Benemérita Universidad Autónoma
de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Funciones y Propiedades de Whitney

TESIS

que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas
PRESENTA

Iván Serapio Ramos

Directores de Tesis
Dr. Raul Escobedo Conde
Dra. María de Jesús López Toriz

PUEBLA, PUE. 17 DE ENERO, 2014

A mi abuela Esperanza C.

Agradecimientos

Agradezco enormemente a mis asesores de tesis, el Dr. Raul Escobedo Conde y la Dra. María de Jesús López Toriz, por todo el apoyo que me han brindado. Este trabajo se debe en gran parte a su guía y su dirección.

También, agradezco a mis sinodales, el Dr. Iván Martínez Ruiz, la Dra. Patricia Pellicer Covarrubias y el Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, por dedicar parte de su valioso tiempo en revisar mi tesis y enriquecerlo con sus observaciones.

Finalmente, resta agradecer a mi familia y amigos, principalmente a mis padres Javier Serapio Carrasco y Ma. del Rosario Ramos García, y a los miembros de la Liga Extraordinaria del Jacobiano (LEJ), Bolzano-Weierstrass, Galois, Euler, Reimann y Seifert-Van Kampen. Sin su ayuda no podría haber llegado hasta aquí.

Índice general

Tabla de Símbolos

$\|A\|$	Cardinal del conjunto A.
$[A]^{\kappa}$	Colección de subconjuntos de A con cardinal igual a κ.
$[A]^{<\kappa}$	Colección de subconjuntos de A con cardinal menor que κ.
$[A]^{\leq\kappa}$	Colección de subconjuntos de A con cardinal a lo más κ.
$f[A]$	Imagen directa de A bajo f.
$f^{-1}[B]$	Imagen inversa de B bajo f.
$id\ A$	Función identidad en A.
$\times$	Producto cartesiano.
$\prod$	Producto topológico.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números enteros positivos.
$\aleph_0$	Cardinal de $\mathbb{N}$.
I	Intervalo cerrado $[0,1]$.

Introducción

La temática de esta tesis pertenece al área de la Topología conocida como Teoría de continuos y sus hiperespacios. Específicamente, se desarrolla el material necesario para demostrar la existencia de una celda bidimensional cuyo hiperespacio de subcontinuos admite un nivel de Whitney que posee un retracto homeomorfo a una esfera. Este trabajo está inspirado en el artículo de Ann Petrus titulado *Contractibility of Whitney Continua in* $C(X)$, [7].

Un continuo es un espacio topológico no vacío, compacto, conexo y metrizable. Si la condición de metrizabilidad se sustituye por la condición de Hausdorff, se tiene la noción de continuo de Hausdorff. La colección de todos los subcontinuos de un continuo $\boldsymbol{X}$ es denotada por $C(\boldsymbol{X})$ y al ser equipada con la topología de Vietoris es referida como el hiperespacio de subcontinuos de $\boldsymbol{X}$. Una función de Whitney para este hiperespacio es una función continua y real valuada μ definida sobre $C(\boldsymbol{X})$ que cumple: (i) Para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$, y (ii) Si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ y $K \subset L$ entonces $\mu(K) < \mu(L)$. Un nivel de Whitney del hiperespacio de subcontinuos de $\boldsymbol{X}$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}[\{\theta\}]$, donde μ es una función de Whitney para $C(\boldsymbol{X})$ y $0 \leq \theta < \mu(X)$. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad de Whitney si cada vez que un continuo cumple $\mathcal{P}$ todos los niveles de Whitney de su hiperespacio de subcontinuos también cumplen $\mathcal{P}$.

Utilizando esta terminología, en la presente tesis se demuestra la existencia de una celda bidimensional $\boldsymbol{X}$, una función de Whitney μ para $C(\boldsymbol{X})$ y un número $0 < \theta < \mu(\boldsymbol{X})$ de tal forma que el nivel $\mu^{-1}[\{\theta\}]$ contiene un retracto que es homeomorfo a una esfera. Como consecuencia se obtiene que ser una celda bidimensional, ser contráctil, tener la propiedad del punto fijo y ser un retracto absoluto no son propiedades de Whitney.

Para facilitar la lectura, en esta tesis se han incluido todos (o casi todos) los resultados de Topología General, continuos e hiperespacios que se requieren para su comprensión y se organiza el material en cuatro capítulos.

En el Capítulo 1, entre otros resultados, se exponen el Teorema del cable cortado para espacios Hausdorff compactos y el Teorema de golpes en la frontera para continuos de Hausdorff; se prueba que todo continuo es la intersección de una sucesión anidada de continuos localmente conexos; se presentan algunos resultados acerca de retractos y extensores absolutos; y se demuestra que todo continuo de Hausdorff contráctil respecto de la circunferencia es unicoherente.

En el Capítulo 2, se introducen la topología de Vietoris y la métrica de Hausdorff; se definen algunas funciones continuas entre hiperespacios; se demuestra, mediante el uso de arcos ordenados, que el hiperespacios de subcontinuos de un continuo siempre es un continuo arco conexo. También se prueba que un continuo es localmente conexo si y sólo si su hiperespacio de subcontinuos es localmente conexo. El capítulo finaliza con una demostración de que el hiperespacio de subcontinuos de un continuo es unicoherente.

En el Capítulo 3, se desarrollan conceptos en relación con las funciones de Whitney que se utilizarán en el capítulo 4; se construye una función de Whitney invariante bajo semejanzas; se define la función punto medio para el hiperespacio de arcos y puntos de un continuo y se demuestra su continuidad para el caso de los arcos y las curvas cerradas simples; se define la función punto antipodal para curvas cerradas simples y se relaciona con el concepto de punto medio.

En el Capítulo 4, se estudian los niveles de Whitney de un continuo; se demuestra que ser un continuo no degenerado, ser un arco, ser una curva cerrada simple, la conexidad local y la arco conexidad son todas propiedades de Whitney; se aplican los resultados y conceptos estudiados anteriormente para probar la existencia de la celda bidimensional cuyo hiperespacio de subcontinuos admite un retracto homeomorfo a una esfera y se obtiene en consecuencia que ser una celda bidimensional, ser un retracto absoluto, la propiedad del punto fijo y la contractibilidad no son propiedades de Whitney.

Convenciones

Un espacio topológico es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X. Se referirá a X como el espacio sobre el cual es construido el espacio (X, τ) y τ como su topología. Se usarán letras mayúsculas en negritas para representar espacios topológicos, siendo las más recurrentes $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$. En caso de no hacer referencia explícita del conjunto sobre el cual un espacio es construido, éste se nombrará por la misma letra prescindiendo de la tipografía en negritas. Por ejemplo,

$$\widetilde{\boldsymbol{Z}} \text{ es un espacio construido sobre el conjunto } \widetilde{Z}.$$

Cuando alguno de los espacios $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ o $\boldsymbol{Z}$ sea metrizable d denotará una métrica acotadas y admisibles para dicho espacios. Además, se usará la notación $B_{\boldsymbol{X}}(x, r)$ para representar a la *bola abierta en $\boldsymbol{X}$ con centro en el punto $x \in X$ y radio $r > 0$* y $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} A$ para el *diámetro de $A \subseteq X$ en $\boldsymbol{X}$*, ambos conceptos definidos en términos de la única métrica admisible para $\boldsymbol{X}$ en consideración, en este caso, de d.

Los siguientes son algunos espacios particulares que se considerarán recurrentemente en este trabajo.

(i) $\mathbf{R}^n$ es el *espacio euclidiano n-dimensional* construido sobre $\mathbb{R}^n$. Si $n = 1$ se hará omisión del exponente, de manera que $\mathbf{R}$ representa la recta real con su topología del orden usual. Obsérvese que

$$\mathbf{R}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}$$

i.e., $\mathbf{R}^n$ es la n-ésima potencia topológica de $\mathbf{R}$.

(ii) $\boldsymbol{I}$ es *el arco*, subespacio de $\mathbf{R}$ inducido sobre el intervalo $I = [0, 1]$. Se le nombrará *arco* a cualquier espacio que sea homeomorfo a $\boldsymbol{I}$. Para $n > 1$ un espacio homeomorfo a $\boldsymbol{I}^n$ se denomina *celda n-dimensional.*

(iii) $\mathbf{D}^n$ es *la bola n-dimensional*, subespacio de $\mathbf{R}^n$ inducido sobre el conjunto

$$D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}.$$

A $\mathbf{D}^2$ se le conoce también como *disco bidimensional.* Nótese que $\mathbf{D}^1$ es un arco y si $n > 1$, $\mathbf{D}^n$ es una celda n-dimensional.

(iv) $\mathbf{S}^n$ es *la esfera n-dimensional*, subespacio de $\mathbf{R}^{n+1}$ (y de $\mathbf{D}^{n+1}$) inducido sobre el conjunto
$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$
A $\mathbf{S}^1$ se le nombra *la circunferencia* y cualquier otro espacio homeomorfo a éste es una *curva cerrada simple*. En algunos casos, será más conveniente trabajar con la circunferencia en el plano complejo, que no es más que el espacio topológico construido sobre el conjunto
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
e inducido por la métrica
$$\forall z, z' \in S^1 : d(z, z') = |z - z'|.$$

(v) $\mathbf{\mathfrak{Q}}$ es *el cubo de Hilbert* y se obtiene como una potencia numerable del arco:
$$\mathbf{\mathfrak{Q}} = \boldsymbol{I}^{\omega} = \prod_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{I}.$$

Si $\mathcal{P}$ es una propiedad definida para espacios topológicos y $A \subseteq X$, se dirá que A tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en $\boldsymbol{X}$ si el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre A cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Las funciones continuas entre espacios topológicos serán consideradas en el sentido categórico, es decir, como morfismos entre objetos. La notación $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ se empleará para denotar que f es una función entre los conjuntos subyacentes X y Y, siendo además continua del espacio $\boldsymbol{X}$ al espacio $\boldsymbol{Y}$ (la preimagen de cualquier conjunto abierto en $\boldsymbol{Y}$ es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$).

Capítulo 1

Preliminares

§1 Continuos

1.1 Definición. Un *continuo* o *continuo metrizable* es un espacio topológico no vacío, compacto, conexo y metrizable. Si en lugar de la condición de metrizabilidad sólo se pide que el espacio sea Hausdorff se dirá que es un *continuo* T_2 o *continuo de Hausdorff*. Un continuo T_2 es *degenerado* si posee un solo punto y *no degenerado* en caso contrario.

1.2 Definición. Se definen las siguientes subcategorías plenas de la categoría **Top** de espacios topológicos y funciones continuas entre ellos:

(a) **Haus** cuyos objetos son los espacios de Hausdorff,

(b) **Met** cuyos objetos son los espacios metrizables,

(c) **HComp** cuyos objetos son los espacios Hausdorff compactos,

(d) **MComp** cuyos objetos son los espacios metrizables y compactos,

(e) **HCon** cuyos objetos son los continuos de Hausdorff,

(f) **MCon** cuyos objetos son los continuos metrizables.

1.3 Observación. (1) Las categorías anteriores se ordenan como subcategorías plenas como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Haus} & \\
\mathbf{HComp} \arrow[ur] & & \mathbf{Met} \arrow[ul] \\
\mathbf{HCon} \arrow[u] & & \mathbf{MComp} \arrow[u] \arrow[ull] \\
 & \mathbf{MCon} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(2) Los morfismos en **HComp** son funciones continuas y cerradas.

(3) Todo continuo de Hausdorff no degenerado tiene cardinal mayor o igual a $2^{\aleph_0}$ por ser un espacio conexo y completamente regular con más de un punto. Más aún, los continuos metrizables no degenerados tienen exactamente $2^{\aleph_0}$ puntos ya que pueden ser encajados en el cubo de Hilbert, [2, Teorema 4.2.10, p.260]

1.4 Proposición. Ser un continuo y ser un continuo T_2 son propiedades que se preservan bajo morfismos en la categoría **Haus**.

Demostración. En el caso de los continuos T_2 el resultado se sigue inmediatamente pues las funciones continuas preservan la conexidad y la compacidad. Para el caso restante, sea $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ una función continua y suprayectiva entre espacios de Hausdorff y supóngase además que $\boldsymbol{X}$ es un continuo. Debido al argumento antes mencionado bastará demostrar que $\boldsymbol{Y}$ también es un espacio metrizable. Dado que $\boldsymbol{X}$ es compacto y metrizable es posible elegir una colección numerable β que sea una base para $\boldsymbol{X}$. Sean U un conjunto abierto en $\boldsymbol{Y}$ y $y \in U$. Como $f^{-1}[\{y\}]$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{X}$ y $f^{-1}[U]$ es una vecindad abierta de $f^{-1}[\{y\}]$ es posible cubrir a $f^{-1}[\{y\}]$ con elementos de β que estén contenidos en $f^{-1}[U]$ y luego extraer una subcubierta finita que se nombrará β'. Aplicando la suprayectividad de f se tiene que

$$f^{-1}[\{y\}] \subseteq \bigcup \beta' \subseteq f^{-1}[U] \;\Rightarrow\; y \in Y \setminus f[X \setminus \bigcup \beta'] \subseteq U.$$

De la *Observación 1.3.(2)* se sigue que la función $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es cerrada y por tanto el conjunto $Y \setminus f[X \setminus \bigcup \beta']$ es abierto en $\boldsymbol{Y}$. En consecuencia, la colección

$$\mathscr{D} = \{Y \setminus f[X \setminus \bigcup \beta'] \mid \beta' \subseteq \beta \text{ y } |\beta'| < \aleph_0\}$$

es una base para $\boldsymbol{Y}$ que además es numerable pues $|\mathscr{D}| \leq |[\,\beta\,]^{<\aleph_0}| \leq \aleph_0$. Esto implica que $\boldsymbol{Y}$ es un espacio regular y segundo numerable. Por el *Teorema de Metrización de Urysohn* [5, Teorema 4.1, p.217], $\boldsymbol{Y}$ es un espacio metrizable. ■

1.5 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo o un continuo T_2 y $K \subseteq X$. Se dice que K es un *subcontinuo* de $\boldsymbol{X}$ si el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre K es un continuo o un continuo T_2 según sea el caso.

1.6 Observación. Debido a que las propiedades de ser un espacio metrizable y ser un espacio Hausdorff son hereditarias, K es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ si y sólo si K es no vacío, cerrado y conexo en $\boldsymbol{X}$.

1.7 Definición. Dado un punto x en un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ defínanse los conjuntos:

$$C_{\boldsymbol{X}}(x) = \bigcup\{A \subseteq X \mid x \in A \text{ y } A \text{ es conexo en } \boldsymbol{X}\},$$

$$Q_{\boldsymbol{X}}(x) = \bigcap\{A \subseteq X \mid x \in A,\, A \text{ es cerrado y abierto en } \boldsymbol{X}\}.$$

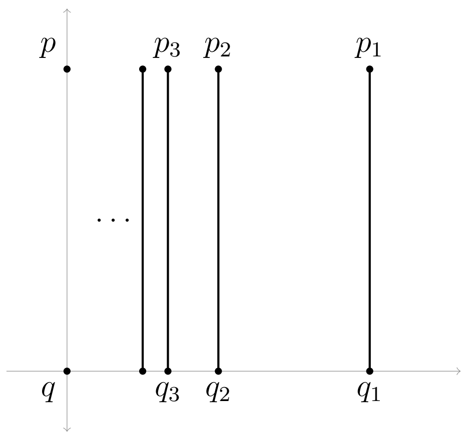
A estos conjuntos se les denomina la *componente conexa* y la *quasicomponente conexa* del punto x en $\boldsymbol{X}$, respectivamente.

1.8 Observación. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y $x \in X$.
(1) Como $\{x\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ se tiene que $x \in C_{\boldsymbol{X}}(x)$. Además, $C_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ por ser unión de una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ con intersección no vacía. Luego, si S es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ y $C_{\boldsymbol{X}}(x) \subseteq S$ entonces S debe contener al punto x, de manera que $S \subseteq C_{\boldsymbol{X}}(x)$ y por tanto $S = C_{\boldsymbol{X}}(x)$. Esto implica que $C_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un elemento maximal en la colección de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ respecto al orden parcial definido por la inclusión.
(2) Ya que *cl*$_{\boldsymbol{X}}$ $C_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ que contiene a $C_{\boldsymbol{X}}(x)$, se sigue del inciso (1) que *cl*$_{\boldsymbol{X}}$ $C_{\boldsymbol{X}}(x) = C_{\boldsymbol{X}}(x)$, esto es, $C_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{X}$.
(3) Sean $x, y \in X$. Si $C_{\boldsymbol{X}}(x) \cap C_{\boldsymbol{X}}(y) \neq \varnothing$ entonces $C_{\boldsymbol{X}}(x) \cup C_{\boldsymbol{X}}(y)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ que contiene tanto a x como a y. Nuevamente, como consecuencia del inciso (1) se tiene que $C_{\boldsymbol{X}}(x) = C_{\boldsymbol{X}}(x) \cup C_{\boldsymbol{X}}(y) = C_{\boldsymbol{X}}(y)$. De aquí se deduce que la colección $\{C_{\boldsymbol{X}}(x)\}_{x \in X}$ es una partición de X.
(4) Las quasicomponentes conexas de un espacio son conjuntos cerrados por ser la intersección de una familia de cerrados.

1.9 Proposición. En todo espacio topológico, la componente conexa de cada punto está contenida en su quasicomponente.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico, $x \in X$ y A un conjunto abierto y cerrado en $\boldsymbol{X}$ tal que $x \in A$. Por la *Observación 1.8.(1)*, $C_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un conjunto conexo así que no puede intersectar simultáneamente a A y a $X \setminus A$. Como $x \in A \cap C_{\boldsymbol{X}}(x)$ se sigue que $C_{\boldsymbol{X}}(x) \subseteq A$. Esto indica que la componente conexa de x en $\boldsymbol{X}$ está contenida en cada conjunto abierto y cerrado en $\boldsymbol{X}$ al cual pertenezca x, esto es, $C_{\boldsymbol{X}}(x) \subseteq Q_{\boldsymbol{X}}(x)$. ■

1.10 Ejemplo. *En general, no ocurre que* $C_{\boldsymbol{X}}(x) = Q_{\boldsymbol{X}}(x)$.
Defínanse $p = (0, 1), q = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $L_n = \{\frac{1}{n}\} \times I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se denotará por $\boldsymbol{X}$ al subespacio del plano inducido sobre $X = \{p, q\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$.



Para probar la afirmación se consideran las sucesiones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde,

$$\forall n \in \mathbb{N} : p_n = (\tfrac{1}{n}, 1) \text{ y } q_n = (\tfrac{1}{n}, 0).$$

Obsérvese que $\lim p_n = p$, lo cual implica que si K es una vecindad abierta y cerrada de p en $\boldsymbol{X}$ entonces es posible hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con

$n \geq N$. De esta manera, $L_n \cap K \neq \varnothing$ y debido a la conexidad de L_n se tiene que $L_n \subseteq K$, para $n \geq N$. Ya que todos salvo un número finito de términos de la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen al conjunto cerrado K se sigue que $\lim q_n = q \in K$. Esto verifica que q se encuentra en toda vecindad abierta y cerrada de p en $\boldsymbol{X}$, es decir, $q \in Q_{\boldsymbol{X}}(p)$.

Ahora, si $p' \in X \setminus \{p, q\}$ entonces $p' \in L_N$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Considérese el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in X \mid x \leq \tfrac{1}{N+1}\} = \{p, q\} \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} L_n \right).$$

Claramente A es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{X}$. Además, $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{N} L_n$, así que A también es abierto en $\boldsymbol{X}$. Como $p \in A$ y $p' \notin A$ entonces $p' \notin Q_{\boldsymbol{X}}(p)$. De aquí se concluye que $Q_{\boldsymbol{X}}(p) = \{p, q\}$. Obsérvese que el conjunto $\{p, q\}$ es disconexo en $\boldsymbol{X}$ pues es un conjunto finito con más de un punto en un espacio metrizable. Así, necesariamente ocurre que $C_{\boldsymbol{X}}(x) = \{x\}$ y por tanto $C_{\boldsymbol{X}}(x) \neq Q_{\boldsymbol{X}}(x)$.

1.11 Proposición. En la categoría **HComp** las quasicomponentes y las componentes conexas coinciden.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio Hausdorff compacto y $x \in X$. Se probará que $Q_{\boldsymbol{X}}(x)$ es conexo en $\boldsymbol{X}$ viendo que no se puede descomponer como la unión de dos conjuntos no vacíos y mutuamente separados en $\boldsymbol{X}$. En vista de la *Observación 1.8.(4)*, se considerarán conjuntos cerrados en $\boldsymbol{X}$, llámense H y K, tales que $Q_{\boldsymbol{X}}(x) = H \cup K$ y $H \cap K = \varnothing$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $x \in H$. Como $\boldsymbol{X}$ es normal existe un par de conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$, llámense U y V, tales que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$. Se observa que, $Q_{\boldsymbol{X}}(x) = H \cup K \subseteq U \cup V$ donde $Q_{\boldsymbol{X}}(x)$ es una intersección de una familia de cerrados en $\boldsymbol{X}$ y $U \cup V$ es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$. Ya que $\boldsymbol{X}$ es compacto es posible hallar una cantidad finita de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, cada uno de los cuales es abierto y cerrado en $\boldsymbol{X}$ y contiene al punto x, de manera que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq U \cup V$. De esta forma, el conjunto

$$W = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap U = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap (X \setminus V)$$

es cerrado y abierto en $\boldsymbol{X}$ y $x \in W$. Así, $Q_{\boldsymbol{X}}(x) = H \cup K \subseteq W \subseteq U$, de donde se sigue que $K \subseteq U \cap V = \varnothing$, esto es, $K = \varnothing$. Por tanto, $Q_{\boldsymbol{X}}(x)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ que contiene al punto x, lo cual implica que $Q_{\boldsymbol{X}}(x) \subseteq C_{\boldsymbol{X}}(x)$. ■

1.12 TEOREMA (del Cable Cortado). Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio compacto y Hausdorff. Si K es una componente conexa de $\boldsymbol{X}$ y F es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{X}$ tal que $K \cap F = \varnothing$, entonces existe un conjunto L abierto y cerrado en $\boldsymbol{X}$ tal que

$$K \subseteq L \quad \text{y} \quad L \cap F = \varnothing.$$

Demostración. Por la *Proposición 1.11*, K es una quasicomponente de $\boldsymbol{X}$, así que existe una colección no vacía $\mathcal{C}$ conformada por conjuntos no vacíos, abiertos y cerrados en

$\boldsymbol{X}$ de manera que $K = \bigcap \mathcal{C}$. Luego, al ser K y F conjuntos ajenos se tiene que

$$F \subseteq X \setminus K = X \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X \setminus A).$$

Como F es cerrado en $\boldsymbol{X}$, existe una colección finita $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ de manera que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

En consecuencia,

$$F \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \varnothing \quad \text{y} \quad K = \bigcap \mathcal{C} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

así que basta definir $L = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ para obtener el resultado requerido. ■

1.13 TEOREMA (de Golpes en la Frontera). Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo de Hausdorff, U es un conjunto propio, no vacío, abierto en $\boldsymbol{X}$ y K es una componente conexa de $cl_{\boldsymbol{X}}\, U$ en $\boldsymbol{X}$ entonces

$$K \cap Fr_{\boldsymbol{X}}\, U \neq \varnothing.$$

Demostración. Denótese por $\boldsymbol{Y}$ al subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $cl_{\boldsymbol{X}}\, U$. Se observa que $\boldsymbol{Y}$ es un espacio compacto y Hausdorff, K es una componente conexa de $\boldsymbol{Y}$ y $Fr_{\boldsymbol{X}}\, U$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{Y}$.

Si L es un conjunto abierto y cerrado en $\boldsymbol{Y}$ tal que $L \cap Fr_{\boldsymbol{X}}\, U = \varnothing$ entonces $L \subseteq U$ pues $cl_{\boldsymbol{X}}\, U = U \cup Fr_{\boldsymbol{X}}\, U$. Luego, como L es abierto en $\boldsymbol{Y}$, es posible hallar un conjunto W abierto en $\boldsymbol{X}$ de manera que $L = W \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, U$. Así,

$$W \cap U \subseteq W \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, U = L \subseteq W \cap U,$$

es decir, $L = W \cap U$. En consecuencia, L es un conjunto cerrado y abierto en $\boldsymbol{X}$. Ya que $\boldsymbol{X}$ es conexo y $L \subseteq U \subset X$, se sigue que $L = \varnothing$.

Se ha demostrado que cualquier conjunto abierto y cerrado en $\boldsymbol{Y}$ que no intersecte a $Fr_{\boldsymbol{X}}\, U$ debe ser vacío. Por lo tanto, no existen conjuntos abiertos y cerrados en $\boldsymbol{Y}$ que contengan a la componente K y que no intersecten a $Fr_{\boldsymbol{X}}\, U$. Debido al *Teorema 1.12* debe ocurrir que $K \cap Fr_{\boldsymbol{X}}\, U \neq \varnothing$. ■

1.14 Corolario. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo T_2 y B un subcontinuo propio de $\boldsymbol{X}$. Si V es una vecindad abierta de B en $\boldsymbol{X}$ entonces existe un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$, llámese K, tal que

$$B \subset K \subseteq V.$$

Demostración. Elíjase $p \in X \setminus B$. Ya que $\boldsymbol{X}$ es un espacio normal, B es cerrado en $\boldsymbol{X}$ y $B \subseteq V \setminus \{p\}$, existe un conjunto U abierto en $\boldsymbol{X}$ de manera que:

$$B \subseteq U \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, U \subseteq V \setminus \{p\} \subset X.$$

Sea K la componente conexa de $cl_{\boldsymbol{X}}\, U$ en $\boldsymbol{X}$ que contiene a B. Es claro que K es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$. Además, como U es un abierto propio de $\boldsymbol{X}$, $K \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$ en consecuencia del *Teorema 1.13.* Por tanto,

$$B \subset K \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, U \subseteq V \setminus \{p\} \subseteq V.$$

■

1.15 Corolario. Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo T_2, para cualesquiera B y L subcontinuos de $\boldsymbol{X}$ tales que $B \subset L$, se puede hallar un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$, nómbrese K, de manera que

$$B \subset K \subset L.$$

Demostración. Llámese $\boldsymbol{L}$ al subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre L y tómese $p \in L \setminus B$. Como B es un subcontinuo propio de $\boldsymbol{L}$ y $L \setminus \{p\}$ es una vecindad abierta de B en $\boldsymbol{L}$, es posible aplicar las hipótesis del *Corolario 1.14* para obtener un subcontinuo K de $\boldsymbol{L}$ el cual también resulta ser subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ y además cumple

$$B \subset K \subseteq L \setminus \{p\} \subset L.$$

■

§2 Conceptos en conexidad

1.16 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y $x \in X$.

(a) $\boldsymbol{X}$ es *conexo en pequeño* (también cik) en el punto x si admite un sistema fundamental de vecindades conexas de x, esto es, para cualquier V, vecindad de x en $\boldsymbol{X}$, es posible hallar C vecindad de x en $\boldsymbol{X}$ de manera que $C \subseteq V$ y C es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$. Así, $\boldsymbol{X}$ es *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

(b) $\boldsymbol{X}$ es *localmente conexo* en el punto x si admite una base local en x por conjuntos conexos, es decir, para cualquier V, vecindad de x en $\boldsymbol{X}$, es posible hallar U vecindad abierta de x en $\boldsymbol{X}$ de manera que $U \subseteq V$ y U es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$. Luego, $\boldsymbol{X}$ es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

1.17 TEOREMA. Para todo espacio topológico $\boldsymbol{X}$ son equivalentes:

(1) $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo,

(2) $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño,

(3) Las componentes de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ son conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$,

(4) $\boldsymbol{X}$ admite una base formada por conjuntos abiertos y conexos en $\boldsymbol{X}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue inmediatamente de las definiciones.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supóngase que $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño. Si U es conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ y K es una componente conexa de U en $\boldsymbol{X}$ entonces, para cada $x \in K$, U es una vecindad de x en $\boldsymbol{X}$ así que es posible hallar una vecindad conexa de x en $\boldsymbol{X}$, llámese C, tal que

$C \subseteq U$. Como K es una componente conexa de U en $\boldsymbol{X}$ debe ocurrir que $C \subseteq K$ y por tanto K también es una vecindad de x en $\boldsymbol{X}$. En consecuencia, K es abierto en $\boldsymbol{X}$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Sea U un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ y $x \in U$. Si C es la componente conexa de U en $\boldsymbol{X}$ que contiene al punto x entonces, por hipótesis, C es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ y $x \in C \subseteq U$. Así, la colección de conjuntos abiertos y conexos en $\boldsymbol{X}$ es un base para $\boldsymbol{X}$.

$(4) \Rightarrow (1)$ Si $\boldsymbol{X}$ posee una base β formada por conjuntos abiertos y conexos entonces, para cada $x \in X$, la colección de aquellos elementos de β que contienen al punto x es justamente una base local de $\boldsymbol{X}$ en x formada por conjuntos conexos. De aquí se sigue que $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo en cada uno de sus puntos. ■

1.18 Ejemplo. *El arco es un espacio localmente conexo.*

Obsérvese que los intervalos de la forma (a, b), $[0, b)$ y $(a, 1]$, con $0 < a < b < 1$, forman una base para $\boldsymbol{I}$. Ya que cada uno de estos conjuntos es conexo en $\boldsymbol{I}$, se sigue del *Teorema 1.17* que $\boldsymbol{I}$ es localmente conexo.

1.19 Proposición. La conexidad local es un invariante bajo funciones cociente. Por lo tanto, es un invariante bajo funciones continuas entre espacios Hausdorff compactos y bajo funciones continuas y abiertas.

Demostración. Sea $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ una función cociente entre espacios topológicos donde $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo. Supóngase que U es un conjunto abierto en $\boldsymbol{Y}$ y C es una componente conexa de U en $\boldsymbol{Y}$. Para cada $x \in f^{-1}[C]$, nómbrese C_x a la componente conexa de $f^{-1}[U]$ en $\boldsymbol{X}$ que contiene al punto x. Como $f[C_x]$ es conexo en $\boldsymbol{Y}$ y contiene a $f(x) \in C$ se sigue que $f[C_x] \subseteq C$. De esta manera, $x \in C_x \subseteq f^{-1}[C]$ para cada $x \in f^{-1}[C]$. Debido al *Teorema 1.17*, C_x es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ así que $f^{-1}[C]$ también es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$. Como $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función cociente se sigue que el conjunto C es un abierto en $\boldsymbol{Y}$ y por tanto $\boldsymbol{Y}$ es localmente conexo. ■

1.20 TEOREMA. Un producto no vacío de espacios topológicos no vacíos es localmente conexo cuando y sólo cuando cada uno de los factores es localmente conexo y todos salvo un número finito de éstos son conexos.

Demostración. Sea $\{\boldsymbol{X}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y supóngase que $\prod \boldsymbol{X}_\alpha$ es un espacio localmente conexo. Se observa que:

(i) Para cada $\beta \in \Lambda$, la proyección en la β-ésima coordenada $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha \to \boldsymbol{X}_\beta$ es una función suprayectiva, abierta y continua. Se sigue de la *Proposición 1.19* que el espacio $\boldsymbol{X}_\beta$ es localmente conexo.

(ii) Elíjase $f \in \times_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ y V una vecindad conexa de f en $\prod_{\alpha \in \Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$. Es posible hallar un básico canónico B de manera que

$$f \in B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq V,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y, para cada i desde 1 hasta n, $\alpha_i \in \Lambda$ y U_i es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}_{\alpha_i}$. Nótese que si $\alpha \in \Lambda$ y $\alpha \neq \alpha_i$ para cada i entre 1 y n entonces $\pi_\alpha[V] = X_\alpha$. Ya que V

es un conjunto conexo en $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$ se sigue que el espacio $\boldsymbol{X}_\alpha$ es conexo. Por lo tanto, $\{\alpha \in \Lambda \mid \boldsymbol{X}_\alpha \text{ no es conexo}\} \subseteq \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ y así todos salvo un número finito de los factores de $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$ son conexos.

Ahora se demostrará la afirmación recíproca. Si $\Gamma = \{\alpha \in \Lambda \mid \boldsymbol{X}_\alpha \text{ no es conexo}\} \subseteq \Lambda$ entonces, por hipótesis, $|\Gamma| < \aleph_0$. Dados $f \in \bigtimes_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y V vecindad de f en $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$ debe existir un básico canónico B tal que

$$f \in B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] \subseteq V,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y para cada i desde 1 hasta n, $\alpha_i \in \Lambda$ y U_i es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}_{\alpha_i}$. Como $f(\alpha_i) \in U_i$, existe un conjunto abierto y conexo en $\boldsymbol{X}_{\alpha_i}$, llámese V_i, tal que $f(\alpha_i) \in V_i \subseteq U_i$. Nótese que $|\Gamma \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}| < \aleph_0$ así que es posible indizar este conjunto como $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, con $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, con $n < i \leq m$, elíjase V_i vecindad abierta y conexa de $f(\alpha_i)$ en $\boldsymbol{X}_{\alpha_i}$. Se observa que

$$C = \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}[V_i] = \bigtimes_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$$

donde $C_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_i$ para cada i desde 1 hasta m y $C_\alpha = V_i$ si $\alpha = \alpha_i$ para algún i entre 1 y m. Ya que para todo $\alpha \in \Lambda$, C_α es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}_\alpha$ y la conexidad es una propiedad productiva, se tiene que C es un conjunto conexo en $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$. Luego,

$$f \in \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}[V_i] = C \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[V_i] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_i] = B.$$

Esto implica que C es una vecindad abierta y conexa de f en $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$ contenida en B y por tanto $\prod_{\alpha\in\Lambda} \boldsymbol{X}_\alpha$ es localmente conexo. ■

1.21 Proposición. Dado un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ y $x \in X$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño en el punto x.

(2) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ es posible hallar un conjunto C cerrado y conexo en $\boldsymbol{X}$ tal que $x, y \in C$ y $C \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon)$.

(3) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un conjunto C cerrado y conexo en $\boldsymbol{X}$ de manera que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \delta) \subseteq C \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Dado $\epsilon > 0$ se puede elegir una vecindad conexa de x en $\boldsymbol{X}$, llámese V, la cual se encuentra contenida en $B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2)$. Claramente $C = cl_{\boldsymbol{X}}\, V$ es un conjunto cerrado y conexo en $\boldsymbol{X}$. Además,

$$C = cl_{\boldsymbol{X}}\, V \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2) \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon).$$

Luego, como V es vecindad de x en $\boldsymbol{X}$ existe $\delta > 0$ tal que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \delta) \subseteq V$. De esta manera, dado $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ se tiene que $x, y \in V \subseteq C$ y $C \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que cada $y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ admite un conjunto C_y conexo y cerrado en $\boldsymbol{X}$, tal que $x, y \in C_y$ y $C_y \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2)$. Nótese que el conjunto

$$V = \bigcup_{y \in B_{\boldsymbol{X}}(x,\delta)} C_y$$

es conexo en $\boldsymbol{X}$ por ser la unión de una colección de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ cuya intersección es no vacía. Esto implica que $C = cl_{\boldsymbol{X}}\, V$ es un conjunto cerrado y conexo en $\boldsymbol{X}$. Luego, como $y \in C_y \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2)$ para cada $y \in B_{\boldsymbol{X}}(x, \delta)$, se sigue que

$$B_{\boldsymbol{X}}(x,\delta) \subseteq V \subseteq C = cl_{\boldsymbol{X}}\, V \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2) \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Si U es una vecindad de x en $\boldsymbol{X}$, escójase $\epsilon > 0$ de manera que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon) \subseteq U$. Por hipótesis, es posible hallar un conjunto C conexo y cerrado en $\boldsymbol{X}$ y un número real $\delta > 0$ tales que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \delta) \subseteq C \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon)$. Se sigue que C es una vecindad conexa de x en $\boldsymbol{X}$ y que $C \subseteq U$. Consecuentemente, $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño en el punto x. ■

1.22 Definición. Un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ tiene la *propiedad S* si dado cualquier $\epsilon > 0$, $\boldsymbol{X}$ se puede cubrir con un número finito de conjuntos, cada uno de los cuales es conexo en $\boldsymbol{X}$ y tiene diámetro menor que ϵ.

1.23 TEOREMA. Todo espacio metrizable con la propiedad S es localmente conexo.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio metrizable con la propiedad S y $x \in X$. Si U es una vecindad abierta de x en $\boldsymbol{X}$ se elige $\epsilon > 0$ tal que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon) \subseteq U$. Por hipótesis, existe una colección finita $\mathscr{C}$ formada por conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$, cada uno de los cuales tiene diámetro en $\boldsymbol{X}$ menor a ϵ y cuya unión es todo X. Se definen los conjuntos $\mathscr{D} = \{cl_{\boldsymbol{X}}\, C \mid C \in \mathscr{C} \text{ y } x \in cl_{\boldsymbol{X}}\, C\}$, $\mathscr{B} = \{cl_{\boldsymbol{X}}\, C \mid C \in \mathscr{C} \text{ y } x \notin cl_{\boldsymbol{X}}\, C\}$ y $V = \bigcup \mathscr{D}$. Obsérvese que $x \in \bigcap \mathscr{D}$ y cada elemento de $\mathscr{D}$ tiene diámetro en $\boldsymbol{X}$ menor a ϵ así que $x \in V \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon) \subseteq U$. Además, V es conexo en $\boldsymbol{X}$ por ser la unión de una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ con intersección no vacía. Luego, obsérvese que $\bigcup \mathscr{B}$ es cerrado en $\boldsymbol{X}$ por ser la unión de una colección finita de conjuntos cerrados en $\boldsymbol{X}$. Dado que $x \in X \setminus \bigcup \mathscr{B} \subseteq \bigcup \mathscr{D} = V$, entonces V es una vecindad conexa de x en $\boldsymbol{X}$ contenida en U y por tanto $\boldsymbol{X}$ es cik en x. Esto prueba que $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos y, en consecuencia, $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo. ■

1.24 TEOREMA. En la categoría **MComp**, la conexidad local implica la propiedad S.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio metrizable, compacto y localmente conexo y $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ es posible hallar un conjunto U_x abierto y conexo en $\boldsymbol{X}$ de manera que $x \in U_x \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon/2)$. Así, $\mathscr{C} = \{U_x\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de $\boldsymbol{X}$ formada por conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ con diámetro menor a ϵ. Dado que $\boldsymbol{X}$ es compacto, $\mathscr{C}$ admite una subcubierta finita la cual cumple las condiciones en la *Definición 1.22*. Por lo tanto, $\boldsymbol{X}$ posee la propiedad S. ■

1.25 Proposición. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio metrizable y $Y, Z \subseteq X$. Si Y tiene la propiedad S en $\boldsymbol{X}$ y $Y \subseteq Z \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, Y$ entonces Z posee la propiedad S en X.

Demostración. Ya que Y tiene la propiedad S en $\boldsymbol{X}$, para todo $\epsilon > 0$ existe una colección finita $\mathscr{C}$ de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ de manera que $Y = \bigcup \mathscr{C}$ y $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} C < \epsilon$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Defínase ahora $\mathscr{C}^* = \{Z \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, C\}_{C\in\mathscr{C}}$. Nótese que para cada $C \in \mathscr{C}$ ocurre que $C \subseteq Z \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, C \subseteq cl_{\boldsymbol{X}}\, C$ así que $\mathscr{C}^*$ también es una colección finita de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ cada uno de los cuales tiene un diámetro en $\boldsymbol{X}$ menor que ϵ. Luego,

$$\bigcup \mathscr{C}^* = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} (Z \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, C) = Z \cap \bigcup_{C\in\mathscr{C}} cl_{\boldsymbol{X}}\, C = Z \cap cl_{\boldsymbol{X}}\Big(\bigcup \mathscr{C}\Big) = Z \cap cl_{\boldsymbol{X}}\, Y = Z.$$

Se deduce que Z tiene la propiedad S en $\boldsymbol{X}$. ■

1.26 Definición. Dado un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ y $\epsilon > 0$, una *S(ϵ)-cadena* en $\boldsymbol{X}$ es una colección finita e indizada, $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$, formada por conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ de manera que $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} L_i < \epsilon/2^i$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $L_i \cap L_{i+1} \neq \varnothing$ para $i < n$. Cada elemento de $\mathscr{L}$ se denomina *eslabón* de la cadena. Además, dados $x, y \in X$, se dirá que *$\mathscr{L}$ va de x a y* si $x \in L_1$ y $y \in L_n$.

Luego, para cada $A \subseteq X$ y $\epsilon > 0$ se define:

$$S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon) = \{y \in X \mid \text{Existe una S}(\epsilon)\text{-cadena en } \boldsymbol{X} \text{ que va de algún punto de } A \text{ a } y\}.$$

1.27 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio metrizable con la propiedad S, entonces, para cada $A \subseteq X$, con $A \neq \varnothing$ y cualquier $\epsilon > 0$, el conjunto $S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$ posee la propiedad S en $\boldsymbol{X}$.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Elíjase $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2^{k-1}} < \delta/4.$$

Se define K como el conjunto de puntos $x \in X$ que admiten una S(ϵ)-cadena en $\boldsymbol{X}$ que va de algún punto de A a x y que tenga a lo más k eslabones. Ya que $A \subseteq K$ el conjunto K es no vacío. Ahora, como $\boldsymbol{X}$ tiene la propiedad S se le puede hallar una cubierta finita formada por conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ de diámetro menor que $\epsilon/2^{k+1} > 0$. Si $C_1, \ldots, C_n$ son los elementos de esta cubierta que intersectan a K entonces se tiene que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Luego, considérese i entre 1 y n. Elíjanse un punto $p \in C_i \cap K$ y una S(ϵ)-cadena en $\boldsymbol{X}$, nómbrese $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots, L_m\}$, de manera que $\mathscr{L}$ va de algún punto de A hasta p y $m \leq k$. Debido a que $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} C_i < \epsilon/2^{k+1} \leq \epsilon/2^{m+1}$, basta con definir $L_{m+1} = C_i$ para que $\mathscr{L}' = \{L_1, \ldots, L_{m+1}\}$ sea una S(ϵ)-cadena en $\boldsymbol{X}$ que va de algún punto de A hasta cada punto de C_i. Esto implica que $C_i \subseteq S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$.

Denótese por $\mathcal{P}_i$ a la colección de todos los conjuntos $M \subseteq X$ que satisfacen:

(1) $M \subseteq S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$,

(2) $M \cap C_i \neq \varnothing$,

(3) M es conexo en $\boldsymbol{X}$,

(4) $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} M < \delta/4$.

Es claro que, para cada i desde 1 hasta n, $C_i \in \mathcal{P}_i$. Definiendo $B_i = \bigcup \mathcal{P}_i$ se tiene que:

(i) El conjunto B_i es conexo en $\boldsymbol{X}$ por ser unión de una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ cada uno de los cuales intersecta a un mismo elemento de la familia.

(ii) De la misma afirmación del inciso (i) se puede deducir que

$$\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} B_i \leq \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} C_i + 2 \sup_{M \in \mathcal{P}_i} (\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} M) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} + 2\left(\frac{\delta}{4}\right) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

(iii) Para cada $x \in S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$ existe una S(ϵ)-cadena en $\boldsymbol{X}$, llámese $\mathscr{L} = \{L_1, \ldots. L_m\}$, que va de algún punto de A a x. Si $m \leq k$ entonces $x \in K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Nótese que $C_i \subseteq B_i$ pues $C_i \in \mathcal{P}_i$ así que $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Si $m > k$ entonces defínase $H = \bigcup_{j=k}^{m} L_j$. Debido a que $L_k \subseteq K$ entonces $L_k \cap C_j \neq \varnothing$ para algún j entre 1 y n. Se demostrará que $H \subseteq B_j$ verificando que H satisface las condiciones (1)-(4).

Por definición, $H \subseteq \bigcup \mathscr{L} \subseteq S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$. Además, $L_k \subseteq H$ y $L_k \cap C_j \neq \varnothing$ así que H debe cumplir (2). Luego, H también cumple (3) pues es la unión de una cadena de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$. De este último argumento se tiene que:

$$\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} H \leq \sum_{j=k}^{m} \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} L_j < \sum_{j=k}^{m} \frac{\epsilon}{2^j} < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} < \delta/4,$$

lo cual demuestra que H satisface (4). Como $x \in L_m \subseteq H$ se tiene entonces que $x \in B_j$. Por tanto, se ha probado que $S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Finalmente, la condición (1) implica que $B_i \subseteq S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$ para cada i desde 1 hasta n y en consecuencia $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$.

De los incisos (i)-(iii) se deduce que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ es una cubierta finita de $S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$ formada por conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ con diámetro menor a δ. Por lo tanto, el conjunto $S_{\boldsymbol{X}}(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S en $\boldsymbol{X}$. ■

1.28 TEOREMA. Todo continuo puede obtenerse mediante la intersección anidada de continuos localmente conexos.

Demostración. Dado un continuo $\boldsymbol{X}$, existe un espacio $\boldsymbol{Y}$ que es homeomorfo al cubo de Hilbert y que contiene a $\boldsymbol{X}$ como subespacio (véase [2, Teorema 4.2.10, p.260]). Del *Ejemplo 1.18* y el *Teorema 1.20* se sigue que $\boldsymbol{\Omega}$ es un continuo localmente conexo, por lo cual $\boldsymbol{Y}$ también es un continuo localmente conexo. Luego, por el *Teorema 1.24*, $\boldsymbol{Y}$ tiene la propiedad S. Dado que el conjunto X es conexo en $\boldsymbol{Y}$ se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_{\boldsymbol{Y}}(X, \frac{1}{n})$ también es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$. De esta forma, $X_n = \boldsymbol{cl_Y}\, S_{\boldsymbol{Y}}(X, \frac{1}{n})$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{Y}$. Además, de las *Proposiciones 1.27* y *1.25* se deduce que X_n tiene la propiedad S en $\boldsymbol{Y}$. Aplicando el *Teorema 1.23* se obtiene que X_n es un continuo localmente conexo en $\boldsymbol{Y}$. Se demostrará que

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Claramente $X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, así que resta probar la otra inclusión. Dado $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\epsilon > 0$ se elige $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon/2$. Como $y \in X_n = \boldsymbol{cl_Y}\, S_{\boldsymbol{Y}}(X, \frac{1}{n})$, es posible hallar

$x \in S_{\boldsymbol{Y}}(X, \frac{1}{n})$ tal que $d(x, y) < \epsilon/2$. Luego, por la definición de $S_{\boldsymbol{Y}}(X, \frac{1}{n})$, existe un punto $x_0 \in X$ y una S($\frac{1}{n}$)-cadena en $\boldsymbol{Y}$, llámese $\mathscr{L}$, que va de x_0 a x. Así,

$$d(x_0, x) \leq \text{diam}_{\boldsymbol{Y}} \bigcup \mathscr{L} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/n}{2^k} = \frac{1}{n} < \epsilon/2,$$

y por lo tanto $d(X, y) \leq d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < \epsilon$, para cada $\epsilon > 0$. Esto implica que $d(X, y) = 0$ y así $y \in X$. Se concluye que $\boldsymbol{X}$ es la intersección de una sucesión anidada de continuos localmente conexos. ■

1.29 Definición. Un espacio topológico es una *trayectoria* si es imagen continua de $\boldsymbol{I}$ y es un *arco* si es homeomorfo a $\boldsymbol{I}$.

1.30 Observación. (1) Cualquier arco es una trayectoria, pero una trayectoria no necesariamente es un arco. Por ejemplo, $\mathbf{S}^1$ es una trayectoria pues la función $f : \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^1$ definida por:

$$\forall t \in I : f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$$

es continua y suprayectiva. No obstante, es claro que $\mathbf{S}^1$ no es un arco.
(2) Toda trayectoria es un espacio conexo y compacto. Más aún, se puede deducir de las *Proposiciones 1.4 y 1.19* y el *Ejemplo 1.18* que en la categoría **Haus**, las trayectorias son continuos localmente conexos.

1.31 Definición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico.

(a) $\boldsymbol{X}$ es *conexo por trayectorias* si para cada par de puntos del espacio es posible hallar una trayectoria en $\boldsymbol{X}$ que los contiene a ambos.

(b) $\boldsymbol{X}$ es *conexo por arcos* o *arco conexo* si dados cualesquiera dos puntos del espacio existe un arco en $\boldsymbol{X}$ que los contiene a ambos.

1.32 Observación. (1) Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio no vacío y conexo por trayectorias entonces es conexo. Elíjase $x_0 \in X$ y para cada $x \in X$ hállese una trayectoria en $\boldsymbol{X}$, E_x, la cual contenga a x y a x_0. De esta manera, $X = \bigcup_{x \in X} E_x$ donde $\{E_x\}_{x \in X}$ es una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ que tiene intersección no vacía. Esto implica que $\boldsymbol{X}$ es conexo.
(2) Por la *Observación 1.30 (1)*, todo espacio arco conexo es conexo por trayectorias.

1.33 Ejemplo. *La conexidad por trayectorias no implica arco conexidad.*

Sea $\boldsymbol{X}$ el espacio construido sobre el conjunto $X = \{0, 1\}$ donde los únicos conjuntos abiertos y no vacíos son $\{0\}$ y X. Se define la función $f : I \to X$ como:

$$\forall t \in I : f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que $f : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ es una función continua y suprayectiva así que $\boldsymbol{X}$ es una trayectoria y en consecuencia es un espacio conexo por trayectorias. No obstante, $\boldsymbol{X}$ no es arco conexo pues al ser un espacio finito no puede contener ninguna copia topológica del arco que tenga a los puntos 0 y 1.

1.34 Proposición. Dado un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ se cumple que:

(a) $\boldsymbol{X}$ es conexo por trayectorias si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe una función continua $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

(b) $\boldsymbol{X}$ es arco conexo si y sólo si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ es posible hallar una inmersión $\alpha : \boldsymbol{I} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Demostración. La suficiencia en ambos incisos es clara ya que la imagen de la función α determina una trayectoria en el primer caso y un arco en el segundo. Resta demostrar la necesidad.

(a) Si $\boldsymbol{X}$ es conexo por trayectorias, para cualesquiera $x, y \in X$ es posible hallar una trayectoria en $\boldsymbol{X}$, llámese Z, de manera que $x, y \in Z$. Tómese la función inclusión $\imath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ del subespacio $\boldsymbol{Z}$ en $\boldsymbol{X}$. Como $\boldsymbol{Z}$ es una trayectoria se puede elegir una función $f : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Z}$ que sea continua y suprayectiva. Luego, selecciónense $t_0, s_0 \in I$ tales que $x = f(t_0)$ y $y = f(s_0)$, y defínase $\varphi : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ como $\varphi(t) = (s_0 - t_0)t + t_0$ para cada $t \in I$. De esta manera, la función $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ dada por $\alpha = \imath \circ f \circ \varphi$ es continua y cumple que $\alpha(0) = f(\varphi(0)) = f(t_0) = x$ y $\alpha(1) = f(\varphi(1)) = f(s_0) = y$.

(b) En este caso se procede de modo similar al inciso (a) pero ahora Z es un arco en $\boldsymbol{X}$ y $f : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Z}$ es un homeomorfismo. Dado que x y y son puntos distintos, necesariamente ocurre que $t_0 \neq s_0$. Así, de la definición de φ se sigue que $\varphi : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ es una inmersión. Finalmente, como $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ es composición de inmersiones se tiene que $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ es una inmersión. ■

1.35 TEOREMA (de Arco conexidad). Todo subespacio abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo.

Demostración. Véase [6, Teorema 8.26, p.132]. ■

1.36 Corolario. Todo continuo localmente conexo es arco conexo.

1.37 TEOREMA. En la categoría **Haus**, la conexidad por trayectorias es equivalente a la arco conexidad.

Demostración. En vista de la *Observación 1.32 (2)*, sólo resta probar que conexidad por trayectorias implica arco conexidad. Dado un espacio $\boldsymbol{X}$ conexo por trayectorias y dos puntos distintos $x, y \in X$, es posible hallar una trayectoria $\boldsymbol{Z}$, subespacio de $\boldsymbol{X}$, que contiene a ambos puntos. Más aún, la *Observación 1.30.(2)* implica que $\boldsymbol{Z}$ es un continuo localmente conexo. Así, como x y y son puntos distintos de $\boldsymbol{Z}$, se aplica el *Corolario 1.36* para obtener un arco en $\boldsymbol{Z}$, el cual también es un arco en $\boldsymbol{X}$, que contiene a los puntos x y y. Se concluye que $\boldsymbol{X}$ es arco conexo. ■

§3 Retractos y extensores

1.38 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos, $\boldsymbol{Z}$ un subespacio de $\boldsymbol{X}$ e $\imath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ su respectiva función inclusión. Si $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ y $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ son funciones continuas, se dirá que F *extiende continuamente* la función f a $\boldsymbol{X}$ o que F es una *extensión continua* de f a $\boldsymbol{X}$ si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[dr, "F"] & \\ \boldsymbol{Z} \arrow[u, hook, "\imath"] \arrow[r, "f"'] & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd} \qquad F \circ \imath = f.$$

1.39 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y $\boldsymbol{Y}$ un subespacio de $\boldsymbol{X}$. Se dirá que $\boldsymbol{Y}$ es un *retracto* de $\boldsymbol{X}$ si existe una extensión continua a $\boldsymbol{X}$ de la función $id\,Y : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$. A dicha extensión continua se le nombra *retracción* de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$.

1.40 Observación. Es fácil ver de la definición anterior que $\boldsymbol{Y}$ es un retracto de $\boldsymbol{X}$ si y sólo si la función inclusión $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ admite una inversa izquierda continua. De esta manera, toda retracción de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$ es una retracción en **Top** en el sentido categórico.

1.41 Proposición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos. Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una retracción en la categoría **Top** entonces $\boldsymbol{X}$ posee un retracto homeomorfo a $\boldsymbol{Y}$.

Demostración. Elíjase una función continua $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ tal que $f \circ g = id\,Y$. Si $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $\widetilde{Y} = g[Y]$ e $\imath : \widetilde{\boldsymbol{Y}} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ es su respectiva función inclusión entonces existe una única función continua $h : \boldsymbol{Y} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

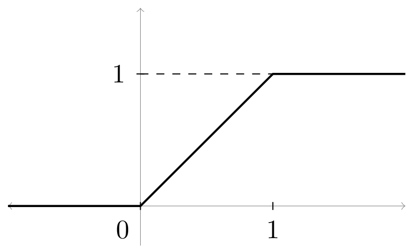
$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "h"'] & \widetilde{\boldsymbol{Y}} \arrow[u, hook, "\imath"'] \end{tikzcd} \qquad \imath \circ h = g.$$

Si se define $\widetilde{h} : \widetilde{\boldsymbol{Y}} \to \boldsymbol{Y}$ como $\widetilde{h} = f \circ \imath$ entonces, $\widetilde{h}h = (f\imath)h = f(\imath h) = fg = id\,Y$. Nótese que $h : \boldsymbol{Y} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un epimorfismo en **Top** por ser una función suprayectiva. Así, como $(h\widetilde{h})h = h(\widetilde{h}h) = h = (id\,\widetilde{Y})h$ se sigue que $h\widetilde{h} = id\,\widetilde{Y}$. Esto implica que $h : \boldsymbol{Y} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un homeomorfismo. Además, definiendo $r : \boldsymbol{X} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ como $r = h \circ f$ se tiene que $r\imath = (hf)\imath = h(f\imath) = h\widetilde{h} = id\,\widetilde{Y}$. En consecuencia, $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un retracto de $\boldsymbol{X}$ homeomorfo a $\boldsymbol{Y}$. ■

1.42 Ejemplo. *El arco $\boldsymbol{I}$ es un retracto de* $\mathbf{R}$.

Considérese la función continua $r : \mathbf{R} \to \boldsymbol{I}$ definida como:

$$\forall x \in \mathbb{R} : r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$



Claramente, $r : \mathbf{R} \to \boldsymbol{I}$ es una retracción pues $r(x) = x$ para todo $x \in I$.

1.43 Proposición. Todo retracto de un espacio Hausdorff es un subespacio cerrado.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico, $\boldsymbol{Y}$ un subespacio de $\boldsymbol{X}$, $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ su función inclusión y $r : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ una retracción de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$. Dado $x \in X$ se tiene que $r(x) = x$ si y sólo si $x \in Y$, por lo cual Y es el conjunto donde coinciden las funciones continuas $id\, X, \imath r \colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$. Suponiendo que $\boldsymbol{X}$ es un espacio de Hausdorff, Y es necesariamente un conjunto cerrado en $\boldsymbol{X}$. ■

1.44 Definición. Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ tiene la *propiedad del punto fijo* si cualquier función continua $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ admite un punto fijo, esto es, un punto $x \in X$ de manera que $f(x) = x$.

1.45 Proposición. La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos. Supóngase que $\boldsymbol{X}$ tiene la propiedad del punto fijo y que existe un homeomorfismo $h : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Dada una función continua $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ se define $f' : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ como $f' = h^{-1} \circ f \circ h$. Es claro que la función $f' : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ también es continua así que, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $f'(x) = x$. Por lo tanto, si $y = h(x)$ entonces

$$f(y) = f(h(x)) = h(h^{-1}(f(h(x)))) = h(f'(x)) = h(x) = y.$$

En consecuencia, $\boldsymbol{Y}$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

1.46 TEOREMA (del Punto Fijo de Brouwer). Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Véase [9, Teorema 3.3, p.243]. ■

1.47 Ejemplo. *La esfera n-dimensional $\mathbf{S}^n$ no posee la propiedad del punto fijo.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ dada por:

$$\forall \boldsymbol{x} \in S^n : f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x},$$

es una función continua que no admite puntos fijos.

1.48 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio con la propiedad del punto fijo y $\boldsymbol{Y}$ es un retracto de $\boldsymbol{X}$ entonces $\boldsymbol{Y}$ también tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ la respectiva función inclusión y elíjase una retracción $r : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Para cada función continua $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ defínase $f' : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ como $f' = \imath \circ f \circ r$. Por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $f'(x) = x$. Así, como $x = f(x) \in Y$ se sigue que $r(x) = x$. Por lo tanto, $f(x) = f(r(x)) = f'(x) = x$, es decir, x es un punto fijo de la función $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$. Conclúyase que $\boldsymbol{Y}$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

1.49 Definición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico y $\boldsymbol{Y}$ es un subespacio de $\boldsymbol{X}$, se dirá que $\boldsymbol{Y}$ es un *retracto de vecindad* en $\boldsymbol{X}$ si $\boldsymbol{Y}$ es retracto de algún subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$.

1.50 Observación. Todo retracto de $\boldsymbol{X}$ es un retracto de vecindad en $\boldsymbol{X}$.

1.51 Ejemplo. *La esfera n-dimensional $\mathbf{S}^n$ es un retracto de vecindad en $\mathbf{D}^{n+1}$.*

Llámese $\boldsymbol{Z}$ al subespacio de $\mathbf{D}^{n+1}$ inducido sobre $D^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. Claramente, $\boldsymbol{Z}$ es un subespacio abierto de $\mathbf{D}^{n+1}$. Luego, defínase la función continua $r : \boldsymbol{Z} \to \mathbf{S}^n$ como:

$$\forall \boldsymbol{x} \in D^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\} : r(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Dado $x \in S^n$ se tiene que $r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ por lo cual r es una retracción de $\boldsymbol{Z}$ en $\mathbf{S}^n$.

1.52 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos y $\boldsymbol{Z}$ un subespacio cerrado en $\boldsymbol{X}$.

(a) $\boldsymbol{Z}$ tiene la *propiedad de extensión* en $\boldsymbol{X}$ respecto de $\boldsymbol{Y}$ si cualquier función continua $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ admite una extensión continua a $\boldsymbol{X}$.

(b) $\boldsymbol{Z}$ tiene la *propiedad de extensión de vecindad* en $\boldsymbol{X}$ respecto de $\boldsymbol{Y}$ si toda función continua de $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{Y}$ puede extenderse continuamente a algún subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contenga a $\boldsymbol{Z}$.

1.53 Observación. (1) El subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ mencionado en el inciso (b) de la *Definición 1.52* puede depender de la función continua a extender.
(2) Si $\boldsymbol{Z}$ tiene la propiedad de extensión en $\boldsymbol{X}$ respecto de $\boldsymbol{Y}$, también tiene la propiedad de extensión de vecindad en $\boldsymbol{X}$ respecto de $\boldsymbol{Y}$.

1.54 Definición. Sea $\boldsymbol{Y}$ un espacio topológico metrizable. $\boldsymbol{Y}$ es un *extensor (de vecindad) absoluto* si cualquier conjunto cerrado en un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ posee la propiedad de extensión (de vecindad) en $\boldsymbol{X}$ respecto de $\boldsymbol{Y}$.

Los conceptos *extensor absoluto* y *extensor de vecindad absoluto* se abreviarán como AE y ANE respectivamente por sus siglas en el idioma inglés (Absolute Extensor y Absolute Neighborhood Extensor).

1.55 Observación. Se sigue de la *Observación 1.53 (2)* que todo AE es un ANE.

1.56 Ejemplo. *El arco $\boldsymbol{I}$ es un AE.*

Esto es consecuencia del Teorema de Extensión de Tietze [4, Teorema O, p.242] y del hecho de que todo espacio metrizable es normal.

1.57 Proposición. Ser un AE y ser un ANE son propiedades topológicas.

Demostración. Sean $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Y}'$ espacios topológicos y $h : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ un homeomorfismo. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio metrizable, $\boldsymbol{Z}$ un subespacio cerrado de $\boldsymbol{X}$ y $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ una función continua, entonces $f' = hf : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}'$ es también una función continua.

(a) Suponiendo que $\boldsymbol{Y}'$ es un AE, existe una función continua $F' : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}'$ que extiende a f'. Así, definiendo $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ como $F = h^{-1} \circ F'$ se cumple que

$$F\imath = (h^{-1}F')\imath = h^{-1}(F'\imath) = h^{-1}f' = h^{-1}(hf) = (h^{-1}h)f = f.$$

Por lo tanto, F es una extensión continua de f a $\boldsymbol{X}$.
(b) Ahora, si $\boldsymbol{Y}'$ es un ANE, existe un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$, llámese $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$, y una función continua $F' : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \boldsymbol{Y}'$ que extiende a f' a través de la inclusión $\jmath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \widetilde{\boldsymbol{Z}}$. Es fácil verificar que la función $F : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \boldsymbol{Y}$ dada por $F = h^{-1} \circ F'$ es una extensión continua de f, en este caso, a la vecindad $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$. De lo anterior se concluye que $\boldsymbol{Y}$ es un AE o un ANE siempre que $\boldsymbol{Y}'$ lo sea. ∎

1.58 TEOREMA. La propiedad de ser un AE es numerablemente productiva mientras que la propiedad de ser un ANE es finitamente productiva.

Demostración. En ambos casos de la prueba, $\boldsymbol{X}$ es un espacio metrizable, $\boldsymbol{Z}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{X}$ e $\imath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ es su respectiva función inclusión.

(a) Sea $\{\boldsymbol{Y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos metrizables y supóngase que cada uno de ellos es un AE. Se observa que $\prod_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_n$ también es un espacio metrizable por ser un producto numerable de espacios metrizables. Si $f : \boldsymbol{Z} \to \prod_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_n$ es una función continua y, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_n \to \boldsymbol{Y}_m$ es la m-ésima función proyección entonces la función $f_m : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}_m$ definida como $f_m = \pi_m \circ f$ es continua. Como $\boldsymbol{Y}_m$ es un AE, existe una función $F_m : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_m$ que extiende continuamente a f_m. Ahora, se define $F : \boldsymbol{X} \to \prod_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{Y}_n$ como:

$$\forall x \in X : F(x) = (F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Debido a que $\pi_m \circ F = F_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $F : \boldsymbol{X} \to \prod_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_n$ es continua. Además, para todo $m \in \mathbb{N}$ ocurre que $\pi_m(F\imath) = (\pi_m F)\imath = F_m\imath = f_m = \pi_m f$. Así, $F \circ \imath = f$, es decir, F es una extensión continua de f a $\boldsymbol{X}$. Esto implica que $\prod_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_n$ es un AE.

(b) Sean $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$ espacios topológicos metrizables, cada uno de los cuales es un ANE. Nótese nuevamente que $\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i$ también es un espacio metrizable. Si $f : \boldsymbol{Z} \to \prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i$ es una función continua y, para cada k entre 1 y n, $\pi_k : \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i \to \boldsymbol{Y}_k$ es la proyección en la k-ésima coordenada entonces la función $f_k : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}_k$ definida como $f_k = \pi_k \circ f$ es continua. Dado que $\boldsymbol{Y}_k$ es un ANE, es posible hallar un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contiene a $\boldsymbol{Z}$, nómbrese $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_k$, y una función continua $F_k : \widetilde{\boldsymbol{Z}}_k \to \boldsymbol{Y}_k$ que extiende la función f_k a $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_k$. Si $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ es el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $\widetilde{Z} = \bigcap_{i=1}^{n}\widetilde{Z}_i$ entonces $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ es un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contiene a $\boldsymbol{Z}$. Así, para todo k desde 1 hasta n, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de funciones inclusión:

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{\boldsymbol{Z}}_k \\
\boldsymbol{Z} \arrow[ur, hook, "\jmath_k"] \arrow[r, hook, "\jmath"'] & \widetilde{\boldsymbol{Z}} \arrow[u, hook, "\imath_k"']
\end{tikzcd} \qquad \imath_k \circ \jmath = \jmath_k.$$

Para cada k entre 1 y n se define $F'_k : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \boldsymbol{Y}_k$ como $F'_k = F_k \circ \imath_k$ y $F : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i$ como:

$$\forall z \in \widetilde{Z} : F(z) = (F'_1(z), \ldots, F'_n(z)).$$

Es claro que $F : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i$ es una función continua pues, para cualquier k desde 1 hasta n, $\pi_k \circ F = F'_k$. Más aún, se tiene que

$$\pi_k(F\jmath) = (\pi_k F)\jmath = (F_k\imath_k)\jmath = F_k(\imath_k\jmath) = F_k\jmath_k = f_k = \pi_k f,$$

lo cual implica que $F \circ \jmath = f$, esto es, F es una extensión continua de la función f a $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$. En consecuencia, $\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{Y}_i$ es un ANE. ■

1.59 TEOREMA. El cubo de Hilbert $\mathfrak{Q}$, la celda n-dimensional $\boldsymbol{I}^n$ y la bola n-dimensional $\mathbf{D}^n$ son extensores absolutos.

Demostración. Dado que $\boldsymbol{I}$ es un AE, se deduce del *Teorema 1.58* que $\mathfrak{Q} = \boldsymbol{I}^{\aleph_0}$ es un AE y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{I}^n$ es un AE. Luego, como $\mathbf{D}^n$ es homoemorfo a $\boldsymbol{I}^n$ se sigue que $\mathbf{D}^n$ también es un AE. ■

1.60 Proposición. Todo retracto de un AE es un AE y todo retracto de vecindad de un ANE es un ANE.

Demostración. En ambos casos de la prueba $\boldsymbol{X}$ y $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ son espacios metrizables, $\boldsymbol{Z}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ un subespacio de $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$, $\imath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ y $\jmath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ son las respectivas funciones inclusión.

(a) Supóngase que $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un AE y que existe una retracción $r : \widetilde{\boldsymbol{Y}} \to \boldsymbol{Y}$. Dado que $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un AE, para cada función continua $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ existe una función $\widetilde{F} : \boldsymbol{X} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ que extiende continuamente a la función $\widetilde{f} : \boldsymbol{Z} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$, definida como $\widetilde{f} = \jmath \circ f$. Definiendo $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ como $F = r \circ \widetilde{F}$ se tiene que

$$F\jmath = (r\widetilde{F})\jmath = r(\widetilde{F}\jmath) = r\widetilde{f} = r(\jmath f) = (r\jmath)f = f,$$

por lo cual F es una extensión continua de f a $\boldsymbol{X}$. Conclúyase que $\boldsymbol{Y}$ es un AE.

(b) Ahora se supondrá que $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un ANE y que existe una retracción $r : \widetilde{\boldsymbol{Y}}' \to \boldsymbol{Y}$, donde $\widetilde{\boldsymbol{Y}}'$ es un subespacio abierto de $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ que contiene a $\boldsymbol{Y}$. Como $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es un ANE, dada cualquier función continua $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ es posible hallar un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contiene a $\boldsymbol{Z}$, llámese $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$, y una función $\widetilde{F} : \widetilde{\boldsymbol{Z}} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ que extiende continuamente a la función $\widetilde{f} : \boldsymbol{Z} \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ dada por $\widetilde{f} = \jmath \circ f$. Sea $\widetilde{\boldsymbol{Z}}'$ el subespacio de $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ inducido sobre el conjunto abierto $\widetilde{Z}' = \widetilde{F}^{-1}[\widetilde{Y}']$. Nótese que $\widetilde{F}[Z] = f[Z] \subseteq Y \subseteq \widetilde{Y}'$ por lo cual $Z \subseteq \widetilde{Z}'$. Se obtienen los siguientes diagramas conmutativos de funciones inclusión:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\boldsymbol{Z}} \\ \boldsymbol{Z} \arrow[ur, hook, "k"] \arrow[r, hook, "k'"'] & \widetilde{\boldsymbol{Z}}' \arrow[u, hook, "\widetilde{k}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \widetilde{\boldsymbol{Y}} \\ \boldsymbol{Y} \arrow[ur, hook, "\jmath"] \arrow[r, hook, "\jmath'"'] & \widetilde{\boldsymbol{Y}}' \arrow[u, hook, "\widetilde{\jmath}"'] \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{k} \circ k' = k, \qquad \widetilde{\jmath} \circ \jmath' = \jmath.$$

Como $\widetilde{F}[\widetilde{Z}'] \subseteq \widetilde{Y}'$, existe una única función $\widetilde{F}' : \widetilde{\boldsymbol{Z}}' \to \widetilde{\boldsymbol{Y}}'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\boldsymbol{Z}} \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \widetilde{\boldsymbol{Y}} \\ \widetilde{\boldsymbol{Z}}' \arrow[u, hook, "\widetilde{k}"] \arrow[r, "\widetilde{F}'"'] & \widetilde{\boldsymbol{Y}}' \arrow[u, hook, "\widetilde{\jmath}"'] \end{tikzcd} \qquad \widetilde{F} \circ \widetilde{k} = \widetilde{\jmath} \circ \widetilde{F}'.$$

Así, se tiene que

$$\widetilde{\jmath}(\widetilde{F}'k') = (\widetilde{\jmath}\widetilde{F}')k' = (\widetilde{F}\widetilde{k})k' = \widetilde{F}(\widetilde{k}k') = \widetilde{F}k = \widetilde{f} = \jmath f = (\widetilde{\jmath}\jmath')f = \widetilde{\jmath}(\jmath' f).$$

Dado que $\widetilde{\jmath} : \widetilde{\boldsymbol{Y}}' \hookrightarrow \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ es monomorfismo en **Top** se sigue que $\widetilde{F}'k' = \jmath' f$. De esta forma, si define $F : \widetilde{\boldsymbol{Z}}' \to \boldsymbol{Y}$ como $F = r\widetilde{F}'$ entonces

$$Fk' = (r\widetilde{F}')k' = r(\widetilde{F}'k') = r(\jmath' f) = (r\jmath')f = f.$$

Por lo tanto, F es extensión continua de f a un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contiene a $\boldsymbol{Z}$. Esto demuestra que $\boldsymbol{Y}$ es un ANE. ■

1.61 TEOREMA. La esfera n-dimensional $\mathbf{S}^n$ es un ANE pero no es un AE.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue del *Ejemplo 1.51*, del *Teorema 1.59* y de la *Proposición 1.60* que $\mathbf{S}^n$ es un ANE. Luego, como $\mathbf{D}^{n+1}$ tiene la propiedad del punto fijo (*Teorema 1.46*) pero $\mathbf{S}^n$ no la tiene (*Ejemplo 1.47*) se sigue del *Teorema 1.48* que $\mathbf{S}^n$ no es un retracto de $\mathbf{D}^{n+1}$, es decir, no es posible extender continuamente la función $id\, S^n : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ a $\mathbf{D}^n$. En consecuencia, $\mathbf{S}^n$ no es un AE. ■

1.62 TEOREMA. Cualquier espacio metrizable se puede encajar en un AE como un subespacio cerrado.

Demostración. Este resultado es consecuencia del *Teorema de Eilenberg-Wojdyslawski* [8, Lema 1.2.3, p.8] y el *Teorema de Extensión de Dugundji* [8, Teorema 1.4.13, p.38]. ■

1.63 Definición. Un espacio metrizable $\boldsymbol{Y}$ es un *retracto (de vecindad) absoluto* si todo espacio homeomorfo a $\boldsymbol{Y}$ que sea subespacio cerrado de algún espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ es necesariamente un retracto (de vecindad) de $\boldsymbol{X}$.

Se usarán las siglas AR y ANR (del inglés Absolute Retract y Absolute Neighborhood Retract) para abreviar *retracto absoluto* y *retracto de vecindad absoluto.*

1.64 Observación. La *Observación 1.50* implica que todo AR es un ANR.

1.65 TEOREMA. Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ es un AE (ANE) si y sólo si es un AR (ANR).

Demostración. Primero se demuestra la necesidad en ambos casos. Para esto considérese un espacio topológico $\boldsymbol{Y}$ y un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$ que posea un subespacio cerrado homeomorfo a $\boldsymbol{Y}$, llámese $\boldsymbol{Y}'$. Por la *Proposición 1.57,* si $\boldsymbol{Y}$ es un AE entonces $\boldsymbol{Y}'$ también es un AE y así la función $id\, Y' : \boldsymbol{Y}' \to \boldsymbol{Y}'$ admite una extensión continua a $\boldsymbol{X}$. De esta manera, $\boldsymbol{Y}'$ es un retracto de $\boldsymbol{X}$. En el caso en que $\boldsymbol{Y}$ es un ANE se emplea un argumento similar para obtener una extensión continua de $id\, Y' : \boldsymbol{Y}' \to \boldsymbol{Y}'$ a un subespacio abierto de $\boldsymbol{X}$ que contiene a $\boldsymbol{Y}$. Por tanto $\boldsymbol{Y}'$ es retracto de dicho subespacio abierto lo que significa que $\boldsymbol{Y}'$ es un retracto de vecindad en $\boldsymbol{X}$.

Ahora, para la suficiencia, nótese que en ambos casos $\boldsymbol{Y}$ es un espacio metrizable, así que por el *Teorema 1.62,* $\boldsymbol{Y}$ es un subespacio cerrado de algún AE. Dado que $\boldsymbol{Y}$ es un AR (ANR, respectivamente) se sigue que $\boldsymbol{Y}$ es retracto (retracto de vecindad, en el otro caso) de un AE. De la *Proposición 1.60* se deduce que $\boldsymbol{Y}$ es un AE (ANE). ■

§4 Homotopía y conctractibilidad

1.66 TEOREMA. Es posible definir un funtor Cil : **Top** $\to$ **Top** de la siguiente manera,
(a) Para cada espacio $\boldsymbol{X} \in$ Ob **Top**, $\mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}$,
(b) Para cada $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \in$ Mor **Top**, $\mathrm{Cil}(f) = f \times id\, I : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{I}$.

Demostración. Obsérvese que:
(i) Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico,

$$\forall x \in X, t \in I : \mathrm{Cil}(id\, X)(x,t) = (id\, X \times id\, I)(x,t) = (x,t).$$

Por tanto, $\mathrm{Cil}(id\, X) = id\, \mathrm{Cil}(X)$.
(ii) Dadas $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ y $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ funciones continuas se tiene que,

$$\begin{aligned}\forall x \in X, t \in I : \mathrm{Cil}(g)\,\mathrm{Cil}(f)(x,t) &= (g \times id\, I)(f \times id\, I)(x,t) = (g \times id\, I)(f(x),t)\\ &= (gf(x),t) = (gf \times id\, I)(x,t) = \mathrm{Cil}(gf)(x,t).\end{aligned}$$

De aquí que $\mathrm{Cil}(g) \circ \mathrm{Cil}(f) = \mathrm{Cil}(g \circ f)$.

Conclúyase de los incisos anteriores que Cil : **Top** $\to$ **Top** es un funtor. ∎

1.67 Definición. Al funtor definido en el *Teorema 1.66* se le nombra *funtor cilindro.*

1.68 Observación. Para cada $t \in I$ considérese la inmersión $\nu_t : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}$ dada por:

$$\forall x \in X : \nu_t(x) = (x,t).$$

A ν_t se le referirá como la *inmersión de $\boldsymbol{X}$ en su cilindro a la altura* t. Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función continua entre espacios topológicos y $\nu'_t : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{I}$ es la inmersión en el cilindro de $\boldsymbol{Y}$ a la altura t entonces,

$$\forall x \in X : (f \times id\, I)\nu_t(x) = (f \times id\, I)(x,t) = (f(x),t) = \nu'_t(f(x)) = \nu'_t f(x).$$

De esta forma, se tiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xhookrightarrow{\nu_t} & \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times id\, I} \\ \boldsymbol{Y} & \xhookrightarrow[\nu'_t]{} & \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{I} \end{array} \qquad (f \times id\, I) \circ \nu_t = \nu'_t \circ f.$$

En consecuencia, para cada $t \in I$, la familia de inmersiones $\{\nu_t : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}\}_{\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Top}}$ es una transformación natural del funtor identidad en **Top** al funtor Cil : **Top** $\to$ **Top**.

1.69 Definición. Dados $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos, una *homotopía* de $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ es una función continua $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y}$. Si $f, g : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ cumplen que

$$\forall x \in X : f(x) = H(x,0) \text{ y } g(x) = H(x,1),$$

se dirá que H *transforma* f *en* g o que H *lleva a* f *en* g.

1.70 Observación. Si $\nu_t : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}$ es la inmersión en el cilindro de $\boldsymbol{X}$ a la altura t entonces, una homotopía $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y}$ transforma a f en g si y sólo si los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{I} \arrow[r, "H"] & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X} \arrow[u, hook, "\nu_0"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{I} \arrow[r, "H"] & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X} \arrow[u, hook, "\nu_1"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$H \circ \nu_0 = f, \qquad\qquad H \circ \nu_1 = g.$$

1.71 Definición. Una función continua entre espacios topológicos $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ se dice *inesencial* si existe una homotopía de $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ que lleva a f en una función constante. En caso contrario se dirá que $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función *esencial*.

1.72 Lema. Sean $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ y $h : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ funciones continuas entre espacios topológicos. Si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función inesencial, entonces $g \circ f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ y $f \circ h : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ también son funciones inesenciales.

Demostración. Si $\nu_t : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}$ y $\nu'_t : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{I}$ denotan las inmersiones a la altura t de $\boldsymbol{X}$ y de $\boldsymbol{Z}$ en sus respectivos cilindros entonces, para cada $t \in I$, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Z} \arrow[r, hook, "\nu'_t"] \arrow[d, "h"'] & \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{I} \arrow[d, "h \times id\, I"] \\ \boldsymbol{X} \arrow[r, hook, "\nu_t"'] & \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{I} \end{tikzcd} \qquad (h \times id\, I) \circ \nu'_t = \nu_t \circ h.$$

Dado que $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es inesencial, existe $y_0 \in Y$ y una homotopía $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y}$ tales que $H\nu_0 = f$ y $H\nu_1 = k$ es la función constante y_0. De esta manera, las funciones $\widehat{H}_1 : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Z}$ y $\widehat{H}_2 : \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y}$, definidas como $\widehat{H}_1 = g \circ H$ y $\widehat{H}_2 = H \circ (h \times id\, I)$, son homotopías que cumplen que

$$\widehat{H}_1\nu_0 = (gH)\nu_0 = g(H\nu_0) = gf \quad \text{y} \quad \widehat{H}_1\nu_1 = (gH)\nu_1 = g(H\nu_1) = gk,$$

$$\widehat{H}_2\nu'_0 = H(h \times id\, I)\nu'_0 = H\nu_0 h = Fh = f \quad \text{y} \quad \widehat{H}_2\nu'_1 = H(h \times id\, I)\nu'_1 = H\nu_1\imath = kh,$$

donde $g \circ k$ es la función constante $g(y_0) \in Z$ y $k \circ h$ es la función constante y_0 en Z. Por lo tanto, $g \circ f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ y $f \circ h : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ son funciones inesenciales. ■

1.73 Corolario. Si $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función inesencial entre espacios topológicos y $\boldsymbol{Z}$ es un subespacio de $\boldsymbol{X}$ con función inclusión $\imath : \boldsymbol{Z} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ entonces la restricción $F \circ \imath : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ también es inesencial

1.74 Definición. Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ es *contráctil* si $id\, X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ es inesencial.

1.75 Proposición. La contractibilidad es una propiedad topológica.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos y $h : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un homeomorfismo. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio contráctil entonces $id\,X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ es una función inesencial. Aplicando dos veces el *Lema 1.72* se tiene que $id\,Y = h \circ id\,X \circ h^{-1} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ también es inesencial. En consecuencia, $\boldsymbol{Y}$ es un espacio contráctil. ■

1.76 Proposición. Todo subespacio convexo de un espacio euclidiano es contráctil.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un subespacio convexo de $\mathbf{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y elíjase $\boldsymbol{x}_0 \in X$. Para cada $\boldsymbol{x} \in X$, el segmento que une a $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}_0$ se encuentra contenido en X así que es posible definir una homotopía $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ como:

$$\forall \boldsymbol{x} \in X, t \in I : H(\boldsymbol{x}, t) = t\boldsymbol{x}_0 + (1-t)\boldsymbol{x}.$$

Dado $\boldsymbol{x} \in X$ se tiene que $H(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x}$ y $H(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{x}_0$. Por lo tanto, $\boldsymbol{X}$ es contráctil. ■

1.77 Corolario. Las celdas n-dimensionales son contráctiles.

1.78 Ejemplo. *La esfera n-dimensional $\mathbf{S}^n$ no es contráctil.*

Supóngase que $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ es una función inesencial, es decir, existen un punto $\boldsymbol{x}_0 \in S^n$ y una homotopía $H : \mathbf{S}^n \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^n$ de manera que, para cada $\boldsymbol{x} \in S^n$, $H(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$ y $H(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{x}_0$. Se define la función continua $g : \mathbf{D}^{n+1} \to \mathbf{S}^n$ como:

$$\forall \boldsymbol{x} \in D^{n+1} : g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 & \text{si } \|\boldsymbol{x}\| \leq \frac{1}{2}, \\ H\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, 2(1 - \|\boldsymbol{x}\|)\right) & \text{si } \|\boldsymbol{x}\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Del *Teorema 1.61* se sabe que no existen retracciones de $\mathbf{D}^{n+1}$ en $\mathbf{S}^n$ así que es posible hallar $\boldsymbol{x} \in S^n$ tal que $g(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Dado que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ se tiene que $g(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$. Así, $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ y por lo tanto $f \neq id\,S^n$. Esto prueba que la función $id\,S^n : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ no es inesencial, es decir, $\mathbf{S}^n$ no es contráctil.

1.79 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico contráctil y $\boldsymbol{Y}$ es un retracto de $\boldsymbol{X}$ entonces $\boldsymbol{Y}$ también es contráctil.

Demostración. Considérese la función inclusión $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ y elíjase una retracción $r : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Por hipótesis, $\boldsymbol{X}$ es contráctil así que la función $id\,X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ es inesencial. Aplicando el *Lema 1.72* se obtiene que $id\,Y = r \circ id\,X \circ \imath : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ también es una función inesencial. Por lo tanto, $\boldsymbol{Y}$ es un espacio contráctil. ■

1.80 Definición. Se define la *función exponencial*, $\operatorname{Exp} : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, como

$$\forall t \in \mathbb{R} : \operatorname{Exp}(t) = e^{2\pi i t}.$$

1.81 Observación. Dado que para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\operatorname{Exp}(s+t) = e^{2\pi i(s+t)} = e^{2\pi i s + 2\pi i t} = e^{2\pi i s} e^{2\pi i t} = \operatorname{Exp}(s) \cdot \operatorname{Exp}(t),$$

entonces, dadas funciones continuas $f, g : \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$ ocurre que,

$$\operatorname{Exp}(f+g) = (\operatorname{Exp} f) \cdot (\operatorname{Exp} g).$$

1.82 Definición. Un *logaritmo continuo* o *levantamiento* de una función continua $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ es una función continua $\varphi : \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$ de manera que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d, "\operatorname{Exp}"] \\ \boldsymbol{X} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & \mathbf{S}^1 \end{tikzcd} \qquad \operatorname{Exp} \varphi = f.$$

1.83 Proposición. Si $f, g : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ son funciones continuas tales que $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ posee un logaritmo continuo y

$$\forall x \in X : |f(x) - g(x)| < 2,$$

entonces $g : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ también admite un logaritmo continuo.

Demostración. Sea $\boldsymbol{Y}$ el subespacio de $\mathbf{S}^1$ inducido sobre $S^1 \setminus \{-1\}$ y $\mathbf{J}$ el subespacio de $\mathbf{R}$ inducido sobre el intervalo $(-1/2, 1/2)$ con funciones inclusión $\imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \mathbf{S}^1$ y $\jmath : \mathbf{J} \hookrightarrow \mathbf{R}$. Obsérvese que $\operatorname{Exp}[(-1/2, 1/2)] = S^1 \setminus \{-1\}$ así que existe una única función continua y suprayectiva $e : \mathbf{J} \to \boldsymbol{Y}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, "\operatorname{Exp}"] & \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{J} \arrow[u, hook, "\jmath"] \arrow[r, "e"'] & \boldsymbol{Y} \arrow[u, hook, "\imath"'] \end{tikzcd} \qquad \operatorname{Exp} \jmath = \imath \circ e.$$

Más aún, $e : \mathbf{J} \to \boldsymbol{Y}$ es un homeomorfismo así que $\operatorname{Exp}(\jmath \circ e^{-1}) = \imath$. Luego, la condición $|f(x) - g(x)| < 2$ para cada $x \in X$, implica que $f(x) \neq -g(x)$, lo cual equivale a que $\frac{g(x)}{f(x)} \neq -1$. De esta forma $\frac{g}{f}[X] \subseteq S^1 \setminus \{-1\}$, así que existe una única función continua $h : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{S}^1 \\ \boldsymbol{X} \arrow[ur, "g/f"] \arrow[r, "h"'] & \boldsymbol{Y} \arrow[u, hook, "\imath"'] \end{tikzcd} \qquad \imath \circ h = g/f.$$

Por hipótesis, existe una función $\varphi : \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$ que es logaritmo continuo de $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$. Definiendo $\psi : \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$ como $\psi = \varphi + \jmath \circ e^{-1} \circ h$ se obtiene que

$$\operatorname{Exp} \psi = \operatorname{Exp}(\varphi + \jmath e^{-1} h) = (\operatorname{Exp} \varphi) \cdot \left(\operatorname{Exp} \jmath e^{-1} h\right) = f \cdot (\imath h) = f \cdot \frac{g}{f} = g$$

Por lo tanto, ψ es un logaritmo continuo para $g : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$. ■

1.84 Proposición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio compacto y metrizable. Una función continua $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ es inesencial si y sólo si $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ admite un logaritmo continuo.

Demostración. Primero considérese el caso en que $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ tiene un logaritmo continuo al cual se le nombra φ. Defínase la función $H : X \times I \to S^1$ como:

$$\forall x \in X, t \in I : H(x,t) = \mathrm{Exp}\left((1-t)\varphi(x)\right).$$

Obsérvese que $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^1$ es una homotopía y además

$$\forall x \in X : H(x,0) = \mathrm{Exp}\left(\varphi(x)\right) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = \mathrm{Exp}\left(0\right) = 1,$$

esto es, H transforma a f en la función constante 1. Por tanto $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ es inesencial.

Para demostrar la afirmación recíproca supóngase que $f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ es inesencial. Elíjase un punto $p_0 \in S^1$ y una homotopía $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^1$ que transforme a f en la función constante p_0. Como $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I}$ es un espacio compacto y metrizable entonces la función $H : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^1$ es uniformemente continua, de manera que es posible hallar una partición de I:

$$0 = t(0) < t(1) < \cdots < t(n) = 1$$

de manera que para cada i desde 1 hasta n,

$$\forall x \in X : |H(x, t(i)) - H(x, t(i-1))| < 2.$$

Luego, defínase $h_i : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ como $h_i = H \circ \nu_{t(i)}$, donde $\nu_{t(i)}$ la inmersión de $\boldsymbol{X}$ en su cilindro a la altura $t(i)$. Obsérvese que:

(i) $h_n = H \circ \nu_1$ es la función constante p_0 por lo cual es claro que $h_n : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ admite un logaritmo continuo.

(ii) Para cada i desde 1 hasta n se cumple,

$$\forall x \in X : |h_i(x) - h_{i-1}(x)| = |H(x, t(i)) - H(x, t(i-1))| < 2$$

De manera que, por la *Proposición 1.83*, si $h_i : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ tiene un logaritmo continuo entonces también lo tiene $h_{i-1} : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$.

Mediante un proceso inductivo finito, es posible deducir de los dos incisos anteriores que la función $h_0 = H \circ \nu_0 = f : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ admite un logaritmo continuo. ■

1.85 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos. Se dirá que $\boldsymbol{X}$ *es contráctil respecto de* $\boldsymbol{Y}$ si cualquier función continua $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es inesencial.

1.86 Proposición. Para cualquier espacio topológico $\boldsymbol{X}$, las siguientes proposiciones son equivalentes entre sí:

(1) $\boldsymbol{X}$ es contráctil,

(2) $\boldsymbol{X}$ es contráctil respecto de sí mismo,

(3) $\boldsymbol{X}$ es contráctil respecto de cualquier espacio.

Demostración. $(1) \Rightarrow (3)$ Sean $\boldsymbol{Y}$ un espacio topológico cualquiera y $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ una función continua. Dado que $\boldsymbol{X}$ es contráctil la función $id\, X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ es inesencial. Luego, se sigue del *Lema 1.72* que $f = f \circ id\, X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es inesencial. En consecuencia $\boldsymbol{X}$ es contráctil respecto de $\boldsymbol{Y}$.

$(3) \Rightarrow (2)$ El resultado es inmediato.

$(2) \Rightarrow (1)$ Si $\boldsymbol{X}$ es contráctil respecto de sí mismo entonces la función $id\, X : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ es inesencial. Por lo tanto, $\boldsymbol{X}$ es contráctil. ■

1.87 Definición. Un espacio topológico conexo es *unicoherente* si todo par de conjuntos cerrados y conexos que cubra al espacio tiene intersección conexa. Si además cualquier subespacio cerrado y conexo es unicoherente entonces el espacio será *hereditariamente unicoherente.*

1.88 Ejemplo. *La recta real* $\mathbb{R}$ *es hereditariamente unicoherente.*

Sea $\boldsymbol{Y}$ un subespacio cerrado y conexo de $\mathbf{R}$. Si H y K son conjuntos cerrados y conexos en $\boldsymbol{Y}$ tales que $Y = H \cup K$ entonces ambos conjuntos son conexos en $\mathbf{R}$, esto es, H y K son intervalos reales. En consecuencia, la intersección $H \cap K$ también es un intervalo, y por tanto, un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$. De aquí que $\boldsymbol{Y}$ es unicoherente.

1.89 TEOREMA. Todo continuo de Hausdorff contráctil respecto de $\mathbf{S}^1$ es unicoherente.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo T_2 contráctil respecto de $\mathbf{S}^1$, Z_1 y Z_2 subcontinuos de $\boldsymbol{X}$ tales que $X = Z_1 \cup Z_2$. Se probará que $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ es conexo en $\boldsymbol{X}$. Denótese por $\boldsymbol{Z}$ al subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $Z = Z_1 \cap Z_2$ y considérense H y K conjuntos ajenos y cerrados en $\boldsymbol{X}$ de manera que $Z = H \cup K$ y $K \neq \varnothing$. Además, se definen $Y_1 = \{z \in S^1 \mid \Im(z) \geq 0\}$, $Y_2 = \{z \in S^1 \mid \Im(z) \leq 0\}$ (aquí $\Im(z)$ representa la parte imaginaria del número complejo z). Si $\boldsymbol{Y}$ es el subespacio de $\mathbf{S}^1$ inducido sobre el conjunto $Y = Y_1 \cap Y_2 = \{-1, 1\}$ se tienen los siguientes diagramas conmutativos de funciones inclusión:

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{X} & \\ \boldsymbol{Z}_1 \arrow[ur, hook, "k_1"] & & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[ul, hook', "k_2"'] \\ & \boldsymbol{Z} \arrow[ul, hook', "\jmath_1"] \arrow[ur, hook, "\jmath_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{S}^1 & \\ \mathbf{Y}_1 \arrow[ur, hook, "k'_1"] & & \mathbf{Y}_2 \arrow[ul, hook', "k'_2"'] \\ & \boldsymbol{Y} \arrow[ul, hook', "\jmath'_1"] \arrow[ur, hook, "\jmath'_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$k_1 \circ \jmath_1 = k_2 \circ \jmath_2, \qquad k'_1 \circ \jmath'_1 = k'_2 \circ \jmath'_2.$$

Defínase la función $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in Z : f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ -1 & \text{si } x \in H. \end{cases}$$

Como H y K son conjuntos ajenos y cerrados en $\boldsymbol{Z}$, la función $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ es continua. Ahora, para $i = 1$ e $i = 2$, $\boldsymbol{Y}_i$ es un arco y $\boldsymbol{Z}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{Z}_i$ así que por el *Ejemplo 1.56* existe una función $f_i : \boldsymbol{Z}_i \to \boldsymbol{Y}_i$ que extiende continuamente a la función $\jmath_i' \circ f : \mathbf{N} \to \mathbf{L}_i$, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Z}_i & \xrightarrow{f_i} & \boldsymbol{Y}_i \\ {\scriptstyle \jmath_i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \jmath_i'} \\ \boldsymbol{Z} & \xrightarrow[f]{} & \boldsymbol{Y} \end{array} \qquad\qquad f_i \circ \jmath_i = \jmath_i' \circ f.$$

Obsérvese que:

$$(k_1' f_1)\jmath_1 = k_1'(f_1\jmath_1) = k_1'(\jmath_1' f) = (k_1'\jmath_1')f = (k_2'\jmath_2')f = k_2'\jmath_2' f = k_2'(f_2\jmath_2) = (k_2' f_2)\jmath_2,$$

esto es, las restricciones de $k_1' \circ f_1 : \boldsymbol{Z}_1 \to \mathbf{S}^1$ y $k_2' \circ f_2 : \boldsymbol{Z}_2 \to \mathbf{S}^1$ a $Z = Z_1 \cap Z_2$ coinciden entre sí. De esta manera, se puede definir una única función continua $F : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ como:

$$\forall x \in X : F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in Z_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in Z_2. \end{cases}$$

Por hipótesis, $F : \boldsymbol{X} \to \mathbf{S}^1$ es una función inesencial y por la *Proposición 1.84* admite un logaritmo continuo, llámese $\varphi : \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$. Obsérvese que $\varphi[Z_1]$ y $\varphi[Z_2]$ son continuos en $\mathbf{R}$ tales que,

$$\varphi[Z_1] \cap \varphi[Z_2] \supseteq \varphi[Z_1 \cap Z_2] = \varphi[Z] \neq \varnothing.$$

Como $\mathbf{R}$ es hereditariamente unicoherente (*Ejemplo 1.88*), $\varphi[Z_1] \cap \varphi[Z_2]$ también es un continuo en $\mathbf{R}$. Luego,

$$\operatorname{Exp}[\varphi[Z_1] \cap \varphi[Z_2]] \subseteq \operatorname{Exp}[\varphi[Z_1]] \cap \operatorname{Exp}[\varphi[Z_2]] = F[Z_1] \cap F[Z_2] \subseteq Y_1 \cap Y_2 = Y.$$

Dado que $Y = \{1, -1\}$ entonces $\operatorname{Exp}[\varphi[B_1] \cap \varphi[B_2]]$ es un subcontinuo de $\mathbf{S}^1$ con a lo más dos puntos, por lo cual $|\operatorname{Exp}[\varphi[Z_1] \cap \varphi[Z_2]]| = 1$. Nótese que

$$\{1\} = f[K] \subseteq f[Z] = F[Z] = \operatorname{Exp}[\varphi[Z]] \subseteq \operatorname{Exp}[\varphi[Z_1] \cap \varphi[Z_2]]$$

así que necesariamente ocurre que $f[Z] = \{1\}$ y $H = \varnothing$. Esto prueba que $Z = Z_1 \cap Z_2$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ y en consecuencia $\boldsymbol{X}$ es unicoherente. ■

Capítulo 2

Hiperespacios

§1 Topología de Vietoris

2.1 Definición. Dado un espacio topológico $\boldsymbol{X}$, se considera el conjunto:

$$CL(\boldsymbol{X}) = \{F \subseteq X \mid F \text{ es no vacío y cerrado en } \boldsymbol{X}\}.$$

Sean $\mathcal{H} \subseteq CL(\boldsymbol{X})$ y $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una colección finita de subconjuntos de X. Se define el *vietórico determinado por $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$* como el conjunto:

$$\langle A_1, \ldots, A_n \rangle_{\mathcal{H}} = \{F \in \mathcal{H} \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ y para cada } i \text{ desde } 1 \text{ hasta } n, F \cap A_i \neq \varnothing\}.$$

2.2 Observación. (1) Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos de X y $\mathcal{H} \subseteq CL(\boldsymbol{X})$ entonces,

$$\langle A_1, \ldots, A_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A_1, \ldots, A_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap \mathcal{H}.$$

(2) Para cada $A \subseteq X$ y cada $\mathcal{H} \subseteq CL(\boldsymbol{X})$ se tiene que

$$\langle A \rangle_{\mathcal{H}} = \{F \in \mathcal{H} \,|\, F \subseteq A\} \quad \text{y} \quad \langle X, A \rangle_{\mathcal{H}} = \{F \in \mathcal{H} \,|\, F \cap A \neq \varnothing\}.$$

2.3 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico y β es la colección de vietóricos en $CL(\boldsymbol{X})$ determinados por colecciones finitas de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$, entonces β es base para una topología sobre $CL(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Nótese que $CL(\boldsymbol{X}) = \langle X \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \in \beta$ así que $\bigcup \beta = CL(\boldsymbol{X})$. Luego, considérense $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}, \mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \in \beta$. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ entonces $\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i) = U \cap V$. Esto implica que,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i) \text{ si y sólo si } F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i.$$

En cualquier caso $F \cap (U \cap V_i) = F \cap V_i$ para i de 1 a n y $F \cap (V \cap U_j) = F \cap U_j$ para j de 1 a m, por lo cual se sigue que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})},$$

donde todas las entradas del vietórico del lado derecho de la igualdad anterior son conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \beta$. De aquí se concluye que β es base para una topología sobre $CL(\boldsymbol{X})$. ■

2.4 Definición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico arbitrario, a la topología generada por la base β referida en la *Proposición 2.3* se le denomina *topología de Vietoris* para $CL(\boldsymbol{X})$. El espacio obtenido al equipar a $CL(\boldsymbol{X})$ con esta topología es denominado *hiperespacio de cerrados* de $\boldsymbol{X}$ y se denotará por $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. A la colección β se le conoce como la *base canónica* del hiperespacio $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

2.5 Observación. Si $\mathcal{H} \subseteq CL(\boldsymbol{X})$ entonces, por la *Observación 2.2 (1)*, la colección de vietóricos en $\mathcal{H}$ determinados por colecciones finitas de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ es una base para el subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre $\mathcal{H}$.

2.6 Proposición. Dado un espacio topológico $\boldsymbol{X}$, la colección $\mathscr{S}$ conformada por todos los vietóricos de la forma $\langle U \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $\langle X, U \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$, donde U es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$, determina una subbase para $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Si $U_1, \ldots, U_n$ son conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$, por definición, se cumple que $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ si y sólo si $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $F \cap U_i \neq \varnothing$ para cada i desde 1 hasta n. Por lo tanto,

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} = \langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \right).$$

Como $\mathscr{S}$ es una colección de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ y todo básico canónico del hiperespacio se obtiene de la intersección finita de elementos de $\mathscr{S}$, se concluye que $\mathscr{S}$ es una subbase para $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. ■

2.7 Proposición. Dados un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ y un conjunto F cerrado en $\boldsymbol{X}$, los conjuntos $\langle F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $\langle X, F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ son cerrados en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Simplemente obsérvese que, $CL(\boldsymbol{X}) \setminus \langle F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} = \langle X, X \setminus F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $CL(\boldsymbol{X}) \setminus \langle X, F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} = \langle X \setminus F \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$, donde $X \setminus F$ es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$. ■

2.8 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico y $\boldsymbol{Y}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{X}$ entonces $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Es claro que $CL(\boldsymbol{Y}) = \langle Y \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ así que resta probar que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ coincide con el subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre $CL(\boldsymbol{Y})$ al cual se le nombrará $\boldsymbol{Z}$. Dados $V_1, \ldots, V_n$ conjuntos abiertos en $\boldsymbol{Y}$ existen

$U_1, \dots, U_n$ conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ tales que $V_i = U_i \cap Y$ para cada i entre 1 y n. Por lo tanto,

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle_{CL(\boldsymbol{Y})} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap CL(\boldsymbol{Y}) = \langle U_1, \dots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap CL(\boldsymbol{Y}).$$

De aquí que todo elemento de la base canónica de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es un conjunto abierto en $\boldsymbol{Z}$. Ahora, si $U_1, \dots, U_n$ son conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ se tiene que

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{Y})} = \langle U_1 \cap Y, \dots, U_n \cap Y \rangle_{CL(\boldsymbol{Y})},$$

donde $U_i \cap Y$ es un conjunto abierto en $\boldsymbol{Y}$ para cada i desde 1 hasta n. Esto demuestra que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Z}$ y así, $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. ■

2.9 Definición. Dado un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$F_n(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{cl_X}\, A \mid A \subseteq X \text{ y } |A| \leq n\}.$$

$\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ induce un subespacio sobre $F_n(\boldsymbol{X})$ nombrado *n-ésimo producto simétrico de $\boldsymbol{X}$*. Caso particular es el de $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$ al que se referirá como *hiperespacio de singulares de $\boldsymbol{X}$*. Luego, sea

$$F(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{cl_X}\, A \mid A \subseteq X \text{ y } |A| < \aleph_0\}.$$

Nótese que $F(\boldsymbol{X}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\boldsymbol{X})$. Al subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre $F(\boldsymbol{X})$ se le nombra *hiperespacio de conjuntos finitos de $\boldsymbol{X}$*.

2.10 Observación. La denominación para los hiperespacios $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$ y $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ se debe a que, si $\boldsymbol{X}$ es un espacio T_1 entonces $F_n(\boldsymbol{X})$ consiste de todos los subconjuntos de X con a lo más n elementos y $F(\boldsymbol{X})$ consiste de todos los subconjuntos finitos de X, es decir,

$$F_n(\boldsymbol{X}) = [X]^{\leq n} \quad \text{y} \quad F(\boldsymbol{X}) = [X]^{<\aleph_0}.$$

2.11 Proposición. Cualquier espacio topológico T_1 es homeomorfo a su hiperespacio de singulares.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio T_1. Se define la función $\Phi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$ como,

$$\forall x \in X : \Phi(x) = \boldsymbol{cl_X}\,\{x\} = \{x\}.$$

Claramente, Φ es una biyección. Además, si U es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ entonces, para cada $x \in X$, se tiene que $x \in U$ si y sólo si $\{x\} \subseteq U$, si y sólo si $\{x\} \cap U \neq \varnothing$. Lo anterior implica que

$$\Phi^{-1}[\langle U \rangle_{F_1(\boldsymbol{X})}] = U = \Phi^{-1}[\langle X, U \rangle_{F_1(\boldsymbol{X})}] \quad \text{y} \quad \Phi[U] = \langle U \rangle_{F_1(\boldsymbol{X})}.$$

Como consecuencia, la función $\Phi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$ es continua, abierta y, por tanto, un homeomorfismo. ■

2.12 Lema. Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ es T_2 si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera n puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ existen n conjuntos ajenos entre sí y abiertos en $\boldsymbol{X}$, llámense $U_1, \dots, U_n$, de manera que $x_i \in U_i$ para cada i desde 1 hasta n.

Demostración. La suficiencia es evidente así que basta demostrar la necesidad, para lo cual se hará uso del Principio de Inducción Matemática. Como el caso base se verifica inmediatamente se procede al caso inductivo. Dados $n+1$ puntos distintos entre sí, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$, se aplica la hipótesis de inducción a los n puntos, $x_1, \ldots, x_n$, para obtener, $V_1, \ldots, V_n$, conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$ de manera que $x_i \in V_i$ para todo i de 1 a n. Ya que $\boldsymbol{X}$ es un espacio T_2 y $x_j \neq x_{n+1}$ para j desde 1 hasta n, existen W_j y W_j' conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$ de forma que $x_j \in W_j$ y $x_{n+1} \in W_j'$. Si $U_j = V_j \cap W_j$ y $U_{n+1} = \bigcap_{i=1}^n W_i'$ entonces los conjuntos $U_1, \ldots, U_{n+1}$ cumplen lo requerido. ∎

2.13 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1, las siguientes proposiciones son equivalentes entre sí:

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$,

(2) $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$,

(3) $\boldsymbol{X}$ es un espacio Hausdorff.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es evidente.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supóngase que $F_1(\boldsymbol{X})$ es cerrado en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $\{x, y\} \in CL(\boldsymbol{X}) \setminus F_1(\boldsymbol{X})$ y así, es posible hallar una colección finita $\mathscr{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ formada por conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ de manera que

$$\{x, y\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \subseteq CL(\boldsymbol{X}) \setminus F_1(\boldsymbol{X}).$$

Considérense las colecciones $\mathscr{V} = \{U \in \mathscr{U} \mid x \in U\}$ y $\mathscr{W} = \{U \in \mathscr{U} \mid y \in U\}$. Se observa que $V = \bigcap \mathscr{V}$ y $W = \bigcap \mathscr{W}$ son conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$. Además:

(i) Como $\{x, y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, las colecciones $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ son no vacías, por tanto:

$$V \cup W = \left(\bigcap \mathscr{V}\right) \cup \left(\bigcap \mathscr{W}\right) \subseteq \left(\bigcup \mathscr{V}\right) \cup \left(\bigcup \mathscr{W}\right) \subseteq \bigcup \mathscr{U} = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

(ii) Para cada i desde 1 hasta n se tiene que $\{x, y\} \cap U_i \neq \varnothing$ así que $x \in U_i$ o $y \in U_i$, es decir, $U_i \in \mathscr{V}$ ó $U_i \in \mathscr{W}$. De aquí que, si $F \in CL(\boldsymbol{X})$ intersecta a V y a W entonces F intersecta a U_i para cada i de 1 a n.

De los incisos (i) y (ii) se deduce que

$$\langle V, W \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \subseteq CL(\boldsymbol{X}) \setminus F_1(\boldsymbol{X}).$$

Dados $p \in V$ y $q \in W$ se tiene que $\{p, q\} \in \langle V, W \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ por lo cual $\{p, q\} \notin F_1(\boldsymbol{X})$, es decir, $p \neq q$. Por tanto V y W son conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$ con $x \in V$ y $y \in W$. Esto demuestra que $\boldsymbol{X}$ es un espacio Hausdorff.

(3) $\Rightarrow$ (1) Considérese $n \in \mathbb{N}$ y $F \in CL(\boldsymbol{X}) \setminus F_n(\boldsymbol{X})$. Dado que $|F| > n$ es posible obtener $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos de F distintos entre sí. Luego, por el *Lema 2.12*, existen

conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$, llámense $U_1, \ldots, U_{n+1}$, de manera que $x_i \in U_i$ para cada i de 1 hasta $n+1$. Se cumple entonces que,

$$F \in \langle X, U_1, \ldots, U_{n+1} \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \subseteq CL(\boldsymbol{X}) \setminus F_n(\boldsymbol{X}).$$

Conclúyase que $F_n(\boldsymbol{X})$ es cerrado en $CL(\boldsymbol{X})$. ■

2.14 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 entonces el hiperespacio $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es Hausdorff cuando y sólo cuando $\boldsymbol{X}$ es regular.

Demostración. Primero se supondrá que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es T_2. Si F es un conjunto no vacío y cerrado en $\boldsymbol{X}$ y $x \in X \setminus F$ entonces F y $F \cup \{x\}$ son puntos distintos de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. Dado que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es un espacio Hausdorff existen conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_m$, cada uno de los cuales es abierto en $\boldsymbol{X}$, tales que:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} = \varnothing,$$

$$F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \quad \text{y} \quad F \cup \{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}.$$

Nótese que $F \subseteq F \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ y sin embargo, $F \notin \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ por lo cual, si Λ denota al conjunto de enteros entre 1 y m tales que $F \cap V_j = \varnothing$ entonces $\Lambda \neq \varnothing$. Además, para cada $j \in \Lambda$ ocurre que $(F \cup \{x\}) \cap V_j \neq \varnothing$ y por tanto $x \in V_j$. Así, $V = \bigcap_{j \in \Lambda} Vj$ es una vecindad abierta de x en $\boldsymbol{X}$. Se demostrará que si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ entonces U y V son conjuntos ajenos. Para esto tómese $y \in V$. Como $\Lambda \neq \varnothing$ se tiene que $y \in V \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ y $F \cup \{y\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Luego, para cada j entre 1 y m ocurre que $(F \cup \{y\}) \cap V_j \neq \varnothing$, pues $y \in V_j$ cuando $j \in \Lambda$ y $F \cap V_j \neq \varnothing$ cuando $j \notin \Lambda$. Lo anterior implica que $F \cup \{y\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$. Debido a que $F \cup \{y\} \notin \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $(F \cup \{y\}) \cap U_i \neq \varnothing$ para cada i desde 1 hasta n se sigue que $F \cup \{y\} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U$. Dado que $F \subseteq U$ necesariamente se cumple que $y \notin U$. En consecuencia, U y V son conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$ con $F \subseteq U$ y $x \in V$. Por tanto $\boldsymbol{X}$ es un espacio T_3.

Ahora supóngase que $\boldsymbol{X}$ es regular y considérense $E, F \in CL(\boldsymbol{X})$ con $E \neq F$. Sin pérdida de generalidad se supondrá que $E \nsubseteq F$. Si se elige $x \in E \setminus F$ entonces, por la regularidad de $\boldsymbol{X}$, existen U y V, conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$, tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. Esto implica que $E \in \langle X, U \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $F \in \langle V \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$. Además, nótese que como U y V son ajenos, los vietóricos $\langle X, U \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $\langle V \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ son conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. De aquí se deduce que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es un espacio Hausdorff. ■

2.15 Lema (de la subbase de Alexander). Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y $\mathscr{S}$ una subbase para $\boldsymbol{X}$. Si toda cubierta de $\boldsymbol{X}$ por elementos de $\mathscr{S}$ admite una subcubierta finita entonces $\boldsymbol{X}$ es un espacio compacto.

Demostración. Para la prueba se introducirá la siguiente terminología: una colección $\mathscr{A}$ formada por subconjuntos de X es inadecuada si $\mathscr{A}$ no cubre a X, esto es, $\bigcup \mathscr{A} \neq X$ y es finitamente inadecuada si todas sus subcolecciones finitas son inadecuadas. Así, se demostrará que $\boldsymbol{X}$ es un espacio compacto verificando que, si $\mathscr{U}$ es una colección finitamente inadecuada de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ entonces $\mathscr{U}$ debe ser inadecuada.

Considérese la familia $\mathfrak{S}$ de todas las colecciones de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ que sean finitamente inadecuadas y que contienen a $\mathscr{U}$. Nótese que si $\mathfrak{D}$ es una cadena no vacía en $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ entonces $\bigcup \mathfrak{D}$ es una colección de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ con $\mathscr{U} \subseteq \bigcup \mathfrak{D}$. Más aún, toda subcolección finita de $\bigcup \mathfrak{D}$ es subcolección de algún elemento en $\mathfrak{D}$ así que $\bigcup \mathfrak{D}$ también es una colección finitamente inadecuada. De aquí que $\bigcup \mathfrak{D} \in \mathfrak{S}$. Por el *Lema de Zorn* [3, Teorema 8.10, p.184], $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ posee un elemento maximal, llámese $\mathscr{B}$. Se observa que:

(i) Si $U \in \mathscr{B}$ y V es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ tal que $V \subseteq U$ entonces $\mathscr{B} \cup \{V\}$ es una colección finitamente inadecuada, pues toda unión finita de elementos de $\mathscr{B} \cup \{V\}$ está contenida en una unión finita de elementos de la colección $\mathscr{B}$ que sí es finitamente inadecuada. En consecuencia, $\mathscr{B} \cup \{V\} \in \mathfrak{S}$. La maximalidad de $\mathscr{B}$ en $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ implica que $\mathscr{B} = \mathscr{B} \cup \{V\}$ y por tanto $V \in \mathscr{B}$.

(ii) Sean $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ de manera que $U_i \notin \mathscr{B}$ para cada i entre 1 y n. Como $\mathscr{B}$ es maximal en $(\mathfrak{S}, \subseteq)$, debe ocurrir que $\mathscr{B} \cup \{U_i\} \notin \mathfrak{S}$. De aquí que $\mathscr{B} \cup \{U_i\}$ no puede ser finitamente inadecuada y por tanto admite una subcolección finita que cubre a X en la cual necesariamente se encuentra U_i. Tómese entonces $\mathscr{V}_i$ subcolección finita de $\mathscr{B}$ tal que $X = \bigcup \mathscr{V}_i \cup U_i$. Definiendo $\mathscr{V} = \bigcup_{i=1}^n \mathscr{V}_i$ se cumple:

$$X = \bigcup \mathscr{V} \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right).$$

Dado que $\mathscr{V}$ es una subcolección finita de $\mathscr{B}$ y ésta es finitamente inadecuada se sigue que $\bigcap_{i=1}^n U_i \notin \mathscr{B}$. Así, se ha probado que para cualesquiera $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en $\boldsymbol{X}$, $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{B}$ implica $U_j \in \mathscr{B}$ para algún j entre 1 y n.

Ahora, considérese $x \in \bigcup \mathscr{B}$. Como $\mathscr{B}$ es una colección de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ y $\mathscr{S}$ es subbase para $\boldsymbol{X}$, existen $U \in \mathscr{B}$ y $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{S}$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U$. Por los incisos (i) y (ii), para algún j entre 1 y n se verifica que $U_j \in \mathscr{B} \cap \mathscr{S}$ y por tanto $\bigcup \mathscr{B} = \bigcup (\mathscr{B} \cap \mathscr{S})$. Nótese $\mathscr{B} \cap \mathscr{S}$ es una subcolección finitamente inadecuada de $\mathscr{S}$ pues se encuentra contenida en $\mathscr{B}$. La hipótesis del lema implica que $\mathscr{B} \cap \mathscr{S}$ debe ser inadecuada. Debido a que

$$\bigcup \mathscr{U} \subseteq \bigcup \mathscr{B} = \bigcup (\mathscr{B} \cap \mathscr{S})$$

se puede deducir que $\mathscr{U}$ también es inadecuada. Esto completa la demostración. ∎

2.16 TEOREMA. Para todo espacio topológico $\boldsymbol{X}$, el hiperespacio $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es compacto si y sólo si $\boldsymbol{X}$ es compacto.

Demostración. Primero, supóngase que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es un espacio compacto y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $\boldsymbol{X}$. Obsérvese que la colección de vietóricos $\{\langle X, U_\alpha \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta para $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ así que es posible hallar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que,

$$CL(\boldsymbol{X}) = \bigcup_{i=1}^{n} \langle X, U_{\alpha_i} \rangle_{CL(\boldsymbol{X})}.$$

Por tanto, para cada $x \in X$ existe i entre 1 y n tal que $\boldsymbol{cl_X}\ \{x\} \cap U_{\alpha_i} \neq \varnothing$ y así $x \in U_{\alpha_i}$. Se sigue que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ y en consecuencia, $\boldsymbol{X}$ es compacto.

Ahora se supondrá que $\boldsymbol{X}$ es un espacio compacto. Por el *Lema 2.15* será suficiente demostrar que toda cubierta abierta para $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ por medio de subbásicos canónicos admite una subcubierta finita. Considérense dos colecciones de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, de manera que

$$CL(\boldsymbol{X}) = \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \langle U_\alpha\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} \langle X, V_\alpha\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}\right).$$

Si $X = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$ el resultado se obtiene inmediatamente pues bastará con obtener una subcubierta finita de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ y tomar la cubierta de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ formada por los vietóricos respectivos. Así, considérese el caso en que $X \neq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$ y llámese $H = X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$. Se observa que $H \in CL(\boldsymbol{X})$ y $H \cap V_\alpha = \varnothing$ para cada $\alpha \in \Gamma$. Existe entonces $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $H \subseteq U_{\alpha_0}$. Nombrando $K = X \setminus U_{\alpha_0}$ se tiene que

$$K = X \setminus U_{\alpha_0} \subseteq X \setminus H = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha.$$

Dado que $\boldsymbol{X}$ es compacto y K es cerrado en $\boldsymbol{X}$, es posible hallar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ los cuales cumplen que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$. De esta manera, dado $F \in CL(\boldsymbol{X})$ con $F \nsubseteq U_{\alpha_0}$, se tiene que $F \cap K \neq \varnothing$ por lo cual, para algún i entre 1 y n, ocurre que $F \cap V_{\alpha_i} \neq \varnothing$. De aquí que

$$CL(\boldsymbol{X}) = \langle U_{\alpha_0}\rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle X, V_{\alpha_i}\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}\right).$$

■

2.17 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 entonces $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es Hausdorff compacto cuando y sólo cuando $\boldsymbol{X}$ es Hausdorff compacto.

Demostración. El resultado se sigue de la *Proposición 2.14*, el *Teorema2.16* y del hecho de que todo espacio Hausdorff compacto es regular. ■

2.18 Proposición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico T_1.

(a) Si D es un conjunto denso en $\boldsymbol{X}$ entonces el conjunto $[D]^{<\aleph_0}$ es denso en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

(b) El hiperespacio $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es separable cuando y sólo cuando $\boldsymbol{X}$ es separable.

Demostración. (a) Obsérvese que si $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ es un básico canónico no vacío de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ entonces, para cada i desde 1 hasta n, U_i es un conjunto no vacío y abierto en $\boldsymbol{X}$. Dado que D es denso en $\boldsymbol{X}$, es posible elegir un punto $x_i \in U_i \cap D$. De aquí que,

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cap [D]^{<\aleph_0}.$$

Por lo tanto $[D]^{<\aleph_0}$ es un conjunto denso en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$.

(b) Considérese un conjunto $\mathscr{D}$ numerable y denso en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. Para cada $F \in \mathscr{D}$ se elige un punto $p(F) \in F$ y se define $D = \{p(F)\}_{F\in\mathscr{D}}$. Claramente D es un conjunto numerable. Luego, si U es un conjunto no vacío y abierto en $\boldsymbol{X}$ entonces $\langle U\rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \neq \varnothing$ así que existe $F \in \mathscr{D}$ tal que $F \subseteq U$. Así, $p(F) \in U \cap D$ y por tanto D es denso en $\boldsymbol{X}$.

Supóngase ahora que $\boldsymbol{X}$ es separable y elíjase un conjunto D que sea numerable y denso en $\boldsymbol{X}$. Por el inciso (a), se sabe que $[D]^{<\aleph_0}$ es un conjunto denso en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. Como $[D]^{<\aleph_0}$ es numerable siempre que D lo sea se sigue que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es separable. ■

2.19 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio T_1 entonces $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es un espacio conexo si y sólo si $\boldsymbol{X}$ también es un espacio conexo.

Demostración. Si $\boldsymbol{X}$ es disconexo, es posible hallar un par de conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$, nómbrense U y V, cuya unión es X. Se tiene entonces que

$$CL(\boldsymbol{X}) = \langle U\rangle_{CL(\boldsymbol{X})} \cup \langle X, V\rangle_{CL(\boldsymbol{X})},$$

donde $\langle U\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ y $\langle X, V\rangle_{CL(\boldsymbol{X})}$ son conjuntos ajenos, no vacíos y abiertos en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. De aquí se sigue que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es disconexo cuando $\boldsymbol{X}$ es disconexo.

Ahora supóngase que $\boldsymbol{X}$ es un espacio conexo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $\xi_n : \boldsymbol{X}^n \to \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ como:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X : \xi_n(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Claramente ξ_n es una función suprayectiva. Además, si U es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$ se verifica que

$$\xi_n^{-1}[\langle U\rangle_{F_n(\boldsymbol{X})}] = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}[U] \quad \text{y} \quad \xi_n^{-1}[\langle X, U\rangle_{F_n(\boldsymbol{X})}] = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}[U].$$

Esto implica que la función $\xi_n : \boldsymbol{X}^n \to \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ es continua. Dado que $\boldsymbol{X}^n$ es un espacio conexo, $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ también es conexo. Además, como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(\boldsymbol{X}) = F_1(\boldsymbol{X}) \neq \varnothing$ se sigue que $F(\boldsymbol{X}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\boldsymbol{X})$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$. Por la *Proposición 2.18 (a)*, el conjunto $F(\boldsymbol{X}) = [X]^{<\aleph_0}$ es denso en $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$, así que el hiperespacio $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es conexo. ■

2.20 Proposición. Si $\boldsymbol{Y}$ es un espacio topológico discreto e infinito entonces $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ no es segundo numerable.

Demostración. Sea β una base para $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$. Para cada $F \in CL(\boldsymbol{Y})$, F es un conjunto abierto en $\boldsymbol{Y}$ y $F \in \langle F\rangle_{CL(\boldsymbol{Y})}$ así que se elige $\mathcal{V}_F \in \beta$ tal que $F \in \mathcal{V}_F \subseteq \langle F\rangle_{CL(\boldsymbol{Y})}$. Nótese que, para todo $F \in CL(\boldsymbol{Y})$, $\bigcup \mathcal{V}_F = F$. De aquí que, dados $F, F' \in CL(\boldsymbol{Y})$, $F \neq F'$ implica $\mathcal{V}_F \neq \mathcal{V}_{F'}$, o dicho de otra forma, la asignación $F \mapsto \mathcal{V}_F$ es inyectiva. Esto implica que $|\beta| \geq |CL(\boldsymbol{Y})|$. Como $\boldsymbol{Y}$ es un espacio discreto, la colección $CL(\boldsymbol{Y})$ consta de todos los subconjuntos no vacíos de Y y por ser Y infinito se tiene que $|CL(\boldsymbol{Y})| \geq 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, β no es numerable. ■

2.21 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 y $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es metrizable entonces $\boldsymbol{X}$ necesariamente es compacto y metrizable.

Demostración. Debido a la *Proposición 2.11*, $\boldsymbol{X}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$, subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$, así que $\boldsymbol{X}$ también es metrizable. Luego, para probar que $\boldsymbol{X}$ es compacto se verá que todo conjunto infinito numerable admite un punto de acumulación en $\boldsymbol{X}$. Consíderese $A \subseteq X$ con $|A| = \aleph_0$. Si $\boldsymbol{Y}$ es el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $cl_{\boldsymbol{X}}\, A$ entonces $\boldsymbol{Y}$ es separable. De la *Proposición 2.18 (2)* se sigue que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es separable. Además, la *Proposición 2.8* afirma que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es un subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ así que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{Y})$ es metrizable y por ser separable es segundo numerable. Por la *Proposición 2.20*, $\boldsymbol{Y}$ no puede ser un espacio discreto, es decir, $\boldsymbol{Y}$ tiene un punto de acumulación el cual necesariamente es un punto de acumulación de A en $\boldsymbol{X}$. Se concluye que $\boldsymbol{X}$ es compacto y metrizable. ■

§2 Métrica de Hausdorff

2.22 Definición. Dado un espacio topológico $\boldsymbol{X}$, se define su *hiperespacio de compactos*, el cual se denotará por $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$, como el subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre el conjunto

$$2^{\boldsymbol{X}} = \{F \in CL(\boldsymbol{X}) \mid F \text{ es compacto en } \boldsymbol{X}\}.$$

2.23 Observación. Cuando $\boldsymbol{X}$ es un espacio compacto se tiene que $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. En tal caso se empleará la notación $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ aún cuando se siga refiriendo a este espacio como el hiperespacio de cerrados de $\boldsymbol{X}$.

2.24 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico metrizable y d una métrica admisible para $\boldsymbol{X}$. Dados $F \in CL(\boldsymbol{X})$ y $\epsilon > 0$ se define:

$$N_d(F, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, F) < \epsilon\}.$$

A $N_d(F, \epsilon)$ se le nombra la *nube* de radio ϵ alrededor de F en $\boldsymbol{X}$ (respecto de d).

2.25 Observación. Nótese que, para cada $x \in X$:

$$x \in N_d(F, \epsilon) \text{ si y sólo si existe } y \in F \text{ tal que } d(x, y) < \epsilon.$$

Por lo tanto $N_d(F, \epsilon) = \bigcup_{x \in F} B_d(x, \epsilon)$.

2.26 Definición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico metrizable y d una métrica acotada y admisible para $\boldsymbol{X}$. La *métrica de Hausdorff* para $2^{\boldsymbol{X}}$ inducida por d, denotada por H_d, se define de la siguiente manera:

$$\forall E, F \in 2^{\boldsymbol{X}} : H_d(E, F) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid E \subseteq N_d(F, \epsilon) \text{ y } F \subseteq N_d(E, \epsilon)\}.$$

2.27 Observación. Si $M > 0$ es una cota superior para d entonces $E \subseteq N_d(F, M)$ y $F \subseteq N_d(E, M)$ así que el conjunto $\{\epsilon > 0 | E \subseteq N_d(F, \epsilon) \text{ y } F \subseteq N_d(E, \epsilon)\}$ es no vacío y su ínfimo existe, es decir, $H_d(E, F)$ siempre está definido.

2.28 Lema. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico metrizable y d es una métrica acotada y admisible para $\boldsymbol{X}$ entonces, para cualesquiera $E, F \in 2^{\boldsymbol{X}}$ y $\epsilon > 0$ se cumple que

$$H_d(E, F) < \epsilon \text{ si y sólo si } E \subseteq N_d(F, \epsilon) \text{ y } F \subseteq N_d(E, \epsilon).$$

Demostración. Si $H_d(E,F) < \epsilon$ entonces existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $E \subseteq N_d(F,\delta)$ y $F \subseteq N_d(E,\delta)$. De esta manera, como $N_d(F,\delta) \subseteq N_d(F,\epsilon)$ y $N_d(E,\delta) \subseteq N_d(E,\epsilon)$, se tiene que $E \subseteq N_d(F,\epsilon)$ y $F \subseteq N_d(E,\epsilon)$.

Recíprocamente, si $E \subseteq N_d(F,\epsilon)$ y $F \subseteq N_d(E,\epsilon)$ entonces $d(x,F) < \epsilon$ para cada $x \in E$ y $d(y,E) < \epsilon$ para cada $y \in F$. Como E y F son conjuntos compactos en $\boldsymbol{X}$ existen $x_0 \in E$ y $y_0 \in F$ tales que $d(x_0,F) = \max_{x\in E} d(x,F) < \epsilon$ y $d(y_0,E) = \max_{y\in F} d(y,E) < \epsilon$. Se si elige $\delta > 0$ con $\max\{d(x_0,F), d(y_0,E)\} < \delta < \epsilon$ entonces $E \subseteq N_d(F,\delta)$ y $F \subseteq N_d(E,\delta)$ por lo cual $H_d(E,F) \leq \delta < \epsilon$. ■

2.29 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico metrizable y d es una métrica acotada y admisible para $\boldsymbol{X}$ entonces la función H_d dada en la *Definición 2.26* es una métrica acotada para $2^{\boldsymbol{X}}$.

Demostración. Por simplicidad, a lo largo de la prueba se utilizará la siguiente notación:

$$\forall E,F \in 2^{\boldsymbol{X}} : \eta(E,F) = \{\epsilon > 0 \mid E \subseteq N_d(F,\epsilon) \text{ y } F \subseteq N_d(E,\epsilon)\}.$$

Como $\eta(E,F)$ es subconjunto del intervalo cerrado $[0,\infty)$ y $H_d(E,F) = \inf \eta(E,F)$ entonces $H_d(E,F) \geq 0$. De esta forma, $H_d : 2^{\boldsymbol{X}} \times 2^{\boldsymbol{X}} \to [0,\infty)$ es una función. Más aún, si $M > 0$ es una cota superior para la métrica d, se tiene que $[M,\infty) \subseteq \eta(E,F)$ por lo cual $H_d(E,F) \geq M$, es decir, M también es una cota para H_d. Ahora bien, dados $E,F,G \in CL(\boldsymbol{X})$ se tiene que:

(i) Como $E \subseteq N_d(E,\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$, se tiene que $\eta(E,E) = (0,\infty)$. Por tanto, $H_d(E,E) = \inf(0,\infty) = 0$.

(ii) De la misma definición $\eta(E,F) = \eta(F,E)$ así que $H_d(E,F) = H_d(F,E)$.

(iii) Dados $E \neq F$ se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $E \nsubseteq F$. Elíjase $x \in E \setminus F$. Obsérvese que $d(x,F) > 0$ pues $x \notin F$ y F es cerrado en $\boldsymbol{X}$. Dado que $d(x,F) < \epsilon$ para todo $\epsilon \in \eta(E,F)$ se sigue que $0 < d(x,F) \leq H_d(E,F)$. Por lo tanto, $H_d(E,F) = 0$ implica $E = F$.

(iv) Considérense $\epsilon \in \eta(E,F)$ y $\epsilon' \in \eta(F,G)$. Dado cualquier $x \in E$, es posible hallar $y \in F$ tal que $d(x,y) < \epsilon$. Luego, existe $z \in G$ con $d(y,z) < \epsilon'$. Se tiene así que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon + \epsilon'$$

de manera que $E \subseteq N_d(G,\epsilon+\epsilon')$. Análogamente se tiene que $G \subseteq N_d(E,\epsilon+\epsilon')$ así que $\epsilon+\epsilon' \in \eta(E,G)$ y $H_d(E,G) \leq \epsilon+\epsilon'$ para cualesquiera $\epsilon \in \eta(E,F)$ y $\epsilon' \in \eta(F,G)$. De aquí se sigue que $H_d(E,G) - \epsilon' \leq \epsilon$ lo cual implica $H_d(E,G) - \epsilon' \leq H_d(E,F)$. Ahora, $H_d(E,G) - H_d(E,F) \leq \epsilon'$ así que $H_d(E,G) - H_d(E,F) \leq H_d(F,G)$. Se verifica entonces que $H_d(E,G) \leq H_d(E,F) + H_d(F,G)$.

Conclúyase de los incisos (i)-(iv) que H_d es una métrica para $CL(\boldsymbol{X})$. ■

2.30 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico metrizable entonces $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es metrizable. Más aún, si d es una métrica acotada admisible para $\boldsymbol{X}$, la métrica de Hausdorff inducida por d es una métrica admisible para $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$.

Demostración. Llámese $\boldsymbol{Z}$ al espacio topológico construido sobre $2^{\boldsymbol{X}}$ con la topología generada por la métrica de Hausdorff H_d. Primero se probará que la topología de $\boldsymbol{Z}$ es más fina que la topología de Vietoris para $2^{\boldsymbol{X}}$. Para esto, bastará con demostrar que todo subbásico de la forma $\langle U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ ó $\langle X, U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$, con U abierto en $\boldsymbol{X}$, es abierto en $\boldsymbol{Z}$.

Considérese $F \in \langle U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Dado $x \in F$ es posible hallar $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\boldsymbol{X}}(x, \epsilon_x) \subseteq U$. Debido a la compacidad de F en $\boldsymbol{X}$, existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que:

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\boldsymbol{X}}\left(x_i, \frac{\epsilon_{x_i}}{2}\right).$$

Se define $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n}\}/2$. Dado $y \in N_d(F, \epsilon)$ existe $x \in F$ tal que $d(y, x) < \epsilon$. Luego, elíjase i entre 1 y n de manera que $d(x, x_i) < \frac{\epsilon_{x_i}}{2}$. Se observa que

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \epsilon + \frac{\epsilon_{x_i}}{2} \leq \frac{\epsilon_{x_i}}{2} + \frac{\epsilon_{x_i}}{2} = \epsilon_{x_i},$$

esto es, $y \in B_{\boldsymbol{X}}(x_i, \epsilon_{x_i}) \subseteq U$. De aquí que $N_d(F, \epsilon) \subseteq U$. Por el *Lema 2.28*, si $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$ y $H_d(E, F) < \epsilon$ entonces $E \subseteq N_d(F, \epsilon) \subseteq U$ lo cual implica que $B_{\boldsymbol{Z}}(F, \epsilon) \subseteq \langle U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Ahora, sea $F \in \langle X, U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ y elíjase $p \in F \cap U$. Por ser U abierto en $\boldsymbol{X}$, existe $\epsilon > 0$ de manera que $B_{\boldsymbol{X}}(p, \epsilon) \subseteq U$. Luego, dado $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$ con $H_d(E, F) < \epsilon$ se tiene que $F \subseteq N_d(E, \epsilon)$, así que para $p \in F$ es posible hallar $q \in E$ tal que $d(p, q) < \epsilon$, es decir, $q \in B_{\boldsymbol{X}}(p, \epsilon) \subseteq U$. Por lo tanto, $q \in E \cap U$ y $E \in \langle X, U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Esto prueba que $B_{\boldsymbol{Z}}(F, \epsilon) \subseteq \langle X, U\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$.

A continuación se verá que todo conjunto abierto en $\boldsymbol{Z}$ es un abierto de la topología de Vietoris para $2^{\boldsymbol{X}}$. En este caso bastará con verificar que la afirmación es cierta para las bolas abiertas con la métrica de Hausdorff en $\boldsymbol{Z}$. Sean entonces $E \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Como E es compacto en $\boldsymbol{X}$ existen $x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, donde $U_i = B_{\boldsymbol{X}}(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ para cada i desde 1 hasta n. Ya que $x_i \in E \cap U_i$ para todo i, entonces $E \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Además, si $F \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ se tiene que:

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\boldsymbol{X}}\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq \bigcup_{x \in E} B_{\boldsymbol{X}}\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) = N_d\left(E, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq N_d(E, \epsilon).$$

Luego, para cada $x \in E$ existe i entre 1 y n tal que $d(x, x_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Dado que $F \cap U_i \neq \varnothing$, existe $y \in F$ tal que $d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, se sigue que $E \subseteq N_d(F, \epsilon)$. Lo anterior implica que $H_d(E, F) < \epsilon$ y por lo tanto $E \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \subseteq B_{\boldsymbol{Z}}(E, \epsilon)$. De aquí se concluye que $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}$, es decir, $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es metrizable y H_d es una métrica admisible para $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. ■

2.31 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 entonces las siguientes condiciones son equivalentes entre sí:

(1) $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es metrizable,

(2) $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ es compacto, metrizable y coincide con $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$,

(3) $\boldsymbol{X}$ es compacto y metrizable.

Demostración. $(2) \Rightarrow (1)$ Es evidente.

$(3) \Rightarrow (2)$ Es consecuencia de la *Observación 2.23* y los *Teoremas 2.16 y 2.30.*

$(1) \Rightarrow (3)$ Se sigue del *Teorema 2.21.* ■

2.32 Corolario. Un espacio topológico T_1 es un continuo si y sólo si su hiperespacio de cerrados también es un continuo.

Demostración. Aplíquense los *Teoremas 2.31* y *2.19.* ■

§3 Continuidad en hiperespacios

2.33 Proposición. Sea $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ una función continua entre espacios compactos de Hausdorff. Si se define

$$\forall E \in 2^{\boldsymbol{X}} : \mathbf{2}^f(E) = f[E],$$

entonces la función $\mathbf{2}^f : \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}$, que se nombrará *función inducida por* $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *a los hiperespacios de cerrados*, es continua.

Demostración. Primeramente, obsérvese que la función $\mathbf{2}^f : 2^{\boldsymbol{X}} \to 2^{\boldsymbol{Y}}$ está bien definida pues la imagen directa bajo f de un conjunto no vacío, compacto y cerrado en $\boldsymbol{X}$ es un conjunto no vacío, compacto y cerrado en $\boldsymbol{Y}$, esto es, $f[E] \in 2^{\boldsymbol{Y}}$ siempre que $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$. Ahora, considérese un conjunto U abierto en $\boldsymbol{Y}$. Es claro que $f[E] \subseteq U$ si y sólo si $E \subseteq f^{-1}[U]$ y así mismo, $f[E] \cap U \neq \varnothing$ si y sólo si $E \cap f^{-1}[U] \neq \varnothing$. De esta manera, se tiene que

$$(\mathbf{2}^f)^{-1}[\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}}] = \langle f^{-1}[U] \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \quad \text{y} \quad (\mathbf{2}^f)^{-1}[\langle Y, U \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}}] = \langle X, f^{-1}[U] \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}},$$

con $f^{-1}[U]$ abierto en $\boldsymbol{X}$. Así, la imagen inversa bajo $\mathbf{2}^f$ de cada subásico canónico de $\mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ y por tanto la función $\mathbf{2}^f : \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}$ es continua. ■

2.34 TEOREMA. Es posible definir un funtor $\mathbf{2}$- : **HComp** $\to$ **HComp**, de la siguiente manera:

(a) Para cada $\boldsymbol{X} \in$ Ob **HComp**, $\mathbf{2}$-$(\boldsymbol{X}) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$,

(b) Para cada $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y} \in$ Mor **HComp**, $\mathbf{2}$-$(f) = \mathbf{2}^f : \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}$.

Demostración. Debido al *Teorema 2.17* y la *Proposición 2.33*, $\mathbf{2}$- : **HComp** $\to$ **HComp** es una función bien definida. Resta verificar que cumple con las propiedades funtoriales correspondientes.

(i) Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio Hausdorff compacto:

$$\forall E \in 2^{\boldsymbol{X}} : \mathbf{2}^{id\,X}(E) = id\,X[E] = E.$$

Por lo tanto, $\mathbf{2}^{id\,X} = id\,2^{\boldsymbol{X}}$.

(ii) Considérense $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ y $g:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Z}$ funciones continuas entre espacios Hausdorff compactos. Nótese que:

$$\forall E\in 2^{\boldsymbol{X}} : \mathbf{2}^g\mathbf{2}^f(E)=\mathbf{2}^g(\mathbf{2}^f(E))=g[f[E]]=gf[E]=\mathbf{2}^{gf}(E).$$

De aquí que $\mathbf{2}^g\circ\mathbf{2}^f=\mathbf{2}^{g\circ f}$.

Se concluye de los incisos (i) y (ii) que $\mathbf{2}^{-}$: **HComp** $\to$ **HComp** es un funtor. ■

2.35 Corolario. Si dos espacios en la categoría **HComp** son homeomorfos entonces sus hiperespacios de cerrados son homeomorfos entre sí.

2.36 Proposición. Si $\mathscr{B}$ es una base para un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ y β es la colección de vietóricos en $2^{\boldsymbol{X}}$ determinados por colecciones finitas de elementos de $\mathscr{B}$ entonces β es una base para el hiperespacio $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$.

Demostración. Sea $\mathscr{U}=\{U_1,\dots,U_n\}$ una colección finita de conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$. Si $E\in\langle U_1,\dots,U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ entonces, para cada i desde 1 hasta n se elige $x_i\in E\cap U_i$. Como $E\subseteq\bigcup_{i=1}^n U_i$ entonces, para todo $x\in E$ se puede tomar $B_x\in\mathscr{B}$ tal que:

$$x\in B_x\subseteq\bigcap\{U\in\mathscr{U}\mid x\in U\}.$$

Dado que E es un conjunto compacto en $\boldsymbol{X}$, es posible hallar $y_1,\dots,y_m\in E$ tales que $E\subseteq\bigcup_{j=1}^m B_{y_j}$. Más aún, se puede pedir que $m\geq n$ y que $y_i=x_i$ para cada i desde 1 hasta n. Claramente $E\in\langle B_{y_1},\dots,B_{y_m}\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ pues $y_j\in E\cap B_{y_j}$ para cada j entre 1 y n. Luego, considérese $F\in\langle B_{y_1},\dots,B_{y_m}\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Se observa que $F\subseteq\bigcup_{j=1}^m B_{y_j}\subseteq\bigcup_{i=1}^n U_i$. Además, para cada i desde 1 hasta n se tiene que $x_i=y_i\in U_i$ así que $B_{y_i}\subseteq U_i$. Ya que $F\cap B_{y_i}\neq\varnothing$ se sigue que $F\cap U_i\neq\varnothing$. Esto implica que $F\in\langle U_1,\dots,U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ y, en consecuencia,

$$E\in\langle B_{y_1},\dots,B_{y_m}\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}\subseteq\langle U_1,\dots,U_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}.$$

De aquí es posible concluir que β es una base para $2^{\boldsymbol{X}}$. ■

2.37 Proposición. Considérense $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos. Si se define

$$\forall E\in 2^{\boldsymbol{X}},F\in 2^{\boldsymbol{Y}} : \times(E,F)=E\times F,$$

entonces la función *producto binario*, $\times:\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}\times\mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}\to\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}$, es continua.

Demostración. Debido a la *Proposición 2.36* bastará verificar que, dadas dos colecciones finitas, $\mathscr{U}=\{U_1,\dots,U_n\}$ y $\mathscr{V}=\{V_1,\dots,V_n\}$, formadas por conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ y conjuntos abiertos en $\boldsymbol{Y}$ respectivamente, se cumple que la imagen inversa bajo la función $\times$ del vietórico $\langle U_1\times V_1,\dots,U_n\times V_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}\times\mathbf{2}^{\boldsymbol{Y}}$. Obsérvese que,

$$\langle U_1\times V_1,\dots,U_n\times V_n\rangle_{2^{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}}=\langle\bigcup_{i=1}^n(U_i\times V_i)\rangle_{2^{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}}\cap\left(\bigcap_{i=1}^n\langle X\times Y,U_i\times V_i\rangle_{2^{\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}}}\right).$$

Así, la prueba concluirá si se demuestra que la imagen inversa bajo $\times$ de cada uno de los intersectandos en el lado derecho de la igualdad anterior es un conjunto abierto en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^Y}$. Nótese que, para todo i entre 1 y n y para cualesquiera $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$ y $F \in 2^{\boldsymbol{Y}}$, $(E \times F) \cap (U_i \times V_i) \neq \varnothing$ si y sólo si $E \cap U_i \neq \varnothing$ y $F \cap V_i \neq \varnothing$. De aquí se deduce que,

$$\times^{-1}[\langle X \times Y, U_i \times V_i \rangle_{2^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}}] = \langle X, U_i \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle Y, V_i \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}},$$

el cual claramente es un conjunto abierto en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^Y}$. Ahora, se demostrará que el conjunto $\times^{-1}[\langle \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i) \rangle_{2^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}}]$ también es abierto en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^Y}$. Para esto, sean $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$ y $F \in 2^{\boldsymbol{Y}}$ tales que $E \times F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i)$. Nótese que, para cada $x \in E$ y $y \in F$, existe algún i entre 1 y n tal que $(x, y) \in U_i \times V_i$. Así, es posible considerar $U(x) = \bigcap\{U \in \mathscr{U} \mid x \in U\}$ y $V(y) = \{V \in \mathscr{V} \mid y \in V\}$. Claramente, $\{U(x)\}_{x \in E}$ es una cubierta abierta de E en $\boldsymbol{X}$ y $\{V(y)\}_{y \in F}$ es una cubierta abierta de F en $\boldsymbol{Y}$. Dado que E es compacto en $\boldsymbol{X}$ y F es compacto en $\boldsymbol{Y}$ es posible hallar $x_1, \ldots, x_m \in E$ y $y_1, \ldots, y_s \in F$ de manera que

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U(x_j) \quad \text{y} \quad F \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} V(y_k).$$

De aquí que, si $U = \bigcup_{j=1}^{m} U(x_j)$ y $V = \bigcup_{k=1}^{s} V(y_k)$ entonces $(E, F) \in \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle V \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}}$. Ahora, sea $(G, H) \in \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle V \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}}$. Para cada $x \in G$ y $y \in H$ existen j entre 1 y m y k entre 1 y m tales que $x \in U(x_i)$ y $y \in V(y_k)$. Nótese que $(x_j, y_k) \in E \times F$ así que, para algún i entre 1 y n, $(x_j, y_k) \in U_i \times V_i$. Como $x_i \in U_i$ y $y_k \in V_i$ se sigue que $U(x_j) \subseteq U_i$ y $V(y_k) \subseteq V_i$. Por lo tanto, $(x, y) \in U(x_j) \times V(y_k) \subseteq U_i \times V_i$ lo cual implica que $G \times H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i)$. De lo anterior se deduce que

$$(E, F) \in \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle V \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}} \subseteq \times^{-1}[\langle \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i) \rangle_{2^{\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}}}],$$

donde $\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle V \rangle_{2^{\boldsymbol{Y}}}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^Y}$. Esto concluye la prueba. ■

2.38 Proposición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico. Si se define,

$$\forall E, F \in 2^{\boldsymbol{X}} : \cup(E, F) = E \cup F,$$

entonces la función *unión binaria*, $\cup : \mathbf{2^X} \times \mathbf{2^X} \to \mathbf{2^X}$, es continua.

Demostración. Sea U un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$. Para cualesquiera $E, F \in 2^{\boldsymbol{X}}$ ocurre que $E \cup F \subseteq U$ si y sólo si $E \subseteq U$ y $F \subseteq U$. Nótese también que $(E \cup F) \cap U \neq \varnothing$ si y sólo si $E \cap U \neq \varnothing$ ó $F \cap U \neq \varnothing$. De esta manera,

$$\cup^{-1}[\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}] = \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \text{ y } \cup^{-1}[\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}] = (\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \times 2^{\boldsymbol{X}}) \cup (2^{\boldsymbol{X}} \times \langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}).$$

Así, los conjuntos $\cup^{-1}[\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}]$ y $\cup^{-1}[\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}]$ son abiertos en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^X}$, para cada conjunto U abierto en $\boldsymbol{X}$. Por tanto, la función $\cup : \mathbf{2^X} \times \mathbf{2^X} \to \mathbf{2^X}$ es continua. ■

2.39 Proposición. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Si se define,

$$\forall \mathcal{F} \in 2^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}} : \bigcup(\mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F},$$

entonces la función *unión amalgamada*, $\bigcup : \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$, es continua.

Demostración. Primeramente se probará que la función $\bigcup$ está bien definida, es decir, $\bigcup \mathcal{F} \in 2^{\boldsymbol{X}}$ para cada $\mathcal{F} \in 2^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}}$. Dado que $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos su unión no puede ser vacía, así que resta ver que $\bigcup \mathcal{F}$ es un conjunto cerrado y compacto en $\boldsymbol{X}$. Por hipótesis, $\boldsymbol{X}$ es un espacio Hausdorff así que bastará con demostrar que el conjunto $\bigcup \mathcal{F}$ es compacto en $\boldsymbol{X}$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $\bigcup \mathcal{F}$ en $\boldsymbol{X}$. Obsérvese que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ también es una cubierta para cada $F \in \mathcal{F}$. Como F es compacto en $\boldsymbol{X}$ existen $n(F) \in \mathbb{N}$ y $\alpha(F,1), \ldots, \alpha(F, n(F)) \in \Lambda$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(F)} U_{\alpha(F,i)}$. Más aún, es posible escoger estos índices de tal manera que $F \cap U_{\alpha(F,i)} \neq \varnothing$ para cada i desde 1 hasta $n(F)$. En consecuencia, para cada $F \in \mathcal{F}$, $F \in \langle U_{\alpha(F,1)}, \ldots, U_{\alpha(F,n(F))} \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ lo cual implica que $\{\langle U_{\alpha(F,1)}, \ldots, U_{\alpha(F,n(F))} \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}\}_{F \in \mathcal{F}}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}$ en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. Debido a que $\mathcal{F}$ es compacto en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ existen $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \langle U_{\alpha(F_j,1)}, \ldots, U_{\alpha(F_j,n(F_j))} \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}.$$

Por lo tanto $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n(F_j)} U_{\alpha(F_j,i)}$, esto es, $\bigcup \mathcal{F}$ se cubre con una cantidad finita de abiertos de la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Se sigue que $\bigcup \mathcal{F}$ es compacto en $\boldsymbol{X}$

Finalmente, resta ver la continuidad de la función unión amalgamada. Para esto tómese un conjunto U abierto en $\boldsymbol{X}$. Es fácil verificar que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq U$ si y sólo si $F \subseteq U$ para cada $F \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \subseteq \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. También ocurre que $(\bigcup \mathcal{F}) \cap U \neq \varnothing$ si y sólo si $F \cap U \neq \varnothing$ para algún $F \in \mathcal{F}$, o equivalentemente, $\mathcal{F} \cap \langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \neq \varnothing$. De esta forma:

$$\bigcup{}^{-1}[\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}] = \langle \langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \rangle_{2^{2^{\boldsymbol{X}}}} \quad \text{y} \quad \bigcup{}^{-1}[\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}] = \langle 2^{\boldsymbol{X}}, \langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \rangle_{2^{2^{\boldsymbol{X}}}}.$$

Dado que $\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ y $\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ son abiertos en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ entonces $\bigcup^{-1}[\langle U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}]$ y $\bigcup^{-1}[\langle X, U \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}]$ son abiertos en $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}}$. Se concluye que $\bigcup : \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es una función continua. ∎

2.40 Proposición. Para todo espacio topológico regular $\boldsymbol{X}$ el conjunto

$$\mathcal{F} = \{(E, F) \in 2^{\boldsymbol{X}} \times 2^{\boldsymbol{X}} \mid E \subseteq F\}$$

es cerrado en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \times \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$.

Demostración. Como $\boldsymbol{X}$ es regular, la *Proposición 2.14* implica que el hiperespacio $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ es Hausdorff. Luego, se observa que $E \subseteq F$ si y sólo si $E \cup F = F$, de manera que $\mathcal{F}$ es el conjunto de puntos donde coinciden las funciones unión binaria $\cup : \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \times \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ y la proyección canónica de $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \times \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ en la segunda coordenada. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{F}$ debe ser cerrado en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \times \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. ∎

2.41 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico regular entonces, para cada $E \in 2^{\boldsymbol{X}}$, el conjunto $\{F \in 2^{\boldsymbol{X}} \mid E \subseteq F\}$ es cerrado en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$.

Demostración. Se define la función $\varphi : \mathbf{2^X} \hookrightarrow \mathbf{2^X} \times \mathbf{2^X}$ de la siguiente manera:

$$\forall F \in \mathbf{2^X} : \varphi(F) = (E, F).$$

Es claro que esta función es continua. Por la *Proposición 2.40* se tiene que el conjunto $\mathcal{F} = \{(E, F) \in 2^{\boldsymbol{X}} \times 2^{\boldsymbol{X}} \mid E \subseteq F\}$ es cerrado en $\mathbf{2^X} \times \mathbf{2^X}$ y, en consecuencia, $\varphi^{-1}[\mathcal{F}] = \{F \in 2^{\boldsymbol{X}} \mid E \subseteq F\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbf{2^X}$. ■

2.42 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico regular y $\mathcal{A} \subseteq 2^{\boldsymbol{X}}$. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto linealmente ordenado por la inclusión entonces $cl_{\mathbf{2^X}}\, \mathcal{A}$ también es linealmente ordenado por la inclusión.

Demostración. El resultado se probará por contrarrecíproca. Supóngase que la inclusión no constituye un orden lineal en $cl_{\mathbf{2^X}}\, \mathcal{A}$, es decir, existen dos elementos $E, F \in cl_{\mathbf{2^X}}\, \mathcal{A}$ que no son comparables bajo dicha relación. Como $E \nsubseteq F$, la *Proposición 2.40* asegura que existe un par de conjuntos abiertos en $\mathbf{2^X}$, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1$, de manera que $E \in \mathcal{U}_1$, $F \in \mathcal{V}_1$ y para cualesquiera $H \in \mathcal{U}_1$, $K \in \mathcal{V}_1$ se cumple que $H \nsubseteq K$. Similarmente, como $F \nsubseteq E$ existen dos conjuntos $\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{V}_2$ abiertos en $\mathbf{2^X}$ tales que $E \in \mathcal{U}_2$, $F \in \mathcal{V}_2$ y $K \nsubseteq H$ siempre que $H \in \mathcal{U}_2$ y $K \in \mathcal{V}_2$. Defínanse $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Ya que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son vecindades abiertas en $\mathbf{2^X}$ de E y F, respectivamente, y $E, F \in cl_{\mathbf{2^X}}\, \mathcal{A}$ es posible hallar $H, K \in \mathcal{A}$ tales que $H \in \mathcal{U}$ y $K \in \mathcal{V}$. Por tanto, $H \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq H$, esto es, existen dos elementos de $\mathcal{A}$ que no son comparables bajo la relación de inclusión. De aquí se concluye que la inclusión no es un orden lineal en $\mathcal{A}$. ■

2.43 Lema. Las funciones *mínimo* y *máximo*, mín, máx: $\mathbf{2^I} \to \boldsymbol{I}$, son continuas.

Demostración. Obsérvese que para cada $F \in 2^{\boldsymbol{I}}$ y $\alpha \in I$, $\min F < \alpha$ si y sólo si existe $x \in F$ tal que $x < \alpha$. También ocurre que $\min F > \alpha$ si y sólo si $x > \alpha$ para cada $x \in F$. De esta forma se tiene que

$$\min{}^{-1}[[0, \alpha)] = \langle I, [0, \alpha)\rangle_{2^{\boldsymbol{I}}} \quad \text{y} \quad \min{}^{-1}[(\alpha, 1]] = \langle(\alpha, I]\rangle_{2^{\boldsymbol{I}}}.$$

Análogamente se verifica que

$$\max{}^{-1}[[0, \alpha)] = \langle[0, \alpha)\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \quad \text{y} \quad \max{}^{-1}[(\alpha, 1]] = \langle I, (\alpha, 1]\rangle_{2^{\boldsymbol{I}}}.$$

Ya que la imagen inversa de cada subbásico canónico de $\boldsymbol{I}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{2^I}$, las funciones $\min : \mathbf{2^I} \to \boldsymbol{I}$ y $\max : \mathbf{2^I} \to \boldsymbol{I}$ son continuas. ■

2.44 Corolario. Si $\boldsymbol{X}$ es espacio topológico metrizable entonces la función *diámetro*, $\mathrm{diam}_{\boldsymbol{X}} : \mathbf{2^X} \to \boldsymbol{X}$, es continua.

Demostración. Bastará notar que, si d es una métrica admisible para $\boldsymbol{X}$ entonces, para cada $F \in 2^{\boldsymbol{X}}$, se tiene que $\mathrm{diam}_{\boldsymbol{X}}\, F = \max d[F \times F]$. ■

§3 Hiperespacio de continuos

2.45 Definición. Se define el *hiperespacio de continuos* de un espacio topológico $\boldsymbol{X}$, el cual se denotará por $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, como el subespacio de $\boldsymbol{CL}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre el conjunto

$$C(\boldsymbol{X}) = \{F \in CL(\boldsymbol{X}) \mid F \text{ es conexo y compacto en } \boldsymbol{X}\}.$$

2.46 Observación. (1) Cuando $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 ocurre que

$$F_1(\boldsymbol{X}) \subseteq C(\boldsymbol{X}) \subseteq 2^{\boldsymbol{X}} \subseteq CL(\boldsymbol{X}).$$

(2) Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo de Hausdorff entonces la colección $C(\boldsymbol{X})$ consta de todos los subcontinuos de $\boldsymbol{X}$. En dicho caso $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es llamado *hiperespacio de subcontinuos de* $\boldsymbol{X}$.
(3) Al igual que en la *Proposición 2.8* se demuestra que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ siempre que $\boldsymbol{Y}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{X}$.

2.47 Proposición. El hiperespacio de continuos de un espacio topológico Hausdorff es un subespacio cerrado de su hiperespacio de compactos.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio T_2. Si $F \in 2^{\boldsymbol{X}}$ y F es disconexo en $\boldsymbol{X}$ entonces es posible hallar un par de conjuntos no vacíos, ajenos y cerrados en $\boldsymbol{X}$, llámense H y K, de manera que $F = H \cup K$. Nótese que H y K son compactos en $\boldsymbol{X}$ así que se pueden elegir dos conjuntos U y V, ajenos y abiertos en $\boldsymbol{X}$, de manera que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$. De esta forma,

$$F = H \cup K \subseteq U \cup V, \quad F \cap U = H \neq \varnothing \ \text{ y } \ F \cap V = K \neq \varnothing,$$

esto es, $F \in \langle U, V\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$. Más aún, si $E \in \langle U, V\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ los conjuntos $E \cap U$ y $E \cap V$ forman una disconexión de E en $\boldsymbol{X}$. Esto implica que,

$$F \in \langle U, V\rangle_{2^{\boldsymbol{X}}} \subseteq 2^{\boldsymbol{X}} \setminus C(\boldsymbol{X}).$$

Por lo tanto, $2^{\boldsymbol{X}} \setminus C(\boldsymbol{X})$ es abierto en $\boldsymbol{2^X}$ de donde se sigue que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado del hiperespacio $\boldsymbol{2^X}$. ■

2.48 Observación. (1) Debido al *Teorema 2.17* y a la *Proposición 2.47*, el hiperespacio $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es Hausdorff compacto siempre que $\boldsymbol{X}$ lo sea. Además, si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una función continua entre espacios Hausdorff compactos entonces $f[K] \in C(\boldsymbol{Y})$ para todo $K \in C(\boldsymbol{X})$. Por tanto, si $\imath : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{2^X}$ y $\jmath : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{2^Y}$ son las funciones inclusión respectivas, existe una única función continua $\boldsymbol{C}(f) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ de manera que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{2^X} \arrow[r, "\boldsymbol{2}^f"] & \boldsymbol{2^Y} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \arrow[u, hook, "\imath"] \arrow[r, "\boldsymbol{C}(f)"'] & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \arrow[u, hook, "\jmath"'] \end{tikzcd} \qquad \boldsymbol{2}^f \circ \imath = \jmath \circ \boldsymbol{C}(f).$$

La función $\boldsymbol{C}(f) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ se denomina *función inducida por $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ a los hiperespacios de continuos.* Así, es posible considerar el *funtor hiperespacio de continuos* $\boldsymbol{C}$: **HComp** $\to$ **HComp** el cual es un subfuntor de $\mathbf{2}^{-}$: **HComp** $\to$ **HComp**.
(2) Como consecuencia del inciso (1) se tiene que el hiperespacio de continuos es un invariante topológico en la categoría **HComp**.

2.49 Lema. Sea $\boldsymbol{Z}$ el subespacio de $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$ inducido sobre $Z = \{(x, y) \in I \times I \mid x \leq y\}$. Si se define

$$\forall (x, y) \in Z : \varphi(x, y) = [x, y],$$

entonces la función $\varphi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{C}(I)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Obsérvese que, para cada $K \in C(\boldsymbol{I})$ se tiene que $\text{mín}\, K \leq \text{máx}\, K$, esto es, $(\text{mín}\, K, \text{máx}\, K) \in Z$. Así, por el *Lema 2.43*, la función $\psi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{Z}$ dada por

$$\forall K \in C(\boldsymbol{I}) : \psi(K) = (\text{mín}\, K, \text{máx}\, K),$$

es una función continua. Además, para todo $K \in C(\boldsymbol{I})$, $K = [\text{mín}\, K, \text{máx}\, K]$ y para cada $(x, y) \in Z$ se tiene que $[x, y] \in C(\boldsymbol{I})$ y $\psi([x, y]) = (x, y)$. De aquí se deduce que la función $\psi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{Z}$ es una biyección. Como $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I})$ y $\boldsymbol{Z}$ son espacios Hausdorff compactos se sigue que $\psi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{Z}$ es un homeomorfismo. Finalmente, nótese que para cada $(x, y) \in Z$, $\psi(\varphi(x, y)) = (x, y)$, es decir, $\psi \circ \varphi = id\, Z$. Por lo tanto, ya que $\varphi = \psi^{-1}$, la función $\varphi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I})$ es un homeomorfismo. ∎

2.50 Lema. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Si $\mathcal{F} \in C(\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}})$ y $\mathcal{F} \cap C(\boldsymbol{X}) \neq \varnothing$ entonces $\bigcup \mathcal{F} \in C(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Nómbrese $F = \bigcup \mathcal{F}$. Debido a la *Proposición 2.39*, $F \in 2^{\boldsymbol{X}}$ así que resta probar que F es conexo en $\boldsymbol{X}$. Sean H y K conjuntos ajenos y cerrados en $\boldsymbol{X}$ tales que $F = H \cup K$. Si se elige $L \in \mathcal{F} \cap C(\boldsymbol{X})$ entonces $L \subseteq F = H \cup K$. Como L es conexo en $\boldsymbol{X}$, necesariamente ocurre que $L \subseteq H$ o $L \subseteq K$. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que $L \subseteq H$. Obsérvese que los conjuntos $\mathcal{H} = \langle H \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ y $\mathcal{K} = \langle X, K \rangle_{2^{\boldsymbol{X}}}$ son ajenos y cerrados en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. Además, $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ y $L \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$. Dado que $\mathcal{F}$ es conexo en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$ se tiene que $\mathcal{K} = \varnothing$ y, en consecuencia, $K = \varnothing$. De aquí se sigue que F es conexo en $\boldsymbol{X}$. Finalmente, nótese que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$, pues $\boldsymbol{X}$ es Hausdorff, y por tanto, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}))$ es subespacio de $\boldsymbol{C}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}})$. De esta manera, $\mathcal{F} \in C(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}))$ implica $\mathcal{F} \in C(\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}})$ y $\mathcal{F} \cap C(\boldsymbol{X}) = \mathcal{F} \neq \varnothing$. ∎

2.51 Definición. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo T_2. Una función continua $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \mathbf{R}$ es una *función de Whitney* si cumple las siguientes propiedades:

(i) Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

(ii) Si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ y $K \subset L$ entonces $\mu(K) < \mu(L)$.

2.52 Observación. (1) La propiedad (ii) en la *Definición 2.51* es equivalente a que la función $\mu : (C(\boldsymbol{X}), \subseteq) \to (\mathbb{R}, \leq)$ sea estrictamente creciente.
(2) Dado $K \in C(\boldsymbol{X})$ se elige $x \in K$. Ya que $\boldsymbol{X}$ es un continuo de Hausdorff se tiene que $\{x\}, X \in C(\boldsymbol{X})$ y $\{x\} \subseteq K \subseteq X$. De la condición (i) en la *Definición 2.51* y

del inciso (1), se sigue que $0 \leq \mu(K) \leq \mu(X)$. Así, es posible restringir el codominio de μ al intervalo $[0, \mu(X)]$ y obtener una función continua que sigue cumpliendo las propiedades (i)-(ii) en la *Definición 2.51.* Debido a esta observación, en lo subsecuente se considerarán funciones de Whitney de la forma $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$, donde $\boldsymbol{J}$ sea el subespacio de $\mathbf{R}$ inducido sobre intervalo $J = [0, \mu(X)]$.
(3) Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo no degenerado y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney cualquiera entonces se puede definir $\mu' : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ como

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \mu'(K) = \mu(K)/\mu(X).$$

Nótese que $\mu' : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ también es una función de Whitney y además $\mu'(X) = 1$.
(4) Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ continuos, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $\varphi : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ una inmersión. Si $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ es el subespacio de $\boldsymbol{J}$ inducido sobre el intervalo $[0, \mu(\varphi[Y])]$ y $\jmath : \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{J}$ es su respectiva función inclusión entonces existe una única función continua $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\mu} & \boldsymbol{J} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{C}(\varphi)}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \jmath} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow[\widetilde{\mu}]{} & \widetilde{\boldsymbol{J}} \end{array} \qquad \mu \circ \boldsymbol{C}(\varphi) = \jmath \circ \widetilde{\mu}.$$

Obsérvese que $\widetilde{\mu}$ también satisface (i) y (ii) en la *Definición 2.51.* Esto implica que $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ también es una función de Whitney. Un caso particular es cuando $\varphi = \imath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ es la función inclusión pues $\boldsymbol{C}(\imath) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es la función inclusión respectiva y $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ es la restricción de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$.

2.53 TEOREMA. Todo continuo admite funciones de Whitney para su hiperespacio de continuos.

Demostración. Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo elíjase un conjunto $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que sea denso en $\boldsymbol{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese la función continua $f_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{I}$ dada por:

$$\forall x \in X : f_n(x) = \frac{1}{1 + d(x, p_n)}.$$

Luego, defínase $\mu_n(K) = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_n[K]$, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$. Por el *Corolario 2.44*, la función $\mu_n : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es continua. Aplicando el *Criterio M de Weierstrass* [1, Teorema 10.5] es posible definir una función continua $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ como:

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \mu(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(K)}{2^n}.$$

Se afirma que $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es una función de Whitney.
(i) Dado $x \in X$ ocurre que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mu_n(\{x\}) = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_n[\{x\}] = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} \{f_n(x)\} = 0.$$

Como cada uno de los sumandos de la serie $\sum \frac{\mu_n(\{x\})}{2^n}$ es nulo se sigue que $\mu(\{x\}) = 0$.

(ii) Sean $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ tales que $K \subset L$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se observa que $f_n[K] \subseteq f_n[L]$ y por tanto $\mu_n(K) = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_n[K] \leq \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_n[L] = \mu_n(L)$. Así, para demostrar que $\mu(K) < \mu(L)$ bastará con verificar que $\mu_m(K) < \mu_m(L)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Elíjase $x \in L \setminus K$ y $\epsilon > 0$ de manera que $d(x, K) > \epsilon$. Dado que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto denso en $\boldsymbol{X}$, es posible hallar $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, p_m) < \epsilon/2$. De aquí que,

$$\frac{1}{1+\epsilon/2} < \frac{1}{1+d(x,p_m)} = f_m(x).$$

Luego, para todo $y \in K$ se tiene que $d(y, p_m) \geq d(y, x) - d(x, p_m) > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$. En consecuencia,

$$f_m(y) = \frac{1}{1+d(y,p_m)} < \frac{1}{1+\epsilon/2} < f_m(x).$$

Así, $\max f_m[K] < f_m(x) \leq \max f_m[L]$. Como $K \subseteq L$ implica $\min f_m[K] \geq \min f_m[L]$ se sigue que,

$$\operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_m[K] = \max f_m[K] - \min f_m[K] < \max f_m[L] - \min f_m[L] = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{I}} f_m[L],$$

esto es, $\mu_m(K) < \mu_m(L)$. De esta forma se verifica que $\mu(K) < \mu(L)$.

Conclúyase de los incisos (i) y (ii) que $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es una función de Whitney. ■

2.54 Definición. Considérese un espacio topológico $\boldsymbol{X}$. Un *arco ordenado* en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es una función continua $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ tal que, para cualesquiera $s, t \in I$, $s < t$ implica $\alpha(s) \subset \alpha(t)$. Si $K, L, \in C(\boldsymbol{X})$, $\alpha(0) = K$, $\alpha(1) = L$ y $B = \alpha(t)$, para algún $t \in I$, entonces se dirá que $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ *va desde K hasta L pasando por B.*

2.55 Observación. (1) La última condición en la *Definición 2.54* es equivalente a que la función $\alpha : (I, \leq) \to (C(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ sea estrictamente creciente. En consecuencia, si $\alpha(0) = K$ y $\alpha(1) = L$, se sigue que $K \subseteq \alpha(t) \subseteq L$, para todo $t \in I$. Además, como $(I, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado entonces la imagen $(\alpha[I], \subseteq)$ es un conjunto linealmente ordenado.
(2) Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio Hausdorff compacto, se sigue de la *Definición 2.54* y del inciso (1) que todo arco ordenado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es una función continua e inyectiva en la categoría **HComp** y, por lo tanto, es una inmersión. De aquí se deduce que la imagen de un arco ordenado es un arco en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

2.56 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo T_2 y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dados K y L subcontinuos de $\boldsymbol{X}$ y $t \in J$ tales que $K \subset L$ y $\mu(K) < t < \mu(L)$ existe un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$, llámese B, de manera que

$$K \subset B \subset L \quad \text{y} \quad \mu(B) = t.$$

Demostración. Defínase $\mathcal{A} = \{N \in C(\boldsymbol{X}) \mid K \subseteq N \subseteq L \text{ y } \mu(N) \geq t\}$. Obsérvese que, como $L \in \mathcal{A}$, el conjunto $\mathcal{A}$ es no vacío. Además, se deduce de las *Proposiciones 2.7 y*

2.41 y de la continuidad de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ que $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Así, es posible elegir $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = \text{mín}\,\mu[\mathcal{A}]$. Ahora, considérese el conjunto $\mathcal{B} = \{N \in C(\boldsymbol{X}) \mid K \subseteq N \subseteq E$ y $\mu(N) \leq t\}$ el cual también es no vacío pues $K \in \mathcal{B}$. Un argumento similar al caso de $\mathcal{A}$ muestra que $\mathcal{B}$ es cerrado en $C(\boldsymbol{X})$ por lo cual existe $F \in \mathcal{B}$ de manera que $\mu(F) = \text{máx}\,\mu[\mathcal{B}]$. Claramente ocurre que $K \subseteq F \subseteq E \subseteq L$ y $\mu(F) \leq t \leq \mu(E)$. Más aún, para todo $N \in C(\boldsymbol{X})$ con $K \subseteq N \subset E$ se cumple que $\mu(N) < \mu(E) = \text{mín}\,\mu[\mathcal{A}]$ así que $N \notin \mathcal{A}$. Dado que $K \subseteq N \subseteq L$, necesariamente se tiene que $\mu(N) < t$ y en consecuencia $N \in \mathcal{B}$. Luego, como $\mu(N) \leq \mu(F) = \text{máx}\,\mu[\mathcal{B}]$ no puede ocurrir que $F \subset N$. Esto demuestra que no existe ningún $N \in C(\boldsymbol{X})$ tal que $F \subset N \subset E$. De la *Proposición 1.15* se deduce que $F = E$. Definiendo $B = F = E$ se cumple que $\mu(B) = \mu(F) \leq t \leq \mu(E) = \mu(B)$, esto es, $\mu(B) = t$. Finalmente, como $K \subseteq B \subseteq L$ y $\mu(K) < \mu(B) < \mu(L)$ se sigue que $K \subset B \subset L$. ■

2.57 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo, para cualesquiera $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ con $K \subset L$ es posible hallar un arco ordenado desde K hasta L en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Dado que $\boldsymbol{X}$ es un continuo, el *Teorema 2.53* asegura la existencia de una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$. Luego, $K \subset L$ implica $\mu(K) < \mu(L)$, por lo cual el intervalo $(\mu(K), \mu(L))$ es no vacío. Así, $D = \{\mu(K), \mu(L)\} \cup ((\mu(K), \mu(L)) \cap \mathbb{Q})$ es un conjunto infinito numerable. Considérese una enumeración inyectiva $D = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $r_1 = \mu(K)$ y $r_2 = \mu(L)$. Esta indización permite aplicar el Principio de Definición por Recurrencia para construir una función $\gamma : D \to C(\boldsymbol{X})$ de manera que,

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\gamma(r_n)) = r_n$,

(ii) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $\gamma(r_n) \subset \gamma(r_m)$ siempre que $r_n < r_m$.

(Paso Base) Defínanse $\gamma(r_1) = K$ y $\gamma(r_2) = L$. Es claro que γ restringida a $\{r_1, r_2\}$ cumple las propiedades (i) y (ii).

(Paso Recursivo) Supóngase que se ha definido γ en $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ para $n \geq 2$. Nótese que $r_1 \neq r_{n+1} \neq r_2$ por lo cual $r_1 < r_{n+1} < r_2$. Así, es posible hallar $r_N, r_M \in R$ tales que $r_N = \text{máx}\{r_k \in R \mid r_k < r_{n+1}\}$ y $r_M = \text{mín}\{r_k \in R \,|\, r_k > r_{n+1}\}$. Dado que $r_N < r_{n+1} < r_M$ y la función γ definida en R satisface (i) y (ii) se tiene que

$$\gamma(r_N) \subset \gamma(r_M) \quad \text{y} \quad \mu(\gamma(r_N)) < r_{n+1} < \mu(\gamma(r_M)).$$

Por el *Lema 2.56* existe $B \in C(\boldsymbol{X})$ tal que $\gamma(r_N) \subset B \subset \gamma(r_M)$ y $\mu(B) = r_{n+1}$. Claramente, si se define $\gamma(r_{n+1}) = B$ se verifica que $\mu(\gamma(r_{n+1})) = r_{n+1}$. Además, para cada k entre 1 y n ocurre que $r_k < r_{n+1}$ o bien $r_k > r_{n+1}$. En el primer caso se tiene que $r_k \leq r_N$ y por tanto $\gamma(r_k) \subseteq \gamma(r_N) \subset \gamma(r_{n+1})$. En el segundo caso, $r_M \leq r_k$ y así $\gamma(r_{n+1}) \subset \gamma(r_M) \subseteq \gamma(r_k)$. Esto demuestra que la función γ definida en $\{r_1, \ldots, r_{n+1}\}$ también satisface (i) y (ii).

Obsérvese que la condición (i) es equivalente a que $\mu\gamma = id\, D$ mientras que la condición (ii) equivale a que la función $\gamma : (D, \leq) \to (C(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ sea estrictamente creciente. Dado que $(D, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado entonces la imagen $(\gamma[D], \subseteq)$ también es un conjunto linealmente ordenado. Del *Lema 2.42* se deduce que la colección $\mathcal{A} = cl_{\boldsymbol{C(X)}}\, \gamma[D] \subseteq cl_{\boldsymbol{2^X}}\, \gamma[D]$ se encuentra linealmente ordenada por la relación de inclusión. Además, $\mu : \boldsymbol{C(X)} \to \boldsymbol{J}$ es una función cerrada así que,

$$\mu[\mathcal{A}] = \mu[cl_{\boldsymbol{C(X)}}\, \gamma[D]] = cl_{\boldsymbol{J}}\, \mu[\gamma[D]] = cl_{\boldsymbol{J}}\, D = [\mu(K), \mu(L)].$$

Por tanto, si $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ es el subespacio de $\boldsymbol{C(X)}$ inducido sobre $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{Y}$ es el subespacio de $\boldsymbol{J}$ inducido sobre el intervalo $Y = [\mu(K), \mu(L)]$ e $\imath : \boldsymbol{\mathfrak{F}} \hookrightarrow \boldsymbol{C(X)}$ y $\jmath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{J}$ son las funciones inclusión respectivas entonces existe una función continua y suprayectiva $\lambda : \boldsymbol{\mathfrak{F}} \to \boldsymbol{Y}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C(X)} \arrow[r, "\mu"] & \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{\mathfrak{F}} \arrow[u, hook, "\imath"] \arrow[r, "\lambda"'] & \boldsymbol{Y} \arrow[u, hook, "\jmath"'] \end{tikzcd} \qquad \mu \circ \imath = \jmath \circ \lambda.$$

Como λ es una restricción de $\mu : (C(\boldsymbol{X}), \subseteq) \to (J, \leq)$ que es una función estrictamente creciente *(Observación 2.52 (1))* entonces $\lambda : (\mathcal{A}, \subseteq) \to (Y, \leq)$ también es una función estrictamente creciente. Ya que $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ es un conjunto linealmente ordenado se deduce que λ es una función inyectiva y por lo tanto $\lambda : \boldsymbol{\mathfrak{F}} \to \boldsymbol{Y}$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff compactos. Considérese la función continua $\varphi : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Y}$ dada por,

$$\forall t \in I : \varphi(t) = \mu(K) + t(\mu(L) - \mu(K)).$$

De esta forma la función $\alpha = \imath\lambda^{-1}\varphi : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C(X)}$ es continua. Más aún, ocurre que $\alpha : (I, \leq) \to (C(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ es una función estrictamente creciente por ser composición de funciones estrictamente crecientes. Dado que $K, L \in \gamma[D] \subseteq \mathcal{A}$, $\lambda(K) = \mu(K) = \varphi(0)$ y $\lambda(L) = \mu(L) = \varphi(1)$ entonces $\alpha(0) = \lambda^{-1}(\varphi(0)) = K$ y $\alpha(1) = \lambda^{-1}(\varphi(1)) = L$. Esto demuestra que $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C(X)}$ es un arco ordenado desde K hasta L. ■

2.58 Corolario. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo no degenerado y $K \in C(\boldsymbol{X})$. Para cada $p \in K$ existe un arco ordenado $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C(X)}$ que va desde $\{p\}$ hasta X pasando por K.

Demostración. Si $K = \{p\}$ o $K = X$ pues basta aplicar el *Teorema 2.57*. Así, supóngase que $\{x\} \subset K \subset X$. Elíjanse dos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C(X)}$ que vayan desde $\{p\}$ hasta K y desde K hasta X, respectivamente. Dado que $\alpha_1(1) = K = \alpha_2(0)$, es posible definir un función continua $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C(X)}$ como:

$$\forall t \in I : \alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_2(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Obsérvese que $\alpha(0) = \{p\}$, $\alpha(\frac{1}{2}) = K$ y $\alpha(1) = X$. Dados $s, t \in I$ con $s <$ ocurre que:
(i) Si $t \leq \frac{1}{2}$ entonces $0 \leq 2s < 2t \leq 1$ así que

$$\alpha(s) = \alpha_1(2s) \subset \alpha_1(2t) = \alpha(t).$$

(ii) Si $s < \frac{1}{2} < t$ entonces $2s < 1$ y $0 < 2t - 1$ por lo cual

$$\alpha(s) = \alpha_1(2s) \subset \alpha_1(1) = K = \alpha_2(0) \subset \alpha_2(2t-1) = \alpha(t).$$

(iii) Si $\frac{1}{2} \leq s$ entonces $0 \leq 2s - 1 < 2t - 1 \leq 1$ y por tanto

$$\alpha(s) = \alpha_2(2s-1) \subset \alpha_2(2t-1) = \alpha(t).$$

Esto demuestra que $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es un arco ordenado que va desde $\{p\}$ hasta X pasando por K. ■

2.59 TEOREMA. El hiperespacio de subcontinuos de un continuo siempre es un continuo arco conexo.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo. Por el *Teorema 2.32* y la *Proposición 2.47*, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado del continuo $\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{X}}$ así que resta verificar que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es arco conexo. Debido al *Teorema 1.37*, bastará demostrar que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es conexo por trayectorias, para lo cual se aplicará la *Proposición 1.34 (a)*. Si $K \in C(\boldsymbol{X})$ y $K \neq X$ entonces el *Teorema 2.57* afirma la existencia de un arco ordenado $\alpha_K : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ de K a X. Si se define $\alpha_X : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ como la función constante X entonces, para cualquier $K \in C(\boldsymbol{X})$, $\alpha_K : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ parametriza una trayectoria de K a X en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. De esta manera, dados $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ se tiene $\alpha_K(1) = \alpha_L(1) = X$ y por tanto es posible definir una función continua $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ como:

$$\forall t \in I : \alpha(t) = \begin{cases} \alpha_K(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_L(2-2t) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Obsérvese que $\alpha(0) = \alpha_K(0) = K$ y $\alpha(1) = \alpha_L(0) = L$, así que $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es la parametrización de una trayectoria en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que va de K a L. ■

2.60 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo T_2 y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$, $K \subseteq L$ y $\mu(L) - \mu(K) < \delta$ entonces $H_d(K, L) < \epsilon$.

Demostración. Defínase $\mathcal{F} = \{(K, L) \in C(\boldsymbol{X}) \times C(\boldsymbol{X}) \mid K \subseteq L \text{ y } H_d(K, L) \geq \epsilon\}$ y considérese la función continua $\varphi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ dada por:

$$\forall K, L \in C(\boldsymbol{X}) : \varphi(K, L) = |\mu(K) - \mu(L)|.$$

Nótese que $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Además, dado $(K, L) \in \mathcal{F}$ se tiene que $K \subset L$ por lo cual $\mu(K) < \mu(L)$ y $\varphi(K, L) > 0$. De esta manera, si $\delta = \min \varphi[F]$ entonces $\delta > 0$. De aquí que para cualesquiera $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ con $K \subseteq L$ y $\varphi(K, L) = \mu(L) - \mu(K) < \delta$ debe ocurrir que $(K, L) \notin \mathcal{F}$, esto es, $H_d(K, L) < \epsilon$. ■

2.61 TEOREMA. Un continuo es localmente conexo cuando y solamente cuando su hiperespacio de subcontinuos es localmente conexo.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo y supóngase que $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo. Para probar que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es localmente conexo se aplicarán el *Teorema 1.17* y la *Proposición 1.21*. Dado $\epsilon > 0$ y $K \in C(\boldsymbol{X})$ elíjase $p \in K$. Como $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo en p existe $L \in C(\boldsymbol{X})$ y $0 < \delta \leq \epsilon$ de manera que $B_{\boldsymbol{X}}(p,\delta) \subseteq L \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(p,\epsilon)$. Si $B \in C(\boldsymbol{X})$ y $H_d(K,B) < \delta$ entonces, para $p \in K$, existe $q \in B$ tal que $d(p,q) < \delta$ lo cual implica que $q \in B_{\boldsymbol{X}}(p,\delta) \subseteq L$ y $B \cap L \neq \varnothing$. Más aún, $p \in K \cap L$ así que L intersecta a K y a B y por tanto $K \cup L \cup B \in C(\boldsymbol{X})$. Nótese que $B \subseteq N_d(K,\epsilon)$ y $L \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(p,\epsilon) \subseteq N_d(K,\epsilon)$ así que $K \cup L \cup B \subseteq N_d(K,\epsilon)$. Se eligen dos arcos ordenados $\alpha,\beta : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que vayan desde K hasta $K \cup L \cup B$ y desde B hasta $K \cup L \cup B$ respectivamente (en caso de que $K = K \cup L \cup B$ o $B = K \cup L \cup B$ se toman funciones constantes). Claramente, $\mathcal{C} = \alpha[I] \cup \beta[I]$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ con $K, B \in \mathcal{C}$. Además, para cada $C \in \mathcal{C}$, ocurre que $C \subseteq K \cup L \cup B \subseteq N_d(K,\epsilon)$. Si $C \in \alpha[I]$ entonces $K \subseteq C$ así que $K \subseteq N_d(C,\epsilon)$ y si $C \in \beta[I]$ entonces $B \subseteq C$ y $K \subseteq N_d(B,\epsilon) \subseteq N_d(C,\epsilon)$. Esto implica que $H_d(K,C) < \epsilon$, para todo $C \in \mathcal{C}$. De aquí que, para cada $B \in C(\boldsymbol{X})$ con $H_d(K,B) < \delta$, existe un conjunto $\mathcal{C}$ conexo en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ tal que $\mathcal{C} \subseteq B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(K,\epsilon)$. Se deduce que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es conexo en pequeño en el punto K, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$. En consecuencia, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es localmente conexo.

Ahora se supondrá que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es localmente conexo. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$ es posible hallar un subcontinuo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, llámese $\mathcal{C}$, y un número $\delta > 0$ de manera que $B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(\{x\},\delta) \subseteq \mathcal{C} \subseteq B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(\{x\},\epsilon)$. Nótese que, por el *Lema 2.50*, $C = \bigcup \mathcal{C}$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$. Además, $B_{\boldsymbol{X}}(x,\delta) \subseteq C \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x,\epsilon)$ pues, para cada $y \in X$, $d(x,y) = H_d(\{x\},\{y\})$. De lo anterior se deduce que, para cada $x \in X$, $\boldsymbol{X}$ es conexo en pequeño en el punto x y, por tanto, $\boldsymbol{X}$ es localmente conexo. ■

2.62 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Si $x \in X$, $M \in C(\boldsymbol{X})$ y $x \in M$ entonces, para cada $t \in J$, es posible hallar $N \in C(\boldsymbol{X})$ de manera que $\mu(N) = t$, $x \in N$ y

$$M \subseteq N \quad \text{o} \quad N \subseteq M.$$

Demostración. Por el *Corolario 2.58*, existe un arco ordenado $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que va desde $\{x\}$ hasta X pasando por M. Nótese que

$$\mu\alpha(0) = \mu(\{x\}) = 0 \leq t \leq 1 = \mu(X) = \mu\alpha(1)$$

Dado que la función $\mu\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ es continua, el *Teorema del Valor Intermedio* asegura que existe $t_0 \in I$ tal que $\mu\alpha(t_0) = t$. Haciendo $N = \alpha(t_0)$ ocurre que $\mu(N) = t$ y $x \in N$. Además, como los conjuntos M y N pertenecen a la imagen de α se sigue de la *Observación 2.55 (1)* que $M \subseteq N$ o $N \subseteq M$. ■

2.63 TEOREMA. El hiperespacio de subcontinuos de un continuo localmente conexo es contráctil.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo localmente conexo. Nótese que si $\boldsymbol{X}$ consta de un único punto entonces el resultado se sigue inmediatamente. Así, se supondrá que $\boldsymbol{X}$ es no degenerado. Por el *Teorema 2.53* y la *Observación 2.52 (3)* se puede elegir una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ de manera que $\mu(X) = 1$. Defínase $G : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}$ como:

$$\forall x \in X, t \in I : G(x,t) = \{K \in C(\boldsymbol{X}) \mid x \in K \text{ y } \mu(K) = t\}.$$

Del *Lema 2.62* se puede deducir que, para cada $x \in X$ y $t \in I$, el conjunto $G(x,t)$ es no vacío y cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, esto es, $G(x,t) \in 2^{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}$. Ahora, se demostrará que la función $G : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}$ es continua. Considérense $x \in X$, $t \in I$ y $\epsilon > 0$. Por el *Lema 2.60* existe $\eta > 0$ de manera que, si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ entonces $K \subseteq L$ y $\mu(L) - \mu(K) < \eta$ implican $H_d(K,L) < \epsilon/2$. Luego, como $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es una función uniformemente continua, existe $\xi > 0$ de manera que, para cualesquiera $K, L \in C(\boldsymbol{X})$, $H_d(K,L) < \xi$ implica $|\mu(K) - \mu(L)| < \eta/2$. Defínase $\gamma = \min\{\xi, \epsilon/2\}$. Debido a la conexidad local de $\boldsymbol{X}$ y a la *Proposición 1.21* es posible tomar $B \in C(\boldsymbol{X})$ y $0 < \delta < \gamma/2$ tales que $B_{\boldsymbol{X}}(x,\delta) \subseteq B \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x,\gamma/2)$. Dados $y \in X$, $s \in I$ con $d(x,y) < \delta$ y $|t-s| < \eta/2$ se observa lo siguiente:

(i) Para cada $K \in G(y,s)$ ocurre que $y \in B \cap K$ pues $y \in B_{\boldsymbol{X}}(x,\delta) \subseteq B$. De esta manera, $B \cup K \in C(\boldsymbol{X})$ y $x \in B \cup K$ así que existe $L \in G(x,t)$ tal que $L \subseteq B \cup K$ o $B \cup K \subseteq L$. Además, $B \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(y,\gamma)$ pues $B \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x,\gamma/2)$ y $d(x,y) < \delta < \gamma/2$. Por tanto $B \cup K \subseteq N_d(K,\gamma)$, $H_d(K, B \cup K) < \gamma \leq \xi$ y así $\mu(B \cup K) - \mu(K) < \eta/2$. Se sigue que

$$\begin{aligned}|\mu(B \cup K) - \mu(L)| &\leq |\mu(B \cup K) - \mu(K)| + |\mu(K) - \mu(L)| \\ &= (\mu(B \cup K) - \mu(K)) + |s-t| < \eta/2 + \eta/2 = \eta.\end{aligned}$$

Como los conjuntos $B \cup K$ y L son comparables respecto a la relación de inclusión ocurre que $H_d(B \cup K, L) < \epsilon/2$. De aquí que

$$H_d(K,L) \leq H_d(K, B \cup K) + H_d(B \cup K, L) < \gamma + \epsilon/2 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Esto prueba que para todo $K \in G(y,s)$ existe $L \in G(x,t)$ tal que $H_d(K,L) < \epsilon$.

(ii) Se considera $L \in G(x,t)$. Nótese que $B \cup L \in C(\boldsymbol{X})$ pues $x \in B \cap L$. Como $y \in B \cup L$ se puede hallar $K \in G(y,s)$ tal que $K \subseteq B \cup L$ o $B \cup L \subseteq K$. Debido a que $B \subseteq B_{\boldsymbol{X}}(x,\gamma/2)$ se sigue que $B \cup L \subseteq N_d(L,\gamma)$ y $H_d(L, B \cup L) < \gamma \leq \xi$. Así, $\mu(B \cup L) - \mu(L) < \eta/2$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}|\mu(B \cup L) - \mu(K)| \leq& |\mu(B \cup L) - \mu(L)| + |\mu(L) - \mu(K)| \\ =& (\mu(B \cup L) - \mu(L)) + |t-s| < \eta/2 + \eta/2 = \eta.\end{aligned}$$

Dado que $B \cup L$ y K son conjuntos comparables respecto a la inclusión se sigue que $H_d(B \cup L, K) < \epsilon/2$. Por tanto, ocurre que

$$H_d(L,K) \leq H_d(L, B \cup L) + H_d(B \cup L, K) < \gamma + \epsilon/2 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

De aquí que para cada $L \in G(x,t)$ existe $K \in G(y,s)$ tal que $H_d(L,K) < \epsilon$.

Se deduce de los incisos (i) y (ii) que bajo la métrica de Hausdorff para $2^{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}$ inducida por H_d los conjuntos $G(x,t)$ y $G(y,s)$ distan entre sí en menos que $\epsilon > 0$ siempre que

$d(x,y) < \delta$ y $|t-s| < \eta/2$. Esto implica que la función $G : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}$ es continua. Ahora, por la *Proposición 2.39*, el conjunto $\bigcup G(x,t)$ es cerrado en $\boldsymbol{X}$ para cada $x \in X$ y $t \in I$. Además, $\bigcup G(x,t)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ por ser la unión de una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$ cuya intersección es no vacía. Por tanto, es posible definir una función continua $g : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ de manera que,

$$\forall x \in X, t \in I : g(x,t) = \bigcup G(x,t).$$

Finalmente, se define $H : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ como,

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}), t \in I : H(K,t) = \bigcup_{x \in K} g(x,t) = \bigcup g[K \times \{t\}].$$

Se verifica que $H(K,t)$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ por ser la unión de un subcontinuo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Además, las *Proposiciones 2.37*, *2.33* y *2.39* implican que $H : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es una homotopía. Finalmente, nótese que para cada $x \in X$,

$$g(x,0) = \bigcup G(x,0) = \bigcup \{\{x\}\} = \{x\} \quad \text{y} \quad g(x,1) = \bigcup G(x,1) = \bigcup \{X\} = X.$$

Esto implica que, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$,

$$H(K,0) = \bigcup_{x \in K} g(x,0) = \bigcup_{x \in K} \{x\} = K \quad \text{y} \quad H(K,1) = \bigcup_{x \in K} g(x,1) = \bigcup_{x \in K} X = X.$$

De esta forma, $id\, C(\boldsymbol{X}) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es una función inesencial y por tanto el hiperespacio $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es contráctil. ■

2.64 TEOREMA. El hiperespacio de subcontinuos de un continuo es contráctil respecto de cualquier ANR.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\boldsymbol{Z}$ un ANR y $f : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{Z}$ una función continua. El *Teorema 1.28* afirma la existencia de un continuo $\boldsymbol{Y}$ y de una sucesión anidada $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por subcontinuos localmente conexos de $\boldsymbol{Y}$, tales que $\boldsymbol{X}$ es subespacio de $\boldsymbol{Y}$ y $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ nómbrese $\boldsymbol{X}_n$ al subespacio de $\boldsymbol{Y}$ inducido sobre X_n. Dado que $\boldsymbol{Z}$ es un ANR y $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ existe un subespacio abierto de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ que contiene a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, nómbrese $\widetilde{\boldsymbol{X}}$, y existe una función $\widetilde{F} : \widetilde{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{Z}$ que extiende continuamente a $f : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{Z}$. Nótese que, por la *Observación 2.46 (3)*, $(C(\boldsymbol{X}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión anidada de conjuntos cerrados en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ de manera que $C(\boldsymbol{X}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C(\boldsymbol{X}_n) \subseteq \widetilde{X}$. Ya que el conjunto $\widetilde{X}$ es abierto en $CC\boldsymbol{Y}$ se puede hallar $m \in \mathbb{N}$ tal que $C(\boldsymbol{X}_m) \subseteq \widetilde{X}$. Por tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de funciones inclusión:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\boldsymbol{X}} \\
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \arrow[ur, hook, "\jmath"] \arrow[r, hook, "\imath"'] & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_m) \arrow[u, hook, "k"']
\end{tikzcd} \qquad k \circ \imath = \jmath.$$

Debido al *Teorema 2.63* y a la *Proposición 1.86*, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_m)$ es contráctil respecto de $\boldsymbol{Z}$ así que la función $F : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_m) \to \boldsymbol{Z}$, definida como $F = \widetilde{F} \circ k$, es inesencial. Obsérvese que

$$F\imath = (\widetilde{F}k)\imath = \widetilde{F}(k\imath) = \widetilde{F}\jmath = f,$$

y así, se sigue del *Corolario 1.73* que $f : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{Z}$ es una función inesencial. En consecuencia $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es contráctil respecto de $\boldsymbol{Z}$. ■

2.65 Corolario. El hiperespacio de subcontinuos de un continuo es unicoherente.

Demostración. Aplíquense los *Teoremas 2.64* y *1.89*. ■

Capítulo 3

Funciones de Whitney

§1 Similitudes

3.1 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio metrizable, $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$ subespacios cerrados de $\boldsymbol{X}$ y d una métrica admisible para $\boldsymbol{X}$. Una función $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ es una *similitud* o *semejanza* respecto de d si para algún $\lambda > 0$ se cumple la siguiente *condición de semejanza*:

$$\forall x, y \in Y : d(\rho(x), \rho(y)) = \lambda d(x, y).$$

El número λ es nombrado *razón de semejanza* de ρ respecto de d.

3.2 Observación. (1) Debido a la condición de semejanza, si $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ es una similitud respecto de alguna métrica entonces $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ es una función continua.

(2) Sea $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ una similitud respecto de d con razón de semejanza $\lambda > 0$. Para cualesquiera $x, y \in Y$ con $x \neq y$ se tiene que $d(\rho(x), \rho(y)) = \lambda d(x, y) > 0$, esto es, $\rho(x) \neq \rho(y)$. Por lo tanto, toda similitud es una función inyectiva.

(3) Supóngase que $\boldsymbol{Y}$ es un espacio con más de un punto y elíjanse $p, q \in Y$ con $p \neq q$. Si λ y λ' son razones de semejanza respecto de d para la similitud $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ entonces $\lambda d(p, q) = d(\rho(p), \rho(q)) = \lambda' d(p, q)$. Como $d(p, q) > 0$ se sigue que $\lambda = \lambda'$. Así, cuando $\boldsymbol{Y}$ es no degenerado, $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ posee una única razón de semejanza respecto de d.

3.3 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y d una métrica admisible para $\boldsymbol{X}$. Una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es *invariante bajo semejanzas* respecto de d si siempre que $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ sea una similitud respecto de d entre subespacios cerrados de $\boldsymbol{X}$ con razón de semejanza $\lambda > 0$ y $K \in C(\boldsymbol{Y})$ se tiene que $\mu(\rho[K]) = \lambda \mu(K)$.

3.4 TEOREMA. Si $\boldsymbol{X}$ es un continuo y d es una métrica admisible para $\boldsymbol{X}$ entonces existe una función de Whitney que es invariante bajo similitudes respecto de d.

Demostración. Es claro que d es una métrica acotada así que se supondrá, sin perder generalidad alguna, que d es acotada por 1. Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ es un espacio compacto y metrizable ya que es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{2^X}$. Considérese la función $\xi_n : \boldsymbol{X}^n \to \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$ definida en el *Teorema 2.19* como:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X : \xi_n(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Claramente, para todo $K \in C(\boldsymbol{X})$, K^n es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}^n$ así que se puede definir una función continua $\Omega_n : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X}))$ de la siguiente manera:

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \Omega_n(K) = \xi_n[K^n] = [K]^{\leq n}.$$

Ahora, sea $r : F(\boldsymbol{X}) \to I$ la función dada por:

$$\forall \Lambda \in F(\boldsymbol{X}) : r(\Lambda) = \begin{cases} \text{mín}\{d(x,y) \mid x, y \in \Lambda \text{ y } x \neq y\} & \text{si } |\Lambda| > 1, \\ 1 & \text{si } |\Lambda| = 1. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n$ se define $\varphi_n : \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ como:

$$\forall \Lambda \in F_n(\boldsymbol{X}) : \varphi_n(\Lambda) = \begin{cases} r(\Lambda) & \text{si } |\Lambda| = n, \\ 0 & \text{si } |\Lambda| < n. \end{cases}$$

Se demostrará que esta función es continua. Considérese $\Lambda \in F_n(\boldsymbol{X})$ y una sucesión $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a Λ en $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X})$. Se define $\delta = \text{mín}\{r(\Lambda), \epsilon\}/2 > 0$ y se elige $M \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(\Lambda_m, \Lambda) < \delta$ para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq M$. Se consideran dos casos: (i) Supóngase que $|\Lambda| = n$. Para cada $x \in \Lambda$ y $m \geq M$ se escoge $\lambda_m(x) \in \Lambda_m$ de manera que $d(x, \lambda_m(x)) < \delta \leq r(\Lambda)/2$. Dados $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$ se tiene que:

$$d(\lambda_m(x), \lambda_m(y)) \geq d(x,y) - d(x, \lambda_m(x)) - d(y, \lambda_m(y)) > r(\Lambda) - \frac{r(\Lambda)}{2} - \frac{r(\Lambda)}{2} = 0,$$

esto es, $\lambda_m(x) \neq \lambda_m(y)$. De aquí que la función $\lambda_m : \Lambda \to \Lambda_m$ es inyectiva. Como $|\Lambda_m| \leq n = |\Lambda|$ se sigue que λ_m es una biyección. Por lo tanto, $|\Lambda_m| = n$ para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq M$. Ahora, para cualesquiera $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$ se tiene que $\lambda_m(x) \neq \lambda_m(y)$ por lo cual

$$d(x,y) \geq d(\lambda_m(x), \lambda_m(y)) - d(x, \lambda_m(x)) - d(y, \lambda_m(y)) > r(\Lambda_m) - \epsilon.$$

Así, $r(\Lambda) > r(\Lambda_m) - \epsilon$ lo cual implica que $r(\Lambda_m) < r(\Lambda) + \epsilon$. Análogamente, si $x, y \in \Lambda_m$ y $x \neq y$ entonces $\lambda_m^{-1}(x) \neq \lambda_m^{-1}(y)$ por lo cual

$$d(x,y) \geq d(\lambda_m^{-1}(x), \lambda_m^{-1}(y)) - d(x, \lambda_m^{-1}(x)) - d(y, \lambda_m^{-1}(y)) > r(\Lambda) - \epsilon.$$

De esta manera, $r(\Lambda) - \epsilon < r(\Lambda_m) < r(\Lambda) + \epsilon$, es decir, $|r(\Lambda_m) - r(\Lambda)| < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq M$ se tiene que

$$|\varphi_n(\Lambda_m) - \varphi_n(\Lambda)| = |r(\Lambda_m) - r(\Lambda)| < \epsilon.$$

(ii) Supóngase que $|\Lambda| < n$ y sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq M$. Es claro que, si $|\Lambda_m| < n$ entonces $|\varphi_n(\Lambda_m) - \varphi_n(\Lambda)| = 0 < \epsilon$ así que se considera el caso en que $|\Lambda_m| = n$. Dado que $H_d(\Lambda_m, \Lambda) < \delta$, para cada $x \in \Lambda_m$ se puede hallar $y \in \Lambda$ tal que $d(x,y) < \delta$. Si $y' \in \Lambda$ también cumple que $d(x, y') < \delta$ entonces

$$d(y, y') \leq d(x,y) + d(x,y') < 2\delta \leq r(\Lambda),$$

lo cual implica que $y = y'$. Por tanto, existe un único elemento en Λ que cumple esta propiedad; desígnese por $\lambda_m(x)$. Además, para cada $y \in \Lambda$ existe $x \in \Lambda_m$ tal que $d(x, y) < \delta$, esto es, $y = \lambda_m(x)$. De aquí que la función $\lambda_m : \Lambda_m \to \Lambda$ es suprayectiva. Dado que $|\Lambda| < n = |\Lambda_m|$ no puede ocurrir que la función λ_m sea inyectiva así que existen $x, x' \in \Lambda_m$ de tal suerte que $x \neq x'$ y $\lambda_m(x) = \lambda_m(x')$. Se deduce que

$$r(\Lambda_m) \leq d(x, x') \leq d(x, \lambda_m(x)) + d(x', \lambda_m(x')) < 2\delta \leq \epsilon.$$

Por tanto, $|\varphi_n(\Lambda_m) - \varphi_n(\Lambda)| = r(\Lambda_m) < \epsilon$ siempre que $m \in \mathbb{N}$, $m \geq M$ y $|\Lambda_m| = n$.

De los incisos (i) y (ii) se concluye que $\varphi_n : \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Luego, se puede definir una función continua $\widehat{\mu}_n : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ como:

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \widehat{\mu}_n(K) = \text{máx}\{\varphi_n(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^{\leq n}\} = \text{máx}\, \varphi_n[\Omega_n(K)].$$

Nótese que, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$, $\{\varphi_n(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^{\leq n}\} = \{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^n\} \cup \{0\}$ así que, si K es no degenerado entonces $\widehat{\mu}_n(K) = \text{máx}\{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^n\}$. Ahora, se aplica el *Criterio M de Weierstrass* [1, Teorema 10.5] para definir la función continua $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ dada por:

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \widehat{\mu}(K) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_n(K)}{2^n}.$$

Se tienen las siguientes observaciones:

(i') Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se tiene que $\Omega_n(\{x\}) = [\{x\}]^{\leq n} = \{\{x\}\}$. De esta manera $\widehat{\mu}_n(\{x\}) = \text{máx}\, \varphi_n[\{\{x\}\}] = \text{máx}\{\varphi_n(\{x\})\} = 0$. En consecuencia, cada uno de los sumandos de la serie $\sum \frac{\widehat{\mu}_n(\{x\})}{2^n}$ es nulo y, por tanto, $\widehat{\mu}(\{x\}) = 0$.

(ii') Dados $n \in N$ con $n \geq 2$ y $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ con $K \subset L$ se tiene que $\Omega_n(K) = [K]^{\leq n} \subseteq [L]^{\leq n} = \Omega_n(L)$ así que $\widehat{\mu}_n(K) = \text{máx}\, \varphi_n[\Omega_n(K)] \leq \text{máx}\, \varphi_n[\Omega_n(L)] = \widehat{\mu}_n(L)$. Por tanto, para probar que $\widehat{\mu}(K)) < \widehat{\mu}(L)$ bastará con verificar que $\widehat{\mu}_m(K) < \widehat{\mu}_m(L)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Nótese que, para cada $\Lambda \in [L]^2$, $r(\Lambda) = d(x, y)$ donde x y y son los únicos elementos de Λ. Como L es no degenerado se tiene que

$$\widehat{\mu}_2(L) = \text{máx}\{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [L]^2\} = \text{máx}\{d(x, y) \mid x, y \in L\} = \text{diam}_{\boldsymbol{X}}\, L.$$

De esta forma, si K es un singular se tiene que $\widehat{\mu}_2(K) = 0 < \text{diam}_{\boldsymbol{X}}\, L = \widehat{\mu}_2(L)$. Supóngase ahora que K también es no degenerado; se elige $p \in L \setminus K$ y se define $\epsilon = d(p, K) > 0$. Considérese el conjunto

$$A = \{s \in \mathbb{N} \mid \text{Para cada } \Lambda \in [K]^s \text{ existen } x, y \in \Lambda \text{ tales que } x \neq y \text{ y } d(x, y) < \epsilon\}.$$

Dado que K es un conjunto compacto en $\boldsymbol{X}$ existen $x_1, \ldots, x_k \in K$ de manera que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\boldsymbol{X}}(x_i, \epsilon/2)$. Obsérvese que, si $\Gamma \in [K]^{k+1}$ entonces necesariamente existen $x, y \in K$ con $x \neq y$ e i entre 1 y k tales que $x, y \in B_{\boldsymbol{X}}(x_i, \epsilon/2)$. De la desigualdad triangular se sigue que $d(x, y) < \epsilon$. Esto implica que $k + 1 \in A$ y $A \neq \varnothing$. Nótese que

$1 \notin A$ pues si se toma cualquier $\Lambda \in [K]^1$ entonces no se pueden hallar $x, y \in \Lambda$ tales que $x \neq y$. Por tanto, $m = \min A \geq 2$. Así, como $m - 1 \notin A$ existe $\Gamma \in [K]^{m-1}$ de manera que, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $d(x, y) \geq \epsilon$. Defínase $\Gamma' = \Gamma \cup \{p\} \in [L]^m$. Si $x, y \in \Gamma'$ y $x \neq y$ entonces se presentan dos posibilidades. Cuando $x = p$ y $y \in \Gamma$ se tiene que $d(x, y) \geq d(p, K) = \epsilon$. En cambio, cuando $x, y \in \Gamma$ ocurre que $d(x, y) \geq \epsilon$. De aquí que $r(\Gamma') \geq \epsilon$. Sin embargo, como $m = \min A$, para cada $\Lambda \in [K]^m$ existen $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$ tales que $d(x, y) < \epsilon$ lo cual implica que $r(\Lambda) < \epsilon$. En consecuencia,

$$\widehat{\mu}_m(K) = \max\{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^m\} < \epsilon \leq r(\Lambda') \leq \max\{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [L]^m\} = \widehat{\mu}_m(L),$$

que es lo que se quería demostrar.

Conclúyase de los incisos (i') y (ii') que $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es un función de Whitney. Finalmente, considérense $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$, subespacios cerados de $\boldsymbol{X}$, para los cuales exista un similitud $\rho : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ respecto de d cuya razón de semejanza es $\lambda > 0$. Si $K \in C(\boldsymbol{Y})$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se tiene que $[\rho[K]]^n = \{\rho[\Lambda] \mid \Lambda \in [K]^n]$. Además, debido a la *Observación 3.2 (2)*, para cualesquiera $\Lambda \in [K]^n$ y $x, y \in \Lambda$ ocurre que $x \neq y$ si y sólo si $\rho(x) \neq \rho(y)$. Así,

$$\begin{aligned} r(\rho[\Lambda]) =& \min\{d(\rho(x), \rho(y)) \mid x, y \in \Lambda \text{ y } x \neq y\} = \min\{\lambda d(x, y) \mid x, y \in \Lambda \text{ y } x \neq y\} \\ =& \lambda r(\Lambda). \end{aligned}$$

De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$,

$$\widehat{\mu}_n(\rho[K]) = \max\{r(\rho[\Lambda]) \mid \Lambda \in [K]^n\} = \max\{\lambda r(\Lambda) \mid \Lambda \in [K]^n\} = \lambda \widehat{\mu}_n(K).$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\mu}(\rho[K]) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_n(\rho[K])}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda \widehat{\mu}_n(K)}{2^n} = \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_n(K)}{2^n} = \lambda \widehat{\mu}(K).$$

Esto demuestra que $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es invariante bajo semejanzas respecto de d. ■

§2 Puntos medios

3.5 Definición. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico T_1 se definen los siguientes conjuntos

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{X}) = \{K \in C(\boldsymbol{X}) \mid K \text{ es un arco en } \boldsymbol{X}\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) = F_1(\boldsymbol{X}) \cup \mathfrak{A}(\boldsymbol{X}).$$

Se denominarán *hiperespacios de arcos* de $\boldsymbol{X}$ e *hiperespacio de arcos y puntos* de $\boldsymbol{X}$ a los subespacios de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ inducidos sobre $\mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$ y $\mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ respectivamente. Se empleará la notación en negritas $\boldsymbol{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{X})$ y $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X})$ para denotar a estos hiperespacios.

3.6 Observación. Si $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ entonces K es un punto o un arco en $\boldsymbol{X}$ y cualquier otro subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ contenido en K es un punto o un arco en $\boldsymbol{X}$.

3.7 Proposición. Si $\boldsymbol{X}$ es un arco entonces $\mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

Demostración. Nótese que la proposición es verdadera para el arco $\boldsymbol{I}$ ya que todos sus subcontinuos son intervalos cerrados y acotados, es decir, son puntos o arcos en $\boldsymbol{I}$. Dado que cualquier subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ es homeomorfo a algún subcontinuo de $\boldsymbol{I}$ se sigue que los subcontinuos de $\boldsymbol{X}$ son puntos o arcos en $\boldsymbol{X}$. Por lo tanto, $\mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. ■

3.8 Proposición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ continuos. Dada una inmersión cualquiera $\varphi : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$, la restricción de la función $\boldsymbol{C}(\varphi) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ a $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$, la cual se denotará por $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$, es una inmersión que se denomina *inmersión inducida por* $\varphi : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ *a los hiperespacios de arcos y puntos.* Además, $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ es un homeomorfismo cuando $\varphi : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Obsérvese que si L es un punto o un arco en $\boldsymbol{Y}$ entonces $\varphi[L]$ es un punto o un arco en $\boldsymbol{X}$, es decir, $\boldsymbol{C}(\varphi)(L) \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ siempre que $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$. Por lo tanto, existe una única función continua $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r, "\boldsymbol{C}(\varphi)"] & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \\ \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \arrow[u, hook, "\widetilde{k}"] \arrow[r, "\mathfrak{M}(\varphi)"'] & \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \arrow[u, hook, "k"'] \end{tikzcd} \qquad \boldsymbol{C}(\varphi) \circ \widetilde{k} = k \circ \mathfrak{M}(\varphi).$$

donde $k : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ y $\widetilde{k} : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ son las respectivas funciones inclusión. Nótese que $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ es una inmersión por ser restricción de $\boldsymbol{C}(\varphi) : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que es una inmersión. Finalmente, si $\varphi : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ es un homeomorfismo entonces, para cada $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$, se tiene que $\varphi^{-1}[K] \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ y $\mathfrak{M}(\varphi)(\varphi^{-1}[K]) = \varphi[\varphi^{-1}[K]] = K$. Así, la inmersión $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ es suprayectiva y, por lo tanto, es un homeomorfismo. ■

3.9 Definición. Dado un arco $\boldsymbol{X}$ se dirá que un punto $p \in X$ es *punto extremo* de $\boldsymbol{X}$ si existe un homeomorfismo $h : I \to \boldsymbol{X}$ tal que $p = h(0)$.

3.10 Observación. Si p es un punto extremo de $\boldsymbol{X}$ entonces $X \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$ pues existe un homeomorfismo $h : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ tal que $X \setminus \{p\} = h[(0, 1]]$.

3.11 Proposición. Todo arco posee dos únicos puntos extremos.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un arco cualquiera y elíjase un homeomorfismo $h : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$. Es claro que $h(0)$ es un punto extremo de $\boldsymbol{X}$. Luego, se considera el homeomorfismo $h' : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ dado por $h'(t) = h(1 - t)$, para cada $t \in I$. Así, $h'(0) = h(1)$ también es un punto extremo. Obsérvese que, para todo $t \in (0, 1)$, $X \setminus \{h(t)\}$ es un conjunto disconexo en $\boldsymbol{X}$ pues $X \setminus \{h(t)\} = h[[0, t)] \cup h[(t, 1]]$, donde $h[[0, t)]$ y $h[(t, 1]]$ son conjuntos ajenos, no vacíos y abiertos en $\boldsymbol{X}$. Se sigue de la *Observación 3.10* que $h(t)$ no puede ser un punto extremo de $\boldsymbol{X}$. Por lo tanto, $h(0)$ y $h(1)$ son los únicos puntos extremos de $\boldsymbol{X}$. ■

3.12 Observación. La *Proposición 3.11* no sólo asegura la existencia de dos únicos puntos extremos sino que también indica cómo hallarlos: dado un homeomorfismo $h : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$, $p = h(0)$ y $q = h(1)$ son los puntos extremos del arco $\boldsymbol{X}$. Más aún, p y q son los únicos puntos tales que $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$ y $X \setminus \{p, q\}$ son conjuntos conexos en $\boldsymbol{X}$.

3.13 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un arco y p un punto extremo de $\boldsymbol{X}$. Si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ y $p \in K \cap L$ entonces $K \subseteq L$ o $L \subseteq K$.

Demostración. Elíjase un homeomorfismo $h : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ tal que $h(0) = p$. Si se definen $K' = h^{-1}[K]$ y $L' = h^{-1}[L]$ entonces $K', L' \in C(\boldsymbol{I})$ y $0 \in K' \cap L'$. Por lo tanto, haciendo $a = \max K'$ y $b = \max L'$ se tiene que $K' = [0, a]$ y $L' = [0, b]$. Suponiendo que $L \nsubseteq K$ ocurre que $L' \nsubseteq K'$, esto es, existe $t \in I$ tal que $a < t \leq b$. De aquí se sigue $K' = [0, a] \subset [0, b] = L'$ y así $K = h[K'] \subset h[L'] = L$. Esto demuestra el resultado. ∎

3.14 Lema. Sea $\boldsymbol{X}$ un arco con puntos extremos p y q. Si $K \in C(\boldsymbol{X})$ y $p, q \in K$ entonces $K = X$.

Demostración. Debido a la *Observación 3.12*, existe un homeomorfismo $h : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ de manera que $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Así, como $0, 1, \in h^{-1}[K]$ se sigue que $h^{-1}[K] = [0, 1]$ y, por lo tanto, $K = h[[0, 1]] = X$. ∎

3.15 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dados $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ y $x \in X$ se dirá que x es *punto medio de* L *respecto de* μ si es posible hallar $L_1, L_2 \in C(\boldsymbol{X})$ tales que $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{x\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$.

3.16 Observación. (1) Si x es punto medio de L respecto de μ entonces $x \in L$.
(2) Para cada $x \in X$ se tiene que x es punto medio de $\{x\}$ respecto de cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$.

3.17 TEOREMA. Si $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney entonces existe un punto $t_0 \in I$ tal que $\mu([0, t_0]) = \mu([t_0, 1])$ y que es el único punto medio de I respecto de μ.

Demostración. Por el *Lema 2.49* se puede definir una función continua $f : \boldsymbol{I} \to \mathbf{R}$ como:

$$\forall t \in I : f(t) = \mu([0, t]) - \mu([t, 1]).$$

Para cualesquiera $s, t \in I$ con $s < t$ se tiene que $[0, s] \subset [0, t]$ y $[t, 1] \subset [s, 1]$. De aquí que $\mu([0, s]) < \mu([0, t])$ y $\mu([t, 1]) < \mu([s, 1])$ lo cual implica que

$$f(s) = \mu([0, s]) - \mu([s, 1]) < \mu([0, t]) - \mu([t, 1]) = f(t),$$

es decir, $f : (I, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$ es una función estrictamente creciente. Obsérvese que $f(0) = \mu(\{0\}) - \mu([0, 1]) = -\mu(I) < 0$ y $f(1) = \mu([0, 1]) - \mu(\{1\}) = \mu(I) > 0$. Por el *Teorema del Valor Intermedio* existe un único $t_0 \in I$ tal que $f(t_0) = 0$, esto es, $\mu([0, t_0]) = \mu([t_0, 1])$. Haciendo $L_1 = [0, t_0]$ y $L_2 = [t_0, 1]$ se obtiene que $I = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{t_0\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$. Como consecuencia, t_0 es un punto medio de I respecto de μ. Ahora, supóngase que $s_0 \in I$ también es punto medio de I respecto de μ y elíjanse $M_1, M_2 \in C(I)$ tales que $I = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \{s_0\}$ y $\mu(M_1) = \mu(M_2)$. Además asúmase, sin pérdida de generalidad, que $0 \in M_1$. Nótese que M_1 y M_2 son distintos pues $M_1 \cup M_2 = I \neq \{s_0\} = M_1 \cap M_2$. De esta manera, como $\mu(M_1) = \mu(M_2)$, M_1 y M_2 no son comparables bajo la inclusión. Por el *Lema 3.13*, M_1 y M_2 no pueden contener a un mismo punto extremo de $\boldsymbol{I}$. Dado que $0 \in M_1$ y $M_1 \cup M_2 = I$ se sigue que $1 \in M_2$. Definiendo $a = \text{máx}\, M_1 < 1$ y $b = \text{mín}\, M_2 > 0$ ocurre que $M_1 = [0, a]$ y $M_2 = [b, 1]$. Luego, como $\{s_0\} = M_1 \cap M_2 = [0, a] \cap [b, 1] = [b, a]$ se tiene que $a = b = s_0$. Así, $f(s_0) = \mu([0, s_0]) - \mu([s_0, 1]) = \mu(M_1) - \mu(M_2) = 0$, lo cual implica que $s_0 = t_0$. Esto prueba la unicidad de t_0 como punto medio de I respecto de μ. ■

3.18 TEOREMA. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Para cada $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ existe un único punto $p \in X$ que es punto medio de L respecto de μ. Además, si $L \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$ y $a, b \in L$ son los puntos extremos de L en $\boldsymbol{X}$ entonces existen $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$ tales que a y p son los puntos extremos de L_1, b y p son los puntos extremos de L_2, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{p\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$.

Demostración. Debido a la *Observación 3.16 (2)*, el resultado es cierto cuando $L \in F_1(\boldsymbol{X})$. Por lo tanto, considérese $L \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$. En dicho caso, es posible elegir una inmersión $\varphi : \boldsymbol{I} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ tal que $\varphi[I] = L$. Más aún, por la *Observación 3.12*, se puede pedir que $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = b$. De la *Observación 2.52 (4)* se sigue que $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$, definida como $\widetilde{\mu} = \mu \circ \boldsymbol{C}(\varphi)$, es una función de Whitney. Aplicando el *Teorema 3.17*, existe $t_0 \in I$ tal que t_0 es el único punto medio de I respecto de $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\mu}([0, t_0]) = \widetilde{\mu}([t_0, 1])$. Haciendo $p = \varphi(t_0)$, $L_1 = \varphi[[0, t_0]]$ y $L_2 = \varphi[[t_0, 1]]$ se tiene que $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{p\}$ y $\mu(L_1) = \widetilde{\mu}([0, t_0]) = \widetilde{\mu}([t_0, 1]) = \mu(L_2)$. Esto implica que p es punto medio de L respecto de μ. Además, $a = \varphi(0)$ y $p = \varphi(t_0)$ son los puntos extremos de L_1 mientras que $b = \varphi(1)$ y $p = \varphi(t_0)$ son los puntos extremos de L_2.

Supóngase que $q \in X$ también es punto medio de L respecto de μ, es decir, existen $K_1, K_2 \in C(\boldsymbol{X})$ tales que $L = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \{q\}$ y $\mu(K_1) = \mu(K_2)$. Si se definen $s_0 = \varphi^{-1}(q)$, $M_1 = \varphi^{-1}[K]$ y $M_2 = \varphi^{-1}[K_2]$ entonces $M_1, M_2 \in C(\boldsymbol{I})$, $I = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \{s_0\}$ y $\widetilde{\mu}(M_1) = \mu(K_1) = \mu(K_2) = \widetilde{\mu}(M_2)$. De aquí que s_0 es un punto medio de I respecto de μ. Como t_0 es el único punto medio de I respecto de μ se sigue que $s_0 = t_0$ y $q = \varphi(s_0) = \varphi(t_0) = p$. Esto demuestra que L admite un único punto medio respecto de μ. ■

3.19 Definición. Dados un continuo $\boldsymbol{X}$ y una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es posible definir una función $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ de manera que, para cada $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$, $P_\mu(K)$ es el único punto medio de K respecto de μ. A esta función se le nombrará *función punto medio* respecto de μ.

3.20 Proposición. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ continuos, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ y $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ funciones de Whitney, con $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ subespacio de $\boldsymbol{J}$ y $\jmath : \widetilde{\boldsymbol{J}} \hookrightarrow \boldsymbol{J}$ su respectiva función inclusión. Si $\varphi : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ es una inmersión que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\mu"] & \boldsymbol{J} \\
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r, "\widetilde{\mu}"'] \arrow[u, hook, "\boldsymbol{C}(\varphi)"] & \widetilde{\boldsymbol{J}} \arrow[u, hook, "\jmath"']
\end{tikzcd}
\qquad \mu \circ \boldsymbol{C}(\varphi) = \jmath \circ \widetilde{\mu}.
$$

entonces el siguiente diagrama también conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "P_\mu"] & \boldsymbol{X} \\
\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r, "P_{\widetilde{\mu}}"'] \arrow[u, hook, "\mathfrak{M}(\varphi)"] & \boldsymbol{Y} \arrow[u, hook, "\varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad P_\mu \circ \mathfrak{M}(\varphi) = \varphi \circ P_{\widetilde{\mu}}.
$$

Demostración. Para cada $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ existen $L_1, L_2 \in C(\boldsymbol{Y})$ tales que $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{P_{\widetilde{\mu}}(L)\}$ y $\widetilde{\mu}(L_1) = \widetilde{\mu}(L_2)$. Así, $\varphi[L_1], \varphi[L_2] \in C(\boldsymbol{X})$, $\varphi[L] = \varphi[L_1] \cup \varphi[L_2]$, $\varphi[L_1] \cap \varphi[L_2] = \{\varphi(P_{\widetilde{\mu}}(L))\}$ y $\mu(\varphi[L_1]) = \widetilde{\mu}(L_1) = \widetilde{\mu}(L_2) = \mu(\varphi[L_2])$. Esto implica que $\varphi(P_{\widetilde{\mu}}(L))$ es el punto medio de $\varphi[L]$ respecto de μ, es decir, $P_\mu(\varphi[L]) = \varphi(P_{\widetilde{\mu}}(L))$. De aquí se concluye que $P_\mu \circ \mathfrak{M}(\varphi) = \varphi \circ P_{\widetilde{\mu}}$. ∎

3.21 Corolario. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Si $\boldsymbol{Y}$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ y $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ es la restricción de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ entonces $P_{\widetilde{\mu}} : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ es la restricción de $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ a $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$.

3.22 Definición. Un continuo $\boldsymbol{X}$ tiene *funciones punto medio continuas* si para cada función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ la función $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ es continua.

3.23 Proposición. Tener funciones punto medio continuas es una propiedad topológica en la categoría **MCon**.

Demostración. Sea $\varphi : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ un homeomorfismo entre continuos y supóngase que $\boldsymbol{Y}$ tiene funciones punto medio continuas. Si $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney entonces $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$, definida como $\widetilde{\mu} = \mu \circ \boldsymbol{C}(\varphi)$, también es una función de Whitney. Por la *Proposición 3.20*, $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ es un homeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "P_\mu"] & \boldsymbol{X} \\
\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \arrow[r, "P_{\widetilde{\mu}}"'] \arrow[u, hook, "\mathfrak{M}(\varphi)"] & \boldsymbol{Y} \arrow[u, hook, "\varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad P_\mu \circ \mathfrak{M}(\varphi) = \varphi \circ P_{\widetilde{\mu}}.
$$

De esta manera, $P_\mu = \varphi \circ P_{\widetilde{\mu}} \circ \mathfrak{M}(\varphi)^{-1}$. Por hipótesis, $P_{\widetilde{\mu}} : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ es una función continua así que $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ también es una función continua. Esto prueba que $\boldsymbol{X}$ tiene funciones punto medio continuas. ∎

3.24 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ espacios topológicos metrizables, con $\boldsymbol{Y}$ compacto, y $x \in X$. Una función $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es continua en el punto x si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x en $\boldsymbol{X}$ cuya sucesión de imágenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\boldsymbol{Y}$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Demostración. La necesidad se sigue inmediatamente debido a que $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son espacios metrizables. Ahora, para probar la suficiencia supóngase que la función $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es discontinua en el punto x, esto es, existe sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x en $\boldsymbol{X}$ pero que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$. Así, se puede hallar $\epsilon_0 > 0$ de manera que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe $M(n) \in \mathbb{N}$ tal que $M(n) > n$ y $d(f(x_{M(n)}), f(x)) \geq \epsilon_0$. A continuación, se define $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursivamente:

(Paso Base) $\sigma(1) = M(1)$.

(Paso Inductivo) Dado $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n+1) = M(\sigma(n))$.

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, hágase $x'_n = x_{\sigma(n)}$. Nótese que $\sigma(n+1) = M(\sigma(n)) > \sigma(n)$ así que la función $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente y por lo tanto $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(f(x'_n), f(x)) \geq \epsilon_0$. Dado que $\boldsymbol{Y}$ es un espacio compacto y metrizable, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión, llámese $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que la sucesión $(f(x''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún punto en $\boldsymbol{Y}$. Como $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} x''_n = x$. No obstante, $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) \neq f(x)$ pues $d(f(x''_n), f(x)) \geq \epsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En resumen, se ha demostrado que si $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es discontinua en el punto x entonces existe una sucesión $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x en $\boldsymbol{X}$, cuya sucesión de imágenes $(f(x''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\boldsymbol{Y}$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) \neq f(x)$. Esto termina la prueba. ■

3.25 TEOREMA. Los arcos tienen funciones punto medio continuas.

Demostración. Debido al *Teorema 3.23*, bastará demostrar que $\boldsymbol{I}$ tiene funciones punto medio continuas. Sea $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney, $K = [a, b] \in C(\boldsymbol{I})$ y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a K en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I})$ tal que la sucesión $(P_\mu(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\boldsymbol{I}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_n = [a_n, b_n]$ entonces, por el *Lema 2.49*, $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. Haciendo $c_n = P_\mu(K_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $c = \lim c_n$ se tiene que $\lim[a_n, c_n] = [a, c]$ y $\lim[c_n, b_n] = [c, b]$. Dado que $\mu([a_n, c_n]) = \mu([c_n, b_n])$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mu([a, c]) = \mu([c, b])$. De aquí se deduce que c es el punto medio de $[a, b]$ respecto de μ, es decir, $\lim P_\mu(K_n) = P_\mu(K)$. Por el *Lema 3.24*, la función $P_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$ es continua y esto ocurre para cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$, que es lo que se quería demostrar. ■

3.26 Lema. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$. Si $\boldsymbol{Y}$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ con funciones punto medio continuas y L es un punto interior de $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X})$ entonces $P_\mu : \boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ es continua en el punto L.

Demostración. Sea $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a L en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X})$. Por hipótesis, L es punto interior de $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X})$ así que se puede suponer que $L_n \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ es la restricción de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ entonces, por el *Corolario 3.21*, $P_{\widetilde{\mu}} : \boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ es la restricción de $P_\mu : \boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{Y})$. Dado que $\boldsymbol{Y}$ tiene funciones punto medio continuas y la sucesión $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{Y})$ se sigue que $\lim P_{\widetilde{\mu}}(L_n) = P_{\widetilde{\mu}}(L)$, lo cual es equivalente a que $\lim P_\mu(L_n) = P_\mu(L)$. Por lo tanto, $P_\mu : \boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ es continua en el punto L. ■

3.27 Definición. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbf{S}^1$.

3.28 Proposición. Si $\boldsymbol{Y}$ es una curva cerrada simple entonces $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) = C(\boldsymbol{Y}) \setminus \{Y\}$.

Demostración. Claramente, la proposición se satisface para la circunferencia $\mathbf{S}^1$ pues todo subcontinuo propio de ella es homeomorfo a un subcontinuo de $\mathbf{R}$ y, por lo tanto, es un punto o un arco en $\mathbf{S}^1$. Como todo subcontinuo propio de $\boldsymbol{Y}$ es homeomorfo a un subcontinuo propio de $\mathbf{S}^1$ se sigue que $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) = C(\boldsymbol{Y}) \setminus \{Y\}$. ■

3.29 TEOREMA. Las curvas cerradas simples tienen funciones punto medio continuas.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ una curva cerrada simple y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Para cada $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ se puede eligir un punto $x \in X \setminus K$. Dado que $K \subseteq Y \setminus \{x\}$ y $\boldsymbol{X}$ es un espacio regular, existe un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$, llámese U, tal que $K \subseteq U \subseteq \mathit{cl}_{\mathbf{X}}\, U \subseteq X \setminus \{x\}$. Como consecuencia de las *Observaciones 1.30 (1)* y *(2)*, las curvas cerradas simples son continuos localmente conexos. De esta manera, si V es la componente conexa de U en $\boldsymbol{X}$ que contiene a K entonces V es un conjunto abierto en $\boldsymbol{X}$. Nótese que $K \subseteq V \subseteq \mathit{cl}_{\mathbf{X}}\, V \subseteq \mathit{cl}_{\mathbf{X}}\, U \subset X$ así que, si $\boldsymbol{Y}$ es el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $Y = \mathit{cl}_{\mathbf{X}}\, V$ entonces $\boldsymbol{Y}$ es un arco. Además si $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ y $L \subseteq V$ entonces $L \in C(\boldsymbol{Y}) = \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$. De aquí que $K \in \langle V \rangle_{\mathfrak{M}(\boldsymbol{X})} \subseteq \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$, es decir, K es un punto interior de $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ en $\boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X})$. Se sigue del *Lema 3.26* y el *Teorema 3.25* que la función $P_\mu : \boldsymbol{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ es continua en el punto K. Dado que la elección de la función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ y del punto $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ fue arbitraria, se concluye que $\boldsymbol{X}$ tiene funciones punto medio continuas. ■

§3 Puntos antipodales

3.30 Definición. Sean $\boldsymbol{Y}$ una curva cerrada simple y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dados $x, y \in Y$ se dirá que y es *punto antipodal* de x respecto de μ si existen $L_1, L_2 \in C(\boldsymbol{Y})$ tales que $Y = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{x, y\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$.

3.31 Observación. Se deduce inmediatamente de la *Definición 3.30* que si y es punto antipodal de x respecto de μ entonces x es punto antipodal de y respecto de μ.

3.32 Lema. Si $\boldsymbol{Y}$ es una curva cerrada simple entonces, para cualesquiera puntos $x, y \in Y$, con $x \neq y$, es posible hallar $M_1, M_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $M_1 \neq M_2$, de manera que x y y son los puntos extremos de M_1 y de M_2 en $\boldsymbol{Y}$, $M_1 \cup M_2 = Y$ y $M_1 \cap M_2 = \{x, y\}$. Por lo tanto, si $A \subseteq Y$ y $A \setminus \{x, y\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$ entonces $A \subseteq M_1$, o bien, $A \subseteq M_2$.

Demostración. Elíjase un homeomorfismo $h : \mathbf{S}^1 \to \boldsymbol{Y}$ y sean $z = h^{-1}(x)$, $w = h^{-1}(y)$. Nótese que $z, w \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$ y $z \neq w$, así que $w/z \in S^1 \setminus \{1\}$. Por lo tanto, existe un único $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que $w/z = e^{\theta i}$, esto es $w = ze^{\theta i}$. Defínanse, $B_1 = \{ze^{ti} \mid 0 \leq t \leq \theta\}$ y $B_2 = \{ze^{ti} \mid \theta \leq t \leq 2\pi\}$. Es claro que B_1 y B_2 son subcontinuos de $\mathbf{S}^1$ pues son imágenes continuas de intervalos cerrados en $\mathbf{R}$. Además, se tiene que $S^1 = B_1 \cup B_2$. Ahora, dados cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ con $0 < s < \theta < t < 2\pi$, ocurre que $e^{si} \neq e^{ti}$. Dado que $z = ze^0 = ze^{2\pi i}$ y $w = ze^{\theta i}$ se cumple que $B_1 \cap B_2 = \{z, w\}$. Luego, eligiendo $s, t \in \mathbb{R}$ de manera que $0 < s < \theta < t < 2\pi$ se tiene que $e^{si} \in S^1 \setminus B_2$ y $e^{ti} \in S^1 \setminus B_1$. Esto implica que $B_1 \neq S^1 \neq B_2$, es decir, B_1 y B_2 son arcos en $\mathbf{S}^1$. Así, ya que $B_1 \setminus \{z, w\} = \{ze^{ti} \mid 0 < t < \theta\}$ y $B_2 \setminus \{z, w\} = \{ze^{ti} \mid \theta < t < 2\pi\}$ son conjuntos conexos en $\mathbf{S}^1$, se sigue de la *Observación 3.12* que z y w son los puntos extremos de B_1 y de B_2 en $\mathbf{S}^1$. Ahora, se definen $M_1 = h[B_1]$ y $M_2 = h[B_2]$. Dado que $h : \mathbf{S}^1 \to \boldsymbol{Y}$ es un homeomorfismo se tiene que M_1 y M_2 son arcos distintos en $\boldsymbol{Y}$, $x = h(z)$ y $y = h(w)$ son los puntos extremos de M_1 y de M_2 en $\boldsymbol{Y}$, $M_1 \cup M_2 = Y$ y $M_1 \cap M_2 = \{x, y\}$.

Finalmente, obsérvese que $M_1 \setminus \{x, y\} = Y \setminus M_2$ y $M_2 \setminus \{x, y\} = Y \setminus M_1$ son conjuntos ajenos y abiertos en $\boldsymbol{Y}$. Dado que $A \setminus \{x, y\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$ y $A \setminus \{x, y\} \subseteq Y \setminus \{x, y\} = (M_1 \setminus \{x, y\}) \cup (M_2 \setminus \{x, y\})$ necesariamente ocurre que $A \setminus \{x, y\} \subseteq M_1 \setminus \{x, y\}$ o $A \setminus \{x, y\} \subseteq M_2 \setminus \{x, y\}$, esto es, $A \subseteq M_1$ o $A \subseteq M_2$. ■

3.33 TEOREMA. Sean $\boldsymbol{Y}$ una curva cerrada simple y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dado $x \in Y$ existe un único punto $y \in Y$ que es punto antipodal de x respecto de μ. Más aún, existen $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $X_1 \neq X_2$, de manera que x y y son los puntos extremos de X_1 y de X_2 en $\boldsymbol{Y}$, $X_1 \cup X_2 = Y$, $X_1 \cap X_2 = \{x, y\}$ y $\mu(X_1) = \mu(X_2)$.

Demostración. Primero se probará el resultado para $\boldsymbol{Y} = \mathbf{S}^1$. Considérese un punto $z \in S^1$ y sean $\alpha_1, \alpha_2 : \boldsymbol{I} \to \mathbf{S}^1$ las funciones dadas por:

$$\forall t \in I : \alpha_1(t) = ze^{2\pi ti} \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = ze^{-2\pi ti}.$$

Obsérvese que ambas funciones son biyectivas en el intervalo $[0, 1)$ y, para cada $t \in I$, $\alpha_2(1 - t) = ze^{-2\pi(1-t)i} = ze^{-2\pi i + 2\pi ti} = ze^{2\pi ti} = \alpha_1(t)$. Ahora, se definen las funciones $\gamma_1, \gamma_2 : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\mathbf{S}^1)$ como:

$$\forall t \in I : \gamma_1(t) = \alpha_1[[0, t]] \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = \alpha_2[[0, t]].$$

Si $s, t \in I$ y $s < t$ entonces se puede hallar $r \in (0, 1)$ de manera que $s < r < t$. Dado que α_1 yα_2 son funciones inyectivas en $[0, 1)$, $[0, s] \subset [0, r] \subseteq [0, 1)$ y $[0, r] \subseteq [0, t]$, se tiene que, $\alpha_1[[0, s]] \subset \alpha_1[[0, r]] \subseteq \alpha_1[[0, t]]$ y $\alpha_2[[0, s]] \subset \alpha_2[[0, r]] \subseteq \alpha_2[[0, t]]$, es decir, $\gamma_1(s) \subset \gamma_1(r) \subseteq \gamma_1(t)$ y $\gamma_2(s) \subset \gamma_2(r) \subseteq \gamma_2(t)$. Esto implica que $\gamma_1, \gamma_2 : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\mathbf{S}^1)$ son arcos ordenados que van desde $\{z\} = \alpha_1[\{0\}] = \alpha_2[\{0\}]$ hasta $S^1 = \alpha_1[I] = \alpha_2[I]$. Para $i = 1$ e $i = 2$ se considera la función $g_i : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$, dada por $g_i = \mu \circ \gamma_i$. Nótese que $g_i : (I, \leq) \to (J, \leq)$ es una función estrictamente creciente por ser composición de funciones estrictamente crecientes. Además, como $g_i(0) = \mu(\gamma_i(0)) = \mu(\{z\}) = 0$

y $g_i(1) = \mu(\gamma_i(0)) = \mu(S^1)$, $g_i : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ es una función suprayectiva. Por lo tanto, se puede considerar $h_i : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ tal que $h_i = g_i^{-1}$ y definir una función continua $h : \boldsymbol{J} \to \mathbf{R}$ de la siguiente manera:

$$\forall s \in J : h(s) = h_1(s) + h_2(s).$$

Obsérvese que $h : (J, \leq) \to (\mathbb{R}, \leq)$ es una función estrictamente creciente ya que $h_1 : (J, \leq) \to (I, \leq)$ y $h_2 : (J, \leq) \to (I, \leq)$ son funciones estrictamente crecientes. Además, $h(0) = h_1(0) + h_2(0) = 0$ y $h(\mu(S^1)) = h_1(\mu(S^1)) + h_2(\mu(S^1)) = 1 + 1 = 2$. Por el *Teorema del Valor Intermedio*, existe un único $s_0 \in (0, \mu(S^1))$ de tal manera que $h(s_0) = h_1(s_0) + h_2(s_0) = 1$. Sean $w = \alpha_1(h_1(s_0))$, $L_1 = \gamma_1(h_1(s_0))$ y $L_2 = \gamma_2(h_2(s_0))$. Se tiene lo siguiente:

(i) Como $h_1(s_0), h_2(s_0) \in (0,1)$, L_1 y L_2 son subcontinuos propios y no degenerados de $\mathbf{S}^1$, esto es, $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\mathbf{S}^1)$. Nótese que $w = \alpha_1(h_1(s_0)) = \alpha_2(1 - h_1(s_0)) = \alpha_2(h_2(s_0))$ así que, para $i = 1$ e $i = 2$, $L_i \setminus \{z, w\} = \alpha_i[(0, h_i(s_0))]$ es un conjunto conexo en $\mathbf{S}^1$. En consecuencia, z y w son los puntos extremos de L_1 y de L_2 en $\mathbf{S}^1$.

(ii) Para cada $x \in S^1$ es posible hallar $t \in [0,1)$ de manera que $x = \alpha_1(t)$. Si $t \leq h_1(s_0)$ entonces $t \in \alpha[[0, h(s_0)]] = L_1$. Si $h_1(s_0) < t$ entonces $x = \alpha_1(t) = \alpha_2(1-t)$, con $0 < 1 - t < 1 - h_1(s_0) = h_2(s_0)$, de donde, $x \in \alpha_2[[0, h_2(t_0)]] = L_2$. Así, $S^1 = L_1 \cup L_2$. De esto y del inciso (i) se sigue que $L_1 \neq L_1 \cup L_2 \neq L_2$ y, por lo tanto, $L_1 \neq L_2$.

(iii) Dado $x \in L_1 \cap L_2$ con $x \neq z$ es posible hallar $t_1 \in (0, h_1(s_0)]$ y $t_2 \in (0, h_2(s_0)]$ tales que $x = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$. Se observa que $\alpha_2(t_2) = x = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(1 - t_1)$, con $1 - t_1, t_2 \in [0,1)$. Como α_2 es una función inyectiva en el intervalo $[0,1)$, se sigue que $1 - t_1 = t_2$ y ya que $t_1 \leq h_1(s_0) = 1 - h_2(s_0) \leq 1 - t_2 = t - 1$ se sigue que $t_1 = h_1(s_0)$ y $x = \alpha_1(t_1) = \alpha_1(h_1(s_0)) = w$. De aquí se deduce que $L_1 \cap L_2 = \{z, w\}$.

(iv) Para $i = 1$ e $i = 2$ se tiene que $\mu(L_i) = \mu(\gamma_i(h_i(s_0))) = g_i(h_i(s_0))$, lo cual implica que $\mu(L_1) = \mu(L_2)$.

Se sigue de los incisos (i)-(iv) que w es punto antipodal de z respecto de μ, y $X_1 = L_1$, $X_2 = L_2$ cumplen lo requerido en el planteamiento del teorema. Resta demostrar que w es el único punto antipodal de z respecto de μ.

Supóngase que $w' \in S^1$ también es un punto antipodal de z respecto de μ y elíjanse $K_1, K_2 \in C(\mathbf{S}^1)$ tales que $S^1 = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \{z, w\}$ y $\mu(K_1) = \mu(K_2)$. Como $K_1 \cup K_2 = S^1 \neq \{z, w'\} = K_1 \cap K_2$, se sigue que K_1 y K_2 son subcontinuos distintos, propios y no degenerados de $\mathbf{S}^1$ y así $K_1, K_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{X})$. Luego, elíjase $t_0 \in [0,1)$ tal que $w = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(1 - t_0)$ y se definen $M_1 = \gamma_1(t_0)$ y $M_2 = \gamma_2(1 - t_0)$. Se puede verificar, como se ha hecho en los incisos (ii) y (iii), que $S^1 = M_1 \cup M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \{z, w'\}$. Dado que $M_1 \setminus \{z, w'\} = \alpha_1[(0, t_0)]$ y $M_2 \setminus \{z, w'\} = \alpha_2[(0, 1 - t_0)]$ son conjuntos conexos en $\mathbf{S}^1$ contenidos en $S^1 \setminus \{z, w'\} = (K_1 \setminus \{z, w'\}) \cup (K_2 \setminus \{z, w'\})$ se sigue, justo como en la prueba del *Lema 3.32*, que M_1 y M_2 están contenidos individualmente en alguno de los conjuntos K_1 o K_2. Obsérvese que K_1 y K_2 son subcontinuos propios de $\mathbf{S}^1$ así que no pueden contener simultáneamente a M_1 y a M_2 pues $M_1 \cup M_2 = S^1$. Por lo tanto, se puede suponer que $M_1 \subseteq K_1$ y $M_2 \subseteq K_2$, permutando los índices de K_1 y de K_2 de ser necesario. Así, las condiciones $K_1 \cup K_2 = S^1 = M_1 \cup M_2$,

$K_1 \cap K_2 = \{z, w'\} = M_1 \cap M_2$, $M_1 \subseteq K_1$ y $M_2 \subseteq K_2$ implican que $K_1 = M_1 = \gamma_1(t_0)$ y $K_2 = M_2 = \gamma_2(1-t_0)$. Ahora, hágase $r_0 = \mu(K_1) = \mu(K_2)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} h(r_0) &= h_1(r_0) + h_2(r_0) = h_1(\mu(K_1)) + h_2(\mu(K_2)) \\ &= h_1(\mu(\gamma_1(t_0))) + h_2(\mu(\gamma_2(1-t_0))) = h_1(g_1(t_0)) + h_2(g_2(1-t_0)) \\ &= t_0 + (1-t_0)) = 1. \end{aligned}$$

Dado que s_0 era el único elemento de J tal que $h(s_0) = 1$, se sigue que $r_0 = s_0$ y, consecuentemente, $w' = \alpha_1(t_0) = \alpha_1(h_1(r_0)) = \alpha_1(h_1(s_0)) = w$. De aquí se sigue que w es el único punto antipodal de z respecto de μ.

Para el caso general, se consideran una curva cerrada simple $\boldsymbol{Y}$ y un punto $x \in Y$. Luego, eligiendo un homeomorfismo $h : \mathbf{S}^1 \to \boldsymbol{Y}$, se considera la función de Whitney $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\mathbf{S}^1) \to \boldsymbol{J}$ dada por $\widetilde{\mu} = \mu \circ \boldsymbol{C}(\mu)$. Haciendo $z = h^{-1}(x)$, se aplica la primera parte de la demostración para obtener $w \in S^1$ y $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\mathbf{S}^1)$, con $L_1 \neq L_2$, de manera que w es punto antipodal de z respecto de $\widetilde{\mu}$, z y w son los puntos extremoss de L_1 y de L_2 en $\mathbf{S}^1$, $S^1 = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{z, w\}$ y $\widetilde{\mu}(L_1) = \widetilde{\mu}(L_2)$. Haciendo $y = h(w)$, $X_1 = h[L_1]$ y $X_2 = h[L_2]$ se tiene que $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $X_1 \neq X_2$, $x = h(z)$ y $y = h(w)$ son los puntos extremos de X_1 de X_2 en $\boldsymbol{Y}$, $Y = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{x, y\}$, y $\mu(X_1) = \mu(h[L_1]) = \widetilde{\mu}(L_1) = \widetilde{\mu}(L_2) = \mu(h[L_2]) = \mu(X_2)$. La prueba concluirá si se demuestra que y es el único punto antipodal de x respecto de μ. Que y es punto antipodal de x respecto de μ es consecuencia directa de las propiedades anteriormente enlistadas de X_1 y de X_2 así que resta ver la unicidad de y. Supóngase que $y' \in Y$ también es punto antipodal de x respecto de μ y tómense $Y_1, Y_2 \in C(\boldsymbol{Y})$ de manera que $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \{z, y\}$ y $\mu(Y_1) = \mu(Y_2)$. Si se definen $w' = h^{-1}(y')$, $K_1 = h^{-1}[Y_1]$ y $K_2 = h^{-1}[Y_2]$ entonces ocurre que $K_1, K_2 \in C(\mathbf{S}^1)$, $S^1 = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \{z, w'\}$ y $\widetilde{\mu}(K_1) = \mu(h[K_1]) = \mu(Y_1) = \mu(Y_2) = \mu(h[K_2]) = \widetilde{\mu}(K_2)$. De aquí se sigue que w' es un punto antipodal de z respecto de $\widetilde{\mu}$. Como w era el único elemento de S^1 con esta propiedad, necesariamente ocurre que $w' = w$ y así $y' = h(w') = h(w) = y$. Esto implica que y es el único punto antipodal de z respecto de μ. ∎

3.34 Definición. Considérese una curva cerrada simple $\boldsymbol{Y}$. Dada cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ se puede definir una función $A_\mu : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ de manera que, para cada $x \in Y$, $A_\mu(x)$ es el único punto antipodal de x respecto de μ. A esta función se le nombrará *función antipodal* respecto de μ.

3.35 Observación. (1) Debido a la *Observación 3.31* se tiene que, para cada $x \in Y$, $A_\mu(A_\mu(x)) = x$, es decir, la función antipodal $A_\mu : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ es una involución.
(2) Tal y como indica el *Teorema 3.33*, para cada $x \in Y$, el punto antipodal de x respecto de μ es distinto de x, esto es, $A_\mu(x) \neq x$. Así, la función antipodal $A_\mu : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ no tiene puntos fijos.

3.36 Lema. Sean $\boldsymbol{Y}$ una curva cerrada simple y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dados $x \in Y$ y $s \in J$ con $s < \mu(Y)$ existe $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ tal que $P_\mu(K) = x$ y $\mu(K) = s$.

Demostración. Debido al *Teorema 3.33*, existen $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $X_1 \neq X_2$, de manera que x y $A_\mu(x)$ son los puntos extremos de X_1 y X_2 en $\boldsymbol{Y}$, $Y = X_1 \cup X_2$,

$X_1 \cap X_2 = \{x, A_\mu(x)\}$ y $\mu(X_1) = \mu(X_2)$. Luego, hágase $a = \mu(X_1) = \mu(X_2)$. Sean $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ los subespacios de $\boldsymbol{Y}$ inducidos sobre X_1 y X_2, respectivamente y $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ el subespacio de $\boldsymbol{J}$ inducido sobre el intervalo $\widetilde{J} = [0, a]$. Para $i = 1$ e $i = 2$, se considera un arco ordenado $\alpha_i : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_i)$, que va desde $\{x\}$ hasta X_i, y se define $g_i : \boldsymbol{I} \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ como:

$$\forall t \in I : g_i(t) = \mu(\alpha_i(t)).$$

Claramente, ésta es una función continua. Además, $g_i(0) = \mu(\alpha_i(0)) = \mu(\{x\}) = 0$, $g_i(1) = \mu(\alpha_i(1)) = \mu(X_i) = a$ y $g_i : (I, \leq) \to (\widetilde{J}, \leq)$ es una función estrictamente creciente así que $g_i : \boldsymbol{I} \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ es también una biyección. En consecuencia, se puede considerar $h_i : \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{I}$ tal que $h_i = g_i^{-1}$ y definir $\gamma_i : \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_i)$ como $\gamma_i = \alpha_i \circ h_i$. Nótese que, para cada $s \in \widetilde{J}$, $x \in \gamma_1(s) \cap \gamma_2(s)$ así que se puede definir una función continua $\gamma : \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ como:

$$\forall s \in \widetilde{J} : \gamma(s) = \gamma_1(s) \cup \gamma_2(s).$$

Se observa que

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) \cup \gamma_2(0) = \alpha_1(h_1(0)) \cup \alpha_2(h_2(0)) = \alpha_1(0) \cup \alpha_2(0) = \{x\} \quad \text{y}$$

$$\gamma(a) = \gamma_1(a) \cup \gamma_2(a) = \alpha_1(h_1(a)) \cup \alpha_2(h_2(a)) = \alpha_1(1) \cup \alpha_2(1) = X_1 \cup X_2 = Y.$$

Por lo tanto, $\mu(\gamma(0)) = \mu(\{x\}) = 0 \leq s < \mu(Y) = \mu(\gamma(a)))$. Aplicando el *Teorema del Valor Intermedio*, se puede hallar $r \in [0, a)$ tal que $\mu(\gamma(r)) = s$. Sean $K = \gamma(r)$, $K_1 = \gamma_1(r)$ y $K_2 = \gamma_2(r)$. Es claro que $K = K_1 \cup K_2$ y, ya que $\mu(K) = s < \mu(Y)$ se tiene que K es un subcontinuo propio de $\boldsymbol{Y}$, esto es, $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$. Ahora, para $i = 1$ e $i = 2$, $\mu(K_i) = \mu(\gamma_i(r)) = \mu(\alpha_i(h_i(r)) = g_i(h_i(r)) = r < a = \mu(X_i)$. De esta manera, K_i es un subcontinuo propio de $\boldsymbol{X}_i$. Dado que x y $A_\mu(x)$ son los puntos extremos de $\boldsymbol{X}_i$ y $x \in K_i$, se sigue del *Lema 3.14*, que $A_\mu(x) \notin K_i$. Así, $\mu(K_1) = r = \mu(K_2)$ y $K_1 \cap K_2 = \{x\}$. Esto demuestra que, $P_\mu(K) = x$. ■

3.37 Lema. Si $\boldsymbol{Y}$ es una curva cerrada simple y $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ entonces, para cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$, se tiene que $A_\mu(P_\mu(L)) \notin L$.

Demostración. Sea p un punto de Y. Se demostrará que, si $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $L_1 \neq L_2$, p es un punto extremo de L_1 y de L_2, $A_\mu(p) \in L_1 \cup L_2$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$ entonces $L_1 \cup L_2 = Y$. De acuerdo con el *Teorema 3.33*, es posible hallar $X_1, X_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $X_1 \neq X_2$, tales que p y $A_\mu(p)$ son los puntos extremos de X_1 y X_2 en $\boldsymbol{Y}$, $Y = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{p, A_\mu(p)\}$ y $\mu(X_1) = \mu(X_2)$. Por hipótesis, $A_\mu(p) \in L_1 \cup L_2$, así que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $A_\mu(p) \in L_1$. Considérese un arco K en $\boldsymbol{Y}$ tal que p y $A_\mu(p)$ son los puntos extremos de K en $\boldsymbol{Y}$ y $K \subseteq L_1$. Como $K \setminus \{p, A_\mu(p)\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$, se sigue que $K \subseteq X_1$ o $K \subseteq X_2$. Se supondrá, sin perder generalidad alguna, que $K \subseteq X_1$. Dado que K contiene a los puntos extremos de X_1 en $\boldsymbol{Y}$, se sigue del *Lema 3.14* que $X_1 = K \subseteq L_1$.

Como $L_1 \neq L_2$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$, el conjunto $L_1 \setminus L_2$ es no vacío y abierto en $\boldsymbol{Y}$ y, por lo tanto, tiene una infinidad de puntos. Así, se puede elegir $y \in L_1 \setminus L_2$ tal que

$y \neq A_\mu(p)$. Por el *Lema 3.32*, existen $M_1, M_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $M_1 \neq M_2$, de manera que p y y son los puntos extremos de M_1 y M_2 en $\boldsymbol{Y}$, $Y = M_1 \cup M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \{p, y\}$. Se observa que $\mu(M_1) \neq \mu(M_2)$ pues de lo contrario, y sería el punto medio de p respecto de μ. Dado que $p, y \in L_1$, existe un arco K' en $\boldsymbol{Y}$ de manera que p y y son los puntos extremos de K' en $\boldsymbol{Y}$ y $K' \subseteq L_1$. Como $K' \setminus \{p, y\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$, se sigue que $K' \subseteq M_1$ o $K' \subseteq M_2$. Supóngase que $K' \subseteq M_1$, renombrando de ser necesario. Nótese que K' contiene a los puntos extremoss de M_1 en $\boldsymbol{Y}$ por lo cual $M_1 = K' \subseteq L_1$.

Debido a que $L_2 \setminus \{p, y\} = L_2 \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$ se sigue que $L_2 \subseteq M_1$ o $L_2 \subseteq M_2$. Como L_1 y L_2 no son comparables bajo la inclusión y $M_1 \subseteq L_1$, no puede ocurrir que $L_2 \subseteq M_1$. Por lo tanto, $L_2 \subseteq M_2$. Así, $\mu(M_1) \leq \mu(L_1) = \mu(L_2) \leq \mu(M_2)$, de donde se sigue que $\mu(M_1) < \mu(M_2)$. Nótese que X_1 y M_1 son subcontinuos de L_1 que contienen a p el cual es punto extremo de L_1 en $\boldsymbol{Y}$. Del *Lema 3.13* se sigue que $M_1 \subseteq X_1$ o $X_1 \subseteq M_1$. Si $X_1 \subseteq M_1$ entonces, $A_\mu(p) \in M_1 \setminus \{p, y\}$ Por lo cual $M_2 \setminus \{p, A_\mu(p)\} = M_2 \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$. Esto implica que $M_2 \subseteq X_1$ o $M_2 \subseteq X_1$. En cualquiera de los casos anteriores, $\mu(M_2) \subseteq \mu(X_2) = \mu(X_1) \leq \mu(M_1)$; esto es una contradicción. De aquí se sigue que $M_1 \subseteq X_1$. Obsérvese que $p \neq y \neq A_\mu(p)$ y $M_1 \cap X_2 \subseteq X_1 \cap X_2 = \{p, A_\mu(p)\}$ por lo cual $y \notin X_2$. Así, $X_2 \setminus \{p, y\} = X_2 \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{Y}$ y, en consecuencia, $X_2 \subseteq M_1$ o $X_2 \subseteq M_2$. Como X_1 y X_2 no pueden ser comparables bajo la inclusión y $M_1 \subseteq X_1$, no puede ocurrir que $X_2 \subseteq M_1$. Por lo tanto, $X_2 \subseteq M_2$. De aquí que X_2 y L_2 son subcontinuos de M_2 que contienen a uno de sus puntos extremos en $\boldsymbol{Y}$, a saber p. Se deduce del *Lema 3.13* que X_2 y L_2 son comparables bajo la inclusión. Dado que $\mu(X_2) = \mu(X_1) \leq \mu(L_1) = \mu(L_2)$ se sigue que $X_2 \subseteq L_2$ y así, $Y = X_1 \cup X_2 \subseteq L_1 \cup L_2$.

Finalmente, sea $L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ tal que $P_\mu(L) = p$. Si $L = \{p\}$ entonces es claro que $A_\mu(p) \notin L$, por lo cual se supondrá que $L \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$. Debido al *Teorema 3.18*, existen $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}(\boldsymbol{Y})$, con $L_1 \neq L_2$, de manera que p es un punto extremo de L_1 y de L_2 en $\boldsymbol{Y}$, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{p\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$. Dado que $L_1 \cup L_2 = L \neq Y$, se sigue de lo anteriormente demostrado que $A_\mu(p) \neq L_1 \cup L_2 = L$, que es lo que se quería probar. ■

Capítulo 4

Propiedades de Whitney

§1 Niveles de Whitney

4.1 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $\theta \in J$. Se empleará la notación $W_\mu(\theta)$ para referirse al conjunto $\mu^{-1}[\{\theta\}]$. Dado $\theta < \mu(X)$ se define el *nivel de Whitney* θ de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ respecto de μ, denotado por $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$, como el subespacio de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ inducido sobre el conjunto $W_\mu(\theta)$. Si $\theta > 0$ entonces se dirá que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es un *nivel de Whitney positivo*.

4.2 Observación. (1) Para toda función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{W}_\mu(0) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X})$. (2) Del *Lema 2.62* se deduce que, para cada $\theta \in J$ y cada $x \in X$ existe $N \in W_\mu(\theta)$ tal que $x \in N$. Esto implica que $\bigcup W_\mu(\theta) = X$.

4.3 Definición. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una *propiedad de Whitney* si cada vez que un continuo cumple $\mathcal{P}$ entonces todos los niveles de Whitney de su hiperespacio de subcontinuos también cumplen $\mathcal{P}$.

4.4 Observación. Debido a la *Observación 4.2 (1)* y al *Teorema 2.11*, para demostrar que una propiedad topológica es una propiedad de Whitney bastará verificar que los niveles de Whitney positivos cumplen dicha propiedad.

4.5 TEOREMA. Ser un continuo no degenerado es una propiedad de Whitney.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo no degenerado, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $0 < \theta < \mu(X)$. De la *Definición 4.1* es claro que $W_\mu(\theta)$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Además, se sigue de la *Observación 4.2 (2)* que $W_\mu(\theta)$ es una cubierta de X por subconjuntos propios así que $W_\mu(\theta)$ tiene más de un elemento. Resta probar que $W_\mu(\theta)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Claramente, $\mathcal{H} = \{K \in C(\boldsymbol{X}) \mid \mu(K) \leq \theta\}$ y $\mathcal{K} = \{K \in C(\boldsymbol{X}) \mid \mu(K) \geq \theta\}$ son conjuntos no vacíos y cerrados en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

(i) Dado $K \in \mathcal{H} \smallsetminus F_1(\boldsymbol{X})$ se elige $x \in K$ y un arco ordenado $\alpha_K : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que va desde $\{x\}$ hasta K. Para todo $t \in I$, $\alpha_K(t) \subseteq K$ así que $\mu(\alpha_K(t)) \leq \mu(K) \leq \theta$. Esto implica que $\mathcal{C}_K = \alpha_K[I] \subseteq \mathcal{H}$. Si para cada $x \in X$ se define $\mathcal{C}_{\{x\}} = F_1(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{H}$ entonces $\{\mathcal{C}_K\}_{K \in \mathcal{H}}$ es una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ cada uno de los cuales intersecta a $F_1(\boldsymbol{X})$ y cuya unión es $\mathcal{H}$. Por tanto, $\mathcal{H}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

(ii) Al igual que en la prueba del *Teorema 2.59*, para cada $K \in \mathcal{K}$ se puede obtener una función continua $\alpha_K : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ de manera que $\alpha_K(0) = K$, $\alpha_K(1) = X$ y, para cada $t \in I$, $K \subseteq \alpha_K(t)$. De esta forma, $\mu(\alpha_K(t)) \geq \mu(K) \geq \theta$ de donde se sigue que $\mathcal{C}_K = \alpha_K[I] \subseteq \mathcal{K}$. Así, $\{\mathcal{C}_K\}_{K\in\mathcal{K}}$ es una familia de conjuntos conexos en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ con intersección no vacía y cuya unión es $\mathcal{K}$. Por tanto, $\mathcal{K}$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$.

De los incisos (i) y (ii) se deduce que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subcontinuos de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Dado que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es unicoherente *(Corolario 2.65)* y $C(\boldsymbol{X}) = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ se sigue que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = W_\mu(\theta)$ es un conjunto conexo en $\boldsymbol{X}$. ■

§2 Ser un arco

4.6 Definición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Se define el *cilindro* de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ como el espacio producto $\mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu) = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{J}$.

4.7 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un arco y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Si $K, L \in C(\boldsymbol{X})$ y $P_\mu(K) = P_\mu(L)$ entonces $K \subseteq L$ o $L \subseteq K$.

Demostración. Primero se considera $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$. Dados $K, L \in C(\boldsymbol{I})$ existen $a, b, c, d \in I$ tales que $K = [a, b]$ y $L = [c, d]$. Si $e = P_\mu(K) = P_\mu(L)$ entonces $\mu([a, e]) = \mu([e, b])$ y $\mu([c, e]) = \mu([e, d])$. Supóngase que $L \nsubseteq K$ y elíjase $x \in K \setminus L$. Se tiene que $a \leq x < c$ o $d < x \leq b$. En el primer caso se tiene que $[c, e] \subset [a, e]$ mientras que en el segundo caso se tiene que $[e, d] \subset [e, b]$. De cualquier forma,

$$\mu([c, e]) = \mu([e, d]) < \mu([a, e]) = \mu([e, b]).$$

Como $[a, e]$ es comparable bajo la inclusión con $[c, e]$ y $[e, b]$ es comparable con $[e, d]$ se sigue que $[c, e] \subset [a, e]$ y $[e, d] \subset [e, b]$. Por lo tanto, $L = [c, d] \subset [a, b] = K$. Se concluye que si $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney entonces, cualesquiera subcontinuos de $\boldsymbol{I}$ con el mismo punto medio respecto de μ son comparables bajo la relación de inclusión.

Ahora, sea $\boldsymbol{X}$ un arco cualquiera y elíjase un homeomorfismo $\varphi : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$. Dada una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ se define $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{J}$ como $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu} \circ \boldsymbol{C}(\varphi)$. Por la *Proposición 3.20*, $\mathfrak{M}(\varphi) : \mathfrak{M}(\boldsymbol{I}) \to \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ es un homeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "P_\mu"] & \boldsymbol{X} \\
\mathfrak{M}(\boldsymbol{I}) \arrow[u, "\mathfrak{M}(\varphi)"] \arrow[r, "P_{\widetilde{\mu}}"'] & \boldsymbol{I} \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd} \qquad P_\mu \circ \mathfrak{M}(\varphi) = \varphi \circ P_{\widetilde{\mu}}.$$

Sean $K, L \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ tales que $P_\mu(K) = P_\mu(L)$. Haciendo $K' = \varphi^{-1}[K]$ y $L' = \varphi^{-1}[L]$ se tiene que $K', L' \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{I})$ y además

$$\varphi(P_{\widetilde{\mu}}(K')) = P_\mu(\varphi[K']) = P_\mu(K) = P_\mu(L) = P_\mu(\varphi[L']) = \varphi(P_{\widetilde{\mu}}(L')).$$

Esto implica que $P_{\widetilde{\mu}}(K') = P_{\widetilde{\mu}}(L')$. De la primera parte de la demostración se obtiene que K' y L' son comparables bajo la inclusión. Dado que $K = \varphi[K']$ y $L = \varphi[L']$ se sigue que K y L también son comparables bajo la inclusión, que es lo que se quería probar. ■

4.8 Proposición. Sea $\boldsymbol{X}$ un arco. Dada cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$, la función $\Phi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$, definida como

$$\forall K \in C(\boldsymbol{X}) : \Phi_\mu(K) = (P_\mu(K), \mu(K)),$$

es una inmersión que se denomina *inmersión del hiperespacio $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ en el cilindro de μ.*

Demostración. Debido al *Teorema 3.25*, la función $\Phi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$ es continua así que resta probar que es inyectiva. Si $K, L \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ y $\Phi_\mu(K) = \Phi_\mu(L)$ entonces $P_\mu(K) = P_\mu(L)$. Por el *Lema 4.7*, K y L son subcontinuos comparables de $\boldsymbol{I}$ bajo la inclusión. Luego, como $\mu(K) = \mu(L)$, se sigue de la *Observación 2.52 (5)* que $K = L$. Esto demuestra que $\Phi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$ es una inmersión. ■

4.9 TEOREMA. Ser un arco es una propiedad de Whitney.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ un arco, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney cualquiera y $0 < \theta < \mu(X)$. Si $\Phi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$ es la inmersión definida en la *Proposición 4.8* entonces $\Phi_\mu[W_\mu(\theta)] \subseteq X \times \{\theta\}$. Nótese que $X \times \{\theta\}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{X}$ en $\mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$ así que $X \times \{\theta\}$ es un arco. Por lo tanto, $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ un continuo no degenerado homeomorfo a algún subcontinuo de un arco. De esto se deduce que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es un arco. ■

§3 Ser una curva cerrada simple

4.10 Definición. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo. Dada una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ se define su *cono* como el espacio cociente $\mathrm{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu) = \mathrm{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)/(X \times \{\mu(X)\})$.

4.11 Observación. Sea $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney.
(1) Los elementos de $\mathrm{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$ son clases de equivalencia de elementos de $\mathrm{Cil}(\mu)$. Dados $x \in X$ y $t \in J$ se denotará por $[x, t]$ a la clase de equivalencia de (x, t) en $\mathrm{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$.
(2) Si $(x, t) \in X \times J$ entonces $[x, t] = \{(x, t)\}$ cuando $t < \mu(X)$ y $[x, t] = X \times \{\mu(X)\}$ para $t = \mu(X)$.

4.12 Proposición. Sea $\boldsymbol{Y}$ una curva cerrada simple. Para cualquier función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}$ la función $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$, definida como

$$\forall K \in C(\boldsymbol{Y}) : \Psi_\mu(K) = \begin{cases} [P_\mu(K), \mu(K)] & \text{si } K \neq Y, \\ Y \times \{\mu(Y)\} & \text{si } K = Y, \end{cases}$$

es un homeomorfismo que se denominará *homeomorfismo del hiperespacio $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ en el cono de μ.*

Demostración. Primeramente se probará que $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$ es una función continua. Sean $K \in C(\boldsymbol{Y})$ y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge al punto K en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ de manera que la sucesión $(\Psi_\mu(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\text{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$.

(i) Si $K \neq Y$ entonces se elige $x \in Y \setminus K$. Como $K \subseteq Y \setminus \{x\}$ se puede suponer que $K_n \subseteq Y \setminus \{x\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, $K_n \neq Y$ y $\Psi_\mu(K_n) = [P_\mu(K_n), \mu(K_n)]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el *Teorema 3.29*, $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ es una función continua así que

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_\mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} [P_\mu(K_n), \mu(K_n)] = [P_\mu(K), \mu(K)] = \Psi_\mu(K).$$

(ii) Si $K = Y$ entonces existe un subsucesión de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(K'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $K'_n = Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien, $K_n \neq Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso se tiene $\Psi_\mu(K'_n) = Y \times \{\mu(Y)\} = \Psi_\mu(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo cual $\lim \Psi_\mu(K'_n) = \Psi_\mu(K)$. En el segundo caso, $\Psi_\mu(K_n) = [P_\mu(K_n), \mu(K_n)]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Elíjase una subsucesión de $(K'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nómbrese $(K''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que la sucesión $(P_\mu(K''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto p en $\boldsymbol{Y}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_\mu(K''_n) = \lim_{n\to\infty} [P_\mu(K''_n), \mu(K''_n)] = [p, \mu(Y)] = Y \times \{\mu(Y)\} = \Psi_\mu(K).$$

Se sigue de los incisos (i) y (ii) que $\lim \Psi_\mu(K_n) = \Psi_\mu(K)$. Por el *Lema 3.24*, la función $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$ es continua.

Ahora, considérense $K, L \in C(\boldsymbol{Y})$ tales que $\Psi_\mu(K) = \Psi_\mu(L) = [x, s]$. Si $s = \mu(Y)$ entonces $[x, s] = Y \times \{\mu(Y)\}$ y $K = Y = L$. Si $s < \mu(Y)$ entonces $K \neq Y \neq L$, $P_\mu(K) = P_\mu(L) = x$ y $\mu(K) = \mu(L) = s$. Por el *Lema 3.37*, $A_\mu(x) \notin K \cup L$ así que, si $\boldsymbol{X}$ es el subespacio de $\boldsymbol{Y}$ inducido sobre $X = K \cup L$ entonces, $\boldsymbol{X}$ es un arco. Dado que $K, L \in C(\boldsymbol{X})$, $P_\mu(K) = P_\mu(L)$ y $\mu(K)) = \mu(L)$, se sigue del *Corolario 3.21* y del *Lema 4.7* que $K = L$. De aquí que la función $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$ es inyectiva.

Finalmente, sea $[x, s] \in \text{Cono}(Y, \mu)$. Si $s < \mu(Y)$ entonces, por el *Lema 3.36*, existe $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ tal que $P_\mu(K) = x$ y $\mu(K) = s$. Así, $\Psi_\mu(K) = [P_\mu(K), \mu(K)] = [x, s]$. Si $s = \mu(Y)$ entonces $[x, s] = Y \times \{\mu(Y)\} = \Psi_\mu(Y)$. De aquí se sigue que la función $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{Y}, \mu)$ es suprayectiva y, por lo tanto, es un homeomorfismo. ■

4.13 TEOREMA. Ser una curva cerrada simple es una propiedad de Whitney.

Demostración. Sean $\boldsymbol{X}$ una curva cerrada simple, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ cualquier función de Whitney y $0 < \theta < \mu(X)$. Si $p : \text{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu) \to \text{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$ es la proyección canónica y $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$ el homeomorfismo definido en la *Proposición 4.12* entonces, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$, $K \in W_\mu(\theta)$ si y sólo si $\Psi_\mu(K) = p(P_\mu(K), \theta)$. De aquí que, $\Psi_\mu[W_\mu(\theta)] = p[X \times \{\theta\}]$. Obsérvese que $X \times \{\theta\}$ es una curva cerrada simple en $\text{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu)$. Además, $p : \text{Cil}(\boldsymbol{X}, \mu) \to \text{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$ restringida a $X \times [0, \mu(X))$ es una inmersión así que $p[X \times \{\theta\}]$ es una curva cerrada simple en $\text{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$. Dado que $\Psi_\mu[W_\mu(\theta)] = p[X \times \{\theta\}]$ y $\Psi_\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \text{Cono}(\boldsymbol{X}, \mu)$ es un homeomorfismo se sigue que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es una curva cerrada simple. ■

§4 Arco conexidad

4.14 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$, si $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} K < \delta$ entonces $\mu(K) < \epsilon$.

Demostración. Nótese que el conjunto $\mathcal{F} = \{K \in C(\boldsymbol{X}) \,|\, \mu(K) \geq \epsilon\}$ es cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ y por tanto es cerrado en $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$. Debido a que la función $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} : \mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{I}$ es continua es posible hallar $K_0 \in \mathcal{F}$ de manera que $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} K_0 = \text{mín} \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} [\mathcal{F}]$. Como $\mu(K_0) \geq \epsilon > 0$, K_0 es un subcontinuo no degenerado de $\boldsymbol{X}$ y así $\delta = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} K_0 > 0$. De aquí que, si $K \in C(\boldsymbol{X})$ y $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} K < \delta = \text{mín} \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} [\mathcal{F}]$ entonces $K \notin \mathcal{F}$, lo cual ocurre sólo si $\mu(K) < \epsilon$. ■

4.15 Proposición. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $\theta \in J$. Si $K, L \in W_\mu(\theta)$, $K \neq L$ y $K \cap L \neq \varnothing$ entonces, para todo $p \in K \cap L$, existe un arco $\mathcal{L}$ en $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ tal que $K, L \in \mathcal{L}$ y $p \in B$ para cada $B \in \mathcal{L}$.

Demostración. Dado que $K \neq L$ y $\mu(K) = \theta = \mu(L)$ se tiene que $K \neq \{p\} \neq L$ así que es posible hallar arcos ordenados $\alpha, \beta : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ que vayan desde $\{p\}$ hasta K y desde $\{p\}$ hasta L respectivamente. Para cada $s \in I$ se define la función continua $f_s : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ de la siguiente manera:

$$\forall t \in I : f_s(t) = \alpha(t) \cup \beta(s).$$

Para cualesquiera $t, s \in I$, $f_s(t) \in C(\boldsymbol{X})$ pues $p \in \alpha(t) \cap \beta(s)$. Además, nótese que $f_s(0) = \alpha(0) \cup \beta(s) = \{p\} \cup \beta(s) = \beta(s) \subseteq L$ y $f_s(1) = \alpha(1) \cup \beta(s) = K \cup \beta(s) \supseteq K$. De aquí que $\mu f_s(0) \leq \mu(L) = \theta = \mu(K) \leq \mu f_s(1)$. Aplicando el *Teorema del Valor Intermedio* se puede hallar $T(s) \in I$ tal que $\mu f_s(T(s)) = \theta$, esto es, $f_s(T(s)) \in W_\mu(\theta)$. Ahora, se define $F(s) = f_s(T(s))$ para cada $s \in I$. Nótese que, para cada $s \in I$, $f_s : (I, \leq) \to (C(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ es una función creciente así que dado $t \in I$ se tiene que $f_s(t)$ y $F(s) = f_s(T(s))$ son comparables respecto a la inclusión. En consecuencia, si $\mu(f_s(t)) = \theta = \mu(F(s))$ entonces $f_s(t) = F(s)$. Haciendo uso de este resultado se demostrará que $F : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es una función continua. Sean $s \in I$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a s en $\boldsymbol{I}$ de manera que la sucesión de imágenes $(F(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$. Se elige una subsucesión de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que la sucesión $(T(s'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\boldsymbol{I}$. Si $t = \text{lím}\, T(s'_n)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(s'_n) = \lim_{n\to\infty} f_{s'_n}(T(s'_n)) = \lim_{n\to\infty} (\alpha(T(s'_n)) \cup \beta(s'_n)) = \alpha(t) \cup \beta(s) = f_s(t).$$

Como $f_s(t) \in W_\mu(\theta)$ se sigue que $\text{lím}\, F(s_n) = f_s(t) = F(s)$. Del *Lema 3.24* se deduce la continuidad de la función $F : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{W}_\mu(\theta)$. Nótese que

$$\mu f_0(1) = \mu(\alpha(1) \cup \beta(0)) = \mu(K \cup \{p\}) = \mu(K) = \theta \quad \text{y}$$

$$\mu f_1(0) = \mu(\alpha(0) \cup \beta(1)) = \mu(\{p\} \cup L) = \mu(L) = \theta$$

así que $F(0) = f_0(1) = K$ y $F(1) = f_1(0) = L$. Por tanto, $F[I]$ es una trayectoria en $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ que contiene a K y a L. Debido a la *Observación 1.30 (2)* y al *Teorema 1.36* es posible hallar un arco $\mathcal{L}$ en $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ tal que $\mathcal{L} \subseteq F[I]$ y $K, L \in \mathcal{L}$. Finalmente, como $\{p\} \subseteq \alpha(T(s)) \cup \beta(s) = F(s)$ para cada $s \in I$, se sigue que $p \in B$, para todo $B \in \mathcal{L}$. ■

4.16 TEOREMA. La arco conexidad es una propiedad de Whitney.

Demostración. Considérese un continuo arco conexo $\boldsymbol{X}$, una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ y $0 < \theta < \mu(X)$. Por el *Teorema 1.37* bastará probar que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es conexo por trayectorias. Sean $K, L \in W_\mu(\theta)$ y tómense $p \in K$, $q \in L$. Dado que $\boldsymbol{X}$ es arco conexo en particular es conexo por trayectorias así que existe una función continua $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Como $B = \alpha[I]$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{X}$ y $B \cap K \neq \emptyset \neq B \cap L$ se sigue que $K \cup B \cup L \in C(\boldsymbol{X})$. Ahora, por el *Lema 4.14* existe $\epsilon > 0$ tal que, si $N \in C(\boldsymbol{X})$ y $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} N < \epsilon$ entonces $\mu(N) < \theta$. Luego, como $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ es una función uniformemente continua existe $\delta > 0$ de manera que $d(\alpha(s), \alpha(t)) < \epsilon$ para cualesquiera $s, t \in I$ con $|s - t| < \delta$. Elíjase $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$ y para cada i desde 1 hasta n defínase $B_i = \alpha[[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]] \subseteq B$. Es fácil observar que $B_i \in C(\boldsymbol{X})$ y $\operatorname{diam}_X B_i < \epsilon$ por lo cual $\mu(B_i) < \theta \leq \mu(K \cup B \cup L)$. Aplicando el *Lema 2.56*, para todo i desde 1 hasta n existe $M_i \in W_\mu(\theta)$ tal que $B_i \subset M_i \subseteq K \cup B \cup L$. Si $M_0 = K$ y $M_{n+1} = L$ entonces $M_0, \ldots, M_{n+1} \in W_\mu(\theta)$ y $M_{i-1} \cap M_i \neq \emptyset$ para cada i entre 1 y $n + 1$. Debido a la *Proposición 4.15* es posible hallar una inmersión $\gamma_i : \boldsymbol{I} \hookrightarrow \boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ tal que $\gamma_i(0) = M_{i-1}$ y $\gamma_i(1) = M_i$. Por tanto, se puede definir una función continua $\gamma : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ como:

$$\forall t \in I : \gamma(t) = \gamma_i((n+1)t - (i-1)), \quad \text{si } \frac{i-1}{n+1} \leq t \leq \frac{i}{n+1}.$$

Así, $\gamma(0) = \gamma_1(0) = M_0 = K$ y $\gamma(1) = \gamma_{n+1}(1) = M_{n+1} = L$, lo cual implica que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es conexo por trayectorias. ■

§5 Conexidad local

4.17 Lema. Considérense un continuo $\boldsymbol{X}$, una función de Whitney $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ y $\theta \in J$. Dados $K \in W_\mu(\theta)$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $L \in W_\mu(\theta)$ con $L \subseteq N_d(K, \delta)$ se cumple que $H_d(K, L) < \epsilon$.

Demostración. Primeramente, se define la función $\varphi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ como:

$$\forall L \in C(\boldsymbol{X}) : \varphi(L) = \max_{x \in L} d(x, K).$$

Como $\mathcal{F} = \{L \in C(\boldsymbol{X}) \mid H_d(K, L) \geq \epsilon \text{ y } \mu(L) = \theta\}$ es un conjunto cerrado en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ y $\varphi : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{I}$ es una función continua, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(B) = \min \varphi[\mathcal{F}]$. Nótese que $H_d(K, B) \geq \epsilon$ y $\mu(B) = \theta = \mu(K)$ así que $B \nsubseteq K$. Si se toma $x_0 \in B \setminus K$ entonces $\delta = \varphi(B) \geq d(x_0, K) > 0$. Por lo tanto, dado $L \in W_\mu(\theta)$ con $L \subseteq N_d(K, \delta)$ se tiene que, para cada $x \in L$, $d(x, K) < \delta$, esto es, $\varphi(L) < \delta$. Lo anterior implica que $L \notin \mathcal{F}$ y en consecuencia $H_d(K, L) < \epsilon$. ■

4.18 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\mu : C(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $\theta \in J$. Si $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es cik en el punto K y $\mu(K) = \theta$ entonces $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ también es cik en K.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el *Lema 4.17*, se puede elegir $\gamma > 0$ de manera que, para cada $L \in W_\mu(\theta)$ con $L \subseteq N_d(K, \gamma)$ se tiene que $H_d(K, L) < \epsilon$. Dado que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es cik en el punto K es posible hallar un subcontinuo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$, llámese $\mathcal{C}$, y $\delta > 0$ de manera que $B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(K, \delta) \subseteq \mathcal{C} \subseteq B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(K, \gamma)$. Sea $\boldsymbol{Y}$ el subespacio de $\boldsymbol{X}$ inducido sobre $Y = \bigcup \mathcal{C}$. Claramente, si $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{J}'$ es la restricción de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ entonces $\mathcal{K} = W_{\widetilde{\mu}}(\theta)$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$. Además, dado $L \in W_\mu(\theta)$ con $H_d(K, L) < \delta$ se tiene que $L \in B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(K, \delta) \subseteq \mathcal{C}$ por lo cual $L \subseteq \bigcup \mathcal{C} = Y$. Luego, si $L \in \mathcal{K}$ entonces $L \subset Y$ así que para cada $x \in L$ existe $C_x \in \mathcal{C}$ de manera que $x \in C_x$. Nótese que $H_d(K, C_x) < \gamma$ pues $\mathcal{C} \subseteq B_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})}(K, \gamma)$. Por tanto, $L \subseteq \bigcup_{x \in L} C_x \subseteq N_d(K, \gamma)$ y $L \in W_\mu(\theta)$ lo cual implica que $H_d(K, L) < \epsilon$. En resumen, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ tal que

$$B_{\boldsymbol{W}_\mu(\theta)}(K, \delta) \subseteq \mathcal{K} \subseteq B_{\boldsymbol{W}_\mu(\theta)}(K, \epsilon).$$

Consecuentemente, $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es cik en el punto K. ∎

4.19 TEOREMA. La conexidad local es una propiedad de Whitney.

Demostración. Sea $\boldsymbol{X}$ un continuo localmente conexo, $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney y $0 < \theta < \mu(X)$. Debido al *Teorema 2.61*, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ es localmente conexo y por tanto es cik en cada uno de sus puntos. Del *Lema 4.18* se sigue que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ también es cik en todos sus puntos. Esto implica que $\boldsymbol{W}_\mu(\theta)$ es localmente conexo. ∎

§6 Contractibilidad

4.20 Lema. Sean $\boldsymbol{X}$ un continuo, $\boldsymbol{Y}$ una curva cerrada simple y $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ una función de Whitney. Si $\boldsymbol{Y}$ es subespacio de $\boldsymbol{X}$ y $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ es el subespacio de $\boldsymbol{J}$ inducido sobre el intervalo $\widetilde{J} = [0, \mu(Y)]$ entonces existe una función continua $Q : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ tal que, para cada $(x, s) \in Y \times \widetilde{J}$, se cumple que $\mu(Q(x, s)) = s$. Más aún, si $s < \mu(Y)$ entonces $Q(x, s) \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \subseteq \mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$ y $P_\mu(Q(x, s)) = x$.

Demostración. Sea $\widetilde{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \widetilde{\boldsymbol{J}}$ la restricción de $\mu : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$. Luego, sea $Q : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ la función dada por $Q = \Psi_{\widetilde{\mu}}^{-1} \circ p$, donde $p : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \mathrm{Cono}(\boldsymbol{Y}, \widetilde{\mu})$ es la proyección canónica y $\Psi_{\widetilde{\mu}} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Cono}(\boldsymbol{Y}, \widetilde{\mu})$ es el homeomorfismo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ en el cono de $\widetilde{\mu}$. Dado que $P_{\widetilde{\mu}} : \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$ es restricción de $P_\mu : \mathfrak{M}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$, para cada $K \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ se cumple que $\Psi_{\widetilde{\mu}}(K) = p(P_{\widetilde{\mu}}(K), \widetilde{\mu}(K)) = p(P_\mu(K), \mu(K))$ si $K \neq Y$ y $\Psi_{\widetilde{\mu}}(K) = Y \times \{\widetilde{\mu}(Y)\} = Y \times \{\mu(Y)\}$ si $K = Y$. Así, para cualquier $(x, s) \in Y \times \widetilde{J}$ con $s < \mu(Y)$ se tiene que $\Psi_{\widetilde{\mu}}(Q(x, s)) = p(x, s) \neq Y \times \{\mu(Y)\}$. En consecuencia, $Q(x, s) \neq Y$ y $p(x, s) = \Psi_{\widetilde{\mu}}(Q(x, s)) = p(P_\mu(Q(x, s)), \mu(Q(x, s)))$, lo cual implica que $P_\mu(Q(x, s)) = x$ y $\mu(Q(x, s)) = s$. En cambio, si $s = \mu(Y)$ entonces $\Psi_{\widetilde{\mu}}(Q(x, s)) = Y \times \{\mu(Y)\}$ lo cual ocurre cuando y sólo cuando $Q(x, s) = Y$. Además, nuevamente se verifica que $\mu(Q(x, s)) = \mu(Y) = s$. Esto termina la demostración. ∎

4.21 Ejemplo. *Existe una celda bidimensional cuyo hiperespacio de subcontinuos admite un nivel de Whitney que posee un retracto homeomorfo a* $\mathbf{S}^2$.

Considérense $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1) \in S^2$ y la función continua $\pi : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ dada por

$$\forall \boldsymbol{x} = (x, y, z) \in S^2 : \pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} = z,$$

esto es, $\pi : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ es la proyección en la tercera coordenada. Si $\boldsymbol{X}$ es el subespacio de $\mathbf{S}^2$ inducido sobre el conjunto $X = \pi^{-1}[[-1, \frac{1}{2}]]$ entonces $\boldsymbol{X}$ es un espacio compacto y metrizable.

Se probará que $\boldsymbol{X}$ es un espacio homeomorfo a $\mathbf{D}^2$. Defínase la función continua $S : \boldsymbol{X} \to \mathbf{D}^2$ de la siguiente manera,

$$\forall \boldsymbol{x} = (x, y, z) \in X : S(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x, y) & \text{si } z \leq 0, \\ \dfrac{z + \frac{1}{2}}{\|(x, y)\|}(x, y) & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

Si $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in X$ y $z \leq 0$ entonces, $\|S(\boldsymbol{x})\| = \frac{1}{2}\|(x, y)\| \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\| = \frac{1}{2}$. En cambio, cuando $z \geq 0$ se tiene que $\|S(\boldsymbol{x})\| = z + \frac{1}{2} \leq 1$. En cualquier caso, $S(\boldsymbol{x}) \in D^2$ así que la función $S : \boldsymbol{X} \to \mathbf{D}^2$ está bien definida. Para cada $t \in [-1, 1]$ defínase $A(t) = \sqrt{1 - t^2}$ y considérese la función continua $T : \mathbf{D}^2 \to \boldsymbol{X}$ dada por

$$\forall \boldsymbol{u} = (u, v) \in D^2 : T(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} (2u, 2v, -A(\|2\boldsymbol{u}\|)) & \text{si } \|\boldsymbol{u}\| \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\dfrac{A(\|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}u, \dfrac{A(\|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}v, \|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \|\boldsymbol{u}\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función también se encuentra bien definida; si $\boldsymbol{u} = (u, v) \in D^2$ y $\|\boldsymbol{u}\| \leq \frac{1}{2}$ entonces $\|T(\boldsymbol{u})\|^2 = 4u^2 + 4v^2 + A(\|2\boldsymbol{u}\|)^2 = \|2\boldsymbol{u}\|^2 + A(\|2\boldsymbol{u}\|)^2 = 1$ y $\pi T(\boldsymbol{u}) = -A(\|2\boldsymbol{u}\|) \leq 0$. Si ocurre que $\|\boldsymbol{u}\| \geq \frac{1}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} \|T(\boldsymbol{u})\| &= \frac{A(\|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}u^2 + \frac{A(\|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}v^2 + \left(\|\boldsymbol{u}\| - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{A(\|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}(u^2 + v^2) + \left(\|\boldsymbol{u}\| - \tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= A(\|\boldsymbol{u}\| - \tfrac{1}{2})^2 + \left(\|\boldsymbol{u}\| - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1, \end{aligned}$$

y además $\pi T(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\| - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, $T(\boldsymbol{u}) \in X$ para cada $\boldsymbol{u} \in D^2$.

Sea $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in X$. Si $z \leq 0$ entonces $\|S(\boldsymbol{x})\| \leq \frac{1}{2}$ así que

$$\begin{aligned} T(S(\boldsymbol{x})) &= T\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = (x, y, -A(\|(x, y)\|)) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \\ &= (x, y, -\sqrt{z^2}) = (x, y, -|z|) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Si $z \geq 0$ entonces $\|S(\boldsymbol{x})\| = z + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
T(S(\boldsymbol{x})) &= T\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{\|(x,y)\|}x, \frac{z+\frac{1}{2}}{\|(x,y)\|}y\right) = \left(\frac{A(z)}{z+\frac{1}{2}}\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{\|(x,y)\|}x\right), \frac{A(z)}{z+\frac{1}{2}}\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{\|(x,y)\|}y\right), z\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\|(x,y)\|}x, \frac{\sqrt{1-z^2}}{\|(x,y)\|}y, z\right) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|}x, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|}y, z\right) = (x,y,z).
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $T \circ S = id\, X$. Ahora, considérese $\boldsymbol{u} = (u,v) \in D^2$. Si $\|\boldsymbol{u}\| \leq \frac{1}{2}$ entonces $\pi T(\boldsymbol{u}) \leq 0$ así que $S(T(\boldsymbol{u})) = S(2u, 2v, -A(\|2\boldsymbol{u}\|)) = \frac{1}{2}(2u,2v) = (u,v)$. Si $\|\boldsymbol{u}\| \geq \frac{1}{2}$ entonces $\pi T(\boldsymbol{u}) \geq 0$ y

$$
\begin{aligned}
S(T(\boldsymbol{u})) &= S\left(\frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}u, \frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}v, \|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\left(\frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}u, \frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}v\right)\|}\left(\frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}u, \frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}v\right) \\
&= \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}\frac{A(\|\boldsymbol{u}\|-\frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{u}\|}(u,v) = (u,v).
\end{aligned}
$$

De aquí que $S \circ T = id\, D^2$. En consecuencia, $S : \boldsymbol{X} \to \mathbf{D}^2$ es un homeomorfismo.

Si d es la métrica en X tal que, para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ entonces la función de Whitney $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ construida en la demostración del *Teorema 3.4* es invariante bajo similitudes respecto de d. Luego, para cada $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, defínase $Y_t = \pi^{-1}[\{t\}]$. Haciendo $\theta = \widehat{\mu}(Y_{1/2})$ se tiene que $0 < \theta < \mu(X)$ por lo cual $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ es un nivel de Whitney positivo de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$. Se demostrará que existe un retracto de $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ que es homemorfo a $\mathbf{S}^2$.

Sean $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$ los subespacios de $\boldsymbol{X}$ inducidos sobre los conjuntos Y_0 y $Z = \pi^{-1}[(-1,1)]$, respectivamente, y sea $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ el subespacio que induce $\mathbf{R}$ sobre el intervalo abierto $(-1,1)$. Si $B = \pi^{-1}[[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]]$ y $C = \pi^{-1}[[-1, -\frac{1}{2}]]$ entonces $X = B \cup C$ por lo cual,

$$W_{\widehat{\mu}}(\theta) = \langle B \rangle_{W_{\widehat{\mu}}(\theta)} \cup \langle X, C \rangle_{W_{\widehat{\mu}}(\theta)}.$$

Nótese que, para cada $K \in C(\boldsymbol{X})$ se tiene que $K \subseteq B$ si y sólo si $\min \pi[K] \geq -\frac{1}{2}$ mientras que $K \cap C \neq \varnothing$ si y sólo si $\min \pi[K] \leq -\frac{1}{2}$. Ahora, defínase la función continua $R : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{I}} \to \boldsymbol{Z}$ de la siguiente forma:

$$\forall \boldsymbol{x} \in Y_0, t \in (-1,1) : R(\boldsymbol{x}, t) = A(t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k}.$$

Se observa que, para cada $(\boldsymbol{x}, t) \in Y_0 \times (-1,1)$, $\pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ por lo cual

$$\|R(\boldsymbol{x},t)\|^2 = \|A(t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k}\|^2 = \|A(t)\boldsymbol{x}\|^2 + \|t\boldsymbol{k}\|^2 = A(t)^2 + t^2 = 1.$$

Además,

$$\pi(R(\boldsymbol{x},t)) = \pi(A(t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k}) = A(t)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k} + t\|\boldsymbol{k}\|^2 = A(t)\cdot 0 + t \cdot 1 = t,$$

con $-1 < t < 1$. Esto implica que la función $R : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{I}} \to \boldsymbol{Z}$ se encuentra bien definida. Luego, sean $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$ y $F : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{I}}$ funciones continuas dadas por,

$$\forall \boldsymbol{x} \in Z : f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{A(\pi(\boldsymbol{x}))}(\boldsymbol{x} - \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}) \quad \text{y} \quad F(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})).$$

Se verificará que estas funciones están bien definidas. Si $\boldsymbol{x} \in Z$ entonces

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x})\|^2 &= \frac{\|\boldsymbol{x} - \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}\|^2}{A(\pi(\boldsymbol{x}))^2} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} + \|\pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}\|^2}{A(\pi(\boldsymbol{x}))^2} \\ &= \frac{1 - 2\pi(\boldsymbol{x})^2 + \pi(\boldsymbol{x})^2}{A(\pi(\boldsymbol{x}))^2} = \frac{1 - \pi(\boldsymbol{x})^2}{A(\pi(\boldsymbol{x}))^2} = 1,\end{aligned}$$

y también

$$\pi(f(\boldsymbol{x})) = \frac{(\boldsymbol{x} - \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k}}{A(\pi(\boldsymbol{x}))} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} - \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}}{A(\pi(\boldsymbol{x}))} = \frac{\pi(\boldsymbol{x}) - \pi(\boldsymbol{x})}{A(\pi(\boldsymbol{x}))} = 0.$$

En consecuencia, para todo $\boldsymbol{x} \in Z$, $f(\boldsymbol{x}) \in Y_0$. Además, nótese que

$$R(F(\boldsymbol{x})) = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})) = A(\pi(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{x} - \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} = \boldsymbol{x},$$

es decir, $R \circ F = id\, Z$. También, para cada $(\boldsymbol{x}, t) \in Y_0 \times (-1, 1)$ ocurre que

$$\begin{aligned}f(R(\boldsymbol{x}, t)) &= \frac{1}{A(\pi(R(\boldsymbol{x}, t)))}(R(\boldsymbol{x}, t) - \pi(R(\boldsymbol{x}, t))\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{1}{A(t)}((A(t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k}) - t\boldsymbol{k}) = \frac{1}{A(t)}(A(t)\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Así, para cada $(\boldsymbol{x}, t) \in Y_0 \times (-1, 1)$, $F(R(\boldsymbol{x}, t)) = (f(R(\boldsymbol{x}, t)), \pi(R(\boldsymbol{x}, t)) = (\boldsymbol{x}, t)$, de donde se deduce que $F \circ R = id\,(Y_0 \times (-1, 1))$. Por lo tanto, $F : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{I}}$ y $R : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{I}} \to \boldsymbol{Z}$ son homeomorfismos.

Afirmación 1. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Z$, y $|\pi(\boldsymbol{x})| \geq |\pi(\boldsymbol{y})|$ entonces

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq A(\pi(\boldsymbol{x}))\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|.$$

Más aún, la desigualdad anterior es estricta cuando $|\pi(\boldsymbol{x})| > |\pi(\boldsymbol{y})|$.

Demostración. Defínanse $\alpha = \boldsymbol{x} - R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x}))$ y $\beta = R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{y}$. Por hipótesis, $|\pi(\boldsymbol{y})| \leq |\pi(\boldsymbol{x})| < 1$ así que $0 < A(\pi(\boldsymbol{x})) \leq A(\pi(\boldsymbol{y}))$. Por lo tanto, haciendo $\lambda = A(\pi(\boldsymbol{x}))/A(\pi(\boldsymbol{y}))$ se cumple que $0 < \lambda \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\alpha &= \boldsymbol{x} - R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x})) = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})) - R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x})) \\ &= (A(\pi(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}) - (A(\pi(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{y}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}) = A(\pi(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})), \\ \beta &= R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{y} = (A(\pi(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{y}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k})) - \boldsymbol{y} \\ &= A(\pi(\boldsymbol{x}))\left(\frac{1}{A(\pi(\boldsymbol{y}))}(\boldsymbol{y} - \pi(\boldsymbol{y})\right) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} - \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{y} - \pi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{k}) + \pi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} - \boldsymbol{y} \\ &= (\pi(\boldsymbol{x}) - \lambda\pi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{k} - (1 - \lambda)\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Definiendo $\gamma = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y}$ ocurre que

$$\begin{aligned}\gamma &= R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y} = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) - R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{y})) \\ &= (A(\pi(\boldsymbol{y}))f(\boldsymbol{x}) + \pi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{k}) - (A(\pi(\boldsymbol{y}))f(\boldsymbol{y}) + \pi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{k}) = A(\pi(\boldsymbol{y}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})).\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\lambda\gamma = \frac{A(\pi(\boldsymbol{x}))}{A(\pi(\boldsymbol{y}))}A(\pi(\boldsymbol{y}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) = A(\pi(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) = \alpha.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \boldsymbol{k} &= A(\pi(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{k} = A(\pi(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{k} - f(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{k}) = 0, \\ \alpha \cdot \boldsymbol{y} &= \lambda\gamma \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} = -\lambda(\boldsymbol{y} - R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y}))) \cdot \boldsymbol{y} \\ &= -\lambda(\|\boldsymbol{y}\|^2 - R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{y}) = -\lambda(1 - R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Por la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, $R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{y} \leq \|R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y}))\|\|\boldsymbol{y}\| = 1$. Así, $\alpha \cdot \boldsymbol{y} = -\lambda(1 - R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{y}) \leq 0$. De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= \alpha \cdot ((\pi(\boldsymbol{x}) - \lambda\pi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{k} - (1-\lambda)\boldsymbol{y}) = (\pi(\boldsymbol{x}) - \lambda\pi(\boldsymbol{y}))\alpha \cdot \boldsymbol{k} - (1-\lambda)\alpha \cdot \boldsymbol{y} \\ &= -(1-\lambda)\alpha \cdot \boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Como $\lambda \leq 1$ y $\alpha \cdot \boldsymbol{y} \leq 0$ se sigue que $\alpha \cdot \beta \geq 0$. Finalmente,

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\alpha \cdot \beta + \|\beta\|^2 \geq \|\alpha\|^2 = A(\pi(\boldsymbol{x}))^2\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2,$$

lo cual implica que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq A(\pi(\boldsymbol{x}))\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|$. Si ocurre que $|\pi(\boldsymbol{y})| < |\pi(\boldsymbol{x})|$ entonces $\boldsymbol{y} \neq R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{x}))$ y por tanto $\beta \neq \boldsymbol{0}$. De aquí se obtiene que

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\alpha \cdot \beta + \|\beta\|^2 > \|\alpha\|^2 = A(\pi(\boldsymbol{x}))^2\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2.$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

Dado $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ se considera la función continua $\rho_t : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ definida como

$$\forall \boldsymbol{x} \in Y_0 : \rho_t(\boldsymbol{x}) = R(\boldsymbol{x}, t).$$

Nótese que, para cada $\boldsymbol{x} \in Y_0$, $f(\rho_t(\boldsymbol{x})) = f(R(\boldsymbol{x}, t)) = \boldsymbol{x}$ así que $f \circ \rho_t = id\, Y$. Luego, para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}d(\rho_t(\boldsymbol{x}), \rho_t(\boldsymbol{y})) &= \|\rho_t(\boldsymbol{x}) - \rho_t(\boldsymbol{y})\| = \|(A(t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k}) - (A(t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{k})\| \\ &= \|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\| = A(t)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = A(t)d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\rho_t : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ es un similitud respecto de d con razón de semejanza $A(t) > 0$. Se observa que, si $\boldsymbol{x} \in Y_0$ entonces $\pi(\rho_t(\boldsymbol{x})) = \pi(R(\boldsymbol{x}, t)) = t$, por lo cual $\rho_t[Y_0] \subseteq Y_t$. Además, dado $\boldsymbol{y} \in Y_t$ se tiene que $f(\boldsymbol{y}) \in Y_0$ y

$$\rho_t(f(\boldsymbol{y})) = R(f(\boldsymbol{y}), t) = R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{y})) = R(F(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}.$$

De aquí que, para cada $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\rho_t[Y_0] = Y_t$. Dado que $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney invariante bajo similitudes respecto de d, para cada $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ se tiene que $\widehat{\mu}(Y_t) = A(t)\widehat{\mu}(Y_0)$. Por lo tanto, dados cualesquiera $s, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ocurre que

$$\widehat{\mu}(Y_s) = A(s)\widehat{\mu}(Y_0) = A(s)\left(\frac{1}{A(t)}\widehat{\mu}(Y_t)\right) = \frac{A(s)}{A(t)}\widehat{\mu}(Y_t).$$

Como $A(\frac{1}{2}) = A(-\frac{1}{2})$ se sigue que $\widehat{\mu}(Y_{-1/2}) = \widehat{\mu}(Y_{1/2}) = \theta$. Así, $Y_{1/2}, Y_{-1/2} \in W_{\widehat{\mu}}(\theta)$.

Afirmación 2. Si $K \in \langle B \rangle_{C(\boldsymbol{X})}$, $f[K] = Y_0$ y $\pi[K] \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq \varnothing$ entonces $\widehat{\mu}(K) > \theta$.

Demostración. Recuérdese de la demostración del *Teorema 3.4* que, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se tiene que

$$\forall \Lambda \in F(\boldsymbol{X}) \setminus F_1(\boldsymbol{X}) : r(\Lambda) = \min\{d(x,y) \mid x, y \in \Lambda \text{ y } x \neq y\} \quad \text{y}$$

$$\forall L \in C(\boldsymbol{X}) \setminus F_1(\boldsymbol{X}) : \widehat{\mu}_n(L) = \max\{r(\Lambda) \mid \Lambda \in [L]^n\}.$$

Particularmente, para todo $L \in C(\boldsymbol{X})$, $\widehat{\mu}_2(L) = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} L$. Por lo tanto, dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, es posible elegir $\Lambda \in [Y_{1/2}]^n$ de manera que $\widehat{\mu}_n(Y_{1/2}) = r(\Lambda)$. Obsérvese que $f[\Lambda] \subseteq Y_0 = f[K]$ así que, para cada $\boldsymbol{x} \in \Lambda$, existe $\psi(\boldsymbol{x}) \in K$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = f(\psi(\boldsymbol{x}))$. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Lambda$ y $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{y})$ entonces $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$. Como $\pi(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}$ se sigue que $\boldsymbol{x} = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})) = R(f(\boldsymbol{y}), \pi(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$. Esto implica que $\psi : \Lambda \to K$ es una función inyectiva. Haciendo $\Lambda' = \psi[\Lambda]$ se tiene que $|\Lambda'| = |\Lambda| = n$, es decir, $\Lambda' \in [K]^n$. Dados $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \Lambda'$ con $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{y}'$ existen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Lambda$ tales que $\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'$, $\psi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'$ y $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. De esta manera, si $s = \max\{\pi(\boldsymbol{x}'), \pi(\boldsymbol{y}')\}$ entonces,

$$\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'\| \geq A(s)\|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{y}')\| = A(s)\|f(\psi(\boldsymbol{x})) - f(\psi(\boldsymbol{y}))\| = A(s)\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|.$$

Luego, ya que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y_{1/2}$ se tiene que

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\rho_{1/2}(f(\boldsymbol{x})) - \rho_{1/2}(f(\boldsymbol{y}))\| = A(\tfrac{1}{2})\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|$$

En consecuencia,

$$\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'\| \geq A(s)\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = A(s)\left(\frac{1}{A(\frac{1}{2})}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\right) = \frac{A(s)}{A(\frac{1}{2})}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Como $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ se sigue que $A(\frac{1}{2}) \leq A(s)$ y así $1 \leq A(s)/A(\frac{1}{2})$. Por lo tanto, para cualesquiera $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \Lambda'$ con $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{y}'$ se tiene que

$$\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'\| \geq \frac{A(s)}{A(\frac{1}{2})}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq r(\Lambda).$$

De esto se deduce que, $\widehat{\mu}_n(Y_{1/2}) = r(\Lambda) \leq r(\Lambda') \leq \widehat{\mu}_n(K)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Ahora, nótese que para cada $\boldsymbol{x} \in Y_{1/2}$, $(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}) \cdot \frac{1}{2}\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} - \|\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = 0$. De esta manera,

$$1 = \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|(\boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 + \|\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 + (\tfrac{1}{2})^2.$$

Esto implica que $\|\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\|^2 = 1-(\frac{1}{2})^2 = A(\frac{1}{2})^2$. Así, dados cualesquiera $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y_{1/2}$ ocurre que,

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\| + \|\boldsymbol{y}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\| = A(\tfrac{1}{2}) + A(\tfrac{1}{2}) = 2A(\tfrac{1}{2}).$$

Por lo tanto, $\operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} Y_{1/2} \leq 2A(\frac{1}{2})$. Por hipótesis, $\pi[K]\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\neq\varnothing$, así que existe $\boldsymbol{x}_0\in K$ de manera que $|\pi(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{1}{2}$. Como $-f(\boldsymbol{x}_0)\in Y_0 = f[K]$ se elige $\boldsymbol{y}_0\in K$ tal que $f(\boldsymbol{y}_0) = -f(\boldsymbol{x}_0)$. Si $|\pi(\boldsymbol{x}_0)|\geq|\pi(\boldsymbol{y}_0)|$ entonces

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\| \geq A(\pi(\boldsymbol{x}_0))\|f(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{y}_0)\| = A(\pi(\boldsymbol{x}_0))\|2f(\boldsymbol{x}_0)\| = 2A(\pi(\boldsymbol{x}_0)) > 2A(\tfrac{1}{2}).$$

Por el contrario, si $|\pi(\boldsymbol{x}_0)|<|\pi(\boldsymbol{y}_0)|$ entonces

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\| > A(\pi(\boldsymbol{y}_0))\|f(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{y}_0)\| = A(\pi(\boldsymbol{y}_0))\|2f(\boldsymbol{x}_0)\| = 2A(\pi(\boldsymbol{y}_0)) \geq 2A(\tfrac{1}{2}).$$

De cualquier manera, se tiene que

$$\widehat{\mu}_2(K) = \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} K \geq \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\| > 2A(\tfrac{1}{2}) \geq \operatorname{diam}_{\boldsymbol{X}} Y_{1/2} = \widehat{\mu}_2(Y_{1/2}).$$

Como $\widehat{\mu}_2(K)>\widehat{\mu}_2(Y_{1/2})$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$, $\widehat{\mu}_n(K)\geq\widehat{\mu}_n(Y_{1/2})$, se sigue que

$$\widehat{\mu}(K) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\widehat{\mu}_n(K)}{2^n} > \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\widehat{\mu}_n(Y_{1/2})}{2^n} = \widehat{\mu}(Y_{1/2}) = \theta.$$

Esto verifica la afirmación.

Se define la función $G:\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)\to\mathbf{S}^2$ como:

$$\forall K\in W_{\widehat{\mu}}(\theta): G(K) = \begin{cases} \boldsymbol{k} & \text{si } \min\pi[K] = \frac{1}{2}, \\ R(P_{\widehat{\mu}}(f[K]), 2\min\pi[K]) & \text{si } -\frac{1}{2}<\min\pi[K]<\frac{1}{2}, \\ -\boldsymbol{k} & \text{si } \min\pi[K]\leq\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nótese que si $K\in W_{\widehat{\mu}}(\theta)$ y $-\frac{1}{2}<\min\pi[K]<\frac{1}{2}$ entonces $K\subseteq B$ y $\pi[K]\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Como consecuencia de la *Afirmación 2*, $f[K]$ es un subcontinuo propio de $\boldsymbol{Y}$, es decir, $f[K]\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})\subseteq\mathfrak{M}(\boldsymbol{X})$. Esto prueba que la función $G:\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)\to\mathbf{S}^2$ se encuentra bien definida. Se procede a demostrar su continuidad.

Sean $K\in W_{\widehat{\mu}}(\theta)$ y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a K en $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ tal que la sucesión $(G(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $\boldsymbol{x}$ en $\mathbf{S}^2$.

(i) Si $\min\pi[K]=\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$ entonces, se puede suponer que $\min\pi[K_n]>-\frac{1}{2}$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(K_n')_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que $\min\pi[K_n']=\frac{1}{2}$ para cada $n\in\mathbb{N}$, o bien, $\min\pi[K_n']<\frac{1}{2}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. En el primer caso, $G(K_n')=G(K)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ así que $\boldsymbol{x}=\lim G(K_n')=G(K)$. En el segundo caso, $G(K_n')=R(P_{\widehat{\mu}}(f[K_n']),2\min\pi[K_n'])$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Luego,

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty}\pi(G(K_n')) = \lim_{n\to\infty} 2\min\pi[K_n'] = 2\min\pi[K] = 1.$$

Como $\boldsymbol{x} \in S^2$ y $\pi(\boldsymbol{x}) = 1$ se sigue que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$, es decir, $\lim G(K_n) = G(K)$.

(ii) Si $-\frac{1}{2} < \min \pi[K] < \frac{1}{2}$ entonces se puede suponer que $-\frac{1}{2} < \min \pi[K_n] < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, $G(K'_n) = R(P_{\widehat{\mu}}(f[K_n]), 2 \min \pi[K_n])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $(f[K_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $f[K]$ en $\mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$. Como $\boldsymbol{Y}$ es una curva cerrada simple, se sigue del *Teorema 3.29* que $\lim P_{\widehat{\mu}}(f[K_n]) = P_{\widehat{\mu}}(f[K])$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} G(K_n) = \lim_{n\to\infty} R(P_{\widehat{\mu}}(f[K_n]), 2 \min \pi[K_n]) = R(P_{\widehat{\mu}}(f[K]), 2 \min \pi[K]) = G(K).$$

(iii) Si $\min \pi[K] = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ entonces se supondrá que $\min \pi[K_n] < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(K'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que $\min \pi[K'_n] \leq -\frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien, $\min \pi[K_n] > -\frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso se tiene que $\boldsymbol{x} = \lim G(K'_n) = G(K)$ pues $G(K'_n) = G(K)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el segundo caso se tiene que $G(K'_n) = R(P_{\widehat{\mu}}(f[K'_n]), 2 \min \pi[K'_n])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \pi(G(K'_n)) = \lim_{n\to\infty} 2 \min \pi[K'_n] = 2 \min \pi[K] = -1.$$

Como $\boldsymbol{x} \in S^2$ y $\pi(\boldsymbol{x}) = -1$ se sigue que $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}$, esto es, $\lim_{n\to\infty} G(K_n) = G(K)$.

(iv) Si $\min \pi[K] < -\frac{1}{2}$ se puede suponer que $\min \pi[K_n] < -\frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, $G(K_n) = G(K)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\lim G(K_n) = G(K)$.

En cualquiera de los casos anteriores, $\lim G(K_n) = G(K)$. Del *Lema 3.24* se sigue que la función $G : \boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta) \to \mathbf{S}^2$ es continua. Ahora, sea $\widetilde{\boldsymbol{J}}$ el subespacio de $\boldsymbol{J}$ inducido sobre el intervalo $[0, \mu(Y_0)]$. El *Lema 4.20* asegura la existencia de una función continua $Q : \boldsymbol{Y} \times \widetilde{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y})$ tal, para cada $(\boldsymbol{x}, s) \in Y_0 \times [0, \mu(Y_0)]$ se tiene que $\mu(Q(\boldsymbol{x}, s)) = s$. Además, $Q(\boldsymbol{x}, s) \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{Y})$ y $P_{\widehat{\mu}}(Q(\boldsymbol{x}, s)) = \boldsymbol{x}$ cuando $s < \widehat{\mu}(Y_0)$ y $Q(\boldsymbol{x}, s) = Y_0$ cuando $s = \widehat{\mu}(Y_0)$. Nótese que, si $\boldsymbol{x} \in Z$ entonces $|\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}| < \frac{1}{2}$ y $0 < A(\frac{1}{2}) < A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})$. Luego, $\theta = \widehat{\mu}(Y_{1/2}) = A(\frac{1}{2})\widehat{\mu}(Y_0) < A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\widehat{\mu}(Y_0)$. Por lo tanto, $0 < \theta / A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}) < \mu(Y_0)$. Debido a esta observación es posible definir la función $H : \mathbf{S}^2 \to \boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ de la siguiente manera

$$\forall \boldsymbol{x} \in S^2 : H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} Y_{1/2} & \text{si } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}, \\ R\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}), \dfrac{\theta}{A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})}\right) \times \left\{\dfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}\right\}\right] & \text{si } \boldsymbol{x} \in Z, \\ Y_{-1/2} & \text{si } \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

Para cada $\boldsymbol{x} \in Z$ se tiene que

$$H(\boldsymbol{x}) = R\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}), \frac{\theta}{A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})}\right) \times \left\{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}\right\}\right] = \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}), \frac{\theta}{A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})}\right)\right]$$

Dado que $\rho_t : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ es una similitud respecto de d con razón de semejanza $A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})$ y $\widehat{\mu} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{J}$ es una función de Whitney invariante bajo similitudes respecto de d, ocurre que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(H(\boldsymbol{x})) &= \widehat{\mu}\left(\rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\right)\right]\right) = A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\widehat{\mu}\left(Q\left(f(\boldsymbol{x}),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\right)\right)\\ &= A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\left(\frac{\theta}{A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})}\right) = \theta,\end{aligned}$$

esto es, $H(\boldsymbol{x}) \in W_{\widehat{\mu}}(\theta)$ para cada $\boldsymbol{x} \in Z$. Así, la función $H : \mathbf{S}^2 \to \boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ se encuentra bien definida. Se procede a verificar que esta función es continua.

Sean $\boldsymbol{x} \in S^2$ y $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $\boldsymbol{x}$ en $\mathbf{S}^2$ de manera que la sucesión $(H(\boldsymbol{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto K en $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$. Se tienen las siguientes posibilidades:

(i') Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$ entonces $\pi(\boldsymbol{x}) = 1 > -1$, así que se puede suponer que $\pi(\boldsymbol{x}_n) > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(\boldsymbol{x}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\pi(\boldsymbol{x}'_n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien, $\pi(\boldsymbol{x}'_n) < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso $\boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{x}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo cual $K = \lim H(\boldsymbol{x}'_n) = H(\boldsymbol{x})$. En el segundo caso se elige una subsucesión de $(\boldsymbol{x}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nómbrese $(\boldsymbol{x}''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que la sucesión $(f(\boldsymbol{x}''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{Y}$. Dado que $-1 < \pi(\boldsymbol{x}''_n) < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} H(\boldsymbol{x}''_n) &= \lim_{n\to\infty} \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x}''_n)}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}''_n),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x}''_n)}{2})\right)\right] = \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}\left[Q\left(\boldsymbol{y},\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\right)\right]\\ &= \rho_{\frac{1}{2}}\left[Q(\boldsymbol{y},\theta/A(\tfrac{1}{2}))\right] = \rho_{\frac{1}{2}}\left[Q(\boldsymbol{y},\mu(Y_0))\right] = \rho_{\frac{1}{2}}[Y_0] = Y_{1/2}.\end{aligned}$$

Esto implica que $K = \lim H(\boldsymbol{x}''_n) = Y_{1/2} = H(\boldsymbol{x})$.

(ii') Si $\boldsymbol{x} \in Z$ entonces $-1 < \pi(\boldsymbol{x}) < 1$, así que se supondrá que $-1 < \pi(\boldsymbol{x}_n) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} H(\boldsymbol{x}_n) &= \lim_{n\to\infty} \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x}_n)}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}_n),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x}_n)}{2})\right)\right]\\ &= \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\right)\right] = H(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

(iii') Si $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}$ entonces $\pi(\boldsymbol{x}) = -1 < 1$, así que se puede suponer que $\pi(\boldsymbol{x}_n) < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe una subsucesión de $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llámese $(\boldsymbol{x}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que $\pi(\boldsymbol{x}'_n) = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien, $\pi(\boldsymbol{x}'_n) > -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso se tiene que $\boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ lo cual implica inmediatamente que $K = \lim H(\boldsymbol{x}'_n) = H(\boldsymbol{x})$. En el segundo caso se elige una subsucesión de $(\boldsymbol{x}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nómbrese $(\boldsymbol{x}''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que la sucesión $(f(\boldsymbol{x}''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $\boldsymbol{y}$ en $\mathbf{S}^2$. Así, ya que $-1 < \pi(\boldsymbol{x}''_n) < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} H(\boldsymbol{x}''_n) &= \lim_{n\to\infty} \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x}''_n)}{2}}\left[Q\left(f(\boldsymbol{x}''_n),\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x}''_n)}{2})\right)\right] = \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}\left[Q\left(\boldsymbol{y},\theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2})\right)\right]\\ &= \rho_{-\frac{1}{2}}\left[Q(\boldsymbol{y},\theta/A(-\tfrac{1}{2}))\right] = \rho_{-\frac{1}{2}}\left[Q(\boldsymbol{y},\mu(Y_0))\right] = \rho_{\frac{1}{2}}[Y_0] = Y_{-1/2}.\end{aligned}$$

Esto implica que $K = \lim H(\boldsymbol{x}_n'') = Y_{-1/2} = H(\boldsymbol{x})$.

En cualquiera de los casos arriba enlistados, $\lim H(\boldsymbol{x}_n) = H(\boldsymbol{x})$. Por lo tanto, $H : \mathbf{S}^n \to \boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ es una función continua.

Finalmente, sea $\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}^2$. Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$ entonces $H(\boldsymbol{x}) = Y_{1/2}$. Como $\min \pi[Y_{1/2}] = \frac{1}{2}$ se sigue que $G(H(\boldsymbol{x})) = G(Y_{1/2}) = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{x}$. Luego, si $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}$ entonces $H(\boldsymbol{x}) = Y_{-1/2}$. Dado que $\min \pi[Y_{-1/2}] = -\frac{1}{2}$ se tiene que $G(H(\boldsymbol{x})) = G(Y_{-1/2}) = -\boldsymbol{k} = \boldsymbol{x}$. Ahora supóngase que $\boldsymbol{x} \in Z$. Como $H(\boldsymbol{x}) = \rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}[Q(f(\boldsymbol{x}), \theta/A(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}))] \subseteq Y_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}$ se tiene que

$$\min \pi[H(\boldsymbol{x})] = \min \left\{ \frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2} \right\} = \frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2},$$

y de esta manera $-\frac{1}{2} < \min \pi[H(\boldsymbol{x})] < \frac{1}{2}$. Obsérvese que,

$$P_{\widehat{\mu}}(f[H(\boldsymbol{x})]) = P_{\widehat{\mu}}(f[\rho_{\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}}[Q(f(\boldsymbol{x}), \theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}))]]) = P_{\widehat{\mu}}(Q(f(\boldsymbol{x}), \theta/A(\tfrac{\pi(\boldsymbol{x})}{2}))) = f(\boldsymbol{x}).$$

En consecuencia,

$$G(H(\boldsymbol{x})) = R(P_{\widehat{\mu}}(f[H(\boldsymbol{x})]), 2\min \pi[H(\boldsymbol{x})]) = R(f(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}.$$

Esto demuestra que $G \circ H = id\, S^2$. En consecuencia, $G : \boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta) \to \mathbf{S}^2$ es una retracción en **Top** en el sentido categórico. Se sigue de la *Proposición 1.41* que $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ tiene un retracto homeomorfo a $\mathbf{S}^2$.

4.22 TEOREMA. La contractibilidad no es una propiedad de Whitney.

Demostración. Si $\boldsymbol{X}$ es la celda bidimensional del *Ejemplo 4.21* entonces $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ admite un nivel de Whitney $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ el cual posee un retracto que es homeomorfo a $\mathbf{S}^2$, y por tanto, que no es contráctil (véase el *Ejemplo 1.78*). De la *Proposición 1.79* se sigue que el nivel $\boldsymbol{W}_{\widehat{\mu}}(\theta)$ no es contráctil. No obstante, por el *Corolario 1.77*, $\boldsymbol{X}$ sí es un espacio contráctil lo cual demuestra que la contractibilidad no es una propiedad de Whitney. ■

4.23 Observación. El esquema de la demostración del *Teorema 4.22* se puede aplicar para probar que una propiedadad topológica no es una propiedad de Whitney siempre que ésta se herede a los retractos, que $\mathbf{D}^2$ la tenga pero que $\mathbf{S}^2$ no la tenga.

§7 Propiedad del punto fijo

4.24 TEOREMA. La propiedad del punto fijo no es una propiedad de Whitney.

Demostración. El resultado se prueba tal y como se indica en la *Observación 4.23*, pues:

(i) La propiedad del punto fijo se hereda a retractos (*Proposición 1.48*).

(ii) $\mathbf{D}^2$ tiene la propiedad del punto fijo (*Teorema 1.46*).

(iii) $\mathbf{S}^2$ no posee la propiedad del punto fijo (*Ejemplo 1.47*).

En consecuencia, la propiedad del punto fijo no es una propiedad de Whitney. ■

§8 Ser un AR

4.25 TEOREMA. Ser un AR no es una propiedad de Whitney.

Demostración. Nótese que:

(i) Todo retracto de un AR es un AR (*Proposición 1.60*).

(ii) $\mathbf{D}^2$ es un AR (*Teorema 1.59*).

(iii) $\mathbf{S}^2$ no es un AR (*Teorema 1.61*).

Se concluye de los incisos (i)-(iii) y de la *Observación 4.23* que ser un AR no es una propiedad de Whitney. ■

§9 Ser una celda bidimensional

4.26 TEOREMA. Ser una celda bidimensional no es una propiedad de Whitney.

Demostración. En el *Ejemplo 4.21* se muestra una celda bidimensional $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ admite un nivel de Whitney $\boldsymbol{W}_{\mu}(\theta)$ el cual posee un retracto homeomorfo a $\mathbf{S}^2$. Nótese que las celdas bidimensionales tienen propiedades topológicas que heredan a todos sus retractos y que $\mathbf{S}^2$ no posee (e.g. contractibilidad, propiedad del punto fijo, ser un AR). Consecuentemente, las celdas bidimensionales no tienen retractos homeomorfos a $\mathbf{S}^2$. De aquí se sigue que $\boldsymbol{W}_{\mu}(\theta)$ no es una celda bidimensional y, por lo tanto, ser una celda bidimensional no es una propiedad de Whitney. ■

Bibliografía

[1] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series, Vol.6, Heldermann Verlang, 1989.

[3] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, México D.F., 1998.

[4] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.

[5] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[7] A. Petrus, *Contractibility of Whitney Continua in* $C(X)$, Gen. Top. and its Applications, 9 (1978), 275-288.

[8] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland Mathematical Library, 43, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[9] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

Índice alfabético