Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

UNA TEORÍA DE CONVERGENCIA Y PUNTOS CLAUSURA BASADA EN κ-REDES [1]

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JAVIER CASAS DE LA ROSA

DIRECTORES DE TESIS
ALEJANDRO RAMÍREZ PÁRAMO
IVÁN MARTÍNEZ RUÍZ

PUEBLA, PUE. 21 de agosto de 2012

[1]Tesis apoyada por el proyecto VIEP "Programación Lógica Posibilista y Teoría de la Argumentación"

Dedicada a la maestra Marta Zamudio Ramírez

Introducción

La topología (es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matematicas) a diferencia del álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, aparece en el siglo XVII, con el nombre de *analysis situs*, esto es, análisis de la posición. De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*.

En 1679, G. Leibniz (1646-1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el cual (en términos modernos) intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Insiste en que, aparte de la representación coordenada de figuras, *"se necesita de otro análisis, puramente geométrico o lineal, que también defina la posición, como el álgebra define la magnitud"*.

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en topología, con la excepción de L. Euler (1707-1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas. En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Königsberg*, titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*. El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

Un camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de convergencia. Este proceso se inicia en realidad en 1817 cuando B. Bolzano (1781-1848) asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de numeros reales, en vez de pensar exclusivamente en convergencia de sucesiones de números.

G. Cantor (1845-1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto *derivado* (o familia de puntos límite) de un conjunto. Define los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado e introduce la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos.

Define también el concepto de *entorno de un punto*. Además, Cantor obtiene importantes teoremas e introduce las nociones de punto aislado, frontera de un conjunto y lo que es un conjunto denso. De esta manera, Cantor funda la Teoría de Conjuntos y establece parte de las proposiciones y conceptos básicos de la topología. Desde la aparición de los trabajos de Cantor hasta finales del siglo XX, la teoría de conjuntos y la topología constituyeron una misma disciplina.

Durante los años 1920-1930, se demostraron varios de los teoremas fundamentales de lo que ahora se conoce como Topología General (o Topología de Conjuntos). Por ejemplo, el célebre teorema de Tychonoff: el producto de espacios compactos es compacto. Este teorema es tanto conjuntista como topológico e ilustra cómo, incluso hasta fines de los años 20, la Topología y la Teoría de Conjuntos permanecían estrechamente relacionadas.

En 1906, M. Fréchet (1878-1973) llama a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado contiene un punto de acumulación. Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Prueba además, que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden naturalmente a espacios métricos.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma de 1909, F. Riesz (1880-1956) propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. Unos cuantos años más tarde, en 1914, F. Hausdorff (1868-1942) define los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y Hausdorff realmente da lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Para hablar de convergencia en general sobre espacios topológicos, necesitamos extender el concepto de sucesión a los conceptos de redes y filtros.

Las redes y filtros son las dos principales aproximaciones a una teoría general de convergencia y puntos clausura en topología, donde cada concepto, tiene su propio mérito.

La alianza entre Topología y Teoría de Conjuntos ha desarrollado la teoría de compactaciones y de los espacios de ultrafiltros. El concepto de ultrafiltro aparece definido por F. Riesz en 1908, en un artículo en el que se hacen notar las posibilidades de los ultrafiltros para definir con ellos puntos de acumulación y llevar a cabo procesos de completación. Pero fue Henri Cartan quien hasta 1937 presentó la introducción explícita de los conceptos de filtros y ultrafiltros, definiendo convergencia y puntos de acumulación. A partir de ese momento se obtuvieron caracterizaciones de conceptos expresables en términos de convergencia tales como la compacidad. Uno de los personajes más importantes en el desarrollo de resultados relacionados con tal concepto fue Bourbaki en 1940.

Por otro lado, el concepto de red, fue introducido por E. H. Moore y H. L. Smith en 1922. Dicho concepto, es en cierta forma, una generalización de la noción de sucesión, y el objetivo de tal generalización fue para el uso en espacios topológicos. Aún no es claro si Moore y Smith sabían de cómo las redes podrían ser usadas para definir la compacidad. Esta conexión es usualmente acreditada a Birkhoff; además, la convergencia en general sobre espacios topológicos fue descrita en términos de redes por este último personaje en 1937, aunque fue un tanto limitada y en cierto modo complicada. Más adelante, la noción de red fina fue definida en el libro de Moore en 1939 (vea [8]), y la descripción apropiada de convergencia en general sobre espacios topológicos en terminos de redes fue dada por Kelley en 1950.

La equivalencia de ambas teorías fue mostrada por Bartle en 1955, así como por Bruns y Schmidt en el mismo año.

En esta tesis, introducimos una clase especial de redes llamadas *κ-redes*, basándonos en el artículo *"A theory of convergence and cluster points based on κ-nets"* publicado por el matemático R. E. Hodel en 2010 (ver [3]), con el objetivo de darle seguimiento y desarrollo a este nuevo concepto, para poder obtener nuevas pruebas de resultados importantes en matemáticas que sean tal vez, de una manera más sencilla, al mismo tiempo, extender los resultados relacionados a esta teoría.

Una κ-red es un tipo especial de red y por lo tanto, tiene los recursos intuitivos de redes, pero su naturaleza especial toma ventaja de muchas de las más utilizadas propiedades de filtros. El trabajo consta de cuatro capítulos. El primero está conformado de tres secciones, en las cuales se enuncian varios resultados relacionados a los temas de topología, teoría de conjuntos (en particular sobre cardinales y ordinales) y algunas definiciones sobre funciones cardinales; además de algunas convenciones y notaciones. En el segundo capítulo, se tratan algunos resultados que consideramos más relevantes sobre los conceptos de redes y filtros; además, se muestran algunas aplicaciones de estos conceptos en la topología y, al final del capítulo, se muestra un pequeño panorama sobre la relación tan natural que existe entre ellos. El tercer capítulo, en el cual consideramos que da comienzo la parte principal de la tesis, consta de tres secciones. En la primera, se da una introducción al concepto de κ-red. Enseguida, se muestra la definición de ρ-convergencia y puntos ρ-clausura; además, mostramos los resultados que son base para el desarrollo del restante capítulo y también del cuarto . En la segunda sección, se habla de la relación que existe entre el concepto de κ-red con los conceptos de sucesiones, κ-sucesiones y redes donde su conjunto dirigido tiene cardinalidad a lo más κ. En la tercera sección, se introducen los conceptos de espacios κ-Fréchet y espacios κ-red, los cuales, en cierto modo, extienden los conceptos de espacios Fréchet y espacios secuenciales a cardinales más grandes; además, al final de esta sección, se mencionan unos cuantos resultados sobre espacios κ-transitivos, radiales y pseudoradiales. Finalmente, en el cuarto capítulo, que consta de cuatro secciones, se muestran resultados que en cierta forma generalizan a muchos que ya son bien conocidos. De manera más especifica, la primera sección sirve para introducir la definición de ρ-compacidad, pero no sin antes mencionar varios resultados acerca de esta propiedad y de los cuales muchos de ellos ya han sido tratados desde hace tiempo. En la segunda sección, se menciona el concepto de espacio Lindelöf en términos de (κ, ω)-redes y además, se da una unificación aproximada de los teoremas para el producto de espacios topológicos. En la tercera sección, se enuncian algunas propiedades relacionadas a la ρ-compacidad, principalmente, se tratan ideas relacionadas a la κ-compacidad inicial. Finalmente, en la cuarta sección, presentamos algunas aplicaciones de κ-redes a las funciones cardinales, de manera más precisa, enunciamos dos teoremas muy importantes en funciones cardinales (ambos debidos a Gryzlov), en términos de κ-redes y demostrando tales teoremas haciendo uso de resultados que se han tratado a lo largo de la tesis.

Javier Casas de la Rosa
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Puebla, Puebla, México
Agosto de 2012

Índice general

Una Teoría de Convergencia y Puntos Clausura basada en κ-Redes

Javier Casas de la Rosa

fecha

Capítulo 1

Preliminares

Los requisitos para la lectura de este trabajo son conocimientos sobre algunos hechos básicos de Teoría de Conjuntos y Topología General. La finalidad del presente capítulo es dar al lector esos conceptos y resultados básicos que se requerirán a lo largo de la tesis. Gracias a la existencia de excelentes obras en las que se exponen de manera profunda y detallada los temas antes mencionados, el material que presentamos en este capítulo se dará de forma superficial y la mayoría de los resultados en este capítulo se presentan sin demostración. No obstante, siempre señalamos una referencia al resultado en consideración, para que de esta manera el lector pueda estudiar alguna demostración.

La primera sección presenta un breve estudio sobre Teoría de Conjuntos, de manera específica, se habla sobre cardinales, ordinales y algunos resultados sobre ellos que se usarán más adelante. En la segunda sección se darán los aspectos necesarios sobre Topología General para la buena comprensión de la tesis, por ejemplo, se ofrecen definiciones y resultados de Topología para tratar ejemplos particulares presentados en el último capítulo. En la tercera sección, se dan algunas definiciones de funciones cardinales que en su mayoría, se utilizan al final del último capítulo en este trabajo; también se enuncian unos resultados de principios combinatorios sobre ultrafiltros.

1.1. Cardinales y Ordinales

En el presente trabajo adoptamos la notación usual de teoría de conjuntos.

Definición 1.1. *Un conjunto α es un número ordinal (o simplemente un*

ordinal) si:
(i) α es transitivo (i.e. todo elemento de α es subconjunto de α),
(ii) α es bien ordenado por la relación de pertenencia restringida a α, que se define por $\in_\alpha = \{(a, b) : a \in \alpha, b \in \alpha \text{ y } a \in b\}$.

Cada ordinal es el conjunto de los ordinales menores que él; de donde si β y α son ordinales, entonces $\beta < \alpha$ y $\beta \in \alpha$ son equivalentes. Un ordinal α es un *ordinal sucesor* si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. En otro caso se dice que α es un *ordinal límite*. Note que si α es un ordinal límite, entonces para todo $\beta \in \alpha$, $\beta + 1 \in \alpha$.

Sea $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión de ordinales de longitud θ. Decimos que la sucesión es *creciente* si $\gamma_\rho < \gamma_\beta$, siempre que $\rho < \beta < \theta$. *La cofinalidad de un ordinal límite*, α, denotada con el símbolo $cf(\alpha)$, es el menor ordinal θ para el cual existe una sucesión de longitud θ que es creciente y cuyo límite es α.

Definición 1.2. *Un ordinal α se llama ordinal inicial si α no es equipotente a cualquier $\beta \in \alpha$ (i.e., no existe una función inyectiva con dominio α y rango β).*

El axioma de Elección implica que todo conjunto es equipotente a un ordinal inicial.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto, el cardinal de X se define como el único ordinal inicial equipotente a X.*

Así, un número cardinal es un ordinal inicial.

El símbolo ω denota el menor ordinal infinito, así como el primer cardinal infinito; ω_1 es el mínimo ordinal y el más pequeño de los cardinales infinitos no numerables. Si κ es un cardinal, entonces κ^+ denota al menor cardinal mayor que κ. Se dice que un cardinal κ es un *cardinal sucesor* si $\kappa = \lambda^+$, para algún cardinal λ. Si un cardinal no es un cardinal sucesor entonces se dice que es un *cardinal límite*; es claro que un cardinal κ es un cardinal límite si para todo cardinal $\lambda < \kappa$, se tiene que $\lambda^+ < \kappa$. Un cardinal κ para el cual sucede que $\lambda < \kappa$ implica $2^\lambda < \kappa$, es llamado *cardinal límite fuerte*. Por ejemplo, ω es un cardinal límite fuerte.

Definición 1.4. *Sea λ un ordinal límite. Un conjunto $A \subseteq \lambda$ se dice acotado en λ, si existe $\gamma \in \lambda$ tal que $A \subseteq \gamma$. En otro caso se dice que A, es no acotado en λ.*

Así, A es no acotado en λ, si para todo $\beta \in \lambda$, existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha > \beta$.

Definición 1.5. *Sean θ un ordinal límite y $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión creciente de ordinales en λ. Decimos que la sucesión $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$, es cofinal en λ, si el conjunto $\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\}$, es no acotado en λ.*

Lema 1.6. *$\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ es cofinal en λ si y sólo si $\bigcup_{\rho \in \theta} \gamma_\rho = \lambda$.*

Así, la cofinalidad de λ, denotada $cf(\lambda)$, es el menor ordinal límite θ tal que existe una $\theta-$sucesión creciente la cual es cofinal en λ.

Lema 1.7. *Se cumple lo siguiente:*

(i) $cf(\lambda)$ es un número cardinal.

(ii) Si $cf(\lambda) = \theta$, existe una $\theta-$sucesión creciente y cofinal en λ.

Definición 1.8. *Un cardinal infinito κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$; en otro caso, se dice que κ es un cardinal singular.*

Así, κ es singular si $cf(\kappa) < \kappa$. Otra forma: Un cardinal infinito κ es llamado singular si existe una sucesión creciente $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ de ordinales $\gamma_\rho < \kappa$ cuya longitud $\theta < \kappa$ y $\sup\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\} = \kappa$.

Teorema 1.9. *Todo cardinal sucesor e infinito es un cardinal regular.*

Sea E un conjunto. Denotaremos por $\mathcal{P}(E)$ al conjunto potencia de E, $[E]^{\leq\kappa}$ es la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $\leq \kappa$, $[E]^{<\kappa}$ es la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $< \kappa$, y $[E]^{\kappa}$ denota la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad κ.

El siguiente teorema será de gran utilidad en lo sucesivo.

Teorema 1.10. *Si κ un cardinal infinito, entonces:*
(i) $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$,
(ii) si λ es un cardinal tal que $\lambda \leq \kappa$, entonces $\left|[\kappa]^{<\lambda}\right| \leq \kappa^\lambda$ y $\left|[\kappa]^{\lambda}\right| = \kappa^\lambda$.

Denotamos por $\mathcal{R}$ a la clase de los números ordinales. Si $\mathbb{P}$ es una propiedad, denotamos por $\mathbb{P}(\alpha)$ la proposición: *"α satisface la propiedad $\mathbb{P}$"*.

Teorema 1.11 (Principio de inducción transfinita)**.** *Sea $\mathbb{P}$ una propiedad y supongamos que para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, si para todo $\beta < \alpha$ se tienen que $\mathbb{P}(\beta)$ es verdadera entonces $\mathbb{P}(\alpha)$ es verdadera.*
Entonces $\mathbb{P}(\alpha)$ es verdadera para todos los $\alpha \in \mathcal{R}$.

Este último teorema se puede enunciar de forma más parecida al de inducción de los números naturales como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.12. *Sea $\mathbb{P}$ una propiedad tal que*

i) $\mathbb{P}(0)$ *es verdadera;*

ii) *si para todo $\alpha \in \mathcal{R}$ se tiene que $\mathbb{P}(\alpha)$ es verdadera entonces $\mathbb{P}(\alpha+1)$ es verdadera;*

iii) *Para todo $\alpha \in \mathcal{R}\setminus\{0\}$ con α límite, se tiene que: si para todo $\beta < \alpha$ es verdadera $\mathbb{P}(\beta)$ entonces $\mathbb{P}(\alpha)$ es verdadera.*

Entonces para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, $\mathbb{P}(\alpha)$ es verdadera.

Para una prueba de los resultados presentados hasta el momento, así como un estudio más detallado del tema, recomendamos al lector las obras [2] y [5].

1.2. Espacios Topológicos

Usaremos las siguientes notaciones y convenciones topológicas (mismas que se usan en [1]): X siempre denota un espacio topológico no vacío.

Definición 1.13. *Si X es un espacio topológico y $p \in X$, diremos que U es una vecindad de p si U es un conjunto abierto en X y $p \in U$. Denotaremos al conjunto de vecindades de un punto $x \in X$ por $\mathcal{V}_x$.*

Definición 1.14. *Sean X un espacio topológico, $p \in X$ y $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos en X.*

1. *Diremos que $\mathcal{B}$ es* base para X *si para todo $x \in X$ y cualquier vecindad U de x, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$.*

2. *Una familia $\mathcal{B}_p$ de subconjuntos abiertos en X es una* base local *de p si $p \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}_p$ y para toda vecindad U de p existe $B \in \mathcal{B}_p$ tal que $B \subseteq U$.*

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, denotaremos por $Int(A)$ al interior de A y usaremos indistintamente $\overline{A}$ y $cl_X(A)$ para denotar la *clausura* (también llamada *cerradura*) de A. En caso de trabajar con varios espacios a la vez, usamos sólo la notación $cl_Y(A)$, para denotar la clausura de A respecto del espacio Y; de manera similar se usa esa notación para el interior de un conjunto.

Definición 1.15. *Sean X un espacio y $D \subseteq X$. Diremos que D es un subconjunto denso de X si $\overline{D} = X$,*

Definición 1.16. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $p \in X$. Diremos que p es un punto de acumulación (o punto límite) de A, si para toda vecindad U de p, se tiene que $(U \backslash \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. Denotamos por A^d al conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A; en ocasiones, cuando no haya confusión, también denotamos a A^d por $A^{'}$.*

Teorema 1.17. *Sea X un espacio y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = A \cup A^d$.*

Corolario 1.18. *Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límites.*

Definición 1.19. *Un subconjunto D de X se dice que es discreto si para todo $p \in D$, existe $U \in \mathcal{V}_p$ tal que $U \cap D = \{p\}$.*

Definición 1.20. *Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X, diremos que*

1. *$\mathcal{U}$ es una cubierta de X o que $\mathcal{U}$ cubre a X, si $X = \bigcup \mathcal{U}$.*

2. *Si en particular X es un espacio topológico y todos los elementos de la cubierta $\mathcal{U}$ son conjuntos abiertos en X, diremos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta.*

3. *Una subcolección $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que cubra a X se llama subcubierta de $\mathcal{U}$.*

Definición 1.21. *Un abierto R en X se llama* regular, *si $R = Int(\overline{R})$. Si A es un subconjunto cualquiera en X, entonces $Int(\overline{A})$ es un abierto regular. Denotaremos por $RO(X)$ a la colección de abiertos regulares en X. Un subconjunto A de X es un cerrado regular, si $X \setminus A \in RO(X)$; denotaremos por $RC(X)$ a la colección de cerrados regulares en X.*

Definición 1.22. *Diremos que un espacio X es semiregular, si admite una base que consiste de conjuntos abiertos regulares.*

Axiomas de Separación

Entre otros conceptos topológicos están, *los axiomas de separación*, los cuales permiten analizar la propiedad de *"cercanía"* entre puntos y conjuntos.

Definición 1.23. *Un espacio topológico X es:*

1. *T_0, si dados dos puntos distintos x, $y \in X$ existe un conjunto abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.*

2. *T_1, si dados dos puntos distintos x, $y \in X$ existen dos abiertos U y V, tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$.*

3. *T_2 o Hausdorff, si dados dos puntos distintos x, $y \in X$ existen vecindades U_x y U_y de x y y, respectivamente, tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

4. *T_3 o Regular, si X es T_1 y para todo subconjunto cerrado F y un punto $x \in X \backslash F$, existen conjuntos abiertos ajenos U_1* y *U_2, tales que $F \subseteq U_1$ y $x \in U_2$.*

5. *T_4 o Normal, si X es T_1, y si para cualesquiera conjuntos cerrados F_1 y F_2, con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen conjuntos abiertos ajenos U_1* y *U_2, tales que $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$.*

Algunas equivalencias a los axiomas de separación son las siguientes.

Teorema 1.24. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *X es T_0 si y sólo si las cerraduras de puntos distintos, son distintas.*

2. *X es T_1 si y sólo si todo subconjunto de X formado por un sólo elemento es cerrado si y sólo si todo punto en el espacio es la intersección de todas sus vecindades.*

3. *X es T_2 o Hausdorff si y sólo si todo punto en el espacio es la intersección de las cerraduras de todas sus vecindades.*

4. *X es T_3 o Regular si y sólo si dado cualquier abierto U en X y $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

5. *X es T_4 o Normal si y sólo si para cualquier conjunto cerrado F y cualquier abierto U que lo contenga, existe un conjunto abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Observación 1.25. *Notar que* $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$*. Además, el recíproco de cada una de estas implicaciones es falsa.*

Definición 1.26. *Un espacio* X *es de Urysohn si para todo par de puntos distintos* $x_1, x_2 \in X$ *existen* $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ *y* $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$ *tales que* $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$*.*

Definición 1.27. *Diremos que un espacio topológico* X *es compacto si es* T_2 *y toda cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta finita.*

Lema 1.28.

1. *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*
2. *Un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

Definición 1.29. *Un espacio topológico* X *es:*

1. *Numerablemente Compacto, si dada cualquier cubierta abierta numerable de* X*, es posible extraer una subcubierta finita.*
2. *Lindelöf, si para toda cubierta abierta de* X *existe una subcubierta numerable.*

Definición 1.30. *Una familia* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* X *satisface la propiedad de la intersección finita (PIF) si toda subcolección finita de* $\mathcal{F}$ *tiene intersección no vacía.*

Teorema 1.31. *Un espacio* X *es compacto si y sólo si para toda colección* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos cerrados de* X *que satisface la* PIF *ocurre que* $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$*.*

Definición 1.32. *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$ *no vacío. Diremos que* $p \in X$ *es punto de acumulación completo de* A *si para toda* $U \in \mathcal{V}_p$*, se cumple que* $|U \cap A| = |A|$*.*

Teorema 1.33. X *es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de* X *tiene un punto de acumulación completo.*

Definición 1.34. *Sea* X *un espacio topológico. Diremos que:*

1. X *es primero numerable, si cada* $x \in X$ *tiene una base local a lo más numerable.*

2. *X es segundo numerable, si la topología de X admite una base numerable.*

Definición 1.35. *Un espacio topológico X es de Tychonoff si para cualesquiera $F \subseteq X$ subconjunto cerrado y $x \in X \backslash F$, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$.*

Observación 1.36. *Si X es discreto, entonces X es Tychonoff.*

Definición 1.37. *Un espacio X es extremadamente disconexo si X es Hausdorff y para cada abierto U de X, $\overline{U}$ es abierto en X.*

Teorema 1.38. *Un espacio Hausdorff X es extremadamente disconexo si y sólo si todo par de abiertos disjuntos U y V de X se tiene que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Observación 1.39. *La propiedad de ser extremadamente disconexo se hereda a subconjuntos abiertos y subconjuntos densos.*

Definición 1.40. *Un espacio topológico es localmente compacto en un punto $x \in X$ si existe $C \subseteq X$ compacto tal que $x \in C$ y contiene una vecindad de x. Diremos que X es localmente compacto si lo es en todos sus puntos.*

Observación 1.41. *Notamos lo siguiente:*

1. *Todo espacio compacto es localmente compacto.*

2. *Todo espacio discreto es localmente compacto.*

Teorema 1.42. *Todo espacio localmente compacto y Hausdorff es de Tychonoff.*

Teorema 1.43. *Un espacio topológico T_2 es localmente compacto si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto.*

Teorema 1.44. *Sea X un espacio topológico T_2. Entonces X es localmente compacto si y sólo si existe un espacio Y que cumple las siguientes condiciones:*

1. *X es subespacio abierto de Y;*

2. *$|Y \backslash X| = 1$;*

3. *Y es Hausdorff compacto.*

Además, si Z es otro espacio que satisface (1)-(3), entonces existe $f : Y \to Z$ homeomorfismo tal que f restringida al espacio X resulta ser la función identidad sobre el espacio X.

Definición 1.45. *Al espacio Y del Teorema 1.44 se le denomina la compactación por un punto del espacio X.*

Definición 1.46. *Sea X un espacio topológico. Una pareja (h, k) es una compactación de X si k es un espacio compacto y $h : X \to k$ es un encaje y $h[X]$ es denso en k. Además, diremos que (h, k) es una compactación de Hausdorff de X si k es Hausdorff.*

Otra forma de escribir a la compactación (h, k) o (c, k) es cX donde $k = cX$.

Definición 1.47. *Sean (h_1, k_1) y (h_2, k_2) dos compactaciones de un espacio X. Escribiremos $(h_1, k_1) \preceq (h_2, k_2)$ si existe una función continua $p : k_2 \to k_1$ tal que $h_1 = p \circ h_2$. Diremos que (h_1, k_1) y (h_2, k_2) son equivalentes si p es homeomorfismo.*

Observación 1.48. *Se tiene lo siguiente:*

1. *Todo espacio compacto X es una compactación de sí mismo.*
2. *Para todo espacio localmente compacto X, la compactación por un punto Y es una compactación de X.*

Teorema 1.49. *Un espacio X tiene una compactación de Hausdorff si y sólo si X es Tychonoff.*

Teorema 1.50. *Sea X un espacio Tychonoff. Entonces existe una compactación Y de X con la propiedad de que toda función $f : X \to \mathbb{R}$ continua y acotada se extiende de forma única a una función continua $F : Y \to \mathbb{R}$.*

Teorema 1.51. *Sea X un espacio Tychonoff y Y la compactación de X que cumple la propiedad del teorema anterior. Si C es un espacio Hausdorff compacto y $f : X \to C$ es continua, entonces existe $F : Y \to C$ continua tal que su restricción al espacio X coincide con la función f.*

La compactación Y anterior es única salvo equivalencias. Además, si Z es otra compactación del espacio X, entonces, en cierto modo, Y resulta ser mayor que Z, es decir, que de alguna manera Y es la mayor compactación Hausdorff del espacio X. Nos referimos a esta compactación como la compactación de Stone-Čech del espacio X y generalmente se denota a tal compactación como βX. Un ejemplo bastante conocido y útil es $\beta\omega$ que representa la compactación de Stone-Čech de ω con la topología discreta (para más detalles acerca de esta compactación vea [1]).

Teorema 1.52. *La compactación de Stone-Čech βX de un espacio Tychonoff X es extremadamente disconexo si y sólo si el espacio X es extremadamente disconexo.*

Corolario 1.53. *El espacio $\beta\omega$ es extremadamente disconexo.*

Definición 1.54. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que:*

- *X es Fréchet si dado cualquier $q \in \overline{A}$, existe una sucesión $\langle x_n \rangle$ en A que converge a q.*

- *A es secuencialmente cerrado si tiene la propiedad de que para cualquier $\langle x_n \rangle$ sucesión en A que converge a q, entonces $q \in A$.*

- *X es secuencial si todo subconjunto secuencialmente cerrado de X es un conjunto cerrado.*

Observación 1.55. *Todo espacio primero numerable es un espacio Fréchet y todo espacio Fréchet es un espacio secuencial.*

1.3. Algunas funciones cardinales

Veamos algunas funciones cardinales cuyas definiciones se basan en propiedades topológicas locales.

Definición 1.56. *El carácter de un espacio topológico X, denotado $\chi(X)$, es el número cardinal $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \omega$; donde $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es base local de $x\}$.*

Claramente un espacio topológico X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \omega$.

Definición 1.57. *Sean X un espacio topológico T_1, $\mathcal{V}$ una colección de abiertos en X y $p \in X$. Diremos que $\mathcal{V}$ es una pseudobase local de p si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_p$ y $\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$.*

Observación 1.58. *Observe que un espacio topológico X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$ la colección de todas las vecindades de x es una pseudobase de x.*

Definición 1.59. *El pseudocarácter de un espacio T_1, X, denotado por $\psi(X)$, es el número cardinal $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\} + \omega$; donde $\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es pseudobase local de $x\}$.*

Definición 1.60. *Sean X un espacio topológico T_2, $\mathcal{V}$ una colección de abiertos en X y $p \in X$. Diremos que $\mathcal{V}$ es una pseudobase cerrada local de p si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_p$ y $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$. Si $\mathcal{V}$ es pseudobase cerrada local de p, diremos simplemente que $\mathcal{V}$ es pseudobase cerrada.*

Observación 1.61. *Observe que un espacio topológico X es T_2 si y sólo si para todo $x \in X$, la colección de todas las vecindades de x es una pseudobase cerrada de x.*

Definición 1.62. *Sea X un espacio topológico T_2. Definimos el pseudocarácter cerrado de X, denotado por $\psi_c(X)$, como el número cardinal*

$$\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(x, X) : x \in X\} + \omega$$

donde

$$\psi_c(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es pseudobase cerrada de } x\}.$$

Definición 1.63. *Sea X un espacio topológico.*

1. *La estrechez de un punto $x \in X$, denotada por $t(x, X)$, es el menor cardinal κ con la propiedad de que para todo Y subconjunto de X con $x \in \overline{Y}$, existe $A \in [Y]^{\leq\kappa}$ tal que $x \in \overline{A}$.*

2. *La estrechez de X, denotada por $t(X)$, es el número cardinal*

$$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Teorema 1.64. *Sea X un espacio topológico. Entonces, $t(X)$ es igual al menor cardinal γ con la propiedad de que para cualquier C subconjunto, no cerrado, de X existe $B \subseteq C$ tal que $|B| \leq \gamma$ y $cl_X(B) - C \neq \emptyset$.*

Para terminar con esta sección, veamos un resultado sobre ultrafiltros.

Definición 1.65. *Se dice que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es independiente si, para cualquier colección finita $A_1, ..., A_n, B_1, ...B_m$ de elementos de $\mathcal{F}$, se tiene que: $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} (E - B_j)\right) \neq \emptyset$.*

Observe que si $\mathcal{F}$ es una colección independiente en E, entonces $\mathcal{F}$ satisface la propiedad de la intersección finita.

Teorema 1.66 (Hausdorff)**.** *Sean κ un cardinal infinito y E un conjunto con $|E| = \kappa$. Entonces existe una colección independiente $\mathcal{F}$ de subconjuntos de E tal que $|\mathcal{F}| = 2^{\kappa}$.*

Las colecciones independientes se usan para probar la existencia de $2^{2^{\kappa}}$ ultrafiltros sobre $\kappa \geq \omega$ (vea las Definiciones 2.35 y 2.50).

Proposición 1.67. *Si $\kappa \geq \omega$, entonces existen $2^{2^{\kappa}}$ ultrafiltros sobre κ .*

Demostración. En efecto, suponga que $\{A_\alpha : \alpha < 2^{\kappa}\}$ es una colección independiente en κ. Considere, para cada $f \in 2^{2^{\kappa}}$, el conjunto

$$A_f = \{A(f, \alpha) : \alpha < 2^{\kappa}\}$$

donde $A(f, \alpha) = A_\alpha$ si $f(\alpha) = 0$ y $A(f, \alpha) = \kappa - A_\alpha$ si $f(\alpha) = 1$. Entonces A_f satisface la propiedad de la intersección finita y, por tanto, está contenido en un ultrafiltro, digamos P_f. Claramente $f \neq g$ implica $P_f \neq P_g$. $\square$

Capítulo 2

Redes y Filtros

Las redes y filtros son dos enfoques principales para una teoría general de puntos de convergencia y clausura en Topología. Cada teoría tiene sus propios defensores. El término de red es más intuitivo debido a su estrecha relación con las sucesiones y, generalmente, es más preferido por los analistas. Los filtros, por otro lado, son tal vez más elegantes y flexibles y suelen ser la opción preferida de topólogos.
En este capítulo, se verán algunos resultados de cada concepto y algunas aplicaciones en Topología; además, al final se presentan algunos resultados con la finalidad de mostrar que dichos conceptos son, en cierta forma, equivalentes.

2.1. Redes

Definición 2.1. *Un sistema dirigido es una pareja* $(D, \succeq)$ *donde* D *es un conjunto no vacío y* $\succeq$ *es una relación que satisface*

i) Para toda $d \in D$, $d \succeq d$.

ii) Si $d \succeq d'$ *y* $d' \succeq d''$ *entonces* $d \succeq d''$.

iii) Si $d, d' \in D$, *existe* d'' *tal que* $d'' \succeq d$ *y* $d'' \succeq d'$.

La relación $\succeq$ *se llama dirección del conjunto* D.

Comúnmente suele llamárseles a los sistemas dirigidos como conjuntos dirigidos o sistemas directos.

Ejemplo 2.2. *Consideremos el conjunto* $\mathbb{N}$ *de enteros positivos y reemplacemos* $\succeq$ *por* $\geq$. *Entonces* $(\mathbb{N}, \geq)$ *es un sistema dirigido.*

Ejemplo 2.3. *Si X es un conjunto no vacío, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un sistema dirigido.*

Ejemplo 2.4. *Si X es un espacio topológico y $x \in X$ entonces $(\mathcal{V}_x, \subset)$ es un sistema dirigido.*

Definición 2.5. *Si $(D, \succeq)$ es un sistema dirigido y $d_\circ \in D$ definimos:*

1. $R_{d_\circ} = \{d \in D : d \succeq d_\circ\}$.
2. *Si $E \subset D$, se dice que E es residual si existe $d_\circ \in D$ tal que $R_{d_\circ} \subset E$.*
3. *Si $E \subset D$, se dice que E es cofinal si para todo $d \in D$, existe $e \in E$ tal que $e \succeq d$.*

El conjunto $R_{d_\circ}$ se conoce por cola de conjunto dirigido.

Ejemplo 2.6. *En un sistema dirigido todo residual es cofinal.*

Demostración. Sea $(D, \succeq)$ un sistema dirigido. Si E es residual en D, entonces existe un $d_\circ \in D$ tal que $R_{d_\circ} \subset E$, es decir, existe $d_\circ \in D$ tal que para todo $d \succeq d_\circ$, $d \in E$. Sea $d \in D$ cualquiera, entonces existe $d_1 \in D$ tal que $d_1 \succeq d_\circ$ y $d_1 \succeq d$, de lo cual se sigue que $d_1 \in E$, por lo tanto E es cofinal. $\square$

Ejemplo 2.7. *Sea $E = \{n \in \mathbb{N}$: es par$\}$ y $D = \mathbb{N}$. Note que $\forall\ n_\circ \in D$, $\exists\ n \in E$ de tal manera que $n \succeq n_\circ$, esto es, E es cofinal. Sin embargo, no existe $n_\circ \in D$ tal que $R_{n_\circ} \subset E$. Así, E es cofinal pero no residual.*

Definición 2.8. *Si $(E, \gg)$ y $(D, \succeq)$ son sistemas dirigidos, una función $\lambda : E \to D$ es cofinal si, dado $d \in D$, existe $e_\circ \in E$ tal que $e \gg e_\circ$ implica $\lambda(e) \succeq d$.*

Proposición 2.9. *Si $\lambda : E \to D$ es cofinal entonces $\lambda(E)$ es cofinal en D.*

Observación 2.10. *Si $E \subset D$ y $\gg = \succeq|_E$ entonces $i : (E, \gg) \hookrightarrow (D, \succeq)$ es cofinal si y sólo si E es cofinal en D.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Es consecuencia de la proposición anterior.

[$\Leftarrow$] Dado $d \in D$, por hipótesis, existe $e_\circ \in E$ tal que $e_\circ \succeq d$; luego, para todo $e \gg e_\circ$ con $e \in E$ tenemos que $e \succeq d$ pues $\gg = \succeq|_E$. Por otro lado, $i(e) = e$ y de lo anterior, la prueba está completa. $\square$

Proposición 2.11. *Si* $\lambda : (E, \gg) \to (D, \succeq)$ *es una función entre conjuntos dirigidos, son equivalentes:*

a) λ *es cofinal.*

b) Dado R *residual en* $(D, \succeq)$ *existe* Q *residual en* $(E, \gg)$ *tal que* $\lambda(Q) \subseteq R$.

c) Si R *es residual en* $(D, \succeq)$ *entonces* $\lambda^{-1}(R)$ *en residual en* $(E, \gg)$.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Sea R residual en $(D, \succeq)$, entonces existe $d_\circ \in D$ tal que $R_{d_\circ} \subset R$. Puesto que λ es cofinal, existe $e_\circ \in E$, tal que $e \gg e_\circ$ implica $\lambda(e) \succeq d_\circ$. Así, si $Q = R_{e_\circ}$ se tiene que $\lambda(Q) \subset R_{d_\circ}$.

[$b) \Rightarrow c)$] Sea R residual en $(D, \succeq)$, entonces existe Q residual en $(E, \gg)$ con $\lambda(Q) \subset R$, entonces $Q \subset \lambda^{-1}(R)$. Por tanto $\lambda^{-1}(R)$ es residual en $(E, \gg)$.

[$c) \Rightarrow a)$] Sea $d \in D$, por (c) sabemos que $\lambda^{-1}(R_d)$ es residual en $(E, \gg)$, lo cual implica que existe $e_\circ \in E$ tal que $R_{e_\circ} \subset \lambda^{-1}(R_d)$. De lo anterior se sigue que para todo $e \gg e_\circ$, $e \in R_{e_\circ}$ luego $\lambda(e) \in R_d$, lo que implica $\lambda(e) \succeq d$. □

Corolario 2.12. *Sean* $(E, \gg)$, $(D, \succeq)$ *y* $(C, \geq)$ *sistemas dirigidos. Si* $\lambda : E \to D$ *y* $\sigma : D \to C$ *son funciones cofinales, entonces* $\sigma \circ \lambda : E \to C$ *es cofinal.*

Demostración. Sea $c \in C$ un elemento arbitrario; puesto que σ es cofinal, existe $d_\circ \in D$ tal que para todo $d \succeq d_\circ$ se cumple $\sigma(d) \geq c$. Ahora bien, para tal $d_\circ$ existe un $e_\circ \in E$ tal que si $e \gg e_\circ$ entonces $\lambda(e) \succeq d_\circ$ pues λ es cofinal, de donde, $\sigma \circ \lambda$ es cofinal. □

Proposición 2.13. *Si* $(D, \succeq)$ *es un conjunto dirigido y* $E \subset D$ *es no vacío entonces son equivalentes:*

a) $(E, \succeq|_E)$ *es dirigido e* $i : E \hookrightarrow D$ *es cofinal.*

b) E *es cofinal en* D.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Se sigue de la definición 2.8.

[$b) \Rightarrow a)$] Primero notamos que de la Observación 2.10, se sigue que i es cofinal. Veamos lo que resta. Claramente, "$\succeq|_E$" es reflexiva y transitiva por serlo "$\succeq$ ". Ahora, si $e, e' \in E$, entonces existe $d \in D$ tal que $d \succeq e$ y $d \succeq e'$. Por ser E cofinal existe $e'' \in E$ tal que $e'' \succeq d$, de lo cual se sigue que $e'' \succeq e$ y $e'' \succeq e'$. Por lo tanto, $(E, \succeq|_E)$ es dirigido. □

Proposición 2.14. *Sean* $(D, \succeq)$ *un conjunto dirigido y* $D = A \cup B$. *Si* A *no es residual, entonces* B *es cofinal.*

Demostración. Supongamos que A no es residual y sea $d \in D$, entonces $R_d \nsubseteq A$ luego, existe $d' \in R_d \cap B$, lo que implica que $d' \succeq d$ y $d' \in B$. Por lo tanto, B es cofinal. $\square$

Dada una colección $\{(D_i, \succeq_i) : i \in I\}$ de conjuntos dirigidos, consideremos el producto $\prod_{i \in I} D_i$ y definamos una relación $\succeq$ en $\prod_{i \in I} D_i$ como sigue:

Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ y $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in I}$ son elementos de $\prod_{i \in I} D_i$, entonces $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ si y sólo si $x_i \succeq_i y_i$ para todo $i \in I$.

Obsérvese que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \prod_{i \in I} D_i$, pues $x_i \succeq_i x_i$ por ser $\succeq_i$ una dirección para todo $i \in I$. Además, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ implica que $x_i \succeq_i y_i$ y $y_i \succeq_i z_i$ para todo $i \in I$ luego, $x_i \succeq_i z_i$ para todo $i \in I$, entonces $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$.

Por último, sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{i \in I} D_i$ por demostrar que existe un $\mathbf{z} \in \prod_{i \in I} D_i$ tal que $\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$ y $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$. Nuevamente, por ser $\succeq_i$ una dirección en D_i para cada $i \in I$, tenemos que para cada $x_i, y_i \in D_i$ existe un $z_i \in D_i$ de tal manera que $z_i \succeq_i x_i$ y $z_i \succeq_i y_i$ para cada $i \in I$. De aquí que $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in I}$ es tal que $\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$ y $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$. Esto es, $(\prod_{i \in I} D_i, \succeq)$ es un sistema dirigido y nos referiremos a él como *producto dirigido.*

Proposición 2.15. *Si $(\prod D_i, \succeq)$ es el producto dirigido de $(D_i, \succeq_i)_{i \in I}$ entonces, para cada $i \in I$, la proyección $\pi_i : (\prod D_i, \succeq) \to (D_i, \succeq_i)$ es cofinal.*

Demostración. Obsérvese que si $d_i \in D_i$ y $\mathbf{d} \in \prod_{i \in I} D_i$ es tal que $\pi_i(\mathbf{d}) = d_i$ entonces, para todo $\mathbf{d}' \succeq \mathbf{d}$, se tiene que $\pi_i(\mathbf{d}') \succeq_i \pi_i(\mathbf{d}) = d_i$ por definición de $\succeq$. Por tanto π_i es cofinal. $\square$

Definición 2.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$:*

a) Una red en (X, τ) es una función $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ donde $(D, \succeq)$ es un conjunto dirigido.

b) φ está en A si $\varphi(D) \subseteq A$.

c) φ está residualmente en A si existe un residual R en D tal que $\varphi(R) \subseteq A$.

d) φ está cofinalmente en A si existe un cofinal E de D tal que $\varphi(E) \subseteq A$.

Si el sistema directo es el conjunto de enteros positivos, esta definición coincide con la definición de sucesión. En este sentido, el concepto de red es una manera de generalizar a las sucesiones. Usualmente escribiremos x_α como el valor de la red en α y $\langle x_\alpha \rangle$ para la red.

Proposición 2.17. *Si $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ es una red y $A \subset X$, son equivalentes:*

a) φ *está residualmente en* A.
b) *Existe* $d \in D$ *tal que, si* $d' \succeq d$, $\varphi(d') \in A$.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Como φ está residualmente en A, si R es residual en D tal que $\varphi(R) \subset A$, entonces existe $d \in D$ tal que $R_d \subset R$, lo cual implica que $\varphi(R_d) \subset A$ y por tanto, sí $d' \succeq d$, entonces $\varphi(d') \in A$.

[$b) \Rightarrow a)$] Se sigue del hecho de que $\varphi(R_d) \subset A$. □

Proposición 2.18. *Si* $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ *es una red y* $A \subset X$*, son equivalentes:*
a) φ *está cofinalmente en* A.
b) *Para toda* $d \in D$ *existe* $d' \succeq d$ *tal que* $\varphi(d') \in A$.
c) *Si* R *es residual en* $(D, \succeq)$ *entonces* $\varphi(R) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 2.19. *Sea* φ *una red en el espacio* X*. Se dice que:*

a) φ *converge a* $x \in X$ *(ó* x *es punto límite* φ*) si, para toda* $U \in \mathcal{V}_x$, φ *está residualmente en* U.

b) $x \in X$ *es punto clausura de* φ *si para cada* $U \in \mathcal{V}_x$, φ *está cofinalmente en* U.

Ejemplo 2.20. *Si* (X, τ) *es un espacio discreto,* $x, y \in X$ *tales que* $x \neq y$ *y* $\varphi : (\mathbb{N}, \geq) \to (X, \tau)$ *es tal que* $\varphi(n) = x$ *si* n *es par,* $\varphi(n) = y$ *si* n *es impar, entonces* x *y* y *son puntos clausura de* φ *pero* φ *no converge a ninguno de ellos.*

Ejemplo 2.21. *Si* $\varphi : (D, \geq) \to (X, \tau)$ *es una red y* (X, τ) *es indiscreto,* φ *converge a todos los puntos de* X.

Ejemplo 2.22. *Si* $\varphi : (D, \geq) \to (X, \tau)$ *es una red y* τ *es discreto,* φ *converge a* $x \in X$ *si y sólo si existe* R *residual tal que* $\varphi(R) = \{x\}$.

Ejemplo 2.23. *Si* $\varphi : (D, \geq) \to (X, \tau)$ *es constante con valor* x, φ *converge a* x.

Proposición 2.24. *Si* (X, τ) *es un espacio,* $x \in X$ *y* $\varphi : (\mathcal{V}_x, \subset) \to (X, \tau)$ *es tal que, para toda* $U \in \mathcal{V}_x$, $\varphi(U) \in U$*, entonces* φ *converge a* x.

Demostración. Sean $U \in \mathcal{V}_x$ y $V \in R_U$, entonces $\varphi(V) \in V \subset U$, de lo cual se tiene que $\varphi(R_U) \subset U$ y por lo tanto, φ converge a x. □

Definición 2.25. *Si* $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ *es una red en* X*, una subred de* φ *es una composición :* $(E, \gg) \xrightarrow{\lambda} (D, \succeq) \xrightarrow{\varphi} (X, \tau)$ *donde* λ *es cofinal.*

Proposición 2.26. *Si $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ es una red, son equivalentes:*

a) x es un punto clausura de φ.

b) Existe una subred de φ que converge a x.

c) $x \in \overline{\varphi(R)}$ para todo residual R de D.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Sea $(D \times \mathcal{V}_x, \gg)$ el producto dirigido de $(D, \succeq)$ y $(\mathcal{V}_x, \subset)$. Sea $E = \{(d, U) \in D \times \mathcal{V}_x : \varphi(d) \in U\}$. Si $(d, U) \in D \times \mathcal{V}_x$, por ser φ cofinal en U, existe $d' \succeq d$ tal que $\varphi(d') \in U$, lo cual implica que $(d', U) \in E$ y $(d', U) \gg (d, U)$, entonces E es cofinal luego, la inclusión $i : (E, \gg |_E) \to (D \times \mathcal{V}_x, \gg)$ es cofinal, de donde:

$$(E, \gg |_E) \xrightarrow{i} (D \times \mathcal{V}_x, \gg) \xrightarrow{p_D} (D, \succeq) \xrightarrow{\varphi} (X, \tau)$$

es una subred de φ. Si $U \in \mathcal{V}_x$, como φ está cofinalmente en U, entonces existe $d \in D$ tal que $\varphi(d) \in U$, entonces $(d, U) \in E$. Si $(d', U') \in E$ y $(d', U') \gg (d, U)$, entonces $\varphi p_D i(d', U') = \varphi(d') \in U' \subset U$, entonces $\varphi p_D i(R_{(d,U)}) \subset U$ y por tanto $\varphi p_D i$ converge a x.

[$b) \Rightarrow c)$] Sea $(E, \gg) \xrightarrow{\lambda} (D, \succeq) \xrightarrow{\varphi} (X, \tau)$ la subred de φ que converge a x y sea $U \in \mathcal{V}_x$, entonces existe un residual Q en E tal que $\varphi\lambda(Q) \subset U$. Si R es residual en E entonces $\lambda^{-1}(R)$ es residual en E (pues λ es cofinal), lo cual implica que $\lambda^{-1}(R) \cap Q \neq \emptyset$, entonces $\varphi(\lambda(Q) \cap R) \subset U$ luego, $\varphi(R) \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto, $x \in \overline{\varphi(R)}$.

[$c) \Rightarrow a)$] Sea $U \in \mathcal{V}_x$ y $d \in D$, entonces $x \in \overline{\varphi(R_d)}$, de lo cual se sigue que $U \cap \varphi(R_d) \neq \emptyset$. De aquí que existe $d' \succeq d$ tal que $\varphi(d') \in U$ y por tanto, φ es cofinal en U. □

Proposición 2.27. *Si $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ es una red, se cumplen:*

a) Si φ converge a x entonces toda subred de φ converge a x.

b) Si φ es una red tal que toda subred de φ posee a su vez una subred que converge a x, entonces φ converge a x.

2.1.1. Aplicaciones en Topología

En este apartado, se muestra a través de algunos resultados el gran uso de redes en topología, pues como se verá a continuación, se pueden dar caracterizaciones de conceptos topológicos en terminos de convergencia y puntos clausura de redes.

Proposición 2.28. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $C \subset X$ entonces son equivalentes:*

a) $x \in \overline{C}$.

b) *Existe una red en* C *que converge a* x.

c) *Existe una red en* C *que tiene a* x *como punto clausura.*

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Como para toda $U \in \mathcal{V}_x$, $U \cap C \neq \emptyset$ (ya que $x \in \overline{C}$), definimos a $\varphi : (\mathcal{V}_x, \subset) \to (X, \tau)$ una función tal que para toda $U \in \mathcal{V}_x$, $\varphi(U) \in U \cap C$, entonces $\varphi(\mathcal{V}_x) \subset C$ y $\varphi(U) \in U$ para toda $U \in \mathcal{V}_x$. Así, por la Proposición 2.24, obtenemos que φ converge a x.

[$b) \Rightarrow c)$] Se sigue inmediatamente del hecho de que todo punto límite es punto de clausura (pues todo residual es cofinal).

[$c) \Rightarrow a)$] Si $U \in \mathcal{V}_x$, existe un cofinal ξ tal que $\varphi(\xi) \subset U$, pero $\varphi(\xi) \subseteq C$, lo cual implica que $\varphi(\xi) \subseteq C \cap U$ y por lo tanto $C \cap U \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{C}$. □

Proposición 2.29. *Si* (X, τ) *es un espacio topológico y* $C \subset X$, *son equivalentes:*

a) C *es cerrado.*

b) *Si* φ *es una red en* C *que tiene a* x *como punto clausura entonces* $x \in C$.

c) *Si* φ *es una red en* C *que converge a* x *entonces* $x \in C$.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Supongamos que C es cerrado y sea φ una red en C que tiene a x como punto clausura. Por la Proposición 2.28, $x \in \overline{C} = C$.

[$b) \Rightarrow c)$] Se obtiene de manera inmediata del hecho de que todo punto límite es punto clausura.

[$c) \Rightarrow a)$] Sea $x \in \overline{C}$, por la Proposición 2.28, existe una red φ en C que converge a x, de lo cual se sigue que $x \in C$. Por lo tanto, $\overline{C} \subseteq C$ y así, C es cerrado. □

Proposición 2.30. *Si* (x, τ) *es un espacio topológico y* $U \subset X$, *son equivalentes:*

a) U *es abierto.*

b) *Ninguna red en* $X \backslash U$ *tiene puntos clausura en* U.

c) *Ninguna red en* $X \backslash U$ *converge a un punto de* U.

d) *Si* φ *es una red que converge a un punto de* U *entonces* φ *está residualmente en* U.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Si U es abierto, $X \backslash U$ es cerrado luego, por la proposición anterior tenemos que si φ está en $X \backslash U$ y tiene a x como punto de clausura, entonces $x \in X \backslash U$.

[$b) \Rightarrow c)$] Todo punto límite es punto de clausura.

$[c) \Rightarrow d)]$ Supongamos que φ es una red que converge a $x \in U$ pero que no está residualmente en U,. entonces $\varphi^{-1}(U)$ no es residual en el dominio $(D, \succeq)$ de φ, lo cual implica por la Proposición 2.14 que, $\varphi^{-1}(X \backslash U)$ es cofinal en $(D, \succeq)$. Entonces $(\varphi^{-1}(X \backslash U), \succeq) \xrightarrow{i} (D, \succeq) \xrightarrow{\varphi} (X, \tau)$ es una red en $X \backslash U$. Si $U \in \mathcal{V}_x$, puesto que φ converge a x, existe $d \in D$ tal que $\varphi(R_d) \subset U$. Sea $d' \in \varphi^{-1}(X \backslash U)$ tal que $d' \succeq d$ entonces $R = R_{d'} \cap \varphi^{-1}(X \backslash U)$ es residual en $\varphi^{-1}(X \backslash U)$ y es tal que $\varphi \circ i(R) \subset U$. Así, $\varphi \circ i$ converge a x, contradicción. Por lo tanto, φ está residualmente en U.

$[d) \Rightarrow a)]$ Si U no es abierto, entonces $U \cap \partial(U)^1 \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap \partial(U)$, entonces $x \in U \cap (\overline{U} \cap \overline{X \backslash U})$, entonces, por la Proposición 2.28, existe una red φ en $X \backslash U$ que converge a x y por lo tanto, φ no está residualmente en U. Así, este inciso se obtiene por contrarrecíproca. $\square$

Proposición 2.31. *Si $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:*

a) f es continua en x.

b) Si φ es una red en X que converge a x, entonces $f \circ \varphi$ converge a $f(x)$.

Demostración. $[a) \Rightarrow b)]$ Supongamos que f es una función continua en x y sea $\varphi : (D, \succeq) \rightarrow (X, \tau)$ una red en X que converge a x. Sea $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$, como f es continua, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Luego, como φ converge a x, se tiene que φ está residualmente en U. Entonces existe R residual en D tal que $\varphi(R) \subseteq U$, entonces $f(\varphi(R)) \subseteq f(U) \subseteq V$. Por lo tanto, $f \circ \varphi$ está residualmente en V y por tanto, $f \circ \varphi$ converge a $f(x)$.

$[b) \Rightarrow a)]$ Demostremos esto por contrarrecíproca. Supongamos que f no es continua en x, entonces existe $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ tal que para todo $U \in \mathcal{V}_x$, $f(U) \nsubseteq V$, es decir, existe $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ tal que para todo $U \in \mathcal{V}_x$, $f(U) \cap (Y \backslash V) \neq \emptyset$. Sea $\varphi : (\mathcal{V}_x, \subseteq) \rightarrow (X, \tau)$ una función tal que para cada $U \in \mathcal{V}_x$, $\varphi(U) = x_U$ donde $x_U \in U \cap f^{-1}(Y \backslash V)$. Luego, por la Proposición 2.24, φ converge a x. Además, $f \circ \varphi$ está en $Y \backslash V$ y, por la Proposición 2.30, $f \circ \varphi$ no converge en V, de lo cual se sigue que $f \circ \varphi$ no converge a $f(x)$. $\square$

Proposición 2.32. *Sea $(\prod X_i, \tau)$ un producto topológico y $\varphi : (D, \succeq) \rightarrow (\prod X_i, \tau)$ una red. Entonces son equivalentes:*

a) φ converge a x.

b) $\pi_i \circ \varphi$ converge a x_i para cada proyección π_i.

---

[1] ∂ denota a la frontera de un conjunto

Demostración. $[a) \Rightarrow b)]$ Se infiere de la continuidad del mapeo proyección y de la Proposición 2.31.

$[b) \Rightarrow c)]$ Si $U \in \mathcal{V}_x$, existen $U_j \in \tau_j$ $(j \in \{1, ..., n\})$, tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(U_i) \subset U$, lo cual implica que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $x_i \in U_i$ y, puesto que $\pi_i \circ \varphi$ converge x_i, entonces para todo $i \in \{1, ..., n\}$, existe un residual R_{d_i} de D, tal que $\pi_i \circ \varphi(R_{d_i}) \subset U_i$. Sea $d \in D$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d \succeq d_i$. Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $R_d \subseteq R_{d_i}$, de lo cual se sigue que $\pi_i \circ \varphi(R_d) \subset U_i$, entonces $\varphi(R_d) \subset \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(U_i) \subset U$. Por lo tanto, φ converge a x. $\square$

El siguiente resultado establece una caracterización de los espacios compactos en términos de redes.

Proposición 2.33. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y sólo si cualquier red en X posee un punto clausura.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Sea $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ una red en X y supongamos que no tiene puntos clausura. Entonces para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que φ no está cofinalmente en U_x, entonces $\varphi^{-1}(U_x)$ no es cofinal en $(D, \succeq)$, entonces $\varphi^{-1}(X \backslash U_x)$ es residual y por lo tanto, existe $d_x \in D$ tal que $\varphi(R_{d_x}) \subset X \backslash U_x$. Sea $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ y notamos que ésta es una cubierta abierta de X. Si $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\} \subset \mathcal{U}$, sea $d \in D$ tal que $d \succeq d_{x_i}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $\varphi(d) \in X \backslash U_{x_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, de lo cual se sigue que $\varphi(d) \in \bigcap_{i=1}^n (X \backslash U_{x_i}) = X \backslash \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$, entonces $X \backslash \bigcap_{i=1}^n U_{x_i} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X que no admite subcubiertas finitas, contradicción, pues X es compacto.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que X no es compacto y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X que no posee subcubiertas finitas. Sea $D = \{K \subset I : K$ es finito$\}$, entonces $(D, \supset)$ es un conjunto dirigido. Sea $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ tal que $\varphi(K) \in X \backslash \bigcup_{i \in K} U_i$. Veamos que φ no tiene puntos clausura. Sea $x \in X$, entonces existe $i_\circ \in I$ tal que $x \in U_{i_\circ}$, además $\{i_\circ\} \in D$. Ahora, sea $K \in D$ tal que $K \supset \{i_\circ\}$. Entonces $\varphi(K) \in X \backslash \bigcup_{i \in K} U_i$ y $X \backslash \bigcup_{i \in K} U_i \subset X \backslash U_{i_\circ}$. Por lo tanto $\varphi(R_{\{i_\circ\}}) \subset X \backslash U_{i_\circ}$, esto es, $\varphi^{-1}(X \backslash U_{i_\circ})$ es residual y por tanto $\varphi^{-1}(U_{i_\circ})$ no es cofinal; así x no es punto clausura de φ con lo que se termina la prueba. $\square$

Proposición 2.34. *Si (X, τ) es un espacio topológico, son equivalentes:*

a) (X, τ) *es* T_2.

b) Ninguna red en (X, τ) puede converger a dos puntos distintos en X.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Supongamos que existe $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ red tal que φ converge a x_1 y a x_2 con x_1,$x_2 \in X$ puntos distintos. Entonces para todo $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$, existe $d_1 \in D$ tal que $\varphi(R_{d_1}) \subseteq U_1$ y para todo $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, existe $d_2 \in D$ tal que $\varphi(R_{d_2}) \subseteq U_2$. Entonces para cada $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y para cada $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, existe $d \in D$ tal que $d \succeq d_1$ y $d \succeq d_2$, entonces $\varphi(d) \in \varphi(R_{d_1}) \cap \varphi(R_{d_2}) \subseteq U_1 \cap U_2$. Por lo tanto, existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que para todo $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y para todo $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ lo cual implica que (X, τ) no es T_2, contradicción. Por lo tanto, para toda φ red en (X, τ), φ no converge a dos puntos distintos.

[$b) \Rightarrow a)$] Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que para todo $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y para todo $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $\varphi : (\mathcal{V}_{x_1} \times \mathcal{V}_{x_2}, \succeq) \to (X, \tau)$ tal que para cada $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y para cada $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, $\varphi(U_1, U_2) = x_{U_1,U_2}$ donde $x_{U_1,U_2} \in U_1 \cap U_2$ es un punto cualquiera fijo y $\succeq$ es el orden generado por $(\mathcal{V}_{x_1}, \subseteq)$ y $(\mathcal{V}_{x_2}, \subseteq)$. Veamos que φ converge a x_1 y a x_2. Sean $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$, tomamos al residual $R_{(U_1,U_2)}$ y sea $(N_1, N_2) \in R_{(U_1,U_2)}$, entonces $\varphi(N_1, N_2) \in N_1 \cap N_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ lo cual implica que $\varphi(R_{(U_1,U_2)}) \subseteq U_1$ y $\varphi(R_{(U_1,U_2)}) \subseteq U_2$, por tanto φ converge a x_1 y a x_2, contradicción. Por lo tanto (X, τ) es T_2. □

2.2. Filtros

El concepto de ultrafiltro aparece definido por F. Riesz en 1908. Pero fue hasta 1937 con Henri Cartan cuando se introducen explícitamente los conceptos de filtro y ultrafiltro. Cartan definió convergencia y puntos de acumulación. A partir de ese momento se obtuvieron caracterizaciones de conceptos expresables en términos de convergencia tales como la compacidad.

Definición 2.35. *Un filtro en un conjunto X es una familia $\mathcal{F}$ no vacía de subconjuntos no vacíos de X que satisfacen:*
a) Si F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
b) Si $F \subset G \subset X$ y $F \in \mathcal{F}$ entonces $G \in \mathcal{F}$.

Observación 2.36. *El inciso a) de la definición de filtro es equivalente a: La intersección finita de elementos de un filtro está en el filtro.*

Ejemplo 2.37. *Si $X \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro en X y nos referimos a este filtro como el filtro trivial sobre X.*

Ejemplo 2.38. *Si X un conjunto no vacío y $A \subset X$ no vacío, la colección $\mathcal{F} = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ es un filtro en X.*

Definición 2.39. *Un filtro $\mathcal{F}$ será llamado principal, si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$. Diremos en este caso que $\mathcal{F}$ está generado por A.*

Ejemplo 2.40. *Si X es un espacio topológico y $x \in X$, la colección $\mathcal{V}_x$ formada por las vecindades de x es filtro en X.*

Ejemplo 2.41. *Si $(D, \succeq)$ es un conjunto dirigido entonces la familia $\mathcal{F}$ de residuales de D es un filtro en D. A este filtro se le llama el* filtro de sección *D.*

No es difícil convencerse de que si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, entonces la colección $\tau = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X. Más aún, el espacio $(X,\, \tau)$ resulta ser un espacio que no es de Hausdorff.

Suponga ahora que se tiene un espacio topológico (X, τ). ¿Ocurrirá que $\mathcal{F} = \tau \backslash \{\emptyset\}$ es un filtro en X?. La respuesta es que esto no necesariamente ocurre pues basta considerar un espacio discreto.

Definición 2.42. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces:*

i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es base de $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

ii) $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ es sub-base de $\mathcal{F}$ si la colección formada por todas las intersecciones de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de $\mathcal{F}$.

Ejemplo 2.43. *El filtro del ejemplo 2.38 tiene por base a la colección $\mathcal{B} = \{A\}$.*

Ejemplo 2.44. *Sea X un conjunto tal que $\mid X \mid \geq \aleph_0$. La colección $\mathcal{F} = \{E \subset X : X \backslash E \text{ es finito}\}$ es un filtro en X que no es principal y tiene por sub-base a $\mathcal{B} = \{X \backslash \{x\} : x \in X\}$. Este filtro es llamado* filtro cofinito ó filtro de Fréchet.

Ejemplo 2.45. *El filtro de sección D tiene por base a la colección $\mathcal{B} = \{R_d : d \in D\}$.*

Proposición 2.46. *Si X es un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ entonces son equivalentes:*

a) $\mathcal{B}$ es base de algún filtro en X.

b) $\mathcal{B}$ satisface:

i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

ii) Si B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Sea $\mathcal{F}$ el filtro que tiene por base a $\mathcal{B}$. Entonces, si $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$. Por tanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Además, puesto que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Por otro lado, si B_1, $B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ por tanto existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

[$b) \Rightarrow a)$] Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subset F\}$. Entonces $\mathcal{F} \neq \emptyset$; más aún, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$. Si F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, existen B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subset F_1$ y $B_2 \subset F_2$; luego, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$ de aquí que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Por último, si $F \subset G \subset X$ con $F \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset G$ por tanto $G \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}$ es filtro en X. $\square$

Ejemplo 2.47. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X y f una función sobreyectiva de X a Y. La colección $\mathcal{B} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro en Y al que denotaremos por $f(\mathcal{F})$.*

Proposición 2.48. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X y $\emptyset \neq E \subset X$. Entonces $\mathcal{B} = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro o $\mathcal{B}' = \{F \cap (X \backslash E) : F \in \mathcal{F}\}$ es base de algún filtro en X.*

Demostración. Por ser $\mathcal{F}$ distinto de vacío, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}\,'$ son no vacíos. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = F_1 \cap E$, $B_2 = F_2 \cap E$ luego, $B_1 \cap B_2 = (F_1 \cap F_2) \cap E \in \mathcal{B}$. Análogamente, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}\,'$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}\,'$. Si $\emptyset \in \mathcal{B}$ entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap E = \emptyset$, lo cual implica que $F \subset X \backslash E$, luego $X \backslash E \in \mathcal{F}$; así , para toda $F' \in \mathcal{F}$, $F' \cap (X \backslash E) \neq \emptyset$, esto es $\emptyset \notin \mathcal{B}'$ y por tanto $\mathcal{B}\,'$ es base de filtro. $\square$

Proposición 2.49. *Si $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(X)$ entonces son equivalentes:*

$i)$ $\mathcal{S}$ es sub-base de un filtro $\mathcal{F}$.

$ii)$ Las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ son no vacías.

Demostración. [$i) \Rightarrow ii)$] Si $\mathcal{S}$ es sub-base de $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ luego, si $G_1, ..., G_n \in \mathcal{S}$, $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{F}$ por tanto $\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$.

[$ii) \Rightarrow i)$] Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in J} G_i : J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{S}\}$, entonces $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y por (ii), $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Ahora, si $\bigcap_{i \in J_1} G_i$ y $\bigcap_{i \in J_2} G_i$ están en $\mathcal{B}$, entonces $\bigcap_{i \in J_1 \cup J_2} G_i \in \mathcal{B}$ así, por la Proposición 2.46, $\mathcal{B}$ es base de un filtro y por tanto $\mathcal{S}$ es sub-base de filtro. $\square$

Definición 2.50. *Un filtro $\mathcal{F}$ en X es ultrafiltro si $\mathcal{F}$ no está contenido propiamente en un filtro no trivial.*

Así, un filtro es ultrafiltro si es maximal en la colección de todos los filtros en X.

Proposición 2.51. *Si $\mathcal{U}$ es un filtro en X, son equivalentes:*

i) $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

ii) Si $E \subset X$ entonces $E \in \mathcal{U}$ ó $X \backslash E \in \mathcal{U}$.

iii) Si $A \subseteq X$ no vacío y si para cada $B \in \mathcal{U}$, $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \in \mathcal{U}$.

iv) Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ y $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ ó $B \in \mathcal{U}$.

Demostración. [$i) \Rightarrow ii)$] Por la Proposición 2.48, $\mathcal{B} = \{U \cap E : U \in \mathcal{U}\}$ ó $\mathcal{B}' = \{U \cap (X \backslash E) : U \in \mathcal{U}\}$ es base de un filtro $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{B}$ es base de un filtro $\mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{U}$ entonces $(U \cap E) \in \mathcal{U}$ así , $U \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ y, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Pero $E = X \cap E \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $E \in \mathcal{U}$; luego, si $\mathcal{B}$ es base $E \in \mathcal{U}$. Análogamente, si $\mathcal{B}'$ es base, $X \backslash E \in \mathcal{U}$.

[$ii) \Rightarrow iii)$] Sea $A \in \mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$ tal que para cada $B \in \mathcal{U}$, $A \cap B \neq \emptyset$. Supongamos que $A \notin \mathcal{U}$, entonces por (ii), $X \backslash A \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap X \backslash A \neq \emptyset$, contradicción. Por lo tanto, $A \in \mathcal{U}$.

[$iii) \Rightarrow iv)$] Supongamos que $A \cup B \in \mathcal{U}$ y que $A \notin \mathcal{U}$. Entonces por (iii), existe $F_1 \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap F_1 = \emptyset$. Veamos que para cada $F \in \mathcal{U}$, $F \cap B \neq \emptyset$. Por el contrario, supongamos que existe $F_2 \in \mathcal{U}$ tal que $F_2 \cap B = \emptyset$. Tomamos a $F = F_1 \cap F_2$ y notamos que $F \in \mathcal{U}$, entonces $F \cap (A \cup B) \in \mathcal{U}$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{U}$, contradicción. Por lo tanto, para cada $F \in \mathcal{U}$, $F \cap B \neq \emptyset$, de lo cual se sigue por hipótesis que, $B \in \mathcal{U}$.

[$iv) \Rightarrow i)$] Supóngase que existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{U} \neq \mathcal{F}$, entonces existe $F \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{U}$. Pero $F \cup (X \backslash F) \in \mathcal{U}$, lo cual implica por ($iv$) que $X \backslash F \in \mathcal{U}$; entonces F, $X \backslash F \in \mathcal{F}$, por tanto $F \cap (X \backslash F) = \emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual no puede ocurrir. Luego, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. □

Corolario 2.52. *Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y f es una función biyectiva, entonces el filtro $f(\mathcal{F})$ del ejemplo 2.47 es ultrafiltro.*

Demostración. Si $E \in Y$, entonces $f^{-1}(E)$ ó $f^{-1}(Y \backslash E)$ está en $\mathcal{U}$ por tanto E ó $Y \backslash E$ está en $f(\mathcal{U})$ y así , $f(\mathcal{F})$ es ultrafiltro en Y. □

Corolario 2.53. *Si $x \in X$ entonces $\mathcal{F}_{(x)} = \{E \subseteq X : x \in E\}$ es ultrafiltro.*

Proposición 2.54. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, existe un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\Im$ la familia de todos los filtros en X que contienen a $\mathcal{F}$; $\Im$ es parcialmente ordenado por $\subseteq$. Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ ($I \neq \emptyset$) una cadena en $(\Im, \subseteq)$. Probaremos que $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \Im$. En efecto, puesto que $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$ para toda $i \in I$, entonces $\mathcal{U} \neq \emptyset$; además, para toda $F \in \mathcal{U}$, $F \neq \emptyset$. Si

F_1, $F_2 \in \mathcal{U}$, existen $\mathcal{F}_{i_1}$ y $\mathcal{F}_{i_2}$ en $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ tales que $F_1 \in \mathcal{F}_{i_1}$ y $F_2 \in \mathcal{F}_{i_2}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{F}_{i_1} \subset \mathcal{F}_{i_2}$ ya que $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ es una cadena; de donde, F_1 y F_2 están en $\mathcal{F}_{i_2}$, luego $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{i_2} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Por último, si $F \in \bigcup \mathcal{F}_i$ y $F \subset G \subset X$, dado que $F \in \mathcal{F}_{i_\circ}$ se sigue que $G \in \mathcal{F}_{i_\circ}$, de aquí que $G \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$, así $\mathcal{U}$ está en $\Im$; más aún, $\mathcal{U}$ es cota superior de $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ (si $I = \emptyset$, $\mathcal{F}$ es cota superior de $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$) entonces, por el Lema de Zorn existe un elemento máximo en $\Im$ digamos $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ es filtro entonces $\mathcal{W} \in \Im$ puesto que $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$, de donde , $\mathcal{K} = \mathcal{W}$ y por tanto $\mathcal{K}$ es ultrafiltro. □

Proposición 2.55. *Todo filtro es la intersección de los ultrafiltros que lo contienen.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X y sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ la familia de los ultrafiltros de X que lo contienen. Entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{U} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Supongamos que $E \in \mathcal{U}\backslash\mathcal{F}$ entonces para toda $F \in \mathcal{F}$, $F \nsubseteq E$, entonces $F \cap (X\backslash E) \neq \emptyset$ para toda $F \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{B}' = \{F \cap X\backslash E : F \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro $\mathcal{G}$. Claramente $\mathcal{F} \cup \{X\backslash E\} \subseteq \mathcal{G}$. Ahora, sea $\mathcal{U}_\circ$ un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{G}$, como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}_\circ$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_\circ$, y ya que $\mathcal{U}_\circ$ es ultrafiltro en X, entonces $\mathcal{U}_\circ \in \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$, de lo cual se sigue que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_\circ$. Luego, como $E \in \mathcal{U}\backslash\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_\circ$, entonces $E \in \mathcal{U}_\circ$ y $X\backslash E \in \mathcal{U}_\circ$, contradicción, pues $\mathcal{U}_\circ$ es ultrafiltro en X. Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathcal{U} = \mathcal{F}$. □

Definición 2.56. *Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro en X, se dice que $\mathcal{U}$ es fijo si $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U \neq \emptyset$ y se dice que $\mathcal{U}$ es libre si $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \emptyset$.*

Ejemplo 2.57. *El ultrafiltro $\mathcal{F}_{(x)}$ es fijo.*

Ejemplo 2.58. *$\mathcal{F} = \{E \subset X : X\backslash E$ es finito$\}$ es un filtro en X luego, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Puesto que $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ se tiene que $\mathcal{U}$ es libre.*

Ejemplo 2.59. *Sea $\mathcal{F}$ el filtro de Frechet. Si $\mathcal{K}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{K}$ es libre.*

Enuciamos algunos resultados más acerca de filtros y ultrafiltros. Las demostraciones que se omitan se pueden consultar en [10].

Proposición 2.60. *Sea X un conjunto no vacío. Entonces:*

1. *X es finito si y sólo si todo filtro sobre X es finito.*

2. X es finito si y sólo si todo filtro sobre X es principal.

Proposición 2.61. *Si $\mathcal{G}$ es una familia, no vacía, de filtros sobre un conjunto X, entonces $\bigcap \mathcal{G}$ es un filtro sobre X.*

Demostración. Claramente $\emptyset \notin \bigcap \mathcal{G}$ pues para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Además, como para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $X \in \mathcal{F}$, entonces $X \in \bigcap \mathcal{G}$. Ahora, sean $F_1, F_2 \in \bigcap \mathcal{G}$, entonces para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, de lo cual se sigue que $F_1 \cap F_2 \in \bigcap \mathcal{G}$. Por último, sean $F_1, F_2 \subseteq X$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \bigcap \mathcal{G}$, entonces para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $F_1 \in \mathcal{F}$ y ya que $F_1 \subseteq F_2$, entonces para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $F_2 \in \mathcal{F}$, de lo cual se sigue que $F_2 \in \bigcap \mathcal{G}$. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{G}$ es un filtro sobre X. □

Una pregunta natural que surge después de haber visto el resultado anterior es ¿la unión de filtros es un filtro?. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.62. *Sea $X = \{a, b\}$, con $a \neq b$; sean $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq X : \{a\} \subseteq A\}$ y $\mathcal{F}_b = \{B \subseteq X : \{b\} \subseteq B\}$ los filtros generados por $\{a\}$ y $\{b\}$ respectivamente. Notamos que $\mathcal{F}_a \cup \mathcal{F}_b = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Sean $F_1 = \{a\}$ y $F_2 = \{b\}$, entonces $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_a \cup \mathcal{F}_b$ y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_a \cup \mathcal{F}_b$ no es un filtro sobre X.*

Del ejemplo anterior se puede conluir que la unión de filtros sobre un conjunto no necesariamente es un filtro sobre el conjunto. Una condición que nos asegura lo anterior se da a continuación.

Proposición 2.63. *Sea $\mathcal{G}$ una familia, no vacía, de filtros sobre un conjunto X. Si $\mathcal{G}$ es una $\subseteq$-cadena, entonces $\bigcup \mathcal{G}$ es un filtro sobre X.*

Demostración. Claramente $X \in \bigcup \mathcal{G}$. Además, $\emptyset \notin \bigcup \mathcal{G}$ pues para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Sean $F_1, F_2 \in \bigcup \mathcal{G}$, entonces existen $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en $\mathcal{G}$ tales que $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Luego, como $\mathcal{G}$ es una $\subseteq$-cadena, entonces $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, entonces $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_2$ y ya que $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{G}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_2 \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Por lo tanto, $F_1 \cap F_2 \in \bigcup \mathcal{G}$. Ahora, sean $F_1, F_2 \subseteq X$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \bigcup \mathcal{G}$, entonces existe $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{G}$ tal que $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y ya que $\mathcal{F}_1$ es un filtro y $F_1 \subseteq F_2$, entonces $F_2 \in \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcup \mathcal{G}$, entonces $F_2 \in \bigcup \mathcal{G}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{G}$ es un filtro sobre X. □

El siguiente resultado se sigue de las propiedades que poseen las funciones biyectivas.

Proposición 2.64. *Sean X y Y dos conjuntos y f una función biyectiva de X en Y. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X si y sólo si $f(\mathcal{F})$ es un filtro en Y.*

Proposición 2.65. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y E un subconjunto no vacío de X. Entonces $\mathcal{U}_E = \{U \cap E : U \in \mathcal{U}\}$ es ultrafiltro sobre E si y sólo si $E \in \mathcal{U}$.*

Veamos una caracteristica de los elementos de ultrafiltros libres o no principales.

Proposición 2.66. *Un ultrafiltro no principal contiene solamente conjuntos infinitos.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal y supongamos que existe $A \in \mathcal{U}$ tal que A es finito, digamos $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Como $\mathcal{U}$ es no principal, entonces existe $B_0 \in \mathcal{U}$ tal que $A \backslash B_0 \neq \emptyset$. Llamamos $A_1 = A \cap B_0 \in \mathcal{U}$ y tenemos que $|A_1| < |A|$. Luego, como $A_1 \in \mathcal{U}$, entonces existe $B_1 \in \mathcal{U}$ tal que $A_1 \backslash B_1 \neq \emptyset$. Llamamos $A_2 = A_1 \cap B_1 \in \mathcal{U}$ y tenemos que $|A_2| < |A_1|$. Siguiendo este procedimiento llegamos a que existe m en los naturales tal que $A_m \in \mathcal{U}$ y $|A_m| = 1$, es decir, $\{x_j\} = A_m$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\{x_j\} \in \mathcal{U}$, de lo cual se sigue que $\mathcal{U}$ es principal, lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.67. *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es no principal si y sólo si $\mathcal{U}$ contiene un filtro cofinito.*

Proposición 2.68. *Un conjunto X es infinito si y sólo si existe un ultrafiltro libre sobre X.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que X es infinito y que todo ultrafiltro sobre X es fijo. Sea $\mathcal{F}$ el filtro cofinito, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ para algún ultrafiltro sobre X, entonces $\mathcal{U}$ es fijo, es decir, $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{F}$ es no principal, entonces $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ y como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, de lo cual se sigue que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe un ultrafiltro libre sobre X.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre sobre X y que X es finito, entonces todo filtro sobre X es principal, lo cual contradice que $\mathcal{U}$ sea libre. Por lo tanto, X es infinito. □

Es claro que todo filtro es una familia de conjuntos que cumple la PIF. Más aún, tenemos el siguiente resultado que es de bastante utilidad en el contexto de los filtros y su relación con familias que satisfacen la PIF.

Proposición 2.69. *Toda familia que satisface la PIF está contenida en un filtro.*

Ahora veamos la definición de convergencia y puntos clausura en espacios topológicos haciendo uso del concepto de filtro.

Definición 2.70. *Si (X, τ) es un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro en X y $x \in X$:*

1. *Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$.*

2. *Se dice que x es punto clausura de $\mathcal{F}$ si para toda $F \in \mathcal{F}$ y para toda $U \in \mathcal{V}_x$, $F \cap U \neq \emptyset$.*

Proposición 2.71. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en un espacio topológico X entonces son equivalentes:*
$i)$ x es punto clausura de $\mathcal{F}$.
$ii)$ Existe $\mathcal{K}$ filtro en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ converge a x.
$iii)$ $x \in \overline{F}$ para toda $F \in \mathcal{F}$.

Demostración. $[i) \Rightarrow ii)]$ Por la Proposición 2.48 $\mathcal{B} = \{F \cap V : F \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{V}_x\}$ es base de un filtro $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{K}$, por tanto $\mathcal{K}$ converge a x.

$[ii) \Rightarrow iii)]$ Sea $\mathcal{K}$ un filtro tal que $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{K}$. Obsérvese que si $F \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{V}_x$ entonces V, $F \in \mathcal{K}$, luego $F \cap V \neq \emptyset$ y así , $x \in \overline{F}$.

$[iii) \Rightarrow i)]$ Es claro. □

2.2.1. Aplicaciones en Topología

Al igual que las redes, los filtros tienen un gran uso en la teoría de espacios topológicos. Aquí mostramos dos resultados en el que se ejemplifica dicho uso.

Proposición 2.72. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $C \subset X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
$a)$ $x \in \overline{C}$.
$b)$ Existe un filtro que contiene a C y converge a x.
$c)$ Existe un filtro que contiene a C y x es punto clausura de él.

Demostración. $[a) \Rightarrow b)]$ Sea $\mathcal{B} = \{U \cap C : U \in \mathcal{V}_x\}$, claramente $C \in \mathcal{B}$, de lo cual, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Además, como $x \in \overline{C}$, para cada vecindad U de x, $U \cap C \neq \emptyset$. Así, $\emptyset \notin \mathcal{B}$; luego, de la Proposición 2.48, $\mathcal{B}$ es base de algún filtro, digamos

$\mathcal{F}$. Claramente $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$, pues si $U \in \mathcal{V}_x$, entonces $U \cap C \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, por otro lado, $U \cap C \subseteq U$ y así , $U \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_{(x)} \subseteq \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F}$ converge a x con $C \in \mathcal{F}$.

[$b) \Rightarrow c)$] Se sigue del hecho de que si el filtro $\mathcal{F}$ converge a x, entonces x es punto clausura de $\mathcal{F}$.

[$c) \Rightarrow a)$] Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X tal que $C \in \mathcal{F}$ y x es punto clausura de $\mathcal{F}$, entonces por Proposición 2.71, para cada $F \in \mathcal{F}$, $x \in \overline{F}$; en particular, $x \in \overline{C}$. □

Proposición 2.73. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es compacto.

b) Todo filtro en X tiene puntos clausura.

c) Todo ultrafiltro en X converge.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X y considérese $\mathcal{K} = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Es inmediato que $\mathcal{K}$ satisface la propiedad de la intersección finita. Entonces existe un $x \in X$ tal que $x \in \overline{F}$ para todo $\overline{F} \in \mathcal{K}$; luego, por (iii) de la proposición 2.71, x es punto clausura de $\mathcal{F}$.

[$b) \Rightarrow c)$] Si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, existe un punto clausura x, entonces por Proposición 2.71, existe $\mathcal{F}$ filtro en x tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ converge a x. Pero $\mathcal{U}$ es ultrafiltro así que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{U}$ converge a x.

[$c) \Rightarrow a)$] Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X y supongamos que no tiene subcubiertas finitas. Entonces para todo $K \subset I$ finito, $X \setminus \bigcup_{i \in K} U_i \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{B} = \{X \setminus \bigcup_{i \in K} U_i : K \subset I \text{ es finito}\}$ es base de un filtro $\mathcal{F}$ en X luego, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ entonces, si $x \in X$ existe $i_x \in I$ tal que $x \in U_{i_x}$, esto es $U_{i_x} \in \mathcal{V}_x$. Por otro lado, puesto que $X \setminus U_{i_x} \in \mathcal{B} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, se tiene que $U_{i_x} \notin \mathcal{U}$, por tanto $\mathcal{U}$ no converge a x, contradicción. Por lo tanto, X es compacto. □

2.3. Relación entre Redes y Filtros

A lo largo de este capítulo se han mostrado algunos resultados básicos sobre redes y filtros, de los cuales muchos de ellos tienen una gran similitud. Aquí damos unos resultados que hacen más clara la estrecha relación que existe entre dichos conceptos.

Observación 2.74. *Notemos lo siguiente:*

1. *Si $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ es una red, puesto que $\mathcal{F} = \{R \subset D : R$ es residual$\}$ es filtro en D, entonces la colección $\mathcal{B} = \{\varphi(R) : R \in \mathcal{F}\}$ es base de un filtro en X.*

2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en (X, τ), sea $D := \{(x, F) : x \in X,\ F \in \mathcal{F}\}$ y definamos $(x, F) \succeq (x', F')$ si y sólo si $F \subset F'$, así, se tiene que $(D, \succeq)$ es un conjunto dirigido. Sea $\varphi_{\mathcal{F}} : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ tal que para todo $(x, F) \in D$, $\varphi_{\mathcal{F}}(x, F) = x$. Así, $\varphi_{\mathcal{F}}$ es una función.*

Definición 2.75. *Tenemos las siguientes definiciones:*

a) Al filtro que tiene como base a $\mathcal{B}$ del inciso 1. de la observación anterior, lo denotaremos por $\varphi(\mathcal{F})$ y se llama el filtro generado por φ.

b) A la función definida en el inciso 2. de la observación anterior, denotada por $\varphi_{\mathcal{F}}$ se llama la red basada en $\mathcal{F}$.

Proposición 2.76. *Si $\varphi : (D, \succeq) \to (X, \tau)$ es una red se satisfacen:*
i) φ converge a x si y sólo si $\varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ converge a x.
ii) x es punto clausura de φ si y sólo si x es punto clausura de $\varphi(\mathcal{F}_\varphi)$

Antes de probar este hecho debemos observar que φ converge a x si y sólo si $\varphi^{-1}(V)$ es residual para toda $V \in \mathcal{V}_x$ y $E \subset Y \in f(\mathcal{F})$ si y sólo si $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$.

Demostración. [i) $\Rightarrow$] Sea $V \in \mathcal{V}_x$. Puesto que φ converge a x, $\varphi^{-1}(V)$ es residual en $(D, \succeq)$, luego, $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\varphi$, entonces $V \in \varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ y por tanto $\varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ converge a x.

[i) $\Leftarrow$] Si $V \in \mathcal{V}_x$, puesto que $\varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ converge a x, $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{F}_\varphi$ de aquí que $\varphi^{-1}(V)$ es residual en $(D, \succeq)$ y así, φ converge a x.

[ii) $\Rightarrow$] Si $F \in \varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ y $V \in \mathcal{V}_x$ entonces $\varphi^{-1}(F) \in \mathcal{F}_\varphi$, de manera que $\varphi^{-1}(F)$ es residual en $(D, \succeq)$ luego, $\emptyset \neq \varphi(\varphi^{-1}(F)) \cap V$ entonces $\emptyset \neq F \cap V$ esto es, x es punto clausura de $\varphi(\mathcal{F}_\varphi)$.

[ii) $\Leftarrow$] Para toda $F \in \varphi(\mathcal{F}_\varphi)$ y para toda $V \in \mathcal{V}_x$, $F \cap V \neq \emptyset$. Si R es residual de $(D, \succeq)$ entonces $\varphi(R) \in \varphi(\mathcal{F}_\varphi)$, lo que implica que para toda $V \in \mathcal{V}_x$, $\varphi(R) \cap N \neq \emptyset$ y por tanto x es punto clausura de φ. □

Proposición 2.77. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X entonces se satisfacen:*
a) $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si $\varphi_{\mathcal{F}}$ converge a x.
b) x es punto clausura de $\mathcal{F}$ si y sólo si x es punto clausura de $\varphi_{\mathcal{F}}$.

Demostración. $[a) \Rightarrow]$ Sea $U \in \mathcal{V}_x$. Puesto que $\mathcal{F}$ converge a x, $U \in \mathcal{F}$ y entonces $(x, U) \in D_{\mathcal{F}}$ luego, si $(x', F) \in R_{(x,U)}$ entonces $(x', F) \succeq (x', U)$, de donde $F \subset U$ entonces $\varphi_{\mathcal{F}}(x', F) = x' \in F \subset U$, de aquí que $\varphi_{\mathcal{F}}(R_{(x,U)}) \subset U$ y por tanto $\varphi_{\mathcal{F}}$ converge a x.

$[a) \Leftarrow]$ Si $U \in \mathcal{V}_x$, puesto que $\varphi_{\mathcal{F}}$ converge a x, $\varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$ es residual en $(D, \succeq)$, entonces existe $(x', F) \in D_{\mathcal{F}}$ tal que $R_{(x',F)} \subset \varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$. Si $x'' \in F$ entonces $(x'', F) \succeq (x', F)$, de donde $\varphi_{\mathcal{F}}(x'', F) = x'' \in U$, entonces $F \subset U$ lo cual implica que $U \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F}$ converge a x.

$[b) \Rightarrow]$ Si R es residual en $(D_{\mathcal{F}}, \succeq)$, existe $(x', F) \in D_{\mathcal{F}}$ tal que $R_{(x',F)} \subset R$, de esto se tiene que para toda $x'' \in F$, $(x'', F) \in R$, entonces $F \subset \varphi_{\mathcal{F}}(R_{(x',F)}) \subset \varphi(R)$. Pero para toda $U \in \mathcal{V}_x$, $F \cap U \neq \emptyset$, entonces $\varphi(R) \cap U \neq \emptyset$. Así, x es punto clausura de $\varphi_{\mathcal{F}}$.

$[b) \Leftarrow]$ Si $U \in \mathcal{V}_x$ y $F \in \mathcal{F}$, sea $x' \in F$, entonces $(x', F) \in D_{\mathcal{F}}$, entonces existe $(x'', F') \in D_{\mathcal{F}}$ tal que $(x'', F) \succeq (x', F)$ y $\varphi_{\mathcal{F}}(x'', F') = x'' \in U$. Pero $x'' \in F' \subset F$ entonces $x'' \in F \cap U$. Por lo tanto, x es punto clausura de $\mathcal{F}$. $\square$

Capítulo 3

Una Teoría de Convergencia y Puntos Clausura basada en κ-Redes

3.1. Una introducción a las κ-redes. ρ-convergencia y puntos ρ-clausura.

En esta sección se presenta una introducción a una teoría de convergencia y puntos clausura basada en κ-redes, así como también se dan algunos resultados básicos acerca de dicha teoría. A lo largo de este capítulo, usaremos κ, λ y θ para denotar cardinales infinitos y α , β , γ y δ para denotar ordinales.

Definición 3.1. *Sean X un conjunto y κ un cardinal infinito. Una κ-red en X es una función $\xi : [\kappa]^{<\omega} \to X$, donde $[\kappa]^{<\omega} = \{F \subset \kappa : F \text{ es finito}\}$ y es dirigido por la relación de contención $\subseteq$. La κ-red, ξ, es denotada por $\langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$, o sólo $\langle x_F \rangle$, donde, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_F = \xi(F)$.*

De aquí en adelante, trabajaremos con un operador ρ que asocia a cada subconjunto abierto V de un espacio topológico X, un subconjunto (no necesariamente abierto) $\rho(V)$ de X y que satisface las propiedades siguientes.

Para cualesquiera abiertos U y V en X:

1. $V \subseteq \rho(V)$
2. Si $U \subseteq V$, entonces $\rho(U) \subseteq \rho(V)$.

Definición 3.2. *Dado un operador ρ, la ρ-clausura de $A \subseteq X$, denotada A^ρ, es definida por:*

$$A^\rho = \{x \in X : \text{ Para todo } V \in \mathcal{V}_x, \rho(V) \cap A \neq \emptyset\}$$

Si $A^\rho = A$, diremos que A es ρ-cerrado.

En el presente trabajo, centraremos nuestra atención en tres elecciones para ρ: $\rho(V) = V$, $\rho(V) = \overline{V}$, $\rho(V) = int(\overline{V})$. Para estas elecciones de ρ, tenemos la siguiente notación y terminología:

1. $\rho(V) = V$: A^ρ es denotado por $\overline{A}$ y es llamado la *clausura* de A.

2. $\rho(V) = \overline{V}$: A^ρ es denotado por A^θ y es llamado la *θ-clausura* de A.

3. $\rho(V) = int(\overline{V})$: A^ρ es denotado por A^δ y es llamado la *δ-clausura* de A.

Proposición 3.3. *Para cualquier $A \subseteq X$, A^ρ es cerrado.*

Demostración. Sabemos que $A^\rho \subseteq \overline{A^\rho}$, veamos la otra contención. Sea $x \in \overline{A^\rho}$, entonces para todo U abierto en X tal que $x \in U$, $U \cap A^\rho \neq \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$. Por demostrar que, $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$. Como $x \in V$ y V es abierto, entonces $V \cap A^\rho \neq \emptyset$, entonces existe $y \in V \cap A^\rho$ lo cual implica que $y \in V$ y para todo $W \in \mathcal{V}_y$ $\rho(W) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$; luego, $x \in A^\rho$ y por tanto A^ρ es cerrado. □

De la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado para las distintas elecciones de nuestro operador ρ:

Proposición 3.4. *Para todo $A \subseteq X$, $\overline{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$. Además, cada uno es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$, el hecho de que cada uno de ellos es cerrado se sigue de la Proposición 3.3. Veamos las contenciones:
- $\overline{A} \subseteq A^\delta$ se da por el hecho de que para todo $x \in X$ y para todo $V \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $V \subseteq int(\overline{V})$.
- $A^\delta \subseteq A^\theta$ se da por el hecho de que para todo $x \in X$ y para todo $V \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $int(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$.
Así, $\overline{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$ y cada uno de ellos es cerrado. □

Una condición que nos asegura la igualdad entre los conjuntos resultantes de la elección de nuestro operador ρ, se da en el siguiente resultado:

Proposición 3.5. *Sean X un espacio regular y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = A^\delta = A^\theta$.*

Demostración. La Proposición 3.4 garantiza que $\overline{A} \subseteq A^\delta \subseteq A^\theta$. Veamos las contenciones opuestas.
Primero demostremos que $A^\theta \subseteq A^\delta$. Sea $x \in A^\theta$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}_x$ $\overline{V} \cap A \neq \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$ y veamos que, $int(\overline{V}) \cap A \neq \emptyset$.
Supongamos que $int(\overline{V}) \cap A = \emptyset$, entonces $A \subseteq X \backslash int(\overline{V})$, donde $X \backslash int(\overline{V})$ es cerrado en X. Notamos que $x \in int(\overline{V})$ ya que $x \in V$, V es abierto y $V \subseteq \overline{V}$. Ahora, como X es regular, existen U_1, U_2 abiertos, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tales que $x \in U_1$ y $X \backslash int(\overline{V}) \subseteq U_2$. Por lo tanto existe $U_1 \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{U_1} \cap A = \emptyset$, pues de lo contrario, si $\overline{U_1} \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \overline{U_1} \cap A$, entonces $y \in A \subseteq X \backslash int(\overline{V}) \subseteq U_2$ y para todo W abierto tal que $y \in W$, $W \cap U_1 \neq \emptyset$. Como U_2 es abierto y $y \in U_2$ entonces $U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $U_1 \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{U_1} \cap A = \emptyset$ lo que también es una contradicción, pues $x \in A^\theta$. De esta forma, hemos probado que $int(\overline{V}) \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $x \in A^\delta$. Así, $A^\theta \subseteq A^\delta$.
Ahora veamos que $A^\delta \subseteq \overline{A}$. Sea $x \in A^\delta$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}_x$ $int(\overline{V}) \cap A \neq \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$ y veamos que, $V \cap A \neq \emptyset$.
Supongamos que $V \cap A = \emptyset$, entonces $A \subseteq X \backslash V$, donde $X \backslash V$ es cerrado en X. Como $x \in V$ y X es regular, existen U_1, U_2 abiertos con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ tales que $x \in U_1$ y $X \backslash V \subseteq U_2$. Por lo tanto existe $U_1 \in \mathcal{V}_x$ tal que $int(\overline{U_1}) \cap A = \emptyset$, pues de lo contrario, si $int(\overline{U_1}) \cap A \neq \emptyset$ entonces existe $y \in int(\overline{U_1}) \cap A$, entonces $y \in A \subseteq X \backslash V \subseteq U_2$ y para todo W abierto tal que $y \in W$, $W \cap U_1 \neq \emptyset$. Como U_2 es abierto y $y \in U_2$ entonces $U_2 \cap U_1 \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $U_1 \in \mathcal{V}_x$ tal que $int(\overline{U_1}) \cap A = \emptyset$ lo que también es una contradicción pues $x \in A^\delta$. Así, $V \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $x \in A^\delta$. Se concluye que $A^\delta \subseteq \overline{A}$.
Con todo, se dan las igualdades deseadas. □

Definición 3.6. *Sean ρ un operador, X un espacio, $q \in X$ y $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X.*

1. *El punto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$, si para cualquier $V \in \mathcal{V}_q$ y cualquier $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$.*

2. La κ-red $\langle x_F \rangle$ ρ-converge a q, lo que denotamos

$$x_F \rightarrow_\rho q$$

si para toda $V \in \mathcal{V}_q$, existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para toda $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, tenemos que $x_G \in \rho(V)$.

NOTA: Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X. Usaremos la terminología siguiente para los casos particulares listados a continuación:

1. Si $\rho(V) = V$: q es un *punto clausura* de $\langle x_F \rangle$ y $\langle x_F \rangle$ converge a q;
2. Si $\rho(V) = \overline{V}$: q es un *punto θ-clausura* de $\langle x_F \rangle$ y $\langle x_F \rangle$ θ-converge a q,
3. Si $\rho(V) = int(\overline{V})$: q es un *punto δ-clausura* de $\langle x_F \rangle$ y $\langle x_F \rangle$ δ-converge a q.

El resultado que sigue es frecuentemente utilizado en demostraciones posteriores.

Proposición 3.7 (Construcción útil)**.** *Sean $q \in X$, $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una base local de q y sea $\langle x_F \rangle$ cualquier κ-red en X tal que, para cada $F \in \kappa^{<\omega}$, $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$. Entonces $x_F \rightarrow_\rho q$.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{V}_q$. Veamos que, existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$.
Como $V \in \mathcal{V}_q$ entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $V_{\alpha_0} \subseteq V$. Definimos a $F = \{\alpha_0\}$, así $F \subseteq \kappa$ y $|F| = 1$, es decir, $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $x_G \in \rho(\bigcap_{\alpha \in G} V_\alpha) \subseteq \rho(V_{\alpha_0}) \subseteq \rho(V)$. Por lo tanto $x_F \rightarrow_\rho q$. □

Lema 3.8. *Sean ρ un operador, X un espacio y sea $q \in X$.*

1. Si $\langle x_F \rangle$ es una κ-red en X y $x_F \rightarrow_\rho q$, entonces q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$.

2. Si $\chi(X, q) \leq \kappa$ y $q \in A^\rho$, entonces existe una κ-red, $\langle x_F \rangle$, en A tal que $x_F \rightarrow_\rho q$.

Demostración. Verifiquemos la propiedad 1. Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X tal que $x_F \rightarrow_\rho q$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y sea $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Como $x_F \rightarrow_\rho q$, entonces para V, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$ se tiene que $x_G \in \rho(V)$. Definimos a $G = F \cup F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ y así, tenemos que para F, encontramos un $G \in [\kappa]^{<\omega}$, con $F \subseteq G$, tal que $x_G \in \rho(V)$, ya que $F_0 \subseteq G$. Por lo tanto para cada $V \in \mathcal{V}_q$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ $F \subseteq G$ tal que $x_G \in \rho(V)$ y por tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$.

Verifiquemos ahora la propiedad 2. Supongamos que $\chi(X,q) \leq \kappa$ y $q \in A^\rho$ donde $A \subseteq X$. Notamos que como $q \in A^\rho$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}_q$, $\rho(V) \cap A \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ base local para q tal que $|\mathcal{V}| = \chi(X,q)$. Ahora, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tomamos a $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha) \cap A$ un punto cualquiera fijo. Notemos que, en efecto, podemos tomar tal punto ya que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ se tiene que $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \neq \emptyset$, pues para todo $\alpha < \kappa$, $q \in V_\alpha$. Más aún, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $\rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha) \cap A \neq \emptyset$, pues $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \in \mathcal{V}_q$. Dado lo anterior, definimos a $\xi : ([\kappa]^{<\omega}, \subseteq) \to (X, \tau)$ como la función tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega} : \xi(F) = x_F$ y así tenemos que $\xi[[\kappa]^{<\omega}] \subseteq A$, es decir, ξ está en A. Más aún, como para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_F \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$, por la construcción útil, implicamos que $x_F \to_\rho q$. Por lo tanto existe $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to_\rho q$. $\square$

Definición 3.9. *Sea ξ una κ-red en X. Una λ-subred de ξ es una función $\xi \circ H$, donde H es una función de $[\lambda]^{<\omega}$ hacia $[\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $F \in [\lambda]^{<\omega}$, $F \cap \kappa \subseteq H(F)$,*

Una λ-subred es denotada como $\langle x_{H(F)} : F \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ o sólo $\langle x_{H(F)} \rangle$, donde $x_{H(F)} = (\xi \circ H)(F)$. Note que en el caso en que $\lambda \leq \kappa$, la condición sobre H, se reduce a $F \subseteq H(F)$.

Lema 3.10. *Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X y sea q un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$. Entonces existe una λ-subred de $\langle x_F \rangle$, que ρ-converge a q.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$, una base local para q.
Afirmación: Para cada $F \in [\lambda]^{<\omega}$, existe $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \cap \kappa \subseteq H(F)$ y $x_{H(F)} \in \rho(\cap\{V_\alpha : \alpha \in F\})$. Sea $F \in [\lambda]^{<\omega}$, por un lado sabemos que $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \in \mathcal{V}$ y que $F \cap \kappa \in [\kappa]^{<\omega}$. Como q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$, entonces existe $G_{F \cap \kappa} \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \cap \kappa \subseteq G_{F \cap \kappa}$ y $x_{G_{F \cap \kappa}} \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$. Tomamos $H(F) = G_{F \cap \kappa}$ y de esta manera tenemos que $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$, $F \cap \kappa \subseteq H(F)$ y $x_{H(F)} \in \rho(\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$. Ahora, definimos una función $H : [\lambda]^{<\omega} \to [\kappa]^{\omega}$ tal que para cada $F \in [\lambda]^{<\omega}$, $H(F) = G_{F \cap \kappa}$. De esta manera, $\langle x_{H(F)} \rangle$, es una λ-subred de $\langle x_F \rangle$. Resta verificar que, $x_{H(F)} \to_\rho q$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces, existe $\alpha_0 < \lambda$ tal que $V_{\alpha_0} \subseteq V$. Tomamos a $F = \{\alpha_0\} \in [\lambda]^{<\omega}$ y sea $C \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq C$. Como $H(C) = G_{C \cap \kappa}$, entonces, $x_{H(C)} \in \rho(\bigcap_{\alpha \in C} V_\alpha)$. Además, ya que $F \subseteq C$, entonces $\rho(\bigcap_{\alpha \in C} V_\alpha) \subseteq \rho(V_{\alpha_0}) \subseteq \rho(V)$. De lo cual se tiene que, $x_{H(C)} \in \rho(V)$. Por lo tanto, $x_{H(F)} \to_\rho q$. $\square$

Considere la siguiente propiedad fundamental de redes y subredes:

Si una red converge a q, entonces toda subred de ésta también converge a q $(*)$.

Además, recordar lo siguiente: Una subred de una red $\langle x_d : d \in D\rangle$, tiene la forma $\langle x_{f(e)} : e \in E\rangle$; donde E es un conjunto dirigido y $f : E \to D$, es una función tal que para todo $d_0 \in D$, existe $e_0 \in E$ tal que si $e \geq e_0$, entonces $f(e) \geq d_0$ (Para más detalles acerca de redes vea [11]). Para trasladar este enunciado a la teoría de κ redes, se debe considerar $\kappa \leq \lambda$ y $F \cap \kappa \subseteq H(F)$, teniendo esto, veamos: si $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $F_0 \in [\lambda]^{<\omega}$, y si $F_0 \subseteq G \in [\lambda]^{<\omega}$, entonces $F_0 \subseteq H(G)$ (ya que, $F_0 = F_0 \cap \kappa \subseteq G \cap \kappa \subseteq H(G)$). Con esta observación, podemos enunciar la propiedad $(*)$ empleando κ-redes:

Lema 3.11. *Sea $\langle x_F\rangle$ una κ-red en X y sea $\langle x_{H(F)}\rangle$ una λ-subred de $\langle x_F\rangle$ con $\kappa \leq \lambda$.*

1. *Si $x_F \to_\rho q$, entonces $x_{H(F)} \to_\rho q$.*
2. *Si q es un punto ρ-clausura de $\langle x_{H(F)}\rangle$, entonces q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$.*

Demostración. Veamos 1: Supongamos que $x_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$. Por demostrar que, existe $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\lambda]^{<\omega}$ con $H(F) \subseteq H(G)$, $x_{H(G)} \in \rho(V)$. Como $x_F \to_\rho q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$, entonces existe $F \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$, con $F \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$. Entonces existe $H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\lambda]^{<\omega}$ con $H(F) \subseteq H(G)$, $x_G \in \rho(V)$. Sea $G \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que $H(F) \subseteq H(G)$. Notemos que $x_{H(G)} \in \rho(V)$, pues $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) \subseteq H(G)$.

Veamos 2: Sea q un punto ρ-clausura de $\langle x_{H(F)}\rangle$ y sean $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$.
Por demostrar que existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$. Como $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $F \in [\lambda]^{<\omega}$, entonces existe $G' \in [\lambda]^{<\omega}$ con $H(F) \subseteq H(G')$ tal que $x_{H(G')} \in \rho(V)$. Definimos a $G = H(G')$ y así tenemos que existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$ (El hecho de que $F \subseteq G$ se da por: $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) \subseteq H(G') = G$). $\square$

Definición 3.12. *Una κ-red, $\langle x_F\rangle$ en X es universal si dado cualquier $A \subseteq X$, exactamente una de las siguientes proposiciones se verifica:*

1. *Existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in A$;*

2. Existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in X \setminus A$.

Lema 3.13. *Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X. Entonces existe una λ-subred de $\langle x_F \rangle$ con $\lambda \geq \kappa$ que es universal.*

Demostración. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq G\}$. Notamos que para todo $F_1, F_2 \in [\kappa]^{<\omega}$ se cumple lo siguiente:

1. $A_{F_1} \neq \emptyset$

2. $A_{F_1 \cup F_2} \subseteq A_{F_1} \cap A_{F_2}$

La propiedad 1 se cumple ya que $x_F \in A_F$ para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$. La propiedad 2, se cumple por lo siguiente: Sea $y \in A_{F_1 \cup F_2}$, entonces $y = x_G$ para algún $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_1 \cup F_2 \subseteq G$, y ya que F_1, $F_2 \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq G$, entonces $y \in A_{F_1}$ y $y \in A_{F_2}$, es decir, $y \in A_{F_1} \cap A_{F_2}$. Por lo tanto $A_{F_1 \cup F_2} \subseteq A_{F_1} \cap A_{F_2}$. Luego, de 1 y 2 se tiene que la colección $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ satisface la propiedad de la intesección finita (PIF). Sea $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ un ultrafiltro sobre X tal que $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (vea Proposiciones 2.69 y 2.54)(podemos suponer que $\lambda \geq \kappa$). Ahora bien, definimos a $H : [\lambda]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$, como sigue: Sea $F \in [\lambda]^{<\omega}$, entonces $F \cap \kappa \in [\kappa]^{<\omega}$, por la PIF, $A_{F\cap\kappa} \cap (\cap_{\alpha \in F} U_\alpha) \neq \emptyset$. Sea:

$$z \in A_{F\cap\kappa} \cap (\cap_{\alpha \in F} U_\alpha).$$

Puesto que $z \in A_{F\cap\kappa}$, existe $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $z = x_{G_F}$ y $F \cap \kappa \subseteq G_F$. Definimos a $H(F) = G_F$ y así tenemos que: $F \cap \kappa \subseteq H(F)$ y $x_{H(F)} = x_{G_F} = z \in \cap_{\alpha \in F} U_\alpha$. Por tanto $\langle x_{H(F)} \rangle$ es una λ-subred de $\langle x_F \rangle$.
Restaría ver la universalidad. Sea $E \subseteq X$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $E \in \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Entonces existe $\beta < \lambda$ tal que $E = U_\beta$. Tomamos al conjunto $\{\beta\} \in [\lambda]^{<\omega}$ y sea $G \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$, entonces $x_{H(G)} \in (\cap_{\alpha \in G} U_\alpha) \subseteq U_\beta = E$. El otro caso, es decir cuando $X \setminus E \in \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$, es análogo al que hemos presentado. Por lo tanto, $\langle x_{H(F)} \rangle$ es universal. □

Lema 3.14. *Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red universal en X y sea q un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$. Entonces $x_F \to_\rho q$.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces $\rho(V) \subseteq X$.
Afirmación: Existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F_0 \subseteq G$, entonces $x_G \in \rho(V)$. En efecto, pues de lo contrario, como $\langle x_F \rangle$ es universal, existe $F' \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F' \subseteq G$, entonces $x_G \in X \setminus \rho(V)$. Por otro lado, como q es un punto

ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$, entonces para cada $V \in \mathcal{V}_q$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G \in \rho(V)$; en particular para V y F' que tomamos, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F' \subseteq G$ tal que $x_G \in \rho(V)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F_0 \subseteq G$, entonces $x_G \in \rho(V)$ y así obtenemos que existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$ y por tanto $x_F \rightarrow_\rho q$. □

Teorema 3.15. *Sea X un espacio, $A \subseteq X$, y sea ρ un operador. Son equivalentes:*

1. *Si ξ es una κ-red en A, entonces existe $q \in A$ tal que q es un punto ρ-clausura de ξ en X;*

2. *Si ξ es una κ-red en A que es universal en X, entonces existe $q \in A$ tal que $\xi \rightarrow_\rho q$ en X.*

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Sea ξ una κ-red en A que es universal en X. Por hipótesis, existe $q \in A$ tal que q es un punto ρ-clausura de ξ en X; luego, por Lema 3.14, $\xi \rightarrow_\rho q$ en X.
[$2 \Rightarrow 1$] Sea ξ una κ-red en A, por Lema 3.13, existe $\xi \circ H$ una λ-subred de ξ con $\lambda \geq \kappa$ que es universal; luego, por hipótesis, existe $q \in A$ tal que $\xi \circ H \rightarrow_\rho q$ en X. Ahora, por Lema 3.8, q es un punto ρ-clausura de $\xi \circ H$ y, por Lema 3.11, q es un punto ρ-clausura de ξ en X. □

Corolario 3.16. *Sean X un espacio y ρ un operador. Son equivalentes:*

1. *Toda κ-red tiene un punto ρ-clausura;*

2. *Toda κ-red universal en X es ρ-convergente.*

Demostración. Basta tomar $A = X$ en el teorema anterior. □

Para terminar esta sección, presentamos algunos resultados sobre la relación que hay entre κ-redes, κ-redes universales, filtros y ultrafiltros.

En [3], se hace la siguiente mención de una primera forma de como ir y venir entre κ-redes y filtros.

Definición 3.17. *Definimos lo siguiente:*

1. *Sea $\xi = \langle x_F \rangle$ una κ-red, y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq G\}$. El filtro asociado a $\langle x_F \rangle$, denotado por $\mathcal{F}_\xi$, tiene como base de filtro a $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$.*

2. *Sea $\mathcal{L}$ un filtro de cardinalidad κ, digamos $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Una κ-red asociada con $\mathcal{L}$, denotada por $\xi_{\mathcal{L}}$, será $\langle x_F \rangle$, donde para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_F \in \bigcap\{L_\alpha : \alpha \in F\}$ un punto cualquiera fijo.*

Es posible verificar que con estas construcciones, la siguiente propiedad *usual* se preserva.

Proposición 3.18. *Sea $\xi = \langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ una κ-red en un espacio X. Entonces se satisfacen:*

1. *ξ converge a x si y sólo si $\mathcal{F}_\xi$ converge a x.*

2. *x es punto clausura de ξ si y sólo si x es punto clausura de $\mathcal{F}_\xi$.*

Demostración. Veamos (1): [$\Rightarrow$] Supongamos que ξ converge a x y sea $\mathcal{F}_\xi = \{A \subseteq X : \text{Existe } A_F \in \mathcal{B} \text{ tal que } A_F \subseteq A\}$ donde $\mathcal{B} = \{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega} \text{ y } F \subseteq G\}$. Demostremos que $\mathcal{F}_\xi$, converge a x, es decir que $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}_\xi$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$, como ξ converge a x, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in V$. Tomamos a $A_{F_0} \in \mathcal{B}$ y tenemos que $A_{F_0} \subseteq V$. De lo cual se sigue que $V \in \mathcal{F}_\xi$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}_\xi$, es decir, $\mathcal{F}_\xi$ converge a x.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que $\mathcal{F}_\xi$ converge a x y demostremos que ξ converge a x. Sea $V \in \mathcal{V}_x$, como $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}_\xi$, entonces $V \in \mathcal{F}_\xi$, con lo cual existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A_{F_0} \subseteq V$. Luego, si $G \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F_0 \subseteq G$, se tiene que, $x_G \in V$. Por lo tanto, ξ converge a x.

Veamos (2): [$\Rightarrow$] Supongamos que x es punto clausura de ξ y demostremos que también lo es para $\mathcal{F}_\xi$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$ y $A \in \mathcal{F}_\xi$. Entonces, por un lado, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A_{F_0} \in \mathcal{B}$ y $A_{F_0} \subseteq A$ y, por otro lado, se tiene que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$ existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in V$. Entonces, para F_0 se tiene que existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F_0 \subseteq G$ y $x_G \in V$. Además, como $x_G \in A_{F_0}$ y $A_{F_0} \subseteq A$, entonces $x_G \in A \cap V$, de lo cual se obtiene que $A \cap V \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{A}$ para cada $A \in \mathcal{F}_\xi$, es decir, x es punto clausura de $\mathcal{F}_\xi$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que x es punto clausura de $\mathcal{F}_\xi$ y veamos que también lo es para ξ. Sean $V \in \mathcal{V}_x$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Entonces $V \cap A_F \neq \emptyset$; luego, sea $z \in V \cap A_F$, entonces, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G = z$ y $x_G \in V$. Por lo tanto, ξ tiene a x como punto clausura. □

Ahora, dado un filtro, quisiéramos un resultado análogo al anterior, desafortunadamente con tal definición no hemos podido obtener las equivalencias similares de dicho resultado. Veamos lo que sí tenemos demostrado:

Proposición 3.19. *Sean X un espacio y $\mathcal{L}$ un filtro en X de cardinalidad κ, digamos $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{L}$ converge a x entonces $\xi_{\mathcal{L}}$ converge a x.*
2. *Si x es punto clausura de $\xi_{\mathcal{L}}$ entonces x es punto clausura de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Veamos (1.): Supongamos que $\mathcal{L}$ converge a x y probemos que $\xi_{\mathcal{L}}$ también converge a x. Sea $V \in \mathcal{V}_x$, entonces $V \in \mathcal{L}$, con lo cual existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $V = L_{\alpha_0}$. Tomamos a $F = \{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $x_G \in \bigcap_{\alpha \in G} L_\alpha$. Luego, como $F = \{\alpha_0\} \subseteq G$, entonces $\bigcap_{\alpha \in G} L_\alpha \subseteq L_{\alpha_0}$ y por tanto, $x_G \in L_{\alpha_0} = V$. Por lo tanto, $\xi_{\mathcal{L}}$ converge a x.

Veamos (2.): Supongamos que x es punto clausura de $\xi_{\mathcal{L}}$ y veamos que también lo es para $\mathcal{L}$. Sea $V \in \mathcal{V}_x$ y $L \in \mathcal{L}$, entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $L = L_{\alpha_0}$. Luego, para V y $\{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\alpha_0\} \subseteq G$ y $x_G \in V$. Además, por definición tenemos que $x_G \in \bigcap_{\alpha \in G} L_\alpha \subseteq L_{\alpha_0}$, de lo cual se sigue que $V \cap L_{\alpha_0} \neq \emptyset$, es decir, $V \cap L \neq \emptyset$. Por lo tanto, x es punto clausura de $\mathcal{L}$.

□

A pesar de no tener las equivalencias de este último resultado, podemos generalizar las anteriores dos proposiciones usando nuestro operador ρ respecto a filtros. Veamos una primera definición de ρ-convergencia y puntos ρ-clausura de filtros:

Definición 3.20. *Sean ρ un operador, X un espacio topológico, $q \in X$ y $\mathcal{L}$ un filtro en X.*

1. *El punto q es un punto ρ-clausura de $\mathcal{L}$ si para cada $V \in \mathcal{V}_q$ y para cualquier $L \in \mathcal{L}$, $L \cap \rho(V) \neq \emptyset$.*
2. *El filtro, $\mathcal{L}$, ρ-converge a q, lo que denotamos:*

$$\mathcal{L} \to_\rho q$$

si para toda $V \in \mathcal{V}_q$, $\rho(V) \in \mathcal{L}$.

NOTA: Sea $\mathcal{L}$ un filtro en X. Del mismo modo que para κ-redes se utiliza la terminología siguiente para los casos particulares listados a continuación:

1. Si $\rho(V) = V$: q es un punto clausura de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ converge a q;

2. Si $\rho(V) = \overline{V}$: q es un punto θ-clausura de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ θ-converge a q;

3. Si $\rho(V) = int(\overline{V})$: q es un punto δ-clausura de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ δ-converge a q.

Dado lo anterior, veamos las siguientes proposiciones:

Proposición 3.21. *Sean $\xi = \langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ una κ-red en un espacio X, ρ un operador y $q \in X$. Entonces se satisfacen:*

1. *ξ ρ-converge a q si y sólo si $\mathcal{F}_\xi$ ρ-converge a q.*

2. *q es punto ρ-clausura de ξ si y sólo si q es punto ρ-clausura de $\mathcal{F}_\xi$.*

Demostración. Veamos (1.): [$\Rightarrow$] Supongamos que ξ ρ-converge a q y sea $\mathcal{F}_\xi = \{A \subseteq X : \text{Existe } A_F \in \mathcal{B} \text{ tal que } A_F \subseteq A\}$ donde $\mathcal{B} = \{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega} \text{ y } F \subseteq G\}$. Veamos que $\mathcal{F}_\xi$, ρ-converge a q, es decir, veamos que para cada $V \in \mathcal{V}_q$, $\rho(V) \in \mathcal{F}_\xi$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, como ξ ρ-converge a q, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$. Tomamos a $A_{F_0} \in \mathcal{B}$ y tenemos que $A_{F_0} \subseteq \rho(V)$. De lo cual se sigue que $\rho(V) \in \mathcal{F}_\xi$. Por lo tanto, para cada $V \in \mathcal{V}_q$, $\rho(V) \in \mathcal{F}_\xi$, es decir, $\mathcal{F}_\xi$ ρ-converge a q.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que $\mathcal{F}_\xi$ ρ-converge a q y veamos que ξ ρ-converge a q. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, como $\mathcal{F}_\xi$ ρ-converge a q, entonces $\rho(V) \in \mathcal{F}_\xi$, entonces, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A_{F_0} \subseteq V$, de lo cual se sigue que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$. Por lo tanto, ξ ρ-converge a q.

Veamos (2.): [$\Rightarrow$] Supongamos que q es punto ρ-clausura de ξ y veamos que también lo es para $\mathcal{F}_\xi$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $A \in \mathcal{F}_\xi$. Entonces, por un lado, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A_{F_0} \in \mathcal{B}$ y $A_{F_0} \subseteq A$, y por otro lado, se tiene que, para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$. Entonces, para F_0, se tiene que existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F_0 \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$. Además, como $x_G \in A_{F_0}$ y $A_{F_0} \subseteq A$, entonces $x_G \in A \cap \rho(V)$, de lo cual se obtiene que $A \cap \rho(V) \neq \emptyset$. Así, q es punto ρ-clausura de $\mathcal{F}_\xi$.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que q es punto ρ-clausura de $\mathcal{F}_\xi$ y veamos que también lo es para ξ. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Entonces $\rho(V) \cap A_F \neq \emptyset$; luego, sea $z \in \rho(V) \cap A_F$, entonces, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G = z$ y $x_G \in \rho(V)$. Por lo tanto, ξ tiene a q como punto ρ-clausura. $\square$

Proposición 3.22. *Sean $\mathcal{L} = \{L_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un filtro de cardinalidad κ en un espacio X, ρ un operador y $q \in X$. Entonces se satisfacen:*

1. *Si $\mathcal{L}$ ρ-converge a q entonces $\xi_{\mathcal{L}}$ ρ-converge a q.*

2. Si q es punto ρ-clausura de $\xi_{\mathcal{L}}$ entonces q es punto ρ-clausura de $\mathcal{L}$.

Demostración. Veamos (1.): Supongamos que $\mathcal{L}$ ρ-converge a q y veamos que $\xi_{\mathcal{L}}$ también ρ-converge a q. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces $\rho(V) \in \mathcal{L}$, entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $\rho(V) = L_{\alpha_0}$. Tomamos a $F = \{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $x_G \in \bigcap_{\alpha\in G} L_\alpha$. Luego, como $F = \{\alpha_0\} \subseteq G$, entonces $\bigcap_{\alpha\in G} L_\alpha \subseteq L_{\alpha_0}$ y por tanto, $x_G \in L_{\alpha_0} = \rho(V)$. Por lo tanto, $\xi_{\mathcal{L}}$ ρ-converge a q.

Veamos (2.): Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\xi_{\mathcal{L}}$ y veamos que también lo es para $\mathcal{L}$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $L \in \mathcal{L}$, entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $L = L_{\alpha_0}$. Luego, para $\{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y V, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\alpha_0\} \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$. Además, por definición tenemos que $x_G \in \bigcap_{\alpha\in G} L_\alpha \subseteq L_{\alpha_0}$, de lo cual se sigue que $x_G \in L_{\alpha_0} \cap \rho(V)$ y por tanto $L_{\alpha_0} \cap \rho(V) \neq \emptyset$. Así, q es un punto ρ-clausura de $\mathcal{L}$. □

Ahora veamos unos resultados análogos a los que se tienen para ultraredes o redes universales y ultrafiltros.

Proposición 3.23. *Sea $\langle x_F\rangle$ una κ-red universal en X. Entonces $\mathcal{U} = \{A \subseteq X :$ Existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A_F \subseteq A\}$ es un ultrafiltro en X.*

Demostración. Sea $E \subset X$, como $\langle x_F\rangle$ es universal, tenemos dos casos:

i) Existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in E$. Entonces $A_F \subseteq E$ y por lo tanto, $E \in \mathcal{U}$.

ii) Existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in X\backslash E$. Entonces $A_F \subseteq X\backslash E$ y por lo tanto, $X\backslash E \in \mathcal{U}$.

De estos dos casos se obtiene que, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. □

Proposición 3.24. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X de cardinalidad κ, digamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Entonces $\xi_{\mathcal{U}}$ es una κ-red universal en X.*

Demostración. Sea $E \subset X$, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, tenemos dos casos:

i) Si $E \in \mathcal{U}$, entonces, existe $\beta < \kappa$ tal que $E = U_\beta$. Sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$, entonces $x_G \in \bigcap_{\alpha\in G} U_\alpha \subseteq U_\beta = E$, entonces $x_G \in E$. Así, existe $F = \{\beta\} \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in E$.

ii) Si $X\backslash E \in \mathcal{U}$, entonces, existe $\beta < \kappa$ tal que $X\backslash E = U_\beta$. Sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$, entonces $x_G \in \bigcap_{\alpha\in G} U_\alpha \subseteq U_\beta = X\backslash E$, entonces $x_G \in X\backslash E$. Así, existe $F = \{\beta\} \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que si $F \subseteq G$, entonces $x_G \in X\backslash E$.

De estos dos casos se obtiene que, $\xi_{\mathcal{U}}$ es κ-red universal. □

3.2. κ-redes y redes con conjuntos dirigidos de cardinalidad a lo más κ.

En esta sección consideramos la relación que existe entre las propiedades de convergencia y puntos clausura de sucesiones, κ-sucesiones, redes y κ-redes. Daremos inicio con la relación entre κ-sucesiones y κ-redes.

Definición 3.25. *Sea X un conjunto. Una κ-sucesión en X es una función $\varphi : \kappa \longrightarrow X$, donde κ es un cardinal infinito. Para cada $\alpha \in \kappa$, denotamos $x_\alpha = \varphi(\alpha)$. Así, una κ-sucesión en un conjunto X se denota por $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$.*

Definición 3.26. *Sean X un espacio, $q \in X$, ρ un operador, y sea $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ una κ-sucesión en X.*

(i) La κ-sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ ρ-converge a q, lo que denotamos $x_\alpha \rightarrow_\rho q$, si para cualquier $V \in \mathcal{V}_q$ existe $\alpha \in \kappa$ tal que para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta \in \rho(V)$.

(ii) El punto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ si dada cualquier $V \in \mathcal{V}_q$ y cualquier $\alpha \in \kappa$, existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in \rho(V)$.

Teorema 3.27. *Sean X un espacio, $q \in X$ y ρ un operador. Dada cualquier ω-red $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega}\rangle$ en X, existe una sucesión $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ en X tal que las siguientes proposiciones se cumplen:*

1. *$\{y_n\} \subseteq \{x_F\}$;*

2. *Si $x_F \rightarrow_\rho q$, entonces $y_n \rightarrow_\rho q$;*

3. *Si q es un punto ρ-clausura de $\langle y_n\rangle$, entonces q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$.*

Demostración. Sea $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega}\rangle$ una ω-red en X. Para cada $n \in \omega$, definimos a

$$y_n = x_{\{0,1,\dots,n\}}$$

Claramente se cumple 1 por definición.

Veamos que la sucesión $\langle y_n\rangle$ satisface 2: Supongamos que $x_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\omega]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, se tiene que $x_G \in \rho(V)$. Sea $\alpha = máx F \in \omega$.
Afirmación: Para todo $\beta \geq \alpha$, $y_\beta \in \rho(V)$. Sea $\beta \geq \alpha$, entonces $F \subseteq \{0, 1, \dots, \beta\} \in [\omega]^{<\omega}$, entonces $y_\beta = x_{\{0,1,\dots,\beta\}} \in \rho(V)$, y por tanto se tiene que $y_n \to_\rho q$.

Veamos 3: Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle y_n\rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\omega]^{<\omega}$. Tomamos a $\alpha = máx F \in \omega$, entonces existe $\beta \geq \alpha$ tal que $y_\beta = x_{\{0,1,\dots,\beta\}} \in \rho(V)$. Definimos a $G = \{0, 1, \dots, \beta\}$ y así tenemos que existe $G \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$. Por lo tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$. □

Ahora veamos un ejemplo para ilustrar que los recíprocos de los incisos 2 y 3, del teorema anterior, no siempre se cumplen.

Ejemplo 3.28. *Sea $\sum a_n$ una serie infinita en $\mathbb{R}$ que converge y tiene suma S, pero no es absolutamente convergente.*
Para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$, sea $x_F = \sum_{k\in F} a_k$. Entonces, para cada $n \in \omega$ tenemos que

$$y_n = x_{\{0,1,\dots,n\}} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Además, se tiene lo siguiente:

1. *$\langle y_n\rangle$ converge a S, pero $\langle x_F\rangle$ no converge.*
   En efecto, se cumple por la forma en que elegimos a la serie $\sum a_n$, es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que para todo $n \geq N$, $|S - y_n| < \epsilon$; sin embargo, como $\sum a_n$ no es absolutamente convergente, podemos permutar los sumandos de tal forma que $\langle x_F\rangle$ no converja. Así, el reciproco del inciso 2 del teorema anterior, no se cumple.

2. *Todo $z \in \mathbb{R}$ es un punto clausura de $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega}\rangle$.*
   Sea $z \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ y sea $F \in [\omega]^{<\omega}$, digamos $F = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, tomamos a $\sigma : \omega \to \omega$ una permutación de ω tal que $\sum a_{\sigma(n)} = z$. Ahora sean $\sigma(j_1) = i_1, \dots, \sigma(j_k) = i_k$, y entonces elegimos a n tal

que $n > j_1, \ldots, j_k$ y $|z - (a_{\sigma(0)} + \cdots + a_{\sigma(n)})| < \epsilon$. Definimos a $G = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ y con esto obtenemos que $F \subseteq G$ y $|z - x_G| = |z - \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}| < \epsilon$. Por lo tanto z es un punto clausura de $\langle x_F : F \in [\omega]^{<\omega}\rangle$; sin embargo, $\langle y_n \rangle$, sólo tiene a S como punto clausura.

La construcción en la demostración del teorema anterior, la cual comienza con una ω-red y da una sucesión, funciona solamente para el caso $\kappa = \omega$; por otro lado, la construcción en la dirección opuesta, la cual comienza con una κ-sucesión y da una κ-red, trabaja para todo κ.

Teorema 3.29. *Sean X un espacio, $q \in X$ y ρ un operador. Dada cualquier κ-sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ en X, existe una κ-red $\langle y_F \rangle$ en X tal que las siguientes proposiciones se cumplen:*

1. $\{y_F\} \subseteq \{x_\alpha\}$
2. $x_\alpha \to_\rho q$ *si y sólo si* $y_F \to_\rho q$
3. *q es un punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha \rangle$ si y sólo si q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F \rangle$*

Demostración. Sea $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ una κ-sucesión en X. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ definimos a $y_F = x_\alpha$ donde $\alpha = máxF$. Claramente, así como definimos la κ-red $\langle y_F \rangle$ se cumple 1.

Veamos 2:[$\Rightarrow$] Supongamos que $x_\alpha \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $\alpha \in \kappa$ tal que para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta \in \rho(V)$. Tomamos a $\{\alpha\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\alpha\} \subseteq G$, entonces $y_G = x_{máxG} \in \rho(V)$ pues $máxG \geq \alpha$. Definimos a $F = \{\alpha\}$ y así tenemos que existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $y_G \in \rho(V)$ y por tanto $y_F \to_\rho q$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $y_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $y_G \in \rho(V)$. Tomamos a $\alpha = máxF$ y sea $\beta < \kappa$ tal que $\beta \geq \alpha$, entonces $x_\beta = y_{\{\beta\} \cup F} \in \rho(V)$ pues $F \subseteq F \cup \{\beta\}$. Así, tenemos que existe $\alpha \in \kappa$ tal que para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta \in \rho(V)$ y, por tanto $x_\alpha \to_\rho q$.

Veamos 3:[$\Rightarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Entonces para $\alpha = máxF$, existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in \rho(V)$. Tomamos a $G = \{\beta\} \cup F \in [\kappa]^{<\omega}$ y tenemos que $y_G = x_{máx(\{\beta\} \cup F)} = x_\beta \in \rho(V)$. Así, tenemos que existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $y_G \in \rho(V)$ y por tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F \rangle$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $\alpha \in \kappa$.

Entonces para $F = \{\alpha\} \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $\{\alpha\} \subseteq G$ tal que $y_G \in \rho(V)$. Tomamos a $\beta = máxG$ y tenemos que $x_\beta = y_G \in \rho(V)$. Así, tenemos que existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in \rho(V)$ y por tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha \rangle$. □

Corolario 3.30. *Para cualquier espacio X y cualquier operador ρ, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Toda ω-red en X tiene un punto ρ-clausura.*

2. *Toda sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ en X tiene un punto ρ-clausura.*

Demostración. [1 $\Rightarrow$ 2] Sea $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión en X. Por el Teorema 3.29, existe una ω-red, $\langle y_F \rangle$, en X; luego, por hipótesis, $\langle y_F \rangle$ tiene un punto ρ-clausura y por tanto, $\langle x_n \rangle$ tiene un punto ρ-clausura.
[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $\langle y_F \rangle$ una ω-red en X. Por el Teorema 3.27, existe $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ sucesión en X, luego por hipótesis, $\langle x_n : n \in \omega \rangle$, tiene un punto ρ-clausura y por tanto, $\langle y_F \rangle$, tiene un punto ρ-clausura. □

Corolario 3.31. *Para cualquier espacio X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio Fréchet.*

2. *Si $q \in \overline{A}$, entonces existe una ω-red $\langle x_F \rangle$ en A tal que $x_F \to q$.*

Demostración. [1 $\Rightarrow$ 2] Sea $q \in \overline{A}$, como X es Fréchet, existe una sucesión $\langle y_n \rangle$ en A que converge a q, por el Teorema 3.29, existe, $\langle x_F \rangle$, ω-red en A que también converge a q.
[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $q \in \overline{A}$, por hipótesis, existe una ω-red $\langle x_F \rangle$ en A tal que $x_F \to q$. Por el Teorema 3.27, existe, $\langle y_n \rangle$, sucesión en A tal que $y_n \to q$ y por lo tanto X es un espacio *Fréchet*. □

Corolario 3.32. *Para cualquier espacio X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio secuencial.*

2. *Todo $A \subseteq X$ que satisface la siguiente condición es un conjunto cerrado: Si $\langle x_F \rangle$ es una ω-red en A y $x_F \to q$, entonces $q \in A$ (†).*

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Sea $A \subseteq X$ tal que A satisfisface (†). Veamos que A es cerrado. Para esto, demostremos que A es un conjunto secuencialmente cerrado. Sea $\langle x_n \rangle$ una sucesión en A tal que $x_n \to q$, por el Teorema 3.29, existe $\langle y_F \rangle$ ω-red en A tal que $y_F \to q$, luego, por la propiedad (†) que cumple el conjunto A, implicamos que $q \in A$. Por lo tanto A, es secuencialmente cerrado y ya que X es un espacio secuencial, entonces A es cerrado.
[$2 \Rightarrow 1$] Sea $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado y veamos que A es un conjunto cerrado. Para esto, demostremos que A cumple la propiedad (†). Sea $\langle x_F \rangle$, una ω-red en A tal que $x_F \to q$. Por el Teorema 3.27, existe $\langle y_n \rangle$ sucesión en A tal que $y_n \to q$, como A es un conjunto secuencialmente cerrado, entonces $q \in A$. Por lo tanto A, cumple la propiedad (†), de lo cual se sigue que, A es cerrado y por tanto, X es un espacio secuencial. $\square$

Recordemos que una relación $\leq$ sobre un conjunto D es dirigida si para cualesquiera $d_1, d_2, \ldots, d_k \in D$, existe $e \in D$ tal que $d_j \leq e$ para todo $1 \leq j \leq k$. Si $\leq$ es además reflexiva y transitiva, diremos que $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. En general, la relación $\leq$ no es antisimétrica, sin embargo podemos definir una relación de equivalencia $\sim$ sobre $D \times D$ por:

$$d \sim e \Leftrightarrow d \leq e \text{ y } e \leq d$$

Entonces $(D/\sim, \leq^*)$ (donde $\leq^*$ esta definido por $[d] \leq^* [e] \Leftrightarrow d \leq e$) es un conjunto dirigido y $\leq^*$ es una relación antisimétrica (En efecto: Si $[d] \leq^* [e]$ y $[e] \leq^* [d]$, entonces $d \leq e$ y $e \leq d$, entonces $d \sim e$, entonces $[d] = [e]$). Veamos que las clases están bien definidas, es decir, que no dependen del representante: Sean $[d], [e] \in D/\sim$ tales que $[d] \leq^* [e]$. Sean $x \in [d]$ y $y \in [e]$. Veamos que $x \leq y$. Como $x \in [d]$, entonces $x \sim d$, con lo cual $x \leq d$ y $d \leq x$. Por otro lado, como $y \in [e]$, entonces $y \sim e$, entonces $y \leq e$ y $e \leq y$, y ya que $[d] \leq^* [e]$, entonces $d \leq e$. Así, tenemos que $x \leq d$, $d \leq e$ y $e \leq y$, de lo cual implicamos que $x \leq y$. Por lo tanto, las clases no dependen del representante.

Más aún, tenemos el siguiente lema:

Lema 3.33. *Sea $\langle x_d : d \in D \rangle$ una red en X y sea $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$ una red en X, obtenida como sigue:*

$$x_{[d]} = x_e, \text{ donde } e \in [d].$$

Entonces

1. $\{x_{[d]}\} \subseteq \{x_d\}$.

2. *Si $x_d \to_\rho q$, entonces $x_{[d]} \to_\rho q$.*

3. *Si q es un punto ρ-clausura de $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim\rangle$, entonces q es un punto ρ-clausura de $\langle x_d : d \in D\rangle$.*

Demostración. La condición 1 se sigue de la definición de $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim\rangle$.

Veamos que ocurre 2. Supongamos que $x_d \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $d \in D$ tal que para todo $e \in D$ con $e \geq d$, $x_e \in \rho(V)$. Tomamos a $[d] \in D/\sim$ y sea $[e] \in D/\sim$ tal que $[d] \leq^* [e]$, entonces $x_{[e]} = x_{e'}$ donde $e^{'} \in [e]$, entonces $e^{'} \sim e$, entonces $e^{'} \leq e$ y $e \leq e^{'}$, y ya que $[d] \leq^* [e]$, entonces $d \leq e$, de lo cual implicamos que $d \leq e^{'}$, entonces $x_{e'} \in \rho(V)$, es decir, $x_{[e]} \in \rho(V)$. Por lo tanto $x_{[d]} \to_\rho q$.

Ahora veamos 3: Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim\rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $d \in D$, entonces para $[d] \in D/\sim$, existe $[e] \in D/\sim$ con $[d] \leq^* [e]$ tal que $x_{[e]} \in \rho(V)$, entonces existe $e^{'} \in D$ con $d \leq e^{'}$ tal que $x_{e'} \in \rho(V)$, donde $e^{'} \in [e]$ y es tal que $x_{[e]} = x_{e'}$. Por lo tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_d : d \in D\rangle$. $\square$

Lema 3.34. *Sea $\langle x_d : d \in D\rangle$ una red en X tal que $|D| = \kappa$ y la relación de orden $\leq$ para D es antisimétrica. Entonces existe una κ-red $\langle y_F\rangle$ en X tal que las siguientes proposiciones se cumplen:*

1. *$\{y_F\} \subseteq \{x_d\}$.*

2. *$x_d \to_\rho q$ si y sólo si $y_F \to_\rho q$.*

3. *q es un punto ρ-clausura de $\langle x_d\rangle$ si y sólo si q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F\rangle$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $D = \kappa$. La κ-red requerida es obtenida como sigue:
Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, digamos $F = \{d_1, \ldots, d_m\}$, sea $y_F = x_d$ donde $d \in D$ y es tal que para todo $i = \overline{1,m}$, $d_i \leq d$. Siempre que sea posible, elegimos $d \in F$. Notar que si $G = \{d_1, \ldots, d_m, e\}$ donde para todo $i = \overline{1,m}$, $d_i \leq e$, entonces $y_G = x_e$(Aquí se usa la antisimetría de $\leq$).

Veamos 1: Es claro que se cumple por definición de $\langle y_F\rangle$.

Veamos 2: $[\Rightarrow]$ Supongamos que $x_d \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $d \in D$ tal que para cada $e \in D$ con $d \leq e$, $x_e \in \rho(V)$, tomamos a $\{d\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{d\} \subseteq G$, entonces $y_G = x_e$ donde para cada $g \in G$, $e \geq g$; ya que $\{d\} \subseteq G$, entonces $e \geq d$, entonces $y_G = x_e \in \rho(V)$. Por lo

tanto $y_F \to_\rho q$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $y_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $y_G \in \rho(V)$, tomamos a $d \in D$ tal que para todo $f \in F$, $d \geq f$ y, sea $e \in D$ tal que $e \geq d$, entonces $x_e = y_G \in \rho(V)$ donde $G = F \cup \{e\}$. Por lo tanto, $x_d \to_\rho q$.

Veamos 3: [$\Rightarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle x_d \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$, digamos $F = \{d_1, \ldots, d_m\}$. Sea $d \in D$ tal que para todo $i = \overline{1,m}$, $d \geq d_i$, entonces para tal d, existe $e \in D$ con $d \leq e$ tal que $x_e \in \rho(V)$, tomamos a $G = F \cup \{e\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y tenemos que $y_G = x_e \in \rho(V)$. Por lo tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F \rangle$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de $\langle y_F \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $d \in D$, entonces para $\{d\} \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $\{d\} \subseteq G$ tal que $y_G \in \rho(V)$, pero $y_G = x_e$ donde $e \in D$ es tal que para cada $g \in G$, $e \geq g$, entonces existe $e \in D$ con $e \geq d$ tal que $x_e \in \rho(V)$. Por lo tanto q es un punto ρ-clausura de $\langle x_d \rangle$. □

Lema 3.35 (Propiedad de Expansión). *Sea $\langle x_F : F \in [\lambda]^{<\omega} \rangle$ una λ-red en X. Para cada $\kappa \geq \lambda$, existe una κ-red $\langle y_F : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ en X tal que:*

1. *$\{y_F\} \subseteq \{x_F\}$.*
2. *$x_F \to_\rho q$ si y sólo si $y_F \to_\rho q$.*
3. *q es un punto ρ-clausura de la λ-red $\langle x_F \rangle$ si y sólo si q es un punto ρ-clausura de la κ-red $\langle y_F \rangle$.*

Demostración. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea

$$y_F = x_{F \cap \lambda}.$$

Veamos 1: Se cumple por la definición de $\langle y_F \rangle$.

Veamos 2: [$\Rightarrow$] Supongamos que $x_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\lambda]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $x_G \in \rho(V)$. Como $\lambda \leq \kappa$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $y_G = x_{G \cap \lambda} \in \rho(V)$ (pues $F \subseteq G \cap \lambda$). Por lo tanto $y_F \to_\rho q$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $y_F \to_\rho q$ y sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $y_G \in \rho(V)$. Tomamos a $F_0 = F \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$ y sea $G \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que $F_0 \subseteq G$. Si denotamos por $L = F \cup G$, entonces $L \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq L$, entonces $y_L \in \rho(V)$, pero notamos que $y_L = x_{L \cap \lambda} = x_G$

(pues $L \cap \lambda = (F \cup G) \cap \lambda = (F \cap \lambda) \cup (G \cap \lambda) = F_0 \cup G = G$). Así, $x_G \in \rho(V)$ y por lo tanto $x_F \to_\rho q$.

Veamos 3: [$\Rightarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de la λ-red $\langle x_F \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces para $F_0 = F \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$, existe $G \in [\lambda]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$ tal que $x_G \in \rho(V)$. Si denotamos por $L = F \cup G$, entonces $L \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq L$, además de que $y_L = x_{L\cap\lambda} \in \rho(V)$ (pues $L \cap \lambda = (F \cup G) \cap \lambda = (F \cap \lambda) \cup (G \cap \lambda) = F_0 \cup G = G$). Así, $y_L = x_G \in \rho(V)$ y por lo tanto q es un punto ρ-clausura de la κ-red $\langle y_F \rangle$.
[$\Leftarrow$] Supongamos que q es un punto ρ-clausura de la κ-red $\langle y_F \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\lambda]^{<\omega}$, entonces $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $y_G \in \rho(V)$, entonces existe $G_0 = G \cap \lambda \in [\lambda]^{<\omega}$ con $F \subseteq G_0$ tal que $y_G = x_{G\cap\lambda} = x_{G_0} \in \rho(V)$ (ya que $F \subseteq G$, entonces $F \cap \lambda \subseteq G \cap \lambda$, entonces $F \subseteq G_0$). Así, $y_G = x_{G_0} \in \rho(V)$ y por lo tanto q es un punto ρ-clausura de la λ-red $\langle x_F \rangle$. $\square$

Como una consecuencia de los tres lemas anteriores, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.36. *Sea X un espacio, ρ un operador, y sea κ un cardinal infinito. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Toda κ-red en X tiene un punto ρ-clausura.*

2. *Toda λ-red en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, tiene un punto ρ-clausura.*

3. *Toda red $\langle x_d : d \in D \rangle$ en X con $|D| \leq \kappa$, tiene un punto ρ-clausura.*

4. *Toda red $\langle x_d : d \in D \rangle$ en X con $|D| = \kappa$, tiene un punto ρ-clausura.*

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Inmediato del Lema 3.35.
[$2 \Rightarrow 3$] Sea $\langle x_d : d \in D \rangle$, una red en X, con $|D| \leq \kappa$, digamos $|D| = \lambda \leq \kappa$, entonces por el Lema 3.33, existe $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim \rangle$ red en X, donde su relación es antisimétrica, luego por el Lema 3.34, existe $\langle y_F \rangle$, λ-red en X, ahora por hipótesis, $\langle y_F \rangle$, tiene un punto ρ-clausura, entonces, $\langle x_{[d]} \rangle$, tiene un punto ρ-clausura, entonces $\langle x_d : d \in D \rangle$ tiene un punto ρ-clausura.
[$3 \Rightarrow 4$] Inmediato.
[$4 \Rightarrow 1$] Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en X, como $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$, entonces por hipótesis $\langle x_F \rangle$ tiene un punto ρ-clausura. $\square$

3.3. Espacios κ-Fréchet y Espacios κ-Red.

En toda esta sección trabajaremos con la elección $\rho(V) = V$, esto con el fin de extender los conceptos de espacios *Fréchet* y espacios *secuenciales* a *cardinales más grandes*. Más adelante se hará notar mediante unos resultados que, tanto las definiciónes expuestas por Meyer en [7] y las que se darán a continuación (por lemas anteriores), resultan ser las mismas.

Definición 3.37. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Diremos que:*

1. *X es κ-Fréchet si para todo elemento $q \in \overline{A}$ existe una κ-red $\langle x_F \rangle$ en A tal que $x_F \to q$.*
2. *A es κ-red cerrado si satisface la siguiente propiedad: Si $\langle x_F \rangle$ es una κ-red en A y $x_F \to q$, entonces $q \in A$.*
3. *X es un espacio κ-red si todo subconjunto κ-red cerrado de X es un conjunto cerrado.*

Ahora veamos unos resultados sencillos acerca de estos conceptos pero que son de gran utilidad en demostraciones de resultados posteriores.

Proposición 3.38. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Si A es un conjunto cerrado de X, entonces A es un conjunto κ-red cerrado.*

Demostración. Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to q$. Supongamos que $q \notin A$, entonces $q \in X \backslash A$; luego, como A es un conjunto cerrado, entonces $X \backslash A$ es abierto, de lo cual se sigue que $X \backslash A \in \mathcal{V}_q$, y ya que $x_F \to q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $x_G \in X \backslash A$, lo cual es una contradicción, pues $\langle x_F \rangle$ es κ-red en A. Por lo tanto, $q \in A$ y por tanto, A es κ-red cerrado. $\square$

Proposición 3.39. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Si A es κ-red cerrado y $\lambda \leq \kappa$, entonces A es λ-red cerrado.*

Demostración. Supongamos que A es κ-red cerrado y que A no es λ-red cerrado, entonces existe $\langle y_F \rangle$, λ-red en A tal que $y_F \to q$ y $q \notin A$. Por el Lema 3.35, existe $\langle x_F \rangle$, κ-red en A tal que $x_F \to q$ y $q \notin A$, lo cual es una contradicción, pues A es un conjunto κ-red cerrado. Por lo tanto A es λ-red cerrado. $\square$

Proposición 3.40. *Sea X un espacio. Entonces las siguientes proposiciones se cumplen:*

1. *Si X es λ-Fréchet y $\lambda \leq \kappa$, entonces X es κ-Fréchet.*

2. *Si X es un espacio λ-red y $\lambda \leq \kappa$, entonces X es un espacio κ-red.*

Demostración. La propiedad 1 se sigue de inmediato del Lema 3.35.

Veamos 2: Supongamos que X es un espacio λ-red y que $\lambda \leq \kappa$. Sea $A \subseteq X$ κ-red cerrado, por la Proposición 3.39, tenemos que A es λ-red cerrado, como X es un espacio λ-red, entonces A es cerrado. Por lo tanto, X es un espacio κ-red. $\square$

Proposición 3.41. *Para todo κ se cumple que si X es κ-Fréchet, entonces X es un espacio κ-red.*

Demostración. Sea κ un cardinal infinito y supongamos que X es κ-Fréchet. Sean $A \subseteq X$ κ-red cerrado y $q \in \overline{A}$, como X es κ-Fréchet, entonces existe $\langle x_F \rangle$, κ-red en A tal que $x_F \to q$, y ya que A es κ-red cerrado, entonces $q \in A$. De esta forma, A es cerrado y por lo tanto X es un espacio κ-red. $\square$

Proposición 3.42. *Para todo κ se cumple que si $\chi(X) \leq \kappa$, entonces X es κ-Fréchet.*

Demostración. Sea κ un cardinal infinito y supongamos que $\chi(X) \leq \kappa$. Sea $A \subseteq X$ y $q \in \overline{A}$. Denotemos por $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base local para q y definamos lo siguiente:

Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x_F \in (\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha) \cap A$ un punto cualquiera fijo y sea $\xi : ([\kappa]^{<\omega}, \subseteq) \longrightarrow X$ una función tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $\xi(F) = x_F$. Entonces, por la Proposición 3.7, tenemos que $x_F \to q$. Así, existe $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to q$. Por lo tanto, X es κ-Fréchet. $\square$

Proposición 3.43. *Para todo κ se cumple que si X es un espacio κ-red, entonces $t(X) \leq \kappa$.*

Demostración. Para ver que $t(X) \leq \kappa$, mostraremos que para todo $A \subseteq X$, no cerrado, existe $C \subseteq A$ con $|C| \leq \kappa$ tal que $\overline{C} \setminus A \neq \emptyset$ (Vea el Teorema 1.64). Sea $A \subseteq X$ no cerrado, entonces A no es un conjunto κ-red cerrado (pues de lo contrario, si A es κ-red cerrado, como X es un espacio κ-red, entonces A es cerrado, contradicción); luego, existe, $\langle x_F \rangle$, κ-red en A y $q \notin A$ tal que $x_F \to q$. Sea $C = \{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$. Es claro que, $C \subseteq A$, $|C| \leq \kappa$ y $\overline{C} \setminus A \neq \emptyset$ (pues $q \in \overline{C}$ y $q \notin A$). Por lo tanto, $t(X) \leq \kappa$. $\square$

Observación 3.44. *Los recíprocos de los últimos tres resultados, en general no siempre se cumplen. Ver los ejemplos al final de esta sección.*

Ahora, enunciamos los conceptos de espacios Fréchet y espacios secuenciales, en términos de nuestra definición cuando $\kappa = \omega$.

Proposición 3.45. *Sea X un espacio. Entonces*

1. *X es un espacio Fréchet si y sólo si X es un espacio ω-Fréchet.*

2. *X es un espacio Secuencial si y sólo si X es un espacio ω-red.*

Demostración. Veamos 1: Inmediato del Corolario 3.31.
Veamos 2: Inmediato del Corolario 3.32. □

Con los 2 resultados que siguen, mostramos lo dicho al inicio de esta sección, es decir, que tanto la definición expuesta por Meyer (ver [7]), con redes cuyos conjuntos dirigidos tienen cardinalidad a lo más κ y la de espacios κ-Fréchet y espacios κ-red que nosotros ya hemos dado, resultan ser las mismas. Antes, damos las definiciones exhibidas por Meyer.

Definición 3.46. *Sea X un espacio y sea κ un cardinal infinito. Entonces*

1. *Diremos que X es κ-Fréchet si para todo $A \subseteq X$ y $q \in \overline{A}$, existe una red $\langle x_d : d \in D\rangle$ en A con $|D| \leq \kappa$ tal que $x_d \to q$.*

2. *Diremos que X es κ-red si para todo $A \subseteq X$ con la siguiente propiedad, es un conjunto cerrado: Si $\langle x_d : d \in D\rangle$, es una red en A con $|D| \leq \kappa$ y $x_d \to q$, entonces $q \in A$.*

Teorema 3.47. *Sean X un espacio y κ un cardinal infinito. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es κ-Fréchet.*

2. *Si $q \in \overline{A}$, entonces existe una red $\langle x_d : d \in D\rangle$ en A con $|D| \leq \kappa$ tal que $x_d \to q$.*

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Es claro, ya que $|[\kappa]^{<\omega}| \leq \kappa$.
[$2 \Rightarrow 1$] Sea $A \subseteq X$ y $q \in \overline{A}$, por hipótesis, existe $\langle x_d : d \in D\rangle$, red en A con $|D| = \lambda \leq \kappa$ tal que $x_d \to q$, por el Lema 3.33, existe $\langle x_{[d]} : [d] \in D/\sim\rangle$, red en A donde su relación es antisimétrica y es tal que $x_{[d]} \to q$; luego, por el Lema 3.34, existe, $\langle y_F\rangle$, λ-red en A tal que $y_F \to q$. Finalmente, por el Lema 3.35, existe, $\langle x_F\rangle$, κ-red en A tal que $x_F \to q$. Por lo tanto, X es κ-Fréchet. □

Teorema 3.48. *Sean X un espacio y κ un cardinal infinito. Las siguientes son equivalentes:*

1. *X es un espacio κ-red.*

2. *Todo $A \subseteq X$ con la siguiente propiedad, es un conjunto cerrado: Si $\langle x_d : d \in D \rangle$, es una red en A con $|D| \leq \kappa$ y $x_d \to q$, entonces $q \in A$ $(\diamond)$.*

Demostración. [1 $\Rightarrow$ 2] Sea $A \subseteq X$ con la propiedad $(\diamond)$. Veamos que A es un conjunto cerrado, para esto, demostremos que A es un conjunto κ-red cerrado. Supongamos lo contrario, es decir, que A no es κ-red cerrado, entonces existe $\langle x_F \rangle$, κ-red en A tal que $x_F \to q$ y $q \notin A$, lo cual es una contradicción, pues A cumple la propiedad $(\diamond)$ con $D = [\kappa]^{<\omega}$. Por lo tanto A es κ-red cerrado, y ya que X es un espacio κ-red, implicamos que A es cerrado.
[2 $\Rightarrow$ 1] Sea $A \subseteq X$ κ-red cerrado. Veamos que A es un conjunto cerrado, para esto, demostremos que dicho conjunto cumple la propiedad $(\diamond)$. Supongamos que A no cumple tal propiedad, entonces existe $\langle x_d : d \in D \rangle$ red en A con $|D| \leq \kappa$ tal que $x_d \to q$ y $q \notin A$. Luego, usando los lemas 3.33, 3.34 y 3.35, podemos obtener una κ-red $\langle x_F \rangle$ en A tal que $x_F \to q$ y $q \notin A$, lo cual es una contradicción, pues A es un conjunto κ-red cerrado. Por lo tanto A cumple la propiedad $(\diamond)$, de lo cual A es cerrado y por tanto X es un espacio κ-red. $\square$

Ahora veamos que relación tienen los espacios κ-Fréchet y κ-red con los espacios κ-transitivos; veamos la siguiente definición.

Definición 3.49. *Un espacio X es* κ-transitivo *si lo siguiente se cumple para toda κ-red, $\langle x_F \rangle$, en X:*
Si $x_F \to q$, y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe una κ-red $\langle x_{F,G} : G \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ en X tal que $x_{F,G} \to x_F$, entonces existe una κ-red en $\{x_{F,G} : F, G \in [\kappa]^{<\omega}\}$ que converge a q.

Proposición 3.50. *Todo espacio κ-Fréchet es κ-transitivo.*

Demostración. Sea X un espacio κ-Fréchet y sea $\langle x_F \rangle$, una κ-red en X tal que $x_F \to q$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $\langle x_{F,G} : G \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ κ-red en X tal que $x_{F,G} \to x_F$. Sea $A = \{x_{F,G} : F, G \in [\kappa]^{<\omega}\}$. Veamos que $q \in \overline{A}$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $x_G \in V$. En particular, notamos que $V \in \mathcal{V}_{x_F}$, entonces existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G' \in [\kappa]^{<\omega}$ con $G \subseteq G'$, $x_{F,G'} \in V$, de lo cual se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$ y por tanto $q \in \overline{A}$. Luego, como X es κ-Fréchet, existe una κ-red en A que converge a q. $\square$

Más aún, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.51. *Para cualquier espacio X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) X es κ-Fréchet.

(b) X es un espacio κ-red y κ-transitivo.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Inmediato de la Proposición 3.41 y de la Proposición 3.50.
$[(b) \Rightarrow (a)]$ Sea $A \subseteq X$ y $q \in \overline{A}$. Definimos a

$$L = \{p \in X : \text{ Existe } \langle x_F \rangle, \kappa\text{-red en } A \text{ tal que } x_F \to p\}$$

Notamos que $A \subseteq L$. Afirmamos que L es un conjunto κ-red cerrado. En efecto, sea $\langle x_F \rangle$, una κ-red en L tal que $x_F \to y$. Como para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_F \in L$, entonces para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe una κ-red, $\langle y_F \rangle$, en A tal que $y_F \to x_F$. Por κ-transitividad, tenemos que existe una κ-red en $\{y_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq A$ que converge a y, de lo cual se tiene que $y \in L$. Por lo tanto, L es un conjunto κ-red cerrado.
Ahora, como X es un espacio κ-red, entonces L es un conjunto cerrado. Además, como $A \subseteq L$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{L} = L$, y dado que $q \in \overline{A}$, entonces $q \in L$, de lo cual existe una κ-red, $\langle x_F \rangle$, en A tal que $x_F \to q$. Por lo tanto, X es κ-Fréchet. $\square$

Teorema 3.52. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea κ un cardinal infinito. Entonces, existe una topología φ sobre X tal que:*

1. *$\tau \subseteq \varphi$*
2. *Para toda κ-red, $\langle x_F \rangle$, en X: $x_F \to q$ para τ si y sólo si $x_F \to q$ para φ*
3. *(X, φ) es un espacio κ-red*
4. *Si σ es cualquier otra topología en X tal que (X, σ) es un espacio κ-red y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\varphi \subseteq \sigma$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{A : A$ es un subconjunto κ-red cerrado de $(X,\tau)\}$. Veamos que $\mathcal{C}$ satisface todos los axiomas para conjuntos cerrados de una topología φ sobre X.
Primero notamos que $\emptyset$ es un conjunto κ-red cerrado por vacuidad, y por tanto, $\emptyset \in \mathcal{C}$. Además, es claro que $X \in \mathcal{C}$. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Veamos que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$. Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en $A_1 \cup A_2$ tal que $x_F \to q$, veamos que $q \in A_1 \cup A_2$. Tenemos dos casos:

a) Existe $i_0 \in \{1,2\}$ y existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in A_{i_0}$. En este caso, definimos una función $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $H(F) = F \cup F_0$. Con esto, obtenemos una κ-subred, $\langle x_{H(F)} \rangle$, de $\langle x_F \rangle$ en A_{i_0}, que converge a q (ver el Lema 3.11). Luego, como A_{i_0} es κ-red cerrado, entonces $q \in A_{i_0} \subseteq A_1 \cup A_2$. Por lo tanto, $A_1 \cup A_2$ es κ-red cerrado.

b) Para todo $i \in \{1,2\}$ y para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G_F$ y $x_{G_F} \notin A_i$. En este caso, tomamos a $i_0 \in \{1,2\}$ cualquiera y definimos una función $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $H(F) = G_F$. Con esto, obtenemos una κ-subred, $\langle x_{H(F)} \rangle$, de $\langle x_F \rangle$ en A_j donde $j \in \{1,2\} \backslash \{i_0\}$, que converge a q (ver el Lema 3.11). Luego, como A_j es κ-red cerrado, entonces $q \in A_j \subseteq A_1 \cup A_2$. Por lo tanto, $A_1 \cup A_2$ κ-red cerrado.

Ahora, sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{C}$. Veamos que $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{C}$. Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ tal que $x_F \to q$, entonces para todo $\alpha \in I$, $\{x_F\} \subseteq A_\alpha$ y $x_F \to q$, entonces para todo $\alpha \in I$, $\langle x_F \rangle$ es κ-red en A_α y $x_F \to q$, entonces para todo $\alpha \in I$, $q \in A_\alpha$, entonces $q \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, de lo cual se sigue que $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto κ-red cerrado en (X,τ). Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}$ cumple lo requerido.

Definimos a la topología φ sobre X como sigue:

$$\varphi = \{X \backslash A : A \in \mathcal{C}\}$$

Afirmación: φ cumple con 1, 2, 3 y 4 del Teorema 3.52.

Veamos 1: Sea $U \in \tau$ y veamos que $X \backslash U$ es κ-red cerrado. En efecto, como U es abierto, $X \backslash U$ es cerrado, y por la Proposición 3.38, $X \backslash U$ es un conjunto κ-red cerrado. Así, $U = X \backslash (X \backslash U) \in \varphi$ y por lo tanto se tiene que $\tau \subseteq \varphi$.

Veamos 2: Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en X.
[$\Rightarrow$] Supongamos que $x_F \to q$ para τ y que $x_F \nrightarrow q$ para φ. Entonces existe

$V \in \mathcal{V}_q^{\varphi}$ tal que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G \notin V$. Entonces existe $A \in \mathcal{C}$ tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G_F$ tal que $x_{G_F} \in A$. Consideremos $H : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}$ la función definida por $H(F) = G_F$ para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$. Así, se cumple que $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) = G_F$ y por tanto, $\langle x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega} \rangle$ es una κ-subred de $\langle x_F \rangle$ en A. Ahora, por Lema 3.11, como $x_F \to q$ para τ, entonces $x_{H(F)} \to q$ para τ; así, $\langle x_{H(F)} \rangle$ es κ-red en A tal que $x_{H(F)} \to q$, entonces $q \in A$, lo cual es una contradicción, pues $q \in V = X \backslash A$. Por lo tanto $x_F \to q$ para φ.
[$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $x_F \to q$ para φ y que $x_F \nrightarrow q$ para τ. Entonces existe $V \in \mathcal{V}_q^{\tau}$ tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G \notin V$. Por (1), tenemos que φ es más fina que τ, entonces $V \in \mathcal{V}_q^{\varphi}$ y es tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G \notin V$, lo cual implica que $x_F \nrightarrow q$ para φ, contradicción. Por lo tanto, $x_F \to q$ para τ.

Veamos 3: Sea A un subconjunto κ-red cerrado en (X, φ). Por demostrar que A es cerrado en φ. Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to q$ para τ, por (2), $x_F \to q$ para φ, entonces $q \in A$, entonces A es κ-red cerrado en (X, τ), es decir, $A \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, A es cerrado en (X, φ). Así, (X, φ) es un espacio κ-red.

Veamos 4: Sea σ otra topología sobre X, la cual lo hace un espacio κ-red y tal que $\tau \subseteq \sigma$. Por demostrar que $\varphi \subseteq \sigma$. Sea $A \in \mathcal{C}$. Verifiquemos que A es κ-red cerrado en σ. Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to q$ en σ, entonces $x_F \to q$ en τ (pues σ es más fina que τ), entonces $q \in A$, de lo cual se obtiene que, A es κ-red cerrado en σ. Luego, como (X, σ) es un espacio κ-red, entonces A es cerrado en σ, y en consecuencia, $\varphi \subseteq \sigma$. □

Corolario 3.53. *Sea (X, τ) un espacio topológico, sea κ un cardinal infinito y supongamos que X no es κ-transitivo. Entonces existe una topología φ sobre X, con $\tau \subseteq \varphi$ y tal que (X, φ) es un espacio κ-red que no es κ-Fréchet.*

Demostración. Por el Teorema 3.52, existe φ una topología sobre X tal que $\tau \subseteq \varphi$ y (X, φ) es un espacio κ-red; además, para toda κ-red en X, se mantienen los mismos puntos de convergencia respecto a cada topología. Luego, como (X, τ) no es κ-transitivo, entonces (X, φ) tampoco lo es, y por el Teorema 3.51, (X, φ) no es κ-Fréchet. □

Definición 3.54. *Sea X un espacio topológico y sea κ un cardinal infinito. Definimos a*

$$cl_{\kappa} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

por

$$cl_\kappa(A) = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$$

donde
$A_0 = A$;
$A_\alpha = \{q \in X : \text{Existe una } \kappa\text{-red } \langle x_F\rangle \text{ en } \bigcup\{A_\beta : \beta < \alpha\} \text{ tal que } x_F \to q\}$

Proposición 3.55. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Entonces las siguientes proposiciones se cumplen:*

(1) Para todo $A \subseteq X$: $A \subseteq cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$

(2) $cl_\kappa(A)$ es un conjunto κ-red cerrado

(3) A es κ-red cerrado $\Leftrightarrow cl_\kappa(A) = A$

(4) X es un espacio κ-red $\Leftrightarrow$ Para todo $A \subseteq X$: $cl_\kappa(A) = \overline{A}$

(5) X es κ-Fréchet $\Leftrightarrow$ Para todo $A \subseteq X$: $A_1 = \overline{A}$

Demostración. Veamos (1): Sea $A \subseteq X$, es claro que $A \subseteq cl_\kappa(A)$, pues $A = A_0 \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha = cl_\kappa(A)$. Demostremos que $cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$. Para esto, utilizaremos inducción transfinita sobre κ^+:

Sea $0 < \alpha < \kappa^+$ y supongamos que, para todo $\beta < \alpha$, $A_\beta \subseteq \overline{A}$. Sea $q \in A_\alpha$, entonces existe $\langle x_F\rangle$ κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $x_F \to q$. Notamos que, por hipótesis inductiva $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \subseteq \overline{A}$, entonces $\langle x_F\rangle$ es κ-red en $\overline{A}$ y es tal que $x_F \to q$; luego, como $\overline{A}$ es cerrado, entonces, por Proposición 3.38, $\overline{A}$ es κ-red cerrado y por lo tanto $q \in \overline{A}$. Así, $A_\alpha \subseteq \overline{A}$. Por lo tanto, para todo $\alpha < \kappa^+$, $A_\alpha \subseteq \overline{A}$, de lo cual se tiene que $\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha \subseteq \overline{A}$, es decir, $cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$.

Veamos (2): Sea $\langle x_F\rangle$ κ-red en $\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$ tal que $x_F \to q$, entonces para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $\alpha_F < \kappa^+$ tal que $x_F \in A_{\alpha_F}$. Luego, como $|\{\alpha_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}| \leq \kappa$ y como κ^+ es regular, entonces existe $\beta < \kappa^+$ tal que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $\alpha_F < \beta$, entonces para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_F \in \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$, es decir, $\langle x_F\rangle$ es κ-red en $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ con $\beta < \kappa^+$ y es tal que $x_F \to q$, entonces $q \in A_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$. Por lo tanto, $cl_\kappa(A)$ es κ-red cerrado.

Veamos (3): [$\Rightarrow$] Supongamos que A es κ-red cerrado y probemos que $cl_\kappa(A) = A$.
Afirmación: Para todo $\alpha < \kappa^+$: $A_\alpha \subseteq A$.
Para demostrar esto, utilizaremos nuevamente inducción transfinita sobre κ^+:
Sea $0 < \alpha < \kappa^+$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $A_\beta \subseteq A$. Sea $p \in A_\alpha$,

entonces existe, $\langle x_F \rangle$, una κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $x_F \to p$. Como para todo $\beta < \alpha$, $A_\beta \subseteq A$, entonces $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \subseteq A$, entonces $\langle x_F \rangle$ es κ-red en A tal que $x_F \to p$ donde A es κ-red cerrado, de lo cual se tiene que $p \in A$. Por lo tanto, $A_\alpha \subseteq A$. Así, para todo $\alpha < \kappa^+$, $A_\alpha \subseteq A$ y por tanto se tiene que $\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha \subseteq A$, es decir, $cl_\kappa(A) \subseteq A$.
Por otro lado, como $A_0 = A$ y $A_0 \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$, entonces $A \subseteq cl_\kappa(A)$.
Así, se tiene que $cl_\kappa(A) = A$.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que $cl_\kappa(A) = A$. Por inciso (2), se obtiene de manera inmediata que A es κ-red cerrado.

Veamos (4): [$\Rightarrow$] Supongamos que X es un espacio κ-red y sea $A \subseteq X$. Por (1), tenemos que $A \subseteq cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{cl_\kappa(A)} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Luego, por inciso (2), sabemos que $cl_\kappa(A)$ es un conjunto κ-red cerrado, y ya que por hipótesis, X es un espacio κ-red, entonces $cl_\kappa(A)$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $\overline{cl_\kappa(A)} = cl_\kappa(A)$. Entonces se tiene que $\overline{A} \subseteq \overline{cl_\kappa(A)} = cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$, de lo cual se sigue que $cl_\kappa(A) = \overline{A}$.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que para todo $A \subseteq X$, $cl_\kappa(A) = \overline{A}$ y veamos que X es un espacio κ-red. Sea $A \subseteq X$ un conjunto κ-red cerrado. Por inciso (3), sabemos que $cl_\kappa(A) = A$, y ya que por hipótesis $cl_\kappa(A) = \overline{A}$, implicamos que $A = \overline{A}$, con lo cual A es un conjunto cerrado. Por lo tanto, X es un espacio κ-red.

Veamos (5): [$\Rightarrow$] Supongamos que X es κ-Fréchet y sea $A \subseteq X$. Claramente se tiene que $A_1 \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha = cl_\kappa(A) \subseteq \overline{A}$. Por otro lado, si $q \in \overline{A}$, como X es κ-Fréchet, entonces existe $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $x_F \to q$. Luego, como $A = A_0$, entonces $\langle x_F \rangle$ es κ-red en A_0 que converge a q, de lo cual, por definición, $q \in A_1$. Así, $\overline{A} \subseteq A_1$.
Por lo tanto, para cada $A \subseteq X$, $A_1 = \overline{A}$.
[$\Leftarrow$] Ahora, supongamos que para cada $A \subseteq X$, $A_1 = \overline{A}$ y veamos que X es κ-Fréchet. Sea $A \subseteq X$ y $q \in \overline{A}$, entonces $q \in A_1$, entonces, por definición de A_1, existe $\langle x_F \rangle$ κ-red en $A_0 = A$ tal que $x_F \to q$. Por lo tanto, X es κ-Fréchet. □

Por último veamos algunos resultados sobre espacios radiales y espacios pseudoradiales, que además involucran algunas observaciones sobre λ-sucesiones y κ-redes. Antes recordemos unas definiciones:

Definición 3.56. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$.*

1. *X es* radial *si para todo punto límite q de A, existe una λ-sucesión en A con λ un cardinal regular que converge a q.*

2. *X es* pseudoradial *si para cada subconjunto no cerrado A de X, existe un punto $q \notin A$ y una λ-sucesión en A (λ regular) que converge a q.*

El siguiente Lema captura una propiedad clave sobre λ-sucesiones:

Lema 3.57. *Sea $A \subseteq X$ con $|A| \leq \kappa$, sea q un punto de X tal que para todo $x \in A$, $q \notin \overline{\{x\}}$ y sea λ un cardinal regular con $\lambda > \kappa$. Entonces ninguna λ-sucesión en A converge a q.*

Demostración. Supongamos que existe una λ-sucesión $\langle x_\alpha \rangle$ en A que converge a q con $\lambda > \kappa$ regular.

Afirmación: Existe $x_0 \in A$ tal que $\{\alpha < \lambda : x_\alpha = x_0\}$ es cofinal en λ. Supongamos lo contrario, es decir, que para cada $x \in A$, $\{\alpha < \lambda : x_\alpha = x\}$ es acotado. Entonces, para cada $x \in A$, sea $\gamma_x = sup\{\alpha < \lambda : x_\alpha = x\}$, entonces $|\{\gamma_x : x \in A\}| < \lambda$ y sea $\gamma = sup\{\gamma_x : x \in A\}$. Sea $\alpha > \gamma$, entonces para todo $x \in A$, $x_\alpha \neq x$, lo cual es una contradicción, pues $\langle x_\alpha \rangle$ es una λ-sucesión en A. Por lo tanto, existe $x_0 \in A$ tal que $\{\alpha < \lambda : x_\alpha = x_0\}$ es cofinal en λ.

Sea $V \in \mathcal{V}_q$, como $x_\alpha \to q$, entonces existe $\alpha_V < \lambda$ tal que para todo $\beta > \alpha_V$, $x_\beta \in V$. Luego, por la afirmación anterior, existe $\alpha > \alpha_V$ tal que $x_\alpha = x_0$, además $x_0 \in V$. Por lo tanto, existe $x_0 \in A$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}_q$, se tiene que $V \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, es decir, $q \in \overline{\{x_0\}}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, ninguna λ-sucesión, $\langle x_\alpha \rangle$, en A converge a q, con $\lambda > \kappa$ regular. $\square$

Teorema 3.58. *Sea X un espacio radial con $t(X) \leq \kappa$. Entonces X es κ-Fréchet.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ y q un punto límite de A. Veamos que existe una κ-red en A, que converge a q. Tenemos dos casos:

1. Existe $x \in A$ tal que $q \in \overline{\{x\}}$. Entonces para todo $V \in \mathcal{V}_q$, $V \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, para cada $V \in \mathcal{V}_q$, se tiene que $x \in V$. Por lo tanto, en este caso, basta tomar a la κ-red constante x y se obtiene lo deseado.

2. Para todo $x \in A$, $q \notin \overline{\{x\}}$. En este caso, podemos suponer que $|A| \leq \kappa$ (en efecto, pues si $|A| > \kappa$, como $t(X) \leq \kappa$ y q es punto límite de A, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $|B| \leq \kappa$ y $q \in \overline{B}$). Ahora, como X es radial, existe una λ-sucesión en A con λ regular, que converge a q. Luego, por el Lema 3.57, implicamos que $\lambda \leq \kappa$. Ahora bien, usando el Teorema 3.29, dada la λ-sucesión en A, podemos obtener una λ-red en

A; luego, por la Propiedad de Expansión (Lema 3.35), existe una κ-red en A, y notar que en el uso de los resultados (Teorema 3.29 y Lema 3.35), se mantienen los mismos puntos de convergencia. Así, existe una κ-red en A que converge a q.

Por lo tanto, X es κ-Fréchet. □

Ejemplo 3.59. *Para todo cardinal κ, existe un espacio ω-Fréchet de caracter κ.*

Demostración. Sea κ con la topología discreta, y sea $X = \kappa \cup \{q\}$ la compactación por un punto de κ.
Afirmación: X es un espacio ω-Fréchet con $\chi(X) = \kappa$.
En efecto, primero veamos que X es un espacio ω-Fréchet. Para demostrar esto, basta ver que X es un espacio Fréchet, pues por la Proposición 3.45, dichos conceptos son equivalentes. Sean $A \subseteq X$ y $p \in \overline{A}$. Entonces, tenemos dos casos:

Caso 1: Si $p \neq q$, entonces $p \in \kappa$, y ya que $p \in \overline{A}$, como κ tiene la topología discreta, en particular para $\{p\} \in \mathcal{V}_p$, se tiene que $\{p\} \cap A \neq \emptyset$, de lo cual tenemos que $p \in A$. Entonces, basta tomar la sucesión constante p y se obtiene lo deseado en este caso.

Caso 2: Si $p = q$, entonces se tienen los siguientes subcasos:

a) Si A es finito, entonces A es compacto y por lo tanto cerrado. Entonces $p \in \overline{A} = A$ y al tomar la sucesión constante p se obtiene lo deseado.

b) Si A es infinito, tomamos $B \subseteq A$ un conjunto infinito numerable, digamos, $B = \{a_n : n \in \omega\}$. Veamos que $a_n \to q$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces $V = X \backslash C$, donde C es un conjunto compacto en κ y por lo tanto, un conjunto finito. Entonces se da lo siguiente:

1) Si $B \cap C \neq \emptyset$, entonces tomamos a $N = máx\{j \in \omega : a_j \in C\}$ y así, se cumple que, para cada $n \geq N$, $a_n \notin C$, es decir, existe $N \in \omega$ tal que para todo $n \geq N$, $a_n \in X \backslash C = V$ y por tanto, $a_n \to q$.
2) Si $B \cap C = \emptyset$, basta tomar a $N = 1$ y se da la convergencia.

Por lo tanto tenemos que X es un espacio Fréchet, de lo cual se sigue que X es ω-Fréchet.

Ahora, veamos que $\chi(X) = \kappa$. Es claro que, para todo $p \in X\backslash\{q\}$, $\chi(p,X) = 1$. Por otro lado, si $p = q$, tenemos que $\chi(q,X) = \kappa$, entonces $\chi(X) = sup\{\chi(p,X) : p \in X\} + \omega = sup\{1,\kappa\} + \omega = \kappa$. □

Ejemplo 3.60. *Para cada cardinal κ, existe un espacio X tal que $t(X) \leq \kappa$ y X no es un espacio κ-red.*

Demostración. Sea p un ultrafiltro libre sobre κ tal que para toda base, $\mathcal{B}$, para p, $|\mathcal{B}| > \kappa$. Tomamos a $X = \kappa \cup \{p\}$ donde cada punto de κ es aislado, y una base local para p es $\mathcal{B}_p = \{U \cup \{p\} : U \in p\}$.

Primero veamos que en efecto, lo anterior describe una topología τ sobre X, es decir, que si τ_κ es la topología discreta sobre κ, entonces $\mathcal{B} = \tau_\kappa \cup \mathcal{B}_p$ sirve de base para una topología τ sobre X:
Sea $x \in X$ arbitrario. Entonces tenemos dos casos:

1. Si $x = p$, como $\kappa \in p$, entonces $\kappa \cup \{p\} \in \mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{B}$ y además $p \in \kappa \cup \{p\}$.

2. Si $x \neq p$, entonces $x \in \kappa$ donde κ es discreto, entonces $\{x\} \in \tau_\kappa \subseteq \mathcal{B}$ y es tal que $x \in \{x\}$

Ahora, sea $x \in X$ tal que $x \in B_1 \cap B_2$ donde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Veamos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $B_1, B_2 \in \tau_\kappa$, entonces en este caso basta tomar a $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \tau_\kappa \subseteq \mathcal{B}$ y se cumple lo requerido.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_p$, entonces existen $U_1, U_2 \in p$ tales que $B_1 = U_1 \cup \{p\}$ y $B_2 = U_2 \cup \{p\}$, entonces $B_1 \cap B_2 = (U_1 \cup \{p\}) \cap (U_2 \cap \{p\}) = (U_1 \cap U_2) \cup \{p\}$ donde $U_1 \cap U_2 \in p$. En este caso, basta tomar a $B_3 = U_3 \cup \{p\} \in \mathcal{B}_p$ donde $U_3 = U_1 \cap U_2$ y se cumple lo deseado.

3. Si $B_1 \in \tau_\kappa$ y $B_2 \in \mathcal{B}_p$, entonces se tiene que $B_1 \subseteq \kappa$ y $B_2 = U \cup \{p\}$ para algún $U \in p$. Luego, como $x \in B_1 \cap B_2 = B_1 \cap (U \cup \{p\}) = B_1 \cap U$, tomamos a $B_3 = B_1 \cap U \in \tau_\kappa \subseteq \mathcal{B}$ y se obtiene lo deseado.

Por lo tanto, efectivamente, $\mathcal{B}$ sirve de base para una topología τ sobre X.

Afirmación 1: $t(X) \leq \kappa$
Sean $x \in X$ y $Y \subseteq X$ tal que $x \in \overline{Y}$. Veamos que existe $A \subseteq Y$ tal que $|A| \leq \kappa$ y $x \in \overline{A}$. Tenemos dos casos:

1. Si $x \in \kappa$, como todo punto en κ es aislado y $x \in \overline{Y}$, entonces $x \in Y$, por lo tanto, basta tomar a $A = \{x\}$ y se tiene que $x \in \overline{A}$, $|A| \leq \kappa$ y $A \subseteq Y$.

2. Si $x = p$, como $x = p \in \overline{Y}$, entonces $p \in Y$ ó $p \in Y^d$. Veamos:

   a) Si $p \in Y$, basta tomar $A = \{p\} \subseteq Y$ y se tiene que $|A| \leq \kappa$ y $p \in \overline{A} = \overline{\{p\}} = \{p\}$.

   b) Si $p \in Y^d$, entonces para todo $U \in p$, $U \cap Y \neq \emptyset$ y esto se cumple si y sólo si $Y \in p$, pues p es ultrafiltro. Entonces se tiene que $|Y| \leq \kappa$, pues p es ultrafiltro sobre κ, de lo cual, todo elemento de p, es un subconjunto de κ y por lo tanto de cardinalidad menor o igual a κ. En este caso, tomamos $A = Y$ y se tiene que $|A| \leq \kappa$, $A \subseteq Y$ y $p \in \overline{A} = \overline{Y}$.

Por lo tanto, $t(x, X) \leq \kappa$ y dado que x fue elegido arbitrariamente, entonces $t(X) \leq \kappa$.

Afirmación 2: X no es un espacio κ-red.
Para demostrar esto, veamos que κ es un conjunto κ-red cerrado pero no cerrado en X. En efecto, κ no es cerrado en X, pues $p \in \kappa^d$ (ya que, para cada $U \in p$, tenemos que $U \cap \kappa = U \neq \emptyset$), y $p \notin \kappa$. Por lo tanto, κ no es un conjunto cerrado en X. Resta verificar que κ es κ-red cerrado; para esto, veamos que ninguna κ-red en κ puede converger a p. Sea $\langle x_F \rangle$ una κ-red en κ y, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq G\}$, entonces la colección $\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ no puede ser base para p, pues $|\{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}| \leq \kappa$, entonces existe $U \in p$ tal que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $A_F \nsubseteq U$. Luego, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, elíjase $G_F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G_F$ y $x_{G_F} \in A_F \backslash U$. Sea $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ una función tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $H(F) = G_F$ (notar que $F = F \cap \kappa \subseteq H(F) = G_F$). Entonces $\langle x_{H(F)} \rangle$ es κ-subred de $\langle x_F \rangle$ y es tal que $x_{H(F)} \nrightarrow p$ (pues existe $U \in p$ tal que $U \cup \{p\} \in \mathcal{V}_p$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G_F = H(F) \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq H(F)$ tal que $x_{H(F)} \notin U$). Entonces, por el Lema 3.11, obtenemos que $x_F \nrightarrow p$. Por lo tanto, toda κ-red en κ no converge a p. Así, κ es un conjunto κ-red cerrado. De todo lo anterior, obtenemos que, en efecto, X no es espacio κ-red. □

Ahora daremos un ejemplo de un espacio κ-red que no es κ-Fréchet. Antes mostraremos un resultado que juega un papel importante en tal ejemplo.

Lema 3.61. *Sea $X = \kappa \cup \{q\}$ un espacio teniendo la siguiente topología: Cada punto de κ es aislado y una base local para q es $\mathcal{B}_q = \{X \backslash E : E \subset \kappa$ y $|E| < \kappa\}$. Sea $A \subseteq \kappa$. Se tiene lo siguiente:*

1. *Si $|A| < \kappa$, entonces q no es punto límite de A.*
2. *Si $|A| = \kappa$, entonces existe una κ-red en A que converge a q.*
3. *X es un espacio κ-Fréchet.*
4. *Si κ es singular, entonces no existe λ-sucesión en κ con λ regular que converge a q (y por lo tanto X no es un espacio pseudoradial).*
5. *Si κ es regular, entonces X es un espacio radial.*

Demostración. Veamos 1: Supongamos que $|A| < \kappa$, entonces $X \backslash A \in \mathcal{B}_q$, entonces para $V = X \backslash A \in \mathcal{V}_q$, se tiene que $V \cap A = \emptyset$, de lo cual se tiene que q no es punto límite de A.

Veamos 2: Supongamos que $|A| = \kappa$. Denotemos a A por $A = \{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ donde $x_F \neq x_G$ para $F \neq G$. Sea $E \subset \kappa$ tal que $|E| < \kappa$ y sea $\mathcal{F} = \{F \in [\kappa]^{<\omega} : x_F \in E\}$. Notamos que $|\mathcal{F}| < \kappa$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| < \kappa$, entonces existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ no vacío, tal que para cada $F \in \mathcal{F}$, $F_0 \cap F = \emptyset$. Sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F_0 \subseteq G$, entonces $x_G \notin E$, pues de lo contario, $G \in \mathcal{F}$, lo cual implica que $G \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, entonces $F_0 \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, entonces $F \cap F_0 \neq \emptyset$ para algún $F \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_G \notin E$. Así, para cada $E \subset \kappa$ tal que $|E| < \kappa$, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, se tiene que $x_G \notin E$. En otras palabras tenemos que, para toda $V \in \mathcal{V}_q$, existe $F_0 \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq G$, $x_G \in V$. Por lo tanto, existe una κ-red, $\langle x_F \rangle$, en A (a saber, el mismo conjunto A, visto como κ-red), tal que $\langle x_F \rangle$ converge a q.

Veamos 3: Sea $Y \subseteq X$ y $p \in \overline{Y}$. Tenemos dos casos:

i) Si $p \in Y$, se toma la κ-red constante p y se obtiene lo deseado.

ii) Si $p \notin Y$, entonces $p \in \overline{Y} \backslash Y = Y^d$, entonces para todo $V \in \mathcal{V}_p$, $(V \backslash \{p\}) \cap Y \neq \emptyset$, lo cual implica que $p = q$, pues de lo contrario, $p \in \kappa$, lo cual no puede pasar, ya que todo punto en κ es aislado. Entonces $Y \subseteq \kappa$; luego, por inciso (1), como q es punto límite de Y, entonces $|Y| \geq \kappa$, pero como $A \subseteq \kappa$, entonces $|Y| = \kappa$, y por inciso (2) se tiene que, existe una κ-red en Y que converge a q. Por lo tanto, X es κ-Fréchet.

Veamos 4: Tomamos $A = \kappa$ en el Lema 3.57 y veamos los casos que tenemos:

(a) Si $\lambda > \kappa$, en este caso se cumplen todas las hipótesis que requiere el Lema 3.57 e implicamos que no existe λ-sucesión en κ con λ-regular que converge a q.

(b) Si $\lambda = \kappa$, tal caso no puede ocurrir, pues κ es singular y λ es regular.

(c) Si $\lambda < \kappa$, entonces, si tomamos una λ-sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ en κ, tenemos que $|\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}| < \kappa$, entonces por el inciso (1), tenemos que q no es punto límite de $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}_q$ tal que $V \cap \{x_\alpha : \alpha < \lambda\} = \emptyset$ y por lo tanto $x_\alpha \nrightarrow q$.

Así, no existe una λ-sucesión en κ con λ regular que converge a q.

Veamos 5: Supongamos que κ es regular y sea $B \subseteq X$ infinito. Tenemos dos casos:

i) Si $|B| < \kappa$, entonces $B^d = \emptyset$, pues como κ es discreto, entonces cada $x \in \kappa$, no puede ser punto límite de B; además, q tampoco puede ser un punto límite de B, ya que $X\backslash(B\backslash\{q\}) \in \mathcal{B}_q$ y no intersecta al conjunto B en puntos distintos de q. Así, este caso se cumple por vacuidad.

ii) Si $|B| = \kappa$, entonces $B^d = \{q\}$, pues κ es discreto. Así, veamos que existe una λ-sucesión en B con λ regular que converge a q. Denotemos a B por $B = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces tenemos que $x_\alpha \to q$. En efecto, sea $V = X\backslash E \in \mathcal{V}_q$, entonces $E \subset \kappa$ y $|E| < \kappa$. Como κ es regular, tomamos a $\alpha_0 = sup\{\alpha < \kappa : x_\alpha \in E\}$ y sea $\alpha > \alpha_0$, entonces $x_\alpha \notin E$, es decir, $x_\alpha \in V$. Por lo tanto, $x_\alpha \to q$. Así, encontramos una λ-sucesión en B con λ regular que converge a q, a saber, el mismo conjunto B y teniendo $\lambda = \kappa$.

□

Ejemplo 3.62. *Para cada cardinal κ, existe un espacio κ-red que no es κ-Fréchet.*

Demostración. Sea κ un cardinal infinito y $X = [\kappa \times (\kappa \cup \{\kappa\})] \cup \{q\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea L_α la columna $\{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta < \kappa\}$ y sea $L_\alpha^+ = L_\alpha \cup \{(\alpha, \kappa)\}$. La topología sobre X es descrita como sigue:

1. Cada punto (α, β) donde $0 \leq \alpha < \kappa$ y $0 \leq \beta < \kappa$ es aislado.

2. Una base local para (α, κ) es la colección $\{L_\alpha^+ \setminus E : E \subset L_\alpha \text{ y } |E| < \kappa\}$.

3. Una vecindad abierta básica de q es obtenida como sigue: Dado $E \subset \kappa$ con $|E| < \kappa$, quitamos las columnas $\{L_\alpha^+ : \alpha \in E\}$ de X; para cada columna L_α con $\alpha \notin E$, quitamos un conjunto de cardinalidad menor que κ, lo que resta será nuestra vecindad abierta básica para q.

Primero veamos que X es un espacio κ-red. Supongamos que existe $A \subseteq X$ κ-red cerrado tal que admite un punto límite $z \notin A$, es decir, que A no es cerrado.

Afirmación: Para todo $\alpha < \kappa$, si $(\alpha, \kappa) \notin A$, entonces (α, κ) no es punto límite de A.
Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos que $(\alpha, \kappa) \notin A$. Entonces, tenemos dos casos:

i) Si $|A \cap L_\alpha| = \kappa$, entonces por el Lema 3.61 aplicado al subespacio L_α^+ con la topología de subespacio, implicamos que existe una κ-red en A tal que converge a (α, κ); luego, como A es κ-red cerrado, entonces $(\alpha, \kappa) \in A$, lo cual es una contradicción.

ii) Si $|A \cap L_\alpha| < \kappa$, entonces por el Lema 3.61 igualmente aplicado al subespacio L_α^+, tenemos que (α, κ) no es punto límite de A.

Ahora, consideremos los casos para z:

a) Notamos que para todo $\alpha < \kappa$ y para todo $\beta < \kappa$, tenemos que $(\alpha, \beta) \neq z$, pues cada punto de esta forma es aislado.

b) Además, por la afirmación anterior, tenemos que para todo $\alpha < \kappa$, $(\alpha, \kappa) \neq z$.

c) Ahora, supongamos que $z = q$. Sea $E = [\kappa \times \{\kappa\}] \cap A$, entonces $|E| < \kappa$ (pues de lo contrario, si $|E| = \kappa$, entonces por Lema 3.61, existe una κ-red en E y por tanto en A que converge a q, entonces $q = z \in A$, lo cual es una contradicción). Luego, notamos que para cada $(\alpha, \kappa) \notin E$, existe una vecindad abierta de (α, κ) disjunta de A (ya que por la afirmación, (α, κ) no es punto límite de A). Dado lo anterior, podemos construir una vecindad abierta básica de q, digamos U, tal que $U \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, A es cerrado y así, X es un espacio κ-red.

Ahora, veamos que X no es un espacio κ-Fréchet, es decir, veamos que existe $A \subseteq X$ y un punto $z \in \overline{A}$ tal que ninguna κ-red en A converge a z. Sea $A = \kappa\times\kappa$. Es claro que q es punto límite de $\kappa\times\kappa$ (ya que por definición de la topología sobre el espacio X, toda vecindad abierta básica de q intersecta al conjunto $\kappa \times \kappa$). Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en $\kappa \times \kappa$, veamos que $\langle x_F \rangle$ no converge a q. Tenemos dos casos:

i) Existe $E \subset \kappa$ no vacío con $|E| < \kappa$ y $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ (con $F \subseteq H(F)$ para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$) tal que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $x_{H(F)} \in \bigcup_{\alpha\in E} L_\alpha$. En este caso, $\langle x_{H(F)} \rangle$ es una κ-subred de $\langle x_F \rangle$ que no converge a q. En efecto, dado E, para cada $\alpha \in E$, quitamos la columna L^+_α, en otras palabras, quitamos $\bigcup_{\alpha\in E} L^+_\alpha$; luego, tomando lo que resta, obtenemos una vecindad de q, digamos V. Además, $\{x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \cap V = \emptyset$ pues $\{x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \bigcup_{\alpha\in E} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in E} L^+_\alpha$, es decir, $\{x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq X\backslash V$. Así, existe $V \in \mathcal{V}_q$ tal que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ (y por tanto $H(F) \subseteq H(G)$) tal que $x_{H(G)} \notin V$. Por lo tanto, $\langle x_{H(F)} \rangle$ es κ-subred de $\langle x_F \rangle$ que no converge a q y por tanto, $\langle x_F \rangle$ no converge a q.

ii) Para cualquier $E \subset \kappa$ no vacío con $|E| < \kappa$ y cualquier $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ (con $F \subseteq H(F)$ para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$), existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $x_{H(G)} \notin \bigcup_{\alpha\in E} L_\alpha$. Denotemos por $[\kappa]^{<\omega} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y construyamos $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$, así como un conjunto $\{\gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de ordinales distintos en κ tal que para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $x_{F_\alpha \cup G_\alpha} \in L_{\gamma_\alpha}$. Hagamos tal construcción usando inducción transfinita:
Dado $E = \{0\}$ y $H(F) = F\cup F_0$, existe $G_0 \in [\kappa^{<\omega}]$ tal que $x_{F_0\cup G_0} \notin L_0$. Elegimos a γ_0 tal que $x_{F_0\cup G_0} \in L_{\gamma_0}$. Ahora, sea $0 < \alpha < \kappa$ y supongamos que $\{G_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$ han sido construidos de tal forma que cumplen lo requerido. Sean $E = \{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$ y $H(F) = F \cup F_\alpha$, entonces existe $G_\alpha \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $x_{F_\alpha\cup G_\alpha} \notin \bigcup_{\gamma_\beta\in E} L_{\gamma_\beta}$. Elegimos a γ_α tal que $x_{F_\alpha\cup G_\alpha} \in L_{\gamma_\alpha}$. Aquí termina la construcción.

Finalmente, definamos $H : [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $H(F) = F \cup G_\alpha$ donde $F = F_\alpha$. Notamos que las columnas $\{L_{\gamma_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ son mutuamente disjuntas y por lo tanto, q tiene una vecindad disjunta de $\{x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$, pues si a cada L_{γ_α} le quitamos el conjunto $\{x_{F_\alpha\cup G_\alpha}\}$, lo que resta será nuestra vecindad de q la cual no tiene puntos de $\{x_{H(F)} : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$. Entonces $\langle x_{H(F)} \rangle$ no converge a q, de lo cual implicamos que $\langle x_F \rangle$ no converge a q.

Por lo tanto, X no es κ-Fréchet. $\square$

Capítulo 4

ρ-Compacidad.

4.1. Una introducción a la ρ-compacidad y algunos resultados básicos.

En esta sección mostramos varios resultados relacionados a espacios compactos, espacios θ-compactos y espacios δ-compactos. Finalmente, damos caracterizaciones de dichos espacios en términos de convergencia de κ-redes universales. Recordamos que se hará énfasis sobre los tres operadores:

$$\rho(V) = V, \rho(V) = \overline{V} \text{ y } \rho(V) = int(\overline{V}).$$

Comenzamos dando unas definiciones.

Definición 4.1. *Sean X un espacio y ρ un operador. Un subconjunto A de X es ρ-*compacto *en X, si dada cualquier colección $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos en X que cubre a A, existe una subcolección finita de $\{\rho(V) : V \in \mathcal{V}\}$ que cubre a A.*

1. *Si $\rho(V) = \overline{V}$ y A es ρ-compacto en X, diremos que A es un H-conjunto en X. Si X es ρ-compacto, diremos que X es θ-compacto (igual que H-cerrado sin la hipótesis de Hausdorff).*

2. *Si $\rho(V) = int(\overline{V})$ y A es ρ-compacto en X, diremos que A es un N-conjunto en X. Si X es ρ-compacto, diremos que X es δ-compacto.*

El resultado que presentamos a continuación, establece algunos aspectos básicos de los conceptos que presenta la Definición 4.1.

Proposición 4.2. *Las siguientes se verifican:*

1. *Para cualquier espacio X se tiene:*

   a) *Si X es compacto, entonces X es δ-compacto.*

   b) *Si X es δ-compacto, entonces X es θ-compacto.*

   c) *Si X es regular, entonces X es compacto si y sólo si X es δ-compacto si y sólo si X es θ-compacto.*

2. *Todo N-conjunto en X es un H-conjunto en X.*

3. *Si $A \subseteq X$ es θ-compacto en la topología de subespacio, entonces A es un H-conjunto en X.*

4. *Si X es Hausdorff, entonces todo H-conjunto en X es un conjunto cerrado.*

5. *Si X es Urysohn, entonces todo H-conjunto en X es un conjunto θ-cerrado.*

6. *Todo subconjunto θ-cerrado de un espacio θ-compacto X es un H-conjunto en X.*

7. *En un espacio X que es θ-compacto y Urysohn, todo H-conjunto en X es un N-conjunto en X; en particular, todo espacio θ-compacto y Urysohn es un espacio δ-compacto.*

8. *Todo espacio δ-compacto y semiregular es compacto.*

Demostración. Veamos 1: Notar que a) y b) se obtienen de manera inmediata del hecho de que para cada abierto V de X se tiene que: $V \subseteq int(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$. Demostremos el inciso c), para esto, solo resta verificar los recíprocos de a) y b). Sea X es un espacio regular.
Reciproco del inciso a): Supongamos que X es δ-compacto y veamos que X es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces, para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, usando la regularidad de X, para cada $x \in X$, sea $V_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{V}_x \subseteq U_x$. Entonces, la colección $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X; luego, como X es δ-compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} int(\overline{V}_{x_i})$. Además, notamos que para todo $x \in X$, $\overline{V}_x \subseteq U_x$, lo cual implica que $int(\overline{V}_x) \subseteq int(U_x) = U_x$. Entonces

$\bigcup_{i=1}^{n} int(\overline{V}_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, con lo cual $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y por lo tanto, X es compacto.
Reciproco del inciso b): Supongamos que X es θ-compacto y veamos que X es δ-compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces, para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, usando la regularidad de X, para cada $x \in X$, sea $V_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{V}_x \subseteq U_x$. Entonces, la colección $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X; luego, como X es θ-compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{x_i}$. Además, notamos que para todo $x \in X$, $\overline{V}_x \subseteq U_x \subseteq \overline{U}_x$, lo cual implica que $\overline{V}_x \subseteq int(U_x) = U_x \subseteq int(\overline{U}_x)$. Entonces, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} int(\overline{U}_{x_i})$, entonces $X = \bigcup_{i=1}^{n} int(\overline{U}_{x_i})$. Por lo tanto, X es δ-compacto.

La propiedad 2 se sigue inmediatamente del hecho de que para cada abierto, V, en X, se tiene que $int(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$.

Veamos 3: Sea $A \subseteq X$ θ-compacto con la topología de subespacio. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de A por abiertos en X. Entonces, $\mathcal{U}' = \{U_\alpha \cap A : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de A por abiertos en A. Luego, como A es θ-compacto con la topología de subespacio, existen $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \in \mathcal{U}$ tales que

$$\begin{aligned} A &= \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} cl_A(U_{\alpha_i} \cap A) \\ &= \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{U_{\alpha_i} \cap A} \cap A) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha_i} \cap A}) \cap A \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha_i} \cap A} \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{U}_{\alpha_i} \cap \overline{A}) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}) \cap \overline{A} \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un H-conjunto en X.

Veamos 4: Supongamos que X es Hausdorff y sea $A \subseteq X$ un H-conjunto en X. Demostremos que $X \backslash A$ es abierto. Sea $x_0 \in X \backslash A$. Para cada $y \in A$, sean U_y y V_y abiertos ajenos en X tal que $x_0 \in U_y$ y $y \in V_y$ (aquí usamos la hipótesis de que X es Hausdorff). Entonces, $\{V_y : y \in A\}$ es una colección de abiertos en X que cubre a A. Luego, como A es un H-conjunto en X, existen $y_1, \ldots, y_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{y_i}$. Si tomamos a $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, tenemos que $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ y además $U \subseteq X \backslash A$. En efecto, pues de lo contrario, existe $z \in U \cap A \subseteq A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{y_i}$. Entonces, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z \in \overline{V}_{y_j}$, lo cual implica que para todo $W \in \mathcal{V}_z$, $W \cap V_{y_j} \neq \emptyset$, en particular para $U \in \mathcal{V}_z$, se tiene que $U \cap V_{y_j} \neq \emptyset$, y ya que $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, entonces se tiene que $U_{y_j} \cap V_{y_j} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que fuimos tomando disjuntos respectivamente a tales abiertos. Por lo tanto, $U \subseteq X \backslash A$. Así, $X \backslash A$ es abierto y por tanto, A es cerrado.

Veamos 5: Supongamos que X es Urysohn y sea $A \subseteq X$ un H-conjunto en X. Demostremos que A es θ-cerrado, es decir, que $A = A^{\theta}$. Claramente $A \subseteq A^{\theta}$. Verifiquemos la contención restante. Supongamos que $A^{\theta} \backslash A \neq \emptyset$ y sea $x_0 \in A^{\theta} \backslash A$, entonces para cada $y \in A$, sean U_y y V_y abiertos en X tales que $x_0 \in U_y$, $y \in V_y$ y $\overline{U}_y \cap \overline{V}_y = \emptyset$ (aquí usamos la hipótesis de que X es Urysohn). Entonces la colección $\{V_y : y \in A\}$ es una cubierta abierta de A en X. Luego, como A es un H-conjunto en X, existen $y_1, \ldots, y_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{y_i}$. Si tomamos a $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, tenemos que $\overline{U} \cap A = \emptyset$. En efecto, pues de lo contrario, existe $z \in \overline{U} \cap A = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}} \cap A \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U}_{y_i} \cap A \subseteq A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{y_i}$. Entonces, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U}_{y_i} \cap \overline{V}_{y_j}$, lo cual implica que $\overline{U}_{y_j} \cap \overline{V}_{y_j} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{U} \cap A = \emptyset$, y además $U \in \mathcal{V}_{x_0}$, lo cual es una contradicción, ya que $x_0 \in A^{\theta}$. Por lo tanto, $A^{\theta} \subseteq A$. Así, $A^{\theta} = A$ y por tanto A es un conjunto θ-cerrado.

Veamos 6: Sea X un espacio θ-compacto y $A \subseteq X$, θ-cerrado. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A por abiertos en X. Para cada $x \in X \backslash A$, sea $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{U}_x \cap A = \emptyset$ (notar que tal abierto existe, pues como A es θ-cerrado, entonces $A = A^{\theta}$, y ya que $x \in X \backslash A$, entonces $x \in X \backslash A^{\theta}$, de lo cual se sigue que, existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $\overline{U}_x \cap A = \emptyset$). Entonces, la colección $\mathcal{C} = \{U_x : x \in X \backslash A\} \cup \mathcal{U}$ es cubierta abierta de X. Luego, como X es θ-compacto, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ subcolección finita tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}'} \overline{U}$. Ahora, sea $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{C}' : \overline{U} \cap A \neq \emptyset\}$.

Afirmación: $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ y las cerraduras de elementos de $\mathcal{U}'$ cubren a A.

Primero notamos que $\mathcal{U}'$ es una colección finita, pues $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{C}'$. Ahora, sea $U \in \mathcal{U}'$, entonces como $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, $U \in \mathcal{C}$. Además, como $\mathcal{C} = \{U_x : x \in X \backslash A\} \cup \mathcal{U}$, entonces $U \in \{U_x : x \in X \backslash A\}$ ó $U \in \mathcal{U}$. Si $U \in \{U_x : x \in X \backslash A\}$, entonces $\overline{U} \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues como $U \in \mathcal{U}'$, se tiene que $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$. Entonces $U \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Ahora, sea $x \in A$, entonces $x \in X$, y ya que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}'} \overline{U}$, entonces existe $U \in \mathcal{C}'$ tal que $x \in \overline{U}$, entonces $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica que $U \in \mathcal{U}'$. Por lo tanto $x \in \overline{U} \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} \overline{U}$. Así, $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} \overline{U}$ y por tanto, A es un H-conjunto en X.

Veamos 7: La demostración de este inciso se muestra en el Teorema 4.9.

Veamos 8: Sea X un espacio δ-compacto y semiregular. Sea $\mathcal{B}$ base de X tal que para todo $B \in \mathcal{B}$, $B = int(\overline{B})$ (aquí ultilizamos la hipótesis de que X es un espacio semiregular). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, para cada $x \in X$, sea $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U_x$. Entonces, la colección $\mathcal{C} = \{B_x : x \in X\}$ es cubierta abierta de X, y como por hipótesis X es δ-compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} int(\overline{B}_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}$ (pues para todo $x \in X$, B_x es abierto regular). Además, notamos que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Así, existe $\mathcal{U}' = \{U_{x_i} : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq \mathcal{U}$ colección finita tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Por lo tanto, X es compacto. □

Observación 4.3. *Los reciprocos de los incisos a) y b) de 1. en la Proposición anterior, en general no se cumplen. Veamos los ejemplos a continuación.*

Ejemplo 4.4 (Un espacio δ-compacto y no compacto)**.** *Sea $\kappa\omega$ la extensión de Katětov de ω, donde ω tiene la topología discreta. Este espacio es descrito como sigue: $\kappa\omega = \omega \cup T$, donde T es un conjunto de cardinalidad $2^{2^{\kappa}}$ que indexa la colección de todos los ultrafiltros libres sobre ω; para cada $t \in T$, la colección $\{\{t\} \cup U : U \in \mathcal{U}_t\}$ es una base local para t, donde $\mathcal{U}_t$ es el ultrafiltro libre indicado por t.*

Este espacio tiene las siguientes propiedades:

(a) $\kappa\omega$ es Urysohn (y por tanto Hausdorff).

(b) $\kappa\omega$ es θ-compacto

(c) $\kappa\omega$ es δ-compacto.

(d) $\kappa\omega$ no es compacto.

(e) Existe un subconjunto cerrado numerable de $\kappa\omega$ que no es un H-conjunto en $\kappa\omega$.

(f) $\kappa\omega \backslash \omega$ es un H-conjunto en $\kappa\omega$ que no es θ-compacto con la topología de subespacio.

Demostración. Veamos (a) : Primero notamos los siguientes hechos en este espacio:

1. Para todo $n \in \omega$, $\{n\}$ es clopen (es decir, es cerrado y abierto) en $\kappa\omega$. En efecto, pues como ω es abierto en $\kappa\omega$ (ya que ω es unión de abiertos, a saber, los abiertos $\{n\}$ donde n esta en ω), entonces para cada $n \in \omega$,

$\{n\}$ es abierto en $\kappa\omega$. Por otro lado, como $\overline{\{n\}} = \{n\} \cup \{n\}^{'}$, donde:

$$\begin{aligned} \{n\}^{'} &= \{x \in \kappa\omega : \text{Para cada } V \in \mathcal{V}_x, V\backslash\{x\} \cap \{n\} \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : \text{Para cada } U \in \mathcal{U}_t, ((\{t\} \cup U)\backslash\{t\}) \cap \{n\} \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : \text{Para cada } U \in \mathcal{U}_t, U \cap \{n\} \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : \text{Para cada } U \in \mathcal{U}_t, n \in U\} \\ &= \{t \in T : \mathcal{U}_t \text{ es fijo}\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Entonces, $\overline{\{n\}} = \{n\}$. Así, $\{n\}$ es cerrado en $\kappa\omega$ y por tanto, $\{n\}$ es clopen en $\kappa\omega$ para todo $n \in \omega$.

2. Para todo $t \in T$ y para todo $U \in \mathcal{U}_t$, $\overline{\{t\} \cup U} = U \cup \{s \in T : U \in \mathcal{U}_s\}$. En efecto, sea $t \in T$ y $U \in \mathcal{U}_t$, entonces $\overline{\{t\} \cup U} = (\{t\} \cup U) \cup (\{t\} \cup U)^{'}$. Pero notar que:

$$\begin{aligned} (\{t\} \cup U)^{'} &= \{x \in \kappa\omega : \text{Para todo } V \in \mathcal{V}_x, (V\backslash\{x\}) \cap (\{t\} \cup U) \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in T : \text{Para todo } W \in \mathcal{U}_s, W \cap (\{t\} \cup U) \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in T : \text{Para todo } W \in \mathcal{U}_s, W \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in T : U \in \mathcal{U}_s\}. \end{aligned}$$

Entonces, $\overline{\{t\} \cup U} = (\{t\} \cup U) \cup \{s \in T : U \in \mathcal{U}_s\} = U \cup \{s \in T : U \in \mathcal{U}_s\}$.

Estamos en condición de verificar la propiedad de Urysohn para $\kappa\omega$. Sean $x_1, x_2 \in \kappa\omega$ distintos. Demostremos que existen $U_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ y $U_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$ tales que $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$.

i) Si $x_1, x_2 \in T$, es decir, si $x_1 = t_1$ y $x_2 = t_2$ donde $t_1, t_2 \in T$ distintos. Sean $V_1 \in \mathcal{U}_{t_1}$ y $V_2 \in \mathcal{U}_{t_2}$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. En efecto, podemos elegir tales elementos, pues de lo contrario, para todo $V_1 \in \mathcal{U}_{t_1}$ y para todo $V_2 \in \mathcal{U}_{t_2}$ se tiene que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{U}_{t_1} = \mathcal{U}_{t_2}$ (pues son ultrafiltros), lo cual es una contradicción, ya que t_1 y t_2 son distintos. Así, definimos a $U_1 = \{t_1\} \cup V_1$ y $U_2 = \{t_2\} \cup V_2$.
Afirmación: $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$, es decir, $\overline{\{t_1\} \cup V_1} \cap \overline{\{t_2\} \cup V_2} = \emptyset$.
En efecto, pues notamos que:

$$\overline{\{t_1\} \cup V_1} = V_1 \cup \{t \in T : V_1 \in \mathcal{U}_t\}$$

y

$$\overline{\{t_2\} \cup V_2} = V_2 \cup \{t \in T : V_2 \in \mathcal{U}_t\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\overline{\{t_1\}\cup V_1}\cap\overline{\{t_2\}\cup V_2} &= (V_1\cup\{t\in T : V_1\in\mathcal{U}_t\})\cap(V_2\cup\{t\in T :\\ &\quad V_2\in\mathcal{U}_t\})\\ &= \{t\in T : V_1\in\mathcal{U}_t\}\cap\{t\in T : V_2\in\mathcal{U}_t\}\end{aligned}$$

Se cumple que $\overline{\{t_1\}\cup V_1}\cap\overline{\{t_2\}\cup V_2}=\emptyset$, pues de lo contrario, existe $t_0\in T$ tal que $V_1\in\mathcal{U}_{t_0}$ y $V_2\in\mathcal{U}_{t_0}$, lo cual implica que $V_1\cap V_2\neq\emptyset$, contradicción.

ii) Si $x_1,x_2\in\omega$ distintos, tomamos a $U_1=\{x_1\}\in\mathcal{V}_{x_1}$ y $U_2=\{x_2\}\in\mathcal{V}_{x_2}$ y tenemos que $\overline{\{x_1\}}\cap\overline{\{x_2\}}=\emptyset$, pues como para cada $n\in\omega$, $\{n\}$ es clopen, entonces $\overline{\{x_1\}}\cap\overline{\{x_2\}}=\{x_1\}\cap\{x_2\}=\emptyset$.

iii) Si $x_1\in\omega$ y $x_2\in T$, es decir, $x_1=n$ para algún $n\in\omega$ y $x_2=t$ para algún $t\in T$. Tomamos a $U_1=\{n\}\in\mathcal{V}_n$ y $U_2=\{t\}\cup V$ donde $V\in\mathcal{U}_t$ y es tal que $x_1=n\notin V$. En efecto, existe tal V, pues de lo contrario, para todo $V\in\mathcal{U}_t$, $n\in V$, lo cual implica que $\mathcal{U}_t$ es fijo, contradicción.
Afirmación: $\overline{U}_1\cap\overline{U}_2=\emptyset$, es decir, $\overline{\{n\}}\cap(\overline{\{t\}\cup V})=\emptyset$.
En efecto,

$$\begin{aligned}\overline{\{n\}}\cap(\overline{\{t\}\cup V}) &= \{n\}\cap(V\cup\{t\in T : V\in\mathcal{U}_t\})\\ &= (\{n\}\cap V)\cup(\{n\}\cap\{t\in T : V\in\mathcal{U}_t\})\\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Lo último ocurre por que $x_1=n\in\omega$ y $n\notin V$.

Por lo tanto, $\kappa\omega$ es Urysohn.

Veamos (b) : Antes demostremos unas equivalencias:
Sea X un espacio Hausdorff. Entonces son equivalentes:

1. X es H-cerrado.
2. Todo filtro abierto tiene un punto clausura.
3. Toda familia $\{V_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos en X que cumple la PIF, se tiene que $\bigcap_{s\in S}\overline{V}_s\neq\emptyset$.
4. Todo ultrafiltro abierto en X converge.
5. X es θ-compacto.

(1.) $\Rightarrow$ (2.) Supongamos que X es H-cerrado y que existe $\mathcal{F}$ filtro abierto tal que $\mathcal{F}$ no tiene puntos clausura en X. Definimos a un nuevo espacio $Y = X \cup \{p\}$, donde su topología es generada por los siguientes abiertos: $\mathcal{B}_Y = \tau_X \cup \{\{p\} \cup F : F \in \mathcal{F}\}$ donde τ_X representa los abiertos en el conjunto X, es decir, es la topología sobre X.

Veamos que, en efecto, $\mathcal{B}_Y$ es base de una topología sobre Y:
Sea $y \in Y$. Tenemos dos casos: Si $y \in X$, basta tomar a $X \in \tau_X$ y se tiene lo deseado. Si $y = p$, como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existe $F \in \mathcal{F}$, entonces basta tomar a $\{p\} \cup F \in \mathcal{B}_Y$ y se tiene lo deseado.
Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_Y$ y $y \in B_1 \cap B_2$. Tenemos los siguientes casos: Si $B_1, B_2 \in \tau_X$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \tau_X$; en tal caso, basta definir a $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_Y$ y cumple que $y \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Si $B_1, B_2 \notin \tau_X$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = \{p\} \cup F_1$ y $B_2 = \{p\} \cup F_2$. Luego, notamos que $B_1 \cap B_2 = (\{p\} \cup F_1) \cap (\{p\} \cup F_2) = \{p\} \cup (F_1 \cap F_2)$ donde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Entonces tomamos a $B_3 = \{p\} \cup (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}_Y$ y se tiene que $y \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Si $B_1 \in \tau_X$ y $B_2 \notin \tau_X$, se sigue que $B_1 = U$ para algún $U \in \tau_X$ y $B_2 = \{p\} \cup F$ para algún $F \in \mathcal{F}$. Por tanto, $B_1 \cap B_2 = U \cap (\{p\} \cup F) = (U \cap \{p\}) \cup (U \cap F) = U \cap F$, y ya que $y \in B_1 \cap B_2$, se sigue que $y \in U \cap F$ y en consecuencia $U \cap F \neq \emptyset$. Más aún, como $\mathcal{F}$ es un filtro abierto, entonces $U \cap F$ es abierto en X, es decir, $U \cap F \in \tau_X \subseteq \mathcal{B}_Y$; en este caso, basta tomar a $B_3 = U \cap F$ y se tiene que $y \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
Por lo tanto, $\mathcal{B}_Y$ es base para una topología sobre Y, digamos, τ_Y.
Afirmación 1: Y es un espacio Hausdorff.
Sean $y_1, y_2 \in Y$. Tenemos los siguientes casos: Si $y_1, y_2 \in X$, como X es Hausdorff, existen $U_1, U_2 \in \tau_X \subseteq \tau_Y$ tales que $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Si $y_1 \in X$ y $y_2 = p$, como $\mathcal{F}$ no tiene puntos clausura en X, entonces en particular, y_1 no es punto clausura de $\mathcal{F}$, es decir, $y_1 \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$, sii existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $y_1 \notin \overline{F}_0$, entonces existe $U \in \mathcal{V}_{y_1}$ tal que $U \cap F_0 = \emptyset$. Tomamos a $U_1 = U \in \tau_X$ y $U_2 = \{p\} \cup F_0 \in \mathcal{V}_p$ y se tiene que $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Por lo tanto, Y es Hausdorff. Así, Y es una extensión Hausdorff de X.
Afirmación 2: X no es cerrado en Y.
Supongamos que X es cerrado en Y, entonces $Y \backslash X$ es abierto en Y, entonces para cada $y \in Y \backslash X$, existe $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V \subseteq Y \backslash X$, contradicción, pues notamos que $Y \backslash X = \{p\}$ y para todo $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V$, se tiene que $V \cap X \neq \emptyset$, es decir, que para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $(\{p\} \cup F) \cap X \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro definido en X y por tanto todo elemento de $\mathcal{F}$ es un

subconjunto de X no vacío. Por lo tanto, X no es cerrado en Y.
Así, por Afirmación 1 y 2, implicamos que X no es H-cerrado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo filtro abierto en X tiene un punto clausura.

(2.) $\Rightarrow$ (3.) Sea $\{V_s\}_{s\in S}$ una familia de abiertos en X con la PIF, entonces $\{V_s\}_{s\in S} \subseteq \mathcal{F}$ para algún filtro abierto sobre X, entonces $\mathcal{F}$ tiene un punto clausura, digamos x, entonces $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$, en particular $x \in \bigcap_{s\in S} \overline{V}_s$ y por tanto $\bigcap_{s\in S} \overline{V}_s \neq \emptyset$.

(3.) $\Rightarrow$ (4.) Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro abierto sobre X. Como $\mathcal{U}$ cumple la PIF, entonces $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{U} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{U}$, entonces x es punto clausura de $\mathcal{U}$. Luego, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, entonces $\mathcal{U}$ converge a x. Por lo tanto, todo ultrafiltro abierto sobre X converge.

(4.) $\Rightarrow$ (5.) Sea $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s\in S}$ cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{C}$ no admite subfamilias finitas, digamos $\mathcal{C}'$, tales que $X = \bigcup_{C\in\mathcal{C}'} \overline{C}$.
Afirmación 1: $\mathcal{B} = \{X\backslash \bigcup_{m\in M} \overline{C}_m : M \in [S]^{<\omega}\}$ cumple la PIF.
Sea $\{X\backslash \bigcup_{m\in M_i} \overline{C}^i_m : i \in \{1,\ldots,n\}\} \subseteq \mathcal{B}$ con $n\in\omega$. Supongamos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} X\backslash \bigcup_{m\in M_i} \overline{C}^i_m = \emptyset.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X &= X\backslash(\textstyle\bigcap_{i=1}^{n} X\backslash \bigcup_{m\in M_i} \overline{C}^i_m) \\ &= \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{m\in M_i} \overline{C}^i_m \\ &= \textstyle\bigcup_{(i,m)\in\{1,\ldots,n\}\times M_i} \overline{C}^i_m. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\mathcal{C}$ admite subfamilias finitas tal que sus cerraduras cubren a X, contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ cumple la PIF.
Luego, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ para algún filtro abierto sobre X. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro abierto en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.
Afirmación 2: $\mathcal{U}$ no converge en X.
Supongamos que $\mathcal{U}$ converge a x para algún $x\in X$, entonces $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{U}$. Por otro lado, como $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de X, existe $s\in S$ tal que $x\in C_s$, de lo cual se tiene que $C_s \in \mathcal{U}$. Además, como $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{U}$, entonces $X\backslash \bigcup \overline{C}_s = X\backslash\overline{C}_s \in \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción (pues $X\backslash\overline{C}_s \subseteq X\backslash C_s$, de lo cual se sigue que, C_s y $X\backslash C_s$ estan en $\mathcal{U}$, lo cual no puede ocurrir). Por lo tanto, $\mathcal{U}$ no converge en X, lo que también es una contradicción con la hipótesis. Así, X es θ-compacto.

(5.) $\Rightarrow$ (1.) Supongamos que X es θ-compacto y que no es H-cerrado. Entonces existe un espacio Hausdorff Y tal que $X\subseteq Y$ y X no es cerrado en Y. Entonces existe y punto de acumulación de X tal que $y\notin X$, es

decir, $y \in Y \backslash X$. Ahora, para cada $x \in X$, sean U_x, V_x abiertos en Y tales que $x \in U_x$, $y \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Entonces $\mathcal{C} = \{U_x \cap X : x \in X\}$ es cubierta abierta de X por abiertos en X. Como X es θ-compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_{x_i} \cap X)$.
Afirmación: $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ el cual es abierto en Y, es tal que $V \cap X = \emptyset$.
Supongamos que $V \cap X \neq \emptyset$ y sea $z \in V \cap X$, entonces como $X = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_{x_i} \cap X)$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z \in cl_X(U_{x_j} \cap X)$ y $z \in V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, lo cual implica que $(V_{x_j} \cap X) \cap (U_{x_j} \cap X) \neq \emptyset$, entonces $V_{x_j} \cap U_{x_j} \neq \emptyset$, contradicción. Por lo tanto, $V \cap X = \emptyset$, lo cual también es una contradicción con el hecho de que $y \in V$ y y es punto de acumulación de X. Por lo tanto, X es H-cerrado.

Demostradas las anteriores equivalencias, veamos el inciso:
Afirmación: Para toda familia $\{V_s\}_{s \in S}$ de abiertos en $\kappa\omega$ que cumple la PIF, se tiene que $\bigcap_{s \in S} \overline{V}_s \neq \emptyset$.
Para probar la afirmación, nos fijaremos en los basicos en $\kappa\omega$. Sea $\mathcal{W} = \{V_s\}_{s \in S}$ familia de basicos en $\kappa\omega$ que cumple la PIF. Notamos los siguientes hechos:

(i) $\mathcal{W}$ solo puede tener un basico de la forma $\{m\}$ para algún $m \in \omega$ (pues $\mathcal{W}$ cumple la PIF). Si tenemos este caso, como para cada $s \in S$ tal que $V_s \neq \{m\}$, tenemos que V_s es de la forma $V_s = \{t_s\} \cup U_\alpha^s$. Más aún, como $\mathcal{W}$ cumple la PIF, entonces para todo $s \in S$ y para todo $\alpha \in I_s$, $m \in U_\alpha^s$. Entonces $\bigcap_{s \in S} V_s \neq \emptyset$ y por lo tanto $\bigcap_{s \in S} \overline{V}_s \neq \emptyset$.

(ii) Si $\mathcal{W}$ no contiene algún basico de la forma $\{m\}$ donde $m \in \omega$, entonces para cada $s \in S$ $V_s = \{t_s\} \cup U_\alpha^s$ donde para todo $\alpha \in I_s$, $U_\alpha^s \in \mathcal{U}_{t_s}$, es decir, $\mathcal{W} = \{\{t_s\} \cup U_\alpha^s : s \in S, \alpha \in I_s\}$. Luego, ya que $\mathcal{W}$ cumple la PIF, entonces la colección $\mathcal{J} = \{U_\alpha^s : s \in S, \alpha \in I_s\}$ cumple la PIF. En efecto, sean $U_\alpha^{s_1}, U_\beta^{s_2} \in \mathcal{J}$. Tenemos los siguientes casos:

a) Si $s_1 = s_2 = s \in S$, entonces $U_\alpha^{s_1}, U_\beta^{s_2} \in \mathcal{U}_{t_s}$, entonces $U_\alpha^{s_1} \cap U_\beta^{s_2} \neq \emptyset$.

b) Si $s_1 \neq s_2$, entonces $t_{s_1} \neq t_{s_2}$; como $(\{t_{s_1}\} \cup U_\alpha^{s_1}) \cap (\{t_{s_2}\} \cup U_\beta^{s_2}) \neq \emptyset$, entonces $U_\alpha^{s_1} \cap U_\beta^{s_2} \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{J}$ cumple la PIF. Ahora, sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro tal que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}$. Entonces tenemos dos casos:

a) Si $\mathcal{U}$ no es libre, es decir, si $\mathcal{U}$ es fijo, entonces $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $k \in \bigcap \mathcal{U}$, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, $k \in U$.

En particular, para cada $U \in \mathcal{J}$, $k \in U$, es decir, para cada $\alpha \in I_s$ y para cada $s \in S$ tenemos que $k \in \overline{\{t_s\} \cup U^s_\alpha}$ y por lo tanto $k \in \bigcap_{s\in S} \overline{V}_s$. Así, $\bigcap_{s\in S} \overline{V}_s \neq \emptyset$.

b) Si $\mathcal{U}$ es libre, entonces existe $t_0 \in T$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{t_0}$.
Afirmación: Para todo $s \in S$ y para todo $\alpha \in I_s$, $t_0 \in \overline{\{t_s\} \cup U^s_\alpha}$.
En efecto, sea $s_0 \in S$ y $\alpha_0 \in I_{s_0}$. Recordar que $\overline{\{t_{s_0}\} \cup U^{s_0}_{\alpha_0}} = U^{s_0}_{\alpha_0} \cup \{t \in T : U^{s_0}_{\alpha_0} \in \mathcal{U}_t\}$. Luego, como $\mathcal{J} = \{U^s_\alpha : \alpha \in I_s, s \in S\} \subseteq \mathcal{U} = \mathcal{U}_{t_0}$, entonces $U^{s_0}_{\alpha_0} \in \mathcal{U}_{t_0}$, entonces $t_0 \in U^{s_0}_{\alpha_0} \cup \{t \in T : U^{s_0}_{\alpha_0} \in \mathcal{U}_t\}$, es decir, $t_0 \in \overline{\{t_{s_0}\} \cup U^{s_0}_{\alpha_0}}$. Por lo tanto, para todo $s \in S$ y para todo $\alpha \in I_s$, $t_0 \in \overline{\{t_s\} \cup U^s_\alpha}$, de lo cual se sigue que $\bigcap_{s\in S,\alpha\in I_s} \overline{\{t_s\} \cup U^s_\alpha} \neq \emptyset$, en otras palabras, $\bigcap_{s\in S} \overline{V}_s \neq \emptyset$.

Por lo tanto se cumple la afirmación, entonces, por equivalencias antes probadas obtenemos que $\kappa\omega$ es θ-compacto.

Veamos (c) : Por (7) de la Proposición 4.2 e incisos (a) y (b) anteriores, obtenemos de manera inmediata que $\kappa\omega$ es un espacio δ-compacto.

Veamos (d) : Sea $U \subseteq \omega$ no vacío, cualquiera. Sea $A = \{t \in T : U \in \mathcal{U}_t\}$ y $B = \{t \in T : \omega \backslash U \in \mathcal{U}_t\}$.
Afirmación: $T = A \cup B$.
En efecto: [$\subseteq$] Sea $t \in T$, entonces para $U \subseteq \omega$ se tiene que $U \in \mathcal{U}_t$ ó $\omega\backslash U \in \mathcal{U}_t$ (pues $\mathcal{U}_t$ es ultrafiltro sobre ω), de lo cual se sigue que $t \in A$ ó $t \in B$, es decir, $t \in A \cup B$ y por tanto, $T \subseteq A \cup B$.
[$\supseteq$] Sea $t \in A \cup B$, como $A \subseteq T$ y $B \subseteq T$, entonces $A \cup B \subseteq T$, entonces $t \in T$ y por tanto, $A \cup B \subseteq T$.
Luego, la colección $\mathcal{C} = \{\{t\} \cup U : t \in A\} \cup \{\{t\} \cup \omega\backslash U : t \in B\}$ es cubierta abierta de $\kappa\omega$. En efecto, sea $x \in \kappa\omega$. Tenemos dos casos: Si $x = n \in \omega$ para algún $n \in \omega$, entonces $n \in U \subseteq \bigcup_{t\in A}\{t\}\cup U$ ó $n \in \omega\backslash U \subseteq \bigcup_{t\in B}\{t\}\cup\omega\backslash U$. Por lo tanto, $n \in \bigcup\mathcal{C}$. El otro caso es, si $x = t \in T$ para algún $t \in T = A\cup B$, entonces $t \in A$ ó $t \in B$, de lo cual se sigue que $t \in \bigcup\mathcal{C}$. Por lo tanto, $\kappa\omega \subseteq \bigcup\mathcal{C}$. La contención restante es clara. Así, $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de $\kappa\omega$ y es tal que no admite subcubiertas finitas, pues de lo contario tenemos que T es finito, lo cual no puede pasar. Por lo tanto, $\kappa\omega$ no es compacto.

Veamos (e) : Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una partición infinita de ω la cual es mutuamente disjunta y que consta de conjuntos infinitos. Ahora, para cada

$n \in \omega$ sea t_n el índice del ultrafiltro libre $\mathcal{U}_{t_n}$ tal que $U_n \in \mathcal{U}_{t_n}$. Luego, tomamos a $A = \{t_n : n \in \omega\}$ y veamos que éste es nuestro conjunto requerido.
Afirmacion 1: A es un subconjunto cerrado y numerable de $\kappa\omega$.
En efecto, es claro que A es numerable. Veamos que A es cerrado, para esto, veamos que A no tiene puntos de acumulación. Supongamos lo contraio, es decir, que existe $x \in \kappa\omega$ punto de acumulación de A. Notamos que $x \notin \omega$, entonces $x = t$ para algún $t \in T$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{U}_t$, $U \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A no tiene puntos de acumulación y por tanto, A es cerrado.
Afirmación 2: A no es un H-conjunto en $\kappa\omega$.
En efecto, pues la cubierta abierta $\{\{t_n\} \cup U_n : n \in \omega\}$ de A, no admite subcolecciones finitas tal que sus cerraduras cubran a A. Para demostrar lo anterior, primero notamos que para cada $n \in \omega$ tenemos que $\overline{\{t_n\} \cup U_n} = U_n \cup \{t \in T : U_n \in \mathcal{U}_t\}$, de lo cual se tiene que $\overline{\{t_n\} \cup U_n} \cap A = \{t_n\}$, pues los conjuntos U_n son mutuamente disjuntos. Dicho esto, supongamos que, existen $\{t_{n_1}\} \cup U_{n_1}, \ldots, \{t_{n_k}\} \cup U_{n_k}$ tales que $A = (\bigcup_{i=1}^{k} \overline{\{t_{n_i}\} \cup U_{n_i}}) \cap A = \{t_{n_1}, \ldots, t_{n_k}\}$, lo cual es una contradicción pues A es infinito. Por lo tanto, A no es un H-conjunto en $\kappa\omega$.

Veamos (f) : Para ver este inciso, demostremos primero lo siguiente:
Afirmación: $\kappa\omega \backslash \omega = T$ es θ-cerrado en $\kappa\omega$ (es decir, $T = T^\theta$).
En efecto, recordamos que $T^\theta = \{x \in \kappa\omega : \text{ Para cada } V \in \mathcal{V}_x, \overline{V} \cap T \neq \emptyset\}$. Es claro que $T \subseteq T^\theta$. Veamos que $T^\theta \subseteq T$. Sea $x \in T^\theta$, notamos que $x \notin \omega$, pues si $x = n$ para algún $n \in \omega$, entonces para cada $A \subseteq \omega$ tal que $n \in A$, se tiene que $\overline{A} \cap T \neq \emptyset$. En particular, para $\{n\} \subseteq \omega$ se tiene que $\overline{\{n\}} \cap T \neq \emptyset$, pero $\overline{\{n\}} = \{n\}$ entonces $\{n\} \cap T \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $\omega \cap T = \emptyset$. Así, $x = t$ para algún $t \in T$ y por tanto $T^\theta \subseteq T$. Así, $T = T^\theta$, es decir, T es un conjunto θ-cerrado.
Ahora, como $\kappa\omega$ es θ-compacto (inciso (b)), por inciso (6) de la Proposición 4.2, obtenemos que $\kappa\omega \backslash \omega = T$ es un H-conjunto en $\kappa\omega$. Por ultimo, veamos que T no es θ-compacto con la topología de subespacio. En efecto, basta notar que T es discreto con tal topología y por lo tanto se obtiene que T no es θ-compacto. □

Ejemplo 4.5 (Un espacio θ-compacto que no es δ-compacto)**.** *Sea* $X =$

$Y^+ \cup Y^- \cup Z \cup \{p^+, p^-\}$, donde

$$\begin{array}{rcl} Y^+ & = & \{\langle 1/n, 1/m\rangle : m, n \in \mathbb{N}^+\}, \\ Y^- & = & \{\langle 1/n, -1/m\rangle : m, n \in \mathbb{N}^+\}, \\ Z & = & \{\langle 1/n, 0\rangle : n \in \mathbb{N}^+\}. \end{array}$$

Con $Y^+ \cup Y^- \cup Z$ teniendo la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ y para cada $k \geq 1$, sean:

$$\begin{array}{rcl} V(p^+, k) & = & \{\langle 1/n, 1/m\rangle : n \geq k, m \in \mathbb{N}^+\}, \\ V(p^-, k) & = & \{\langle 1/n, -1/m\rangle : n \geq k, m \in \mathbb{N}^+\}. \end{array}$$

Una base local numerable para p^+ (respectivamente, p^-) es la colección $\{V(p^+, k) : k \in \mathbb{N}^+\}$ (respectivamente, $\{V(p^-, k) : k \in \mathbb{N}^+\}$).

Este espacio tiene las siguientes propiedades:

(a) X es Hausdorff pero no Urysohn.

(b) X es θ-compacto.

(c) X no es δ-compacto.

Demostración. Veamos (a) : Primero demostremos que X es Hausdorff. Sean $x, y \in X$. Tenemos los siguientes casos:

i) Si $x, y \in Y^+ \cup Y^- \cup Z$. En este caso, se cumple de manera inmediata por el hecho de que este conjunto tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff.

ii) Si $x = p^+$ y $y = p^-$, se cumple trivialmente, pues para cualquier $k \geq 1$ se tiene que $V(p^+, k) \cap V(p^-, k) = \emptyset$.

iii) Si $x = p^+$ y $y \in Y^+$, es decir, si $y = \langle 1/n_0, 1/m_0\rangle$ con $n_0, m_0 \in \mathbb{N}^+$. En este caso, basta tomar a $k_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/k_0 < 1/n_0$ y tenemos que para el abierto $V(p^+, k_0)$ y el abierto $U = (1/n_0 - r, 1/n_0 + r) \times (1/m_0 - r, 1/m_0 + r)$ donde $r = \frac{1/n_0 - 1/k_0}{2}$, se cumple que $V(p^+, k_0) \cap U = \emptyset$. En efecto, pues de lo contrario, existe $z \in V(p^+, k_0) \cap U$. Si $z = \langle 1/n, 1/m\rangle$, entonces $1/n \leq 1/k_0$ y $1/n_0 - r \leq 1/n \leq 1/n_0 + r$, es decir, $\frac{1}{2}(1/n_0 + 1/k_0) \leq 1/n \leq \frac{1}{2}(3/n_0 - 1/k_0)$. Luego, como $1/k_0 < 1/n_0$, entonces $1/k_0 + 1/k_0 < 1/n_0 + 1/k_0$, entonces $\frac{1}{2}(2/k_0) < \frac{1}{2}(1/n_0 + 1/k_0)$, entonces $1/k_0 < \frac{1}{2}(1/n_0 + 1/k_0) \leq 1/n$, de lo cual se sigue que $1/k_0 < 1/n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, tales abiertos son disjuntos y contienen a cada punto respectivamente.

iv) De manera análoga a iii), se demuestran los casos restantes.

Así, X es Hausdorff.

Ahora, veamos que X no es Urysohn, para esto, notamos que para p^+ y p^- no existen abiertos con cerraduras disjuntas que contengan respectivamente a tales puntos. Ya que para cada $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\overline{V(p^+, k)} = V(p^+, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$$

En efecto, sea $k \in \mathbb{N}^+$ y $z \in \overline{V(p^+, k)}$, entonces para todo $U \in \mathcal{V}_z$, $U \cap V(p^+, k) \neq \emptyset$. Si $z \in V(p^+, k)$, se cumple. Supongamos que $z \notin V(p^+, k)$ y que $z \notin \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$. Entonces, se tienen los siguientes casos:

i) Si $z = \langle 1/n_0, 0\rangle$ con $n_0 < k$, entonces $1/k < 1/n_0$, entonces el abierto $(1/n_0 - r, 1/n_0 + r) \times (-r, r)$ que contiene a z es tal que $((1/n_0 - r, 1/n_0 + r) \times (-r, r)) \cap V(p^+, k) = \emptyset$ donde $r = \frac{1}{2}(1/n_0 - 1/k)$, contradicción con el hecho de que z está en la cerradura de $V(p^+, k)$.

ii) Si $z = \langle 1/n_0, 1/m_0\rangle$ con $n_0 < k$ y m_0 cualquier natural, entonces el abierto $(1/n_0 - r, 1/n_0 + r) \times (1/m_0 - r, 1/m_0 + r)$ que contiene a z es tal que $((1/n_0 - r, 1/n_0 + r) \times (1/m_0 - r, 1/_m0 + r)) \cap V(p^+, k) = \emptyset$ donde $r = \frac{1}{2}(1/n_0 - 1/k)$, contradicción con el hecho de que z está en la cerradura de $V(p^+, k)$.

iii) De la misma forma se llega a una contradicción si se supone que $z \in Y^-$.

Por lo tanto, $z \in \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$, de lo cual obtenemos que $\overline{V(p^+, k)} \subseteq V(p^+, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$.
Ahora, sea $z \in V(p^+, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$. Si $z \in V(p^+, k)$, entonces $z \in \overline{V(p^+, k)}$. Supongamos que, $z \in \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$, es decir, $z = \langle 1/n_0, 0\rangle$ para algún $n_0 \geq k$. Sea $\epsilon > 0$ y veamos que $B_\epsilon(z) \cap V(p^+, k) \neq \emptyset$. Sea $m_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/m_0 < \epsilon$, entonces $\langle 1/n_0, 1/m_0\rangle \in V(p^+, k)$ y además, $\langle 1/n_0, 1/m_0\rangle \in B_\epsilon(z)$. Entonces $B_\epsilon(z) \cap V(p^+, k) \neq \emptyset$ y por lo tanto, $\{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\} \subseteq \overline{V(p^+, k)}$. Así, $\overline{V(p^+, k)} = V(p^+, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$.
Analogamente, se tiene que: Para cada $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\overline{V(p^-, k)} = V(p^-, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$$

De lo anterior, veamos el siguiente hecho:
Afirmación: Para todo $V(p^+, k_1) \in \mathcal{V}_{p^+}$ y para todo $V(p^-, k_2) \in \mathcal{V}_{p^-}$ se tiene que:

$$\overline{V(p^+, k_1)} \cap \overline{V(p^-, k_2)} \neq \emptyset$$

En efecto, sean $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$ tales que $V(p^+, k_1) \in \mathcal{V}_{p^+}$ y $V(p^-, k_2) \in \mathcal{V}_{p^-}$. Notamos que

$$\overline{V(p^+, k_1)} = V(p^+, k_1) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k_1\}$$

y

$$\overline{V(p^-, k_2)} = V(p^-, k_2) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k_2\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{V(p^+, k_1)} \cap \overline{V(p^-, k_2)} &= \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k_1\} \cap \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k_2\} \\ &= \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

donde $k = max\{k_1, k_2\}$.
Por lo tanto, X no es Urysohn.

Veamos (b) : Se sigue de manera inmediata ya que para cada $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\overline{V(p^+, k)} = V(p^+, k) \cup \{\langle 1/n, 0\rangle : n \geq k\}$$

Veamos (c) : Igualmente se sigue de manera inmediata del hecho de que para cada $k \in \mathbb{N}^+$:

$$int(\overline{V(p^+, k)}) = V(p^+, k)$$

□

A continuación, damos una definición que nos ayudará a aclarar la relación que existe entre H-conjuntos y N-conjuntos.

Definición 4.6. *Un espacio X es* casi regular *si dado $q \in X$ y $W \in \mathcal{V}_q$, existe $V \in \mathcal{V}_q$ tal que $\overline{V} \subseteq int(\overline{W})$.*

Lema 4.7. *Sea X un espacio casi regular y $A \subseteq X$. Entonces:*

1. *Si A es un H-conjunto en X, entonces A es un N-conjunto en X.*

2. *Si X es θ-compacto, entonces X es δ-compacto.*

Demostración. Veamos (1.) : Sea A un H-conjunto en X y $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de A por abiertos en X. Entonces para cada $a \in A$, existe $C_a \in \mathcal{C}$ tal que $a \in C_a$; luego, por ser X un espacio casi regular, para cada $a \in A$, existe $U_a \in \mathcal{V}_a$ tal que $\overline{U}_a \subseteq int(\overline{C}_a)$. Entonces, para la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{a_i}$ (ya que A es H-conjunto en X). Pero, notamos que $\bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{a_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n int(\overline{C}_{a_i})$, entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n int(\overline{C}_{a_i})$, de lo cual se sigue que, A es un N-conjunto en X.
Veamos (2.) : Basta tomar $A = X$ en (1.) y se cumple lo deseado. □

Lema 4.8. *Todo espacio θ-compacto y Urysohn X, es casi regular.*

Demostración. Sea $q \in X$ y $W \in \mathcal{V}_q$. Para cada $x \in X \backslash W$, sea U_x y V_x abiertos tales que $x \in U_x$, $q \in V_x$ y $\overline{U}_x \cap \overline{V}_x = \emptyset$ (Aquí utilizamos la hipótesis de que el espacio X es Urysohn). Entonces, para la cubierta abierta $\mathcal{C} = \{W\} \cup \{U_x : x \notin W\}$ de X, existen $x_1, \ldots, x_n \in X \backslash W$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i} \cup \overline{W}$ (Aquí utilizamos la θ-compacidad de X). Sea $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in \mathcal{V}_q$ y $N = X \backslash \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i}$. Entonces tenemos las siguientes contenciones:

$$\overline{V} \subseteq N \subseteq \overline{W}$$

En efecto: Sea $z \in \overline{V}$ y supongamos que $z \notin N$, entonces $z \in \overline{\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}}$ y $z \in \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i}$. Ahora, como $\overline{\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \overline{V}_{x_i}$,entonces $z \in \bigcap_{i=1}^n \overline{V}_{x_i}$ y por otro lado, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z \in \overline{U}_{x_j}$, entonces $z \in \overline{V}_{x_j} \cap \overline{U}_{x_j}$, contradicción, pues fuimos tomando dichos conjuntos de tal manera que fuesen disjuntas sus cerraduras respectivamente. Por lo tanto, $\overline{V} \subseteq N$. La contención restante se cumple de manera inmediata, pues si $z \in N$, como $N = X \backslash \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i}$, entonces $z \notin \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i}$. Ahora, como $X = \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i} \cup \overline{W}$, se sigue que $z \in \overline{W}$. Por lo tanto, $N \subseteq \overline{W}$.
Así, se tiene que $\overline{V} \subseteq N \subseteq \overline{W}$, pero notamos que N es un conjunto abierto, entonces $\overline{V} \subseteq N = int(N) \subseteq int(\overline{W})$, es decir, $\overline{V} \subseteq int(\overline{W})$. Por lo tanto, X es un espacio casi regular. □

De los lemas anteriores tenemos:

Teorema 4.9. *Sea X un espacio θ-compacto y Urysohn y $A \subseteq X$. Entonces:*

1. *Si A es un H-conjunto en X, entonces A es un N-conjunto en X.*

2. *X es un espacio δ-compacto.*

Demostración. Veamos (1.) : Supongamos que A es un H-conjunto en X. Como X es θ-compacto y Urysohn, entonces por Lema 4.8, X es casi regular. Luego, por Lema 4.7, A es un N-conjunto en X.

Veamos (2.) : Como X es θ-compacto y Urysohn, por Lema 4.8, X es casi regular. Luego, por Lema 4.7, X es δ-compacto. □

Corolario 4.10. *X es compacto y Hausdorff $\Leftrightarrow$ X es Urysohn, θ-compacto y semiregular.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto y Hausdorff, entonces es normal, de lo cual se tiene que X es regular y por tanto Urysohn. Por otro lado, como X es compacto, entonces X es δ-compacto y por lo tanto es θ-compacto. Por último, para demostrar que X es semiregular, primero notemos que para todo $U \subseteq X$, $int(\overline{U})$ es abierto regular en X. Sea $\mathcal{B} = \{int(\overline{U}) : U$ es un abierto en $X\}$.
Afirmación: $\mathcal{B}$ es base para los abiertos de X.
Sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}_x$. Como X es regular, existe U abierto en X tal que $x \in \overline{U} \subseteq V$, entonces $x \in int(\overline{U}) \subseteq int(V) = V$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para X. Además, como $\mathcal{B}$ consiste de conjuntos abiertos regulares, se obtiene que X es semiregular.

[$\Leftarrow$] Supongamos que X es Urysohn, θ-compacto y semiregular. Por θ-compacidad, la propiedad de Urysohn y usando Teorema 4.9, se tiene que X es δ-compacto. Luego, como además X es semiregular, entonces por inciso (9.) de la Proposición 4.2, X es compacto. Finalmente, como X es Urysohn, entonces X es Hausdorff. □

El resultado que a continuación mostramos, juega un papel muy importante en la siguiente sección.

Teorema 4.11. *Sea X un espacio, $A \subseteq X$ y ρ un operador. Las siguientes son equivalentes:*

1. *A es ρ-compacto en X.*
2. *Si $\langle x_F \rangle$ es una κ-red en A, entonces existe $q \in A$ tal que q es un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$ en X.*
3. *Si $\langle x_F \rangle$ es una κ-red en A que es universal en X, entonces existe $q \in A$ tal que $x_F \to_\rho q$ en X.*

Demostración. [(2.) $\Leftrightarrow$ (3.)] Ya se demostró anteriormente (Teorema 3.15).

[(1.) $\Rightarrow$ (2.)] Supongamos que existe $\langle x_F \rangle$ κ-red en A tal que $\langle x_F \rangle$ no tiene puntos ρ-clausura en A. Entonces, para cada $a \in A$, existe $V_a \in \mathcal{V}_a$ y existe $F_a \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_a \subseteq G$, $x_G \notin \rho(V_a)$. Sea $\mathcal{C} = \{V_a : a \in A\}$ cubierta abierta de A, entonces, por ρ-compacidad de A, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \rho(V_{a_i})$. Sea $G_0 = \bigcup_{i=1}^n F_{a_i} \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $x_{G_0} \notin \bigcup_{i=1}^n \rho(V_{a_i})$ (pues para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F_{a_i} \subseteq G_0$), entonces $x_{G_0} \notin A$, contradicción, pues $\langle x_F \rangle$ es κ-red en A. Por lo tanto, toda κ-red en A, tiene un punto ρ-clausura en A.

[(2.) $\Rightarrow$ (1.)] Sea $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una cubierta abierta de A por abiertos en X. Supongamos que $\mathcal{W}$ no admite subcolecciones finitas tales que la unión de los conjuntos resultantes de elementos de la subcolección despúes de aplicarles el operador ρ, cubren a A. Entonces, para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x_F \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in F} \rho(W_\alpha)$. Así, obtenemos una κ-red en A. Sea $q \in A$ un punto ρ-clausura de $\langle x_F \rangle$ y sea $\beta < \kappa$ tal que $q \in W_\beta$ (pues $\mathcal{W}$ es cubierta abierta de A y $q \in A$). Entonces, para $W_\beta \in \mathcal{V}_q$ y $\{\beta\} \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$ y $x_G \in \rho(W_\beta)$, lo cual es una contradicción, pues por definición de nuestra κ-red, se tiene que $x_G \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in G} \rho(W_\alpha) \subseteq A \setminus \rho(W_\beta)$. Por lo tanto, A es ρ-compacto. $\square$

Corolario 4.12. *Las siguientes son equivalentes para cualquier espacio X:*

1. *X es compacto.*
2. *Toda κ-red en X tiene un punto clausura.*
3. *Toda κ-red universal en X converge.*

Demostración. Inmediato del Teorema 4.11; basta tomar la elección $\rho(V) = V$ de nuestro operador. $\square$

Corolario 4.13. *Las siguientes son equivalentes para cualquier espacio X:*

1. *X es θ-compacto.*
2. *Toda κ-red en X tiene un punto θ-clausura.*
3. *Toda κ-red universal en X θ-converge.*

Demostración. Inmediato del Teorema 4.11; basta tomar la elección $\rho(V) = \overline{V}$ de nuestro operador. $\square$

Corolario 4.14. *Las siguientes son equivalentes para cualquier espacio X:*

1. *X es δ-compacto.*
2. *Toda κ-red en X tiene un punto δ-clausura.*
3. *Toda κ-red universal en X δ-converge.*

Demostración. Inmediato del Teorema 4.11; basta tomar la elección $\rho(V) = int(\overline{V})$ de nuestro operador. $\square$

4.2. (κ, ω)-Redes y Espacios Lindelöf; Teoremas Producto.

Con lo anterior, hemos usado κ-redes para caracterizar varios tipos de compacidad. Con una modificación adecuada a la definición original de κ-red, podemos también dar caracterizaciones similares de propiedades de cubiertas más generales. Ilustremos ésta idea con una caracterización de espacios Lindelöf. Para esto, aqui damos la modificación adecuada:

Definición 4.15. *Una (κ, ω)-red en X es una función ξ de $[\kappa]^{\leq\omega}$ en X; donde $[\kappa]^{\leq\omega} = \{C \subseteq \kappa : C$ es numerable $\}$ y es dirigido por $\subseteq$. Usamos la notación $\langle x_C \rangle$, donde $C \in [\kappa]^{\leq\omega}$ y $x_C = \xi(C)$.*

Teorema 4.16. *Para cualquier espacio X, las siguientes son equivalentes:*

1. *X es Lindelöf.*
2. *Toda (κ, ω)-red en X tiene un punto clausura.*

Demostración. [(1.) $\Rightarrow$ (2.)] Supongamos que existe $\langle x_C \rangle$ (κ, ω)-red en X sin puntos clausura. Entonces, para cada $q \in X$, existe $V_q \in \mathcal{V}_q$ y existe $F_q \in [\kappa]^{\leq\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{\leq\omega}$ con $F_q \subseteq G$, $x_G \notin V_q$. Sea $\mathcal{C} = \{V_q : q \in X\}$ cubierta abierta de X, entonces existe $\{q_i : i \in \omega\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{i\in\omega} V_{q_i}$ (ya que X es Lindelöf). Sea $G_0 = \bigcup_{i\in\omega} F_{q_i} \in [\kappa]^{\leq\omega}$, entonces $x_{G_0} \notin \bigcup_{i\in\omega} V_{q_i} = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, toda (κ, ω)-red en X tiene un punto clausura.

[(2.) $\Rightarrow$ (1.)] Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no admite subcubiertas numerables. Entonces, para cada $C \in [\kappa]^{\leq\omega}$, sea $x_C \in X \backslash \bigcup_{\alpha\in C} U_\alpha$. Así, obtenemos una (κ, ω)-red en X. Sea $q \in X$ un punto clausura de nuestra (κ, ω)-red. Luego, ya que $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X, existe $\beta < \kappa$ tal que $q \in U_\beta$, entonces para $U_\beta \in \mathcal{V}_{\mathrm{II}}$ y $\{\beta\} \in [\kappa]^{\leq\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{\leq\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$ y $x_G \in U_\beta$, lo cual es una contradicción, pues por definición de nuestra (κ, ω)-red, $x_G \in X \backslash \bigcup_{\alpha\in G} U_\alpha \subseteq X \backslash U_\beta$. Por lo tanto, X es Lindelöf. $\square$

Ahora, veamos una parte muy importante de este trabajo. Usaremos los resultados sobre ρ-compacidad de la sección anterior para dar una unificación aproximada de los siguientes teoremas para el producto de espacios topológicos:

1. Cualquier producto de espacios compactos es compacto.
2. Cualquier producto de espacios θ-compactos es θ-compacto.
3. Cualquier producto de espacios δ-compactos es δ-compacto.

De manera más general, también mostraremos que cualquier producto de H-conjuntos es un H-conjunto y cualquier producto de N-conjuntos es un N-conjunto.

Definición 4.17. *Un operador ρ es productivo, si satisface la siguiente propiedad con respecto a la topología producto: si $\{X_t : t \in T\}$ es una colección de espacios topológicos y $\prod_{t\in T} W_t$ es subconjunto abierto básico canónico de $\prod_{t\in T} X_t$, entonces $\prod_{t\in T} \rho(W_t) \subseteq \rho(\prod_{t\in T} W_t)$.*

Lema 4.18. *Cada uno de los operadores $\rho(V) = V$, $\rho(V) = \overline{V}$ y $\rho(V) = int(\overline{V})$, es productivo.*

Demostración. Sea $\{X_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos y $\prod_{t\in T} W_t$ un abierto básico canónico en $\prod_{t\in T} X_t$ donde para cada $t \in T\backslash\{t_1,\dots,t_k\}$, $W_t = X_t$. Veamos cada elección de nuestro operador:

1. Para $\rho(V) = V$: Es claro.
2. Para $\rho(V) = \overline{V}$: En este caso no solo tenemos la contención sino que se dá la igualdad. En efecto, sea $x = (x_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \overline{W}_t$ y $U = \prod_{t\in T} U_t$ un básico en $\prod_{t\in T} X_t$. Como para cada $t \in T$, $x_t \in \overline{W}_t$, entonces para cada $t \in T$, $W_t \cap U_t \neq \emptyset$. Luego, para cada $t \in T$, sea $y_t \in W_t \cap U_t$, entonces $y = (y_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T}(W_t \cap U_t) = \prod_{t\in T} W_t \cap \prod_{t\in T} U_t = \prod_{t\in T} W_t \cap U$. Por lo tanto, $\prod_{t\in T} W_t \cap U \neq \emptyset$. Ahora, como U fue arbitrario, entonces $x \in \overline{\prod_{t\in T} W_t}$. Ahora, sea $x = (x_t)_{t\in T} \in \overline{\prod_{t\in T} W_t}$, $\beta \in T$ cualquiera y V_β un abierto cualquiera en X_β tal que $x_\beta \in V_\beta$. Como $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ es un abierto en $\prod_{t\in T} X_t$, entonces existe $y = (y_t)_{t\in T}$ tal que $y \in \prod_{t\in T} W_t \cap \pi^{-1}(V_\beta)$, entonces $y_\beta \in V_\beta \cap W_\beta$ y por tanto, $x_\beta \in \overline{W}_\beta$. Por lo tanto, $x = (x_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \overline{W}_t$. Así, $\prod_{t\in T} \overline{W}_t = \overline{\prod_{t\in T} W_t}$ y por lo tanto, ρ es productivo en éste caso.
3. Para $\rho(V) = int(\overline{V})$: En este caso notamos que

$$\prod_{t\in T} int(\overline{W}_t) \subseteq \prod_{t\in T} \overline{W}_t \subseteq \overline{\prod_{t\in T} W_t}$$

y por lo tanto,

$$int(\prod_{t\in T} int(\overline{W}_t)) \subseteq int(\overline{\prod_{t\in T} W_t}).$$

Y ya que $\prod_{t\in T} int(\overline{W}_t)$ es un abierto básico en $\prod_{t\in T} X_t$, entonces $int(\prod_{t\in T} int(\overline{W}_t)) = \prod_{t\in T} int(\overline{W}_t)$. Así, $\prod_{t\in T} int(\overline{W}_t) \subseteq int(\overline{\prod_{t\in T} W_t})$. Por lo tanto, ρ es productivo en este caso.

□

Teorema 4.19. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una colección de espacios topológicos, sea ρ un operador productivo, y para cada $t \in T$, sea A_t un conjunto ρ-compacto en X_t. Entonces $\prod_{t\in T} A_t$ es un conjunto ρ-compacto en $\prod_{t\in T} X_t$. En particular:*

1. *Si cada X_t es compacto, entonces $\prod_{t\in T} X_t$ es compacto (Tychonoff).*
2. *Si cada X_t es θ-compacto, entonces $\prod_{t\in T} X_t$ es θ-compacto (Chevally y Frink).*
3. *Si cada X_t es δ-compacto, entonces $\prod_{t\in T} X_t$ es δ-compacto.*
4. *Si cada A_t es un H-conjunto en X_t, entonces $\prod_{t\in T} A_t$ es un H-conjunto en $\prod_{t\in T} X_t$.*
5. *Si cada A_t es un N-conjunto en X_t, entonces $\prod_{t\in T} A_t$ es un N-conjunto en $\prod_{t\in T} X_t$.*

Demostración. Sea $\langle f_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ una κ-red en $\prod_{t\in T} A_t$ que es universal en $\prod_{t\in T} X_t$. Veamos que existe $g \in \prod_{t\in T} A_t$ tal que $f_F \rightarrow_\rho g$. Primero notamos que, para cada $t \in T$, $\langle f_F(t) : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ es κ-red en A_t que es universal en X_t. En efecto, sea $t_0 \in T$ y $D \subseteq X_{t_0}$, entonces para $\prod_{t\in T} M_t \subseteq \prod_{t\in T} X_t$ donde para todo $t \in T\backslash\{t_0\}$, $M_t = X_t$, y en t_0, $M_{t_0} = D$, se tiene que existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que, o bien, para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, $f_G \in \prod_{t\in T} M_t$, ó, para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, $f_G \in \prod_{t\in T} X_t \backslash \prod_{t\in T} M_t$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, $f_G \in \prod_{t\in T} M_t$; luego, sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, entonces $f_G(t_0) \in M_{t_0} = D$. Entonces, para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, $f_G(t_0) \in D$. Por lo tanto, $\langle f_F(t_0) : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ es universal en X_{t_0}, y además es κ-red en A_{t_0} pues, $\langle f_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ es κ-red en $\prod_{t\in T} A_t$. Así, para cada $t \in T$, $\langle f_F(t) : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ es κ-red universal en X_t. Luego, como tenemos que para cada $t \in T$, A_t es ρ-compacto en X_t, por Teorema 4.11, existe $x_t \in A_t$ tal que

$f_F(t) \to_\rho x_t$ en X_t (y esto ocurre para cada $t \in T$). Ahora, para cada $t \in T$, sea $g(t) = x_t$; así, tenemos que g es una función tal que $g : T \to \bigcup_{t\in T} A_t$ y por lo tanto, $g \in \prod_{t\in T} A_t$. Veamos que $f_F \to_\rho g$. Sea $\prod_{t\in T} W_t$ un abierto básico en $\prod_{t\in T} X_t$ tal que $g \in \prod_{t\in T} W_t$ y además, para cada $t \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$, $W_t = X_t$. Debemos encontrar un $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$, $f_G \in \rho(\prod_{t\in T} W_t)$. Para ver esto, primero notamos que, como ρ es un operador productivo, se tiene que $\prod_{t\in T} \rho(W_t) \subseteq \rho(\prod_{t\in T} W_t)$. Luego, como $g \in \prod_{t\in T} W_t$, entonces para cada $t \in T$, $x_t \in W_t$, y ya que para cada $t \in T$, $f_F(t) \to_\rho x_t$ (donde $x_t = g(t)$), entonces para cada i tal que $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $F_i \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que para cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F_i \subseteq G$, $f_G(t_i) \in \rho(W_{t_i})$. Tomamos a $F = \bigcup_{i=1}^k F_i \in [\kappa]^{<\omega}$ y sea $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$, como para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ $F_i \subseteq G$, entonces $f_G(t_i) \in \rho(W_{t_i})$, lo cual implica que $f_G \in \prod_{t\in T} \rho(W_t)$ (pues de lo contrario, existe $t_0 \in T$ tal que $f_G(t_0) \notin \rho(W_{t_0})$, de lo cual se tiene que $t_0 \in T\backslash\{t_i : i \in \{1, \ldots, k\}\}$, entonces $f_G(t_0) \notin \rho(X_{t_0})$, pero $X_{t_0} \subseteq \rho(X_{t_0})$, contradicción). Por lo tanto, $f_G \in \prod_{t\in T} \rho(W_t) \subseteq \rho(\prod_{t\in T} W_t)$. Así, $f_F \to_\rho g$ y por Teorema 4.11, tenemos que $\prod_{t\in T} A_t$ es ρ-compacto en $\prod_{t\in T} X_t$. $\square$

4.3. Propiedades relacionadas a la ρ-compacidad

En esta sección se hace un estudio sistemático de ideas relevantes relacionadas con la κ-compacidad inicial que se remonta a Alexandroff y Urysohn, con contribuciones adicionales de Smirnov, Noble y Vaughan.

Definición 4.20. *Sea κ un cardinal infinito y ρ un operador. Definimos tres propiedades semejantes de compacidad para un espacio arbitrario X:*

(ρ,κ)**RED** *Toda κ-red en X tiene un punto ρ-clausura.*

(ρ,κ)**SUC** *Toda λ-sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ tiene un punto ρ-clausura.*

(ρ,κ)**CUB** *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X de cardinalidad a lo más κ, entonces existe una subcolección finita de $\{\rho(U) : U \in \mathcal{U}\}$ que cubre a X.*

Estamos interesados principalmente en caracterizar (ρ,κ)RED y (ρ,κ)SUC en diferentes formas de tal manera que la relación entre las tres propiedades sea transparente.

Recordar que ya hemos obtenido varias caracterizaciones de (ρ,κ)RED dadas en el Teorema 3.36. Más aún, tenemos:

Teorema 4.21 (Caracterización de (ρ,κ)RED)**.** *Sea X un espacio, κ un cardinal y ρ un operador. Las siguientes son equivalentes:*

1. *X satisface $(\rho,\kappa)RED$.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos de X con la PIF y $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, entonces $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F^\rho \neq \emptyset$.*

Demostración. [(1.) $\Rightarrow$ (2.)] Supongamos que X satisface (ρ,κ)RED y sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F}$ cumple la PIF y $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Denotemos a $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x_F \in \bigcap_{\alpha\in F} F_\alpha$ un punto cualquiera fijo (aquí utilizamos el hecho de que $\mathcal{F}$ cumple la PIF). Entonces $\langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ es κ-red en X. Luego, sea $q \in X$ un punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$.
Afirmación: $q \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F^\rho$.
Sea $\alpha_0 \in \kappa$ y $V \in \mathcal{V}_q$, entonces para $\{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y V, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\alpha_0\} \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V)$ (pues q es punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$). Además, por definición de $\langle x_F\rangle$, $x_G \in \bigcap_{\alpha\in G} F_\alpha$, con $\bigcap_{\alpha\in G} F_\alpha \subseteq F_{\alpha_0}$ (pues $\alpha_0 \in G$), entonces $x_G \in \rho(V) \cap F_{\alpha_0}$, de lo cual se sigue que $q \in F^\rho_{\alpha_0}$. Por lo tanto, para todo $\alpha < \kappa$, $q \in F^\rho_\alpha$, es decir, $q \in \bigcap_{\alpha<\kappa} F^\rho_\alpha$. Así, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F^\rho \neq \emptyset$.

[(2.) $\Rightarrow$ (1.)] Sea $\langle x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\rangle$ κ-red en X. Recordar que la colección $\mathcal{A} = \{A_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ (donde para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, $A_F = \{x_G : G \in [\kappa]^{<\omega}$ y $F \subseteq G\}$) cumple la PIF, y además $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, entonces se tiene que: $\bigcap_{F\in[\kappa]^{<\omega}} A^\rho_F \neq \emptyset$. Sea $q \in \bigcap_{F\in[\kappa]^{<\omega}} A^\rho_F$ y veamos que q es punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$. Sea $V_0 \in \mathcal{V}_q$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $q \in A^\rho_F$, entonces para cada $V \in \mathcal{V}_q$, $\rho(V) \cap A_F \neq \emptyset$; en particular para V_0, tenemos que $\rho(V_0) \cap A_F \neq \emptyset$ y por lo tanto, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \rho(V_0)$. Así, q es punto ρ-clausura de $\langle x_F\rangle$ y por tanto, X satisface (ρ,κ)RED. □

Ahora damos caracterizaciones de (ρ,κ)SUC, pero antes recordemos dos ejemplos relacionados a puntos clausura de sucesiones (vea [9]).

Ejemplo 4.22. *En S_Ω se cumple lo siguiente:*

1. *Toda sucesión $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ en S_Ω tiene un punto clausura.*
2. *Existen sucesiones $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ en S_Ω sin puntos clausura.*

Ejemplo 4.23. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces:*

1. *Existen sucesiones $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ en $\mathbb{R}$ sin puntos clausura.*

2. *Toda sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ en $\mathbb{R}$ tiene un punto clausura.*

Definición 4.24. *Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación ρ-completo $(\rho - CAP)$ de $A \subseteq X$, si para cada $V \in \mathcal{V}_x$, $|A \cap \rho(V)| = |A|$.*

Teorema 4.25 (Caracterización de (ρ, κ)SUC)**.** *Sea X un espacio, κ un cardinal y ρ un operador. Las siguientes son equivalentes:*

1. *X satisface $(\rho, \kappa)SUC$.*

2. *Toda λ-sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ y λ regular tiene un punto ρ-clausura.*

3. *Si $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos en X con $\lambda \leq \kappa$, entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho \neq \emptyset$.*

4. *Todo subconjunto infinito A de X con $|A| \leq \kappa$ y $|A|$ regular tiene un ρ-CAP.*

Demostración. [(1.) $\Rightarrow$ (2.)] Es claro.

[(2.) $\Rightarrow$ (3.)] Sea $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos en X con $\lambda \leq \kappa$. Entonces tenemos dos casos:

(i) Si λ es regular, entonces para cada $\alpha < \lambda$, sea $x_\alpha \in F_\alpha$ un punto cualquiera fijo. Entonces, por hipótesis, $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ tiene un punto ρ-clausura, digamos q.
Afirmación: $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$
En efecto, sea $\alpha < \lambda$ y $V \in \mathcal{V}_q$, como q es punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$, entonces existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in \rho(V)$ y ya que por definición de nuestra λ-sucesión, $x_\beta \in F_\beta \subseteq F_\alpha$, entonces $x_\beta \in \rho(V) \cap F_\alpha$, entonces $\rho(V) \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Lo cual implica que para todo $\alpha < \lambda$, $q \in F_\alpha^\rho$. Entonces $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho \neq \emptyset$.

(ii) Si λ no es regular, sea $\gamma = cof(\lambda) < \lambda$. Para cada $\beta \in \gamma$, elegimos cardinales $\lambda_\beta < \lambda$ para los cuales $sup\{\lambda_\beta : \beta \in cof(\lambda)\} = \lambda$. Para cada $\beta \in cof(\lambda)$, sea $x_{\lambda_\beta} \in F_{\lambda_\beta}$. Sea q un punto ρ-clausura de $\langle x_{\lambda_\beta} : \beta \in cof(\lambda)\rangle$.

Afirmación: $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$
Sea $\alpha < \lambda$ y $V \in \mathcal{V}_q$, entonces existe $\beta \in cof(\lambda)$ tal que $\alpha < \lambda_\beta$. Entonces existe $\xi \in cof(\lambda)$ tal que $\lambda_\beta < \lambda_\xi$ y $x_{\lambda_\xi} \in \rho(V)$, como $\alpha < \lambda_\beta < \lambda_\xi$, entonces $F_\alpha \supseteq F_{\lambda_\beta} \supseteq F_{\lambda_\xi}$, de lo cual implicamos que $x_{\lambda_\xi} \in \rho(V) \cap F_{\lambda_\xi} \subseteq \rho(V) \cap F_\alpha$, entonces $\rho(V) \cap F_\alpha \neq \emptyset$, entonces $q \in F_\alpha^\rho$. Por lo tanto, $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$ y así, $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho \neq \emptyset$.

[(3.) $\Rightarrow$ (1.)] Sea $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ una λ-sucesión en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$. Para cada $\alpha < \lambda$, sea $F_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$, entonces $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos en X con $\lambda \leq \kappa$; luego, por hipótesis, tenemos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho \neq \emptyset$. Sea $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$ y veamos que q es punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $\alpha < \lambda$, entonces $q \in F_\alpha^\rho$, entonces $\rho(V) \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Entonces, existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in \rho(V)$. Por lo tanto, q es punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$.

[(2.) $\Rightarrow$ (4.)] Basta probar que, si $A = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con λ regular, $\lambda \leq \kappa$ y q es punto ρ-clausura de A, entonces q es ρ-CAP de A. Supongamos que por el contrario que existe q punto ρ-clausura de A que no es ρ-CAP de A. Entonces, existe $V \in \mathcal{V}_q$ tal que $|\rho(V) \cap A| < \lambda$. Por regularidad de λ, existe $\beta < \lambda$ tal que $\rho(V) \cap A \subseteq \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$, lo cual es una contradicción, pues para $V \in \mathcal{V}_q$ y β, no existe $\gamma \geq \beta$ tal que $x_\gamma \in \rho(V)$ lo cual contradice el hecho de que q es punto ρ-clausura de A.

[(4.) $\Rightarrow$ (2.)] Sea $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ una λ-sucesión en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$ y λ regular. Entonces, dos casos:

(i) Si $|\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}| < \lambda$, entonces por regularidad de λ, existe $q \in X$ y $A \subseteq \lambda$ cofinal tal que $x_\alpha = q$ para todo $\alpha \in A$. Veamos que q es punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}_q$ y $\alpha < \lambda$; entonces, como A es cofinal en λ, existe $\beta \in A$ tal que $\beta > \alpha$, entonces $x_\beta = q$ en $V \subseteq \rho(V)$. Por lo tanto, q es punto ρ-clausura de $\langle x_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$.

(ii) Si $|\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}| = \lambda$, por hipótesis, $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tiene un punto ρ-CAP y, por lo tanto, un punto ρ-clausura.

$\square$

Para ciertas elecciones de ρ, podemos mostrar que (ρ, κ)RED y (ρ, κ)SUC, son equivalentes y además, también podremos dar otra caracterización de (ρ, κ)SUC en términos de ρ-CAP$'$s.

Definición 4.26. *Decimos que un operador ρ es* especial *si para todo conjunto abierto V, se cumple que $\rho(V)$ es abierto y $\rho(\rho(V)) \subseteq \rho(V)$.*

Observación 4.27. *Notar que para $\rho(V) = V$ y $\rho(V) = int(\overline{V})$, el operador es especial.*

Demostración. En efecto, si $\rho(V) = V$, el resultado es claro. Por otro lado, si $\rho(V) = int(\overline{V})$, la primera condición es evidente, y para la segunda condición, notar que $\rho(\rho(V)) = \rho(int(\overline{V})) = int(\overline{int(\overline{V})}) \subseteq int(\overline{V}) = \rho(V)$ (pues $int(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$, con lo cual $\overline{int(\overline{V})} \subseteq \overline{\overline{V}} = \overline{V}$, entonces $int(\overline{int(\overline{V})}) \subseteq int(\overline{V})$). $\square$

Teorema 4.28. *Sea ρ un operador especial. Para cualquier espacio X y cualquier cardinal infinito κ, las siguientes son equivalentes:*

1. *X satisface $(\rho, \kappa)RED$.*
2. *X satisface $(\rho, \kappa)SUC$.*
3. *Todo subconjunto infinito A de X con $|A| \leq \kappa$, tiene un ρ-CAP.*

Demostración. [(1.) $\Rightarrow$ (2.)] Se obtiene de manera inmediata por el Teorema 3.29 y el Lema 3.35.

[(2.) $\Rightarrow$ (1.)] Supongamos que X satisface (ρ, κ)SUC pero no (ρ, κ)RED. Entonces por el Teorema 4.21, tomamos el cardinal infinito más pequeño $\lambda \leq \kappa$ tal que existe una colección $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subconjuntos de X con la PIF, $|\mathcal{F}| = \lambda$ y $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho = \emptyset$. Para cada $\alpha < \lambda$, sea $\mathcal{H}_\alpha = \{F_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Como $\mathcal{H}_\alpha$ es una colección de subconjuntos de X con la PIF y con cardinalidad menor que λ, entonces $H_\alpha = \bigcap_{\beta\leq\alpha} F_\beta^\rho \neq \emptyset$. Así, la colección $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos en X con $\lambda \leq \kappa$; luego, por hipótesis y el Teorema 4.25, tenemos que $\bigcap_{\alpha<\lambda} H_\alpha^\rho \neq \emptyset$. Sea $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} H_\alpha^\rho$.
Afirmación: $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$
Sean $\alpha < \lambda$ y $V \in \mathcal{V}_q$, entonces $q \in H_\alpha^\rho$, de lo cual se sigue que $\rho(V) \cap H_\alpha \neq \emptyset$. Sea $z \in \rho(V) \cap H_\alpha$, como $H_\alpha = \bigcap_{\beta\leq\alpha} F_\beta^\rho$ entonces $z \in \rho(V)$ y $z \in F_\alpha^\rho$; del hecho de que ρ es especial, se sigue que $\rho(V)$ es abierto y por lo tanto, $\rho(V) \in \mathcal{V}_z$. Entonces $\rho(\rho(V)) \cap F_\alpha \neq \emptyset$, y como $\rho(\rho(V)) \subseteq \rho(V)$, entonces $\rho(V) \cap F_\alpha \neq \emptyset$, de lo cual se sigue que, $q \in F_\alpha^\rho$.
Por lo tanto, $q \in \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho$, lo cual es una contradicción, pues $\bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha^\rho = \emptyset$. Así, X satisface (ρ, κ)RED.

[(2.) $\Rightarrow$ (3.)] Supongamos que X satisface (ρ, κ)SUC y sea $A \subseteq X$ infinito con $|A| = \lambda \leq \kappa$. Si λ es regular, por el Teorema 4.25, A tiene un ρ-CAP. Si

λ es singular, tenemos lo siguiente:
Denotamos a $A = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$, sea $\{\lambda_\beta : \beta < \theta\}$ una sucesión creciente de cardinales regulares tal que $sup\{\lambda_\beta : \beta < \theta\} = \lambda$ y θ es regular. Por el Teorema 4.25, para cada $\beta < \theta$, sea q_β un punto ρ-CAP de $\{x_\alpha : \alpha < \lambda_\beta\}$ y sea $T = \{q_\beta : \beta < \theta\}$. Entonces tenemos dos casos:

1. $|T| < \theta$: Entonces, como θ es regular, existe $B \subseteq \theta$ cofinal y $q \in X$ tal que para cada $\beta \in B$, $q_\beta = q$. Veamos que q es ρ-CAP de A. Sean $V \in \mathcal{V}_q$ y $\beta \in B$, entonces $q_\beta = q$ donde q_β es punto ρ-CAP de $\{x_\alpha : \alpha < \lambda_\beta\}$, entonces $|\rho(V) \cap A| = \lambda_\beta$ en particular, $|\rho(V) \cap A| \geq \lambda_\beta$. Por lo tanto, para cada $\beta \in B$, $|\rho(V) \cap A| \geq \lambda_\beta$, y ya que B es cofinal en θ, entonces para cada $\beta < \theta$, $|\rho(V) \cap A| \geq \lambda_\beta$, de lo cual se sigue que $|\rho(V) \cap A| \geq sup\{\lambda_\beta : \beta < \theta\} = \lambda$. Por otro lado, como $|\rho(V) \cap A| \leq \lambda$ (pues $\rho(V) \cap A \subseteq A$ y $A = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$), entonces $|\rho(V) \cap A| = \lambda = |A|$. Por lo tanto, q es ρ-CAP de A.

2. $|T| = \theta$: Sea q un ρ-CAP de T y veamos que q es ρ-CAP de A. Sea $V \in \mathcal{V}_q$, entonces $|\rho(V) \cap T| = |T| = \theta$. Luego, como ρ es especial, se tiene que $\rho(V)$ es abierto y por tanto, para cada $\beta < \theta$, $\rho(V) \in \mathcal{V}_{q_\beta}$, de lo cual se sigue que $|\rho(\rho(V)) \cap \{x_\alpha : \alpha < \lambda_\beta\}| = \lambda_\beta$. Además, como $\rho(\rho(V)) \subseteq \rho(V)$ y $\{x_\alpha : \alpha < \lambda_\beta\} \subseteq A$, entonces $\rho(\rho(V)) \cap \{x_\alpha : \alpha < \lambda_\beta\} \subseteq \rho(V) \cap A$. Así, para cada $\beta < \theta$, $\lambda_\beta \leq |\rho(V) \cap A|$ y por tanto, $sup\{\lambda_\beta : \beta < \theta\} \leq |\rho(V) \cap A|$, es decir, $\lambda \leq |\rho(V) \cap A|$. Finalmente, como $\rho(V) \cap A \subseteq A$, se sigue que $|\rho(V) \cap A| \leq \lambda$ y por lo tanto, $|\rho(V) \cap A| = \lambda$. Así, q es ρ-CAP de A.

[(3.) $\Rightarrow$ (2.)] Se cumple por el Teorema 4.25. $\square$

Los resultados de Alexandroff-Urysohn son resumidos en el siguiente corolario, también el Teorema 2.2 del artículo de Stephenson en [6].

Corolario 4.29. *Sean X un espacio y κ un cardinal. Para $\rho(V) = V$, las siguientes son equivalentes:*

1. *Toda κ-red en X tiene un punto clausura.*

2. *Toda λ-sucesión en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, tiene un punto clausura.*

3. *X es inicialmente κ-compacto.*

Demostración. [(1.) $\Leftrightarrow$ (2.)] Basta tomar la elección $\rho(V) = V$ en el Teorema 4.28.

[(1.) $\Rightarrow$ (3.)] Supongamos que toda κ-red en X tiene un punto clausura y que X no es inicialmente κ-compacto. Entonces existe $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ cubierta abierta de X que no admite subcubiertas finitas. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x_F \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$ un punto fijo cualquiera (de esta forma, estamos definiendo una κ-red $\langle x_F \rangle$) y sea $q \in X$ un punto clausura de $\langle x_F \rangle$. Ahora, sea $\beta < \kappa$ tal que $q \in U_\beta$ (pues $\mathcal{C}$ cubre a X), entonces $U_\beta \in \mathcal{V}_q$ y $\{\beta\} \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\beta\} \subseteq G$ y $x_G \in U_\beta$, lo cual es una contradicción, pues por definición de nuestra κ-red $\langle x_F \rangle$, se cumple que $x_G \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in G} U_\alpha \subseteq X \setminus U_\beta$ (ya que $\beta \in G$ y esto implica que $U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in G} U_\alpha$, de lo cual se sigue que $X \setminus \bigcup_{\alpha \in G} U_\alpha \subseteq X \setminus U_\beta$). Por lo tanto, X es inicialmente κ-compacto.

[(3.) $\Rightarrow$ (1.)] Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X con la PIF y tal que $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Supongamos que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset$, entonces $X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = X$; además notamos que $X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus \overline{F})$, de lo cual se tiene que $\mathcal{U} = \{X \setminus \overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X y de cardinalidad menor o igual que κ.

Afirmación: $\mathcal{U}$ no admite subcubiertas finitas.

En efecto, pues de lo contrario, si existen $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n X \setminus \overline{F}_i$, entonces $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n \overline{F}_i$, de lo cual se sigue que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{F}$ cumple con la PIF. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ no admite subcubiertas finitas, lo cual también es una contradicción, pues X es inicialmente κ-compacto.

Así, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$ y finalmente, por el Teorema 4.21, obtenemos que toda κ-red en X, tiene un punto clausura. □

Corolario 4.30. *Sean X un espacio y κ un cardinal. Para $\rho(V) = int(\overline{V})$, las siguientes son equivalentes:*

1. *Toda κ-red en X tiene un punto δ-clausura.*
2. *Toda λ-sucesión en X con $\omega \leq \lambda \leq \kappa$, tiene un punto δ-clausura.*

Demostración. Basta tomar la elección $\rho(V) = int(\overline{V})$ en el Teorema 4.28. □

Ejemplo 4.31. *Existe un espacio X que es regular, pseudocompacto, extremadamente disconexo y no es numerablemente compacto. Para $\rho(V) =$*

$int(\overline{V})$ y $\rho(V)=\overline{V}$, X satisface $(\rho,\omega)CUB$ pero no $(\rho,\omega)SUC$.

Sea $\{R_n : n\in\omega\}$ una partición de ω en una colección de subconjuntos infinitos de ω que son mutuamente disjuntos. Para cada $n\in\omega$ sea p_n el ultrafiltro libre sobre ω tal que $R_n\in p_n$ y sea $P=\{p_n : n\in\omega\}$. El espacio requerido es

$$X=\beta\omega\backslash\{\mathcal{F}\in\beta\omega : \mathcal{F} \text{ es punto límite de } P\}$$

Este espacio tiene las siguientes propiedades:

(a) X es extremadamente disconexo.

(b) X no es numerablemente compacto.

(c) X es pseudocompacto.

(d) X satisface $(\rho,\omega)CUB$.

Demostración. Veamos (a): En efecto, como ω es discreto, entonces ω es Tychonoff. Además, notamos que ω es extremadamente disconexo (por ser discreto), entonces por el Teorema 1.52, $\beta\omega$ es extremadamente disconexo. Con lo anterior, basta demostrar que X es denso en $\beta\omega$, pues todo subconjunto denso de un espacio extremadamente disconexo es extremadamente disconexo. Sea U^* abierto no vacío en $\beta\omega$ y veamos que $U^*\cap X\neq\emptyset$. Tenemos dos casos:

(i) Si existe $n_0\in\omega$ tal que $U\in p_{n_0}$, entonces se tiene que $U\cap R_{n_0}\neq\emptyset$. Sea $V=U\cap R_{n_0}\in p_{n_0}$, entonces $V^*\in\mathcal{V}_{p_{n_0}}$.
Afirmación: $(V^*\backslash\{p_{n_0}\})\cap P=\emptyset$: Supongamos lo contrario, entonces existe $m\in\omega\backslash\{n_0\}$ tal que $p_m\in V^*$, entonces $V\in p_m$, de lo cual se sigue que $V\cap R_m\neq\emptyset$, es decir, $(U\cap R_{n_0})\cap R_m\neq\emptyset$ y por tanto, $R_{n_0}\cap R_m\neq\emptyset$, lo cual es falso, pues $\{R_n : n\in\omega\}$ es partición de ω con elementos mutuamente disjuntos y $n_0\neq m$. Por lo tanto, $(V^*\backslash\{p_{n_0}\})\cap P=\emptyset$.
Así, p_{n_0} no es punto límite de P y como $U^*\in\mathcal{V}_{p_{n_0}}$, entonces $p_{n_0}\in U^*\cap X$ y por lo tanto, $U^*\cap X\neq\emptyset$ en este caso.

(ii) Si para todo $n\in\omega$, $U\notin p_n$: Como $U^*\neq\emptyset$, sea $\mathcal{F}\in U^*$, entonces $(U^*\backslash\{\mathcal{F}\})\cap P=\emptyset$, pues de lo contrario, existe $k\in\omega$ tal que $p_k\in U^*$, lo cual implica que $U\in p_k$, contradicción. Por lo tanto, $(U^*\backslash\{\mathcal{F}\})\cap P=\emptyset$, es decir, $\mathcal{F}$ no es punto límite de P, y como $\mathcal{F}\in U^*$, entonces $\mathcal{F}\in U^*\cap X$ y por lo tanto, $U^*\cap X\neq\emptyset$ en este caso.

Así, X es denso en $\beta\omega$, por ende es extremadamente disconexo.

Veamos (b): Sabemos que un espacio es numerablemente compacto si y solo si todo conjunto infinito en él, admite un punto límite. Veamos pues, que existe un subconjunto infinito de X sin puntos límites, para esto, veamos que P es subconjunto de X. En efecto, sea $n \in \omega$ tal que $p_n \in P$, entonces $R_n \in p_n$, entonces $R_n^* \in \mathcal{V}_{p_n}$ y es tal que $(R_n^* \setminus \{p_n\}) \cap P = \emptyset$, pues de lo contrario, existe $m \in \omega \setminus \{n\}$ tal que $p_m \in R_n^*$, entonces $R_n \in p_m$, de lo cual se sigue que $R_n \cap R_m \neq \emptyset$ con $n \neq m$, contradicción. Por lo tanto, p_n no es punto límite de P, entonces $p_n \in X$. Así, $P \subseteq X$ infinito y sin puntos límite. Por lo tanto, X no es numerablemente compacto.

Veamos (c): Primero veamos el siguiente resultado:

$(\star)$: Si todo $A \subseteq \omega$ infinito tiene un punto límite en X, entonces toda familia localmente finita de abiertos no vacíos en X, es finita.

Demostración. Supongamos que existe $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\omega}$ familia localmente finita de abiertos no vacíos en X. Para cada $i \in \omega$, sea $x_i \in U_i$ y sea $A = \{x_i : i \in \omega\}$ infinito (aquí usamos la local finitez de la familia). Tenemos dos casos:

1. Existe $n_0 \in \omega$ tal que $A \cap R_{n_0}$ es infinito: Sea q ultrafiltro libre tal que $A \cap R_{n_0} \in q$. Entonces $q \in X$ y q es punto límite de A, entonces para cada $U^* \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $U \cap (A \cap R_{n_0}) \neq \emptyset$ y además esta intersección es un conjunto infinito pues pertenece a q. Así, hemos encontrado a $q \in X$ tal que para cada $U^* \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $|\{U_i^* \in \mathcal{U} : U_i^* \cap U^* \neq \emptyset\}| = \omega$, lo cual implica que $\mathcal{U}$ no es localmente finita, lo cual es una contradicción.

2. Para todo $n \in \omega$, $A \cap R_n$ es finito: Sea q ultrafiltro libre tal que $A \in q$. Entonces $q \in X$ y q es punto límite de A, entonces para cada $U^* \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $U^* \cap A \neq \emptyset$ y además esta intersección es un conjunto infinito pues pertenece a q. Así, hemos encontrado a $q \in X$ tal que para cada $U^* \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $|\{U_i^* \in \mathcal{U} : U_i^* \cap U^* \neq \emptyset\}| = \omega$, lo cual implica que $\mathcal{U}$ no es localmente finita, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, toda familia localmente finita de abiertos no vacíos en X, es finita. $\square$

Visto este último resultado, es suficiente probar que todo subconjunto infinito de ω tiene un punto límite en X. Sea $A \subseteq \omega$ infinito y consideremos los dos casos:

i) Si existe $n \in \omega$ tal que $A \cap R_n$ es infinito. Sea q ultrafiltro libre sobre ω tal que $A \cap R_n \in q$. Veamos que $q \in X$. Notamos que $(A \cap R_n)^* \in \mathcal{V}_q$ y $((A \cap R_n)^* \backslash \{q\}) \cap P = \emptyset$, pues de lo contrario, existe $m \in \omega$ tal que $p_m \in (A \cap R_n)^*$, $p_m \neq q$ y $p_m \neq p_n$, de lo cual se sigue que $R_m \cap R_n \neq \emptyset$, siendo esto una contradicción. Por lo tanto, $q \in X$. Además es claro que q es un punto límite de A pues $A \cap R_n \in q$.

ii) Si para cada $n \in \omega$, $A \cap R_n$ es finito. Sea q ultrafiltro libre sobre ω tal que $A \in q$. Veamos que $q \in X$. Notamos que como $A^* \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $(A^* \backslash \{q\}) \cap P = \emptyset$. En efecto, pues notar que para cada $n \in \omega$, $q \neq p_n$; ahora, si suponemos que existe $m \in \omega$ tal que $p_m \in A^*$, entonces $A \in p_m$ de lo cual se sigue que $A \cap R_m \in p_m$, lo cual es una contradicción, pues para cada $n \in \omega$, $A \cap R_n$ es finito. Por lo tanto, $q \in X$. Además, es claro que q es punto límite de A pues $A \in q$.

Así, todo subconjunto infinito de ω tiene un punto límite en X. Luego, usando $(\star)$ se tiene que toda familia localmente finita de abiertos no vacíos en X es finita, de lo cual se sigue que X es pseudocompacto (Vea [1]).

Veamos (d): Tenemos que todo espacio pseudocompacto X tiene la siguiente propiedad: Toda cubierta abierta numerable tiene una subcolección finita cuya unión es densa en X (Vea [13] o también [12]). Por lo tanto, X satisface (ρ, ω)CUB. $\square$

4.4. Aplicaciones de κ-Redes a Funciones Cardinales

Por último, mostramos el uso de κ-redes para la demostración de algunos teoremas importantes sobre funciones cardinales.

Lema 4.32. *Sea X un espacio compacto y T_1 con $\psi(X) \leq \kappa$ y sea $A \subseteq X$ tal que toda κ-red en A tiene un punto clausura en A. Entonces A es compacto*

Teorema 4.33 (Gryzlov)**.** *Sea X un espacio compacto y T_1. Entonces $|X| \leq 2^{\psi(X)}$*

Demostración. Sea $\psi(X) = \kappa$ y para cada $x \in X$, sea $\mathcal{U}_x$ su respectiva pseudobase tal que $|\mathcal{U}_x| \leq \kappa$. Construyamos una sucesión $\{A_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que para cada $0 \leq \alpha < \kappa^+$:

(a) $|A_\alpha| \leq 2^\kappa$.

(b) Si $\langle x_F \rangle$ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, entonces algún punto de A_α es punto clausura de $\langle x_F \rangle$.

(c) Si W es una unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$ y $X \backslash W \neq \emptyset$, entonces $A_\alpha \backslash W \neq \emptyset$.

La construcción se hará por inducción transfinita sobre κ^+:

Sean $\alpha = 0$ y $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Consideramos $A_0 = \{x_0\}$. Entonces A_0 cumple (a). Además (b) y (c) se cumplen por vacuidad.

Ahora sea $0 < \alpha < \kappa^+$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ hemos construido A_β de tal forma que cumplen lo requerido. Para cada κ-red $\langle x_F \rangle$ en $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, tomemos un punto clausura $q \in X$ de $\langle x_F \rangle$ (en efecto existe tal punto pues $\langle x_F \rangle$ es también κ-red en X donde X es compacto, luego, por el Corolario 4.12, existe un punto clausura en X de la κ-red $\langle x_F \rangle$). Sea C el conjunto formado por tales puntos. Notamos que $|C| \leq 2^\kappa$, pues $|\{f \in (\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)^{([\kappa]^{<\omega})} : f \text{ es función}\}| \leq 2^\kappa$. Ahora, por cada W unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$ tal que $X \backslash W \neq \emptyset$, sea $x_{X\backslash W} \in X \backslash W$ y sea D el conjunto formado por tales puntos. Notar que $|D| \leq 2^\kappa$, pues $|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta| \leq 2^\kappa$ y para cada $x \in X$, $|\mathcal{U}_x| \leq \kappa$, entonces $|\{V \in \mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}| \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Además, $|[2^\kappa]^{<\omega}| = 2^\kappa$. Por lo tanto, $|D| \leq 2^\kappa$.

Sea $A_\alpha = C \cup D$. Entonces A_α cumple (a), pues $|A_\alpha| = |C \cup D| \leq |C| + |D| \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2^\kappa$. Además, (b) se cumple por construcción. Veamos que cumple (c). Sea W una unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$ tal que $X \backslash W \neq \emptyset$, entonces $x_{X\backslash W} \in (X \backslash W) \cap D$, entonces $D \backslash W \neq \emptyset$, de lo cual se tiene que $A_\alpha \backslash W \neq \emptyset$. Por lo tanto, A_α cumple (c). Con esto culminamos la construcción.

Sea $A = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$. Claramente $|A| \leq 2^\kappa$, pues $|A| = |\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha| \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$.

Afirmación 1: A es compacto.

Sea $\langle x_F \rangle$ κ-red en A, entonces $\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq A$, y ya que $|\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}| \leq \kappa$, entonces, por regularidad de κ^+, existe $\gamma < \kappa^+$ tal que $\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta$, entonces $\langle x_F \rangle$ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta$, luego, por

(b), algún punto de $A_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha = A$ es punto clausura de $\langle x_F \rangle$. Finalmente, aplicando el Lema 4.32, implicamos que A es compacto.

Afirmación 2: $A = X$
Supongamos por el contrario que $X \backslash A \neq \emptyset$ y sea $z \in X \backslash A$. Para cada $x \in A$, sea $V_x \in \mathcal{U}_x$ tal que $z \notin V_x$ (en efecto podemor tomar tal $V_x \in \mathcal{U}_x$, pues de lo contrario, existe $x \in A$ tal que para todo $V \in \mathcal{U}_x$, $z \in V$, entonces $z \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}_x} V = \bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$, lo cual implica que $z = x$, contradicción). Entonces $\{V_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A, como A es compacto, existe $B \subseteq A$ finito tal que $\{V_x : x \in B\}$ cubren a A. Entonces $A \subseteq \bigcup_{x\in B} V_x$ y $z \notin \bigcup_{x \in B} V_x$. Luego, por regularidad de κ^+, existe $\mu < \kappa^+$ tal que $B \subseteq \bigcup_{\beta<\mu} A_\beta$. Notamos que $\{V_x : x \in B\} \subseteq \{V \in \mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\beta<\mu} A_\beta\}$, más aún, $z \in X \backslash \bigcup_{x\in B} V_x$. Luego, por (c), $A_\mu \backslash \bigcup_{x \in B} V_x \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $A \subseteq \bigcup_{x\in B} V_x$ y $A_\mu \subseteq A$. Por lo tanto, $A = X$.
Así, $|X| \leq 2^\kappa = 2^{\psi(X)}$. □

Ahora veamos la extensión del segundo teorema de Gryzlov a una cardinalidad mayor, pero antes damos unas definiciones y lemas de gran utilidad en la demostración de tal teorema.

Definición 4.34. *Sea $A \subseteq X$ y sea $\xi = \langle x_F \rangle$ κ-red en A. Un punto $x \in A$ es un punto θ-clausura de ξ relativo a A si dado cualquier conjunto abierto R de X con $x \in R$ y cualquier $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \overline{R \cap A}$.*

A continuación damos una caracterización de H-conjuntos.

Lema 4.35. *Sea $A \subseteq X$. Las siguientes son equivalentes:*

a) A es un H-conjunto.

b) Si $\mathcal{W}$ es una colección de conjuntos abiertos en X, cerrada bajo intersecciones finitas, y tal que para cada $V \in \mathcal{W}$, $A \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A$ tal que para todo $V \in \mathcal{W}$, $x \in \overline{V}$.

Demostración. [$a) \Rightarrow b)$] Sea $\mathcal{W}$ una colección de conjuntos abiertos en X, cerrada bajo intersecciones finitas y tal que $A \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{W}$. Supongamos que para todo $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{W}$ tal que $x \notin \overline{V_x}$, entonces para todo $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{W}$ y existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Sea $\mathcal{C} = \{U_x \in \mathcal{V}_x : x \in A\}$ cubierta abierta de A. Como A es H-conjunto, existe $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{x_i}$. Luego, como $\mathcal{W}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces para $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \in \mathcal{W}$ se tiene que $V \cap A = \emptyset$, pues de lo contrario, existe $z \in V \cap A$, entonces $z \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \cap A \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{x_i})$, entonces, por un lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $z \in V_{x_i}$, y por otro lado, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z \in \overline{U}_{x_j}$. De esta forma, para $V_{x_j} \in \mathcal{V}_z$ se tiene que $V_{x_j} \cap U_{x_j} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \cap A = \emptyset$, contradicción, pues para todo $V \in \mathcal{W}$ $A \cap V \neq \emptyset$. Así, existe $x \in A$ tal que para todo $V \in \mathcal{W}$, $x \in \overline{V}$.

[$b) \Rightarrow a)$] Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ cubierta abierta de A. Supongamos que $\mathcal{C}$ no admite sbcolecciones finitas tal que sus cerraduras cubran a A. Entonces, sea $\mathcal{W} = \{X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i} : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, $\mathcal{W}$ es una coleccion de complementos de uniones finitas de cerraduras de elementos tomados de la cubierta abierta $\mathcal{C}$. Notamos que todo elemento de $\mathcal{W}$ es abierto en X y además, $\mathcal{W}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}, X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{U}_{\alpha_j} \in \mathcal{W}$, entonces $(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}) \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{U}_{\alpha_j}) = X \setminus \bigcup_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}} \overline{U}_{\alpha_{(i,j)}} \in \mathcal{W}$. Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i} \in \mathcal{W}$ se tiene que $A \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}) \neq \emptyset$, pues de lo contrario $A \subseteq X \setminus (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i})$, es decir, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{\alpha_i}$, contradiciendo lo supuesto.
Afirmación: Para todo $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0} \overline{U}_{\alpha_i} \in \mathcal{W}$ y $x \notin \overline{X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0} \overline{U}_{\alpha_i}}$
Sea $x \in A$ y sea $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in U_{\alpha_0} \subseteq \overline{U}_{\alpha_0}$, entonces $x \notin X \setminus \overline{U}_{\alpha_0}$. Más aún, $x \notin \overline{X \setminus \overline{U}_{\alpha_0}}$, pues de lo contrario, para toda $V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap (X \setminus \overline{U}_{\alpha_0}) \neq \emptyset$, en particular para $U_{\alpha_0} \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $U_{\alpha_0} \cap (X \setminus \overline{U}_{\alpha_0}) \neq \emptyset$, lo cual implica que $U_{\alpha_0} \cap (X \setminus U_{\alpha_0}) \neq \emptyset$, contradicción. Así, se cumple nuestra afirmación con $n_0 = 1$, lo que también es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, A es un H-conjunto. $\square$

Definición 4.36. *Sea X un espacio y $A \subseteq X$.*

(a) *Diremos que A cumple la propiedad θCP si para toda κ-red $\langle x_F \rangle$ en A, existe $q \in A$ tal que q es un punto θ-clausura de $\langle x_F \rangle$ relativo a A.*

(b) *Diremos que A cumple la propiedad C si se cumple lo siguiente: Si $\{R_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una colección de conjuntos abiertos en X que cubren a A, entonces existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} \overline{R_\alpha \cap A}$.*

Lema 4.37. *Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Si A cumple θCP, entonces A cumple C.*

Demostración. Supongamos que A cumple θCP y sea $\mathcal{R} = \{R_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de conjuntos abiertos en X que cubren a A. Supongamos que para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$ $A \nsubseteq \bigcup_{\alpha\in F} \overline{R_\alpha \cap A}$, entonces para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$ $A\backslash \bigcup_{\alpha\in F} \overline{R_\alpha \cap A} \neq \emptyset$. Para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x_F \in A\backslash \bigcup_{\alpha\in F} \overline{R_\alpha \cap A}$ un punto cualquiera fijo. Así, obtenemos una κ-red $\langle x_F \rangle$ en A. Luego, como A cumple θCP, existe $q \in A$ tal que q es un punto θ-clausura de $\langle x_F \rangle$ relativo a A. Sea $\alpha_0 < \kappa$ tal que $q \in R_{\alpha_0}$, entonces para $\{\alpha_0\} \in [\kappa]^{<\omega}$ y R_{α_0}, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\{\alpha_0\} \subseteq G$ y $x_G \in \overline{R_{\alpha_0} \cap A}$, contradicción, pues por definición de nuestra κ-red, tenemos que $x_G \in A\backslash \bigcup_{\alpha\in G} \overline{R_\alpha \cap A} \subseteq A\backslash\overline{R_{\alpha_0} \cap A}$. Por lo tanto, existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in F} \overline{R_\alpha \cap A}$. Así, A cumple C. $\square$

Lema 4.38. *Sea X un espacio θ-compacto y Hausdorff con $\psi_c(X) \leq \kappa$ y sea $A \subseteq X$ tal que A cumple θCP. Entonces A es un H-conjunto.*

Demostración. Primero notamos que, como A cumple θCP, por el Lema anterior, A cumple C.
Sea $\mathcal{V}$ una colección de conjuntos abiertos en X, cerrado bajo intersecciones finitas y tal que para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$. Haciendo uso del Lema de Zorn, supongamos que $\mathcal{V}$ es maximal respecto a esas propiedades. Notamos que, si R es un conjunto abierto y $R \notin \mathcal{V}$, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $R \cap A \cap V = \emptyset$, pues de lo contrario, para todo $V \in \mathcal{V}$, $R \cap A \cap V \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{R\} \cup \{$ Todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{V}$ con $R\}$ es tal que $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{V}'$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{V}$. Luego, como X es θ-compacto y Hausdorff (es decir, es H-cerrado), aplicando el Lema 4.35 a X, existe $q \in X$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}$, $q \in \overline{V}$. La prueba estará completa si demostramos que $q \in A$.

Como $\psi_c(X) \leq \kappa$, para $q \in X$, existe una colección $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de vecindades abiertas de q tal que $\bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{W}_\alpha = \{q\}$.

Afirmación 1: Para cada $\alpha < \kappa$, existe $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $(\overline{V_\alpha \cap A}) \subseteq \overline{W}_\alpha$. En efecto, sea $\alpha < \kappa$ y $R = X\backslash\overline{W}_\alpha$. Es claro que $q \notin \overline{R}$, pues de lo contrario, $q \in \overline{R}$, entonces para $W_\alpha \in \mathcal{V}_q$ se tiene que $W_\alpha \cap R \neq \emptyset$, es decir, $W_\alpha \cap X\backslash\overline{W}_\alpha \neq \emptyset$, lo cual implica que $W_\alpha \cap (X\backslash W_\alpha) \neq \emptyset$, contradicción. Por lo tanto, $q \notin \overline{R}$, y de ahi que $R \notin \mathcal{V}$ (pues para todo $V \in \mathcal{V}$ $q \in \overline{V}$). Entonces existe $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $V_\alpha \cap A \cap R = \emptyset$, de donde se tiene que $V_\alpha \cap A \subseteq X\backslash R = X\backslash(X\backslash\overline{W}_\alpha) = \overline{W}_\alpha$, entonces $\overline{V_\alpha \cap A} \subseteq \overline{\overline{W}}_\alpha = \overline{W}_\alpha$.

Afirmación 2: $A \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A})) \neq \emptyset$

En efecto, pues de lo contrario, $A \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A})) = \emptyset$ implica que

$$A \subseteq X \setminus \bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A}) = \bigcup_{\alpha<\kappa} X \setminus (\overline{V_\alpha \cap A})$$

y por tanto se tiene que la colección: $\{X \setminus (\overline{V_\alpha \cap A}) : \alpha < \kappa\}$ es una colección de conjuntos abiertos en X que cubren a A; luego como A cumple C, existe $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} (\overline{X \setminus (\overline{V_\alpha \cap A}) \cap A}) \tag{4.1}$$

Sabemos que, para todo $G \in [\kappa]^{<\omega}$, se tiene que $A \cap (\bigcap_{\alpha \in G} V_\alpha) \neq \emptyset$ donde para todo $\alpha \in G$, $V_\alpha \in \mathcal{V}$ (en efecto tenemos esto, ya que $\mathcal{V}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y además, todo elemento de $\mathcal{V}$ intersecta a A). Entonces, para $F \in [\kappa]^{<\omega}$, sea $x \in A \cap (\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha)$. Entonces, por 4.1, existe $\alpha_0 \in F$ tal que $x \in \overline{X \setminus (\overline{V_{\alpha_0} \cap A}) \cap A}$ y por tanto para todo $U \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $U \cap (X \setminus (\overline{V_{\alpha_0} \cap A}) \cap A) \neq \emptyset$. En particular para $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \cap (X \setminus (\overline{V_{\alpha_0} \cap A}) \cap A) \neq \emptyset$. Sea z en tal intersección, entonces $z \in \bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \cap A$ y $z \in X \setminus (\overline{V_{\alpha_0} \cap A}) \subseteq X \setminus (V_{\alpha_0} \cap A)$, y ya que $\alpha_0 \in F$, entonces $X \setminus (V_{\alpha_0} \cap A) \subseteq X \setminus (\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \cap A)$, de lo cual se sigue que, $z \in \bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \cap A$ y $z \in X \setminus (\bigcap_{\alpha \in F} V_\alpha \cap A)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A})) \neq \emptyset$

Sea $p \in A \cap (\bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A}))$. Por *Afirmación 1*, se tiene que, $\bigcap_{\alpha<\kappa}(\overline{V_\alpha \cap A}) \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{W}_\alpha$, entonces $p \in A$ y $p \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{W}_\alpha = \{q\}$, de lo cual se tiene que $p = q$ y por tanto, $q \in A$. Así, aplicando el Lema 4.35, obtenemos que A es un H-conjunto. □

Lema 4.39. *Sea X un espacio θ-compacto y Hausdorff con $\psi_c(X) \leq \kappa$ y sea $\xi = \langle x_F \rangle$ κ-red en X. Entonces existe un subconjunto A_ξ de X tal que:*

1. *$\xi \subseteq A_\xi$*
2. *$|A_\xi| \leq \kappa$*
3. *Algún punto de A_ξ es un punto θ-clausura de ξ relativo a A_ξ.*

Demostración. Como X es θ-compacto, sea $x \in X$ un punto θ-clausura de ξ (es posible tomar tal punto por el Corolario 4.13). Ahora, para cada $y \in X$, sea $\{V(\gamma, y) : \gamma < \kappa\}$ una colección de vecindades abiertas de y tal que

$\{y\} = \bigcap_{\gamma<\kappa} \overline{V}(\gamma, y)$. Notar que, como x es punto θ-clausura de ξ, se cumple que, para cada $\gamma < \kappa$ y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \overline{V}(\gamma, x)$. Luego, para cada $\gamma < \kappa$ y cada $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $x_G \in \overline{V}(\gamma, x)$, sea $x(\gamma, G, \beta) \in V(\gamma, x) \cap V(\beta, x_G)$ donde $0 \leq \beta < \kappa$. Sea

$$A_\xi = \{x\} \cup \xi \cup \{x(\gamma, G, \beta) : \gamma < \kappa, G \in [\kappa]^{<\omega}, x_G \in \overline{V}(\gamma, x) \text{ y } \beta < \kappa\}.$$

Es claro que A_ξ cumple 1. Además notamos que: $|\{x\}| \leq \kappa$, $|\xi| \leq \kappa$ y $|\{x(\gamma, G, \beta) : \gamma < \kappa, G \in [\kappa]^{<\omega}, x_G \in \overline{V}(\gamma, x) \text{ y } \beta < \kappa\}| \leq \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa = \kappa$; de lo cual se tiene que $|A_\xi| \leq \kappa + \kappa + \kappa = \kappa$ y por tanto se cumple 2. Por último veamos que cumple 3, es decir, veamos que para cada $\gamma < \kappa$ y cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$, existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ con $F \subseteq G$ tal que $x_G \in \overline{V(\gamma, x) \cap A_\xi}$ (o en otras palabras, veamos que x es punto θ-clausura de ξ relativo a A_ξ). Sean $\gamma < \kappa$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces existe $G \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $x_G \in \overline{V}(\gamma, x)$; sea $\beta < \kappa$, entonces $x(\gamma, G, \beta) \in V(\gamma, x) \cap V(\beta, x_G)$, y ya que $x(\gamma, G, \beta) \in A_\xi$, entonces $A_\xi \cap V(\gamma, x) \cap V(\beta, x_G) \neq \emptyset$, entonces se tiene que para todo $\beta < \kappa$, $V(\beta, x_G) \cap (V(\gamma, x) \cap A_\xi) \neq \emptyset$, de lo cual implicamos que $x_G \in \overline{V(\gamma, x) \cap A_\xi}$. Por lo tanto, x es punto θ-clausura de ξ relativo a A_ξ. $\square$

Teorema 4.40 (Gryzlov para $\kappa = \omega$; Dow-Porter)**.** *Sea X un espacio θ-compacto y Hausdorff. Entonces $|X| \leq 2^{\psi_c(X)}$.*

Demostración. Sea $\psi_c(X) = \kappa$ y para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}_x$ una colección de vecindades abiertas de x tal que $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}_x} \overline{V}$ y además, $|\mathcal{B}_x| = \kappa$. Para cada κ-red $\xi = \langle x_F \rangle$ en X, sea $A_\xi \subseteq X$ tal que A_ξ satisface $1 - 3$ del Lema 4.39. Construyamos una sucesión $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de subconjuntos de X tal que para $0 \leq \alpha < \kappa^+$:

1. $|Y_\alpha| \leq 2^\kappa$
2. Si ξ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$, entonces $A_\xi \subseteq Y_\alpha$
3. Si W es una unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\}$ y $\overline{W} \neq X$, entonces $Y_\alpha \setminus \overline{W} \neq \emptyset$.

La construcción se hará por inducción transfinita sobre κ^+:

Sean $\alpha = 0$ y $x_0 \in X$ arbitrario, consideramos $Y_0 = \{x_0\}$. Entonces Y_0 cumple 1; además 2 y 3 se cumplen por vacuidad. Ahora sea $0 < \alpha < \kappa^+$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$, hemos construido Y_β de tal forma que $1 - 3$ se verifican. Por cada W unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{B}_x :$

$x \in \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\}$ tal que $\overline{W} \neq X$, tomamos un punto $x_{X\setminus\overline{W}} \in X\setminus\overline{W}$ y sea D el conjunto formado por tales puntos. Notar que $|D| \leq 2^\kappa$, pues $|\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta| \leq 2^\kappa$ y para cada $x \in X$, $|\mathcal{B}_x| = \kappa$, entonces $|\{V \in \mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta<\kappa} Y_\beta\}| \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$; además $|[2^\kappa]^{<\omega}| = 2^\kappa$. Por lo tanto, $|D| \leq 2^\kappa$. Sea $Y_\alpha = \bigcup\{A_\xi : \xi$ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\} \cup D$.

Afirmación: $|Y_\alpha| \leq 2^\kappa$
En efecto, pues $|\{\xi : \xi$ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\}| \leq 2^\kappa$ (y esto último ocurre porque $|(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta)^{([\kappa]^{<\omega})}| = |\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta|^{|[\kappa]^{<\omega}|} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$), y como cada A_ξ tiene cardinalidad a lo más κ, entonces $|\bigcup A_\xi| \leq \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Además, $|D| \leq 2^\kappa$. Por lo tanto, $|Y_\alpha| = |\bigcup A_\xi \cup D| \leq |\bigcup A_\xi| + |D| \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2^\kappa$. Así, Y_α cumple 1.

Más aún, es claro que Y_α cumple 2 por construcción. Veamos que Y_α cumple 3. Sea W una unión finita de elementos de $\{V \in \mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta\}$ tal que $X\setminus\overline{W} \neq \emptyset$. Entonces $x_{X\setminus\overline{W}} \in X\setminus\overline{W} \cap D$, entonces $D\setminus\overline{W} \neq \emptyset$ y por lo tanto, $Y_\alpha\setminus\overline{W} \neq \emptyset$.
Aqui termina la construcción.

Sea $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} Y_\alpha$. Claramente $|Y| \leq 2^\kappa$, pues $|Y| = |\bigcup_{\alpha<\kappa^+} Y_\alpha| \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$.

Afirmación 1: Y es H-conjunto
Sea $\xi = \langle x_F \rangle$ κ-red en Y, entonces $\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq Y$ y $|\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\}| \leq \kappa$, entonces por la regularidad de κ^+, existe $\gamma < \kappa^+$ tal que $\{x_F : F \in [\kappa]^{<\omega}\} \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} Y_\beta$, de lo cual se tiene que ξ es κ-red en $\bigcup_{\beta<\gamma} Y_\beta$. Luego, por 2, tenemos que $A_\xi \subseteq Y_\gamma$, por otro lado, como A_ξ cumple 3 del Lema 4.39, existe $q \in A_\xi \subseteq Y_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha = Y$ tal que q es un punto θ-clausura de ξ relativo a A_ξ y por tanto relativo a Y (en efecto, pues para cada R abierto en X tal que $q \in R$, se tiene que $\overline{R \cap A_\xi} \subseteq \overline{R \cap Y_\gamma} \subseteq \overline{R \cap Y}$). Luego, por el Lema 4.38, Y es un H-conjunto.

Afirmación 2: $Y = X$
Supongamos por el contrario que $X\setminus Y \neq \emptyset$ y sea $z \in X\setminus Y$. Para cada $x \in Y$, sea $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $z \notin \overline{V}_x$. Entonces la colección $\{V_x : x \in Y\}$ es cubierta abierta de Y; luego, ya que Y es un H-conjunto (Afirmación 1), existe $B \subseteq Y$ finito tal que $Y \subseteq \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x$, además $z \notin \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x$. Por otro lado, por la regularidad de κ^+, existe $\gamma < \kappa^+$ tal que $B \subseteq \bigcup_{\beta<\gamma} Y_\beta$, y ya que $\{V_x : x \in B\} \subseteq \{V \in \mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta<\gamma} Y_\beta\}$ y $z \in X\setminus \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x$ (es decir, $\overline{\bigcup_{x\in B} V_x} = \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x \neq X$), entonces por 3, $Y_\gamma\setminus \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x \neq \emptyset$, lo cual es una

contradicción, pues $Y \subseteq \bigcup_{x\in B} \overline{V}_x$ y $Y_\gamma \subseteq Y$. Por lo tanto, $Y = X$.

Así, por todo lo anterior, tenemos que $|X| \leq 2^\kappa$. $\square$

Bibliografía

[1] Engelking, R., *General topology*, Berlin Heldermann, 1989.

[2] Hernández H. F., *Teoría de conjuntos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, 1998.

[3] Hodel R. E., *A Theory of Convergence and Cluster points based on κ-nets*, Topology Proceedings. 35 (2010), 291-330.

[4] Hodel R., *Cardinal functions I*, in: K. Kunen, J. vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp 1-61.

[5] Hrbacek K., Jech T., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dakker, Inc., Second Edition 1978.

[6] Kunen K., Vaughan J. (Eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[7] Meyer P. R., *Sequential properties of ordered topological spaces*, Compositio Mathematicae 21 (1969), 102-106.

[8] Moore E. H., *General Analysis I*, Pt. II, Philadelphia, 1939.

[9] Munkres J. R., *Topology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, Second Edition 2000.

[10] Romero M. A., *Filtros y la PIF*, Tesis de Licenciatura, BUAP (2004).

[11] Salicrup G., *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[12] Stephenson R.M. Jr., Pseudocompact Spaces, in: K. P. Hart, J. Nagata, J. Vaughan (Eds.), *Encyclopedia of General Topology*, 177-181, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[13] Willard S., *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.