Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

LA INTEGRAL DE BOCHNER

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
JAIR RAÚL SÁNCHEZ MORALES

DIRECTOR DE TESIS
JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA

PUEBLA, PUE. SEPTIEMBRE 2017

A mis padres, Raúl Sánchez y Gema Morales.

Hablan mucho de la belleza de la certidumbre como si ignorasen la belleza sutil de la duda. Creer es muy monótono; la duda es apasionante.

Oscar Wilde.

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell

De la nada, he creado un universo nuevo y extraño.

Janos Bolyai

No te preguntes qué puede hacer tu país por ti, pregúntate que puedes hacer tú por tu país.

John. F. Kennedy

Agradecimientos

Este trabajo que tienes en tus manos es la suma de una serie de esfuerzos y obstáculos a vencer que se fueron presentándose en toda la licenciatura, un camino que después de tanto no podía haber transitado si no fuera por los grandes esfuerzos y sacrificios de mis padres Raúl y Gema, sabiendo que no existirá una forma de agradecerles una vida de sacrificio y esfuerzo, quiero que sientan que el objetivo logrado también es de ustedes y que la fuerza que me ayudó a conseguirlo fue por su apoyo. Además de que son una gran inspiración en mi vida para seguir luchando. Este camino no podía haber transitado si no fuera por el apoyo ilimitado y constante de mis hermanos Gamaliel, Enrique, José Antonio e Israel Bruno, gracias a ustedes por haber estado siempre a mi lado, además de que son grandes modelos a seguir y es un gran orgullo poder ser su hermano. Este camino no podía haber recorrido si no fuera por dos grandes colegas, Jorge Herrera e Hipólito Martinez, que ampliaron mi horizonte de las matemáticas hasta el infinito y regresando así, la alegría, el ánimo, la curiosidad y el gusto por este maravilloso mundo de las matemáticas, gracias Jorge por ser mi amigo y mi colega, y gracias por tu ayuda en este trabajo. Este camino no tendría mis huellas si no fuera por aquellos compañeros de la universidad que tuve la dicha de conocerlos y haber compartido grandes aventuras y los mejores momentos durante la carrera. Este camino no podía haber transitado si no fuera por mi asesor Juan Alberto Escamilla, por su paciencia, por sus conocimientos y su apoyo, por ser mi profesor, y por guiarme en toda mi carrera para obtener este momento de felicidad.

Debo agradecer también a todos los profesores que con su trato, con sus conocimientos y con sus memorias han ayudado a mi formación profesional y humana. En particular, quiero agradecer a mis sinodales, a los profesores Patricia Domínguez, Iván Hernández y Maria Guadalupe Raggi, por la lectura de este trabajo y por sus valiosas sugerencias y observaciones. Profesora Raggi, gracias por sus conocimientos de Latex que he podido finalizar la tesis y más aún, gracias por la oportunidad que me otorgó en el primer año de mi carrera.

Gracias Jenny Arce, por motivarme a continuar este camino y por acompañarme en los últimos años de mi carrera, así como el resto de la aventura que está por venir.

Por último, gracias a ti querido lector...

Nuevamente, ¡muchas gracias a todos ustedes!...

Introducción

H. Lebesgue, en 1904, introdujo un concepto de una integral (hoy en día se conoce como la integral de Lebesgue) basado en la teoría de la medida que generaliza la integral de Riemann. Tiene la ventaja de tratar simultáneamente con funciones acotadas y con funciones no acotadas, y permite que sus dominios sean conjuntos más generales (no necesariamente deben ser conjuntos cerrados). Además, esta integral proporciona teoremas de convergencia más fuertes que la integral de Riemann. La integral de Lebesgue desempeña un papel muy importante en el análisis matemático, en la teoría de la medida, en la teoría de probabilidades y en muchas otras ramas de la matemática.

En 1933, S. Bochner introduce y estudia un concepto de integral para funciones definidas en un espacio de medida y con valores en un espacio normado (veáse [6]); actualmente a esta integral se le conoce como la integral de Bochner y ha resultado una herramienta muy útil en el estudio del Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad, Teoría de Semigrupos, etc.

La integral de Bochner es una generalización de la integral de Lebesgue en el contexto de los espacios de normados. Algunas propiedades de la integral de Lebesgue, tales como, la linealidad de la integral, el Teorema de la Convergencia Dominada, el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se siguen conservando para la integral de Bochner. Sin embargo, hay otras propiedades de la integral de Lebesgue, como por ejemplo, el Teorema de Radon-Nikodým, que no necesariamente es verdadero en el contexto de la integral de Bochner. Algunas otras propiedades de la integral de Lebesgue, como la monotonía de la integral, no tienen sentido en el contexto de los espacios de normados, a menos que se introduzca un orden en el espacio normado. El propósito de este trabajo de tesis es presentar un estudio básico de la integral de Bochner, tomando como guía las propiedades que tiene la integral de Lebesgue. Por otro lado, esperamos que esta tesis sirva de ayuda para los estudiantes de licenciatura y también a los de posgrado.

Para entender sin problemas esta tesis es necesario tener conocimientos básicos del análisis matemático, de la teoría de la medida y de las propiedades básicas de la topología general, además de algunos conceptos fundamentales de los espacios de Banach.

En el primer capítulo, presentaremos algunas nociones básicas de la teoría de los espacios de Banach, también veremos algunos ejemplos de los espacios de sucesiones y de funciones, en esta sección nos basamos en [13] y [15]; luego veremos algunas propiedades de las series convergentes en los espacios de Banach, y en esta sección recomendamos [11] y [19] al lector para un estudio más completo. En el capítulo dos, veremos los ingredientes necesarios (como por ejemplo, σ-álgebra y medida) para poder definir un espacio de medida, así como algunas de sus propiedades más importantes; además de una presentación no detallada de la medida de Lebesgue. En el tercer capítulo, referente a las funciones medibles, se dará una presentación de tres tipos de medibilidad: la de ser fuertemente μ-medible, que se necesitará para definir la integral de Bochner; la de ser fuertemente Σ-medible y de ser Σ-medible, en los que se presentarán las equivalencias correspondientes con la de fuertemente μ-medible en espacios específicos (tales como en un espacio de medida σ-finita y en un espacio de Banach separable, respectivamente), además de una presentación de dos teoremas que muestran las conexiones existente entre la convergencia casi donde quiera y la convergencia casi uniforme. En el capítulo cuatro se verá el concepto de una función integrable y algunas de sus propiedades muy útiles, además de la presentación de los conceptos básicos de la integral de Lebesgue, asimismo veremos algunas de sus propiedades más importantes de continuidad; más adelante conoceremos el concepto principal de este trabajo, la integral de Bochner, y analizaremos algunas de sus propiedades importantes y durante esta sección se verá algunas comparaciones con la integral de Lebesgue.

En el transcurso de la carrera de la licenciatura de matemáticas se pueden estudiar los cursos de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. En estos cursos se estudia la teoría de integración para funciones definidas en un espacio de medida con valores reales o con valores complejos, y no siempre se estudia la teoría de integración para funciones definidas en un espacio de medida con valores en un espacio normado. Actualmente hay varias integrales que generalizan la integral de Lebesgue, tales como la integral de Bochner, de Pettis, de Dunford, de Gel'fand, entre otras. Así que consideramos que está plenamente justificado, dada la importancia de la integral de Bochner, realizar un trabajo de tesis de licenciatura en matemáticas sobre este tema.

Finalmente, consideramos pertinente mencionar que esta tesis no es un trabajo original, es una recopilación bibliográfica de las propiedades relevantes y básicas que se presentan de manera ordenada para poder introducir al lector el concepto de la integral de Bochner. En este trabajo consultamos principalmente [2], [10], [22], [24], [25] y [28] para la integral de Bochner; [4],

[8], [17], y [23] para la integral de Lebesgue y espacios de medidas.

Índice general

Capítulo 1

Espacios de Banach

Un espacio de Banach, llamado así en honor del matemático polaco, Stefan Banach, es uno de los objetos de estudio más importantes en el análisis funcional. A continuación veremos sus propiedades.

Definición 1.0.1. *Si X es un espacio vectorial sobre un espacio escalar $\mathbb{K}$ (el campo $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$, o bien, $\mathbb{C}$), entonces una **norma** en X es una función de X en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que cumplen con las siguientes condiciones:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$;

(ii) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$.

*Un **espacio normado** es una pareja $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X. Cuando no haya confusión omitiremos la segunda componente del par. Por otra parte, escribiremos $\|\cdot\|_X$ cuando queramos resaltar que trabajamos con una norma del espacio X.*

Note que la función $d(x, y,) := \|x - y\|$, donde $x, y, \in X$, es en efecto una métrica[1] en X.

Cuando no se especifique lo contrario, todas las nociones topológicas y uniformes en los espacios normados se referirán a la métrica canónica dada

[1] Ver pag. 87.

por la norma d, que suele denominarse **topología de la norma** en X.

Decimos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son **equivalentes** cuando dan lugar a la misma topología. Ahora bien, tenemos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si y sólo si existen dos constantes estrictamente positivas m y M tales que

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Como una de las consecuencias, de la última proposición y de la definición, tenemos que una norma equivalente a una completa también es completa y que los subconjuntos acotados para dos normas equivalentes son los mismos.

Una función $T : X \to Y$, donde X y Y son dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, es **lineal** si $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$ para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in X$.

Un **isomorfismo** entre dos espacios normados X e Y es una aplicación lineal y biyectiva $T : X \to Y$, esto es, T una biyección que conserva las estructuras lineales y topológicas. En este caso, decimos que X e Y son **isomorfos** ($X \approx Y$). Entonces como un resultado de lo anterior se tiene que una biyección lineal $T : X \to Y$ es un isomorfismo si y sólo si existen dos constantes estrictamente positivas m y M tales que

$$m\|x\| \leq \|T(X)\| \leq M\|(x)\| \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Una **isometría** (también lo podemos encontrar como **isomorfismo isómetrico** o **biyección lineal isómetrica** o **isometría sobreyectiva**) de X en Y es una aplicación lineal que es un isomorfismo isométrico sobre su imagen, esto es, una aplicación lineal $T : X \to Y$ tal que

$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Decimos que Y tiene una **copia isométrica** de X, o que Y **contiene isométricamente** a X, o bien, decimos que X e Y son **isométricamentes isomorfos** si existe una isometría de X en Y, es decir, si Y contiene un subespacio que es isométricamente isomorfo a X.

Definición 1.0.2. *Un* ***espacio de Banach*** *es un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *que es completo en la métrica canónica definida por* $d(x,y) = \|x-y\|$ *para todo* $x, y \in X$*, es decir, toda sucesión de Cauchy en* X *para la métrica* d *converge a algún punto en* X*.*

El conjunto $B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ es una **bola unitaria cerrada** de X, y $S_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ la **esfera unitaria** de X.

A continuación, veremos algunos teoremas cuyas demostraciones no se presentarán, puesto que no es el motivo de nuestro trabajo, no obstante, el lector lo puede consultar en [15].

Teorema 1.0.1. *Sea* Y *un subespacio de un espacio de Banach* X*. Entonces* Y *es un espacio de Banach si y sólo si* Y *es cerrado en* X*.*

Teorema 1.0.2. *Un espacio normado* X *es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente en* X *es convergente.*

Teorema 1.0.3. *Sean* X *y* Y *dos espacios normados y* $T : X \to Y$ *una función lineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) T *es continua en un punto.*

2) T *es continua en 0.*

3) *Existe una constante* $M \geq 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ *para todo* $x \in X$*.*

4) T *es Lipschitziana, es decir, existe una constante* $C \geq 0$ *tal que* $\big\|T(x) - T(y)\big\| \leq C\|x-y\|$ *para todo* $x, y \in X$*.*

5) $T(B_X)$ *es un subconjunto acotado de* Y

6) *Para cualquier subconjunto acotado* A *de* Y*,* $T(A)$ *es un subconjunto acotado de* Y*.*

7) T *es continua en* X*.*

A una función lineal que va de X a Y (X y Y son dos espacios de Banach) se le conoce usualmente como un **operador lineal**. Además, un operador $T : X \to Y$ es **acotado** si $T(B_X)$ es acotado en Y. Escribimos $B(X,Y)$

para denotar al espacio de todos los operadores acotados de X a Y, también llamado **espacio de operadores**. Definiendo

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in B_X\} \qquad \text{para todo } T \in B(X,Y),$$

se obtiene una norma en $B(X,Y)$, que llamaremos **norma de operadores**. La convergencia en dicha norma equivale a la convergencia uniforme en B_X o a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de X.

Teorema 1.0.4. *Sean X, Y, Z espacios normados. Entonces tenemos lo siguiente:*

(i) Para todo $T \in B(X,Y)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\Big\{\big\|T(x)\big\| \ : \ x \in S_X\Big\} = \sup\Big\{\big\|T(x)\big\| \ : \ x \in int(B_X)\Big\}\\ &= \text{ínf}\Big\{M \geq 0 \ : \ \big\|T(x)\big\| \leq M\|x\| \ \textit{para todo } x \in X\Big\}.\end{aligned}$$

(ii) Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ también lo es.

(iii) Si $T \in B(X,Y)$ y $S \in B(Y,Z)$, entonces $S \circ T \in B(X,Z)$ y $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. En particular, $B(X) = B(X,X)$ es un álgebra con el producto dado por la composición, dicho producto es continuo.

Notemos que las igualdades en (i) nos dicen que $\|T\|$ es acotado y Lipschitziana y de acuerdo con el Teorema 1.0.3, tenemos que $\|T\|$ es continua en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, dado un espacio normado X, escribiremos X^* en vez de $B(X, \mathbb{K})$; X^* es el **espacio dual** (o conjugado) de X y a sus elementos se les llama los **funcionales lineales continuos** en X. Podemos considerar también el espacio dual del espacio dual, también llamado **bidual** (o bien, segundo conjugado) que se denota X^{**}. Para $x^* \in X^*$ y $x \in X$ usamos la notación $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$. Si x es fijo, la relación $\langle x, x^* \rangle$ define un funcional continuo en X^* y de esta forma podemos asociar x a un elemento $x^{**} \in X^{**}$. Éste mapeo resulta ser inyectivo y una isometría (para probarlo se usa el Teorema de Hahn-Banach) y se llama **identificación canónica**. El espacio X es **reflexivo** si la identificación canónica es sobreyectiva. Por último, tenemos que de acuerdo con el Teorema 1.0.4, X^* es un espacio de Banach.

Para mayor información sobre los espacios de Banach, el lector puede remitirse al [15].

1.1. Espacios Clásicos de Banach

El análisis funcional trata sobre el estudio de espacios de funciones. Como se vio anteriormente la palabra funcional, que se remonta al cálculo de variaciones, implica una función cuyo argumento es una función. Su uso en general se ha atribuido a Volterra.

En la visión moderna inicial, se consideró el análisis funcional como el estudio de los espacios vectoriales normados completos sobre un campo $\mathbb{K}$. Tales espacios, como se describió anteriormente, se refieren a los espacios de Banach. A continuación, daremos unos ejemplos clásicos de los espacios de sucesiones y de funciones, así como veremos algunas de sus propiedades básicas. Recomendamos al lector [13] y [15] para un estudio más minucioso.

1.1.1. Espacios de sucesiones

Supongamos que $x = (a_1, a_2, \ldots) = (a_k)$ es una sucesión con $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. La familia de todas estas sucesiones tiene una habitual estructura lineal, es decir, es un espacio vectorial con la suma usual de coordenada por coordenada y con el producto usual de una sucesión con un escalar.

1) El espacio l_p definida para $1 \leq p < \infty$ es el espacio vectorial de sucesiones $x = (a_k)$ para la que $\sum_k |a_k|^p < \infty$. La norma para $x \in l_p$ está dada por
$$\|x\|_{l_p} = \Big(\sum_k |a_k|^p\Big)^{1/p},$$
donde l_p es un espacio de Banach separable[2].

2) El espacio l_∞ es el espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas $x = (a_k)$. La norma para $x \in l_\infty$ está dada por
$$\|x\|_{l_\infty} = \ sup_k |a_k|,$$

[2] Ver pag. 88.

donde l_∞ es un espacio de Banach.

3) El espacio c es un espacio vectorial de todas las sucesiones convergentes $x = (a_k)$. La norma para $x \in c$ está dada por

$$\|x\|_{l_\infty} = \; sup_k |a_k|,$$

donde c es un espacio de Banach separable.

4) El espacio c_0 es un espacio vectorial de todas las sucesiones convergentes $x = (a_k)$ con $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. La norma para $x \in c_0$ está dada por

$$\|x\|_{l_\infty} = \; sup_k |a_k|,$$

donde $c_0 \subset c$ es un espacio de Banach separable.

Para los espacios duales tenemos lo siguiente.

5) Sean $p, q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $(l_p)^* = l_q$, en el sentido de que para todo $f \in (l_p)^*$ existe un único elemento $(a_i) \in l_\infty$ tal que

$$f(x) = \sum a_i x_i \qquad \text{para todo } \; x =: (x_i) \in l_p,$$

y la función $T : (l_p)^* \to l_q$ tal que $f \mapsto (a_i)$ es una isometría. Si $1 < p < \infty$, entonces $(l_p)^*$ es reflexivo.

6) Los espacios $(l_1)^*$ y l_∞ son isométricamente isomórficos si para todo $f \in (l_1)^*$ existe un único $(a_i) \in l_\infty$ tal que

$$f(x) = \sum a_i x_i \qquad \text{para todo } \; x = (x_i) \in l_1,$$

y la función $T : (l_1)^* \to l_\infty$ talque $f \mapsto (a_i)$ es un isomorfismo isométrico. En este caso se tiene que $(l_1)^* = l_\infty$. El espacio l_1 no es reflexivo.

7) Tenemos que $(c_0)^* = l_1$ en el sentido de que para todo $f \in (c_0)^*$ existe una única $(a_i) \in l_1$ tal que

$$f(x) = \sum a_i x_i \qquad \text{para todo } \; x = (x_i) \in c_0,$$

y la función $T : (c_0)^* \to l_1$ tal que $T(f) = (a_1)$ es un isomorfismo isométrico. El espacio c_0 no es reflexivo.

1.2. Espacios de funciones

En esta sección veremos unos ejemplos de espacios de funciones, entre ellos se encuentran los espacios L_p que son una clase de espacios de funciones de Banach cuyas normas se definiden en términos de integrales.

1.2.1. Los espacios $C(I)$, $L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$ y L_∞.

El espacio $C(I)$, donde I es un intervalo cerrado finito en $\mathbb{R}$, es un espacio vectorial de todas las funciones continuas $x : I \to \mathbb{R}$. La norma para $x \in C(I)$ está dada por

$$\|a\|_{C(I)} = \sup_{t\in I} |x(t)|.$$

$C(I)$ es un espacio de Banach separable. El espacio $C(I)$ no es reflexivo.

Sea $p \in [1, \infty)$. El símbolo $L_p = L_p(I)$ denota el espacio vectorial de todas las funciones Lebesgue medible definidas casi siempre en I tal que

$$\int_I |f(t)|^p \, dt \; < \; \infty,$$

la suma vectorial y el producto escalar son las usuales, se operan coordenada por coordenada, dotado con la norma

$$\|f\|_{L_p} := \Big(\int_I |f(t)|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

A continuación enunciaremos un teorema sobre los espacios L_p cuya demostración el lector lo puede encontrar en [15, pag. 11].

Teorema 1.2.1. *Si $p \in [1, \infty)$, entonces el espacio L_p es completo, i.e. L_p es un espacio de Banach.*

Sean $p, q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $\big(L_p(I)\big)^* = L_q(I)$ en el sentido de que para todo $F \in (L_p)^*$ existe un único $f \in L_q$ tal que

$$F(g) = \int_I gf \, dx \quad \text{para todo} \quad g \in L_p,$$

y la función $T : (L_p)^* \to L_q$ tal que $F \mapsto f$ es un isomorfismo isométrico, y por tanto, $(L_p)^*$ y L_q son isométricamente isomórficos. En este caso tenemos $(L_p)^* = L_q$. $L_p(I)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.

Definición 1.2.1. *Denotamos por $L_\infty = L_\infty(I)$ el espacio de todas las funciones esencialmente acotadas $f : I \to \mathbb{R}$, i.e. funciones para los que existe $N \subset I, \mu(N) = 0$ tal que $f|_{I\setminus N}$ está acotada. Denotamos*

$$\inf_{N\subset I,\mu(N)=0} \sup_{s\in I\setminus N} |f(s)| = ess \sup_{s} |f(s)|.$$

Sobre el teorema que enunciaremos a continuación, el lector puede encontrar la demostración en [15, pag. 12].

Teorema 1.2.2. *L_∞ con la norma*

$$\|f\|_{L_\infty} = ess \sup_{s} |f(s)|$$

es un espacio de Banach.

Por último tenemos que:

8) $\big(L_1(I)\big)^* = L_\infty$ en el sentido de que para todo $F \in (L_1)^*$ existe una única $f \in L_\infty$ tal que

$$F(g) = \int_I gf\ dx \quad \text{para todo} \quad g \in L_1,$$

y la función $T : (L_1)^* \to L_\infty$ tal que $F \mapsto f$ es un isomorfismo isométrico, y por tanto, $(L_1)^*$ y L_∞ son isométricamente isomórficos.

1.3. Series en los espacios de Banach

A continuación veremos algunos resultados importantes de las series en los espacios de Banach, en los que vamos a usarlos más adelante para las integrales de Bochner; en esta sección presentaremos las propiedades sin demostraciones, para un estudio más detallado de las propiedades de las series con valores en un espacio de Banach, recomendamos al lector [19] y [11] principalmente.

Definición 1.3.1. *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de elementos de $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ de un espacio de Banach X es **convergente** si la sucesión de sus sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ converge en la norma del espacio X.*

Definición 1.3.2. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X < \infty$.

Teorema 1.3.1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge absolutamente, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *converge.*

Definición 1.3.3. *Una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *de elementos de* $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ *de un espacio de Banach es* ***incondicionalmente convergente*** *si converge para cada reordenamiento de sus términos, esto es, si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{P(n)}$ *converge cuando* $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función biyectiva.*

Teorema 1.3.2. *Para una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *de elementos* $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ *de un espacio de Banach* X *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La serie converge incondicionalmente,

(b) tloda serie de la forma $x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \cdots$, *donde* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *converge,*

(c) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ *converge para cualquier elección de* $\alpha_k = \pm 1$,

(d) para toda sucesión acotada $(a_i), a_i \in \mathbb{R}$ *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ *converge a algún elemento de* X,

(e) para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k x_k \|_X < \varepsilon$ *para toda sucesión* $a = (a_i) \in l_\infty$ *con* $\|a\|_{l_\infty} \leq 1$.

(Ver [19]; Cap. IV en [9] y en [7] p. 442)

Teorema 1.3.3. *Si* $X = \mathbb{R}$, *entonces una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *de elementos de* $x_k \in X, k \in \mathbb{R}$ *es incondicionalmente convergente si y sólo si* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es absolutamente convergente.*

El siguiente teorema se sigue inmediatamente del Teorema 1.3.3.

Teorema 1.3.4. *Si un espacio de Banach* X *tiene dimensión finita, entonces una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *de elementos* $x_k \in X, k \in \mathbb{R}$ *es incondicionalmente convergente si y sólo si* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *es absolutamente convergente.*

Para los espacios de Banach en general tenemos:

Teorema 1.3.5. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente.*

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Teorema anterior, en general, no es verdadero.

Ejemplo 1. Para $k \in \mathbb{R}$, sea $x_k = (0, \ldots, 0, \frac{1}{k}, 0, \ldots) \in l_2$. Tenemos $\|x_k\|_{l_2} = \frac{1}{k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$; la serie no es absolutamente convergente. Por otro lado, para cualquier reordenamiento de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ la serie converge a

$$s = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \in l_2$$

con

$$\|s\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

esto es, $\|s\| < \infty$ y la serie converge incondicionalmente.

Teorema 1.3.6. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente, entonces todos los reordenamientos de sus términos tienen la misma suma.*

El siguiente resultado muestra que la situación descrita en el ejemplo anterior no es accidental y que se cumple para todos los espacio de Banach que tienen dimensión infinita.

Teorema 1.3.7. *(Dvoretzky, Rogers) En un espacio de Banach X de dimensión infinita se cumple que para toda sucesión $c_k > 0, k \in \mathbb{N}$ para la cual $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ existe una serie incondicionalmente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ para la cual $\|x_k\|_X = c_k, k \in \mathbb{N}$.*

Si tomamos por ejemplo, $c_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, entonces tenemos el resultado siguiente como consecuencia del Teorema anterior.

Teorema 1.3.8. *En todo espacio de Banach de dimensión infinita X existe una serie incondicionalmente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X$ que no es absolutamente convergente.*

Usando el Teorema 1.3.8 y del Teorema 1.3.4, obtenemos la siguiente interesante caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita.

Teorema 1.3.9. *La convergencia incondicional de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in X$ es equivalente a su convergencia absoluta si y sólo si el espacio de Banach X es de dimensión finita.*

Ahora bien, pongamos nuestra atención a algunos resultados que involucran la topología débil en X.

Definición 1.3.4. *Una sucesión $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ converge débilmente a $x \in X$ si para todo $x^* \in X^*$*

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x).$$

Definición 1.3.5. *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ converge débilmente a la suma $s \in X$ si para todo $x^* \in X^*$ el límite*

$$\lim_{n\to\infty} x^*\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^*(x_k) = x^*(s)$$

existe.

Teorema 1.3.10. *(Orlicz,Pettis) Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ una serie en un espacio de Banach X. Si para todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$ existe $x_A \in X$ tal que para todo $x^* \in X^*$ tenemos*

$$\sum_{k\in A} x^*(x_k) = x^*(x_A),$$

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente.

Observación 1. Mencionemos que de la conclusión del Teorema de Orlicz-Pettis se sigue que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge (en norma). Más aún, la suposición del teorema se puede reformular para leer "$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es una subserie débilmente convergente" o "$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente débilmente convergente". La última forma dice que para todo $x^* \in X^*$ la serie de los números reales $\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_k)$ es incondicionalmente convergente y por el Teorema 1.3.3, significa que para todo $x^* \in X^*$, tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$.

Definición 1.3.6. *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es débilmente absolutamente convergente si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty,$$

para todo $x^* \in X^*$.

En [11]. p. 44, una serie débilmente absolutamente convergente se conoce como débilmente incondicionalmente de Cauchy.

Mencionemos que si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente para todo $x^* \in X^*$, y por el Teorema 1.3.3, esto ocurre si y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$.

De esta manera llegamos a

Teorema 1.3.11. *Si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente, entonces es débilmente absolutamente convergente.*

Ejemplo 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in c_0$$

al elemento de c_0 con 1 en la k-ésima posición en la sucesión. Como tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} e_k = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots),$$

para $n \in \mathbb{N}$ (1 está en las primeras n posiciones de la sucesión) podemos ver inmediatamente que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ no converge en c_0 (en la norma topológica).

Supongamos que $x^* \in c_0^* = l_1$, esto es, $x^* = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \alpha_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|x^*\|_{c_0^*} < \infty$. Entonces $x^*(e_k) = \alpha_k$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(e_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty,$$

esto es, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ es débilmente absolutamente convergente.

Como $x^*(\sum_{k=1}^{n} e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, n \in \mathbb{N}$ podemos ver que esta sucesión converge a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = x^*(y)$, donde $y = (1, 1, \ldots)$ es una sucesión que no pertenece a c_0. Esto quiere decir que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ fuese débilmente convergente, entonces su suma débil sería y, pero c_0 no contiene a dicho elemento.

Un resultado inmediato de este ejemplo es el siguiente.

Teorema 1.3.12. *Si un espacio de Banach X contiene una copia isomórfica del espacio de Banach c_0, entonces existe una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in X, k \in \mathbb{N}$ que es débilmente absolutamente convergente, pero no es convergente ni débilmente convergente a algún elemento de X.*

Esto implica que si en un espacio de Banach X toda serie débilmente absolutamente convergente converge en la norma topológica o en la topología débil entonces X, no puede contener subespacios isomórficos a c_0.

Un resultado importante en esta dirección se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.13. *(Bessaga-Pelczyński) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El espacio de Banach X no contiene subespacios isomórficos a c_0,

(b) Toda serie débilmente absolutamente convergente en X es débilmente convergente,

(c) Toda serie débilmente absolutamente convergente en X es incondicionalmente convergente,

(d) Toda serie débilmente absolutamente convergente en X es convergente (en la norma).

Capítulo 2

Espacios de medida

Introducción

Uno de los problemas más venerables de la geometría es determinar el área o el volumen de una región en el plano o en el espacio tridimensional. Las técnicas de cálculo integral proporcionan una solución satisfactoria a este problema para regiones que están acotadas por curvas o superficies "suaves"pero que son inadecuadas para manejar en conjuntos más complicados, incluso en espacios de dimensión uno. Idealmente, para $n \in \mathbb{N}$ nos gustaría tener una función μ que asigna a cada $E \subset \mathbb{R}^n$ un número $\mu(E) \in [0, \infty]$, la medida n-dimensional de E, tal que $\mu(E)$ está dada por las fórmulas integrales habituales. Una función μ tal, seguramente debe poseer las siguientes propiedades:

(i) Si $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión finita o infinita de conjuntos disjuntos, entonces
$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots .$$

(ii) Si E es congruente con F (esto es, si E puede ser transfomado en F mediante translaciones, rotaciones, y reflexiones), entonces $\mu(E) = \mu(F)$.

(iii) $\mu(Q) = 1$, donde Q es el cubo unitario
$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < 1 \;\text{ para }\; j = 1, \ldots, n\}.$$

Las condiciones (i), (ii) y (iii) son mutuamente inconsistentes[1]. Veamos la razón por la que esto es cierto para $n = 1$. (El argumento puede ser fácilmente adaptado para dimensiones más grandes.) Para empezar, definamos una relación de equivalencia sobre $[0, 1)$ declarando que $x \sim y$ si y sólo si $x - y$ es racional. Sea N un subconjunto de $[0, 1)$ que contiene precisamente a un miembro de cada clase de equivalencia. (Para encontrar dicha N, uno debe invocar el axioma de elección) Luego, sea $R = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ y para cada $r \in R$ sea

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}.$$

Esto es, para obtener N_r, debemos desplazar N hacia a la derecha r unidades y luego desplazar la parte que sobresale más alla de $[0, 1)$ una unidad a la izquierda. Entonces $N_r \subset [0, 1)$, y para todo $x \in [0, 1)$ pertenece precisamente a un N_r. En efecto, si y es un elemento de N que pertenece a la clase de equivalencia x, entonces $x \in N_r$, donde $r = x - y$ si $x \geq y$ o $r = x - y + 1$ si $x < y$; Por otro lado, si $x \in N_r \cap N_s$, entonces $x - r$ (o $x - r + 1$) y $x - s$ (o $x - s + 1$) serían elementos distintos de N que pertenecen a la misma clase de equivalencia, cosa que es imposible.

Supongamos ahora que $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ satisface (i), (ii), y (iii). Por (i) y (ii),

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1 - r)) + \mu(N \cap [1 - r, 1)) = \mu(N_r),$$

para cualquier $r \in R$. También como R es numerable y $[0, 1)$ es la unión disjunta de N_r's,

$$\mu([0, 1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r),$$

por (i) nuevamente. Pero $\mu([0, 1)) = 1$ por (iii), y como $\mu(N_r) = \mu(N)$, la suma de la derecha es 0 (si $\mu(N) = 0$) o ∞ (si $\mu(N) > 0$). Por lo tanto, tal μ no puede existir.

Frente a esta situación desalentadora, podríamos considerar a un (i) débil de modo que la aditividad se cumpla solamente para sucesiones finitas. Esto no es una idea muy buena, como veremos: La aditividad para sucesiones

[1] En lógica matemática, la consistencia lógica, o simplemente consistencia, es la propiedad que tienen los sistemas formales cuando no es posible deducir una contradicción dentro del sistema, es decir, dado un lenguaje formal y un aparato deductivo (axiomas y reglas de inferencia), no es posible deducir una fórmula y su negación. La existencia de un modelo implica que una teoría lógica es consistente.

numerables es lo que hace que todo los resultados de límite y continuidad de la teoría funcionen sin problemas. Más aún, en dimensiones $n \geq 3$, incluso con esta forma débil de (i) es inconsistente con (ii) y (iii). En efecto, en 1924 Banach y Tarski demostraron el siguiente resultado increíble:

Sean U y V dos conjuntos abiertos arbitrarios en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Existe $k \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_k$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

- Los E_j's son disjuntos y su unión es U;

- Los F_j's son disjuntos y su unión es V;

- E_j es congruente con F_j para $j = 1, \ldots, k$.

Así, uno puede cortar una bola del "tamaño de un chícharo" en un número finito de piezas y reacomodarlos para formar ¡una bola del tamaño de la Tierra! No hace falta decir que, los conjuntos E_j y F_j son *muy* extraños. No se pueden visualizar con precisión, y su construcción depende del axioma de elección. Pero su existencia claramente se opone a la construcción de cualquier $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que asigna valores positivo y finito a los conjuntos abiertos y satisface (i) para sucesiones finita tanto como (ii).

La moraleja de estos ejemplos es que $\mathbb{R}^n$ contiene subconjuntos en los cuales son tan extraños que es imposible definir una noción de medida geometricamente razonable para ellos, y que el remedio para esta situación es descartar el requisito de que μ debe ser definida para *todos* los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Más bien, nos contentaremos con la construcción de μ en una clase de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que incluya a todos los conjuntos que es probable que uno encontrará en la práctica, a menos que se está buscando deliberadamente ejemplos patológicos.

Vale la pena, y no hay mucho trabajo extra, desarrollar la teoría en mucha mayor generalidad. Las condiciones (ii) y (iii) están directamente relacionados con la geometría Euclidiana, pero las funciones que satisfacen (i), denominadas *medidas*, surgen también en otras muchas situaciones. Por ejemplo, en un problema de física que involucra distribuciones de masas, $\mu(E)$ podría representar la masa total en la región E. Para otro ejemplo, en la teoría de probabilidad considere un conjunto X que representa los posibles resultados de un experimento, y para $E \subset X$, $\mu(E)$ es la probabilidad de que los resultados se encuentran en E. Por lo tanto, empezaremos con el estudio de la teoría de la medida sobre conjuntos abstractos.

Antes de iniciar a aventurarnos en las siguientes secciones, cabe hacer notar que en este capítulo, sólo algunos conceptos serán necesarios para lograr el objetivo de comprender la integral de Bochner, sin embargo, se ofrece un panorama general de la teoría de la medida, la cual dió origen a los distintos tipos de integrales, que permitieron romper con el "monopolio" de la integral de Riemann.

2.1. Álgebras y σ-Álgebras

En esta sección nos vamos a enfocar en un espacio más general X. Resulta que con el fin de determinar adecuadamente la medida y la integración en un espacio más general X, no basta con especificar el conjunto X. Sino también hay que especificar dos datos más:

(i) Una colección de Σ de subconjuntos de X que se puede medir y
(ii) La medida $\mu(E) \in [0, \infty]$ que asigna a cada conjunto medible $E \in \Sigma$.

La colección Σ tiene que obedecer una serie de axiomas (por ejemplo, cerrado bajo uniones numerables) que lo convierten en una σ-álgebra. Del mismo modo, la medida μ tiene que obedecer a una serie de axiomas (sobre todo, un axioma de aditividad numerable), con el fin de obtener una medida y una teoría de integración comparable a la Teoría de Lebesgue en espacios euclidianos.

Cuando se satisfacen todos estos axiomas, la tripleta (X, Σ, μ) se conoce como un espacio de medida. Estos juegan un mismo papel en la teoría de la medida abstracta que los espacios métricos o los espacios topológicos en la topología abstracta, o que los espacios vectoriales juegan en el álgebra lineal abstracta.

Iniciemos, con la definición de σ-álgebra así, como algunas de sus propiedades más importantes, y para tener más claro el concepto definiremos a continuación el término de álgebra.

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto distinto del vacío y sea $\mathscr{A}$ un subconjunto no vacío de $\mathscr{P}(X)$. Si se tiene que:*

(i) $X \in \mathscr{A}$,

(ii) *Si* $A, B \in \mathscr{A}$, *entonces* $A \cup B \in \mathscr{A}$,

(iii) Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

*Entonces decimos que $\mathscr{A}$ es un **álgebra**.*

Observación 2. Si $\mathscr{A}$ es un álgebra y $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $A \cap B, A \backslash B \in \mathscr{A}$. Por lo tanto, la diferencia simétrica

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

también pertenece a $\mathscr{A}$. Más aún, $\mathscr{A}$ es cerrado bajo uniones finitas e intersecciones finitas, esto es

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}; \\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{A}. \end{cases}$$

Definición 2.1.2. *Un álgebra Σ en $\mathscr{P}(X)$ es una σ**-álgebra** si se cumple que para cualquier sucesión (E_n) de elementos de Σ, tenemos que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma.$$

Definición 2.1.3. *Si X es un conjunto no vacío en el que está definida una σ-álgebra Σ de subconjuntos de X, entonces decimos que (X, Σ) es un **espacio medible**, o X es un espacio medible si no hay motivos de confusión con Σ.*

Observación 3. Si Σ es una σ-álgebra y $(E_n) \subset \Sigma$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$. Más aún,

$$\liminf_{n \to \infty} E_n \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n \to \infty} E_n \in \Sigma.$$

La definición de los últimos dos elementos lo podemos encontrar en la pag. 78 de este trabajo.

El siguiente resultado es muy útil cuya demostración sólo la bosquejaremos.

Teorema 2.1.1. *Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de X y consideremos una sucesión $(A_n)_{n=1}^N$ o una sucesión infinita (A_n) en Σ. Entonces existe una sucesión finita $(B_n)_{n=1}^N$ o, respectivamente, una sucesión infinita (B_n) en Σ con las propiedades:*

(i) *$B_n \subseteq A_n$ para todo $n = 1, \ldots, N$ o, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ o, respectivamente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; y*

(iii) *$B_n \cap B_m = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.*

Demostración. La demostración es directa, tomando a $B_1 = A_1$ y $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})$ para todo $k = 2, \ldots, N$ o , respectivamente, para todo $k \geq 2$.

□

Para el siguiente Teorema el lector puede encontrarlo en [2, p.134].

Teorema 2.1.2. *Sean X un conjunto no vacío, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de X y $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$. Entonces existe una colección finita $\{C_1, \ldots, C_k\}$ de conjuntos disjuntos por pares de Σ tal que*

(i) *Cada C_i es subconjunto de algún A_j; y*

(ii) *Cada A_j es una unión de una subfamilia de la colección $\{C_1, \ldots, C_k\}$.*

Teorema 2.1.3. *Sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de σ-álgebras de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces $\bigcap\{\Sigma : \Sigma \in \mathscr{F}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathscr{F}$ una familia no vacía de σ-Álgebras de subconjuntos de X. Veamos que $\bigcap\{\Sigma : \Sigma \in \mathscr{F}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. En efecto, sea $\Sigma^* = \bigcap\{\Sigma : \Sigma \in \mathscr{F}\}$ entonces:

(i) $X \in \Sigma^*$ puesto que $X \in \Sigma$ para todo $\Sigma \in \mathscr{F}$.

(ii) Sea $A \in \Sigma^*$. Entonces $A \in \Sigma$ para todo $\Sigma \in \mathscr{F}$, de aquí que $A^c \in \Sigma$ para todo $\Sigma \in \mathscr{F}$, por tanto, $A^c \in \Sigma^*$.

(iii) Sea (A_n) una sucesión de elementos de Σ^*. Entonces A_n es una sucesión de elementos de Σ para todo $\Sigma \in \mathscr{F}$, luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ para todo $\Sigma \in \mathscr{F}$ y así $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma^*$. Por tanto, $\Sigma^* = \bigcap\{\Sigma : \Sigma \in \mathscr{F}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

□

Definición 2.1.4. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{E}$ una colección arbitraria de subconjuntos de X. La intersección de todas las σ-álgebras de subconjuntos de X en la que incluyen a $\mathscr{E}$ es conocida como una **σ-álgebra generada** por $\mathscr{E}$ y es denotada por $\Sigma(\mathscr{E})$. A saber*

$$\Sigma(\mathscr{E}) = \bigcap\{\Sigma \mid \Sigma \text{ es una } \sigma\text{-álgebra de subconjuntos de } X \text{ y } \mathscr{E} \subseteq \Sigma\}.$$

Observemos que existe al menos una σ-álgebra de subconjuntos de X que incluye a $\mathscr{E}$ y este es $\mathscr{P}(X)$. Note también que el término de σ-álgebra usada en el nombre de $\Sigma(\mathscr{E})$ se justifica por su definición y por el Teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.4. *Sea $E \subset \mathscr{P}(X)$ arbitrario. Entonces existe una única σ-álgebra $\Sigma(E) \subseteq \mathscr{P}(X)$ tal que:*

(i) $E \subset \Sigma(E)$.

(ii) *Si $\Sigma \subset \mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra tal que $E \subset \Sigma$, entonces $\Sigma(E) \subset \Sigma$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{\Sigma \subset \mathscr{P}(X) : \Sigma$ es σ-álgebra y $E \subset \Sigma\}$. Notemos que $\mathscr{F}$ es distinto del vacío, porque $\mathscr{P}(X) \in \mathscr{F}$, entonces tenemos que:

(i) Sea $\Sigma(E)=\bigcap\{\Sigma : \Sigma \in \mathscr{F}\}$, que por el Teorema 2.1.3, $\Sigma(E)$ es una σ-álgebra y así, tenemos que $E \subset \Sigma(E)$.

(ii) Si $\Sigma \in \mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra con $E \subset \Sigma$, entonces $\Sigma \in \mathscr{F}$ y por lo tanto, $\Sigma(E) \subset \Sigma$.

(U) Finalmente, si Σ^* es una σ-álgebra contenida en $\mathscr{P}(X)$ que satisface las propiedades (i) y (ii), entonces $\Sigma^* \subset \Sigma(E)$ y $\Sigma(E) \subset \Sigma^*$, con lo cual se tiene que $\Sigma(E) = \Sigma^*$.

$\square$

A continuación veremos más propiedades sobre las σ-álgebras.

Teorema 2.1.5. *Sean $E, E' \subset \mathscr{P}(X)$.*

(i) *Si $E \subset E'$, entonces $\Sigma(E) \subset \Sigma(E')$.*

(ii) *Si E es una σ-álgebra, entonces $\Sigma(E) = E$.*

(iii) $\Sigma(\Sigma(E)) = \Sigma(E)$.

(iv) Si $E \subset \Sigma(E')$ *y* $E' \subset \Sigma(E)$, *entonces* $\Sigma(E) = \Sigma(E')$.

Demostración. (i) Como $\Sigma(E)$ es una σ-álgebra que contiene a E, y además tenemos que $E \subset E' \subset \Sigma(E')$, entonces se tiene que $\Sigma(E) \subset \Sigma(E')$ por (ii) del Teorema 2.1.4.

(ii) Se tiene que $E \subset E$ y E es una σ-álgebra, entonces por (i) y (ii) del Teorema 2.1.4 tenemos que $E = \Sigma(E)$.

(iii) Como $\Sigma(E)$ es una σ-álgebra entonces por el inciso **(ii)** tenemos que $\Sigma(\Sigma(E)) = \Sigma(E)$.

(iv) Como $E \subset \Sigma(E')$ entonces $\Sigma(E) \subset \Sigma(\Sigma(E')) = \Sigma(E')$, i.e., $\Sigma(E) \subset \Sigma(E')$. De forma análoga tenemos $\Sigma(E') \subset \Sigma(E)$. Por lo tanto, $\Sigma(E) = \Sigma(E')$.

□

A continuación veremos la definición de la σ-álgebra de Borel que es un ejemplo muy importante de lo anterior.

Definición 2.1.5. *Sea X un espacio topológico y T la topología de X, es decir, la colección de todos los subconjuntos abiertos de X. La σ-álgebra de subconjuntos de X que es generado por T, es decir, la σ-álgebra más pequeña de subconjuntos de X que contiene a todos los subconjuntos abiertos de X, se llama la **σ-álgebra de Borel** y lo denotaremos por $\mathfrak{B}(X)$:*

$$\mathfrak{B}(X) = \Sigma(T), \qquad \text{donde } T \text{ es la topología de } X.$$

*Los elementos de $\mathfrak{B}(X)$ se les denomina **conjuntos Borel** o **conjuntos Borelianos** en X y a $\mathfrak{B}(X)$ se le conoce también como la σ-álgebra de conjuntos Borel en X.*

Por definición, todos los subconjuntos abiertos de X son conjuntos Borel en X y, como $\mathfrak{B}(X)$ es una σ-álgebra, todos los subconjuntos cerrados de X (que son los complementos de subconjuntos abiertos) son también conjuntos Borel en X.

Teorema 2.1.6. *Si (X, T) es un espacio topológico y $\mathscr{F}$ es la colección de todos los subconjuntos cerrados de X, entonces $\mathfrak{B}(X) = \Sigma(\mathscr{F})$.*

Demostración. Todo conjunto cerrado está en $\Sigma(T)$. En efecto, como $\Sigma(T)$ contiene a todos los conjuntos abiertos, y junto con el hecho de que es una σ-álgebra, entonces contiene a todos los conjuntos cerrados. Por lo tanto, $\mathscr{F} \subset \Sigma(T)$. Como $\Sigma(T)$ es una σ-álgebra, el Teorema 2.1.4 implica $\Sigma(\mathscr{F}) \subseteq \Sigma(T)$.

De forma simétrica, tenemos que todo conjunto abierto está contenido en $\Sigma(\mathscr{F})$, ya que $\Sigma(\mathscr{F})$ contiene a todos los conjuntos cerrados y así, siendo una σ-álgebra, contiene a todos los conjuntos abiertos (los complementos de conjuntos cerrados). Por lo tanto, $T \subset \Sigma(\mathscr{F})$. Como $\Sigma(\mathscr{F})$ es una σ-álgebra, el Teorema 2.1.4 implica $\Sigma(T) \subseteq \Sigma(\mathscr{F})$. Por lo tanto, $\Sigma(\mathscr{F}) = \Sigma(T) = \mathfrak{B}(X)$. □

Ejemplos de espacios topológicos son todos los espacios métricos de los cuales el más común el espacio euclidiano $X = \mathbb{R}^n$ con la usual métrica o incluso cualquier subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ con la restricción sobre X de la métrica euclidiana. Como el espacio $\mathbb{R}^n$ es de gran importancia veremos algunas de las propiedades de $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

El típico paralelepípedo ortogonal con bordes eje-paralelos es un conjunto S, un producto cartesiano de n intervalos acotados de todo tipo posible (abierto, cerrado, semi-abierto, semi-cerrado). En todos los casos consideremos $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$ para todo $j = 1, \ldots, n$ y de aquí se tiene que todos los paralelepípedos ortogonal con bordes eje-paralelos son conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$.

Si $n = 1$, entonces los paralelepípedos ortogonal con bordes eje-paralelos son justamente los intervalos acotados en la línea real $\mathbb{R}$. Acortaremos el nombre de paralelepípedo ortogonal con bordes eje-paralelos a intervalos n-dimensional o intervalos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7. *Todos los intervalos n-dimensional son conjuntos Borel en* $\mathbb{R}^n$

El lector puede encontrar esta demostración en [23, pag. 10].

Teorema 2.1.8. *Si $\mathscr{E}$ es una colección de todos los cerrados o de todos los abiertos o de todos los semi-abiertos o de todos los semi-cerrados o de todos los intervalos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \Sigma(\mathscr{E})$.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.7 tenemos que, en todos los casos posibles, $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. El Teorema 2.1.4 implica que $\Sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Para demostrar que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \Sigma(\mathscr{E})$, consideremos cualquier subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Para todo $x \in U$ encontremos una bola abierta B_x con centro en x tal que $B_x \subseteq U$. Ahora, consideremos el caso donde $\mathscr{E}$ es la colección de todos los intervalos cerrados. Tomemos un intervalo n-dimensional cerrado $Q_x = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tal que $x \in Q_x \subseteq B_x \subseteq U$ y $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como $x \in Q_x \subseteq U$ para todo $x \in U$, tenemos que $U = \bigcup_{x \in U} Q_x$. Pero la colección de todos los posibles Q_x's es numerable y así, $U \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ se puede escribir como una unión numerable de conjuntos de $\mathscr{E}$, por lo tanto, todo conjunto abierto U está en $\Sigma(\mathscr{E})$ y, como $\Sigma(\mathscr{B})$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ es generado por todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, el Teorema 2.1.4 implica que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \Sigma(\mathscr{E})$.

Por último, tenemos que la prueba de la última inclusión funciona de la misma forma con otro tipo de intervalos.

$\square$

Veamos el caso para la línea real $\mathbb{R}$ como una consecuencia directa del Teorema 2.1.8.

Teorema 2.1.9. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *es generado por cada uno de los siguientes conjuntos:*

i) *Los intervalos abiertos:* $\Sigma_1 = \{(a, b) : a < b\}$;

ii) *Los intervalos cerrados:* $\Sigma_2 = \{[a, b] : a < b\}$;

iii) *Los intervalos semi-cerrados, o bien, semi-abiertos:* $\Sigma_3 = \{(a, b] : a < b\}$ *o bien,* $\Sigma_4 = \{[a, b) : a < b\}$.

2.2. Medidas

Definición 2.2.1. *Sea* (Ω, Σ) *un espacio medible donde* Ω *es un conjunto distinto del vacío. Entonces una función* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *es una* ***medida*** *en* (Ω, Σ) *o, simplemente, una* ***medida*** *en* Σ *si*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *para todas las sucesiones* (E_n) *de conjuntos disjuntos por pares que están contenidos en* Σ*.*

La tripleta (Ω, Σ, μ) *de un conjunto no vacío* Ω*, una* σ*-álgebra* Σ *de subconjuntos de* Ω *y una medida* μ *en* Σ *se denomina* ***espacio de medida****.*

Observe que los valores de una medida son números reales no negativos o ∞. La propiedad (ii) de la definición anterior se denomina σ-aditividad. En otros libros podemos encontrar que a una medida se le denomina también medida σ-aditiva (o simplemente una medida aditiva), para distinguir de la medida μ finitamente aditiva, que tiene la propiedad de que $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $A_1, \ldots, A_N \in \Sigma$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$.

A continuación enunciaremos algunas propiedades importantes sobre la medida.

Teorema 2.2.1. *Sea* μ *una medida sobre un espacio medible* (Ω, Σ)*. Entonces*

1) (Finitamente aditiva) Si $E, F \in \Sigma$ *y* $E \cap F = \emptyset$*, entonces* $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$*.*

2) (monotonicidad) Si $E, F \in \Sigma$ *y* $E \subseteq F$*, entonces* $\mu(E) \leq \mu(F)$*.*

3) (subaditividad finita) Si $E, F \in \Sigma$*, entonces* $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$*.*

4) Si $E \subset F$*, con* $E, F \in \Sigma$ *y* $\mu(E) < \infty$*, se tiene entonces que* $\mu(E \backslash F) = \mu(E) - \mu(F)$*.*

5) (σ*-subaditividad) Si* $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$*, entonces* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$*.*

6) Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión en* Σ *tal que* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \sup\{\mu(E_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

7) Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión en* Σ *tal que* $E_{n+1} \subseteq E_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mu(E_n) < \infty$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \inf\{\mu(E_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. 1) Sean $E, F \in \Sigma$ tales que $E \cap F = \emptyset$ y sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Σ tal que $E_1 = E, E_2 = F$ y $E_n = \emptyset$ para todo $n > 2$. Entonces

$$\mu(E \cup F) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E) + \mu(F) + \mu(\bigcup_{n=3}^{\infty} E_n) = \mu(E) + \mu(F),$$

i.e., $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

2) Si $E, F \in \Sigma$, entonces $F \backslash E \in \Sigma$ y $\mu(F \backslash E) \geq 0$, como $E \subseteq F$, tenemos que

$$\mu(F) = \mu(E \cup (F \backslash E)) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E),$$

i.e., $\mu(E) \leq \mu(F)$.

3) Sean $E, F \in \Sigma$ y como $E \cup F = E \cup F \setminus E$ y $E \cap F \setminus E = \emptyset$, se tiene que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F),$$

ya que $F \setminus E \subset F$ y por 2).

4) De la identidad $\mu(F) = \mu(F \backslash E) + \mu(E)$, obtenemos al restar $\mu(E) < \infty$ que: $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F \setminus E)$. Notemos que la igualdad anterior tiene sentido aún, si $\mu(F) = \infty$.

5) Escribiremos la unión de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como la unión de conjuntos ajenos. Sea $F = E_1$ y para $n \geq 2$, sea $F_n = E_n \setminus \bigcup_{i<n} E_i$, entonces $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, por tanto,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

i.e., $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

6) Sea $F_1 = E_1$ y para cada $n \geq 2$, sea $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Más aún, $\mu(E_n) = \sum_{m=1}^{n} \mu(F_m)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup\{\mu(E_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

7) Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Σ tal que $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo n en $\mathbb{N}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\mu(E_1) < \infty$, ahora bien definamos $F_j = E_1 \backslash E_j$, entonces $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, $\mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$ y $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E_1 \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j)$, por 6) tenemos que,

$$\mu(E_1) = \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)],$$

i.e.,

$$\mu(E_1) = \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) + \mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j),$$

i.e.,

$$\lim_{j\to\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j.$$

□

Observación 4. En la propiedad 7), como se muestra a continuación, no se puede omitir la hipótesis de que la medida $\mu(E_n) < \infty$ para algún n en $\mathbb{N}$. Sea $\Omega = \mathbb{N}$ y sea $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ definida por

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| & \text{si E es finito} \\ \infty & \text{si E es infinito} \end{cases}$$

Luego, μ es una medida sobre $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Sea $E_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(E_n) = \infty$ y $E_{n+1} \subseteq E_n$, además $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, con lo que $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.

Definición 2.2.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces,*

*(i) μ es una **medida finita** si $\mu(\Omega) < \infty$,*

*(ii) μ es una **medida σ-finita** si existe una sucesión $(A_n) \subseteq \Sigma$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(iii) Un conjunto $E \in \Sigma$ es de **(μ-) medida finita** si $\mu(E) < \infty$,*

*(iv) Un conjunto $E \in \Sigma$ es de **(μ-) medida σ-finita** si existe una sucesión $(E_n) \subseteq \Sigma$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Algunas observaciones relacionadas a la última definición son inmediatas.

1) Si μ es finita, entonces todos los conjuntos en Σ son de μ-medida finita. Más aún, si $E \in \Sigma$ es de μ-medida finita, entonces todos los subconjuntos de E en Σ son de μ-medida finita.

2) Si μ es σ-finita, entonces todos los conjuntos en Σ son de μ-medida σ-finita. Más generalmente, si $E \in \Sigma$ es de μ-medida σ-finita, entonces todos sus subconjuntos en Σ son de μ-medida σ-finita.

3) La colección de conjuntos de μ-medida finita es cerrado bajo uniones finitas.

4) La colección de conjuntos de μ-medida σ-finita es cerrado bajo uniones numerables.

5) Si μ es σ-finita, aplicando el Teorema 2.1.1, tenemos que existen conjuntos disjuntos por pares $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Similarmente, tomando uniones sucesivas, vemos que existen $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ tal que $A_n \uparrow \Omega$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.3. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. El conjunto $E \in \Sigma$ es (μ-)**nulo** si $\mu(E) = 0$.*

El siguiente resultado es básico para la teoría de integración.

Teorema 2.2.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.*

(i) Si $E \in \Sigma$ es μ-nulo, entonces todos sus subconjuntos medibles en Σ son también μ-nulos, es decir, si $E, F \in \Sigma$ tal que $F \subseteq E$ y $\mu(E) = 0$, entonces $\mu(F) = 0$.

(ii) Si $(E_n) \subseteq \Sigma$ tal que $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces su unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es también μ-nulo, es decir, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$.

Demostración. La demostración está basada en la monotonicidad y en la σ-subaditividad de μ.

$\square$

Definición 2.2.4. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida. Supongamos que para todo* $E \in \Sigma$ *con* $\mu(E) = 0$ *y para todo* $F \subseteq E$ *tenemos que* $F \in \Sigma$ *(y por lo tanto,* $\mu(F) = 0$*). Entonces* μ *se le denomina* ***completo*** *y* (Ω, Σ, μ) *es un* ***espacio de medida completa*** *o, simplemente,* (Ω, Σ, μ) *es* ***completo****.*

Así, una medida μ es completa si la σ-álgebra en el que está definida contiene a todos los subconjuntos de conjuntos μ-nulos.

Si $(\Omega, \Sigma_1 \mu_1)$ y $(\Omega, \Sigma_2, \mu_2)$ son dos espacios de medida en el mismo conjunto no vacío Ω, decimos que $(\Omega, \Sigma_2, \mu_2)$ es una **extensión** de $(\Omega, \Sigma_1, \mu_1)$ si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ y $\mu_1(E) = \mu_2(E)$, para todo $E \in \Sigma_1$.

Teorema 2.2.3. *Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida, entonces existe una extensión única* $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ *de* (Ω, Σ, μ)*. Es decir, existe un único espacio de medida* $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ *tal que*

(i) $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ *es una extensión de* (Ω, Σ, μ)*.*

(ii) $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ *es completo.*

(iii) Si $(\Omega, \breve{\breve{\Sigma}}, \breve{\breve{\mu}})$ *es otra extensión completa de* (Ω, Σ, μ)*, entonces es una extensión también de* $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$*.*

Demostración. Se dará un bosquejo de la demostración, para el lector que desea ver la demostración con más detalles favor de remitirse a [23, p. 25].

Primero construiremos el espacio de medida $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ como sigue:
Definimos

$$\breve{\Sigma} = \{A \cup F \mid A \in \Sigma \text{ y } F \subseteq E \text{ para algún } E \in \Sigma \text{ con } \mu(E) = 0\}.$$

Así, $\breve{\Sigma}$ es una σ-álgebra. Luego, para todo $B \in \breve{\Sigma}$, escribimos $B = A \cup F$, donde $A \in \Sigma$ y $F \subseteq E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y definimos la medida $\breve{\mu}$:

$$\breve{\mu}(B) = \mu(A).$$

Tenemos así que $\breve{\mu}$ está bien definida y además $\breve{\mu}$ es una medida completa en $(\Omega, \breve{\Sigma})$.
Entonces $(\Omega, \breve{\Sigma}, \breve{\mu})$ es la extensión única deseada que satisface las propiedades del Teorema.

□

Definición 2.2.5. *Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida, entonces su extensión única completa (definida en la demostración del Teorema 2.2.3) se le denomina la* ***completitud*** *de* (Ω, Σ, μ).

El siguiente resultado es muy útil cuando queremos probar que dos medidas son iguales en una σ-álgebra Σ. Es suficiente con probar en un álgebra que genera Σ, siempre que una suposición extra de σ-finitud de las dos medidas sobre el álgebra se satisface. La demostración del teorema se puede hallar en [23, p. 28].

Teorema 2.2.4. *Sea* $\mathscr{A}$ *un álgebra de subconjuntos de un conjunto no vacío* X *y sean* μ, ν *dos medidas en* $(X, \Sigma(\mathscr{A}))$. *Supongamos que existe una sucesión* $(A_n) \subseteq \mathscr{A}$ *tal que* $A_n \uparrow X$ *y* $\mu(A_k), \nu(A_k) < \infty$ *para todo* k. *Si* μ, ν *son iguales en* $\mathscr{A}$, *entonces las medidas son iguales también en* $\Sigma(\mathscr{A})$.

2.3. Medida de Lebesgue

En esta sección vamos a hablar de la medida de Lebesgue, que es la forma estándar de asignar longitud, área, volumen, en general, una medida a los subconjuntos de un espacio euclídiano $\mathbb{R}^n$. Se usa en el análisis real, especialmente para definir la integración de Lebesgue que más adelante se hablara de esta integral. Los conjuntos a los que se les puede asignar una medida se denominan Lebesgue medibles, o medibles a secas si no hay ambigüedad sobre la medida; el volumen o la medida de un conjunto Lebesgue medible A, usualmente es denotado por $\lambda(A)$. Un valor de ∞ para la medida de Lebesgue es perfectamente posible, pero aún en ese caso, si se asume el axioma de elección, no todos los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son Lebesgue medibles. El comportamiento "extraño" de los conjuntos no medibles da lugar a tales resultados como la paradoja de Banach-Tarski, una consecuencia del axioma de elección. Por otro lado, no es intención de esta tesis desarrollar la integral de Lebesgue, lo que vamos a presentar aquí son algunas de las propiedades más importantes de dicha medida. Para mayor información puede remitirse a [17], [8], [3], [13] y [23].

Definición 2.3.1. *Sea* Ω *un conjunto no vacío. Una* ***medida exterior*** *en* Ω *es una función* $\theta : \mathbb{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *tal que:*

(i) $\theta(\emptyset) = 0$,

(ii) *Si* $A \subseteq B \subseteq \Omega$*, entonces* $\theta(A) \leq \theta(B)$*,*

(iii) *Toda sucesión* (A_n) *de subconjuntos de* Ω*, se tiene que* $\theta(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n)$*.*

La idea de la medida exterior de un conjunto A es que debería de ser algún tipo de límite superior para una posible medida de A.

Teorema 2.3.1. *(Método de Carathéodory) Sea* Ω *un conjunto no vacío y* θ *una medida exterior en* Ω*. Si*

$$\Sigma = \{E : E \subset \Omega,\ \theta(A) = \theta(A \cap E) + \theta(A \cap E^c) \text{ para todo } \ A \subseteq \Omega\},$$

entonces Σ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω*. Definimos* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *como* $\mu(E) = \theta(E)$ *para todo* $E \in \Sigma$*; entonces* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida.*

A continuación vamos a definir la longitud de un intervalo en $\mathbb{R}$

Definición 2.3.2. *Si* $I \subseteq \mathbb{R}$ *es un* ***intervalo semi-abierto****,* $I = [a, b)$*, entonces bien* $I = \emptyset$ *o* $I = [\inf I, \sup I)$*, de manera que sus extremos están bien definidos. Podemos, por lo tanto, definir la longitud* $\lambda(I)$ *de un intervalo semi-abierto* I *como sigue*

$$\lambda(\emptyset) = 0, \quad \lambda([a, b)) = b - a \qquad \text{si} \quad a < b.$$

Teorema 2.3.2. *Si* $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo semi-abierto y* (I_n) *es una sucesión de intervalos semi-abiertos que cubren* I*, entonces* $\lambda(I) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(I_i)$*.*

Definición 2.3.3. *Definimos* $\theta : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *como sigue:*

$$\theta(A) = \inf \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(I_i) : (I_i) \text{ es una sucesión de intervalos semi-abiertos tal que } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \Big\}.$$

Observe que para cada A se puede cubrir por una sucesión de intervalos semi-abiertos, por ejemplo, $A \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$; siempre tenemos un conjunto no vacío para tomar el ínfimo, y $\theta(A)$ siempre está definido en $[0, \infty]$. Esta función θ se llama **medida exterior de Lebesgue** en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3.3. *Sea θ la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ definida como en la Definición 2.3.3. Entonces,*

(a) θ es una medida exterior en $\mathbb{R}$,

(b) $\theta(I) = \lambda(I)$ para todo intervalo semi-abierto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Como la medida exterior de Lebesgue es en efecto una medida exterior, podemos usarlo para construir una medida μ, usando el método de Carathéodory. Esta medida es la **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}$. A continuación vamos a definir a los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}$.

Definición 2.3.4. *Los conjuntos E medidos por μ (es decir, los que cumplen con la igualdad $\theta(A) = \theta(A \cap E) + \theta(A \cap E^c)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$) son llamados* ***Lebesgue medibles*** *.*

Teorema 2.3.4. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $H_x = (-\infty, x)$ es Lebesgue medible para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2.3.5. *Todos los subconjuntos Borel de $\mathbb{R}$ son Lebesgue medibles; en particular, todos los abiertos y todos los conjuntos de las siguientes clases, junto con uniones numerables de ellos:*

(i) Intervalos abiertos $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty), (-\infty, \infty)$, donde $a < b \in \mathbb{R}$.

(ii) Intervalos cerrados $[a, b]$, donde $a \leq b \in \mathbb{R}$,

(iii) Intervalos semi-abiertos $[a, b), (a, b], (-\infty, b], [a, \infty)$, donde $a < b \in \mathbb{R}$.

Tenemos además la siguiente fórmula para las medidas de dichos conjuntos,

$$\lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = b - a,$$

para cualesquiera $a \leq b$ en $\mathbb{R}$, mientras que todos los intervalos no acotados tienen medida infinita. Se sigue que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es medible y de medida cero.

Capítulo 3

Funciones medibles

3.1. Funciones fuertemente μ-medibles

A partir de esta sección X denota un espacio de Banach sobre el campo de los reales $\mathbb{R}$. La norma de un elemento $x \in X$ es denotado por $\|x\|_X$, o, si no hay confusión, por $\|x\|$. Recordemos que el dual del espacio de Banach X es el espacio vectorial X^* de todas las funciones lineales continuas de X a $\mathbb{R}$. Este espacio X^* es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Aquí $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$ denota la dualidad del emparejamiento de los elementos $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Simplemente escribiremos $\|x^*\|$ en lugar de $\|x^*\|_{X^*}$ si no hay peligro de confusión. Los elementos de X^* se llaman a menudo funcionales (lineales) en X.

En esta tesis vamos a usar solamente funciones fuertemente medibles, pero existen otras definiciones de medibilidad. Por ejemplo, una función $f : \Omega \to X$ es débilmente medible si la función real $\langle x^*, f \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible para todo $x^* \in X^*$. Para un espacio de Banach de dimensión finita, o separable, dichas definiciones coinciden, pero para espacios no separables, una función débilmente medible no necesariamente es fuertemente medible. La relación entre fuerte y débil medibilidad está dada por el Teorema de medibilidad de Pettis mencionada más adelante.

Definiremos a continuación, diferentes tipos de medibilidad: la de ser fuertemente μ-medible, que se necesitará para definir la integral de Bochner; la de ser fuertemente Σ-medible y de ser Σ-medible, en los cuales se presentarán las equivalencias correspondientes con la de fuertemente μ-medible en espacios específicos (tales como en un espacio de medida σ-finita y en un espacio de Banach separable, respectivamente). Es una cuestión de experiencia que la noción de Σ-medibilidad (definida posteriormente) no conduce a una teoría satisfactoria desde el punto de vista del análisis vectorial. En efecto, el problema es que este concepto no proporciona los medios para argumentos de aproximación. Es por esta razón que vamos a usar otra noción de medibilidad. Para esta finalidad nos restringiremos a las funciones con valores en los espacios de Banach, aunque algunos resultados presentados a continuación pueden ser generalizados a funciones con valores en los espacio métricos. Antes definamos la función norma de f.

Definición 3.1.1. *Si $f : \Omega \to X$ es una función, entonces $\|f\|$ denotará la función real (no negativa) $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como $\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|$ para todo $\omega \in \Omega$. A $\|f\|$ se le conoce como* ***función norma*** *de f.*

Notemos que si f es una función Σ-simple, entonces la función $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ es también Σ-simple. En efecto, como f es Σ-simple tenemos que

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \chi_{E_i},$$

además se tiene por definición que $\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|$ entonces

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \| f(\omega_i) \| \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \chi_{E_i},$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \Sigma$.

Ahora bien, para lo que resta de este capítulo consideremos a (Ω, Σ, μ) un espacio de medida donde μ es una medida no negativa. Si una proposición es verdadera en todos los puntos del espacio Ω (o en un conjunto $A \subseteq \Omega$) excepto en los puntos que pertenecen a algún conjunto $N \in \Sigma$ de medida cero, es decir, existe $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$ tal que la proposición es verdadera para todo $x \in \Omega \setminus N$. Entonces decimos que esta proposición es verdadera **casi donde quiera relativa a** μ (o bien, **casi donde quiera**) abreviado **c.d.q.**, o bien, la proposición es verdadera **casi para todo** $\omega \in \Omega$, o simplemente, la proposición es verdadera **casi siempre** abreviado **c.s.**

Observe que lo anterior no significa que el conjunto $\{\omega \in \Omega : P(\omega) \text{ es falso}\}$ tiene medida cero pues podría no pertenecer a Σ. Sin embargo, si (Ω, Σ, μ) es completo, entonces $\{\omega \in \Omega : P(\omega) \text{ es falso}\}$ es de medida cero y a lo cual equivale a que $P(\omega)$ es verdadera c.s.

La sucesión de funciones (f_n), donde $f_n : \Omega \to X$, X un espacio de Banach, es **convergente casi donde quiera** (respectivamente **casi donde quiera en el conjunto** $A \subset \Omega$) a la función f si converge para todo ω (resp. para todo $\omega \in A$) excepto en los puntos del conjunto $N \in \Sigma$ de medida cero. La convergencia casi donde quiera será denotada como $f_n \xrightarrow{c.d.q} f$, o simplemente $f_n \to f$ c.d.q.

Definición 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida no negativa. Entonces,*

*(i) Una función $f : \Omega \to X$ es Σ-**simple** si existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $f^{-1}(\{x_i\}) = E_i \in \Sigma$ para todo $1 \leq i \leq n$ tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}.$$

*(ii) Una función $f : \Omega \to X$ es μ-**simple** si existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $f^{-1}(\{x_i\}) = E_i \in \Sigma$ para todo $1 \leq i \leq n$ tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} \quad \text{y que satisfacen } \mu(E_i) < \infty \quad \text{para todo } \ i.$$

Aquí χ_E denota la función característica del conjunto E, es decir, $\chi_E(\omega) = 1$ si $\omega \in E$ y $\chi_E(\omega) = 0$ si $\omega \notin E$.

Recordemos que la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico T, denotado $\mathfrak{B}(T)$, es la σ-álgebra más pequeña que contiene todos los subconjuntos abiertos de T. Los conjuntos en $\mathfrak{B}(T)$ son los conjuntos Borel.

Definición 3.1.3. *Sean* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida no negativa,* X *un espacio de Banach, así como* X^* *su dual, y sea* $(T, \mathfrak{B}(T))$ *un espacio medible donde* T *es un espacio topológico. Entonces,*

(i) Una función $f : \Omega \to T$ *es* Σ***-medible***[1] *si* $f^{-1}(B) \in \Sigma$ *para todo* $B \in \mathfrak{B}(T)$.

(ii) Una función $f : \Omega \to X$ *es* ***fuertemente*** Σ***-medible*** *si existe una sucesión de funciones* Σ*-simples* $f_n : \Omega \to X$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \qquad \textit{para todo} \ \ \omega \in \Omega.$$

(iii) Una función $f : \Omega \to X$ *es* ***débilmente*** Σ***-medible*** *si para cada* $x^* \in X^*$ *la función* $x^*(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ *es* Σ*-medible.*

(iv) Una función $f : \Omega \to X$ *es* ***fuertemente*** μ***-medible*** *(o* ***fuertemente medible****) si existe* $A \in \Sigma$ *de medida cero,* $\mu(A) = 0$*, y existe una sucesión de funciones* μ*-simples* (f_n) *con la propiedad de que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \qquad \textit{para todo} \ \ \omega \in \Omega \setminus A.$$

(v) Una función $f : \Omega \to X$ *es* ***débilmente*** μ***-medible*** *(o* ***escalarmente*** μ***-medible****) si para cada* $x^* \in X^*$ *la función* $x^*(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ *es* μ*-medible.*

Una función Σ-medible se define a partir de las imágenes inversas, mientras que una función μ-medible f utiliza sucesiones de funciones μ-simples (f_n) tal que $f_n \to f$ c.d.q.

Cabe mencionar que en la literatura, los términos de fuertemente μ-medible y escalarmente μ-medible son a menudo descritos μ-medible y débil μ-medible, respectivamente. A veces se puede suprimir la referencia a

[1]La colección de todos los $B \in \mathfrak{B}(T)$ que satisfacen $f^{-1}(B) \in \Sigma$ es una σ-álgebra. Como una consecuencia, tenemos que, f es Σ-medible si y sólo si $f^{-1}(U) \in \Sigma$ para todos los conjuntos abiertos en T. Cuando T_1 y T_2 son espacios topológicos, una función $g : T_1 \to T_2$ es Borel medible si $g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(T_1)$ para todo $B \in \mathfrak{B}(T_2)$, es decir, si g es $\mathfrak{B}(T_1)$-medible. Notemos que si $f : \Omega \to T_1$ es Σ-medible y $g : T_1 \to T_2$ es Borel medible, entonces la composición $g \circ f : \Omega \to T_2$ es Σ-medible. Por la observación anterior, tenemos que toda función continua $g : T_1 \to T_2$ es Borel medible.

la medida μ cuando no hay peligro de confusión. Además, hay que notar que en el espacio de los números reales todos estos conceptos definidos anteriormente son equivalentes, sin embargo, en un espacio normado estos conceptos difieren.

A continuación veremos algunas equivalencias entre los diferentes tipos de medibilidad. La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [28, pag 4].

Teorema 3.1.1. ***(Teorema de medibilidad de Pettis, 2ª versión)*** *Sean (Ω, Σ) un espacio medible y $f : \Omega \to X$ una función donde X es un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f es fuertemente Σ-medible,

(ii) f es valuada separable[2] y débilmente Σ-medible.

Teorema 3.1.2. *Sean (Ω, Σ) y $(X, \mathfrak{B}(X))$ espacios medibles, donde X es un espacio de Banach. Entonces para una función $f : \Omega \to X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f es fuertemente Σ-medible,

(ii) f es valuada separable y Σ-medible.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sea f una función fuertemente Σ-medible. Entonces f es valuada separable. Para probar que $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in \mathbb{B}(X)$ es suficiente con probar que $f^{-1}(U) \in \Sigma$ para todos los conjuntos abiertos U. Sea U un conjunto abierto y elijamos una sucesión de funciones f_n Σ-simples que converjan puntualmente a f. Para $r > 0$, sea $U_r = \{x \in U : d(x, U^c) > r\}$. Entonces $f_n^{-1}(U_r) \in \Sigma$ para todo $n \geq 1$, por la definición de una función Σ-simple. Como

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(U_{\frac{1}{m}})$$

(la inclusión '$\subseteq$' es una consecuencia del hecho de que U es abierto) se sigue que también $f^{-1}(U) \in \Sigma$.

[2]Una función $f : \Omega \to X$ es **valuada separable** si existe un subespacio cerrado separable $X_0 \subseteq X$ tal que $f(\omega) \in X_0$ para todo $\omega \in \Omega$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Supongamos que f es Σ-medible, y por lo tanto $\langle f, x^* \rangle$ es Σ-medible para todo $x^* \in X^*$. El resultado se sigue de la segunda versión del Teorema de medibilidad de Pettis.

□

Así, si X es separable, entonces una función f con valores en X es fuertemente Σ-medible si y sólo si es Σ-medible.

A continuación veremos una caracterización de las funciones μ-medibles cuya demostración el lector lo puede consultar en [2, pag. 424].

Teorema 3.1.3. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Entonces una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si*

(i) f es Σ-medible y,

(ii) sus valores $f(\omega)$ pertenecen a un subespacio cerrado separable de X para casi todo $\omega \in \Omega$.

Veamos que si f es una función fuertemente μ-medible, entonces su norma $\|f\|$ será también una función fuertemente μ-medible.

Teorema 3.1.4. *Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, X es un espacio de Banach y $f : \Omega \to X$ es μ-medible, entonces la función norma de f es μ-medible también.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces como f es μ-medible, existe una sucesión (f_n) de funciones μ-simples tales que $\| f_n(\omega) - f(\omega) \| < \varepsilon$ casi donde quiera, entonces

$$\Big| \|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\| \Big| \leq \| f_n(\omega) - f(\omega) \| < \varepsilon,$$

para casi todo $\omega \in \Omega$, y así concluimos que $\lim_{n\to\infty} \| f_n(\omega) \| = \| f(\omega) \|$ c.d.q. en Ω y por lo tanto $\|f\|$ es μ-medible.

□

Los conceptos de medibilidad y débil medibilidad están estrechamente relacionados. La relación está dada por el Teorema de medibilidad de Pettis que a continuación se menciona sin dar una demostración ya que no es la finalidad de esta tesis, pero se puede encontrar la demostración en [10, pag. 42]

Teorema 3.1.5. ***(Teorema de Medibilidad de Pettis)*** *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Entonces una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si*

(i) f es valuada separable casi donde quiera, i.e. existe un conjunto $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ talque $f(\Omega \setminus E)$ es un subconjunto separable de X, y

(ii) f es débilmente μ-medible.

La definición de valuada separable casi donde quiera es equivalente a la condición de que $f(\Omega \setminus E)$ está contenido en un subespacio cerrado y separable de X. Como una consecuencia de esta caracterización es el resultado siguiente.

Corolario 3.1.1. *Una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si existe una sucesión (f_n) de funciones μ-medibles y numerables tal que $f_n \to f$ c.d.q.*

Teorema 3.1.6. *Si X es un espacio de Banach separable, entonces $f : \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si f es débilmente medible*

Demostración. Para un espacio separable X, el rango $\{f(\omega) : \omega \in \Omega\} \subset X$ de f es separable y el teorema se sigue inmediatamente del Teorema 3.1.5.

$\square$

Para finalizar con esta sección, veamos que bajo ciertas condiciones una función fuertemente μ-medible es equivalente (tienen los mismos valores μ-casi donde quiera) a ser fuertemente Σ-medible. Para esto necesitamos que (Ω, Σ, μ) sea un espacio de medida σ-finita, es decir, que μ es una medida no negativa en un espacio de medida (Ω, Σ) y que existen conjuntos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ en Σ con $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Usando la σ-finitud de μ podemos ver que toda función fuertemente Σ-medible es fuertemente μ-medible. En efecto, si f es fuertemente Σ-medible y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntualmente con f_n funciones Σ-simples, entonces también tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n \chi_{A_n} = f$ puntualmente, donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y todo $f_n \chi_{A_n}$ es μ-simple. El teorema siguiente muestra que en la dirección contraria, toda función fuertemente μ-medible es igual μ-casi donde quiera a una función fuertemente Σ-medible.

Teorema 3.1.7. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita. Entonces, para una función $f : \Omega \to X$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) f *es fuertemente* μ*-medible,*

(ii) f *es equivalente a una función fuertemente* Σ*-medible.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos que $f_n \to f$ para todo $\omega \in \Omega \setminus N$, donde $N \in \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$ y f_n es una función μ-simple para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n\chi_{N^c} = f\chi_{N^c}$ puntualmente en Ω, y como las funciones $f\chi_{N^c}$ son Σ-simples, $f\chi_{N^c}$ es fuertemente Σ-medible. Se sigue que $f\chi_{N^c}$ es una función fuertemente Σ-medible equivalente a f.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sea $\tilde{f}$ una función fuertemente Σ-medible equivalente a f y sea $N \in \Omega$ un conjunto nulo tal que $f = \tilde{f}$ en N^c. Si $(\tilde{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones Σ-simples que convergen puntualmente a $\tilde{f}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$ en N^c, lo que significa que $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$ casi donde quiera.

Escribimos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \Sigma$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Luego definimos $f_n := \tilde{f}_n\chi_{A_n}$, y así tenemos que f_n son funciones μ-simples y que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ casi donde quiera.

□

3.2. Convergencia Casi Uniforme

En este capítulo vamos a indicar un resultado interesante, conocido como Teorema de Egorov, afirmando que la convergencia puntual de una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida finita es "casi" uniforme. Pero antes necesitamos aclarar el concepto de una sucesión que converja "casi" uniformemente.

Definición 3.2.1. *Sean* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y* X *un espacio de Banach, una sucesión* (f_n) *de funciones medibles* ***converge casi uniformemente*** *a la función medible* f *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto* $E_\varepsilon \in \Sigma$ *con* $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ *tal que* (f_n) *converge uniformemente a* f *en* $\Omega \setminus E_\varepsilon$*, y será denotado por* $f_n \to f$ *c.c.u.*

Teorema 3.2.1. *[**Teorema de Egorov**] Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita y sea* X *un espacio de Banach. Si una sucesión* (f_n) *de funciones medibles satisface* $f_n \to f$ *c.d.q., entonces* $f_n \to f$ *c.c.u.*

La demostración del Teorema 3.2.1 puede ser revisada en [1, p.125].

A continuación se mostrará que un recíproco más "fuerte", también es válida.

Teorema 3.2.2. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio de Banach. Si (f_n) es una sucesión de funciones, $f_n : \Omega \to X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_n \to f$ c.c.u en el conjunto $A \in \Sigma$, entonces la sucesión converge en A casi donde quiera. De aquí que, no es obligatorio para las funciones f_n sean medibles. El espacio de Banach puede no ser separable, y el conjunto A también puede tener una medida infinita.*

Demostración. Para demostrar tomemos una sucesión arbitraria de números positivos (δ_m) que converge a cero, $\delta_m > 0, \delta_m \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por hipótesis la sucesión (f_n) converge casi uniformemente en A, entonces a cualquier δ_m le corresponde un conjunto medible $E_{\delta_m} \subset A$, tal que $\mu(E_{\delta_m}) < \delta_m$ y la sucesión (f_n) converge uniformemente en el conjunto $A_{\delta_m} = A \setminus E_{\delta_m}$. Tenemos entonces que en este caso, que la sucesión (f_n) converge en todos los puntos del conjunto

$$A_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{\delta_m},$$

como cualquier punto $x \in A_0$, pertenece obligatoriamente a algún conjunto A_{δ_m}. Solo resta mostrar que la medida del conjunto $E_0 = A \setminus A_0$ es igual a cero. Para este propósito notemos que

$$E_0 = A \setminus A_0 = A \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{\delta_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} (A \setminus A_{\delta_m}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{\delta_m}.$$

En consecuencia, E_0 es medible, $E_0 \subset E_{\delta_m}$ para todo m y

$$\mu(E_0) \leq \mu(E_{\delta_m}) < \delta_m.$$

Como esto es válido para todo m y $\delta_m \to 0$ cuando $m \to \infty$, entonces $\mu(E_0) = 0$. Así, la sucesión converge en A excepto los puntos del conjunto E_0 de medida cero, esto es, la sucesión converge casi donde quiera.

□

Capítulo 4

Integral de Bochner

Se mencionó anteriormente que, en 1933, Bochner introduce y estudia un concepto de integral para funciones definidas en un espacio de medida y con valores en un espacio normado; actualmente a esta integral se le conoce como la integral de Bochner y ha resultado una herramienta muy útil en el estudio del Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad, Teoría de Semigrupos, etc.

La integral de Bochner es una generalización de la integral de Lebesgue en el contexto de los espacios de normados. Algunas propiedades de la integral de Lebesgue, tales como, la linealidad de la integral, el Teorema de la Convergencia Dominada, el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se siguen conservando para la integral de Bochner, sin embargo hay otras propiedades de la integral de Lebesgue, como por ejemplo, el Teorema de Radon-Nikodym, que no necesariamente es verdadero en el contexto de la integral de Bochner. Algunas otras propiedades de la integral de Lebesgue, como la monotonía de la integral, no tienen sentido en el contexto de los espacios normados, a menos que se introduzca un orden en el espacio normado.

En esta sección vamos a presentar el concepto de la integral de Lebesgue, así como enlistar algunas de sus propiedades más importantes y que nos servirán como guía para poder compararlo con la Integral de Bochner. Posteriormente, definiremos la integral de Bochner, y analizaremos algunas de sus propiedades básicas.

4.1. La integral de Lebesgue

A través de esta sección μ denota una medida de Lebesgue sobre una σ-álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω. Recordemos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es Σ-medible si f es $(\Sigma, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-medible. Esto es, f es Σ-medible si y sólo si las imágenes inversas de los conjuntos Borel bajo f son conjuntos Lebesgue-medibles. En esta sección, una función f es μ-simple (o simplemente función simple) si es una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f = \Sigma_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ con $B_j \in \Sigma$ y $\mu(B_j) < \infty$ para todo j. Más aún, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simple, entonces definiremos su integral de la siguiente manera; $\int f \, d\mu = \Sigma_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$. Además, mediante $L(\mu)$ denotaremos a la clase de todas las funciones simples, y cuando no haya peligro de confusión con la medida μ, simplemente escribiremos L.

Teorema 4.1.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces:*
(1) *Si dos funciones simples f y g son iguales casi donde quiera*[1]*, entonces coinciden sus integrales, es decir, $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.*
(2) *Si (f_n) es una sucesión de funciones simples tal que $f_n \downarrow 0$ casi donde quiera, entonces $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$. Similarmente, para funciones simples, $f_n \uparrow f$ casi donde quiera, implica que $\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu$ y $f_n \downarrow f$ casi donde quiera implica que $\int f_n \, d\mu \downarrow \int f \, d\mu$.*

Demostración. Demostraremos la primera parte, la segunda parte el lector puede consultarla en [2, p. 408].

En efecto, sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones simples tales que $f = g$ casi donde quiera, luego existe un conjunto $A \in \Sigma$ de medida cero, $\mu(A) = 0$, tal que $f(\omega) = g(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega \setminus A$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{F_i} = f = g = \sum_{j=1}^{m} x_j \chi_{F_j}.$$

De aquí que $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

$\square$

Continuamos ahora con las funciones que son los límites casi donde quiera de una sucesión de funciones simples.

[1] $f = g$ c.d.q. si existe un conjunto $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ y $f(\omega) = g(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega \setminus N$

Definición 4.1.1. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función μ-**límite superior** (o bien, es una función μ-**superior**, o simplemente función **superior**) si existe una sucesión (f_n) de funciones simples tales que:*

(i) $f_n \uparrow f$ *casi donde quiera.*

(ii) $\int f_n \, d\mu < \infty$.

Notemos que si (g_n) es otra sucesión de funciones simples que satisface $g_n \uparrow f$ casi donde quiera, entonces para todo k fijo, tenemos $g_n \wedge f_k \uparrow_n f \wedge f_k = f_k$ casi donde quiera y por el Teorema 4.1.1 tenemos que

$$\int f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int g_n \wedge f_k \, d\mu \Big) \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\int g_n \, d\mu \Big)$$

para todo k.

De aquí que $\lim_{k\to\infty}(\int f_k \ d\mu) \leq \lim_{n\to\infty}(\int g_n \ d\mu)$. Por la simetría de la situación, tenemos que, $\lim_{k\to\infty}(\int f_k \ d\mu) = \lim_{n\to\infty}(\int g_n \ d\mu)$. En otras palabras, el valor del límite $\lim_{n\to\infty}(\int f_n \, d\mu)$ es independiente de la sucesión (f_n). Este valor se le conoce como la **integral de Lebesgue** de f y es denotado por $\int f \, d\mu$. Es decir,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n \, d\mu \Big).$$

Enunciaremos a continuación una serie de propiedades básicas de funciones superiores que no probaremos pues no es la finalidad de este trabajo.

Teorema 4.1.2. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones superiores. Entonces:*

(i) f *es Σ-medible.*

(ii) Toda función simple h es una función superior y su integral de Lebesgue coincide con $\int h \, d\mu$.

(iii) Si h es una función tal que $f = h$ casi donde quiera, entonces h es una función superior y además $\int h \, d\mu = \int f \ \, d\mu$.

(iv) $f+g$, $f \wedge g$, $f \vee g$ *y* αf *para toda* $\alpha \geq 0$ *son funciones superiores. Más aún,* $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

(v) Si $f \leq g$ *casi donde quiera, entonces* $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Además, toda función integrable positiva es una función superior, esto es:

Teorema 4.1.3. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *función no negativa casi donde quiera, es decir,* $f(\omega) \geq 0$ *para casi todo* $\omega \in \Omega$. *Entonces* f *es una función superior.*

Ahora estamos listos para definir la integral de Lebesgue para funciones generales.

Definición 4.1.2. *Una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es* ***Lebesgue integrable*** *si existen dos funciones* μ*-superiores* $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* $f = u - v$ *casi donde quiera. Con lo cual, la integral de Lebesgue de* f *está definida por:*

$$\int f\, d\mu = \int u\, d\mu - \int v\, d\mu.$$

También, se usan los símbolos: $\int_\Omega f\, d\mu$, $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$, y $\int f(x)\, \mu(dx)$.

Notemos que bajo nuestra definición, si una función es Lebesgue integrable, entonces su integral es un número real (finito), sin embargo, más adelante liberaremos esta restricción.

Notemos que el valor de la integral de Lebesgue de una función f no depende de una función superior en particular. En efecto, si $f = u_1 - v_1 = u_2 - v_2$ casi donde quiera, donde u_1, v_1, u_2, v_2 son funciones superiores, entonces $u_1 + v_2 = u_2 + v_1$ casi donde quiera y también es una función superior. Entonces obtenemos

$$\int u_1\, d\mu + \int v_2\, d\mu = \int (u_1 + v_2)\, d\mu = \int (u_2 + v_1)\, d\mu = \int u_2\, d\mu + \int v_1\, d\mu$$

lo que implica que $\int u_1\, d\mu - \int v_1\, d\mu = \int u_2\, d\mu - \int v_2\, d\mu$.

Además:

1.- Toda función Lebesgue integrable es Σ-medible.

2.- Si una función f es igual casi donde quiera a una función integrable g, entonces f es Lebesgue integrable y $\int f\ d\mu = \int g\ d\mu$.

El siguiente teorema asegura que la integral de Lebesgue es lineal y monótona. Además de enunciar algunas propiedades algebráicas importantes de la integral que nos servirán de guía para comparar estas propiedades con algunas propiedades básicas de la integral de Bochner. El lector puede encontrar las demostraciones en [2, pag. 411].

Teorema 4.1.4. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones Lebesgue integrables, y $h : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función Σ-medible. Entonces tenemos las afirmaciones siguientes:*

*1.- (**Aditiva**) $\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$.*

*2.- (**Homogénea**) $\int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*3.- (**Monótona**) Si $f \leq g$ casi donde quiera, entonces $\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu$.*

4.- Si f y g son Lebesgue integrables, y $f \leq h \leq g$ c.d.q., entonces h también es Lebesgue integrable.

5.- f es Lebesgue integrable si y sólo si $|f|$ es Lebesgue integrable.

6.- $\left| \int f\ d\mu \right| \leq \int |f|\ d\mu$.

7.- Si f es Lebesgue integrable y $f \geq 0$ c.d.q., entonces $\int f\ d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.d.q.

*8.- (**Continuidad absoluta**) Para todo $E \in \Sigma$ tenemos que,*

$$\int_E f\ d\mu \to 0 \qquad \textit{cuando} \ \ \mu(E) \to 0.$$

A continuación presentaremos una caracterización de la integral de Lebesgue que casi siempre se usa como una definición alternativa de la integral de Lebesgue.

Teorema 4.1.5. *Una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es Lebesgue integrable si y sólo si* f^+ *y* f^- *son funciones superiores. Además, en este caso tenemos*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Demostración. Si f^+ y f^- son funciones superiores, entonces la función $f = f^+ - f^-$ es Lebesgue integrable, y $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$. Para el recíproco, supongamos que f es Lebesgue integrable, entonces existen dos funciones superiores u y v tales que $f = u - v$ c.d.q., luego, $f^+ = (u \vee v) - v$ y $f^- = (u \vee v) - u$ c.d.q. Como $u \vee v$ es una función superior, vemos que f^+ y f^- son funciones Lebesgue integrables. Además, dado que f^+ y f^- son funciones también positivas, por el Teorema 4.1.3, obtenemos que también son funciones superiores.

□

Decimos que una función f es **Lesbegue integrable sobre un conjunto medible** A si f_{χ_A} es Lebesgue integrable (sobre Ω). En este caso escribimos $\int_A f \, d\mu = \int_\Omega f_{\chi_A} \, d\mu$. En consecuencia, por el Teorema 2.2.1, si A y B son conjuntos medibles disjuntos y f es integrable sobre $A \cup B$, entonces $\int_{A\cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

4.2. Teoremas de Convergencia de la integral de Lebesgue

A menos que se diga lo contrario μ denota nuevamente una medida de Lebesgue sobre una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Nuestro propósito aquí es mostrar los teoremas más importantes de la teoría de la integral de Lebesgue, que nos describen cuándo podemos intercambiar el orden de tomar límites e integración. Estas son las propiedades de continuidad de la integral.

Observemos que alterando los valores de una función en un conjunto de medida μ-cero no cambia ni la μ-medibilidad de la función ni el valor de su integral. Esto nos permite tomar la libertad en definir una función. Específicamente, podemos permitir a una función tomar valores de $+\infty$ y $-\infty$ o incluso indefinido en un conjunto de medida μ-cero. Cuando decimos que una función f "define una función μ-integrable" queremos indicar que el conjunto de puntos en donde la función f toma valores infinito (o incluso es indefinido) tiene medida μ-cero. Asignando valores reales a este conjunto nulo (por ejemplo, podemos asignar el valor cero a cada punto de este conjunto) f llega a ser una función integrable.

El primer teorema es un resultado de convergencia monótona.

Teorema 4.2.1. ***(Teorema de Levi)***
Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones integrables tales que $f_n \uparrow$ c.d.q. Si $\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu < \infty$, entonces existe una función Lebesgue integrable f tal que $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ para casi todo ω, y además $\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

El teorema de Levi puede también ser enunciado mediante la siguiente proposición equivalente.

Teorema 4.2.2. *Si (f_n) es una sucesión de funciones no negativas y Lebesgue integrables tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_n$ define una función integrable y además*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

El resultado siguiente se conoce como Lema de Fatou.

Teorema 4.2.3. ***(Lema de Fatou)***
Si una sucesión (f_n) de funciones Lebesgue integrables está acotada por abajo por una función integrable g (es decir, $g \leq f_n$ c.d.q. para todo n) y $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu < \infty$, entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n$ define una función integrable y

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Ahora, tenemos el resultado conocido como Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Nos permite intercambiar límites e integrales y ha sido llamado "la piedra angular de la teoría de la integración".

Teorema 4.2.4. ***(Teorema de Convergencia Dominada)*** *Supongamos que una sucesión de funciones (f_n) Lebesgue integrables satisface que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ para casi todo ω, y que (f_n) está dominada c.d.q. por una función integrable g. Es decir, $|f| \leq g$ c.d.q. para todo n. Entonces f es Lebesgue integrable y*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Por último, presentamos otra caracterización de la integral de Lebesgue.

Teorema 4.2.5. *Una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ en un espacio de medida (Ω, Σ, μ) es Lebesgue integrable si y sólo si existe una sucesión (f_n) de funciones simples que satisfacen*

$$\int |f - f_n| \, d\mu \to 0.$$

Más aún, en este caso tenemos que $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ *para todo* $A \in \Sigma$.

Como discutiremos más adelante, las condiciones del teorema precedente son sólo aquellas necesarias para definir la integral de Bochner.

4.3. Integración de Funciones Simples

En esta sección sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω, X un espacio normado y μ una medida no negativa.

Definición 4.3.1. *Una función simple $f : \Omega \to X$ es una función* ***μ-integrable*** *(o simplemente* ***integrable*** *cuando no exista confusión con la medida μ) si $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ es diferente de cero solamente en el conjunto de medida finita, es decir, $\mu(E_i) < \infty$ para todo i.*

Una representación para una función μ-integrable f es cualquier expresión de la forma $f = \sum_{i=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$, donde $B_j \in \Sigma$ y $\mu(B_j) < \infty$ para toda j.

Cualquier teoría satisfactoria de integración tiene que tratar con funciones μ-integrables de la manera obvia, es decir, la integral de una función μ-integrable debe ser una suma ponderada de sus valores, siendo los pesos las medidas de los conjuntos en los que se asume esos valores.

Definición 4.3.2. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio normado y $f : \Omega \to X$ una función integrable tal que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$. Entonces la **integral** de f (con respecto a μ) está definida por*

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i).$$

A continuación se establece que, de hecho, la integral es una función lineal positiva. Para probar esto, necesitamos demostrar que para cualquier función μ-integrable f y para cualquier representación $f = \sum_{j=1}^{m} x_j \chi_{F_j}$, el valor de la suma $\sum_{j=1}^{m} x_j \chi_{E_j}$ coincide con la integral de f.

Teorema 4.3.1. *Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, X un espacio normado y $f = \sum_{j=1}^{m} x_j \chi_{Fj}$ es una representación de una función integrable $f : \Omega \to X$, entonces*

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} x_j \mu(F_j).$$

Demostración. Sea $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ una representación de f. Supongamos primero que los F_j son disjuntos dos a dos. Puesto que ni la función f ni la suma $\sum_{j=1}^{m} x_j \mu(F_j)$ cambian, eliminando los términos $x_j = 0$, podemos suponer que $x_j \neq 0$ para todo j. En tal caso tenemos $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$. Más aun, $x_i \mu(E_i \cap F_j) = x_j \mu(E_i \cap F_j)$ para todo i y j. En efecto, si $E_i \cap F_j = \emptyset$ es obvia la igualdad y si $w \in E_i \cap F_j$, entonces $x_i = x_j = f(w)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int f \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} x_j \mu(F_j).
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos el caso general. Por el Teorema 2.1.2, existen conjuntos disjuntos por pares $C_1, ..., C_k \in \Sigma$ tal que cada $F_j = \bigcup \{C_i : C_i \subseteq F_j\}$

y cada C_i está incluido en algún F_j. Para todo i y j sea $\delta_i^j = 1$ si $C_i \subseteq F_j$ y $\delta_i^j = 0$ si no es el caso.
Luego, $\chi_{F_j} = \sum_{i=1}^k \delta_i^j \chi_{C_i}$ y $\mu(F_j) = \sum_{i=1}^k \delta_i^j \mu(C_i)$. En consecuencia

$$f = \sum_{j=1}^m x_j \chi_{F_j} = \sum_{j=1}^m x_j \Big[\sum_{i=1}^k \delta_i^j \chi_{C_i}\Big] = \sum_{i=1}^k \Big[\sum_{j=1}^m x_j \delta_i^j\Big] \chi_{C_i}.$$

Así, por el caso anterior, tenemos:

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^k \Big[\sum_{j=1}^m x_j \delta_i^j\Big] \mu(C_i) = \sum_{j=1}^m x_j \Big[\sum_{i=1}^k \delta_i^j \mu(C_i)\Big] = \sum_{j=1}^m x_j \mu(F_j).$$

$\square$

Ahora bien, estamos listos para establecer la "linealidad" de la integral.

Teorema 4.3.2. *Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y X un espacio normado, entonces para toda función integrable $f, g : \Omega \to X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos*

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Además, si $f \geq 0$, entonces $\int f \, d\mu \geq 0$.

Demostración. Sean f y g dos funciones μ-integrables que van de Ω a X. Entonces

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i} \qquad y \qquad g = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{F_j}.$$

Tenemos que los conjuntos $\{E_i\}$ son mutuamente disjuntos y todos los x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ son elementos distintos de X. Similarmente, los conjuntos $\{F_j\}$ son mutuamente disjuntos y todos los y_j $(j = 1, ..., m)$ son elementos distintos de Y. Sean $x_0 = y_0 = 0$, $E_0 = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = 0\}$ y $F_0 = \{\omega \in \Omega : g(\omega) = 0\}$. Entonces

$$f(\omega) = \sum_{i=0}^{n} x_i \chi_{E_i}(\omega) \qquad \text{y} \qquad g(\omega) = \sum_{j=0}^{m} y_j \chi_{F_j}(\omega).$$

Luego, para cada $i = 0, ..., n$ y $j = 0, ..., m$ sea

$$A_{i,j} = E_i \cap F_j,$$

y notemos que

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_{i,j} = F_j \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{j=0}^{m} A_{i,j} = E_i,$$

así,

$$f = \sum_{i=0}^{n} x_i \chi_{E_i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x_i \chi_{A_{i,j}}$$

y

$$g = \sum_{j=0}^{m} y_j \chi_{F_j} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} y_j \chi_{A_{i,j}}.$$

Más aún, $(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha x_i + \beta y_j) \chi_{A_{i,j}}$.

Notemos que $A_{i,j} \in \Sigma$, y $A_{i,j} \cap A_{i',j'} = \emptyset$, donde $i \neq i'$ o $j \neq j'$, $\mu(A_{i,j}) < \infty$, además de que $i \neq 0$ y $j \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}(\alpha f + \beta g)\, d\mu &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha x_i + \beta y_j)\mu(A_{i,j}) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x_i \mu(A_{i,j}) + \beta \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} y_j \mu(A_{i,j}) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(E_i) + \beta \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(F_j) \\
&= \alpha \int_{\Omega} f\, d\mu + \beta \int_{\Omega} g\, d\mu.
\end{aligned}$$

□

La positividad de la integral se puede replantear por la siguiente proposición equivalente: Si f y g son dos funciones integrables, entonces $\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu$. Esta propiedad es también referida como la **monotonicidad** de la integral.

4.4. La integral de Bochner

Hasta ahora sólo hemos presentado la integral de funciones con valores en los reales. Pero es claro que la definición de la integral de funciones simples tiene sentido para funciones que toman valores en espacios vectoriales. En esta sección Ω es un conjunto no vacío junto con una σ-álgebra Σ de conjuntos medibles y μ una medida. Sea X un espacio vectorial. Como en el caso de los reales, para este capítulo diremos que una función $f : \Omega \to X$ que toma solamente un número finito de valores, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$ es una **función simple** si $E_i = f^{-1}(\{x_i\}) \in \Sigma$ para todo i. Como es usual, la fórmula $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ es una representación de f. Si $\mu(E_i) < \infty$ para todo x_i distinto de cero, entonces f es una función **X-integrable** (también conocido como **X-simple**, o bien, **X-escalonada**). La **integral** de una función integrable con valores en el espacio X es el vector $\int f\ d\mu$ en X, definido por la fórmula

$$\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) x_i.$$

Como en el caso de los reales, si $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{B_j}$ es otra representación de f con $\mu(B_j) < \infty$ para todo y_j distinto de cero, entonces

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) y_j.$$

La demostración de este hecho es una simple repetición de la prueba del Teorema 4.3.1.

La cuestión técnica que tenemos ahora es cómo generalizar la integral de una función con valores vectoriales más allá del caso de las funciones simples. Si el espacio vectorial X es un espacio vectorial ordenado, existe la esperanza de que podamos construir una teoría de la integración basada en funciones superiores, análoga al desarrollo de la integral de Lebesgue. Desafortunadamente no conocemos una teoría satisfactoria en este sentido. Sin embargo, hay varias extensiones útiles de la integral en otros sentidos, todo lo cual se basa en la idea de reducir la cuestión de la integrabilidad vectorial a la integrabilidad de las funciones reales. Este es el caso de la integral de Bochner que vamos a examinar en lo que resta del capítulo. Es una abstracción directa de la integral de Lebesgue.

Para lo que resta de este capítulo, a menos que se diga lo contrario, (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y X es un espacio de Banach. Si $f : \Omega \to X$ es una función vectorial, entonces $\|f\|$ denota la función real (no negativa) $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|$ para todo $\omega \in \Omega$. Decimos que $\|f\|$ es la **función norma** de f.

A la clase de todas las funciones X-integrables se le denota por L_X. Como se mencionó antes, la demostración del Teorema 4.3.1 muestra que la integral es lineal y que va de L_X a X, es decir, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *La colección L_X de todas las funciones X-integrables es un espacio vectorial. Más aún, para todo $f, g \in L_X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu,$$

es decir, esta integral es un operador lineal de L_X a X.

Observe que a diferencia de la integral de Lebesgue, esta definición de la integral no cumple con la propiedad de la monotonicidad, es decir, es falso que si $f \leq g$ en L_X, entonces $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$, ya que no todos los espacios de Banach son espacios ordenados.

Para $f \in L_X$ y $E \in \Sigma$, definimos $\int_E f \, d\mu$, la **integral de f sobre E** como:

$$\int_E f \, d\mu = \int_\Omega f\chi_E \, d\mu.$$

Teorema 4.4.2. *Si $f \in L_X$ tiene una representación $f = \sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$, entonces la función norma $||f||$ de f es una función real integrable que tiene como representación $||f|| = \sum_{i=1}^n ||x_i||\chi_{E_i}$. Más aún,*

$$\int \|f\| \, d\mu = \sum_{i=1}^n \|x_i\|\mu(E_i) \qquad y \qquad \left\| \int f \, d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu$$

Demostración. Si $f \in L_X$, entonces $f = \sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$, donde $\mu(E_i) < \infty$, para todo x_i diferente de cero. Como $\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces $\|f\| = \sum_{i=1}^n ||x_i||\chi_{E_i}$ y $\mu(E_i) < \infty$ para todo x_i distinto de cero y así, $\|f\|$ es una función real integrable cuya integral está dada por $\int \|f\| \, d\mu = \sum_{i=1}^n \|x_i\|\mu(E_i)$. Además, de la desigualdad

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i\mu(E_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|\mu(E_i)$$

se sigue que:

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu.$$

□

Ahora bien, recordemos que una función vectorial $f : \Omega \to X$ es fuertemente μ-medible si existe una sucesión (f_n) de funciones μ-simples tal que $\lim_{n\to\infty} \|f(\omega) - f_n(\omega)\| = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Denotamos a la colección de todas las funciones fuertemente medibles que van de Ω a X como $\mathcal{M}(\Omega, X)$. Es decir,

$$\mathcal{M}(\Omega, X) = \{f \in X^\Omega \ : \ f \text{ es fuertemente medible } \}.$$

Teorema 4.4.3. *La colección $\mathcal{M}(\Omega, X)$ es un espacio vectorial que contiene a todas las funciones X-integrables. Esto es, tenemos la siguiente contención de subespacios vectoriales*

$$L_X \subset \mathcal{M}(\Omega, X) \subset X^{\Omega}.$$

Nuestro siguiente objetivo es extender la noción de la integral de L_X a un subespacio más grande $\mathcal{M}(\Omega, X)$. Para hacer esto, necesitamos lo siguiente:

Teorema 4.4.4. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f : \Omega \to X$ una función fuertemente μ-medible. Supongamos que para dos sucesiones (f_n) y (g_n) de funciones X-integrables las funciones real medibles $\|f - f_n\|$ y $\|f - g_n\|$ son Lebesgue integrables para todo n, y además*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - f_n\| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \|f - g_n\| \, d\mu = 0.$$

Entonces para todo $E \in \Sigma$ tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu.$$

Demostración. Supongamos que las dos sucesiones (f_n) y (g_n) de funciones X-integrables cumplen con las propiedades establecidas. Fijemos $E \in \Sigma$, entonces de

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f_m \, d\mu \Big\| &= \Big\| \int_E (f_n - f_m) \, d\mu \Big\| \\
&\leq \int \|f_n - f_m\| \, d\mu \\
&\leq \int \|f - f_n\| \, d\mu + \int \|f - f_m\| \, d\mu,
\end{aligned}$$

vemos que $\lim_{n,m\to\infty} \| \int_E f_n \ d\mu - \int_E f_m \ d\mu\| = 0$, lo que muestra que la sucesión $(\int_E f_n \, d\mu)$ es una sucesión de Cauchy en X, por lo tanto converge en X. De manera análoga tenemos que la sucesión $(\int_E g_n \, d\mu)$ converge en X. Ahora bien, de la desigualdad

$$\Big\| \int_E f_n \, d\mu - \int_E g_n \, d\mu \Big\| \leq \int \|f - f_n\| \, d\mu + \int \|f - g_n\| \, d\mu$$

se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu$, que es lo que se quería demostrar.

$\square$

A continuación veremos la definición de una función Bochner integrable y se observará que su definición es precisamente la abstracción directa del Teorema 4.2.5.

Definición 4.4.1. *Una función fuertemente medible $f : \Omega \to X$ es **Bochner integrable** si existe una sucesión (f_n) de funciones X-integrables tal que la función real medible $\|f - f_n\|$ es Lebesgue integrable para todo n y además*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

*En este caso, para todo $E \in \Sigma$ la **integral de Bochner** de f sobre E está definida por*

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Como es usual, escribiremos $\int f \, d\mu$ en vez de $\int_\Omega f \, d\mu$. Por el Teorema 4.4.4, la integral de Bochner está bien definida, en el sentido de que no depende de una sucesión de funciones integrables en particular para aproximar a f. Toda función X-integrable es Bochner integrable, además, si $f \in L_X$ tiene una representación $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$, entonces $\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E \cap E_i) x_i$ para todo $E \in \Sigma$.

La colección de todas las funciones Bochner integrables es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega, X)$ y la integral de Bochner actúa como un operador lineal desde este espacio hacia X.

Teorema 4.4.5. *Si f y g son dos funciones Bochner integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ también es Bochner integrable y*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$.

Demostración. Como f y g son Bochner integrables, existen dos sucesiones de funciones X-integrables (f_n) y (g_n) tales que las funciones reales $\|f - f_n\|$ y $\|g - g_n\|$ son Lebesgue integrables para todo n y además

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f-f_n\|\,d\mu = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|g-g_n\|\,d\mu = 0.$$

Notemos que la sucesión $(\alpha f_n + \beta g_n)$ es una sucesión de funciones X-integrable y además, para todo n se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|\,d\mu &= \int_\Omega \|\alpha(f-f_n)+\beta(g-g_n)\|\,d\mu\\ &\leq \int |\alpha|\|f-f_n\| + |\beta|\|g-g_n\|\,d\mu\\ &= |\alpha|\int \|f-f_n\|\,d\mu + |\beta|\int \|g-g_n\|\,d\mu\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Así, $\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\|$ es Lebesgue integrable para todo n. Más aún,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int \big\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\big\|\,d\mu \leq |\alpha|\lim_{n\to\infty}\int \|f-f_n\|\,d\mu\\ + |\beta|\lim_{n\to\infty}\int \|g-g_n\|\,d\mu.\end{aligned}$$

Como los límites que se encuentran en la parte derecha de la desigualdad anterior convergen a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\int \big\|(\alpha f+\beta g)-(\alpha f_n+\beta g_n)\big\|\,d\mu \to 0.$$

Así, $(\alpha f+\beta g)$ es Bochner integrable como se requería. Entonces, usando el hecho de que la integral de Bochner es un operador lineal que va de L_X a X, y de la continuidad de la suma y de la multiplicación escalar de X, tenemos

$$\begin{aligned}
\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int \big(\alpha f_n + \beta g_n\big)\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int f_n\, d\mu + \beta \int g_n\, d\mu\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha \int f_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \beta \int g_n\, d\mu \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \\
&= \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Notemos que en general es falsa la propiedad monótona para la integral de Bochner: Si f y g son funciones Bochner integrables que satisfacen $f(\omega) \leq g(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$, es decir, casi donde quiera, entonces

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$. A menos que X, además de ser un espacio de Banach, sea también una retícula[2].

4.5. Criterio de Integrabilidad

La definición de la integral de Bochner es difícil e incómoda de aplicar, pero afortunadamente para espacios de medida finita existe un criterio manejable.

Teorema 4.5.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y sea $f : \Omega \to X$ una función μ-medible. Entonces f es Bochner integrable si y sólo si su función norma $\|f\|$ es Lebesgue integrable, es decir, $\int \|f\|\, d\mu < \infty$.*

[2]Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado en el que, cada par de elementos del conjunto tienen supremo e ínfimo, es decir, un conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{L}, \leq)$ es una retícula si para cualesquiera $a, b \in \mathscr{L}$ existe $\sup\{a, b\} = a \wedge b$ y existe $\inf\{a, b\} = a \vee b$.

Demostración. Supongamos que f es Bochner integrable, entonces existe una sucesión (f_n) de funciones X-integrables tales que $\lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$. Entonces

$$\int_\Omega \|f\|\, d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu + \int_\Omega \|f_n\|\, d\mu < \infty,$$

para n lo suficientemente grande.

De manera recíproca, supongamos que f (y en consecuencia $\|f\|$) es fuertemente medible y $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$. Con la ayuda del Corolario 3.1.1 elijamos una sucesión de funciones medibles (f_n) tal que $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ para todo entero positivo n. Como $\|f_n\| \leq \|f_n\| + \frac{1}{n}$ c.d.q. y μ es finita, entonces $\int_\Omega \|f_n\|\, d\mu < \infty$. Para todo entero positivo n, escribimos

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m}\chi_{E_{n,m}},$$

donde $E_{n,i} \cap E_{n,j} = \emptyset$ para $i \neq j$, $E_{n,m} \in \Sigma$, $x_{n,m} \in X$. Luego, para todo n, escojamos p_n tan grande que

$$\int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{n,m}} \|f_n\|\, d\mu < \mu(\Omega)/n,$$

y sea $g_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_{n,m}\chi_{E_{n,m}}$. Entonces g_n es una función X-integrable y

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f - g_n\|\, d\mu &\leq \int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu + \int_\Omega \|f_n - g_n\|\, d\mu \\ &\leq \mu(\Omega)/n + \mu(\Omega)/n \\ &= 2\mu(\Omega)/n.\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es Bochner integrable, como se quería demostrar.

□

4.6. Teorema de Convergencia para la Integral de Bochner

Existe un Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Bochner que a continuación enunciaremos.

Teorema 4.6.1. ***(Teorema de Convergencia Dominada Vectorial)*** *Sea $f : \Omega \to X$ una función fuertemente medible y (f_n) una sucesión de funciones Bochner integrables que satisface $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \to 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Si existe una función real Lebesgue integrable no negativa $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo n tenemos $\|f_n\| \leq g$ c.d.q., entonces f es Bochner integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Demostración. Como $\|f_n\| \leq g$ pata todo n, entonces $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| \leq g$, y así $\|f\| \leq g$. Luego, como f y f_n son fuertemente medibles, se tiene que f y f_n son medibles y por tanto $\|f - f_n\|$ es medible también para todo n. De la desigualdad $\|f - f_n\| \leq \|f\| + \|f_n\|$ tenemos que $\|f - f_n\| \leq 2g$ μ-c.d.q., con lo cual tenemos que $\|f - f_n\|$ es Lebesgue integrable para todo n. Más aún, del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue 4.2.4 y de la hipótesis $\|f - f_n\| \to 0$, obtenemos $\int \|f - f_n\| \, d\mu \to 0$. Luego, para todo n elijamos una función X-integrable φ_n con $\int \|f - \varphi_n\| \, d\mu \leq \frac{1}{n}$, por ser f_n Bochner integrable para todo n, y notemos que

$$\int \|f - f_n\| \, d\mu \leq \int \|f - f_n\| \, d\mu + \int \|f_n - \varphi_n\| \, d\mu.$$

Como $\int \|f - f_n\| \, d\mu \to 0$ y $\int \|f_n - \varphi_n\| \, d\mu \to 0$ también tenemos que $\int \|f - \varphi_n\| \, d\mu \to 0$ y esto implica que f es Bochner integrable y que

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$.

□

No existen análogos del Lema de Fatou ni del Teorema de Convergencia monótona para la Teoría de la integral de Bochner.

4.7. Más sobre la Integral de Bochner

A continuación vamos a ver más propiedades de la Integral de Bochner, así como sus aplicaciones. En esta sección tenemos que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida, X un espacio de Banach y X^* su dual.

Antes de iniciar con las propiedades de la Integral de Bochner definamos la variación de una medida.

Definición 4.7.1. *Sea $\mu : \Sigma \to X$ una medida. La* ***variación*** *de μ es la función no negativa extendida $|\mu|$ cuyos valores de un conjunto $E \in \Sigma$ están dados por*

$$|\mu|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|\mu(A)\|,$$

donde el supremo se toma de todas las particiones π de E en un número finito de conjuntos disjuntos por pares de Σ. Si $|\mu|(\Omega) < \infty$, entonces μ se denominará ***medida de variación acotada****.*

Observación 5. Algunas de las consecuencias muestra que la variación de μ es una función monótona y finitamente aditiva. Además de que $\|\mu(E)\| \leq |\mu|(E)$ para todo $E \in \Sigma$.

Veremos una propiedad de la variación de μ sin demostración; el lector interesado puede encontrarla en ([10], p. 3).

Teorema 4.7.1. *Una medida de variación acotada es numerablemente aditiva si y sólo si su variación es también numerablemente aditiva.*

El teorema que anunciaremos a continuación muestra que las medidas vectoriales numerablemente aditivas definidas en una σ-álgebra, comparten una propiedad común con sus contrapartes escalares .

Teorema 4.7.2. ***(Teorema de Pettis)***
Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω, $F : \Sigma \to X$ una medida (numerablemente aditiva) y μ una medida no negativa finita y con valores en los reales sobre (Ω, Σ). Entonces F es μ-continua, es decir,

$$\lim_{\mu(E) \to 0} F(E) = 0$$

si y sólo si $E \in \Sigma$ y si $\mu(E) = 0$, entonces $F(E) = 0$.

La demostración del Teorema 4.7.2 se puede encontrar en [10, p. 10].

Otros hechos básicos sobre la integral de Bochner se recopilan a continuación.

Teorema 4.7.3. *Si f es una función μ-Bochner integrable, entonces:*

(i) $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f \, d\mu = 0$.

(ii) $\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$, *para todo $E \in \Sigma$.*

(iii) *Si (E_n) es una sucesión de conjuntos disjuntos por pares de Σ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

(iv) *Si $F(E) = \int_E f \, d\mu$, entonces F es de variación acotada y*

$$\|F\|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$.

Demostración. **(i)** Observemos que $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f\| \, d\mu = 0$ para $f \in L_1(\mu)$. En efecto, dado que $f \in L_1(\mu)$, entonces $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable, i.e., $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$, entonces si $\mu(E) = 0$ para algún $E \in \Sigma$, entonces $\|f\|\chi_E = 0$ μ-casi donde quiera y de aquí tenemos que $\int_\Omega \|f\|\chi_E \, d\mu = 0$, y así, por el Teorema de Pettis 4.7.2, se tiene $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f\| \, d\mu = 0$ y por (ii) obtenemos

$$0 \leq \left\| \lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f \, d\mu \right\| \leq \lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f\| \, d\mu = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f \, d\mu = 0$.

(ii) Existe una sucesión de funciones X-integrables (f_n) tal que $\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ por ser f μ-Bochner integrable y notemos que $\left\| \int f_n \, d\mu \right\| \leq \int \|f_n\| \, d\mu$ para todo n por el Teorema 4.4.2 y así tenemos que

$$\left\| \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \right\| = \left\| \int f \, d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \|f_n\| \, d\mu.$$

(iii) Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \;\, d\mu$ está dominada término por término por la serie convergente de números no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| \, d\mu$ $(\leq \int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty)$. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$ es absolutamente convergente. Para revisar su límite notemos que

$$\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \, d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f \, d\mu \right\|$$

por la aditividad finita de la integral de Bochner. Más aún, $\lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n) = 0$.

Por (i) tenemos que $\lim_{m\to\infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f \, d\mu \right\| = 0$ y, en consecuencia,

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

Como se quería demostrar.

(iv) Si π es una partición de un conjunto $E \in \Sigma$, entonces

$$\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leq \sum_{A\in\pi} \int_A \|f\| \, d\mu = \int_E \|f\| \, d\mu.$$

De aquí $|F|(E) \leq \int_E \|f\| \, d\mu$ y F es de variación acotada por el Teorema 4.5.1.

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$ y seleccionemos una sucesión (f_n) de funciones X-integrable tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - f_n\| \, d\mu = 0$$

Sea n_0 fijo tal que $\int \|f - f_n\| \, d\mu < \varepsilon$ y elijamos una partición π' de E tal que

$$\sum_{A\in\pi'} \left\| \int_A f_{n_0}\ d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_0}\|\ d\mu.$$

Ahora bien, elijamos una partición π de E que sea una refinación de π' tal que

$$|F|(E) - \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f\ d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Se sigue teniendo que

$$\int_E \|f_{n_0}\|\ d\mu = \sum_{B\in\pi} \left\| \int_B f\ d\mu \right\|.$$

Además,

$$\sum_{B\in\pi} \left| \left\| \int_B f\ d\mu \right\| - \left\| \int_B f_{n_0}\ d\mu \right\| \right| \leq \int_E \|f - f_{n_0}\|\ d\mu < \varepsilon.$$

De aquí se tiene que

$$\left| |F|(E) - \int_E \|f_{n_0}\|\ d\mu \right| = \left| |F|(E) - \sum_{B\in\pi} \int_B \|f_{n_0}\|\ d\mu \right| < 2\varepsilon.$$

Como esto es válido para todo n_0 suficientemente grande, de lo anterior se implica que

$$|F|(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n\|\ d\mu = \int_E \|f\|\ d\mu.$$

Como se quería demostrar.

□

Teorema 4.7.4. *Si f y g son Bochner integrables y $\int_E f\ d\mu = \int_E g\ d\mu$ para todo $E \in \Sigma$, entonces $f = g$ para μ-casi donde quiera.*

Demostración. Sea $F(E) = \int_E (f - g)\ d\mu$. Entonces $F(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Por lo tanto, $|F|(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Pero entonces $0 = |F|(\Omega) = \int \|f - g\|\ d\mu$ y así $\|f - g\| = 0$ μ-casi donde quiera. Esto solamente puede suceder si $f = g$ μ-casi donde quiera.

□

El Teorema siguiente describe una fuerte propiedad de la integración de Bochner que no tiene análogo en la Teoría de la integración de Lebesgue.

Teorema 4.7.5. ***(Hille)***
Sea $T : X \to Y$ un operador lineal cerrado[3]*, donde Y es un espacio de Banach. Si f y Tf son Bochner integrables con respecto a μ, entonces*

$$T\Big(\int_E f\, d\mu\Big) = \int_E Tf\, d\mu,$$

para todo $E \in \Sigma$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y seleccionemos una función $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n} = h_\varepsilon$, donde (E_n) es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos de Σ, $E_n \subseteq E$ y $x_n \in X$ tal que

$$\sup\Big\{\big\|f(\omega) - h_\varepsilon(\omega)\big\| : \omega \in E \setminus N_1\Big\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

para algún conjunto μ-nulo N_1. También podemos encontrar una función g_ε de la forma $g_\varepsilon = \sum_{n,m=1}^{\infty} y_{n,m}\chi_{E_{n,m}}$, donde $(E_{n,m})$ es una sucesión de conjuntos disjuntos por pares de Σ, $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m} = E_n$, $y_{n,m} \in Y$ tal que

$$\sup\Big\{\big\|Tf(\omega) - g_\varepsilon(\omega)\big\| : \omega \in E \setminus N_2\Big\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

para algún conjunto μ-nulo N_2. Para cada pareja (n, m) de enteros positivos, tomemos $\omega_{n,m} \in E_{n,m}$ arbitrarios. Escribimos $\phi = \sum_{n,m} f(\omega_{n,m})\chi_{E_{n,m}}$. Entonces se sigue que

$$\big\|f(\omega) - \phi(\omega)\big\| < \varepsilon \ \text{ para } \omega \notin N_1,$$

y

$$\big\|Tf(\omega) - T\phi(\omega)\big\| < \varepsilon \ \text{ para } \omega \notin N_2.$$

Más aún, tenemos que

$$\int_\Omega \big\|f - \phi\big\|\, d\mu < \varepsilon\mu(\Omega) \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega \big\|Tf - T\phi\big\|\, d\mu < \varepsilon\mu(\Omega).$$

[3] T es un operator lineal cerrado cuando su gráfico $G(T) := \{(x, T(x)) \ : \ x \in D(T)\}$ constituye un subespacio lineal cerrado de $X \times Y$.

También,

$$\int_E \phi \, d\mu = \lim_{k,j\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{j} f(\omega_{n,m})\mu(E_{n,m}),$$

y

$$\int_E T\phi \, d\mu = \lim_{k,j\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{j} Tf(\omega_{n,m})\mu(E_{n,m}).$$

Como T es cerrado, se sigue que $\int_E \phi \; d\mu$ pertenece a $D(T)$, es decir, al dominio de T y que $T(\int_E \phi \; d\mu) = \int_E T\phi \; d\mu$. Ahora bien, reemplacemos ε con una sucesión (ε_i) tal que $\varepsilon_i \to 0$ y reemplacemos ϕ con la sucesión correspondiente ϕ_i. Entonces se tiene que

$$\int_E \phi_i \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \qquad \text{y} \qquad \int_E T\phi_i \, d\mu \to \int_E Tf \, d\mu.$$

Como $T(\int_E \phi_i \; d\mu) = \int_E T\phi_i \; d\mu$ y T es cerrado, se sigue que $T(\int_E f \; d\mu) = \int_E Tf \; d\mu$.

$\square$

Ejemplo 3. 1) Si $f : (0, \alpha) \to X$ con $0 < \alpha < \infty$ es Bochner integrable y $x^* \in X^*$, entonces $\langle x^*, f\rangle : (0, \alpha) \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable y

$$\Big\langle x^*, \int_0^\alpha f \; dt \Big\rangle = \int_0^\alpha \langle x^*, f\rangle.$$

2) Si $J : X \hookrightarrow Y$ es una función inclusión continua de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y y $f : (0, \alpha) \to X$ con $0 < \alpha < \infty$, entonces

$$J\Big(\int_0^\alpha f \; dt\Big) = \int_0^\alpha Jf \; dt.$$

Así, las integrales valuadas en X e Y coinciden, y podemos identificarlas.

Teorema 4.7.6. *Sean f y g funciones fuertemente medibles. Si para todo $x^* \in X^*$, $x^*f = x^*g$ μ-casi donde quiera, entonces $f = g$ μ-casi donde quiera.*

Demostración. Sea (E_n) una sucesión en Σ tal que $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$ y f y g son acotadas en cada E_n. Fijemos n. Como f y g están acotadas en E_n, las integrales de Bochner

$$\int_E f\chi_{E_n}\, d\mu \qquad \text{y} \qquad \int_E g\chi_{E_n}\, d\mu$$

existen para todo $E \in \Sigma$. Como para todo $x^* \in X^*$, tenemos que $x^*f = x^*g$ μ-casi donde quiera, dichas integrales son iguales por el Teorema 4.7.5.

Aplicando el Teorema 4.7.4, establecemos que $f\chi_{E_n} = g\chi_{E_n}$ μ-casi donde quiera para todo n. En consecuencia, $f = g$ casi donde quiera.

□

Otra aplicación directa del Teorema 4.7.5 es una versión de Teorema del valor medio para la integral de Bochner. Y para lo siguiente tenemos que $co(V)$ denota el **casco convexo** de un subconjunto $V \subseteq X$, esto es, el conjunto de todas las sumas finitas $\Sigma_{j=1}^{k}\lambda_j x_j$ con $\lambda_j \geq 0$ que satisfacen $\Sigma_{j=1}^{k}\lambda_j = 1$ y $x_j \in V$ para $j = 1, ..., k$. La cerradura de este conjunto se denota por $\overline{co}(V)$.

Teorema 4.7.7. *Sea f Bochner integrable con respecto a μ. Entonces para todo $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$, se tiene que*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in \overline{co}(f(E)).$$

Demostración. La demostración la realizaremos por contradicción, supongamos que existe un conjunto $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) > 0$ y $(\mu(E))^{-1} \cdot \int_E f\, d\mu \notin \overline{co}(f(E))$. Con la ayuda de la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach[4], seleccionemos $x^* \in X^*$ y un número real α tales que

$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu\right) < \alpha \leq^* f(\omega),$$

para todo $\omega \in E$. Entonces por el Teorema 4.7.5 se tiene que

[4]Sean A, B conjuntos convexos disjuntos entre sí no vacíos de un espacio normado X. Si A es abierto, entonces existe una funcional $f \in X^*$ y un número real α tal que

$$f(x) < \alpha \leq f(y),$$

para todo $x \in X$ y para todo $y \in B$.

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E x^*f\ d\mu < \alpha \leq x^*f(\omega),$$

para todo $\omega \in E$. Integrando sobre E tenemos

$$\int_E x^*f\ d\mu < \alpha\mu(E) \leq \int_E x^*f\ d\mu,$$

que es una contradicción.

$\square$

El resultado siguiente muestra que las integrales de Bochner indefinidas comparten una propiedad muy importante con las integrales de Lebesgue indefinidas.

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces el Teorema de diferenciación de Lebesgue implica que el límite

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\ ds,$$

existe y es igual a $f(t)$ para casi todo $t \in [0,1]$. Este mismo resultado es verdadero para las integrales de Bochner.

Teorema 4.7.8. *Sea f Bochner integrable en $[0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces para casi todo $s \in [0,1]$ se tiene que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \big\|f(t) - f(s)\big\|\ dt = 0.$$

En consecuencia, para casi todo $s \in [0,1]$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_s^{s+h} f(t)\ dt = f(s).$$

Demostración. Como $\big\|h^{-1}\int_s^{s+h} f(t)\ dt - f(s)\big\| \leq h^{-1}\int_s^{s+h}\big\|f(t) - f(s)\big\|\ dt$, la segunda afirmación se sigue de la primera. Para probar la primera afirmación, tenemos que como f tiene rango casi separable, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f tiene rango separable. Sea $\{x_n\}$ un subconjunto denso numerable de $f([0,1])$, entonces por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, tenemos que

$$\|f(s) - x_n\| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| \, dt,$$

para casi todo $s \in [0,1]$ y para todo n.

Así, para todo $s \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \sup \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| \, dt &\leq \lim_{h\to 0} \int_s^{s+h} \Big(\|f(t) - x_n\| + \|f(s) - x_n\|\Big) dt \\
&\leq \lim_{h\to 0} \int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| \, dt + \|f(s) - x_n\| \\
&= 2\|f(s) - x_n\|.
\end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ dado, una elección de n tal que $||f(s) - x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}$ complementa la demostración del teorema.

$\square$

A continuación vamos a echar una breve mirada a los espacios Lebesgue-Bochner. Si $1 \leq p < \infty$, el símbolo $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ $(= L_p(\mu, X))$ denotará el conjunto de todas (las clases de equivalencia de) las funciones μ-Bochner integrable $f : \Omega \to X$ tales que

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega \|f\|_X^p d\mu \Big)^{1/p} < \infty.$$

Entonces, $L_p(\mu, X)$ junto con la norma $\| \cdot \|_p$ definido anteriormente, se convierte en un espacio de Banach, un hecho cuya demostración es la misma que en el caso real. El símbolo $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ $(= L_\infty(\mu, X)$ denotará el conjunto de todas (las clases de equivalencia de) funciones μ-Bochner integrable esencialmente acotadas $f : \Omega \to X$, normado por la funcional $\| \cdot \|_\infty$ definida para $f \in L_\infty(\mu, X)$ por

$$\|f\|_\infty = ess\ sup \|f\|_X = \inf\{\alpha \mid \|f\|_X \leq \alpha \ \text{ c.d.q. }\},$$

$L_\infty(\mu, X)$ se convierte en un espacio de Banach. El símbolo $L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ siempre significa $L_\infty(\mu, X)$ para $X =$ escalares.

Uno de los aspectos más interesante de la teoría de la integral de Bochner se centra en la siguiente pregunta: ¿Cuándo una medida $\mu : \Sigma \to X$, X espacio de Banach, surge como una Bochner integral indefinida? Examinemos brevemente la situación: si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y $F : \Sigma \to X$ una medida de la forma

$$F(E) = \int_E f \, d\mu$$

para alguna función f Bochner integrable, entonces F es numerablemente aditiva, μ-continua y de variación acotada por el Teorema 4.7.3. Recíprocamente, si $F : \Sigma \to X$ es una medida μ-continua numerablemente aditiva de variación acotada con un rango de dimensión finita, entonces el clásico Teorema de Radon-Nikodým produce una función Bochner integrable f para la cual $F(E) = \int_E f d\mu$. Pero en el caso general, es decir, para la integral general de Bochner, esto no se llega a cumplir necesariamente, véase [10, pág. 50].

El fracaso del Teorema de Radon-Nikodým para las integrales de Bochner no debe interpretarse como un aspecto negativo de la integral de Bochner. En efecto, el fracaso de un teorema general de Radon-Nikodým para la integral de Bochner en casos especiales tiene poderosas repercusiones en la teoría de operadores, la geometría de los espacios de Banach, la teoría de la dualidad para los espacios de Banach, la teoría de la probabilidad de valores vectoriales y la teoría de la integración misma.

La mayor parte de este capítulo está dedicado a las propiedades de las integrales de Bochner para funciones (fuertemente) medibles. En la literatura no hay escasez de integrales para funciones que no son necesariamente medibles. Generalmente, las integrales para funciones que no son medibles están plagadas de un defecto común: Parecen no tener aplicaciones fuera de sus propios contextos. Gracias a la medibilidad, la integral de Bochner tiene suficiente estructura sólida para tener aplicaciones sustantivas que reverberan a lo largo de la teoría de la medida vectorial, la teoría de operadores y la geometría de los espacios de Banach, véase [7, 9, 10, 13, 15, 21, 24, 29].

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Preliminares y notaciones

En vez de enumerar los términos indefinidos de la Teoría de conjuntos, los axiomas que lo relacionan y los postulados lógicos que rigen las manipulaciones de estos axiomas, en esta primera sección seguiremos un enfoque intuitivo.

Los conjuntos se denotaran con letras mayúsculas. Los objetos de un conjunto A se llaman los **elementos** (o los **miembros** o los **puntos**) de A. Para designar que un objeto x pertenece a un conjunto A, se usará el **símbolo de pertenencia** $\in$, es decir, escribiremos $x \in A$ y se lee: x pertenece (o es un miembro de) a A. Similarmente el simbolismo $x \notin A$, significa que el elemento x no pertenece a A. Los corchetes $\{\ldots\}$ también son usados para denotar conjuntos. Por ejemplo, el conjunto cuyos elementos son a, b y c está escrito como $\{a, b, c\}$.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, en símbolos $A = B$, si A y B tienen precisamente los mismos elementos. Un conjunto A es **subconjunto** de (o que está incluido en) un conjunto B, $A \subseteq B$, si $x \in A$, entonces $x \in B$. Claramente tenemos que, $A = B$, si y sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces A es un **subconjunto propio** de B. El conjunto que no tienen elementos es el **conjunto vacío** y es denotado por $\emptyset$. El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos. Si A y B son dos conjuntos, entonces definimos

1.- La **unión** $A \cup B$ de A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

2.- La **intersección** $A \cap B$ de A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$

3.- La **diferencia** $A \setminus B$ de B de A es el conjunto

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}.$$

El conjunto $A \setminus B$ a veces se conoce como el complemento de B relativo a A. Dos conjuntos son disjuntos (entre sí) si $A \cap B = \emptyset$.

Un número de relaciones útiles entre los conjuntos se listan a continuación:

1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

4) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

Las propiedades 1) y 2) se conocen como Leyes distributivas.

Una **familia de conjuntos** es un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos. Hay una forma estándar de denotar una familia de conjuntos. Si para todo elemento $i \in I$, donde I es un conjunto no vacío, se asigna un subconjunto A_i de con conjunto fijo X, entonces $\{A_i\}_{i\in I}$ (o $\{A_i \ : \ i \in I\}$ o simplemente $\{A_i\}$) denota la familia cuyos elementos son los conjuntos A_i. El conjunto no vacío I se llama el conjunto de índices de la familia.

Si $\{A_i\}$ es una familia de conjuntos, entonces la **unión** de la familia está definida como

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \text{existe } \ i \in I \ \text{ tal que } \ x \in A_i\},$$

y la **intersección** de la familia por

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \ \text{ para todo } \ i \in I\}.$$

Ocasionalmente $\bigcup_{i\in I} A_i$ será denotado por $\bigcup A_i$ y $\bigcap_{i\in I} A_i$ por $\bigcap A_i$. También si $I = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (el conjunto de los números naturales), entonces la unión e intersección de la familia será denotado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, respectivamente.

Las **leyes distributivas** para familias de conjuntos en general ahora toma forma

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \qquad \text{y} \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ es **disjuntos por pares** (o **disjuntos dos a dos**) si para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$, los conjuntos son disjuntos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$. El conjunto de todo los subconjuntos de A es el **conjunto potencia** de A, y se denota por $\mathscr{P}(A)$, es decir, $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Note que $\emptyset$ y A están en $\mathscr{P}(A)$.

Ahora bien, sea X un conjunto fijo no vacío. Si $P(x)$ es una propiedad (i.e. una proposición "lógica" bien definida) que involucra los elementos $x \in X$, entonces el conjunto de todos los x para los cuales $P(x)$ es verdadera será denotada por $\{x \in X \mid P(x)\}$.

Si $A \subseteq X$, entonces su **complemento** A^c (relativo a X) es el conjunto $A^c = X\backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Debería ser obvio que $(A^c)^c = A,\ A \cap A^c = \emptyset$ y $A \cup A^c = X$. Otras propiedades del complemento se establecen a continuación (donde $A, B \subset X$):

1) $A \setminus B = A \cap B^c$,

2) $A \subseteq B$, si y sólo si, $B^c \subseteq A^c$,

3) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

4) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Las identidades 3) y 4) se denominan Leyes de De Morgan.

La generalización de las leyes de De Morgan son muy útiles. Para una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de un conjunto X, las siguientes identidades se cumplen;

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \qquad \text{y} \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Definimos [1]

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Si $L := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$, entonces tenemos que $L = \lim_{n\to\infty} A_n$, y decimos que (A_n) converge a L (en este sentido escribiremos $A_n \to L$).

Observemos que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ (resp., $\liminf_{n\to\infty} A_n$) consiste de aquellos elementos de X que pertenecen a infinitamente muchos subconjuntos A_n (resp., que pertenecen a todos menos un número finito de subconjuntos A_n). Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n \subset \lim_{n\to\infty} \inf A_n.$$

También es inmediato el resultado de que si (A_n) es creciente ($A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$), entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

mientras, si (A_n) es decreciente ($A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$), entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

En el primer caso escribiremos $A_n \uparrow L$, y en el segundo $A_n \downarrow L$.

[1] Observe la similaridad con $\liminf$ y $\limsup$ para una sucesión (a_n) de números reales. Tenemos que: $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$.

Por una **función** f de un conjunto A a un conjunto B, $f : A \to B$, nos referimos a una "regla" específica que asigna a cada elemento $x \in A$ a un elemento único $y \in B$. El elemento y es el **valor** de la función f en x (o la **imagen** de x bajo f) y es denotado por $f(x)$, es decir, $y = f(x)$. El conjunto A es el **dominio** de f, denotado por $D(f)$, y el conjunto $\{y \in B \mid \text{ existe } x \in A \text{ con } y = f(x)\}$ es el **rango** de f, denotado por $R(f)$.

Dos funciones $f : A \to B$ y $g : A \to B$ son iguales, $f = g$, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Una función es **suprayectiva** si el rango de f es todo B, es decir, para todo $y \in B$ existe (al menos) $x \in A$ tal que $y = f(x)$. La función $f : A \to B$ es **inyectiva** si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por último, si la función f es suprayectiva e inyectiva, entonces decimos que la función f es **biyectiva**.

Ahora, sea $f : X \to Y$ una función, si $A \subseteq X$, entonces la imagen o rango $f(A)$ de A bajo f es el subconjunto de Y definido por

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Similarmente, si $B \subseteq Y$, entonces la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de B bajo f es el subconjunto de X definida por $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Las siguientes relaciones son verdaderas para $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$ y $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq Y$:

1) $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

2) $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

3) $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

4) $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

5) $f^{-1}\big(B^c\big) = \big(f^{-1}(B)\big)^c$.

Dadas dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, la **composición** $g \circ f$ es la función $g \circ f = X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ para todo $x \in X$. Si una función $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces para todo $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $y = f(x)$; el elemento único x es denotado por $f^{-1}(y)$. Así, en este caso, una función $f^{-1} : Y \to X$ puede ser definida como

$f^{-1}(y) = x$, siempre que $f(x) = y$. La función f^{-1} es la **inversa** de f.

Cualquier función $x : \mathbb{N} \to X$, donde $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales, es una **sucesión** en X, la manera usual de denotar el valor $x(n)$ es x_n. Denotamos la sucesión x por $(x_n) \subseteq X$, o bien, $\{x_n\} \subseteq X$. Y lo consideraremos tanto como una función como un subconjunto de X. Una **subsucesión** de una sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión $\{y_n\}$ para lo cual existe una sucesión estrictamente creciente $\{k_n\}$ de números naturales (es decir, $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$) tal que $y_n = x_{k_n}$ se cumple para todo n.

Ahora bien, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos, entonces el **producto Cartesiano** $\prod_{i \in I} A_i$ (o $\prod A_i$) está definido como el conjunto que consiste de todas las funciones $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $x_i = f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Dicha función se denomina una **función de elección** y es costumbre denotarlo por $(x_i)_{i \in I}$ o simplemente (x_i).

Si una familia de conjuntos consiste de dos elementos, digamos que A y B son dichos conjuntos, entonces el producto Cartesiano de los conjuntos A y B es designado por $A \times B$. Los elementos de $A \times B$ se le conoce como **parejas ordenadas**, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \text{ y } \ b \in B\}.$$

Claramente tenemos que, $(a, b) = (a_1, b_1)$ si y sólo si $a = a_1$ y $b = b_1$. De manera similar, el producto Cartesiano de una familia finita de conjuntos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es escrito como $A_1 \times \cdots \times A_n$ y sus elementos son denotados como n-tuplas, es decir,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n\}.$$

Aquí también tenemos que $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1 \ldots, b_n)$, si y sólo si, $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Si $A_1 = \cdots = A_n = A$, entonces es estándar escribir $A_i \times \cdots \times A_n$ como A^n. De manera similar, si la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ satisface $A_i = A$ para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es escrito como A^I, es decir, $A^I = \{f \mid f : I \to A\}$.

- ¿Cuando es el producto Cartesiano de una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ no vacía?

Ciertamente, si el producto Cartesiano es no vacía, entonces todo A_i debe ser no vacía. La siguiente respuesta puede, por lo tanto, ser respondida:

- Si para todo A_i es distinto del vacío, entonces ¿es el producto Cartesiano $\prod A_i$ no vacía?

A pesar de que la respuesta pareciera ser afirmativa, es infortunado que tal proposición no puede ser demostrada con los axiomas usuales de la teoría del conjunto. la respuesta afirmativa a la última respuesta es conocida como "el axioma de elección". Este axioma se asumirá a través de esta tesis sin ninguna explicación adicional. Una de sus formas se establece a continuación.

Axioma de Elección. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos tal que A_i es no vacía para todo $i \in I$, entonces $\prod A_i$ es no vacía.

Una formulación equivalente al axioma de elección es la siguiente:

- Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos disjuntos por pares tal que $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces existe un conjunto $E \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $E \cap A_i$ consiste de precisamente un elemento para todo $i \in I$.

Para una discusión más detallada del axioma de elección y su historia, el lector puede consultar [16] y [20].

Por una **relación** (binaria) en un conjunto X simplemente queremos decir un subconjunto $\mathscr{R}$ de $X \times X$. Si $(x, y) \in \mathscr{R}$, entonces x está en una relación $\mathscr{R}$ con y, y es denotado también por $x\mathscr{R}y$. Entre todas las relaciones más interesantes se encuentran las relaciones de equivalencias. una relación $\mathscr{R}$ en el conjunto X es una **relación de equivalencia** si satisface las siguientes tres propiedades:

a. $x\mathscr{R}x$ para todo $x \in X$ (*reflexivo*).

b. Si $x\mathscr{R}y$, entonces $y\mathscr{R}x$ (*simétrico*).

c. Si $x\mathscr{R}y$ y $y\mathscr{R}z$, entonces $x\mathscr{R}z$ (*transitividad*).

Sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto X. Entonces la **clase de equivalencia** determinada por el elemento $x \in X$ está definida por $[x] = \{y \in X \mid x\mathscr{R}y\}$. Observemos que dada dos clases de equivalencia tenemos que o son disjuntos, o bien coinciden. Como $x \in [x]$ para todo $x \in X$, se sigue que $\mathscr{R}$ **particiona** a X. Es decir, existe una familia $\{A_i\}_{i\in I}$

de conjuntos disjuntos por pares (aquí, la familia de clases de equivalencia) tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Recíprocamente, si una familia de conjuntos disjuntos por pares $\{A_i\}_{i \in I}$ particiona X (i.e. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$), entonces

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{ existe } i \in I \text{ tal que } x, y \in A_i \},$$

es una relación de equivalencia definida en X cuyas clases de equivalencia son precisamente los conjuntos A_i. Así, las relaciones de equivalencia en un conjunto corresponden precisamente en un modo inyectivo con sus particiones.

A continuación vamos a definir algunas relaciones importantes entre funciones, para esto sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones que van de un conjunto no vacío X a los números reales, entonces:

1) $(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ y $(f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$.

2) El valor absoluto $|f|$ de una función f está definida por $|f| = f \vee (-f)$. Es decir, $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in X$.

3) La parte positiva de f está definida como $f^+ = f \vee 0$.

4) La parte negativa de f está definida como $f^- = (-f) \vee 0$.

Se tienen a continuación algunas identidades entre f, $|f|$, su parte positiva f^+ y su parte negativa f^-:

1) $f = f^+ - f^-$,

2) $|f| = f^+ + f^-$, y

3) $f^+ \wedge f^- = 0$.

Decimos que dos conjuntos A y B son equivalentes $A \approx B$, si existe una función $f : A \to B$ que es biyectiva.

No es difícil ver que para los conjuntos las siguientes propiedades se cumplen:

1) $A \approx A$,

2) Si $A \approx B$ entonces $B \approx A$,

3) Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

En otras palabras, si $\mathscr{C}$ es una colección de conjuntos, la relación "ser equivalente a" definida entre los elementos de $\mathscr{C}$, tiene todos los atributos para ser una relación de equivalencia.

La línea divisoria para los tamaños de conjuntos es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{1, \ldots, n\}$ es un **segmento** de $\mathbb{N}$, y n es el número de elementos del segmento. Como consecuencia, tenemos que dos segmentos $\{1, \ldots, n\}$ y $\{1, \ldots, m\}$ son equivalentes, si y sólo si, $n = m$. Esto prueba que un subconjunto propio de un segmento no puede ser equivalente al segmento.

Un conjunto que es equivalente a un segmento es un **conjunto finito**. El conjunto vacío es también considerado finito con cero elementos. Un conjunto que no es finito es un **conjunto infinito**.

Un conjunto A es **numerable** si es equivalente a $\mathbb{N}$, es decir, si existe una función inyectiva de A con los elementos de $\mathbb{N}$.

Existe una notación estándar para un conjunto numerable A. Usualmente escrito como $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, a menudo se le conoce como una **enumeración** del conjunto A, e indica la correspondencia inyectiva de A con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Un conjunto infinito que no es numerable es un **conjunto no numerable**. A continuación presentaremos algunos resultados:

1) Todo conjunto infinito contienen un subconjunto numerable;

2) Todo subconjunto de un conjunto numerable, o es finito, o bien, numerable también;

3) A es numerable, si y sólo si, existe un subconjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ y una función $f : B \to A$ que es sobreyectiva.

4) A es numerable, si y sólo si, existe una función $g : A \to \mathbb{N}$ que es inyectiva.

5) Sea $\{A_i\}$ una familia numerable de conjuntos tal que todo A_i es un conjunto numerable. Entonces $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

6) Sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una sucesión finita de conjuntos tal que cada A_i es numerable. Entonces $A_1 \times \cdots \times A_n$ es numerable.

Ahora bien, una sucesión $\{x_n\}$ de los números reales **converge** a $x \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 (que depende de ε) tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad n > n_0.$$

El número real x es el **límite** de la sucesión $\{x_n\}$, y escribimos $x_n \to x$, o $x = \text{lím}_{n\to\infty} x_n$, o simplemente $x = \text{lím}\, x_n$. Hay que resaltar el hecho de que una sucesión de números reales tiene a lo más un límite.

Recordar que una sucesión $\{x_n\}$ es **acotada** si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $M > 0$ y $|x_n| \leq M$ para todo n. Una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ es **creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, y **decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. Una sucesión **monótona** es una sucesión creciente o decreciente. El simbolismo $x_n \uparrow x$ significa que $\{x_n\}$ es creciente y $x = \sup\{x_n\}$. Similarmente, $x_n \downarrow x$ significa que $\{x_n\}$ es decreciente y $x = \text{ínf}\{x_n\}$. Si una sucesión satisface $x_n = c$ para todo n, entonces es una sucesión **constante**. Además se tiene que toda sucesión de números reales acotada es convergente y esto implica que una sucesión creciente $\{x_n\}$ de números reales satisface $x_n \uparrow x$ si y sólo si $x = \text{lím}\, x_n$.

Las propiedades básicas de la convergencia de sucesiones de los reales se enlistan a continuación.

1. Toda sucesión convergente es acotada.

2. Si $x_n = c$ para todo n, entonces $\text{lím}\, x_n = c$.

3. Si tres sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ y $\{z_n\}$ de $\mathbb{R}$ satisfacen $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n, y $\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, y_n = x$, entonces $\{z_n\}$ converge y $\text{lím}\, z_n = x$.

Para las siguientes propiedades supongamos que $\text{lím}\, x_n = x$ y $\text{lím}\, y_n = y$.

4. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ converge y
$$\text{lím}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y.$$

5. La sucesión $\{x_n y_n\}$ es convergente y $\text{lím}(x_n y_n) = xy$.

6. Si $|y_n| \geq \delta \geq 0$ se cumple para todo n, y para algún $\delta > 0$, entonces $\{x_n/y_n\}$ converge y $\lim x_n/y_n = x/y$.

7. $x_n \geq y_n$ se cumple para todo $n \geq n_0$, entonces $x \geq y$.

Un número real x es un **punto limite** (o un **punto de agrupación**) de una sucesión de los números reales $\{x_n\}$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $k > n$ (que depende de ε y de n) tal que $|x_k - x| < \varepsilon$.

Los puntos límites de una sucesión son caracterizados como sigue:
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces un número real x es un punto límite para $\{x_n\}$, si y sólo si, existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\lim x_{k_n} = x$.

Entre todos los puntos límites de una sucesión, el más grande y el más pequeño son unos de los más importantes.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de $\mathbb{R}$. Entonces el **límite superior** de $\{x_n\}$ está definida por:

$$\limsup x_n = \inf_n \left[\sup_{k \geq n} x_k \right],$$

y el **límite inferior** de $\{x_n\}$ por:

$$\liminf x_n = \sup_n \left[\inf_{k \geq n} x_k \right].$$

Como $\sup_{k \geq n+1} x_k \leq \sup_{k \geq n} x_k$ e $\inf_{k \geq n} x_k \leq \inf_{k \geq n+1} x_k$ para todo n, se sigue que

$$\sup_{k \geq n} x_k \downarrow \limsup x_n \qquad \text{y} \qquad \inf_{k \geq n} x_k \uparrow \liminf x_n.$$

Más aún, si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, entonces $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ son el más pequeño y el más grande puntos límites de $\{x_n\}$, respectivamente. En particular,

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Dicha sucesión converge si y sólo si $\liminf x_n = \limsup x_n$. En este caso, $\lim x_n = x$.

Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 (que depende de ε) tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para todo $n, m > n_0$. Claramente, una sucesión de Cauchy debe ser necesariamente acotada. El recíproco es también verdadero y es expresado diciendo que los números reales forman un espacio métrico completo. Más aún, una sucesión de números reales converge, si y sólo si, es una sucesión de Cauchy.

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$ (o bien, $(-\infty, \infty)$), incluye tanto a los números racionales, denotado $\mathbb{Q}$ (positivos, negativos y el cero) como a los número irracionales. Más aún, podemos extender el conjunto $\mathbb{R}$ incluyendo los infinitos y se define como sigue. Los números reales extendido $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ o, como es costumbre escribirlo $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$, cuenta con las siguientes operaciones algebraicas de infinitos:

1) $\infty + \infty = \infty$ y $(-\infty) - \infty = -\infty$;

2) $(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$ y $(\pm\infty) \cdot (-\infty) = \mp\infty$;

3) $x + \infty = \infty$ y $x - \infty = -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

4) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ si $x > 0$ y $x \cdot (\infty) = \mp\infty$ si $x < 0$.

Las expresiones $\infty - \infty$ y $-\infty + \infty$ se dejan (como es costumbre) sin definir. En esta tesis estamos de acuerdo que

5) $0 \cdot \infty = 0$.

También, $\mathbb{R}^*$ es ordenado, con ∞ el elemento más grande, y $-\infty$ el elemento más pequeño. Más aún,

6) $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Una de las razones para introducir a los números reales extendido es que en la teoría de la medida, se necesita considerar conjuntos con medida infinita. Otra es que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no acotada, entonces podemos ver que $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ existen en $\mathbb{R}^*$ (los valores pueden ser más o menos infinito). Así, toda sucesión de números reales tiene un límite superior y un límite inferior en $\mathbb{R}^*$.

Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales **converge a** ∞ (denotado por $\lim x_n = \infty$) si para todo $M > 0$, existe n_0 (que depende de M) tal que

$x_n > M$ para todo $n > n_0$. Similarmente, $\lim x_n = -\infty$ significa que para todo número real $M < 0$, existe n_0 tal que $x_n < M$ para todo $n > n_0$. Como un resultado tenemos que toda sucesión creciente de los números reales converge ya sea a un número real o bien al infinito.

Toda sucesión $\{x_n\}$ de números reales, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, si toda sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ converge en $\mathbb{R}$. Si la sucesión de las sumas parciales converge al infinito, entonces escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ y decimos que la suma de la serie es infinito. La definición de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$ es similar.

Una **métrica** (o una **distancia**) d en un espacio no vacío X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface tres propiedades:

1) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$, si y sólo si, $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (*la desigualdad triangular*).

La pareja (X, d) se conoce como un **espacio métrico**. Si Y es un subconjunto de un espacio métrico (X, d). entonces Y equipado con la distancia d también se convierte en un espacio métrico. Más aún decimos que un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy en él es convergente. Un espacio métrico es **incompleto** si no es completo.

Se entiende pues que, en un espacio completo, las sucesiones de Cauchy y las convergentes son las mismas, es decir, una sucesión converge, si y sólo si, es de Cauchy. Análogamente, en un espacio incompleto deben existir sucesiones de Cauchy no convergentes. O sea que la existencia o ejemplo de alguna de ellas depende de la existencia de espacios incompletos.

Sea X con conjunto distinto del vacío. Una colección T de subconjuntos de X es una **topología** en X, si T satisface las siguientes propiedades:

1) $X \in T$ y $\emptyset \in T$.

2) Si U y V pertenecen a T, entonces $U \cap V \in T$.

3) Si $\{V_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de T, entonces $\bigcup_{i \in I} V_i \in T$.

Si T es una topología en el conjunto X, entonces la pareja (X, T) se le conoce como un **espacio topológico**. Si no hay ambigüedad acerca de la topología T, a veces por simplicidad podemos escribir X en vez de (X, T). Los elementos de T son los **conjuntos abiertos** de X. Una **vecindad** de un punto x es cualquier conjunto abierto $V \in T$ tal que $x \in V$. Ahora bien un subconjunto A de X es **cerrado** si su complemento A^c es abierto (i.e. $A^c \in T$). Tomando complementos, las siguientes propiedades de conjuntos cerrados se siguen directamente de la definición de la topología:

1) $\emptyset$ y X con conjunto cerrados (así como conjuntos abiertos).

2) Uniones finitas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

3) Intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

Cuando tenemos un espacio topológico (X, T) y un subconjunto E de X, podemos definir los puntos que están adheridos a E de la siguiente manera:

1) Un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** de E si cada vecindad V de x en (X, T) contiene algún punto de E diferente de x. Esto es, x es un punto de acumulación de E si $(E \cap V) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para toda vecindad de x.

2) El **conjunto derivado** de E, que denotaremos por $der(E)$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de E.

3) Un punto x de E es un **punto aislado** de E si $x \in E \setminus der(E)$.

Ahora introduciremos un concepto de especial relevancia en la topología general: La **cerradura** $cl(E)$ de un conjunto E contenido en un espacio topológico (X, T), es el subconjunto $cl(E) = E \cup der(E)$. Por último tenemos que un conjunto $E \subseteq X$ es **denso** en X si $cl(E) = X$. Si X es un espacio topológico, decimos que X es **separable** si existe un subconjunto denso numerable de X.

Una función $f : (X, T) \to (Y, T')$ entre dos espacios topológicos es **continua en el punto** $a \in X$ si para toda vecindad V de $F(a)$ existe una vecindad W de a tal que $f(x) \in V$ siempre que $x \in W$. Si f es continua en todos los puntos de X, entonces f es una **función continua**. Tenemos a continuación una caracterización de las funciones continuas:

Para un función $f : (X, T) \to (Y, T')$ entre dos espacios topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f es una función continua.

2) $f^{-1}(\mathscr{O}) \in T$ siempre que $\mathscr{O}$ es un subconjunto abierto de Y, i.e. $\mathscr{O} \in T'$.

3) $f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X siempre que C es un subconjunto cerrado de Y.

Una función biyectiva h definida sobre el espacio topológico X y con valores en el espacio topológico Y será llamada **homeomorfismo** si tanto ella como su inversa son continuas. Los espacios topológicos X e Y serán llamados **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre X e Y.

Es inmediato, de la definición, que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es. Cuando dos espacios X e Y son homeomorfos, los consideramos como objetos equivalentes en la clave de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por el otro en nuestros discursos y argumentaciones sin que las conclusiones se alteren. Como hemos mencionado, ellos son el mismo objeto topológico ya que la estructura topológica de uno se copia con precisión sobre la estructura topológica del segundo por medio del homeomorfismo.

Para mayor información sobre la Teoría de Conjuntos o sobre la Topología general, el lector puede consultar [18] y [27], respectivamente.

Bibliografía

[1] Aliprantis C. D. Principles of real analysis, 3rd Edition, San Diego, Academic Press.

[2] Aliprantis C. D., Border K.C., Infinite Dimensional Analysis A Hitchhiker?s Guide, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd Edition, 2006.

[3] Bartle, R. G., A Modern Theory of Integration, Amer. Math. SOC., Providence, 2001.

[4] Bartle, R. G., The elements of integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library Edition, New York, 1995.

[5] Berberian, S. K., Introducción al espacio de Hilbert, España, Editorial Teide, 1970.

[6] Bochner S. Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind, Fund. Math. 20, 262-276.

[7] Brown, A., Pearcy, C., Introduction to Operator Theory I, Elements of Functional Analysis Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Cannarsa P., D'Aprile T., Introduction to Measure Theory and Functional Analysis, Springer International Publishing, 2015.

[9] Day, M. M., Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[10] Diestel, J., Uhl, J. J., jr., Vector Measures, American Math. SOC., Providence, 1997.

[11] Diestel, J., Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[12] Dunford N., Integration in general analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 37, 441-453.

[13] Dunford,N., Schwartz, J.T., Linear operators I., Interscience Publishers, New York, London, 1958.

[14] Dvoretzky, A., Rogers, C.A., Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 36(1950),192-197.

[15] Fabian M., Habala P., Hájek P. Montesinos V., Zizler V., Banach Space Theory The Basis for Linear and Nonlinear Analysis, Springer Science+Business Media, LLC 2011.

[16] Fraenkel A. A., Abstract Set Theory, 4a Edición, North Holland, Amsterdam, 1976.

[17] Fremlin D. H., Measure Theory, Vol. 1, Torres Fremlin, second edition, 2011.

[18] Hernández, F.H., Teoría de Conjuntos, México, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[19] Kadets M. I., Kadets V. M., Series in Banach Spaces; Conditional and Unconditional Convergence, Birkhauser Verlag, Basel, 1997.

[20] Halmos P.R., Naive Set Theory, Springer-Verlag, Heidelberg-New York, 1974.

[21] Hille, E., Phillips, R.S., Functional Analysis and Semi-groups, American Mathematical Society, Providence, 1957.

[22] Hunter, J. K., Notes on Partial Differential Equations, Department of Mathematics, University of California at Davis, 2014.

[23] Papadimitrakis M., Notes on Measure Theory, Department of Mathematics, University of Crete, 2004.

[24] Pugachev V. S., Sinitsyn I. N., Lectures on Functional Analysis and Applications, Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1999.

[25] Schwabik S., Guoju Y., Topics in Banach Space Integration, Series in Real Analysis - Vol. 10, World Scientific Publishing Co. Re. Ltd. 2005.

[26] Talagrand, M., Pettis Integral and Measure Theory, Memoirs of the AMS 307, 1984.

[27] Tamariz A. M., Casarrubias F. S., Elementos de Topología General, México, Sociedad Matemática Mexicana, 1a. Edición, 2012.

[28] van Neerven J., Stochastic Evolution Equations, Lecture 01: Integration in Banach spaces, Technische Universiteit Delft, Paises Bajos, 2016, https://ocw.tudelft.nl/courselectures/lecture-1-integration-banach-spaces/

[29] Yosida, K., Functional Analysis, Academic Press, New York, 1965.