfrak{F}$ satisface las condiciones (a) y (b), queremos demostrar que $\mathfrak{F}$ es normal. Sea $\{z_n\}$ la sucesión de todos los puntos en G con parte real e imaginaria racionales (de modo que para $z \in G$ y $\delta > 0$ hay algún z_n con $|z - z_n| < \delta$). Ahora, para cada $n \geq 1$ sea,

$$X_n = \overline{\{f(z_n) : f \in \mathfrak{F}\}} \subset \Omega,$$

por la parte (a), (X_n, d) es un espacio métrico compacto. Por la Proposición 2.6, el conjunto $X \setminus \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico compacto. Para $f \in \mathfrak{F}$ definimos $\overline{f}$ en X como:

$$\overline{f} = \{f(z_1), f(z_2), f(z_3), ...\}.$$

Sea $\{f_k\}$ una sucesión en $\mathfrak{F}$, entonces $\overline{f_k}$ es una sucesión en el espacio métrico compacto X, así hay un ξ en X y una sucesión de $\overline{f_k}$ que converge a ξ, esto es, $\xi = \text{lím}\,\overline{f_k}$.

Nuevamente por la Proposición 2.7 tenemos que;

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z_n) = \{w_n\}, \quad \text{donde} \;\; \xi = \{w_n\}. \tag{2.7}$$

Mostraremos que $\{f_k\}$ converge a una función f en $C(G, \Omega)$. Por (2.7) esta función cumplirá que $f(z_n) = w_n$.

Para encontrar la función f y mostrar que $\{f_k\}$ converge a la función f, es suficiente mostrar que $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea K un conjunto compacto en G y sea $\varepsilon > 0$, por el Lema 2.1.2 es suficiente encontrar un entero J tal que para $k, j \geq J$ se cumpla:

$$sup\ \{d(f_k(z), f_j(z)) : z \in K\} < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Como K es compacto $R = d(K, \partial G) > 0$, hagamos $K_1 = \{z : d(z, K) \leq \frac{1}{2}R\}$, entonces K_1 es compacto y $K \subset\ int\ K_1 \subset K_1 \subset G$, como $\mathfrak{F}$ es equicontinua en cada punto de G, entonces es equicontinua en K_1. Por tanto, elijamos $0 < \delta < \frac{1}{2}R$ tal que,

$$d(f(z), f(z^{'})) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.9}$$

para toda $f \in \mathfrak{F}$ y $z, z^{'} \in K_1$ con $|z - z^{'}| < \delta$. Ahora, sea D la colección de puntos en $\{z_n\}$ que también son puntos de K_1. Si $z \in K$, entonces hay un z_n con $|z - z_n| < \delta$, pero $\delta < \frac{1}{2}R$ implica que $d(z_n, K) < \frac{1}{2}R$, es decir, que $z_n \in K_1$. Entonces $\{B(w, \delta) : w \in D\}$ es una cubierta abierta de K. Sean $w_1, ..., w_n \in D$ tales que:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(w_i, \delta).$$

Ahora, como $\lim_{R\to\infty} f_k(w_i)$ existe para $1 \leq i \leq n$ (por (2.7)), entonces hay un entero J tal que para $j, k \geq J$.

$$d(f_k(w_i), f_j(w_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad con\ i = 1, .., n. \tag{2.10}$$

Para finalizar sea z un punto arbitrario de K y sea w_i tal que $|w_i - z| < \delta$. Si tomamos $k, j > J$, entonces de (2.9) y (2.10) obtenemos:

$$d(f_k(z), f_j(z)) \leq d(f_k(z), f_k(w_i)) + d(f_k(w_i), f_j(w_i)) + d(f_j(w_i), f_j(z)) < \varepsilon.$$

Como z fue arbitrario, entonces se cumple (2.8), y por tanto, hemos terminado la demostración. ■

2.1.2. Teorema de Montel y Otros Resultados

Sea G un conjunto abierto del plano complejo, denotaremos por $H(G)$ al conjunto de todas las funciones analíticas en G, observe que $H(G)$ es un subconjunto de $C(G,\mathbb{C})$.

Teorema 2.2. *[7]. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $H(G)$ y f en $C(G,\mathbb{C})$ tales que $f_n \to f$. Entonces f es holomorfa y $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ para cada entero $k \geq 1$, donde $f^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de f.*

Observe que el teorema anterior establece que el conjunto $H(G)$ es cerrado en $C(G,\mathbb{C})$, y también que $H(G)$ es un espacio métrico con la métrica inducida por $C(G,\mathbb{C})$. Por esta razón, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2. *$H(G)$ es un espacio métrico completo.*

Debido a que en la práctica es difícil mostrar la normalidad de una familia de funciones únicamente con la definición, estudiaremos ciertas propiedades de las sucesiones de funciones para establecer equivalencias del concepto de normalidad.

Teorema 2.3 (Rouché [33])**.** *Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{C}$, y sean $\varphi, \psi \in H(\Omega)$ continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que se verifica:*

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \quad \textit{para todo } z \in \partial\Omega.$$

Entonces φ y ψ tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidad) en Ω.

Teorema 2.4 (Hurwitz [1])**.** *Sea Ω un abierto acotado del plano complejo $\mathbb{C}$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente y que f no se anula en ningún punto de $\partial\Omega$, es decir, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \partial\Omega$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, f_m y f tienen el mismo número de ceros en Ω.*

Demostración. Como $\partial\Omega$ es compacto y $f(z) \neq 0$ para todo punto de $\partial\Omega$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$|f(z)| \geq \varepsilon, \quad \forall z \in \ \partial\Omega.$$

Como $f_n \to f$ uniformemente, entonces

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \Rightarrow |f_m(z) - f(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in \ \partial\Omega.$$

Por lo tanto, para toda $m \geq n$, $f, f_m \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) \bigcap H(\Omega)$ y $z \in \ \partial\Omega$, se cumple que:

$$|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)| \leq |f_m(z)| + |f(z)|.$$

Ahora, por el teorema de Rouché ambas funciones han de tener el mismo número de ceros en Ω. Observe que la desigualdad anterior dice que ambas funciones no se anulan en la frontera, por lo que el resultado también es valido en $\overline{\Omega}$. ■

Por lo tanto, si G es una región en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ ($f_n \in H(G)$ para cada n) es una sucesión que converge a f en $H(G)$ y si cada f_n nunca se hace cero en G, entonces $f \equiv 0$ o f nunca se hace cero para toda $z \in G$.

Con el objetivo de facilitar la discusión de familias normales en $H(G)$ introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.3. Un conjunto $\mathfrak{F} \subset H(G)$ es *localmente acotado* si para cada punto a en G existen constantes M y $r > 0$ tales que para toda f en $\mathfrak{F}$,

$$|f(z)| \leq M, \text{donde } z \text{ es tal que } |z - a| < r.$$

Dicho de otro modo, $\mathfrak{F}$ es localmente acotado si existe un $r > 0$ tal que,

$$sup\{|f(z)| : |z - a| < r, f \in \mathfrak{F}\} < \infty.$$

Por lo tanto, la familia $\mathfrak{F}$ es localmente acotada si alrededor de cada punto a en G existe un disco en el cual $\mathfrak{F}$ es uniformemente acotada.

Lema 2.3. *[7]. Un conjunto $\mathfrak{F}$ en $H(G)$ es localmente acotado si, y sólo si para cada conjunto compacto $K \subset G$ existe una constante M tal que*

$$|f(z)| \leq M,$$

para toda f en $\mathfrak{F}$ y z en K.

Ahora podemos demostrar uno de los teoremas más importantes de esta sección.

Teorema 2.5 (Teorema de Montel)**.** *Una familia $\mathfrak{F} \subset H(G)$ es normal $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{F}$ es localmente acotada.*

Demostración. [$\Rightarrow$ (por contradicción) Supongamos que $\mathfrak{F}$ es normal y que no es localmente acotada, entonces existe un conjunto compacto $K \subset G$ tal que $sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathfrak{F}\} = \infty$, por lo tanto, hay una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathfrak{F}$ tal que $sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Como $\mathfrak{F}$ es normal, existe una función f en $H(G)$ y una subsucesión $f_{n_k}(z)$ tal que $f_{n_k} \to f$. Pero esto nos dice que $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Si $|f(z)| \leq M$ para z en K,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M.$$

Como el lado derecho converge a M, entonces se tiene una contradicción.

$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que $\mathfrak{F}$ es localmente acotada, observe que se satisface la primera parte del teorema de Arzela-Ascoli, así, sólo debemos mostrar que $\mathfrak{F}$ es equicontinua en cada punto de G. Sea $a \in G$ y $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe un $r > 0$

y un $M > 0$ tales que $\overline{B}(a, r) \subset G$ y $|f(z)| \leq M$ para toda z en $\overline{B}(a, r)$ y toda f en $\mathfrak{F}$. Sea $|z - a| < \frac{1}{2}r$ y $f \in \mathfrak{F}$, entonces usando la Fórmula Integral de Cauchy con $\gamma(t) = a + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$,

$$|f(a) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right| \leq \frac{4M}{r} |a - z| \,,$$

haciendo $\delta < \text{mín}\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\varepsilon\}$, se sigue que $|z - a| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(z)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathfrak{F}$. ■

Corolario 2.3. *Un conjunto $\mathfrak{F} \subset H(G)$ es compacto si, y sólo si es cerrado y localmente acotado.*

Consideremos ahora resultados análogos a los anteriores para funciones meromorfas. Si G es una región, f es una función meromorfa en G, y si hacemos $f(z) = \infty$, donde z es un polo de de f, entonces $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función continua. Denotamos como $M(G)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en G y consideraremos a $M(G)$ como un subespacio del espacio métrico $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$, con la métrica definida en (2.2).

Enseguida listamos algunos hechos sobre la relación entre los espacios métricos $\mathbb{C}$ y $\widehat{\mathbb{C}}$, donde $B(a, r)$ designará una bola abierta en $\mathbb{C}$ y $B_\infty(a, r)$ una bola abierta en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 2.7. *[1].*

(a) Si $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces hay un número $\rho > 0$ tal que $B_\infty(a, \rho) \subset B(a, r)$.

(b) Sea $\rho > 0$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces hay un número $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset B_\infty(a, \rho)$.

(c) Sea $\rho > 0$, entonces existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $\widehat{\mathbb{C}} - K \subset B_\infty(\infty, \rho)$.

(d) Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto, entonces existe un número $\rho > 0$ tal que $B_\infty(\infty, \rho) \subset \widehat{\mathbb{C}} - K$.

Observe que $M(G)$ no es un espacio métrico completo, porque si $f_n \equiv n$, entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $M(G)$, pero $\{f_n\}$ converge a la función que es igual a ∞, y esta no es meromorfa en el espacio $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$.

Teorema 2.6. *[7]. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $M(G)$ y supongamos que $f_n \to f$ en $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$. Entonces f es meromorfa o $f \equiv \infty$. Si cada f_n es analítica, entonces f es analítica o $f \equiv \infty$*

Del Teorema 2.6 se implica que $M(G)\bigcup\{\infty\}$ es un espacio métrico completo y que $H(G)\bigcup\{\infty\}$ es cerrado en $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$.

Teorema 2.7. *[7]. Una familia $\mathfrak{F} \subset M(G)$ es normal en $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$ si, y sólo si $\beta(\mathfrak{F}) \equiv \{\beta(f) : f \in \mathfrak{F}\}$ es localmente acotada, donde*

$$\beta(f)(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

si z no es un polo de f, y

$$\beta(f)(z) = \lim_{z\to a} \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

si a es un polo de f.

Finalizamos esta sección enunciando uno de los teoremas que nos serán de mucha utilidad en el trabajo posterior y que ha demostrado ser muy importante en la teoría de variable compleja. Primero, definimos una relación de equivalencia entre regiones en $\mathbb{C}$.

Definición 2.4. Diremos que una región G_1 es conformemente equivalente a G_2, si existe una función analítica $f : G_1 \to G_2$ tal que f es uno-uno y $f(G_1) = G_2$.

Observe que la definición anterior nos genera una relación de equivalencia. Por el Teorema de Louville (Teorema 1.15), tenemos que $\mathbb{C}$ no es equivalente a ninguna región acotada.

Teorema 2.8 (Teorema de la aplicación de Riemann [1]). *Sea G una región simplemente conexa distinta de $\mathbb{C}$ y sea $a \in G$. Entonces hay una única función analítica $f : G \to \mathbb{C}$ tal que:*

(a) $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

(b) f es inyectiva.

(c) $f(G) = \{z : |z| < 1\}$.

Concluimos que entre las regiones simplemente conexas de $\mathbb{C}$ sólo hay dos clases de equivalencia; la que consiste únicamente de $\mathbb{C}$ y la que contiene a todas las regiones propias de $\mathbb{C}$ que son simplemente conexas.

Capítulo 3

Funciones Casiconformes

Una transformación conforme es una aplicación que preserva ángulos, esto es, para cualquier par de curvas que se intersectan en el dominio de la aplicación, tenemos que su imagen es un par de curvas que forman el mismo ángulo en su punto de intersección. Si estiramos un cuadrado de manera que las horizontales van a horizontales y verticales a verticales, observaremos que los ángulos rectos que estas lineas forman son enviados todos a ángulos rectos. Sin embargo, los ángulos de 45 grados entre las diagonales no van al mismo ángulo. Así, el estiramiento de rectángulos no es una transformación conforme.

En este capítulo estamos interesados en estudiar aplicaciones casiconformes, las cuales son generalizaciones de las funciones conformes, de hecho toda función conforme es casiconforme (Teorema 3.3). La principal razón para hacer esta extensión es que las funciones conformes imponen una condición muy fuerte con respecto a la diferenciabilidad, mientras que las funciones casiconformes relajan tal condición. Existen varias definiciones de aplicación conforme y no es fácil ver que ellas son equivalentes.

Los resultados aquí presentados nos serán de utilidad para comprender la dinámica de la familia $e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{sen}(z)$.

3.1. Coeficientes de Beltrami y Pullbacks

Sea $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ el plano complejo visto como el $\mathbb{R}$ espacio vectorial orientado de dos dimensiones con la base canónica. En $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ usaremos las coordenadas (x, y) o $(z, \overline{z})$.

Tomemos ahora una función $\mathbb{R}-$lineal $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ y observemos que se puede escribir de la forma:

$$L(z) = az + b\overline{z}, \quad con\ a, b, z \in \mathbb{C},$$

El cuadrado unidad generado por 1 e i es transformado por esta función al paralelogramo generado por $a + b$ y $ai - bi$. Además, observe que $det(L) = |a|^2 - |b|^2$.

En la discusión posterior nos enfocaremos en funciones $\mathbb{R}$-lineales tales que $|a| > |b|$ (que son precisamente las funciones $\mathbb{R}$-lineales invertibles y que preservan la orientación).

Definición 3.1 (Coeficiente de Beltrami)**.** El *coeficiente de Beltrami* de $L(z) = az+b\overline{z}$ es $\mu(L) = \frac{b}{a}$ y escribiremos,

$$\mu(L) = \left|\frac{b}{a}\right| e^{i2\theta}, \quad \text{donde } \theta \in \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z}).$$

Observemos que L es holomorfa si, y sólo si $\mu(L) = 0$.

Si denotamos por $E(L)$ a la imagen inversa del círculo unitario, entonces $E(L)$ es una elipse (o un círculo, si $b = 0$) con la mitad de los ejes midiendo $\frac{1}{|a|(1-|\mu|)}$ y $\frac{1}{|a|(1+|\mu|)}$ a lo largo de las direcciones $e^{i(\theta+\pi/2)}$ y $e^{i\theta}$ respectivamente.

La *dilatación K(L)* de L es el cociente del eje mayor y el eje menor de $E(L)$, esto es,

$$K(L) = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|}.$$

Al realizar transformaciones mediante funciones $\mathbb{R}$-lineales será común que un círculo se transforme en una elipse, por eso enunciamos las siguientes definiciones.

Definición 3.2. Sea E una elipse, el *coeficiente de Beltrami* de E está dado por $\mu(E) = \frac{M-m}{M+m} e^{2\pi i\theta}$, donde M y m son la mitad del valor del eje mayor y eje menor respectivamente y θ es el argumento de la dirección del eje menor elegido en $[0, \pi)$ y su dilatación está dada por $K(E) = M/m$.

En lo sucesivo una función L siempre denotará una función $\mathbb{R}$-lineal.

Definición 3.3. Dados una función L y un diámetro l de la elipse $E(L)$, definimos el *diámetro conjugado* de l, como el diámetro de la elipse que es paralelo a la línea tangente a la elipse en algún punto de intersección de l y $E(L)$, véase la Figura 3.1.

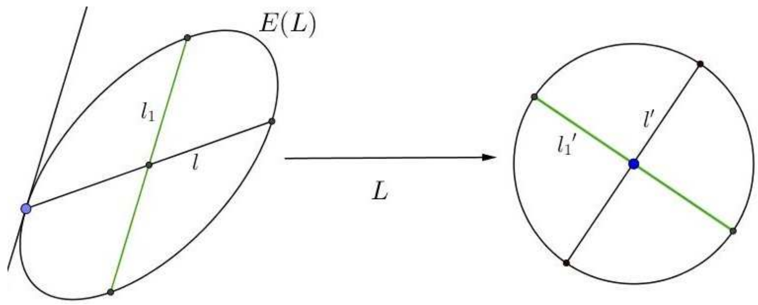

Figura 3.1: El diámetro conjugado del diámetro l es l_1 y l' es la imagen bajo L de l.

Observe que una función L envía diámetros conjugados de la elipse $E(L)$ a diámetros conjugados del círculo, porque líneas paralelas son llevadas a lineas paralelas y puntos medios a puntos medios.

Dada la función L tenemos que su imagen inversa es:

$$L^{-1}(w) = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2}(\overline{a}w - b\overline{w}),$$

por lo tanto, $|\mu(L^{-1})| = |\mu(L)|$, así $K(L^{-1}) = K(L)$.

Definición 3.4. Sea $z \in E(L)$, definimos $J(z)$ como el vector en $E(L)$ tal que z y $J(z)$ están en diámetros conjugados, girando desde z en dirección positiva (menor que π) a $J(z)$. Claramente, $J = L^{-1} \circ I \circ L$, donde $I(z) = iz$.

Con respecto a la composición de funciones $\mathbb{R}-$lineales, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1. *[5]. Sea $j \in \{1,2\}$ y $L_j(z) = a_j z + b_j \overline{z}$ funciones $\mathbb{R}-$lineales con dilatación K_j y coeficiente de Beltrami μ_j. Entonces se cumple:*

$$(a)\ K(L_1 \circ L_2) \leq K(L_1)K(L_2),$$

$$(b)\ \mu(L_1 \circ L_2) = \frac{b_2 + \mu_1 \overline{a_2}}{a_2 + \mu_1 \overline{b_2}}. \tag{3.1}$$

Si denotamos por σ_0 a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ visto como $\mathbb{C}-$ espacio vectorial, con la multiplicación escalar compleja usual, diremos que σ_0 es la estructura conforme estándar de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Ahora, cualquier función L se puede usar para definir una nueva estructura conforme $\sigma(L)$ en el dominio de L y para esto usamos a la función J antes definida para darle sentido a la multiplicación por i y así transformar a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ con su propia estructura en un $\mathbb{C}$- espacio vectorial.

Ahora, definiremos el concepto de estructura casi-compleja, para esto tomemos $TU = \bigcup_{u \in \mathbb{U}} T_u U$, donde $T_u U$ es el espacio tangente sobre u.

Definición 3.5 (Estructura casi-compleja)**.** Una *estructura casi-compleja* en U es un campo medible de elipses infinitesimales $\mathbb{E} \subset TU$, (Así, la mayoría de puntos $u \in U$ tienen asociada una única elipse $E_u \subset T_u U$, salvo escalamiento).

Observemos que si $\mu(u)$ es el coeficiente de Beltrami de E_u, cada elipse infinitesimal define una estructura conforme $\sigma(u)$ en $T_u U$. Denotaremos a una estructura casi-compleja por σ y definimos la dilatación de σ por

$$K(\sigma) := sup_{u \in U} K(u), \quad \text{donde} \quad K(u) := \frac{1 + |\mu(u)|}{1 - |\mu(u)}.$$

Además, cualquier función medible define una estructura casi-compleja en el sentido anterior.

Consideremos, ahora, la clase de funciones $D^+(U,V)$, esta consiste de funciones continuas, que preservan la orientación, van de $U \subset \mathbb{C}$ sobre $V \subset \mathbb{C}$, que son $\mathbb{R}$-diferenciables casi en todos lados (esto último significa que son $\mathbb{R}$-diferenciables en todos lados salvo posiblemente en un conjunto de medida de Lebesgue cero) y con diferencial $D_u f$ no singular casi en todos lados.

Para $f \in D^+(U, V)$ podemos escribir:

$$D_u f = \partial_z f(u) dz + \partial_{\bar{z}} f(u) d\overline{z},$$

donde

$$\partial_z f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

La expresión $D_u f$ define una elipse infinitesimal en $T_u U$ con coeficiente de Beltrami,

$$\mu_f(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(u)}{\partial_z f(u)}. \tag{3.2}$$

Equivalentemente, una estructura conforme en el espacio tangente con dilatación:

$$K_f(u) := K(D_u f) = \frac{1 + |\mu_f(u)|}{1 - |\mu_f(u)|}.$$

La ecuación de Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{z}} f(u) = 0$ se cumple en u si, y sólo si la elipse es un círculo.

Si hacemos lo mismo para todos los puntos $u \in U$ para los cuales f es diferenciable, obtenemos la estructura casi-compleja σ_f en U con coeficiente de Beltrami μ_f, y diremos que σ_f es el *pullback* de σ_0 por medio de f, o equivalentemente que μ_f es el pullback de $\mu_0 \equiv 0$ por medio de f. Por lo tanto, escribimos para casi todo $u \in U$:

$$\mu_f(u) = f^* \mu_0(u) \quad \text{o} \quad \sigma_f(u) = f^* \sigma_0(u).$$

A la dilatación de esta estructura la denotamos por K_f.

El concepto de pullback puede ser fácilmente generalizado al considerar el pullback de una estructura casi-compleja arbitraria σ bajo una función f, pero para esto requerimos la siguiente propiedad.

Definición 3.6. Diremos que la función f es *absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue*, si la preimagen bajo f de cualquier conjunto de medida cero tiene medida cero.

Denotamos por $D_0^+(U,V)$ a la subclase de $D^+(U,V)$ de funciones que son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue.

Con la Definición 3.6, sea $f \in D_0^+(U,V)$ y sea μ el coeficiente de Beltrami en TV correspondiente a una estructura casi-compleja en V y sea E_v la elipse infinitesimal definida en T_vV para casi toda $v \in V$. Diremos que el campo medible de elipses infinitesimales $\mathbb{E}'$ es el pullback mediante f del campo medible de elipses infinitesimales $\mathbb{E}$, donde $E_u' = (D_u f)^{-1}(E_{f(u)})$, observe que E_u' está bien definido para casi todo $u \in U$. Al escribir $(U,\mu_1) \xrightarrow{f} (V,\mu_2)$, entenderemos que $f : U \to V$ y que $f^*\mu_2 = \mu_1$.

Además, observe que si $\mu = \mu_g$ es el coeficiente de Beltrami asociado a la función $g : V \to W$, que pertenece a la clase $D_0^+(U,V)$, entonces:

$$f^*\mu_g = f^*(g^*\mu_0) = (g \circ f)^*\mu_0 = \mu_{g\circ f}.$$

Del Lema 3.1, tenemos que:

$$K_{g\circ f} \leq K_f K_g.$$

Además,

$$f^*\mu(u) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_z f(u)}}{\partial_z f(u) + \mu(f(u))\overline{\partial_{\bar{z}} f(u)}}. \tag{3.3}$$

Y si f es holomorfa,

$$f^*\mu(u) = \mu(f(u))\frac{\overline{\partial_z f(u)}}{\partial_z f(u)}. \tag{3.4}$$

Ahora, supongamos que $|\mu| < k$ en V, entonces, la Ecuación (3.4) implica que $|f^*\mu| < k$ en U.

Definición 3.7. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to U$ una función en $D_0^+(U,U)$. Si σ es una estructura casi-compleja en U con coeficiente de Beltrami μ, diremos que

μ (o σ) es f-invariante si $f^*\mu(u) = \mu(u)$ para casi todo $u \in U$. Escribiremos esto como $f^*\sigma = \sigma$.

3.2. Funciones Casiconformes

Existen varias definiciones equivalentes de $K-$casiconformalidad para $\phi : U \to V$, donde ϕ es un homeomorfismo entre dominios de $\mathbb{C}$, que preserva la orientación y $1 \leq K < \infty$. En este apartado enunciaremos dos definiciónes de funciones $K-$casiconformes que tienen aplicaciones en la dinámica holomorfa. Si el lector está más interesado en esta teoría, recomendamos [2] y [20].

Definición 3.8. Sea f una función continua de valores complejos definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, decimos que f es *absolutamente continua* en I si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\sum_j |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$ para toda sucesión finita de intervalos (a_j, b_j), con intersección vacía, clausura contenida en I y longitud total $\sum_j |b_j - a_j| < \delta$.

Del Capítulo 3, Sección 2.7 en [20] tenemos que $f'(x)$ existe para casi todo $x \in U$.

Definición 3.9. Una función continua $f : U \to \mathbb{C}$ es *absolutamente continua en lineas* si para cualquier familia de lineas paralelas en cualquier disco D compactamente contenido en U, f es absolutamente continua en casi todas ellas.

Se sigue que si f es absolutamente continua en lineas, entonces f tiene derivadas parciales casi en todo U. Además, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1 ([20] pág. 128)**.** *Sea $f : U \to V$ una función continua y abierta. Si f tiene derivadas parciales f_x, f_y casi en todos lados, entonces f es $\mathbb{R}-$ diferenciable casi en todos lados.*

En consecuencia $\partial_z f$ y $\partial_{\bar{z}} f$ existen casi en todos lados.

Definición 3.10 (Función K-casiconforme, Primera Definición)**.** Una función $\phi : U \to V$ es *K-casiconforme* si, y sólo si

(a) ϕ es un homeomorfismo,

(b) ϕ es absolutamente continua en lineas,

(c) $\partial_{\bar{z}}\phi \leq k|\partial_z\phi|$ casi en todos lados, donde $k := \frac{K-1}{K+1}$.

Así, por la Sección 3.1, si ϕ es una función $K-$casiconforme, tenemos que ϕ es $\mathbb{R}$-diferenciable y con una diferencial no singular definida casi en todos lados, véase [5], Teorema 1.16. La condición (c) nos dice que el coeficiente de Beltrami $\mu_\phi = \frac{\partial_{\bar{z}}\phi}{\partial_z\phi}$ tiene módulo acotado y menor que 1 casi en todos lados (denotaremos esto último por $||\mu_\phi||_\infty < 1$), o equivalentemente, la estructura casi-compleja $\phi^*\sigma_0$ tiene dilatación acotada ($K_\phi = K < \infty$).

Ahora exploraremos otra definición de función casiconforme.

Un cuadrilátero $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un dominio de Jordan en $\mathbb{C}$, con una sucesión ordenada de puntos (z_1, z_2, z_3, z_4) en su frontera llamados vértices de Q. Cualquier cuadrilátero puede ser transformado conformemente en un rectángulo único salvo similaridad, tal que vértices sean enviados a vértices, véase [20], pág. 15. Sea ϕ una función conforme que cumpla lo antes mencionado, entonces el módulo conforme de Q se define como:

$$mod\ Q(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{|\phi(z_1) - \phi(z_2)|}{|\phi(z_2) - \phi(z_3)|}.$$

Decimos que los cuadriláteros Q y Q' son conformemente equivalentes si, y sólo si tienen el mismo módulo.

Observe que reordenando los vértices de Q tenemos:

$$mod\ Q(z_2, z_3, z_4, z_1) = \frac{1}{mod\ Q(z_1, z_2, z_3, z_4)}. \tag{3.5}$$

Definición 3.11. Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ dominios, $\phi : U \to V$ un homeomorfismo que preserva la orientación y Q un cuadrilátero compactamente contenido en U (por lo tanto, $\phi(Q)$ es un cuadrilátero compactamente contenido en V). Definimos la *dilatación* de Q bajo

ϕ como el cociente:

$$\frac{mod\ \phi(Q)}{mod\ Q},$$

y la *dilatación maximal* de ϕ como:

$$K_\phi := \sup_{\overline{Q} \subset U} \frac{mod\ \phi(Q)}{mod\ Q}.$$

Observe que por la Ecuación (3.5), $K_\phi \geq 1$.

Definición 3.12 (Función K-casiconforme, Segunda Definición)**.** Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ dominios. Decimos que $\phi : U \to V$ es *K-casiconforme* si y sólo si ϕ es un homeomorfismo que preserva la orientación y que cumple:

$$\frac{1}{K}\ mod\ Q \leq mod\ \phi(Q) \leq K\ mod\ Q,$$

para todo cuadrilátero Q compactamente contenido en U (o equivalentemente $K_\phi \leq K$).

Una demostración de la equivalencia entre las dos definiciones de K-casiconformalidad se puede encontrar en [2], pág. 20. También pueden encontrarse en la bibliografía recomendada para esta sección otras definiciones equivalentes.

3.2.1. Propiedades de las funciones casiconformes

En este apartado enunciaremos algunas propiedades de las funciones casiconformes.

Teorema 3.2 (Propiedadades de funciones casiconformes [5])**.** *Si ϕ es una función $K-$casiconforme, entonces:*

(a) ϕ^{-1} es $K-$casiconforme.

(b) Cualquier composición por la izquierda o derecha con una función conforme es $K-$casiconforme.

(c) *Si ϕ_1 es una función K_1-casiconforme y ϕ_2 es una función K_2-casiconforme, entonces su composición es K_1K_2-casiconforme.*

(d) *Si ϕ es de clase C^1, entonces la dilatación de la elipse infinitesimal E_z en T_zU está acotada por K, para toda $z \in U$.*

Teorema 3.3 (**Lema de Weyl's** [2], pág. 16)**.** *Si ϕ es una función 1-casiconforme, entonces ϕ es conforme. En otras palabras, si ϕ es casiconforme y $\partial_{\overline{z}}\phi = 0$ casi en todos lados, entonces ϕ es conforme.*

Teorema 3.4. *[5]. Si ϕ es una función $K-$casiconforme, entonces envía conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero.*

Si $U \subset \mathbb{C}$ es el plano complejo o conformemente equivalente al disco unitario, tenemos que un homeomorfismo casiconforme $\phi : U \to \mathbb{C}$ genera una estructura casi-compleja en U de dilatación acotada, pero surge la siguiente pregunta: Dada una estructura casi-compleja σ en U, ¿bajo qué condiciones podemos encontrar un homeomorfismo casiconforme ϕ tal que genere a σ casi en todos lados? O equivalentemente, $\phi^*\sigma_0 = \sigma$ casi en todos lados, o dado un coeficiente de Beltrami μ en U ¿bajo qué condiciones podemos encontrar $\phi : U \to \mathbb{C}$ casiconforme (y por tanto en D_0^+) tal que:

$$\partial_{\overline{z}}\phi(z) = \mu(z)\partial_z\phi(z), \tag{3.6}$$

para casi todo $z \in U$? Si existe tal ϕ diremos que integra a μ y por tanto será llamada función integral. La Ecuación (3.6) es llamada la *ecuación de Beltrami.*

Teorema 3.5 (Teorema de Integrabilidad [20])**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto tal que $U \simeq \mathbb{D}$ (respectivamente $U = \mathbb{C}$). Sea σ una estructura casi-compleja en U correspondiente al coeficiente de Beltrami μ. Supongamos que la dilatación de σ está uniformemente acotada ($K(\sigma) < \infty$). Entonces μ es integrable, es decir, existe un homeomorfismo casiconforme $\phi : U \to \mathbb{D}$ (respectivamente sobre $\mathbb{C}$) que resuelve la ecuación de Beltrami, es decir, tal que:*

$$\mu(z) = \frac{\partial_{\overline{z}}\phi(z)}{\partial_z\phi(z)},$$

para casi toda $z \in U$. Además ϕ es único salvo composición con automorfismos de $\mathbb{D}$ (respectivamente de $\mathbb{C}$).

3.2.2. Funciones casiregulares, casisimétricas y casicírculos

Comenzamos este apartado definiendo y analizando las características de las funciones casiregulares.

Definición 3.13 (Función K-casiregular)**.** Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $K < \infty$. Una función $g : U \to \mathbb{C}$ es *K-casiregular* si, y sólo si g puede ser expresada como:

$$g = f \circ \phi,$$

donde $\phi : U \to \phi(U)$ es $K-$casiconforme y $f : \phi(U) \to g(U)$ es holomorfa.

Observe que en particular todas las funciones casiconformes son casiregulares, sólo basta hacer $f = Id$ en la definición anterior.

Teorema 3.6. *[5]. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $K < \infty$. Una función $g : U \to \mathbb{C}$ es K-casiregular si, y sólo si g es localmente $K-$casiconforme, a excepción de un conjunto discreto de puntos en U.*

Las siguientes propiedades nos ayudarán a identificar con mayor facilidad funciones casiregulares sin tener la necesidad de estar comprobando directamente la definición.

Proposición 3.1 (Propiedades de funciones casiregulares [5])**.** *Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos. Los siguientes resultados se satisfacen:*

(a) Si $g_1 : U \to U'$ es una función K_1-casiregular y $g_2 : U' \to \mathbb{C}$ es una función K_2-casiregular, entonces $g_2 \circ g_1$ es K_1K_2-casiregular.

(b) Una función $g : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa si, y sólo si g es $1-$casiregular.

(c) Si $g : U \to \mathbb{C}$ es casiconformemente conjugada a $f : U \to \mathbb{C}$ y f es holomorfa, entonces g es casiregular.

(d) Si $g : U \to \mathbb{C}$ es casiregular y $g^*\mu_0 = \mu_0$ casi en todos lados en U, entonces g es holomorfa.

Es importante señalar que el pullback de un coeficiente de Beltrami definido casi en todas partes por una función casiregular está bien definido casi en todas partes, véase [5].

Cuando escribamos:

$$(U_1, \mu_1) \xrightarrow{f} (U_2, \mu_2),$$

entenderemos que $f : U_1 \to U_2$ es una función casiregular y que $f^*\mu_2 = \mu_1$ casi en todas partes, donde μ_1 y μ_2 son los coeficientes de Beltrami definidos en U_1 y U_2 respectivamente.

Lema 3.2. *(**Lema clave de la cirugía** [5], pág. 60) Si $S^{'} \subset S \simeq \mathbb{D}$ es un conjunto abierto, $g : S^{'} \to S$ es casiregular y μ es un coeficiente de Beltrami g-invariante en S con $||\mu||_\infty := k < 1$, entonces existe una función holomorfa $f : D^{'} \to \mathbb{D}$, donde $D^{'} \subset \mathbb{D}$ es abierto y tal que g y f son casiconformemente conjugadas.*

Recordemos ahora que el conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ está identificado con el círculo unitario $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\}$, vía la parametrización $t \mapsto e^{2\pi i t}$, por este motivo en lo que sigue usaremos notación compleja o angular indistintamente si esto no produce confusión.

Definición 3.14. (Casisimetría) Una función $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ es *casisimétrica* si h es inyectiva y para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}^1$,

$$0 \neq |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M} \leq \frac{|h(z_1) - h(z_2)|}{|h(z_2) - h(z_3)|} \leq M, \tag{3.7}$$

para $M \geq 1$.

Algunas veces h es llamada M-casisimétrica o casisimétrica de módulo M. En notación angular (es decir escribiendo $H(t) := h(e^{2\pi it})$) la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|H(x+t) - H(x)|}{|H(x) - H(x-t)|} \leq M, \tag{3.8}$$

para todo $x.x+t, x-t \in \mathbb{T}$, con $t > 0$.

En [28] capítulo 5, podemos encontrar la siguiente definición equivalente.

Una función $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ es casisimétrica, si h es inyectiva y si existe una función continua y estrictamente creciente $\lambda : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que:

$$\frac{1}{\lambda\left(\frac{|z_2-z_3|}{|z_1-z_2|}\right)} \leq \frac{|h(z_1) - h(z_2)|}{|h(z_2) - h(z_3)|} \leq \lambda\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|z_2 - z_3|}\right), \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}^1. \tag{3.9}$$

Observe que si $h(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ y h es casisimétrica, entonces h^{-1} también es casisimétrica. Además, una forma fácil de generar funciones casisimétricas viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *[5]. Si $h : \mathbb{S}^1 \to h(\mathbb{S}^1)$ es un C^1-difeomorfismo, entonces h es casisimétrica. Además, si $h_j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, para j= 1,2 son casisimétricas. Tenemos que:*

(a) Si $h_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$, entonces $h_2 \circ h_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ es casisimétrica.

(b) Si $\gamma = h_1(\mathbb{S}^1) = h_2(\mathbb{S}^1)$, entonces $h_2^{-1} \circ h_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es casisimétrica.

Por último, definamos los conceptos de casiarco, casicírculo y casidisco.

Definición 3.15. (Casiarco, casicírculo y casidisco) Un arco de Jordan (respectivamente una curva de Jordan) γ en $\mathbb{C}$ es un *casiarco* (respectivamente *casicírculo*) si para algún $C > 0$

$$\mathit{diam}\ \gamma(z_1, z_2) \leq C|z_1 - z_2| \quad \text{para } z_1, z_2 \in \gamma,$$

donde $\gamma(z_1, z_2)$ es el arco de diámetro más pequeño de γ que une z_1 y z_2. Un dominio de Jordan acotado por un casicírculo es un *casidisco*.

La siguiente proposición relaciona los conceptos de casiarco y casicírculo con el de funciones casisimétricas.

Proposición 3.2 (Casiarcos y casicírculos son curvas con parametrización casisimétrica). *Si $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ (respectivamente $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$) es casisimétrica, entonces su imagen γ es un casiarco (resp. casicírculo). Y recíprocamente si γ es un casiarco o un casicírculo, entonces es la imagen de un intervalo o del círculo unitario bajo alguna función casisimétrica.*

3.3. Extensión de Funciones

La construcción de funciones casiconformes casi siempre se hace pegando diferentes funciones en ciertas regiones del plano complejo. Usualmente necesitamos interpolar entre las funciones o llenar ciertas regiones con valores de frontera dados. Existen muchos teoremas de extensión que tratan estas situaciones. Como veremos en esta sección, las funciones casisimétricas en $\mathbb{S}^1$ son precisamente los valores en la frontera (extensiones continuas) de homeomorfismos casiconformes en el disco unitario y viceversa, una función casisimétrica en $\mathbb{S}^1$ se puede extender a una función casiconforme en $\mathbb{D}$.

Para las demostraciones y mayores comentarios de los últimos 5 teoremas de esta sección referimos al lector a [5] Capítulo 2 o [16] Capítulo 4.

3.3.1. De dominios a fronteras

Iniciaremos esta sección enunciando el Teorema de Carathéodory.

Teorema 3.8 (Teorema de Carathéodory [28]**).** *Si $f : \mathbb{D} \to G$ un isomorfismo conforme, donde G es un dominio acotado en $\mathbb{C}$, entonces f tiene una extensión continua $\widehat{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$ si, y sólo si ∂G es localmente conexa. Además, f tiene una extensión continua e inyectiva a $\overline{\mathbb{D}}$ si, y sólo si ∂G es una curva de Jordan.*

Si asumimos que $f : \mathbb{D} \to G$ es un isomorfismo conforme y que $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio de Jordan con frontera $\gamma := \partial G$, entonces por el teorema anterior f tiene una extensión inyectiva y continua a $\widehat{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$. Llamaremos a la función restringida $\widehat{f}\,|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \gamma$ una parametrización conforme de γ.

Teorema 3.9 (Extensión de funciones conformes en $\mathbb{D}$ [28]). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio de Jordan con $\gamma := \partial G$ y sea $f : \mathbb{D} \to G$ un isomorfismo conforme. Entonces:*

(a) f tiene una extensión casisimétrica a $\mathbb{S}^1$ si, y sólo si γ es un casicírculo.

(b) Si γ es C^{n+1} para algún $n \geq 0$, entonces las funciones $f, f^{'}, ..., f^{(n)}$ (funciones derivadas) tienen extensión continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

(c) f puede ser extendida conformemente a algún disco de radio $r > 1$ si, y sólo si γ es analítica.

Una consecuencia de este último teorema es que si existe una parametrización casisimétrica (respectivamente diferenciable o analítica) de γ, entonces para cualquier $f : \mathbb{D} \to G$, la correspondiente parametrización conforme es casisimétrica (resp. diferenciable o analítica). Además, si la curva de Jordan ∂G consta de una cantidad finita de arcos los cuales son de clase C^{n+1} o analíticos, entonces una función conforme $f : \mathbb{D} \to G$ se extiende a la frontera como una curva suave a trozos de clase C^n o una función analítica a trozos respectivamente [7].

Ahora, analizaremos algunos resultados en el caso de que f sea casiconforme.

Teorema 3.10. *Todo homeomorfismo $K-$casiconforme $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ se extiende continuamente como un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{S}^1$.*

Por lo tanto, si G es un dominio de Jordan y $f : \mathbb{D} \to G$ es casiconforme. Tenemos que f se extiende continuamente a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{G}$.

Proposición 3.3. *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es casiconforme, entonces f se extiende continuamente a una función casisimétrica $\widehat{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.*

Por lo tanto, si $G \subset \mathbb{C}$ es un casidisco y $f : \mathbb{D} \to G$ es casiconforme. Tenemos que f se extiende continuamente como una función casisimétrica $\widehat{f} : \mathbb{S}^1 \to \partial G$.

3.3.2. De fronteras a interiores

Dado un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que preserva la orientación queremos encontrar una extensión continua $\widehat{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, tal que $\widehat{f} = f$ en $\mathbb{S}^1$. Observe que $\widehat{f}(re^{2\pi it}) := rf(e^{2\pi it})$ cumple lo pedido, pero esta función suele presentar propiedades indeseadas en $z = 0$. Existen otros caminos para extender a f y consideraremos varios casos.

Teorema 3.11. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un C^1-difeomorfismo que preserva la orientación. Entonces existe una extensión $\widehat{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, la cual es un C^1-difeomorfismo a trozos. En particular la función $\widehat{f}$ es casiconforme en $\mathbb{D}$, y podría ser elegida tal que fuese la identidad en un disco alrededor de $z = 0$.*

El Teorema 3.11 falla cuando f no es diferenciable, sin embargo, si f es casisimétrica en el círculo unitario, podemos construir una extensión la cual es casiconforme y real analítica en el interior del disco.

Teorema 3.12. *Supongamos $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo casisimétrico que preserva la orientación. Entonces existe una extensión $\widehat{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ de f, la cual es real analítica en $\mathbb{D}$ y que tiene las siguientes propiedades:*

(a) Si $\sigma, \tau \in$ Möb$(\mathbb{D})$, entonces la extensión de $\sigma \circ f \circ \tau$ está dada por $\sigma \circ \widehat{f} \circ \tau$.

(b) $\widehat{f}$ es casiconforme en $\mathbb{D}$,

donde Möb$(\mathbb{D}) = \{f | f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$ y $z \in \mathbb{D}\}$.

Finalizamos esta sección con un teorema que será de mucha utilidad en el siguiente capítulo.

Teorema 3.13. *Supongamos que G_1 y G_2 son casidiscos acotados por γ_1 y γ_2. Si $f : \gamma_1 \to \gamma_2$ es casisimétrica, entonces f se extiende a una función casiconforme $\widehat{f} : \overline{G}_1 \to \overline{G}_2$.*

Capítulo 4

Dinámica Compleja

En el presente capítulo estudiaremos algunos conceptos y propiedades de la dinámica compleja generada por la iteración de una función holomorfa $f : S \to S$, centrándonos principalmente en el caso $S = \mathbb{C}$. Definiremos terminología importante para estudiar de manera más fácil el capítulo final de esta tesis y de igual forma enunciamos y demostramos algunos de los principales teoremas y resultados sobre los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas.

Recordemos que las funciones definidas y holomorfas en todo $\mathbb{C}$ reciben el nombre de funciones enteras. A continuación damos alguna notación y algunos resultados sobre esta clase de funciones.

Proposición 4.1. *Sea f una función entera. Entonces uno de los siguientes tres casos sucede:*

(a) f es una función constante.

(b) f tiene un polo en ∞.

(c) f tiene un singularidad esencial aislada en ∞.

Demostración. Este resultado se sigue de la expansión de f en serie de Laurent, porque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

y cada uno de los casos anteriores corresponde a:

- $a_n = 0, n \geq 1$.
- $f(z)$ es un polinomio (existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0,$ para todo $n \geq N$).
- Hay infinitos n tales que $a_n \neq 0$.

Respectivamente. ■

En el último caso diremos que f es entera trascendente.

Al conjunto de funciones enteras trascendentes lo denotaremos por $\mathcal{E}$, es decir,

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} |\ f \textit{ es entera trascendente}\}.$$

Ejemplo 4.1. Algunos ejemplos de funciones en la clase $\mathcal{E}$ son las siguientes:

(a) $f(z) = e^z$.

(b) $g(z) = \cos(z) + z^4 + 2z - 23$.

(c) $h(z) = \lambda \operatorname{sen}(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Los siguientes teoremas están relacionados con el estudio del rango de funciones analíticas y vinculan directamente nuestro Capítulo 2 con el estudio de las funciones enteras. Para su consulta el lector puede revisar [7].

Teorema 4.1 (Teorema Pequeño de Picard)**.** *Si f es una función entera que omite dos valores, entonces f es constante, es decir, si existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que, $f(z) \neq a$ y $f(z) \neq b$, para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Teorema 4.2 (Montel-Caratheodory)**.** *Si $\mathfrak{F}$ es una familia de funciones analíticas en una región $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que no asumen los valores distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\mathfrak{F}$ es normal en G.*

Por lo tanto, si $|f(G)| \leq R$ para toda $f \in \mathfrak{F}$, con $R > 0$, entonces $\mathfrak{F}$ es una familia normal en G.

Teorema 4.3 (Teorema Grande de Picard). *Supongamos que una función analítica f tiene una singularidad esencial en $z = a$. Entonces en cada vecindad de a, f asume el valor de cada número complejo (con una posible excepción) un número infinito de veces.*

Como consecuencia del Teorema Grande de Picard tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.1. *Si f es una función entera que no es un polinomio, entonces f asume cada número complejo, con una posible excepción, un número infinito de veces.*

Demostración. Es suficiente observar que la función $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$, porque f no es un polinomio. Así, obtenemos la demostración simplemente al aplicar el Teorema Grande de Picard a esta función g. ■

Compare el último corolario con el Teorema pequeño de Picard.

4.1. Iteración y Puntos Fijos

Si $f \in \mathcal{E}$, definimos *n-ésima iterada* de f (denotada por $f^{\circ n}$) de manera inductiva, mediante:

$$f^{\circ 0} = id, \quad f^{\circ 1} = f, \quad y$$

$$f^{\circ n+1} = f \circ (f^{\circ n}), \quad n > 1.$$

Observe que estas composiciones están bien definidas, porque al ser f entera, se tiene que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de donde se cumple:

$$f \in \mathcal{E} \Rightarrow \ f^{\circ n} \in \mathcal{E}.$$

Además, por la regla de la cadena tenemos:

$$(f^{\circ n})'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{\circ k}(z_0)). \tag{4.1}$$

Definición 4.1. Dada una función $f \in \mathcal{E}$ y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, definimos:

(a) La *órbita hacia adelante* de z_0 como el conjunto;

$$\mathcal{O}^{+}(z_0) = \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) La *órbita hacia atrás* de z_0 como el conjunto;

$$\mathcal{O}^{-}(z_0) = \{z : f^{\circ n}(z) = z_0 : n \in \mathbb{N}\}.$$

(c) La *gran órbita* de z_0 como el conjunto;

$$\mathcal{O}(z_0) = \mathcal{O}^{-}(z_0) \cup \{z_0\} \cup \mathcal{O}^{+}(z_0).$$

Entender al sistema dinámico generado por las iteradas de f, significa entender el destino de todas las órbitas en términos de sus condiciones iniciales, dicho de otro modo, entender su comportamiento asintótico conforme n tiende a infinito, por eso hacemos la siguiente clasificación.

Definición 4.2. Dada una función $f \in \mathcal{E}$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es llamado:

(a) *Punto excepcional* de f si $\mathcal{O}^{-}(z_0)$ es finita.

(b) *Punto omitido* de f si $\mathcal{O}^{-}(z_0)$ es vacío.

(c) *Punto periódico* de periodo n (o de orden n) de la función f, si n es el menor natural que cumple que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$.

(d) *Punto pre-periódico* de periodo $n \in \mathbb{N}$ de la función f si existe $m > 0$ tal que$f^{\circ m+n}(z_0) = f^{\circ m}(z_0)$ y n es el mínimo natural con esta propiedad.

Denotamos al conjunto de puntos excepcionales de f por $\boldsymbol{E(f)}$.

Si z_0 es un punto periódico de periodo n, entonces $\mathcal{O}^+(z_0)$ es llamada una *órbita periódica*, además, si $n = 1$, es decir, $f(z_0) = z_0$, entonces diremos que z_0 es un punto fijo de la función f.

Si z_0 es un punto preperiódico de período n, entonces ddecimos que $\mathcal{O}^+(z_0)$ es una *órbita preperiódica*.

Una órbita que no es periódica ni preperiódica en z_0, se dice que es una *órbita errante*.

Teorema 4.4. *[24]. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces **E(f)** consta de a lo más un punto.*

Ejemplo 4.2. La función $f(z) = \lambda e^z - \lambda$, donde $\lambda \neq 0$, es una función entera trascendente. Observe que,

$$f(z) = \lambda e^z - \lambda = \lambda(e^z - 1) \Rightarrow f(0) = \lambda(e^0 - 1) = 0,$$

por lo tanto, $z_0 = 0$ es un punto fijo de f.

Ejemplo 4.3. Para la función $z^2 - 1$ tenemos que $z_0 = 0$ es un punto periódico de periodo 2, porque:

$$f^{\circ 1}(z_0) = f(z_0) = 0^2 - 1 = -1, \quad y$$

$$f^{\circ 2}(z_0) = f \circ (f(z_0)) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 = z_0.$$

Observe que sus puntos fijos son las soluciones de la ecuación $f(z) = z$ o equivalentemente $f(z) - z = 0$, es decir, las soluciones de $z^2 - z - 1 = 0$.

No todas las funciones en la clase $\mathcal{E}$ tienen puntos fijos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Analicemos la función $f(z) = e^z + z$, entonces los puntos fijos z deben satisfacer:

$$e^z + z = z,$$

$$\Rightarrow \quad e^z + z - z = 0,$$

$$\Rightarrow \quad e^z = 0.$$

Pero la última igualdad no puede ocurrir, porque $e^z \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $f(z)$ no tiene puntos fijos.

Definición 4.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto periódico de orden n ($f^{\circ n}(z_0) = z_0$). El número $\lambda = (f^{\circ n})'(z_0)$ es llamado el *multiplicador* de z_0.

Algunas veces necesitamos referirnos al tipo de dinámica que se presenta en ∞. Con este fin, si $f \in \mathcal{E}$, diremos que el multiplicador λ de $z_0 = \infty$ es:

$$\lambda = \frac{d}{dz} \frac{1}{(f^{\circ n})(1/z)} \bigg|_{z=0}.$$

Por la Ecuación (4.1), el multiplicador está bien definido. Además, con el multiplicador podemos clasificar la naturaleza de los puntos periódicos.

Definición 4.4. Sea $f \in \mathcal{E}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto fijo de orden n. El punto fijo z_0 es llamado:

(a) *Super atractor*, si $|\lambda| = 0$.

(b) *Atractor*, si $|\lambda| < 1$.

(c) *Repulsor*, si $|\lambda| > 1$.

(d) *Indiferente*:

- *a*) *Racional*, si $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, λ es raíz de la unidad.
- *b*) *Irracional*, si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Las siguientes definiciones y resultados sirven para entender el comportamiento de los puntos ”cercanos” a un punto periódico.

Definición 4.5. Dado un p-ciclo atractor $\mathcal{O}(z_0)$ de $f \in \mathcal{E}$, definimos su *cuenca de atracción* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$, tales que $f^{\circ np}$ converge a algún $z_i \in \mathcal{O}(z_0)$ conforme $n \to \infty$.

En seguida presentamos algunos resultados sobre las propiedades que se presentan en vecindades de puntos periódicos dado su multiplicador. Observe que podemos restringir nuestra discusión, sin pérdida de generalidad, a puntos fijos, porque un punto periódico de orden n de la función f es un punto fijo de $f^{\circ n}$ y el multiplicador visto de esta forma se conserva.

Vamos a convenir en decir que un punto fijo z_0 de una función f es *topológicamente atractor*, si existe una vecindad V de z_0, donde la sucesión $\{f^{\circ n}(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante z_0, y un punto fijo z_0 de una función f es *topológicamente repulsor* si existe una vecindad V de z_0, tal que para cada $z \in V \setminus \{z_0\}$ existe un $n \geq 2$ tal que $f^{\circ n}(z) \notin V$

Por tanto, si z_0 es un punto fijo repulsor, la única órbita que está completamente contenida en V es la órbita del punto fijo.

Teorema 4.5. *[24]. Un punto fijo de una función holomorfa es topológicamente atractor si, y sólo si su multiplicador λ satisface $|\lambda| < 1$. Además, un punto fijo de una función holomorfa es topológicamente repulsor si, y sólo si su multiplicador λ, satisface $|\lambda| > 1$.*

Por lo tanto, ahora conocemos el comportamiento de los puntos cercanos a un punto fijo con multiplicador $|\lambda| > 1$ o $|\lambda| < 1$.

Una de nuestras principales herramientas para comparar y clasificar sistemas dinámicos es la conjugación, puesto que sistemas dinámicos conjugados son "lo mismo"salvo un cambio de variable. Entre las principales propiedades de la conjugación está que si $f \underset{top}{\sim} g$, entonces $f^{\circ n} \underset{top}{\sim} g^{\circ n}$, entonces $\mathcal{O}_f(z_0)$ es transformado biyectivamente sobre $\mathcal{O}_g(h(z_0))$ vía la función h (Ecuación (1.4)). En particular, órbitas periódicas son llevadas a órbitas periódicas (del mismo periodo).

Una propiedad o cantidad asociada a un sistema dinámico la cual es preservada bajo conjugación topológica (respectivamente C^r, casiconforme, conforme, etc.) es llamada invariante topológica (respectivamente C^r, casiconforme, conforme, etc.). Un ejemplo de un invariante C^1 es el multiplicador de una órbita periódica, como muestra el siguiente lema.

Lema 4.1. *[4]. Sean $X, Y \subset \mathbb{C}$, y f, g y h, como en la Ecuación (1.4), con h de clase C^1. Si z_0 es un punto p-periódico, entonces $w_0 := h(z_0)$ es p-periódico y*

$$(f^{\circ p})'(z_0) = (g^{\circ p})'(w_0).$$

Definición 4.6. (Conjunto invariante) Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ es f-invariante o *invariante hacia delante* bajo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, si $f(U) \subset U$. Decimos que U es *invariante hacia atrás* bajo f si $f^{-1}(U) \subset U$. Además, diremos que U es *totalmente invariante* o completamente invariante bajo f si $f(U) = f^{-1}(U) = U$.

Lema 4.2. *[4]. Conjugaciones topológicas entre f y g envían conjuntos $f-$invariantes sobre conjuntos $g-$invariantes. Lo mismo se cumple para conjuntos invariantes hacia atrás y totalmente invariantes.*

Teorema 4.6. *Sea f una función analítica y suponga que z_0 es un punto fijo repulsor para f, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de f no es normal en z_0.*

Demostración. Supongamos que la familia de funciones $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en alguna vecindad V de z_0. Como $f^{\circ n}(z_0) = z_0$ para toda n, entonces $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ∞ en V. Por lo tanto, existe alguna subsucesión de $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{f_k^{\circ n}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente a una función g sobre V. Por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, tenemos que $|(f_k^{\circ n})'(z_0)| \to |g'(z_0)|$, pero $|(f_k^{\circ n})'(z_0)| = \prod_{k=1}^{n} |(f)'(z_0)| = |\lambda|^n \to \infty$ porque $|\lambda| > 1$ y esto es una contradicción con el supuesto de que $|(f_k^{\circ n})'(z_0)| \to |g'(z_0)|$.

Por lo tanto, la familia de iteradas de f no es normal en z_0. ∎

Como consecuencia del Teorema 4.6, tenemos que si f es una función analítica y z_0 es un punto periódico repulsor para f, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de f no es normal en z_0.

Teorema 4.7. *Sea f una función analítica en un disco $\mathbb{D}_r(z_0)$ y sea z_0 un punto fijo atractor, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de f es normal en alguna vecindad de z_0.*

Demostración. Como f es analítica en un disco $\mathbb{D}_r(z_0)$, dado $\varepsilon > 0$ y haciendo $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, (1 - |f'(z_0)|)/2\}$, existe $r(\varepsilon_1) > 0$ tal que si $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$, entonces:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon_1,$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \varepsilon + |f'(z_0)| < 1,$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < k|z - z_0| < 1 \cdot r,$$

donde $k = \varepsilon_1 + |f'(z_0)|$. Además, como $|f(z) - f(z_0)| < r$, entonces:

$$|f(f(z)) - f(f(z_0))| = |f^{\circ 2}(z) - z_0| < \varepsilon_1 < k|f(z) - f(z_0)| < kk|z - z_0|,$$

$$\Rightarrow |f^{\circ 2}(z) - z_0| < k^2|z - z_0|.$$

Por lo tanto, de manera inductiva llegamos a que

$$|f^{\circ n}(z) - z_0| < k^n|z - z_0|.$$

Esto último converge a 0 conforme $n \to \infty$. Observe que la convergencia es uniforme en el disco $\mathbb{D}_r(z_0)$ por la elección de r. Por lo tanto, $\{f^{\circ n}\}$ es normal en $\mathbb{D}_r(z_0)$. ∎

Como consecuencia del Teorema 4.7, tenemos que si f es una función analítica y z_0 es un punto periódico atractor para f, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de f es normal en z_0.

Observe que si z_0 es un punto fijo de f, donde f es una función diferenciable, entonces $f(z)$ alrededor de z_0 está bien aproximada por su parte lineal, la ventaja de trabajar con funciones lineales es que son más fáciles de iterar, así que una pregunta importante es; ¿cuándo podemos encontrar un cambio de variable de tal manera que f sea conjugada a su parte lineal?, o lo que es lo mismo ¿cuándo es linealizable f? En lo sucesivo se analizarán algunos resultados que responderán parcialmente a esta pregunta.

4.2. Homeomorfismos del Círculo

Si un sistema dinámico posee una curva cerrada simple e invariante, entonces la dinámica restringida a esa curva es conjugada a una función circular. Para esta sección nuestras referencias principales son [8] y [27].

Definición 4.7. Diremos que la función $R_\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, con $\theta \in \mathbb{R}$ y definida por $R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} z$ es una *rotación rígida* o simplemente una rotación.

Para una rotación rígida tenemos que si $\theta \in \mathbb{Q}$, entonces todos los puntos en $\mathbb{S}^1$ son periódicos y del mismo periodo. Si $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces no existen puntos periódicos en $\mathbb{S}^1$. Además, se cumple el siguiente resultado.

Teorema 4.8 (Teorema de Jacobi [8])**.** *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas bajo R_θ son densas en $\mathbb{S}^1$.*

Definición 4.8. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Diremos que la función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un *levantamiento* de f si,

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi,$$

donde $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ está dada por $\Pi(x) = e^{2\pi i x}$.

Definición 4.9 (Número de rotación)**.** Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismos que preserva la orientación y sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Definimos el *número* *de rotación* de $x \in F$ como:

$$\operatorname{rot}(f) = \left(\mathop{lim}_{n\to\infty} \frac{F^{\circ n}(x) - x}{n} \right) \quad (mod\ 1).$$

Así, el numero de rotación está en el intervalo $[0, 1)$, es un invariante topológico asociado a funciones circulares, y es independiente de la elección de F y x, véase [8].

Si f tiene un punto fijo, entonces $\operatorname{rot}(f) = 0$. De hecho, Poincaré mostró la validez del siguiente resultado.

Proposición 4.2. *[27]. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismos que preserva la orientación, y sea F un levantamiento de f tal que $F(0) \in [0, 1)$. Entonces:*

(a) f tiene un número de rotación irracional si, y sólo si f no tiene puntos periódicos.

(b) rot(f) $= p/q$, con MCD(p,q) = 1 si, y sólo si f tiene un punto p-periódico z_0 tal que $F^{\circ q}(x_0) = x_0 + p$, con $\Pi(x_0) = z_0$.

Teorema 4.9 (Teorema de Denjoy [8])**.** *Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un difeomorfismo C^2 con número de rotación irracional θ. Entonces f es conjugado a la rotación rígida R_θ.*

Para resaltar la importacia del teorema anterior, diremos que un difeomorfismo circular analítico sin puntos periódicos es (analíticamente) linealizable, si es analíticamente conjugado a una rotación rígida. Por otra parte, diremos que el homeomorfismo circular analítico $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una función circular crítica, si f tiene puntos críticos.

Teorema 4.10. *[5]. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una función circular crítica con rot(f) = θ. Si θ es de tipo acotado (véase Apéndice A) si, y sólo si f es casisimétricamente conjugada a la rotación rígida R_θ.*

4.3. Conjuntos de Fatou y Julia

Al estudiar fenómenos en la naturaleza nos encontramos de forma frecuente con que estos son modelados por funciones, ya sea de variable real o compleja. Para comprender o hacer predicciones y mejoras en los procesos, es necesario entender la estabilidad de tal modelo en el sentido de ver cómo afectan, en los resultados finales, los pequeños cambios en los parámetros del modelo del fenómeno que están involucrados. Por esta razón, es muy importante el estudio de la dinámica de funciones para desarrollar una teoría sólida, que satisfaga la necesidad de entender el comportamiento de ciertos modelos matemáticos.

Mucho puede ser mencionado sobre la teoría de dinámica holomorfa, pero nos enfocaremos en los resultados principales que nos llevarán a una mejor comprensión del capítulo final, señalando como principal referencia para profundizar en los temas de esta sección a [4], [24] y [26].

En esta sección utilizaremos la teoría presentada previamente, con el fin de definir y analizar las propiedades de la separación del espacio fase del sistema dinámico holomorfo vía el concepto de familias normales. Esta separación dará los conjuntos de estabilidad e inestabilidad asintótica, para el sistema (dinámico) generado por la familia de iteradas de una función f en la clase $\mathcal{E}$.

Definición 4.10. Sea $f \in \mathcal{E}$. El *conjunto de Fatou* de f o conjunto estable (denotado por ***F**(f)*) es el conjunto formado por todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que la sucesión de iteradas de f forma una familia normal en alguna vecindad de z, es decir,

$$\boldsymbol{F}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

También, definimos al *conjunto de Julia* de f o conjunto inestable (denotado por ***J**(f)*) como el complemento del conjunto de Fatou,

$$\boldsymbol{J}(f) = (\boldsymbol{F}(f))^c = \mathbb{C} \setminus \boldsymbol{F}(f).$$

Para $f \in \mathcal{E}$ consideramos a la singularidad esencial como parte del conjunto de Julia.

Los conjuntos de Fatou y Julia son preservados bajo conjugación topológica, es decir, si h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$, con f y g holomorfa, entonces $\boldsymbol{J}(g) = h(\boldsymbol{J}(f))$ y $\boldsymbol{F}(g) = h(\boldsymbol{F}(f))$.

Una vez definidos estos conjuntos veamos algunas de sus propiedades.

Teorema 4.11. *[24]. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces se cumplen:*

(a) $\boldsymbol{F}(f)$ *es abierto y* $\boldsymbol{J}(f)$ *es cerrado.*

(b) $\boldsymbol{J}(f)$ *es perfecto, es decir, todo punto de* $\boldsymbol{J}(f)$ *es punto de acumulación.*

(c) $\boldsymbol{F}(f)$ *es completamente invariante, es decir,*

$$z \in \boldsymbol{F}(f) \Leftrightarrow f(z) \in \boldsymbol{F}(f).$$

Esto implica que $\boldsymbol{J}(f)$ *también es completamente invariante.*

(d) $\boldsymbol{F}(f^{\circ n}) = \boldsymbol{F}(f)$ *y* $\boldsymbol{J}(f^{\circ n}) = \boldsymbol{J}(f)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\boldsymbol{J}(f) = \overline{\{z : z \text{ es un punto fijo periódico repulsor de } f\}}$.

(f) Todo ciclo atractor y su cuenca de atracción pertenecen a $\boldsymbol{F}(f)$.

(g) Si $\mathcal{A}$ *es la cuenca de atracción de un ciclo atractor, entonces* $\boldsymbol{J}(f) = \partial\mathcal{A}$.

(h) Todo ciclo parabólico o repulsor pertenece a $\boldsymbol{J}(f)$.

(i) $\boldsymbol{J}(f) \neq \emptyset$.

(j) $\boldsymbol{J}(f)$ *es conexo o tiene una cantidad infinita no numerable de de componentes conexas.*

(k) $\boldsymbol{J}(f)$ *tiene interior vacío o* $\boldsymbol{J}(f) = \mathbb{C}$.

(l) Si $z_0 \in \boldsymbol{J}(f)$ *y* U *es una vecindad de* z_0 *disjunta de* $\boldsymbol{E}(f)$*, entonces* $\mathbb{C} \setminus \boldsymbol{E}(f) \subset \bigcup_n (f^n(U))$. *Por lo tanto, si* K *es un conjunto compacto disjunto de* $\boldsymbol{E}(f)$*, entonces existe* $N > 0$ *tal que* $K \subset f^n(U)$ *para todo* $n \geq N$.

La siguiente propiedad resulta útil en la práctica para hacer el bosquejo del conjunto de Julia computacionalmente.

Teorema 4.12. *Si* $z_0 \in \boldsymbol{J}(f)$ *y* $z_0 \notin \boldsymbol{E}(f)$*, entonces* $\boldsymbol{J}(f) = \overline{\mathcal{O}^{-}(z_0)}$.

Demostración. Por ser $\boldsymbol{J}(f)$ es cerrado y completamente invariante, se cumple que $\overline{\mathcal{O}^{-}(z_0)} \subset \boldsymbol{J}(f)$.

Para probar la otra inclusión, sea $z_1 \in \boldsymbol{J}(f), z_1 \neq z_0$ y supongamos que existe una vecindad V de dicho punto tal que $V \cap \mathcal{O}^{-}(z_0) = \emptyset$, esto es $f^{\circ n}(z) \neq w$ con $n \in \mathbb{N},\ z \in V,\ y\ w \in \mathcal{O}^{-}(z_0)$. Ahora, como $|\mathcal{O}^{-}(z_0)| = \infty$, el Teorema de Montel nos garantiza que $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V, lo que contradice que $z_1 \in \boldsymbol{J}(f)$. Por lo tanto, $V \cap \mathcal{O}^{-}(z_0) \neq \emptyset$, entonces $z_1 \in \overline{\mathcal{O}^{-}(z_0)}$, así $\boldsymbol{J}(f) \subset \overline{\mathcal{O}^{-}(z_0)}$. ∎

4.3.1. Teoría local de puntos fijos

En este apartado describiremos la dinámica local de $f \in \mathcal{E}$ en una vecindad de un p-ciclo, después de reemplazar f por $f^{\circ p}$ podemos establecer nuestra discusión solamente para puntos fijos. Además, aplicando a f una traslación podemos asumir que el punto fijo está en 0. Entonces, podemos expresar a f como:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots ,$$

donde $\lambda = f^{'}(0)$ es el multiplicador de f en el punto fijo 0, véase [33], Capítulo 6.

Para la demostración de los cuatro teoremas siguientes el lector puede consultar [4] o [24].

(a) Puntos fijos atractores y repulsores ($|\lambda| \neq 0, 1$***).*** En el caso de puntos fijos atractores y repulsores tenemos que f es localmente conformemente conjugada a su parte lineal $z \mapsto \lambda z$.

Teorema 4.13 (Kœning)**.** *Si el multiplicador de f en cero satisface $|\lambda| \neq 0, 1$, entonces existe una vecindad U de cero y una conjugación local conforme $w = \varphi(z)$, donde*

$\varphi : U \to \varphi(U)$, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w) = \lambda w$ en $\varphi(U \cap f^{-1}(U))$. La conjugación φ es llamada una linealización de f en el punto fijo y es única salvo multiplicación por una constante distinta de cero.

El teorema anterior es un resultado local, pero en el caso atractor la linealización puede ser extendida a toda la cuenca de atracción de el punto fijo.

(b) Puntos fijos superatractores ($\lambda = 0$). En este caso tenemos que $f \in \mathcal{E}$ tiene un punto fijo en el origen, que además es punto crítico. Aquí f es localmente conformemente conjugada a $w \mapsto w^m$, donde $m-1$ es la multiplicidad del punto crítico (su orden como cero de f').

Teorema 4.14 (Böttcher). *Sea $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots$, con $m \geq 2$ y $a_m \neq 0$. Entonces existe una vecindad U de 0 y una conjugación local conforme $\varphi : U \to \mathbb{C}$ que conjuga f con $w \mapsto w^m$. La conjugación φ es única salvo multiplicación por una (m-1) raíz de la unidad.*

La función φ es llamada una función de Böttcher y en este caso no podemos extender a toda la cuenca de atracción como en el caso (a).

(c) Puntos fijos parabólicos ($\lambda = e^{2\pi i p/q}$). En este caso tenemos que el multiplicador λ es una q-ésima raíz de la unidad, digamos $e^{2\pi i p/q}$. Si tomamos la q-ésima iterada de la función, reducimos el problema al caso donde $\lambda = 1$. Por lo tanto, basta considerar funciones de la forma:

$$f(z) = z + az^{m+1} + \mathcal{O}z^{m+2}, \text{ con } m > 0 \text{ y } a \neq 0.$$

El entero $m+1$ es llamado multiplicidad del punto parabólico con $\lambda = 1$, y es el orden del cero de $f - Id$ en el punto fijo.

Definición 4.11. Suponga que f está definida y es inyectiva en una vecindad U del origen. Un conjunto abierto $\mathcal{P} \subset U$ es llamado un *pétalo atractor* para f en el punto fijo si:

$$(a) \quad f(\overline{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{P} \cup \{0\}, \quad (b) \quad \bigcap_n f^{\circ n}(\overline{\mathcal{P}}) = \{0\}.$$

Un conjunto $\mathcal{P} \subset f(U)$ es llamado un *pétalo repulsor* para f en el punto fijo si $\mathcal{P}$ es un pétalo atractor para $f^{-1} : f(U) \to U$, donde f^{-1} denota la rama de la inversa de f que deja fijo el origen.

Teorema 4.15 (Teorema de la flor)**.** *Supongamos que f tiene un punto fijo parabólico de multiplicador $\lambda = 1$ en el origen, con multiplicidad $m + 1$. Entonces existen $2m$ pétalos $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{2m}$, numerados cíclicamente alrededor del origen tales que $\mathcal{P}_j$ es atractor o repulsor dependiendo de si j es impar o par (respectivamente). Cada pétalo $\mathcal{P}_j$ únicamente intersecta a $\mathcal{P}_{j-1}$ y $\mathcal{P}_{j+1}$ (los indices son tomados mod $2m$), y es disjunto del resto. Los pétalos pueden ser elegidos de tal manera que la unión*

$$\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{2m} \cup \{0\}$$

sea una vecindad abierta del origen.

Si $f \in \mathcal{E}$ es como en el Teorema 4.15, y si $z \neq 0$ tiene órbita infinita que converge a 0, entonces su órbita pertenece a alguno de los pétalos atractores $\mathcal{P}$ a partir de alguna iterada de f en adelante. En ese caso diremos que la órbita de z converge a 0 a través de $\mathcal{P}$.

Definición 4.12 (Cuenca de atracción parabólica)**.** Si z_0 es un punto fijo parabólico de f con multiplicador $\lambda = 1$, y $\mathcal{P}$ es un pétalo atractor en 0, definimos la *cuenca parabólica* (de atracción) de z_0 asociada a $\mathcal{P}$ como:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \left\{ z \in \left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n>0} f^{-n}(z_0) \right) \mid f^n(z) \underset{n\to\infty}{\to} z_0 \text{ a través de } \mathcal{P} \right\}.$$

Observe que si el punto fijo parabólico tiene multiplicidad $m + 1$, entonces tiene exactamente m cuencas parabólicas disjuntas. Además, las cuencas de atracción parabólicas están contenidas en el conjunto de Fatou y sus fronteras son parte del conjunto de Julia.

Teorema 4.16. *Para cada pétalo* $\mathcal{P}$ *atractor o repulsor existe* $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ *conforme, la cual conjuga* f *con la traslación* $w \mapsto w + 1$ *en* $\mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P})$. *Así el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "w \to w+1"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Representación gráfica de un número complejo, en este ejemplo $z = (2, 2.5)$.

Si 0 es un punto fijo parabólico de f con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i p/q} \neq 1$ y si f^q tiene multiplicidad $m + 1$ en 0, entonces el número de pétalos atractores y repulsores en el Teorema 4.16 es $m = kq$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

(d) Puntos fijos irracionales indiferentes **(**$\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$**).** Recordemos que θ es el *número de rotación* para $g(z) = \lambda z$. Además, se cumple que θ es un invariante topológico, véase [25].

En este caso analizaremos bajo qué condiciones impuestas a $f \in \mathcal{E}$ y a θ, tenemos que f es localmente, conformemente conjugada a su parte lineal $z \mapsto \lambda z$. Pero en contraste con los casos anteriores, la respuesta completa aún permanece abierta.

Un resultado conocido es el siguiente: Una linealización holomorfa es posible si, y sólo si el punto fijo pertenece al conjunto de Fatou ([24], 11.1). Si este es el caso, para alguna vecindad del punto fijo tenemos que hay una foliación por medio de curvas cerradas simples e invariantes, en las cuales todas las órbitas son densas (esto se debe cumplir, porque tal es el caso para la función $z \mapsto \lambda z$). La vecindad máxima del punto fijo para la cual la linealización está definida se llama *disco de Siegel* y en tal caso llamaremos al punto fijo un *punto de Siegel*. A los puntos fijos que no son de Siegel (con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) les llamaremos *puntos de Cremer* y estos últimos pertenecen al conjunto de Julia.

En el siguiente teorema $O(z^2)$ representa a una función tal que,

$$\lim_{z\to 0} \frac{O(z^2)}{z^2} = 0.$$

Teorema 4.17. *[35]. Sea $f(z) = e^{2\pi i\theta}z + O(z^2)$ definida en una vecindad del origen, con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si θ es un número de Brjuno (véase Apéndice A), entonces f es holomorficamente linealizable en una vecindad de 0. Además, si θ no es un número de Brjuno, entonces el polinomio cuadrático $f(z) = e^{2\pi i\theta}z + z^2$ no tiene una linealización local holomorfa.*

En otras palabras, para la familia de polinomios cuadráticos tenemos que la condición de Brjuno es óptima para la linealización, y se sabe que la condición también es óptima para la familia de funciones enteras $z \mapsto \lambda z e^z$ [13], pero (por poner un ejemplo) aún es una pregunta abierta si existe o no, un polinomio cúbico con un disco de Siegel con número de rotación que no sea número de Brjuno.

Teorema 4.18. *[5]. Sea Δ un disco de Siegel con número de rotación $\theta \in \mathcal{B}$, y f una función holomorfa definida en una vecindad de Δ. Si $\partial\Delta$ es una curva de Jordan, entonces contiene al menos un punto crítico.*

4.3.2. Componentes del conjunto de Fatou

Si X es un espacio topológico y G un subespacio de X, entonces G es una *componente* de X si, y sólo si:

(a) G es conexo y

(b) Si D es un subespacio conexo de X que contiene a G, entonces $D = G$.

Así, las componentes de X son los subespacios conexos maximales de X.

Si $f \in \mathcal{E}$ y U es una componente del conjunto de Fatou, entonces el comportamiento de la órbita de U bajo f tiene tres posibilidades (Figura 4.1):

(a) $f^{\circ n}(U) \subset U$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso U es llamada una *componente periódica* de ***F(f)***. Al mínimo n que satisface esta propiedad le llamaremos el periodo de la componente U, si $n = 1$ diremos que la componente U es invariante.

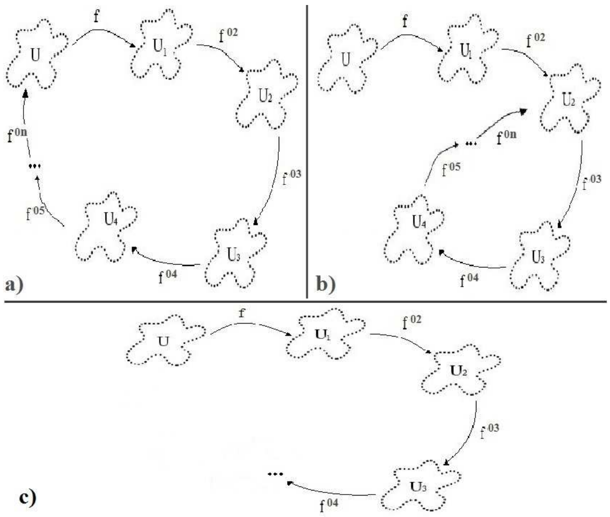

Figura 4.2: a) componente periódica, b) componente pre-periódica y c) componente errante.

(b) $f^{\circ m}(U)$ es periódica para algún entero $m \geq 1$. En este caso llamamos a U una *componente pre-periódica*. En particular, si U es pre-periódica pero no periódica, llamamos a U una componente pre-periódica propia.

(c) Si U no es periódica o pre-periódica, llamaremos a U una *componente errante*.

Si U es p-periódica, entonces denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ al ciclo de componentes de Fatou al cual U pertenece.

Teorema 4.19. *[24]. Sea f una función entera trascendente y U una componente periódica de Fatou de periodo p, entonces se cumple sólo una de las siguientes posibilidades:*

(a) U contiene un punto periódico atractor z_0 de período p y $f^{\circ np}(z) \to z_0$, con $z \in U$ cuando $n \to \infty$. En este caso el ciclo $\mathcal{O}(U)$ recibe el nombre de cuenca inmediata de atracción del ciclo atractor $\mathcal{O}(z_0)$ (denotada por $\mathcal{A}^{\circ}$). Si z_0 es punto periódico

superatractor, entonces $\mathcal{O}(U)$ es llamado p-ciclo de dominios de Bötcher. En cualquier otro caso $\mathcal{O}(U)$ es llamado p-ciclo de dominios de Schröder.

(b) ∂U contiene un punto periódico $z_0 \neq \infty$ de período p y para todo punto $z \in U$ tenemos que $f^{\circ np}(z) \to z_0$ cuando $n \to \infty$. Entonces z_0 es un punto fijo parabólico de multiplicador 1 para $f^{\circ p}$. En este caso, $\mathcal{O}(U)$ es llamado cuenca inmediata parabólica de atracción (p-ciclo parabólico o p-ciclo de dominios de Leau) del ciclo parabólico $\mathcal{O}(z_0)$.

(c) Existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \to \mathbb{D}$ tal que $\psi \circ f^{\circ p} \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta} z$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, $\mathcal{O}(U)$ es llamado p-ciclo de discos de Siegel.

(d) Para todo $z \in U$, $f^{\circ np}(z) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. En este caso $\mathcal{O}(U)$ es llamado un p-ciclo de dominios de Baker.

(e) Existe $0 < r < 1$ y un homeomorfismo analítico $\psi : U \to A_r$, donde A_r es el anillo $A_r = \{z : r < |z| < 1\}$, tal que $\psi \circ f^{\circ p} \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta} z$, para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, $\mathcal{O}(U)$ es llamado un p-ciclo de anillos de Herman.

Para funciones en la clase $\mathcal{E}$ no existen dominios de Baker, como lo muestra un resultado de Eremenko y Lyubich [11]. Tampoco existen anillos de Herman, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.20. *Sea $f \in \mathcal{E}$, entonces f no tiene anillos de Herman.*

Demostración. (Por contradicción) Sea $f \in \mathcal{E}$ y supongamos que existe un p-ciclo de anillos de Herman $\mathcal{O}(U)$, donde U es componente de Fatou. Aprovechando el hecho de que $\boldsymbol{F}(f^{\circ p}) = \boldsymbol{F}(f)$ tenemos que para $g = f^{\circ p}$ (observe que $g \in \mathcal{E}$ y por tanto, es analítica en $\mathbb{C}$) U es una componente invariante hacia adelante.

Sea ψ y A_r como en (e) de la definición anterior, y $C' = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = \frac{1+r}{2}\right\}$. Por ser ψ homeomorfismo analítico, tenemos que $\psi^{-1}(C')$ es una curva de Jordan contenida en U, en particular g es analítica en el interior de $D = \psi^{-1}(C') \cup int(\psi^{-1}(C'))$ y continua en su frontera. Entonces por el Teorema del Módulo Máximo (1.19) g alcanza su máximo en la frontera de D y por tanto, debe existir un $M > 0$ tal que $|z| \leq M$, para toda $z \in D$. Entonces por el Teorema de Montel-Caratheodory (4.2) g es normal en D, pero esto último es una contradicción, porque si fuera cierto tendríamos que $U \subset (D \cup U)$ y $U \neq (D \cup U)$, de donde U no es componente de Fatou. ■

Finalizamos este capítulo con el siguiente teorema, que da información sobre el número de componentes completamente invariantes para las funciones enteras.

Teorema 4.21. *[3]. Para $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Fatou tiene a lo más una componente completamente invariante, tal componente es simplemente conexa y no acotada.*

Capítulo 5

Dinámica de $e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$

En este capítulo analizaremos brevemente algunos aspectos de sobre la dinámica de la familia $\lambda\operatorname{sen}(z)$, centrándonos principalmente en el caso $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Observe que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que $\lambda\operatorname{sen}(z) \in \mathcal{E}$. Además, $\lambda\operatorname{sen}(z) \in \mathcal{E}\cap\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la clase de funciones f tal que el conjunto de puntos singulares de f^{-1} es finito ($f_\lambda = \lambda\operatorname{sen}(z)$ tiene como únicos valores críticos a λ y $-\lambda$).

5.1. El Espacio de Parámetros

Al trabajar con familias de funciones, es común que podamos representar a la familia como una colección de funciones las cuales tienen una forma determinada, y sólo hacemos variar algún parámetro en un conjunto, para el cual, la familia de funciones está bien definida. Este es el caso para la familia $f_\lambda(z) = \lambda\operatorname{sen}(z)$.

Definición 5.1. (Espacio de parámetros). Dada una familia uniparamétrica de funciones $\mathfrak{F} = \{f_\lambda\}$, el *espacio de parámetros* de la familia $\mathfrak{F}$ es el conjunto de los λ para los cuales f_λ está bien definida.

También, definimos el conjunto:

$$\mathcal{M} = \{\lambda : |f_\lambda^{\circ n}(\mathfrak{c})| \nrightarrow \infty\},$$

donde $\mathfrak{c}$ es punto crítico de f_λ, para toda $f_\lambda \in \mathfrak{F}$.

Observe que en la familia $\lambda\,\mathrm{sen}(z)$ podemos poner $\mathfrak{c} = \pi/2$.

Algunos resultado conocidos para $\mathcal{M}$, de la familia $\lambda\,\mathrm{sen}(z)$, son (véase [9]):

(a) Si $\lambda \in \mathcal{M} \Rightarrow \overline{\lambda} \in \mathcal{M}$,

(a) Si $\lambda \in \mathcal{M} \Rightarrow -\lambda \in \mathcal{M}$,

(a) Si $\lambda \in \mathcal{M} \Rightarrow -\overline{\lambda} \in \mathcal{M}$.

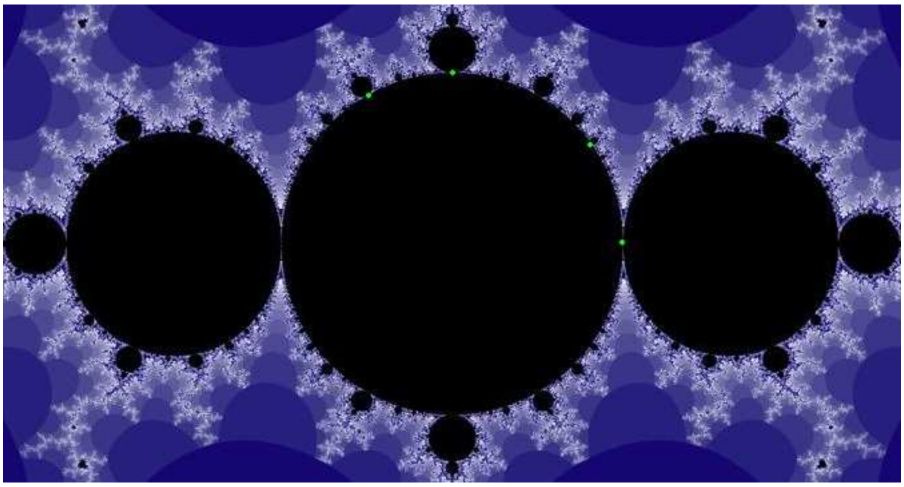

Figura 5.1: Conjunto $\mathcal{M}$ para la familia $f(z) = \lambda\,\mathrm{sen}(z)$. Los puntos verdes corresponden a los valores de $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, para p/q igual a 1, 1/10, 1/4 y 1/3.

La Figura 5.1 muestra el conjunto $\mathcal{M}$ para la familia $\lambda\,\mathrm{sen}(z)$. Observe que analizar la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda\,\mathrm{sen}(z)$ en los parámetros $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ es analizar los parámetros λ que están localizados en el círculo unitario. Dividiremos nuestra discusión en dos casos, cuando $\theta \in \mathbb{Q}$ y cuando $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.2. Caso $\theta \in \mathbb{Q}$

En este caso sólo mencionaremos algunos resultados desarrollados en [9]. Iniciamos enunciando un teorema que nos garantiza cómo es la dinámica de la función $f_\lambda(z) = \lambda\,\mathrm{sen}(z)$, para $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ y $\theta \in \mathbb{Q}$.

Teorema 5.1. *[9]. Sea $f(z) = e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$, con $\theta = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ y $(p, q) = 1$. Si q es par, entonces existe un ciclo con q componentes de Fatou alrededor de cero. Si q es impar, entonces existen dos ciclos con q componentes de Fatou cada uno. Las anteriores son las únicas componentes de Fatou periódicas y tales componentes son acotadas.*

Es decir, el número entero q determina el comportamiento de las componentes periódicas del conjunto de Fatou alrededor del cero, y las tres imágenes siguientes ilustran este hecho. En las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 podemos visualizar el comportamiento de las órbitas para algunos parámetros; pareciera que sin importar cuál es el punto inicial del conjunto de Fatou en nuestra iteración, siempre terminamos en un ciclo periódico. Esto no es casualidad, ya que existe un importante teorema de Eremenko y Lyubich [11], el cual, nos garantiza que para funciones enteras en la clase S no existen dominios errantes. Así, junto con el Teorema 5.1, concluimos que las demás componentes del conjunto de Fatou que no están en los ciclos (mencionados en el Teorema 5.1) son pre-periódicas.

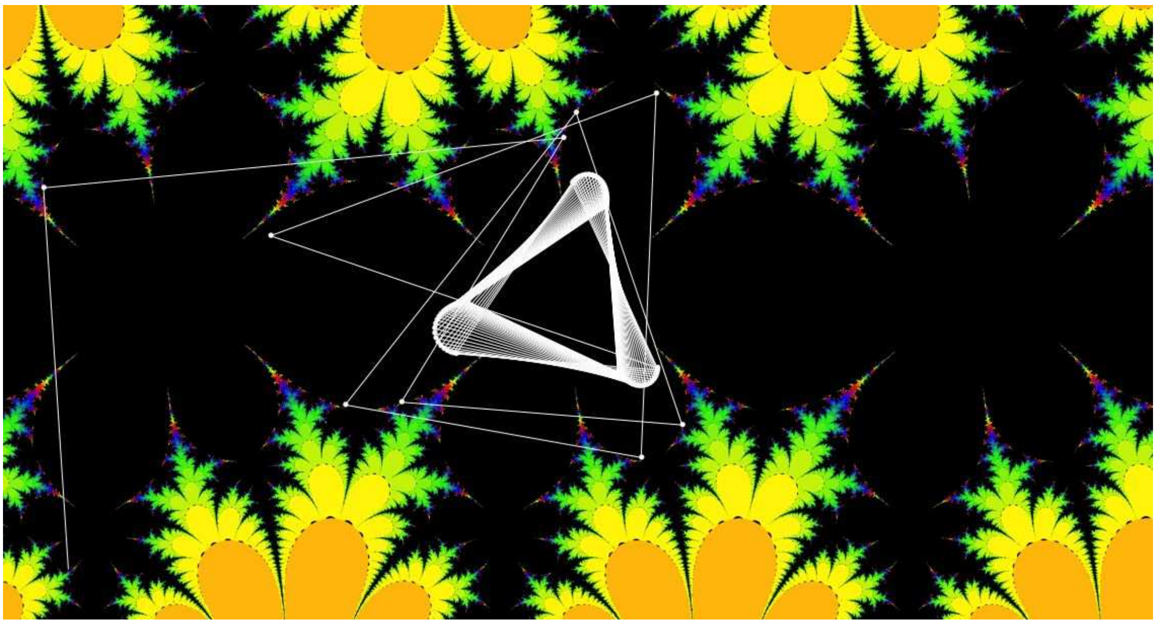

Figura 5.2: Plano dinámico de $f(z) = e^{2\pi ip/q}\operatorname{sen}(z)$, con $p/q = 1/3$ y órbita de un punto en el conjunto de Fatou (de color blanco).

Finalizamos esta sección con un resultado sobre el conjunto $\mathcal{M}$.

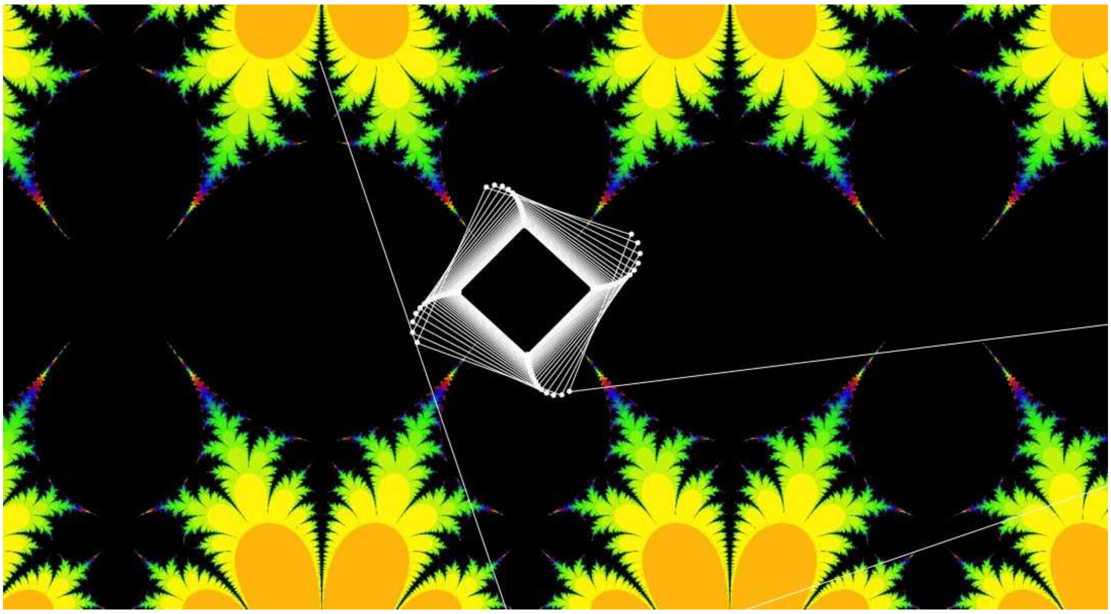

Figura 5.3: Plano dinámico de $f(z) = e^{2\pi ip/q}\,\mathrm{sen}(z)$, con $p/q = 1/4$ y órbita de un punto en el conjunto de Fatou (de color blanco).

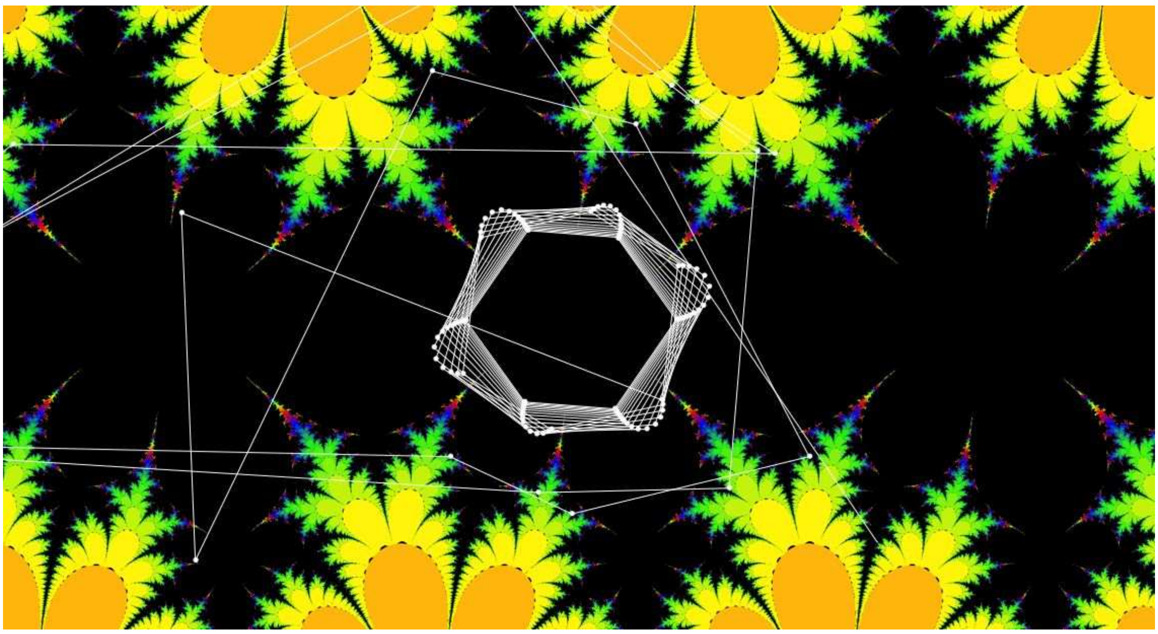

Figura 5.4: Plano dinámico de $f(z) = e^{2\pi ip/q}\,\mathrm{sen}(z)$, con $p/q = 1/6$ y órbita de un punto en el conjunto de Fatou (de color blanco).

Teorema 5.2. *[9]. Si $f(z) = \lambda_0 \operatorname{sen}(z)$, con $\lambda_0 = e^{2\pi i p/q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ y $(p, q) = 1$. Entonces existe una componente $\mathcal{D}_q$ en $\mathcal{M}$, que es tangente al disco unitario en λ_0.*

La Figura 5.1 ilustra este hecho.

5.3. Caso $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y f una función holomorfa, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \lambda_0$, donde $\lambda_0 = e^{2\pi i\theta}$. Bajo estas condiciones ¿será linealizable la función f?, es decir, ¿f es conjugada a su parte lineal en una vecindad de cero? La respuesta depende del parámetro θ; en 1919 G. A. Pfeiffer dio contra ejemplos a estas preguntas. En 1927, Crémer probó que para algunos valores del parámetro θ incluso las funciones racionales no son linealizables. En 1942, Siegel probó que hay valores de θ (números Diofantinos) para los cuales la correspondiente función f es linealizable. La cuestión al final fue resuelta por Brjuno [6] y Yoccoz [36], y coincide con el conjunto de los θ irracionales tales que el polinomio $P(z) = \lambda_0 z + z^2$ es linealizable. Sin embargo, incluso en este caso la naturaleza de la frontera del disco de Siegel no es completamente conocida, se sabe que es conexa y que si es localmente conexa, entonces es una curva de Jordan [30].

Los primeros ejemplos de discos de Siegel cuya frontera es una curva de Jordan fueron dados por Herman [14], en estos ejemplos las fronteras de los discos de Siegel no contienen puntos críticos. Después, en 1987, Herman demostró que si la frontera del disco de Siegel era casisimétricamente conjugada a una rotación en $\mathbb{S}^1$, entonces la frontera del disco de Siegel tiene un punto crítico si, y sólo si θ es de tipo acotado. Posteriormente Petersen probó que para números irracionales de tipo acotado el conjunto de Julia $\boldsymbol{J}$ es localmente conexo [21].

En 2002 Graczyk y Światek probaron el siguiente resultado:

Teorema 5.3. *Sea U un disco en $\mathbb{C}$ y $h : \mathbb{D} \to U$ la función del Teorema 2.8. Supongamos que f es una función analítica definida en alguna vecindad de $\overline{U}$ tal que $f' \neq 0$*

en $\overline{U}$ y se satisface la ecuación:

$$f \circ h(z) = h \circ R_\sigma(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, donde el número de rotación σ es de tipo acotado. Entonces h puede ser extendida como una función analítica en alguna vecindad de $\overline{\mathbb{D}}$.

Del Teorema 5.3, se desprende que si f es analítica y tiene un punto fijo con multiplicador de tipo acotado, entonces el correspondiente disco de Siegel debe tener un punto crítico en su frontera o no estar compactamente contenido en el dominio de definición de f o ambos.

Por otro lado, Lasse Rempe en [29] realizó un estudio de diversas funciones enteras, entre las cuales se encuentra $e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$, tal estudio estuvo enfocado en algunas variaciones del siguiente resultado de Herman.

Teorema 5.4. *[15]. Sea $f \in \mathcal{E}$ con un disco de Siegel U. Si se cumple que el número de rotación de U es Diofantino, U está acotado y si $f : \partial U \to \partial U$ es un homeomorfismo, entonces ∂U contiene un punto crítico.*

En su artículo Rempe demostró que la hipótesis de que U sea acotado puede ser removida para una gran clase de funciones enteras. Para ser precisos:

Teorema 5.5. *[29]. Sea $f \in \mathcal{E}$, tal que su conjunto de valores singulares está acotado. Si U es un disco de Siegel de f y $f : \partial U \to \partial U$ es un homeomorfismo, entonces U está acotado.*

Por tanto, si se cumplen las hipótesis del Teorema 5.5 y además el número de rotación de U es Diofantino, entonces ∂U contiene un punto crítico (Teorema 5.4).

Observación: La clase de funciones enteras cuyo conjunto de valores singulares está acotado, recibe el nombre de *clase de Lyubich-Eremenko* y es comúnmente denotada por $\mathfrak{B}$.

Teorema 5.6. *[29]. Sea $f \in \mathfrak{B}$, con $SV(f) \subset \boldsymbol{J}(f)$. Si U es un Disco de Siegel que satisface $SV(f) \cap \partial U = \emptyset$, entonces $f : \partial U \to \partial U$ es un homeomorfismo.*

Al combinar el Teorema 5.6 con el Teorema 5.4 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.1. *Sea $f \in \mathfrak{B}$, con $SV(f) \subset \boldsymbol{J}(f)$. Si U es un Disco de Siegel con número de rotación Diofantino, entonces $SV(f) \cap \partial U \neq \emptyset$.*

5.3.1. Dinámica de $e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$, θ de tipo acotado

En este apartado analizaremos con más detalle las construcciones necesarias para demostrar un resultado de G. Zhang [37], a saber: Para cualquier número irracional de tipo acotado $0 < \theta < 1$, la frontera del disco de Siegel de $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}\operatorname{sen}(z)$ es un casicírculo que pasa por los puntos críticos $\pi/2$ y $-\pi/2$. Sabemos de los comentarios anteriores que f_θ tiene un disco de Siegel U centrado en el origen, con número de rotación θ, cuya frontera contiene un punto crítico.

La primera función de la que haremos uso es la función $g(z) = (\operatorname{sen} z)/2$. Tenemos que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1/2$, de donde se observa que g tiene un punto fijo atractor en el origen. Sea Ω el máximo dominio del origen en el cual g es linealizable y $\phi : \Omega \to \mathbb{D}$ es el homeomorfismo holomorfo que conjuga g a la función lineal $L_{1/2} : z \to z/2$ en $\mathbb{D}$, donde $\phi'(0) > 0$.

Lema 5.1. *La función* $\operatorname{sen} z$ *no tiene valores asintóticos finitos.*

Demostración. Supongamos que β es un valor asintótico finito de $\operatorname{sen} z$, entonces existe una curva continua $\gamma(t) \subset \mathbb{C}$, $0 \leq t < \infty$, tal que $\gamma(t) \to \infty$ y $\operatorname{sen}(\gamma(t)) \to \beta$ conforme $t \to \infty$. Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Recordemos que $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, de donde tenemos que $|\operatorname{sen}(z)| \to \infty$ cuando $|Im(z)| \to \infty$. Por tanto, se debe cumplir que $|y(t)| \leq M$ para alguna constante $M > 0$. entonces $x(t) \to \infty$. Ahora,

$$\operatorname{sen}(\gamma(t)) = \operatorname{sen} x(t)\left[\frac{e^{y(t)} + e^{-y(t)}}{2}\right] + i\cos x(t)\left[\frac{e^{y(t)} - e^{-y(t)}}{2}\right].$$

Como $x(t) \to \infty$, entonces existe una sucesión $t_k \to \infty$ tal que $x(t_k) = k\pi$, se sigue que $Re(\beta) = 0$. De igual manera existe una sucesión $t_k^{'} \to \infty$ tal que $x(t_k^{'}) = 2k\pi + \pi/2$. Además, observe que

$$Re\,\mathrm{sen}(\gamma(t_k^{'})) = \frac{e^{y(t_k^{'})} + e^{-y(t_k^{'})}}{2} \geq 1,$$

entonces $Re(\beta) \geq 1$ y esto es una contradicción. Por tanto, concluimos que $\mathrm{sen}\, z$ no tiene valores asintóticos finitos. ∎

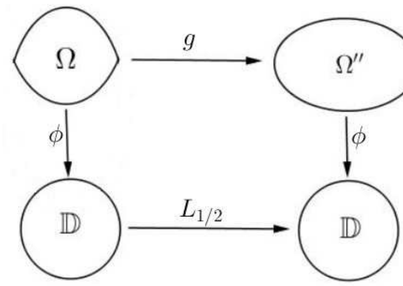

Figura 5.5: Bosquejo de la relación entre las funciones g, ϕ y $L_{1/2}$ (aquí Ω'' representa a $g(\Omega)$).

Como consecuencia del Lema 5.1 tenemos que Ω está acotado, porque de lo contrario $\mathrm{sen}\, z$ tendría un valor asintótico finito, y por ser $g(-z) = -g(z)$ deducimos que Ω es simétrico alrededor del origen. Además, $\partial\Omega$ contiene un punto crítico de g (Teorema 4.18).

Analizando la función ϕ y comparándola con $t(z) = \overline{\phi(\overline{z})}$ en una vecindad del origen, tenemos que $t'(0) = \phi'(0)$ y que $t(z) = \phi(z)$, entonces $\phi|_{\mathbb{R}}$ es una función real, y como g es inyectiva en Ω, entonces $\partial\Omega$ contiene exactamente dos puntos críticos de g, a saber $\pi/2$ y $-\pi/2$. Además, $\partial\Omega$ es real analítica en todos lados salvo en sus puntos críticos, entonces $\partial\Omega$ es un casicírculo.

Sean $c_1 = -\pi/2$, $c_2 = \pi/2$, $\xi = g(c_1) = -1/2$, $\gamma' = g(\partial\Omega)$ y sea Ω' la componente no acotada de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma'$. Observe que $\xi \in \gamma'$. Como consecuencia del Teorema 2.8, existe para cada $\eta \in \partial\Omega$ una única función analítica $\mu_\eta : \overline{\Omega'} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ tal que $\mu_\eta(\infty) = \infty$ y $\mu_\eta(\xi) = \eta$.

Lema 5.2. *La función μ_η es impar.*

Demostración. Como $g(z)$ es impar, tenemos que $\overline{\Omega'}$ y $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ son simétricos respecto al origen. Sea $r(z) = -\mu_\eta(-z)$. Entonces $r : \overline{\Omega'} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es un isomorfismo analítico tal que $r(\infty) = \mu_\eta(\infty)$ y $r(\xi) = \mu_\eta(\xi)$. Por la unicidad de μ_η concluimos que $r = \mu_\eta$ y por lo tanto, $\mu_\eta(z) = -\mu_\eta(-z)$. ■

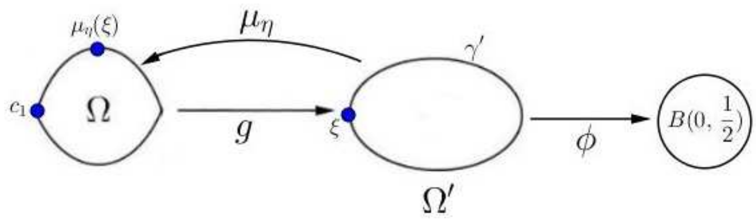

Figura 5.6: Funciones μ_η, g y ϕ.

Observe que para $\eta \in \partial\Omega$, $F_\eta = \mu_\eta \circ g|_{\partial\Omega}$ es un homeomorfismo. Así, se cumple el siguiente resultado.

Lema 5.3. *[18]. Existe un único $\eta \in \partial\Omega$ tal que el número de rotación de $F_\eta : \partial\Omega \to \partial\Omega$ es θ.*

El siguiente lema será de utilidad para agrandar el dominio de definición de las funciones analíticas.

Lema 5.4. *[1]. Sea U un dominio tal que $\gamma \subset \partial U$ es un segmento de curva abierto y real analítico. Supongamos que f es una función analítica definida en U tal que f puede ser continuamente extendida a γ y $f(\gamma)$ es un segmento de curva real analítico. Entonces f puede ser continuada analíticamente a un dominio que contenga a γ en su interior.*

Ahora, sea $\psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ la función garantizada por el Teorema de la Aplicación de Riemann tal que $\psi(\infty) = \infty$ y $\psi(1) = c_1$. Usando un argumento análogo al del Lema 5.2 concluimos que ψ es impar. Observe que $\psi(-1) = c_2$.

Lema 5.5. *[37]. El homeomorfismo del círculo $f = \psi^{-1} \circ F_\eta \circ \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ puede ser analíticamente extendido a una vecindad abierta de $\mathbb{S}^1$ tal que f tiene por puntos críticos 1 y -1.*

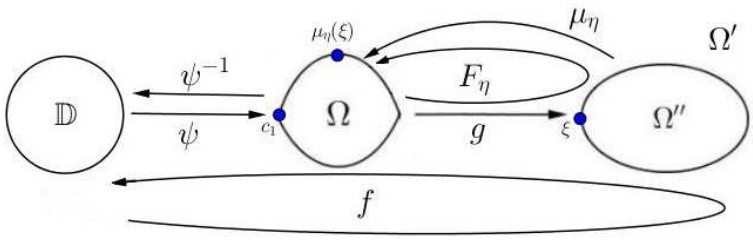

Figura 5.7: Relación entre f, F_η y μ_η.

Entonces, aplicando el Teorema 5.3 a la función f, tenemos que $f = \psi^{-1} \circ F_\eta \circ \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es casisimétricamente conjugada a la rotación R_θ, porque θ es de tipo acotado. Sea $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ el homeomorfismo casisimétrico tal que $h(1) = 1$ y $f = h \circ R_\theta \circ h^{-1}$. La función h así definida, es única e impar, véase [37].

Lema 5.6. *(a) La función μ_η puede ser extendida a un homeomorfismo casiconforme $\widehat{\mu}_\eta : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\widehat{\mu}_\eta(-z) = -\widehat{\mu}_\eta(z)$.*

(b) La función ψ puede ser extendida a un homeomorfismo casiconforme $\widehat{\psi} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\widehat{\psi}(-z) = -\widehat{\psi}(z)$.

(c) La función h puede ser extendida a un homeomorfismo casiconforme $H : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $H(-z) = -H(z)$.
En particular $\widehat{\psi}(0) = \widehat{\mu}_\eta(0) = H(0) = 0$.

Demostración. Las demostraciones de (a), (b) y (c) son similares, así que sólo demostraremos (a). Sea Ω'' la componente no acotada de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma'$. Observe que Ω'' es simétrica alrededor del origen. Sean $\phi_1 : \mathbb{D} \to \Omega''$ y $\phi_2 : \mathbb{D} \to \Omega$ los isomorfismos conformes tales que $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$. Como Ω y Ω'' son simétricos alrededor del origen, entonces ϕ_1 y ϕ_2 son impares.

Definamos la función $s = \phi_2^{-1} \circ \mu_\eta \circ \phi_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, observe que es un homeomorfismo y que también es impar. Esta función s puede ser extendida a un homeomorfismo $\widehat{s} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $\widehat{s}(-z) = -\widehat{s}(z)$, véase [10].

Ahora, si $\widehat{\mu}_\eta(z) = \mu_\eta(z)$ para $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega''$ y $\widehat{\mu}_\eta(z) = \phi_2 \circ \widehat{s} \circ \phi_1^{-1}(z)$ para $z \in \Omega''$, tenemos que $\widehat{\mu}_\eta$ es la extensión deseada, véase Figura 5.8. ■

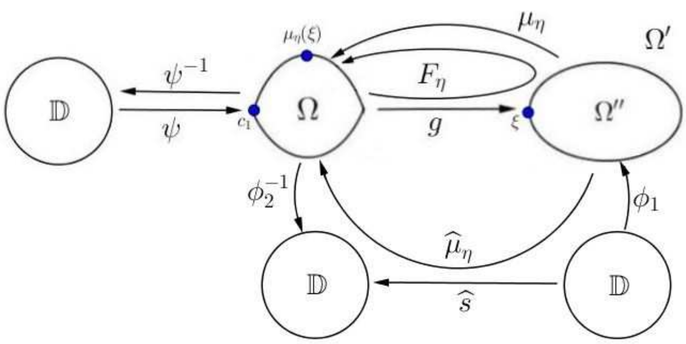

Figura 5.8: Extensión de μ_η.

Consideremos a los conjuntos $\Omega_k = \{z + k\pi | z \in \Omega\}$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Observe que $\Omega_0 = \Omega$ y que los conjuntos Ω_k son disjuntos dos a dos (esto por el hecho de que g es inyectiva en Ω_0).

Definamos:

$$\widehat{f}_\theta(z) = \begin{cases} (\widehat{\mu}_\eta \circ g)(z) & \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k, \\ \widehat{\psi} \circ H^{-1} \circ R_\theta \circ H \circ \widehat{\psi}^{-1}(z - k\pi) & \text{para } z \in \Omega_k,\ k \text{ par}, \\ -\widehat{\psi} \circ H^{-1} \circ R_\theta \circ H \circ \widehat{\psi}^{-1}(z - k\pi) & \text{para } z \in \Omega_k,\ k \text{ impar}. \end{cases}$$

De la definición de $\widehat{f}_\theta$ deducimos que $\widehat{f}_\theta$ es impar y $\widehat{f}_\theta(z + \pi) = -\widehat{f}_\theta(z)$, donde el conjunto de ceros de $\widehat{f}_\theta$ es $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora, definamos ν, una estructura compleja $\widehat{f}_\theta-$invariante. Sea ν_0 la estructura compleja estándar. Para $z \in \Omega$, ν es la estructura compleja dada por $(\widehat{\psi} \circ H^{-1})^*(\nu_0)$, para $z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$ tal que existe un $m \geq 1$ con la propiedad $\widehat{f}_\theta^m(z) \in \Omega$ definimos $\nu(z)$ como $(\widehat{f}_\theta^m)^*(\nu_0)(z)$, y para los casos restantes $\nu(z) = 0$. La estructura compleja así definida es $\widehat{f}_\theta-$invariante y $||\nu||_\infty < 1$ [37]. Por el Teorema 3.6, existe un único homeomorfismo casiconforme $\omega : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ el cual deja invariantes a 0, 2π e ∞ y resuelve la ecuación de Beltrami dada por ν.

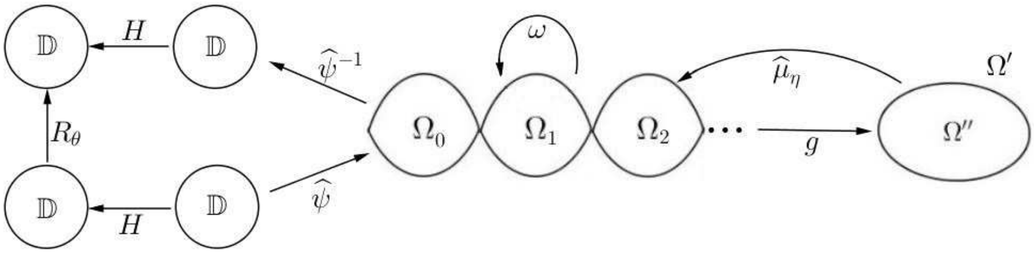

Figura 5.9: Relación entre las funciones g, H, ψ, ω, R_θ y $\widehat{\mu}_\eta$.

Observe que $\widehat{\psi} \circ H^{-1}$ es impar, de donde tenemos que el campo de elipses infinitesimales dado por $\widehat{\psi} \circ H^{-1}$ es simétrico respecto al origen, es decir, $\nu(z) = \nu(-z)$, y como $\widehat{f_\theta}$ es impar y $\widehat{f_\theta}(z + \pi) = \widehat{f_\theta}(z)$ tenemos que $\nu(z + \pi) = \nu(z)$.

Otras propiedades que cumplen las funciones que acabamos de definir son:

Lema 5.7. *[37].*

(a) La función ω es impar, además

$$\omega(z + \pi) = \omega(z) + \pi, \ \omega(\pi/2) = \pi/2 \text{ y } \omega(-\pi/2) = -\pi/2.$$

(b) Si $T = \omega \circ \widehat{f_\theta} \circ \omega^{-1}$, entonces T es impar, periódica (con periodo 2π) y el conjunto de ceros de T es $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Además, $T(z) = C \operatorname{sen} z$.

Finalmente podemos presentar el resultado principal.

Teorema 5.7. *Para cualquier número irracional de tipo acotado $0 < \theta < 1$, la frontera del disco de Siegel de $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen}(z)$ es un casicírculo, el cual pasa por los puntos críticos $\pi/2$ y $-\pi/2$.*

Demostración. Sabemos que $T(z) = C \operatorname{sen} z$ y que $T(z)$ tiene un disco de Siegel centrado en el origen con número de rotación θ, entonces $C = \lambda = e^{2\pi i\theta}$, es decir,

$T(z) = \lambda \operatorname{sen} z$. Así, concluimos por construcción de la función T, que la frontera del disco de Siegel de $\lambda \operatorname{sen} z$ es un casicírculo que pasa por los dos puntos críticos $\pi/2$ y $-\pi/2$. ∎

Las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 muestran ejemplos de discos de Siegel en la familia $\lambda \operatorname{sen} z$, así como el comportamiento de la órbita de algunos puntos en el conjunto de Fatou.

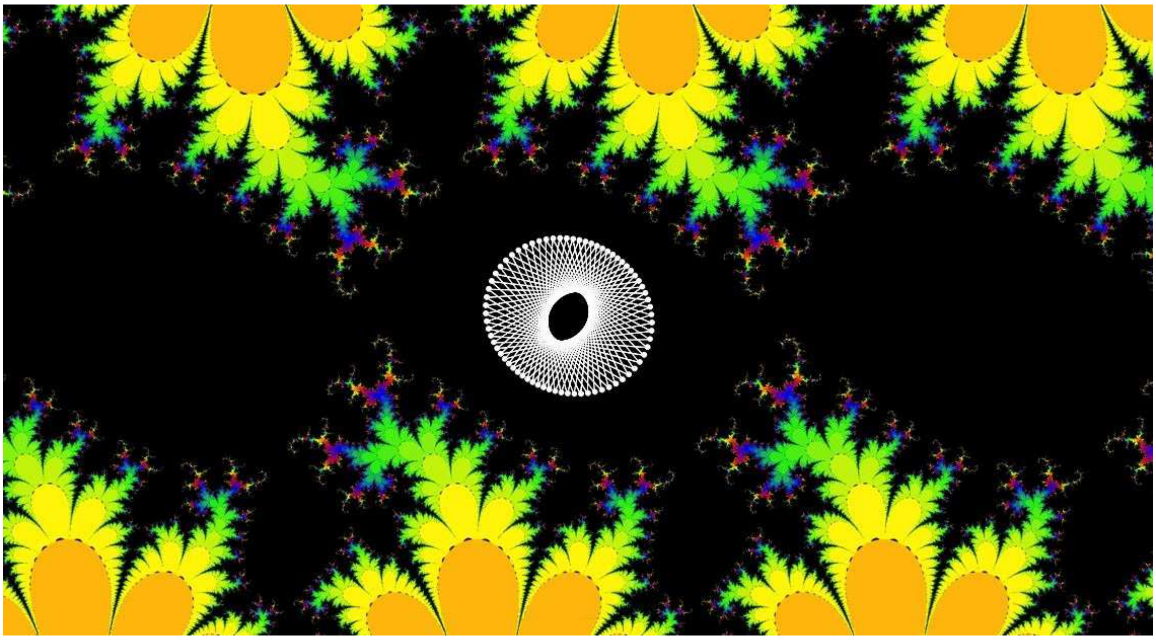

Figura 5.10: Ejemplo de un disco de Siegel en la familia $\lambda \operatorname{sen} z$, los puntos blancos son la órbita de un punto en el interior del disco.

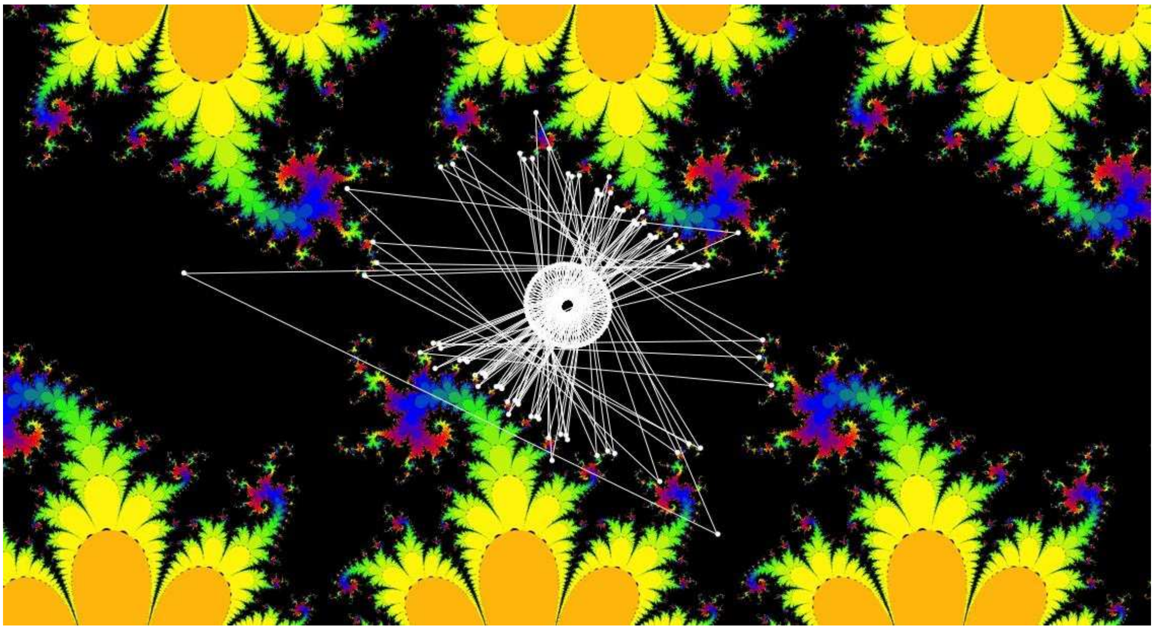

Figura 5.11: Ejemplo de un disco de Siegel en la familia $\lambda \operatorname{sen} z$, los puntos blancos son la órbita de un punto inicial en el conjunto de Fatou, pero no en el disco. Recordar que las componentes en el conjunto de Fatou son pre-periódicas.

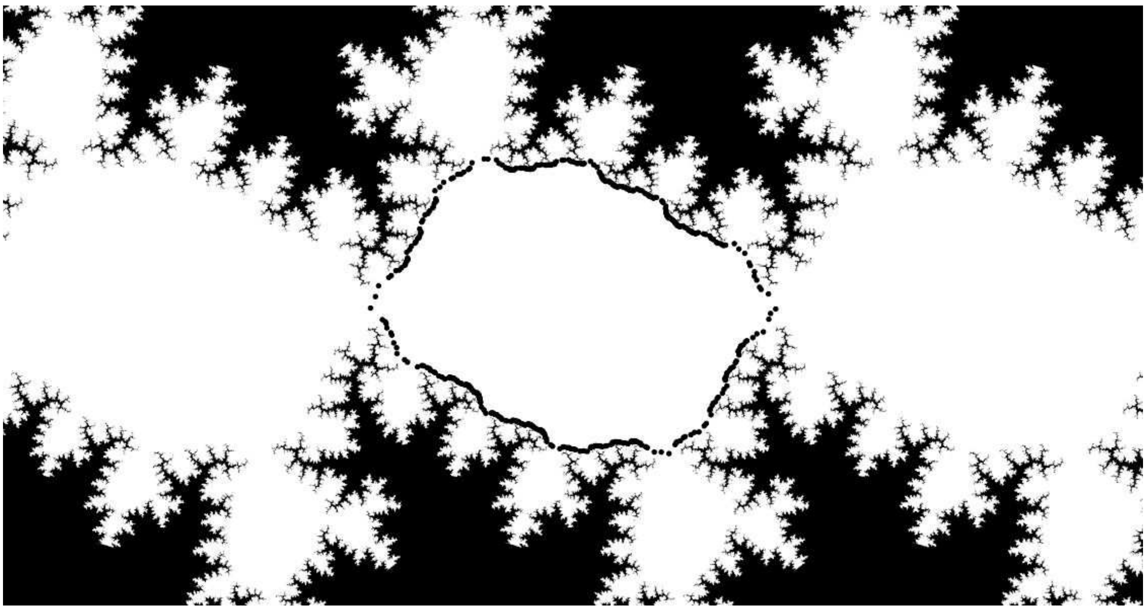

Figura 5.12: Disco de Siegel en la familia $\lambda \operatorname{sen} z$, en este caso θ es el número aureo. Por los resultados aquí presentados $\pi/2$ y $-\pi/2$ pertenecen a la frontera del disco de Siegel, además, por [29] λ y $-\lambda$ también pertenecen a la frontera del disco, véase [29], Figura 1.

Apéndice A

Números Irracionales

El presente apéndice sirve para definir y enunciar algunos conceptos y propiedades sobre la clasificación de los números irracionales, que serán de gran ayuda para entender algunos resultados que se presentan a lo largo de este trabajo de tesis.

A.1. Números Diofantinos

Recordemos que si α es un número irracional, entonces una aproximación a α es una sucesión de números racionales que converge a α. Con esta noción, nos interesa analizar el comportamiento de las distintas aproximaciones a un número irracional α y por esta razón enunciamos la siguiente definición.

Definición A.1. Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ una función. Diremos que el número irracional está aproximado a una velocidad ψ si, y sólo si existe una cantidad infinita de números irracionales p/q tales que

$$\left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right| \leq \psi(q).$$

Con la definición anterior formamos la siguiente clasificación:

Definición A.2. Diremos que un número irracional α es:

- *Lento* si, y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que α no está aproximado a velocidad $\psi(q) = \varepsilon q^{-2}$,

- *Rápido* si, y sólo si existe $\gamma > 0$ tal que α está aproximado a velocidad $\psi(q) = q^{-(2+\gamma)}$,
- *Super rápido* si y sólo α está aproximado a velocidad $\psi(q) = q^{-(2+\gamma)}$ para todo $\gamma > 0$.

Observe que si un número irracional α está aproximado a velocidad ψ_0, entonces también está aproximado a velocidad ψ para cualquier $\psi \geq \psi_0$. También, podemos calcular la función $\phi_0(q) = \underset{p\in\mathbb{Z}}{min}|\alpha - p/q|$ y tenemos que α puede ser aproximado a una velocidad $\psi \leq \phi_0$ siempre y cuando se cumpla que $\psi(q) = \phi_0(q)$ para una cantidad infinita de q, pero α no puede ser aproximado a una velocidad ψ para $\psi < \phi_0$.

Definición A.3. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ una función. Diremos que el número irracional está a una distancia φ de los números racionales si, y sólo si para todos los números racionales p/q tenemos que

$$\varphi(q) < \left|\alpha - \tfrac{p}{q}\right|.$$

De la Definición A.3. y del comentarios previo a esta, tenemos que un número irracional α estará a una distancia φ de lo números racionales para cualquier $\varphi < \phi_0$.

Diremos que un número irracional es:

- *Malamente aproximado* si, y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que α está a una distancia $\phi(q) = \varepsilon q^{-2}$ de lo números racionales,
- *Diofantino de clase $D(\gamma, \varepsilon)$* si, y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que α esté a una distancia $\phi(q) = \varepsilon q^{-\gamma}$ de los números racionales.

Teorema A.1 (Louville [22])**.** *Si el número irracional α satisface la ecuación polinómica con coeficientes enteros $f(\alpha) = 0$ de grado d, entonces $\alpha \in D(d)$.*

El teorema de Louville establece que todos los números algebraicos son de clase $D(\infty)$. También, Louville aportó los primeros ejemplos de números trascendentes (números que no son solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros), esto es números que no son de clase $D(\infty)$, tal es el caso de $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$. Sin embargo, se sabe que el número π es de clase $D(42)$. Un ejemplo de un número trascendente de clase $D(+)$ es el número de Euler e.

A.2. Fracciones Continuas

Dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ su representación en fracción continua es una expresión de la forma:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}$. Esta representación se denotará por

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, ...] \, .$$

Algunos resultados conocidos sobre las fracciones continuas son los siguientes, véase [34]:

- La representación en fracción continua de un número real es finita si, y sólo si ese número es racional.
- La representación en fracción continua de un racional es única siempre que no acabe en 1.
- Los términos de una fracción continua se repetirán si, y sólo si representa a un irracional cuadrático.

De lo anterior se deduce que la expansión en fracción continua de un número irracional es infinita y única.

Definición A.4. Dado un número irracional $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ el $n-$ésimo convergente es el número racional $p_n/q_n = [a_0; a_1, ..., a_n]$.

La sucesión $\{p_n/q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, esta sucesión es la mejor aproximación a α porque para cualquier otro número racional a/b tal que $b \leq q_n$ se cumple:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Además, para $n \geq 1$ se cumple:

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} \leq \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Lo cual muestra que todos los números irracionales están aproximados a velocidad $\psi(q) = q^{-2}$, y por lo tanto, ningún número irracional está a una distancia $\phi(q) > q^{-2}$.

También podemos clasificar vía las propiedades de su expansión en fracción continua.

Definición A.5. Diremos que el número irracional $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$ es de tipo acotado, si existe $M > 0$ tal que $a_n \leq M$ para todo n.

Proposición A.1. *[31]. Para un número irracional α las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) α es de tipo acotado,

(b) α es lento,

(c) α es malamente aproximado.

Observe que los números irracionales de grado 2 son de tipo acotado (porque tienen expansión en fracción continua eventualmente periódica), pero es una pregunta abierta el saber si los números irracionales de grado mayor o igual que 3 son de tipo acotado.

Proposición A.2 (Definición alternativa de $D(\gamma)$ [32])**.** *Un número irracional θ pertenece a $D(\gamma)$ si, y sólo si $q_{n+1} < Cq_n^{k-1}$ para toda $n > 0$ y para alguna constante C*

independiente de n. En particular,

$$\theta \in D(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\tfrac{q_{n+1}}{q_n}\right\}_n \quad < C \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\}_n \text{ es acotado.}$$

Definición A.6. Un número irracional satisface la condición de Brjuno si, y sólo si

$$\mathfrak{B}(\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{log\ q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

donde q_n es el denominador del $n-$ésimo convergente de α.

Se sabe que todos los números Diofantinos satisfacen la condición de Brjuno, y que existen números (por ejemplo $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$, donde $a_n = 10^{n!}$) que no son de clase $D(\infty)$ pero satisfacen la condición de Brjuno.

Referencias

[1] L. V. Ahlfors, "Complex Analysis," McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] ——, "Lectures on quasiconformal mappings. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard. university lecture series, 38," *American Mathematical Society, Providence, RI*, vol. 1, no. 4, p. 12, 2006.

[3] I. Baker, "Completely invariant domains of entire functions," in *Mathematical Essays Dedicated to AJ Macintyre.* Ohio University Press, Athens, Ohio, 1970, pp. 33–35.

[4] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems.* Springer Science & Business Media, 2000, vol. 132.

[5] B. Branner and N. Fagella, *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics.* Cambridge University Press, 2014, vol. 141.

[6] A. D. Bruno, "Analytic form of differential equations. i, ii," *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, vol. 25, pp. 119–262, 1971.

[7] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I.* Springer Science second edition, 1978, vol. 159.

[8] R. L. Devaney *et al.*, *An introduction to chaotic dynamical systems.* Addison-Wesley Reading, 1989, vol. 13046.

[9] P. Domínguez and G. Sienra, "A study of the dynamics of λ sin z," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 12, pp. 2869–2883, 2002.

[10] A. Douady and C. J. Earle, “Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle,” *Acta Mathematica*, vol. 157, no. 1, pp. 23–48, 1986.

[11] A. Eremenko and M. Y. Lyubich, “Dynamical properties of some classes of entire functions,” in *Annales de l'institut Fourier*, vol. 42, no. 4, 1992, pp. 989–1020.

[12] A. García-Máynez and A. Tamariz, “Topología General,” *Porrúa (México, 1988)*, 1988.

[13] L. Geyer, “Siegel discs, Herman rings and the Arnold family,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 353, no. 9, pp. 3661–3683, 2001.

[14] M. Herman, “Conjugaison quasi-symétrique des difféomorphismes du cercle et applications aux disques singuliers de siegel,” *Unpublished manuscript*, 1986.

[15] M. R. Herman, “Are there critical points on the boundaries of singular domains?” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 99, no. 4, pp. 593–612, 1985.

[16] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics: Teichmüller theory.* Matrix Press, 2006.

[17] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos.* Limusa-Wiley, 1973.

[18] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge university press, 1997, vol. 54.

[19] A. Lascurain Orive, *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional.* UNAM, 2005.

[20] O. Lehto, K. I. Virtanen, and K. Lucas, *Quasiconformal mappings in the plane.* Springer New York, 1973, vol. 126.

[21] C. Lunde Petersen, “Local connectivity of some julia sets containing a circle with an irrational rotation,” *Acta Mathematica*, vol. 177, no. 2, pp. 163–224, 1996.

[22] K. Mahler, "On the approximation of π," in *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, vol. 56. Elsevier, 1953, pp. 30–42.

[23] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Basic complex analysis.* Macmillan, 1987.

[24] J. W. Milnor, *Dynamics in one complex variable.* Springer, 2006, vol. 160.

[25] V. Naishul', "Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their application to analytic differential equations in \mathbfc$\hat{2}$ and cp$\hat{2}$," *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, vol. 44, pp. 235–245, 1982.

[26] D. Patricia y Contreras, V. J. E., *Dinámica Holomorfa. Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas.* Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2014.

[27] H. Poincaré, "Sur les courbes définies par les équations différentielles," *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 1, pp. 167–244, 1885.

[28] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps.* Springer Science & Business Media, 2013, vol. 299.

[29] L. Rempe, "Siegel disks and periodic rays of entire functions," *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, vol. 2008, no. 624, pp. 81–102, 2008.

[30] B. Rodin, "Intrinsic rotations of simply connected regions," *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 2, no. 3-4, pp. 319–326, 1984.

[31] K. F. Roth, "Rational approximations to algebraic numbers," *Mathematika*, vol. 2, no. 01, pp. 1–20, 1955.

[32] J. H. Serda, "On the classificaction of irrational numbers," *arXiv preprint arXiv:1506.00144*, 2015.

[33] M. R. Spiegel, *Variable compleja.* McGraw-Hill Interamericana de España, 1994.

[34] A. Ya, “Khinchin, Continued fractions,” 1964.

[35] J.-C. Yoccoz, “Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de (c, 0),” *CR Acad. Sci. Paris*, vol. 306, pp. 55–58, 1988.

[36] ——, “Petits diviseurs en dimension 1,” *Astérisque*, 1995.

[37] G. Zhang, “On the dynamics of $e^{2\pi i\theta}$ sen(z),” *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 49, no. 4, pp. 1171–1179, 2005.