Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Funciones continuas en el sentido de Cauchy.

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Iván Sánchez Silva

Director de tesis

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Puebla, Pue., 18 de julio del 2013

Agradecimientos

A mi familia. Mis padres: Víctor Ramón Sánchez Chavez y Hortencia Silva Flores, que por sus sacrificios y esfuerzos para hacerme un hombre de bien, sus consejos y a ese gran corazón que habita en cada uno de ellos para guiarme siempre hacia lo correcto, he llegado hasta donde estoy. Por todo esto y más este proyecto es para ustedes. Mis hermanos: Abel, Isaac y Esperanza, que a pesar de nuestras diferencias siempre estuvieron ahí cuando más necesitaba de alguien.

A mis amigos. Enrique, María, Ricardo, Cristina, Alejandra, Martha Patricia, Karina, Fernanda, Carmen y Ángel, que desde los inicios de este camino estuvieron junto a mi; hombro a hombro, en algunas ocasiones soportándome, ¿verdad Enrique?... mi gran grupo de matemáticos. Y a los que fui conociendo a lo largo de mi licenciatura, Alejandro, Mónica, Valeria, Ivette , Carina, Elisa, Quiara, Blanca y Lizbeth. Y no deben faltar a mis grandes amigas de bachiller María Fernanda y Nubia; aunque no estudiamos las mismas licenciaturas, ellas han estado siempre a mi lado. Cada uno de ustedes forma parte de mi segunda familia.

A mis sinodales. Dr. David Herrera Carrasco, M.C. Julio ErastoPoisot Macías y M.C. María Guadalupe Raggi Cárdenas, por haberse tomado el tiempo para revisar este proyecto. Y en particular al Dr. David Herrera Carrasco por haber revisado el trabajo antes de ser terminado.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por haberme aceptado como su tesista, fue un gran placer estar bajo su tutela en el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores, que me dieron el honor de haber sido su alumno.

Finalmente a todas las personas que, de una u otra manera, me ayudaron a llegar a este momento.

Índice

Introducción

Durante nuestros cursos de cálculo, análisis en $\mathbb{R}^n$ y espacios métricos fuimos testigos de conceptos como sucesión, sucesión convergente, sucesión de Cauchy, continuidad, funciones uniformemente continuas y funciones secuencialmente continuas, así como las relaciones entre éstos.

En los libros clásicos, como [5], presentan un teorema que dice "si f es una función de un espacio métrico a otro, uniformemente continua, entonces f es una función que "manda" sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy", otros por ejemplo [4, Teorema 6.36], afirman que el recíproco es verdadero, cuando en general no lo es, como veremos más adelante.

En la búsqueda de referencias bibliográficas sobre este concepto, encontramos muy pocas; como [7], [11] y [12] que manejan un lenguaje muy técnico, es decir, poco entendible para los no expertos en la materia. Desarrollan este concepto en los espacios uniformes y nombran a este tipo de funciones como "funciones continua en el sentido de Cauchy". Por otro lado, en los espacios métricos, [1], [9] y [5] lo mencionan brevemene. Incluso [11], hace un comentario corto.

Debido a la insuficiente información obtenida sobre este tema dentro de los espacios métricos y su poca divulgación, nació la idea de presentar un trabajo de tesis de Licenciatura en Matemáticas, donde se darán a conocer resultados que giren entorno a las funciones continuas en el sentido de Cauchy. Planteando dos vertientes:

1. El estudio de las relaciones entre las funciones continuas, uniformemente continuas y las que preservan sucesiones de Cauchy.
2. De manera paralela, haremos un estudio del conjunto de las funciones que preservan sucesiones de Cauchy con base a lo conocido sobre las funciones continuas y uniformemente continuas.

En algunos casos, las demostraciones, que aquí se presentan, serán diferentes de las que se encuentran en las referencias anteriormente mencionadas. Teniendo como objetivos dar a conocer este concepto y que el lector, haciendo un análisis crítico, se de cuenta que a partir de sus conocimientos puede generar nuevos problemas a resolver.

Este trabajo es autocontenido, es decir, que cualquiera que posea cierta madurez matemática en el área de topología y análisis, sea capaz de entenderlo, sin recurrir a otras referencias bibliográficas. Quedando de la siguiente manera.

En el primer capítulo se dará una breve introducción a la topología de espacios métricos. Se hablará también de temas como sucesiones, sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos y completación de un espacio métrico. Todo esto para tener mas claro los resultados aquí presentados.

En el segundo capítulo hablaremos sobre las funciones continuas y las funciones uniformemente continuas, donde la presentación de resultados se dará con un cierto orden: definición, operaciones algebraicas (suma, producto y composición), relación entre las funciones que preservan sucesiones de Cauchy, conservación de conjuntos totalmentes acotados y teorema de extensión. Nuestro objetivo es tener una mejor comparación entre los conceptos de continuidad y uniformemente continua.

En el último capítulo hablaremos del tema central de este trabajo, las funciones que preservan sucesiones de Cauchy o, formalmente, funciones continuas en el sentido de Cauchy. Dividiéndolo en tres partes, en la primera parte, siguiendo con el orden establecido en el capítulo anterior, daremos algunos resultados para las funciones continuas en el sentido de Cauchy. Es importante mencionar que si alguno resultado no es presentado, es debido a que no hay uno similar para este tipo de funciones. En la siguiente parte, como se verá en el segundo capítulo, uniformemente continua implica continuidad en el sentido de Cauchy y continuidad, y continuidad en el sentido de Cauchy implica continuidad. ¿Será posible determinar condiciones para que los recíprocos de cada implicación sean verdaderos o que los tres conceptos de continuidad sean equivalentes? En el desarrollo de esta parte, se hablará de dichas condiciones y se establecerán nuevos resultados para las funciones continuas en el sentido de Cauchy, complementando el orden establecido anteriormente mencionado. En la ultima parte, daremos algunas propiedades del conjunto de funciones continuas en el sentido de Cauchy y acotadas.

Capítulo 1

Espacios Métricos

En este capítulo daremos una breve introducción a la topología de Espacios Métricos y algunos conceptos importantes para espacio métricos, que nos permitirá entender mejor el desarrollo de este trabajo. Es preciso mencionar que al final de cada definición daremos algunos ejemplos.

Definición 1.0.1. *Sean $\mathbb{X}$ un conjunto diferente del vacío y $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que d es una métrica o una distancia en $\mathbb{X}$, si para cada $x, y, z \in \mathbb{X}$, d cumple con las siguientes propiedades:*
1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$, si y sólo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Desigualdad del Triángulo).

A la pareja ordenada $(\mathbb{X}, d)$ la llamaremos espacio métrico.

Ejemplo 1.0.1. *Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, definamos $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Por las propiedades del valor absoluto tenemos que d es una métrica en $\mathbb{R}$. Esta métrica se conoce como la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Nota. Por lo general se considera a $\mathbb{R}$ con la métrica usual. En caso de no ser así lo mencionaremos.

Ejemplo 1.0.2. *Sea* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *definimos* $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Esta métrica se conoce como la métrica del taxista en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.0.3. *Sea* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$, *definimos* $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *como*

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Esta métrica se conoce como la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.0.4. *Sea* $\mathbb{X} = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$, *donde para cada* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \mathbb{R}$ *y* $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ *fijo. Definamos* $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *como*

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por el [3, Ejemplo 7, pág. 98] d_p *es una métrica. Este espacio se denota por* l^p.

Ejemplo 1.0.5. *Sea* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, *definamos* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *como*

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \ : \ i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Por las propiedades del valor absoluto y del máximo, d_∞ *es una métrica. Esta métrica se conoce como la métrica uniforme en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.0.6. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \mid f$ *es una función acotada en* $\mathbb{X}\}$. *Definamos* d_∞: $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{X}\}.$$

Observe que $d_\infty(f,g) \in \mathbb{R}^+$ *ya que, la función* $f - g$ *es acotada. De las propiedades del valor absoluto y del supremo* d_∞ *es una métrica. Esta métrica se conoce como la métrica uniforme en* $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.0.7. *Sea* $\mathbb{X}$ *cualquier conjunto diferente del vacío. Definamos* d_d*:* $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *por*

$$d_d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

Es fácil comprobar que d_d *es una métrica. Esta métrica se conoce como la métrica discreta en* $\mathbb{X}$.

Lema 1.0.1. *[5, Lema 1, pág. 17] Sea* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico. Para cualquier* $x, y, z, t \in \mathbb{X}$ *se cumple,*

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t).$$

Definición 1.0.2. *Un espacio métrico* $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ *es isométrico al espacio* $(\mathbb{Y}, d_\mathbb{Y})$ *si existe una biyección* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tal que para cada* $x, y \in \mathbb{X}$ $d_\mathbb{X}(x,y) = d_\mathbb{Y}(f(x), f(y))$.

Ejemplo 1.0.8. *Consideremos a* $\mathbb{C}$ *el conjunto de los número complejos y* $d_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$d_1(z,w) = |z - w|, \text{ para cada } z, w \in \mathbb{C}$$

Por las propiedades del módulo y de los números complejos se comprueba que d_1 *es una métrica en* $\mathbb{C}$.

Ahora tomemos a $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *donde* d_2 *es la métrica definida en el Ejemplo 1.0.3. Consideremos la función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$*, tal que para cada* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $f(a,b) = a + bi$*. Con las propiedades de los número reales es facíl comprobar que* f *es una biyección que establece una isometría entre los espacios* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{C}$.

Definición 1.0.3. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* F *un subconjunto cualquiera, no vacío de* $\mathbb{X}$. *Definamos la función* $d_F : F \times F \to \mathbb{R}$ *tal que para cada* $x, y \in F$, $d_F(x, y) = d(x, y)$. *De las propiedades de* d *se comprueba inmediatamente que* d_F *es una métrica para* F. *A* d_F *suele llamársele métrica inducida en* F *por* d. *Se acostumbra designar también por* d *sin peligro de confusión.*
De manera que (F, d) *es un espacio métrico y se le llama subespacio de* $(\mathbb{X}, d)$.

Ejemplo 1.0.9. *Consideremos a* $(\mathbb{R}, d)$ *con* d *como la métrica usual y* $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. *Observe que* $((0, 1), d)$ *es un subespacio métrico de* $\mathbb{R}$.

Definición 1.0.4. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$, $x_0 \in \mathbb{N}$ *y* $r > 0$.

a) La bola abierta con centro en x_0 *y radio* r, *denotada por* $B(x_0, r)$, *es el conjunto*

$$B(x_0, r) \;=\; \{x \;\in \mathbb{X} \mid d(x, x_0) < r\}.$$

b) La bola cerrada con centro en x_0 *y radio* r, *denotada por* $B[x_0, r]$, *es el conjunto*

$$B[x_0, r] \;=\; \{x \;\in \mathbb{X} \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Definición 1.0.5. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subset \mathbb{X}$

a) Diremos que A *es un conjunto abierto o simplemente abierto, si para cada* $x \in A$ *existe* $r > 0$, *tal que* $B(x, r) \subset A$.

b) Diremos que A *es un conjunto cerrado, si* $\mathbb{X} \setminus A$ *es abierto.*

Definición 1.0.6. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico,* $A \subseteq \mathbb{X}$ *y* $x \in \mathbb{X}$.

a) x *es un punto interior de* A, *si existe* $r > 0$ *tal que* $B(x, r) \subseteq A$. *El interior de* A, *denotado por* $int(A)$ *ó* $\mathring{A}$ *es el conjunto de los puntos interiores.*

b) x *es un punto de acumulación de* A*, si para cada* $r > 0$, $B(x,r)\setminus\{x\}\cap A \neq \varnothing$. *El conjunto de los puntos de acumulación de* A *se denota por* A'*. Algunos autores le llaman a este conjunto, el conjunto derivado de* A.

c) x *es un punto de adherencia de* A*, si para cada* $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. *La cerradura del conjunto* A *denotada por* $\overline{A}$*, es el conjunto formado por todos los puntos adherentes de* A.

d) x *es un punto exterior a* A*, si existe* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subseteq A^{\complement}$*. El exterior de* A*, denotado por* $ext(A)$ *es el conjunto de todos los puntos exteriores de* A.

e) x *es un punto frontera de* A*, si para cada* $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ *y* $B(x,r) \cap A^{\complement} \neq \varnothing$*. La frontera de* A*, es el conjunto formado por todos los puntos frontera de* A *y lo denotaremos* $fr(A)$.

f) x *es un punto aislado de* A*, si existe* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Teorema 1.0.1. *[9, Teorema 2.5, pág. 28] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subseteq \mathbb{X}$.

1. $int(A) \subseteq A$.

2. $int(A)$ *es un conjunto abierto.*

3. *El interior de* A *es el máximo conjunto abierto contenido en* A*, es decir*

$$int(A) = \bigcup\{O \subseteq \mathbb{X} \mid O \text{ es abierto, y } O \subseteq A\}.$$

4. A *es un conjunto abierto, si y sólo si,* $int(A) = A$.

5. *Si* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{X}$*, entonces* $int(A) \subseteq int(B)$.

Teorema 1.0.2. *[9, Teorema 2.6, pág. 29] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subseteq \mathbb{X}$.

1. $A \subseteq \overline{A}$.

2. $\overline{A}$ *es un conjunto cerrado.*

3. $\overline{A}$ *es el mínimo conjunto cerrado que contiene a* A*, es decir*

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq \mathbb{X} \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

4. A *es un conjunto cerrado, si y sólo si,* $\overline{A} = A$.

5. Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{X}$*, entonces* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

6. $A' \subseteq \overline{A}$, $\overline{A} = A \cup A'$ *y* A *es cerrado, si y sólo si,* $A' \subseteq A$.

7. $\overline{A} = int(A) \cup fr(A)$.

Teorema 1.0.3. *[5, Teorema 1, pág. 44] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subseteq \mathbb{X}$.

$$(\overline{A})' = A'.$$

Ejemplo 1.0.10. *En* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual:*

a) Sea $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $int(\mathbb{Q}) = \varnothing$, $ext(\mathbb{Q}) = \varnothing$, $fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. *Se demuestra usando la densidad de* $\mathbb{Q}$.

b) Sea $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $int(\mathbb{N}) = \varnothing$, $ext(\mathbb{N}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $fr(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \varnothing$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. *Por las propiedades de los números naturales las igualdades son ciertas.*

Definición 1.0.7. *Sea* A *un conjunto no vacío en* $(\mathbb{X}, d)$*. Decimos que* A *es un conjunto acotado, si existe* $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ *tal que para todo* $x, y \in A$*, se tiene que*

$$d(x, y) \leq k.$$

Teorema 1.0.4. *[9, Teorema 2.10, pág. 33] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subseteq \mathbb{X}$ *un conjunto no vacío.* A *es acotado si y sólo si, está contenido en una bola abierta.*

Definición 1.0.8. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico,* A *y* B *subconjunto no vacíos de* $\mathbb{X}$. *Se define la distancia entre los conjuntos* A *y* B *como*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b)|\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Definición 1.0.9. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* A *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{X}$. *Se define el diámetro de* A *como*

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y)|\ x, y \in A\}.$$

1.1 Sucesiones y subsucesiones

Definición 1.1.1. *Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico. Una sucesión en* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *es una función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$. *f(n) lo representaremos como* x_n *y usaremos la notación usual para sucesión es* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$ *o simplemente* (x_n).

Nota. No se debe confundir $\{x_n\}$ con $f(\mathbb{N}) = \{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ que es el rango de la sucesión.

Ejemplo 1.1.1. *En* $\mathbb{R}$, *consideremos* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(n) = n^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Observe que por definición $\{x_n\}$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.2. *En* $(\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$ *consideremos la función* $F : \mathbb{N} \to \mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ *definida por* $F(n) = f_n$ *donde* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *está dada por* $f_n(x) = x^2/n$. *Observe que por definición* $\{f_n\} = \{F(n)\}$ *es una sucesión en* $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$.

Definición 1.1.2. *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en el espacio métrico* $(\mathbb{X}, d)$ *converge al punto* $x_0 \in \mathbb{X}$ *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq N, \text{ entonces } d_{\mathbb{X}}(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

A x_0 se le llama un límite de la sucesión.

Teorema 1.1.1. *[9, Teorema 3.1, pág. 50] Sea $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$ puede tener a lo más un límite.*

Definición 1.1.3. *Una sucesión en un espacio métrico se dice que es acotada si su imagen es acotada.*

Teorema 1.1.2. *[9, Teorema 3.3, pág. 51] Toda sucesión convergente en un espacio métrico es acotada.*

Ejemplo 1.1.3. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ y $x \in \mathbb{X}$. La sucesión constante, es decir, la que tiene como término general a $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$, converge a x, por lo que es acotada.*

Ejemplo 1.1.4. *Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual. La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente pero es acotada, ya que $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ es acotado.*

Teorema 1.1.3. *[5, Corolario 2', pág. 107] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $A \subseteq \mathbb{X}$. $x \in \overline{A}$ si y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.*

Definición 1.1.4. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$. Sea $\{n_k\}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. A la sucesión $\{x_{n_k}\}$ se le llama subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Si la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es convergente en $\mathbb{X}$, al límite de esta subsucesión se le llama límite subsecuencial.*

Teorema 1.1.4. *[9, Teorema 3.9, pág. 56] Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ que converge al punto x. Toda subsucesión de $\{x_n\}$ es convergente y converge a x.*

Observación 1.1.1. *Existen sucesiones que tienen subsucesiones convergentes pero la sucesión no lo es.*

Ejemplo 1.1.5. *Sea la sucesión $\{(-1)^n\}$ en $\mathbb{R}$. Es inmediato comprobar que carece de límite. Sin embargo, la sucesión $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{(-1)^n\}$ bajo la sucesión de números naturales $\{2n\}$ y es convergente.*

1.2 Sucesiones de Cauchy

Un concepto importante que gira alrededor de las sucesiones es el de sucesión de Cauchy. Daremos su definición y algunos resultados entorno a él.

Definición 1.2.1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$. Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\text{si } n, m \geq N, \text{ entonces } d_{\mathbb{X}}(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 1.2.1. *[9, Teorema 3.12 , pág. 58] Toda sucesión convergente en un espacio $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, es una sucesión de Cauchy.*

El recíproco del Teorema 1.2.1 no siempre es cierto, es decir, una sucesión de Cauchy no siempre es convergente.

Contraejemplo 1.2.1. *Sea $((0,1), d)$ con d la métrica usual en $\mathbb{R}$. La sucesión $\{1/n\}$ es de Cauchy en (0,1). Sabemos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n}$=0. Pero $0 \notin (0,1)$. Por lo tanto $\{1/n\}$ no es convergente en (0,1).*

Teorema 1.2.2. *[9, Teorema 3.14, pág. 58] Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico $\mathbb{X}$ es acotada.*

Sin embargo, el recíproco de este teorema no siempre es cierto, como veremos con el siguiente ejemplo.

Contraejemplo 1.2.2. *La sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada, por el Ejemplo 1.1.4. Pero no es de Cauchy, tomando $\varepsilon = 1$, n par y a m impar es fácil comprar que no es de Cauchy.*

Teorema 1.2.3. *[5, Lema 1, pág. 112] Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ admite una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente y ambas tiene el mismo límite.*

1.3 Compacidad.

Antes de dar la definición de un conjunto compacto, veamos algunos conceptos relacionados con la compacidad.

Definición 1.3.1. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Diremos que $A \subset \mathbb{X}$ es totalmente acotado (algunos autores le llaman precompacto), si para todo $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Ejemplo 1.3.1. *Sea $(\mathbb{X}, d_d)$ un espacio métrico discreto con $\mathbb{X}$ finito. Evidentemente es totalmente acotado.*

Ejemplo 1.3.2. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, (0,1) es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tomemos los puntos*

$$x_i = \frac{i}{n_0} \quad i = 1, 2, ..., n_0,$$

pertenecen al intervalo $(0,1)$ y lo dividen en subintervalos de longitud $1/n_0$. Sea $y \in (0,1)$, existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n_0\}$ tal que $y \in [\frac{i_0}{n_0}, \frac{i_0+1}{n_0}]$, de donde $d(y, x_i) \leq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por lo tanto

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n_0} B(x_i, \varepsilon).$$

Teorema 1.3.1. *[5, Teorema 1, pág. 86] Si A es un conjunto totalmente acotado de un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$, todo subconjunto no vacío de A es totalmente acotado.*

Teorema 1.3.2. *Si A es un conjunto totalmente acotado en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$, entonces $\overline{A}$ es totalmente acotado.*

Demostración Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \overline{A}$. Por Definición 1.0.6, existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, sabemos que A es totalmente acotado, entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Como $y \in A$, entonces existe $j \in \{1, 2, 3, ...n\}$ tal que $y \in B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$.
$d(x, x_j) \leq d(x, y) + d(y, x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Teorema 1.3.3. *[9, Teorema 2.13, pág. 36] En un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ todo conjunto totalmente acotado es acotado.*

Definición 1.3.2. *(**Secuencialmente compacto**) Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $Y \subseteq \mathbb{X}$. Diremos que Y es secuencialmente compacto en $\mathbb{X}$, si toda sucesión en Y, contiene una subsucesión que converge.*

Ejemplo 1.3.3. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq \mathbb{X}$ un subconjunto finito. Como toda sucesión en A tiene rango finito admite una subsucesión convergente, por lo tanto A es secuencialmente compacto.*

Teorema 1.3.4. *[9, Teorema 6.1, pág. 98] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio métrico secuencialmente compacto y Y un subconjunto cerrado de $\mathbb{X}$. Entonces Y es secuencialmente compacto.*

Teorema 1.3.5. *[9, Teorema 6.2, pág. 98] Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $Y \subseteq \mathbb{X}$. Si Y es secuencialmente compacto, entonces Y es cerrado y acotado.*

Teorema 1.3.6. *[9, Teorema 6.7, pág. 100] Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Si $\mathbb{X}$ es secuencialmente compacto, entonces es totalmente acotado.*

Definición 1.3.3. *(**Propiedad de Bolzano-Weierstrass**) Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $Y \subseteq \mathbb{X}$. Diremos que Y tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass, si todo subconjunto infinito A de Y tiene un punto de acumulación en Y.*

Teorema 1.3.7. *[5, Lema 2, pág. 94] Todo conjunto con la propiedad de Bolzano-Weierstrass en un espacio métrico es totalmente acotado.*

Para finalizar, veamos la siguiente definición que nos facilitará entender el concepto de compacidad.

Definición 1.3.4. *Sean* $A \subseteq \mathbb{X}$ *e* I *un conjunto de indices. Si* $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$*, con* U_α *conjunto abierto en* $\mathbb{X}$*; a la familia* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *se le llama cubierta abierta de* A*. Si* $I' \subseteq I$ *es tal que* $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha$*, entonces decimos que la subfamilia* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ *es una subcubierta de* A*. Si, además* I' *es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una subcubierta finita de* A*.*

Definición 1.3.5. *(**Compacto**) Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico. Decimos que* $A \subseteq \mathbb{X}$ *es compacto, si toda cubierta abierta de* A*, tiene una subcubierta finita.*

Ejemplo 1.3.4. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual, consideremos el conjunto* $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$*.* A *es compacto en* $\mathbb{R}$*. Sea* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una cubierta abierta de* A*, entonces existe* $\alpha_0 \in I$ *tal que* $0 \in U_{\alpha_0}$*. Como la sucesión* $\{1/n\}$ *converge a* 0*,* U_{α_0} *es abierto y* $0 \in U_{\alpha_0}$*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n} \in U_{\alpha_0}, \text{ para cada } n \geq k.$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., k-1\}$*, sea* U_{α_i} *tal que* $1/i \in U_{\alpha_i}$*. por lo tanto*

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} U_{\alpha_i}.$$

Se ha demostrado que A *es compacto.*

Teorema 1.3.8. *[9, Teorema 6.10, pág. 104] Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico. Todo conjunto* $K \subseteq \mathbb{X}$ *compacto es cerrado y acotado en* $\mathbb{X}$*.*

Teorema 1.3.9. *[9, Teorema 6.11, pág. 105] Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico compacto. Todo conjunto cerrado en* $\mathbb{X}$ *es compacto.*

Teorema 1.3.10. *[9, Teorema 6.13, pág. 105] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $A \subseteq \mathbb{X}$*. Son equivalentes:*

(a) A *es compacto.*

(b) A *tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

(c) A *es secuencialmente compacto.*

Teorema 1.3.11. *Todo conjunto compacto en un espacio métrico es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN La demostración se encuentra en [5, Teorema 2, pág. 93]. Otra forma de demostrar este teorema es, sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq \mathbb{X}$ compacto. Aplicando Teoremas 1.3.10, A es secuencialmente compacto, por Teorema 1.3.6, A es totalmente acotado. $\square$

1.4 Espacios Métricos Completos.

Definición 1.4.1. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Diremos que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de $\mathbb{X}$.*

Ejemplo 1.4.1. *$\mathbb{R}$ con la métrica usual, es un espacio métrico completo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, por Teorema 1.2.2 y por la principio de Weierstrass (toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente), existe $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ convergente. Aplicando el Teorema 1.2.3, $\{x_n\}$ es convergente. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es completo.*

Ejemplo 1.4.2. *El espacio $(\mathcal{B}(A, \mathbb{R}), d_\infty)$ es un espacio métrico completo. Esto se debe a [9, Proposición 5.1, pág 89].*

Lema 1.4.1. *[5, Lema 2, pág. 113] El rango de una sucesión de Cauchy es un conjunto totalmente acotado.*

Teorema 1.4.1. *[9, Proposición 5.3, pág. 89] Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico completo, Y un subespacio de $\mathbb{X}$. Y es un espacio métrico completo, si y sólo si, Y es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$.*

1.4.1 Completación de un Espacio Métrico

Antes de presentar el siguiente teorema, veamos algunas propiedades de las sucesiones.

Lema 1.4.2. *Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$, entonces la sucesión real $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para toda $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n, m \geq N_1, \text{ entonces } d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \text{ y}$$
$$\text{si } n, m \geq N_2, \text{ entonces } d(y_n, y_m) < \varepsilon/2.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para toda $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\{d(x_n, y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, entonces $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente. □

Lema 1.4.3. *Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$. Si $\{x_n\}$ es de Cauchy y $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0$, entonces $\{y_n\}$ es también de Cauchy*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para toda $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n, m \geq N_1 \text{ entonces } d(x_n, x_m) < \varepsilon/3 \text{ y si } n \geq N_2, \text{ entonces } d(x_n, y_n) < \varepsilon/3.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para toda $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces

$$d(y_n, y_m) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, y_m) \leq d(x_n, y_n) + d(x_m, y_m) + d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

□

Lema 1.4.4. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $x \in \mathbb{X}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ con, $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0$, entonces también $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N_1 \text{ entonces } d(x_n, x) < \varepsilon/2 \text{ y si } n \geq N_2, \text{ entonces } d(x_n, y_n) < \varepsilon/2.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para toda $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces

$$d(y_n, x) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) < \varepsilon.$$

$\square$

Lema 1.4.5. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones en un espacio métrico $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $x, y \in \mathbb{X}$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = d(x, y)$.*

Demostración Sea $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

si $n \geq N_1$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ y si $n \geq N_2$, entonces $d(y_n, y) < \varepsilon/2$.

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ y aplicando Lema 1.0.1 tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, entonces

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \varepsilon.$$

$\square$

Definición 1.4.2. *Sea $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio métrico. Se dice que el espacio $(\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}})$ es una completación de $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ si satisface las siguientes condiciones:*
1. $(\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}})$ es un espacio métrico completo.
2. Existe un conjunto denso F_0 en $(\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}})$ tal que $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y el subespacio $(F_0, d_{\mathbb{F}})$ son isométricos.

Aunque la demostración del siguiente teorema no se hará, los Lemas 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 y 1.4.5 son auxiliares para su demostración. Estos mismos lemas son importantes para la demostración de algunos teoremas de la tesis.

Teorema 1.4.2. *[5, Teorema 1, pág. 191] Todo espacio métrico admite una completación.*

1.5 Relación entre Compacidad y Completitud.

Teorema 1.5.1. *[9, Teorema 6.14, pág. 107] Todo espacio métrico compacto es completo.*

El recíproco del Teorema 1.5.1 no es, en general, cierto.

Contraejemplo 1.5.1. *Consideremos el subconjunto* $A = (-\infty, 0]$ *en* $\mathbb{R}$ *y denotemos como la métrica usual a* d *. Observemos que* A *es cerrado, por que* $A^{\complement} = (0, \infty)$ *es abierto en* $\mathbb{R}$*. Por el Teorema 1.4.1* (A, d) *es un espacio métrico completo, pero* A *no es compacto. Sólo bastará tomar* $\{B(0, -n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una cubierta de* A *la cual no tiene una subcubierta finita.*

Teorema 1.5.2. $\mathbb{X}$ *es un espacio métrico completo y totalmente acotado, si y sólo si, es compacto.*

Demostración Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Supongamos que $\mathbb{X}$ es compacto, por los Teoremas 1.3.11 y 1.5.1, $\mathbb{X}$ es completo y totalmente acotado.

Para la demostración del recíproco ver [9, Teorema 6.15, pág 107]. $\square$

Capítulo 2

Continuidad en Espacios Métricos.

Durante el desarrollo de este capítulo, la presentación de resultados se darán con un cierto orden: definición, operaciones algebraicas (suma, producto y composición), relación entre las funciones que preservan sucesiones de Cauchy, conservación de conjuntos totalmente acotados y teorema de extensión.
Nuestro objetivo es tener una mejor comparación entre las funciones continuas y uniformemente continuas.

2.1 Funciones continuas.

Definición 2.1.1. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *y* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos. Consideremos una función* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*. Se dice que* f *es* continua *en el punto* $a \in \mathbb{X}$*, si y sólo si, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que,*

$$\textit{para cada } x \in \mathbb{X} \textit{ si } d_{\mathbb{X}}(x, a) < \delta, \textit{entonces } \ d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.1. *[9, Teorema 4.1, pág. 65] Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y* $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función. Son equivalentes*

(1) f *es continua en* x_0*.*

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } x \in B(x_0, \delta), \text{ entonces } f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon).$$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

(4) Para cada abierto O en $\mathbb{Y}$, con $f(x_0) \in O$, existe un abierto U en $\mathbb{X}$, con $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq O$.

Definición 2.1.2. ***Continuidad global****. Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $A \subset \mathbb{X}$. Diremos que una función $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es continua en A, si f es continua en cada punto de A.*

Teorema 2.1.2. *[9, Teorema 4.2, pág. 66] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Son equivalentes*

(1) f es continua en $\mathbb{X}$.

(2) Para cada V abierto en $\mathbb{Y}$, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{X}$.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Veamos que f es continua en $\mathbb{R}$. Sean $a \in \mathbb{X}$ y $\varepsilon > 0$.*

$$|f(x) - f(a)| = |x - a|.$$

Tomando $\delta = \varepsilon > 0$ tenemos que para toda $x \in \mathbb{R}$ si $|x - a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.3. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ y $x_0 \in \mathbb{X}$. Diremos que la función f es secuencialmente continua en el punto x_0, si para cada sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definición 2.1.4. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ espacio métrico y $A \subset \mathbb{X}$. Diremos que una función $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es secuencialmente continua en A, si f es secuencialmente continua en cada punto de A.*

Teorema 2.1.3. *[9, Teorema 4.3, pág. 67] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Sea $x_0 \in \mathbb{X}$. Son equivalentes*

1. f es continua en x_0.

2. f es secuencialmente continua en x_0.

Teorema 2.1.4. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Si para toda $\{x_n\}$ sucesión en $\mathbb{X}$ tal que,*

$\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Y}$.

Entonces f es continua en $\mathbb{X}$.

Demostración Sean $a_0 \in \mathbb{X}$ y $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a_0$. Definamos $\{y_n\}$ como

$$y_n = \begin{cases} a_0, \text{ si } n \text{ es par} \\ x_n, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Veamos que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\{x_n\}$ es convergente a a_0, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N_1$, entonces $d_{\mathbb{X}}(a_0, x_n) < \varepsilon$. Por Teorema 1.2.1, $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ si $n, m \geq N_2$, entonces $d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) < \varepsilon$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$.

I) Si $n, m \geq N$ y además son pares $d_{\mathbb{X}}(y_m, y_n) = d_{\mathbb{X}}(a_0, a_0) = 0 < \varepsilon$.

II) Si $n, m \geq N$ y además son impares $d_{\mathbb{X}}(y_m, y_n) = d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) < \varepsilon$.

II) Si $n, m \geq N$ y además n es par y m es impar

$d_{\mathbb{X}}(y_m, y_n) = d_{\mathbb{X}}(a_0, x_n) < \varepsilon$.
Por lo tanto $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces $\{f(y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.
Observemos que $\{f(y_n)\}$ admite una subsucesión $\{f(y_{n_k})\}$ convergente a $f(a_0)$, donde para cada $n_k \in \mathbb{N}$ con n_k par $f(y_{n_k}) = f(a_0)$. Aplicando el Teorema 1.2.3, $\{f(y_n)\}$ converge a $f(a_0)$. Entonces f es secuencialmente continua en $\mathbb{X}$. Por el Teorema 2.1.3, f es continua en $\mathbb{X}$. $\square$

A partir de este momento a las funciones que cumplan que para toda $\{x_n\}$ sucesión en $\mathbb{X}$, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Y}$, las nombraremos, informalmente, como funciones que preservan sucesiones de Cauchy. El Teorema 2.1.4 hace referencia a la relación entre las funciones que preserva sucesiones de Cauchy y las funciones continuas.

Ahora bien, el recíproco de este teorema no siempre es cierto, es decir, no siempre una función continua preserva sucesiones de Cauchy.

Contraejemplo 2.1.1. *Sea* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Es claro que f *es continua en (0,1). Sea* $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ *y* $\delta > 0$*, como la sucesión* $\{1/n\}$ *es de Cauchy en el intervalo (0,1), existen* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|1/n_1 - 1/n_2| < \delta$*. Pero,*

$$|f(1/n_1) - f(1/n_2)| = |n_1 - n_2| > 1/2$$

Entonces $\{f(1/n)\}$ *no es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto* f *no preserva sucesiones de Cauchy.*

Teorema 2.1.5. *[5, Teorema 1, pág. 151] Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos,* $f : A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *y* $a \in A$*.*

1. *Si* a *es un punto aislado de* A*, entonces* f *es continua en* a*.*

2. Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 2.1.6. *[5, Teorema 3, pág. 153] Sean $(\mathbb{A}, d_{\mathbb{A}})$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos, $f\colon A \subseteq \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ y $g : B \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ funciones con $f(A) \subseteq B$.*
Si para $a \in A'$ existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $b \in B$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(b).$$

Teorema 2.1.7. *Sean $(\mathbb{A}, d_{\mathbb{A}})$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos, si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{X}$, $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ son continuas, entonces $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{Y}$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es continua en $\mathbb{A}$.*

Demostración Como $f(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X}$, nos permite considerar la función $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{Y}$. Sea $a \in \mathbb{A}$. Si a es un punto aislado, por el Teorema 2.1.5, $g \circ f$ es continua en a.
Si $a \in A'$, del Teorema 2.1.5 y la continuidad de f,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Por hipótesis, g es continua en $\mathbb{X}$, entonces g es continua en $f(a) \in \mathbb{X}$, aplicando el Teorema 2.1.6,

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es continua en $\mathbb{X}$.

$\square$

Teorema 2.1.8. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico y $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\mathbb{X}$. Entonces*
1. $f \pm g$ es continua en $\mathbb{X}$
2. fg es continua $\mathbb{X}$.

Demostración

1. a) Demostremos que $f + g$ es continua en $\mathbb{X}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{X}$. Como f y g son continuas en $\mathbb{X}$, entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cada $x \in \mathbb{X}$ si $d(x, x_0) < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $d(x, x_0) < \delta_2$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $x \in \mathbb{X}$ tal que $d(x, x_0) < \delta$, tenemos que $|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto $f + g$ es continua en x_0.

b) De manera análoga se puede demostrar que $f - g$ es continua en $\mathbb{X}$.

2. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{X}$. Observemos que $|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)|\ |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\ |f(x) - f(x_0)|$.

Sabemos que f y g son continuas en $\mathbb{X}$. Sea $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + 1)} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tales que para cada $x \in \mathbb{X}$, si $d(x, x_0) < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$, entonces $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \varepsilon_1$.

Definamos a M=$|f(x_0)| + \varepsilon_1$. Sea $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$, si $d(x, x_0) < \delta_2$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2$.

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $x \in \mathbb{X}$ tal que $d(x, x_0) < \delta$, tenemos que $|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)|\ |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\ |f(x) - f(x_0)| \leq M\varepsilon_2 + |g(x_0)|\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2} + |g(x_0)|\dfrac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + 1)} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por lo tanto fg es continua en $\mathbb{X}$ $\square$

Es sabido que las funciones continuas preservan conjuntos compactos. Por lo que es natural preguntarse ¿una función continua conserva conjuntos totalmente acotados? En general la respuesta es que no.

Contraejemplo 2.1.2. *Sea* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Sabemos que f es continua (0,1) y que por el Ejemplo 1.3.2 (0,1) es totalmente acotado. Sin embargo, $f((0,1)) = (1, \infty)$ *no es un conjunto totalmente acotado, ya que* $(1, \infty)$ *no es acotado.*

Teorema de extensión para funciones continuas

Lema 2.1.1. *[5, Lema 2, pág. 162] Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y* $f, g\colon \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *funciones. Si* f *y* g *son continuas en* $\overline{A}$ *y para cada* $x \in A$ $f(x) = g(x)$*, entonces para cada* $x \in \overline{A}$ $f(x) = g(x)$*.*

Teorema 2.1.9. *[5, Teorema 2, pág. 138] Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$*,* $f\colon A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función y* $a \in A'$*.*
Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$*, entonces para toda sucesión* $\{x_n\}$ *en* A*, tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *converge a* b*.*

Teorema 2.1.10. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y* $f : A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *continua en* A*. Existe una única función* $g : \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *continua en* $\overline{A}$ *y para cada* $x \in A$*,* $g(x) = f(x)$*, si y sólo si, existe* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$*, para cada* $a \in A'$*.*

Demostración Supongamos que existe g del enunciado y sea también h: $\overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ continua en $\overline{A}$ y para cada $x \in A$ $f(x) = h(x)$. Entonces para toda $x \in A$ $g(x) = f(x) = h(x)$, lo cual implica por el Lema 2.1.1, para toda $x \in \overline{A}$ $g(x) = h(x)$. Por lo que g es única.
Consideremos, por otra parte, la función identidad i: $A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, tal que para cada $x \in A$ $i(x) = x$. Podemos expresar $f = (g \circ i)$, además, si $a \in A'$, $\lim\limits_{x\to a} i(x) = a$. Aplicando el Teorema 2.1.6, existe

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (g \circ i)(x) = g(a).$$

Ahora, supongamos que existe $\lim\limits_{a\to a} f(x)$, para toda $a \in A'$. Contruyamos la función g: $\overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ de la siguiente manera. Para cualquier punto $a \in \overline{A} = A \cup A'$,

$$g(a) = \begin{cases} f(a), \text{ si } a \in A, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ si } a \in A' \end{cases}$$

De manera que g está bien definida para todo punto de $\overline{A}$. Resta probar la continuidad de g en $\overline{A}$.
Tomemos un $a \in \overline{A}$. Si a es un punto aislado de $\overline{A}$, g es continua, por el Teorema

2.1.5. Consideremos el caso en que $a \in (\overline{A})'$; de acuerdo con el Teorema 1.0.3, $a \in A'$ y $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.
Sea T una vecindad cualquiera de $g(a)$; existe una bola cerrada $B[g(a), r] = C$ con $C \subseteq T$. Por el Teorema 2.1.1, existe S una vecindad de a tal que

$$f((S - \{a\} \cap A)) \subseteq N(g(a), r) \subseteq C.$$

Denotemos a $S - \{a\} = B$, consideremos el conjunto $B \cap \overline{A}$ y tomemos un $z \in B \cap \overline{A}$. Si U es una vecindad cualquiera de z tenemos que $U \cap (B \cap A) = (U \cap B) \cap A \neq \varnothing$ ya que $U \cap B$ es un entorno de $z \in \overline{A}$, entonces

$$z \in \overline{B \cap A} = (B \cap A) \cup (B \cap A)'.$$

Si $z \in B \cap A$, entonces $g(z) = f(z) \in f(B \cap A) \subseteq C$. Supongamos que $z \in (B \cap A)' \subseteq A'$. Luego $g(z) = \lim_{x \to z} f(z)$. Pero, por los teoremas 1.0.3 y 1.1.3, existe una sucesión $\{z_n\}$ en $B \cap A$ con $\lim_{n \to \infty} z_n = z$, entonces por el Teorema 2.1.9, $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = g(z)$. Ahora, la sucesión $\{f(z_n)\} \subseteq f(B \cap A)$, de manera que

$$g(z) \in \overline{f(B \cap A)},$$

por el Teorema 1.1.3 y $f(B \cap A) \subseteq C$, $g(z) \in C$.
Para cualquier $z \in B \cap \overline{A}$ $g(z) \in C$, entonces $g(B \cap \overline{A}) \subseteq C \subseteq T$, es decir

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.1.5, g es continua en $a \in (\overline{A})'$.
Finalmente, g es continua en $\overline{A}$. □

2.2 Funciones uniformemente continuas.

Definición 2.2.1. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *dos espacios métricos, diremos que la función* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, tal que para cada* $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$*,*

$$\textit{si } d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) < \delta, \textit{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Es claro que si f es uniformemente continua en $\mathbb{X}$, entonces f es continua en $\mathbb{X}$.

Pero el recíproco no siempre es válido, lo cual revela que la continuidad uniforme es una propiedad más poderosa que la continuidad, en el sentido que la continuidad es consecuencia de la continuidad uniforme. Veamos el siguiente ejemplo, que nos ilustrará un poco más esta afirmación.

Contraejemplo 2.2.1. *Sea* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Sabemos que f es continua (0,1), pero veremos que no es uniformemente continua en (0,1). Sea $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ *y* $\delta > 0$*, como la sucesión* $\{1/n\}$ *es de Cauchy en el intervalo (0,1), existen* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *distintos tales que* $|1/n_1 - 1/n_2| < \delta$*. Pero,*

$$|f(1/n_1) - f(1/n_2)| = |n_1 - n_2| > 1/2$$

Por lo tanto f no es uniformemente continua.

Teorema 2.2.1. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$*,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y f:* $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función. Son equivalentes:*

1. f *no es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$*.*

2. Existe $\varepsilon > 0$*, tal que, para toda* $\delta > 0$*, existe* x_δ *y* y_δ *que cumplen*

$$d_{\mathbb{X}}(x_\delta, y_\delta) < \delta, \textit{ y } d_y(f(x_\delta), f(y_\delta)) > \varepsilon$$

3. Existe $\varepsilon > 0$ *y dos sucesiones* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$*, tales que*

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0 \textit{ y } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \textit{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración De la negación de la Definición 2.2.1 se tiene que 1) es equivalente a 2), sólo faltaría ver que 2) es equivalente a 3).

Para 2) implica 3), tomemos $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $\delta > 0$, existe x_δ y y_δ que cumplen

$$d_{\mathbb{X}}(x_\delta, y_\delta) < \delta, \text{ y } d_y(f(x_\delta), f(y_\delta)) > \varepsilon.$$

En particular para $\delta = \dfrac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existen x_n y y_n que cumplen

$$d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) < \delta \text{ y para cada } n \in \mathbb{N},\ d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Observe que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son dos sucesiones tales que, si $0 \leq d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0$.

Ahora veamos que 3) implica 2), tomemos $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0 \text{ y } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Sea $\delta > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N$ entonces $d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) < \delta$. En particular, tomando $n = N$ tenemos $d_{\mathbb{X}}(x_N, y_N) < \delta$ y además $x_N = x_\delta$ y $y_N = y_\delta$. Se concluye la demostración.

Por lo tanto 2) es equivalente 3).

$\square$

El Teorema 2.2.1 será de mucha utilidad para algunas demostraciones posteriores.

Ejemplo 2.2.1. *Sea $\mathbb{R}$ con la metrica usual y $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, ésta es uniformemente continua en $[0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sean $x, y \in [0,1]$, tal que $|x-y| < \delta$, entonces*

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto f es uniformemente continua.

Haciendo un estudio análogo como se hizo en las funciones continuas, tenemos:

Teorema 2.2.2. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos, $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces para toda $\{x_n\}$ sucesión en $\mathbb{X}$,* *si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Y}$.*

Demostración Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{X}$, $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$ entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Además, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $d_{\mathbb{X}}(x_n, x_m) < \delta$. Entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, por lo que $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy. $\square$

Una pregunta natural es ¿El recíproco se cumple? La respuesta es que no.

Contraejemplo 2.2.2. *Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) $= x^2$ y $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.*
Por el Teorema 1.2.2 $\{x_n\}$ es acotada, entonces existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq K$.
Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$.
$|f(x_n) - f(x_m)| = |x_n^2 - x_m^2| = |(x_n - x_m)(x_n + x_m)| \leq |(x_n - x_m)|(|x_n| + |x_m|) = 2K|x_n - x_m| < \varepsilon$.
Por lo tanto $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$, entonces

$$|n + 1/n - n| < \delta, \text{ pero } |f(n + 1/n) - f(n)| = 2 + 1/n^2 > 1.$$

Por lo tanto no es uniformemente continua.

Otra manera de enunciar el Teorema 2.2.2 es: sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces f preserva sucesiones de Cauchy.
Este teorema aparte de dar la relación entre las funciones uniformemente continuas y las funciones que preservan sucesiones de Cauchy, nos hace referencia a la existencia de estas últimas.

Teorema 2.2.3. *Sean* $(\mathbb{A}, d_{\mathbb{A}})$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *y* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos, si* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{X}$, $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *son uniformente continuas, entonces* $g \circ f \ : \ \mathbb{A} \to \mathbb{Y}$ *definida por* $(g \circ f)(x) \ = \ g(f(x))$ *es uniformemente continua en* $\mathbb{A}$.

Demostración Como $f(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{X}$, nos permite considerar la función $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{Y}$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{X}$

$$\text{si } d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta_1, \text{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(g(x), g(y)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, para $\delta_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $a, b \in \mathbb{A}$

$$\text{si } d_{\mathbb{A}}(a, b) < \delta_2, \text{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(f(a), f(b)) < \delta_1.$$

Dado que $f(a), f(b) \in \mathbb{X}$ y $d_{\mathbb{Y}}(f(a), f(b)) < \delta_1$, tenemos que

$$d_{\mathbb{Y}}(g(f(a)), g(f(b))) = d_{\mathbb{Y}}((g \circ f)(a), (g \circ f)(b)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $g \circ f$ es uniformemente continua.

□

Como en las funciones continuas, ¿será posible que la suma y el producto de funciones uniformemente continuas sean funciones uniformemente continuas? En el caso del producto, en general no es cierto.

Contraejemplo 2.2.3. *Sea* $f, g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = x$ *y* $g(x) = x$. *Entonces* $fg \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2$. *Por el Contraejemplo 2.2.2, sabemos que* fg *no es uniformemente continua.*

Con condiciones adicionales, obtenemos un teorema similar al Teorema 2.1.8 para las funciones uniformemente continuas.

Teorema 2.2.4. *Sea* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *funciones uniformemente continuas en* $\mathbb{X}$. *Entonces*

1. $f \pm g$ *es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$

2. Si f *y* g *son acotadas en* $\mathbb{X}$, *entonces* fg *es uniformemente continua* $\mathbb{X}$.

Demostración

1. a) Demostremos que $f+g$ es uniformemente continua en $\mathbb{X}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son uniformemente continuas en $\mathbb{X}$, entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{X}$

si $d(x,y) < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $d(x,y) < \delta_2$, entonces $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{X}$ tales que $d(x,y) < \delta$, tenemos que $|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto $f+g$ es uniformemente continua en $\mathbb{X}$.

b) De manera análoga se puede demostrar que $f-g$ es uniformemente continua en $\mathbb{X}$.

2. Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son acotadas, entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que para cada $x \in \mathbb{X}$ $|f(x)| \leq k_1$ y $|g(x)| \leq k_2$.

Por otro lado, f y g son uniformemente continuas en $\mathbb{X}$, entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{X}$ si $d(x,y) < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2k_2}$ y si $d(x,y) < \delta_2$ entonces $|g(x) - g(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2k_1}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ sean $x, y \in \mathbb{X}$ tales que $d(x,y) < \delta$, tenemos que $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |g(x)|\ |f(x) - f(y)| + |f(y)|\ |g(x) - g(y)| < \dfrac{k_2\varepsilon}{2k_2} + \dfrac{k_1\varepsilon}{2k_1} = \varepsilon$

Por lo tanto fg es uniformemente continua en $\mathbb{X}$. $\square$

Teorema 2.2.5. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función uniformemente continua en* $\mathbb{X}$. *Si* $\mathbb{X}$ *es totalmente acotado, entonces* $f(\mathbb{X})$ *es totalmente acotado.*

Demostración Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{X}$ si $d_{\mathbb{X}}(x,y) < \delta$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Dado que $\mathbb{X}$ es un conjunto totalmente acotado, para $\delta > 0$ existe $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{X}$ tales que

$$\mathbb{X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta).$$

Ahora veamos que $f(\mathbb{X}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f(x_i), \varepsilon)$. Sea $y \in f(\mathbb{X})$, entonces existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in \mathbb{X}$, existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $d_{\mathbb{X}}(x, x_{i_0}) < \delta$, luego $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(x_{i_0})) < \varepsilon$. Finalmente, $y \in B(f(x_{i_0}), \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f(x_i), \varepsilon)$.
Por lo tanto $f(\mathbb{X})$ es un conjunto totalmente acotado. □

Teorema 2.2.6. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función.* f *es uniformemente continua, si y sólo si,* $d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) = 0$ *cuando* $S, T \subset \mathbb{X}$ *y* $d_{\mathbb{X}}(S, T) = 0$.

Demostración Para la necesidad la demostración la haremos por contradicción. Supongamos que $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es uniformemente continua y existen $S, T \subset \mathbb{X}$ tales que $d_{\mathbb{X}}(S, T) = 0$ y $d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) > 0$.
Sea $\varepsilon = d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) > 0$. Existe $\delta > 0$, entonces $\delta > d_{\mathbb{X}}(S, T)$, luego existen $x \in S$ y $y \in T$ tales que $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon = d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T))$. Esto es una contradicción.

Para la suficiencia, también la haremos por contradicción. Supongamos que $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ no es uniformemente continua y $d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) = 0$ cuando $S, T \subset \mathbb{X}$ y $d_{\mathbb{X}}(S, T) = 0$.
Dado que f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0 \text{ y para cada } n \in \mathbb{N} \;\; d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Por otro lado, observemos que $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \subset \mathbb{X}$ y que $d_{\mathbb{X}}(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(\{x_n\}), f(\{y_n\})) = 0$.
Como $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) \in \{d(f(x_i), f(y_i)) : x_i \in \{x_n\} \text{ } y \text{ } y_i \in \{y_n\}\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(\{x_n\}), f(\{y_n\})) \geq \varepsilon$, luego $0 \geq \varepsilon$. Esto es una contradicción.

Por lo tanto $d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) = 0$ cuando $S, T \subset \mathbb{X}$ y $d_{\mathbb{X}}(S, T) = 0$, si y sólo si, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es uniformemente continua.

$\square$

Teorema de extensión para las funciones uniformemente continuas.

Lema 2.2.1. *[5, Lema 1, pág. 186] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos y $f\colon A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es una función. Si f es uniformemente continua en A y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ es completo, entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para toda $a \in A'$.*

Teorema 2.2.7. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio métrico, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ un espacio métrico completo y $f : A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uniformemente continua en A, entonces existe una única función $g : \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, uniformemente continua en $\overline{A}$ tal que para cada $x \in A : \ g(x) = f(x)$*

Demostración Como f es uniformemente continua en A, f es continua en A. Por el Lema 2.2.1, existe $\lim_{x\to a} f(x)$, para toda $a \in A'$. Del Teorema 2.1.10, existe una única función $g : \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ continua en A y para toda $x \in A$ $f(x) = g(x)$.

Sólo falta demostrar que g es uniformemente continua en A. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in A$

$$\text{si } d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta, \text{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sean $x, y \in \overline{A}$ tales que $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \dfrac{\delta_0}{2}$. Como g es continua en x y y, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\text{para cada } z \in \overline{A}, \text{ si } d_{\mathbb{X}}(z, x) < \delta_1, \text{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(g(z), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{para cada } t \in \overline{A}, \text{ si } d_{\mathbb{X}}(t, x) < \delta_1, \text{ entonces } d_{\mathbb{Y}}(g(t), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando $\delta = \min\left\{\dfrac{\delta_0}{4}, \delta_1, \delta_2\right\}$, existen $p \in A \cap B(x, \delta)$ y $q \in A \cap B(y, \delta)$ tales que

$$d_{\mathbb{Y}}(f(p), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ y } \ d_{\mathbb{Y}}(f(q), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered} d_{\mathbb{X}}(p,q) \leq d_{\mathbb{X}}(p,x) + d_{\mathbb{X}}(q,x) \leq d_{\mathbb{X}}(p,x) + d_{\mathbb{X}}(q,y) + d_{\mathbb{X}}(x,y) < \\ < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{gathered}$$

Finalmente para cada $x, y \in \overline{A}$ si $d_{\mathbb{X}}(x,y) < \dfrac{\delta}{2}$, entonces

$$\begin{gathered} d_{\mathbb{Y}}(g(x), g(y)) \leq d_{\mathbb{Y}}(f(p), g(x)) + d_{\mathbb{Y}}(f(p), g(y)) \leq \\ \leq d_{\mathbb{Y}}(f(p), g(x)) + d_{\mathbb{Y}}(f(q), g(y)) + d_{\mathbb{Y}}(f(p), f(q)) < \varepsilon. \end{gathered}$$

$\square$

Capítulo 3

Funciones Continuas en el sentido de Cauchy.

3.1 Funciones continuas en el Sentido de Cauchy

Aunque en el Capítulo 2, el primer resultado que habla de las funciones que preserva sucesiones de Cauchy es el Teorema 2.1.4, en los libros clásicos, como [5], el que aborda este concepto es el Teorema 2.2.2, mostrándonos la existencia de este tipo de funciones.

En este capítulo estudiaremos las funciones que preservan sucesiones de Cauchy, manteniendo un orden similar al que se presentó en el capítulo anterior.

Definición 3.1.1. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *dos espacios métricos, diremos que la función* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es continua en el sentido de Cauchy sobre* $\mathbb{X}$*, si para cada sucesión* $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ *tal que,*

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy, entonces } \{f(x_n)\} \text{ es de Cauchy}$$

Nota. Para abreviar diremos que una función es continua en el sentido de Cauchy como CSC.

Ejemplo 3.1.1. *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $f(x) = x^2$. *Del Contraejemplo 2.2.2 se tiene que* f *es CSC.*

Ejemplo 3.1.2. *En general, en* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual y* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función definida por* $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$, f *es CSC. Sea* $\{x_k\}$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$, *veamos que* $\{f(x_k)\}$ *es de Cauchy.*
Por el Teorema 1.2.2, $\{x_k\}$ *es acotada, es decir, existe* $C \in \mathbb{R}^+$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$ $|x_k| < C$, *entonces* $|x_k^{n-1}| < C^{n-1}$. *Sea* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $l, m \geq N$ *entonces* $|x_l - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{nC^{n-1}}$.
$$|f(x_l)-f(x_m)| = |x_l^n-x_m^n| = |x_l-x_m|\left|\sum_{i=0}^{n-1} x_l^{(n-1)-i}x_m^i\right| \leq |x_l-x_m|\sum_{i=0}^{n-1}|x_l^{(n-1)-i}x_m^i| < nC^{n-1}|x_l - x_m| < \varepsilon.$$
Por lo tanto $\{f(x_k)\}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Continuando con lo que hasta ahora hemos hecho, demostraremos teoremas similares a los demostrados para las funciones continuas y a las funciones uniformemente continuas, relacionados a las funciones CSC.

Teorema 3.1.1. *Sean* $(\mathbb{A}, d)$, $(\mathbb{X}, d')$ *y* $(\mathbb{Y}, d'')$ *espacios métricos, si* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{X}$, $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *son CSC, entonces* $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{Y}$ *definida por* $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ *es CSC en* $\mathbb{A}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{A}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{A}$. Como f es CSC, tenemos que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$. Sabemos que g es CSC, entonces $\{g(f(x_n))\} = \{(g \circ f)(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Y}$. Por lo tanto $g \circ f$ es CSC. $\square$

Teorema 3.1.2. *Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico y* $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *funciones CSC en* $\mathbb{X}$. *Entonces*
1. $f \pm g$ *es CSC en* $\mathbb{X}$
2. fg *es CSC en* $\mathbb{X}$.

Demostración 1. a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$. Sabemos que f y g son CSC, por lo que $\{f(x_n)\}$ y $\{g(x_n)\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Y}$. Sea $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n.m \in \mathbb{N}$ si $n, m \geq N_1$ entonces $|f(x_n) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y si $n, m \geq N_2$ entonces $|g(x_n) - g(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos $|(f(x_n) + g(x_n)) - (f(x_m) + g(x_m))| \leq |f(x_n) - f(x_m)| + |g(x_n) + g(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Con esto hemos demostrado que $\{(f + g)(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto $f + g$ es continua en el sentido de Cauchy.
b) De forma análoga tenemos que $f - g$ es CSC.
2. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$. Sabemos que f y g son CSC, por lo que $\{f(x_n)\}$ y $\{g(x_n)\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Y}$. Por el Teorema 1.1.3, existen $k_1, k_2 > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n)| \leq k_1$ y $|g(x_n)| \leq k_2$. Por oto lado, para $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ si $n, m \geq N_1$ entonces $|f(x_n) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2k_2}$ y si $n, m \geq N_2$ entonces $|g(x_n) - g(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2k_1}$.
Tomemos a $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $|(f(x_n)g(x_n)) - (f(x_m)g(x_m))| \leq |g(x_n)|\ |f(x_n) - f(x_m)| + |f(x_m)|\ |g(x_n) - g(x_m)| < \dfrac{k_2\varepsilon}{2k_2} + \dfrac{k_1\varepsilon}{2k_1} = \varepsilon$.
Entonces $\{(fg)(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto fg es CSC.

□

Ejemplo 3.1.3. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$. Sabemos por el Ejemplo 3.1.2 que f y g son CSC. Observe que $f + g$ y fg son CSC como consecuencia al Teorema 3.1.2.*

Observación 3.1.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, cualquier polinomio de grado n es una función CSC.*

Teorema 3.1.3. *[2, Teorema 7.5, pág. 91] $\mathbb{X}$ es totalmente acotado, si y sólo si, toda sucesión en $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración Supongamos que $\mathbb{X}$ es totalmente acotado. Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{X}$ una sucesión en $\mathbb{X}$ con $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ infinito. Sea $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{X}$

tales que $\mathbb{X} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Es claro que existe un $j_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es un conjunto infinito. De lo contrario para toda $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $B(a_j, \varepsilon) \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito, pero esto es una contradicción.

Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_1} \in B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ con $N_2 \geq N_1$ tal que $x_{N_2} \in B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, de caso contrario tendríamos que para toda $N_2 \in \mathbb{N}$ con $N_2 \geq N_1$, $x_{N_2} \notin B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, con lo que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es finito, contradiciendo lo anteriormente mencionado. Entonces existe $N_3 \in \mathbb{N}$ con $N_3 \geq N_2$ tal que $x_{N_3} \in B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, de manera consecutiva tenemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ con $N_m \geq N_{m-1}$ tal que $x_{N_m} \in B\left(a_{j_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Finalmente $\{x_{N_m}\}$ es una subsucesión de $\{x_k\}$.

Veamos que $\{x_{N_m}\}$ es una sucesión de Cauchy. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $l, r \in \mathbb{N}$ si $l, r \geq n_0$ entonces $d(x_{N_l}, x_{N_r}) \leq d(x_{N_l}, a_{j_0}) + d(x_{N_r}, a_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por lo tanto $\{x_{N_m}\}$ es de Cauchy.

Para el caso que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sea finito, $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$. Por el Teorema 1.2.1, $\{x_{n_k}\}$ es de Cauchy.

Ahora, por contradicción supongamos que $\mathbb{X}$ no es totalmente acotado y que toda sucesión de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión de Cauchy. Tomemos a $\varepsilon_0 > 0$ y $x_1 \in \mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ no es totalmente acotado, existe $x_2 \in \mathbb{X}$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Ahora para $\{x_1, x_2\}$ existe $x_3 \in \mathbb{X}$ tal que $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0$ y $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon_0$. De manera consecutiva se define $\{x_n\}$ tal que para cada $i, j \in \mathbb{N}$ $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$.

Por otro lado tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de $\mathbb{X}$. Por lo tanto existe $\{x_{N_k}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$ tal que $\{x_{N_k}\}$ es de Cauchy. Entonces para $\varepsilon_0 > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ si $n, m \geq N_0$, entonces $d(x_{N_n}, x_{N_m}) < \varepsilon_0$. Como x_{N_n} y x_{N_m} son elementos de $\{x_n\}$ entonces $d(x_{N_n}, x_{N_m}) \geq \varepsilon_0$ contradiciendo lo anterior.

Por lo tanto si toda sucesión de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión de Cauchy entonces $\mathbb{X}$ es totalmente acotado. $\square$

Este teorema que acabamos de demostrar, facilita la demostración del siguiente resultado.

Teorema 3.1.4. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función continua en el sentido de Cauchy en* $\mathbb{X}$. *Si* $\mathbb{X}$ *es totalmente acotado, entonces* $f(\mathbb{X})$ *es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN Por Teorema 3.1.3, bastará probar que toda sucesión en $f(\mathbb{X})$ tiene una subsucesión de Cauchy. Sea $\{y_n\} \subset f(\mathbb{X})$ una sucesión de $f(\mathbb{X})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{X}$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $\mathbb{X}$ es totalmente acotado, existe $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión de Cauchy en $\{x_n\}$. Entonces $\{f(x_{n_k})\}$ es una subsucesión de Cauchy en$\{y_n\}$, por ser f CSC. Por lo tanto $f(\mathbb{X})$ es totalmente acotado. $\square$

Ejemplo 3.1.4. *Tomando a* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual, sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$ *y* $(0, 1)$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}$. *Del Ejemplo 3.1.1 y 1.3.2 se tiene que* f *es CSC y* $f((0, 1)) = (0, 1)$ *es totalmente acotado.*

Ahora nuestra intención es presentar las relaciones que existen entre este concepto y los conceptos de continuidad.

3.2 CSC y continuidad.

Hasta este momento sabemos que uniformemente continua implica CSC y continuidad, y CSC implica continuidad.
¿Será posible determinar condiciones para que los recíprocos de cada implicación sean verdaderos o que los tres conceptos de continuidad sean equivalentes? En el desarrollo de esta sección se hablará de dichas condiciones y se

establecerán nuevos resultados para las funciones CSC.

Un primer acercamiento a estas condiciones es en los espacios normados y los operadores lineales. Observe que se dan condiciones para el dominio y para la función.

Definición 3.2.1. *Sean $\mathbb{X}$ un espacio vectorial distinto del $\{0\}$ sobre un campo $\mathcal{K}$ (los números reales o complejos) y $\|\cdot\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{X}$, si cada $x, y \in \mathbb{X}$ y $\alpha \in \mathcal{K}$, $\|\cdot\|$ cumple con las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

A la pareja ordenada $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ le llamaremos espacio normado.

Observación 3.2.1. *Una norma sobre $\mathbb{X}$ define una metrica d en $\mathbb{X}$, la cual está definida por*

$$\textit{para cada } x, y \in \mathbb{X} \; d(x, y) = \|x - y\|$$

y es llamada la métrica inducida por la norma. Es preciso aclarar que toda norma genera una métrica, pero no toda métrica es generada por una norma.

Observación 3.2.2. *Por la Observación 3.2.1,* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *es un espacio métrico.*

Definición 3.2.2. *Sea* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Diremos que* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach si* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado completo.*

Nota. Decir que $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado completo (o espacio de Banach), es referirse a que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma.

Ejemplo 3.2.1. *Sean* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *definamos* $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *como*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Por las propiedades del valor absoluto tenemos que $\|\cdot\|_2$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$. $\|\cdot\|_2$ *define una métrica en* $\mathbb{R}^n$

$$d_2(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

que es la métrica euclidiana.

Ejemplo 3.2.2. *Tomando* l^p, *del Ejemplo 1.0.4, y* $\|\cdot\|_p$: $l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ *como*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

es una norma en l^p. $\|\cdot\|_p$ *define una métrica en* l^p

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nota. Una función entre dos espacios normados la llamaremos operador.

Definición 3.2.3. *Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *dos espacios normados y* T: $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *un operador. Diremos que* T *es un operador lineal si para cualquier* $x, y \in \mathbb{X}$ *y* $\alpha \in \mathcal{K}$

$$T(x+y) = T(x) + T(y),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Definición 3.2.4. *Sean* $\mathbb{X}$ *y* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados y* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *un operador lineal. Se dice que* T *es un operador lineal acotado si existe* $c \in \mathbb{R}^+$ *tal que para cada* $x \in \mathbb{X}$.

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|.$$

Definición 3.2.5. *Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *dos espacios normados y* $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *un operador lineal acotado. Se define*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \mid \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1 \text{ con } x \in \mathbb{X}\}$$

se llama la norma del operador T.

Teorema 3.2.1. *[6, 2.7-9 Theorem, pág. 97] Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *espacios normados y* $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *un operador lineal. Entonces* T *es un operador lineal acotado, si y sólo si,* T *es continuo.*

Teorema 3.2.2. *Sea* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *dos espacios normados y* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *un operador lineal. Son equivalentes las siguientes proposiciones*

1. T *es continua en* $\mathbb{X}$.

2. T *es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$.

3. T *es continua en el sentido de Cauchy en* $\mathbb{X}$.

Demostración De los Teoremas 2.2.2 y 2.1.4 tenemos que 2) implica 3) y 3) implica 1). Por lo que sólo bastará probar que 1) implica 2). Sea $\varepsilon > 0$. Como T es continua, entonces T es un operador lineal acotado, es decir, existe $c > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$ $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq c\|x\|_{\mathbb{X}}$.
Observemos que para cada $x, y \in \mathbb{X}$
$\|T(x) - T(y)\|_{\mathbb{Y}} = \|T(x-y)\|_{\mathbb{Y}} \leq c\|x-y\|_{\mathbb{X}}$.
Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ tenemos que para cada $x, y \in \mathbb{X}$
si $\|x-y\| < \delta$, entonces $\|T(x) - T(y)\|_{\mathbb{Y}} = \|T(x-y)\|_{\mathbb{Y}} \leq c\|x-y\|_{\mathbb{X}} < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$.
Por lo tanto T es uniformemente continua. □

El Teorema 3.2.2, es el primero en mostrar condiciones, no sólo al espacio, sino también a la función, para que los tres conceptos sean equivalentes.

Teorema 3.2.3. *Sean* $\mathbb{X}$ *un espacio normado,* $\mathbb{Y}$ *un espacio de Banach y sea* $D \subset \mathbb{X}$ *un subespacio denso en* $\mathbb{X}$. *Sea* $T : D \to \mathbb{Y}$ *un operador lineal acotado.*

Entonces existe un operador lineal acotado $T_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tal que para cada $x \in D$ $T_1(x) = T(x)$ y $\|T_1\| = \|T\|$

Demostración Por el Teorema 3.2.1, T es continuo. Aplicando el Teorema 3.2.2, T es uniformemente continua, aplicando el Teorema 2.2.7, existe un operador lineal acotado $T_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tal que para cada $x \in$ D, $T_1(x) = T(x)$. Veamos que $\|T_1\| = \|T\|$. Sea $x \in \mathbb{X}$ con $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$.
Sabemos que si $x \in D$, entonces $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} = \|T_1(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1\|$.
Si $x \notin D$, como D es denso, entonces existe $\{x_n\}$ una sucesión en D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como T_1 es continua, entonces $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} T_1(x_n) = T_1(x)$.
Entonces $\|T_1(x)\|_{\mathbb{Y}} = \left\|\lim_{n\to\infty} T_1(x_n)\right\|_{\mathbb{Y}} = \lim_{n\to\infty} \|T_1(x_n)\|_{\mathbb{Y}} = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_{\mathbb{Y}}$.
Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$, existe $N \in \mathbb{X}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N$, entonces $\|x_n\|_{\mathbb{X}} \leq 1$.
Luego para cualquier $n \geq N$, $\|T(x_n)\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T\|$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_{\mathbb{Y}} = \|T_1(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T\|$. Con lo que $\|T_1\| = \|T\|$. □

Ahora nos preguntamos, ¿qué pasaría si el codominio no fuera un espacio de Banach, el Teorema 3.2.3 seguirá siendo válido? La respuesta es que no.

Contraejemplo 3.2.1. *Sean $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y sea $\mathbb{Y}$ un subespacio propio de $\mathbb{X}$ tal que $\mathbb{Y}$ es denso en $\mathbb{X}$. Sea $I : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ dada por $I(y) = y$.*
Veamos que no existe $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lineal y acotada, tal que para cada $y \in \mathbb{Y}$ $T(y) = y$.
Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe T. Sea $x \in \mathbb{X}$. Como $\mathbb{Y}$ es denso en $\mathbb{X}$, existe $\{x_n\} \subset \mathbb{Y}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dado que T es continua, entonces $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$.
Pero $T(x_n) = x_n$, por definición de T. Luego $\lim_{n\to\infty} x_n = T(x)$.
Por la unicidad del límite tenemos que $T(x) = x$. Luego T es la identidad. Entonces, que $\mathbb{X} = T(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$, por lo tanto $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$. Lo cual es una contradicción.

Como dato importante, acabamos de demostrar un primer teorema de extensión para las funciones CSC.

Regresando a los espacios métricos, daremos condiciones para que los recíprocos de las implicaciones, mencionadas al inicio de la sección, se cumplan.

Teorema 3.2.4. *Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico compacto,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *un espacio métrico y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función. Si* f *es continua en* $\mathbb{X}$*, entonces* f *es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$*.*

Demostración La demostración se encuentra [5, Topología de espacios Métricos, pág. 185].
Veamos otra forma de demostrar este teorema. Se hará por contradicción, supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en $\mathbb{X}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)_{\mathbb{X}} = 0, \text{ y } d(f(\{x_n\}), f(\{y_n\}))_{\mathbb{Y}} \geq \varepsilon_0.$$

Como $\{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ y $\mathbb{X}$ es compacto, aplicando el Teorema 1.3.10, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ y un elemento $x \in \mathbb{X}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Por el Lema 1.4.4, $\{y_{n_k}\}$ converge a x. de la hipótesis tenemos

$$d(f(\{x_{n_k}\}), f(\{y_{n_k}\}))_{\mathbb{Y}} \geq \varepsilon_0.$$

Por otro lado, como que f es continua, por el Teorema 2.1.3, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}))_{\mathbb{Y}} = 0$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ si $k \geq N$, entonces

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}))_{\mathbb{Y}} < \varepsilon.$$

En particular para ε_0 tenemos que, $d(f(\{x_{n_k}\}), f(\{y_{n_k}\}))_{\mathbb{Y}} < \varepsilon_0$, contradiciendo lo anterior.

$\square$

Corolario 3.2.1. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico compacto,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *un espacio métrico y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función. Si* f *es CSC, entonces* f *es uniformemente continua en* $\mathbb{X}$*.*

Demostración Sea f una función CSC en $\mathbb{X}$, del Teorema 2.1.4, f es continua en $\mathbb{X}$. Por el Teorema 3.2.4 f es uniformemente continua. □

Observación 3.2.3. *Del Teorema 3.2.4 y Corolario 3.2.1 tenemos que en un espacio métrico compacto los tres conceptos son equivalentes.*

Teorema 3.2.5. *[5, Ejercicio 7, pág. 199] Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico completo,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *un espacio métrico y* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función. Si* f *es continua, entonces* f *es CSC.*

Demostración Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ es un espacio completo existe $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Por el Teorema 2.1.3 f es secuencialmente continua en x_0, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, entonces $\{f(x_n)\}$ es convergente. Luego $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy. Por lo tanto f es CSC. □

Del Teorema 3.2.5 podemos obtener resultados importantes para las funciones CSC.

En [11, 19.27 Teorema, pág 154-1] tenemos otro teorema de extensión para las funciones CSC.

Teorema 3.2.6. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *espacios métricos completos. Sean* $S \subseteq \mathbb{X}$ *denso y* $f : S \to \mathbb{Y}$ *una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. f *admite una extención continua* $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*.*

2. f *admite una extención CSC* $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*.*

3. f *es CSC de* S *a* $\mathbb{Y}$*.*

Demostración Demostremos que 1) implica 2). Sean $S \subseteq \mathbb{X}$ denso y $f : S \to \mathbb{Y}$ una función. Supongamos que f admite extendida a una función continua $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Como $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ es completo y por el Teorema 3.2.5 $\widetilde{f}$ es CSC. Por lo tanto f admite una extención CSC.

Ahora veamos que 2) implica 3). Sea $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en S. Como $S \subseteq \overline{S}$, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\overline{S}$, entonces $\{\widetilde{f}(x_n)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{Y}$. Como $\{x_n\} \subseteq S$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = \widetilde{f}(x_n)$, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy. Por lo tanto f es CSC de S a $\mathbb{Y}$.

Finalamente demostremos que 3) implica 1). Sea $x \in \mathbb{X}$, como S es denso en $\mathbb{X}$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Aplicando el Teorema 1.2.1, $\{x_n\}$ es de Cauchy. Por hipótesis sabemos f es CSC y $\mathbb{Y}$ es un espacio métrico completo. Entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ existe. Aplicando el Teorema 2.1.10 f admite una extención continua $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.

$\square$

Lema 3.2.1. *Sean $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico completo, A un conjunto cerrado en $(\mathbb{X}, d)$ y $f : A \to \mathbb{X}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. f es continua en A.

2. f es CSC en A.

Demostración Por el Teorema 2.1.4, solo bastará demostrar que 1) implica 2). Sea $f : A \to \mathbb{X}$ continua. Como $\mathbb{X}$ es completo podemos aplicar el Teorema 1.4.1, entonces (A, d) es completo. Del Teorema 3.2.5 tenemos que f es CSC. $\square$

El siguiente resultado es un caso particular del Lema 3.2.1.

Corolario 3.2.2. *Sean A un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. f es continua en A.

2. f es CSC en A

DEMOSTRACIÓN La demostración es una consecuencia inmediata del Lema 3.2.1. Sin embargo en [1, Lema 1, pág 73] se encuentra otra forma de demostrarlo. $\square$

Teorema 3.2.7. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ un espacio totalmente acotado y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una función. Si f es CSC en $\mathbb{X}$, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{X}$.*

DEMOSTRACIÓN La demostración la haremos por contradicción. Supongamos que f es CSC, pero no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en $\mathbb{X}$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) = 0$ y $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Por el Teorema 3.1.3, para $\{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ una sucesión de $\mathbb{X}$, existe $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión de Cauchy en $\{x_n\}$. Del Lema 1.4.3, $\{y_{n_k}\}$ es una subsucesión de Cauchy de $\{y_n\}$.

Definamos la siguiente sucesión

$$b_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}}, & \text{si } i \text{ es par,} \\ y_{\frac{i+1}{2}}, & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Veamos que $\{b_i\}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\{x_{n_k}\}$ y $\{y_{n_k}\}$ son sucesiones de Cauchy, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para cada $l, m \in \mathbb{N}$ si $l, m \geq N_1$, entonces $d_{\mathbb{X}}(x_{n_l}, x_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $l, m \geq N_2$, entonces $d_{\mathbb{X}}(y_{n_l}, y_{n_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$, entonces existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ si $k \geq N_3$, entonces $d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, y_{n_k}) < \varepsilon$.

Tomemos $N = \max\{2N_1, 2N_2, 2N_3\}$.

I) Si $l, m \geq N$ y además son pares, entonces $d_{\mathbb{X}}(b_l, b_m) = d_{\mathbb{X}}(x_{\frac{l}{2}}, x_{\frac{m}{2}}) < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

II) si $l, m \geq N$ y además son impares, entonces $d_{\mathbb{X}}(b_l, b_m) = d_{\mathbb{X}}(y_{\frac{l+1}{2}}, y_{\frac{m+1}{2}}) <$

$\dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

II) si $l, m \geq N$ con l par y m impar, entonces $d_{\mathbb{X}}(b_l, b_m) = d_{\mathbb{X}}(x_{\frac{l}{2}}, y_{\frac{m+1}{2}}) \leq d_{\mathbb{X}}(x_{\frac{l}{2}}, x_{\frac{m+1}{2}}) + d_{\mathbb{X}}(x_{\frac{m+1}{2}}, y_{\frac{m+1}{2}}) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por lo tanto $\{b_i\}$ es de Cauchy. Entonces $\{f(b_i)\}$ es de Cauchy. En particular, para $\varepsilon_0 > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $l, m \in \mathbb{N}$ si $l, m \geq N_0$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f(b_l), f(b_m)) < \varepsilon_0$. Tomando a $l, m \geq N_0$ con l par y m impar, tenemos que $d_{\mathbb{Y}}(f(x_{\frac{l}{2}}), f(y_{\frac{m+1}{2}})) = d_{\mathbb{Y}}(f(b_l), f(b_m)) < \varepsilon_0$ que es una contradicción. $\square$

Del Teorema 3.2.7 podemos obtener resultados importantes para funciones CSC.

Antes de eso, veamos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. *Todo intervalo acotado de $\mathbb{R}$, es totalmente acotado.*

Demostración Sea I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, definamos a $r = \delta(I) > 0$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ extremos de I.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{r}{n_0} < \varepsilon$. Sean a, $\frac{r}{n_0} + a$, $\frac{2r}{n_0} + a, \ldots,$ $\frac{jr}{n_0} + a, \ldots, b \in \mathbb{R}$ con $j \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$. Definamos para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$, $B(\frac{jr}{n_0} + a, \varepsilon)$ bolas abiertas en $\mathbb{R}$. Veamos que $I \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_0-1} B(\frac{jr}{n_0} + a, \varepsilon)$.

Sea $z \in I$, por construcción tenemos que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$, $a < \frac{jr}{n_0} + a < \frac{(j+1)r}{n_0} + a < b$. Entonces existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$ tal que $\dfrac{j_0 r}{n_0} + a \leq z < \dfrac{(j_0+1)r}{n_0} + a$, entonces $0 \leq z - (\dfrac{j_0 r}{n_0} + a) < \dfrac{r}{n_0} < \varepsilon$. Por lo tanto $I \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_0-1} B(\frac{jr}{n_0} + a, \varepsilon)$. $\square$

Teorema 3.2.9. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. A es acotado si y sólo si A es totalmente acotado.*

Demostración Por el Teorema 1.3.3, bastará demostrar que si todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado y $\varepsilon > 0$. Aplicando el Teorema 1.0.4. Existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $0 < r$. tal que $A \subseteq B(x_0, \frac{r}{2})$. Dado que $B(x_0, \frac{r}{2})$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, entonces por el Teorema 3.2.8 $B(x_0, \frac{r}{2})$ es totalmente acotado. Finalmente aplicando el Teorema 1.3.1 A es totalmente acotado. □

Del Teorema 3.2.9 se puede sintetizar la demostrarción del siguiente lema, que se encuentra en [1, Teorema 2, pág 74].

Lema 3.2.2. *Sean A un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
1. f es uniformemente continua en A.
2 f es CSC en A

Demostración Por el **Teorema 2.2.2**, sólo hay que probar 2) implica 1). Del Teorema 3.2.9 A es totalmente acotado. Sea f : $A \to \mathbb{R}$ una función CSC, aplicando el Teorema 3.2.7, f es uniformemente continua. □

Ahora nos preguntamos ¿ es posible que el Lema 3.2.2 se pueda generalizar a un espacio métrico cualquiera? La respuesta es que no.

Definición 3.2.6. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Se dice que $\mathbb{X}$ es un BTB, si todo conjunto acotado es totalmente acotado.*

Definición 3.2.7. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Se dice que $\mathbb{X}$ tiene la propiedad de Heine-Borel, si todo conjunto acotado y cerrado es compacto.*

Ejemplo 3.2.3. *Los espacios métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de Heine-Borel y son BTB.*

En ambos espacios se tendría de manera inmediata una generalización del Lema 3.2.2. Pero esto será visto con más detalle en otra ocasión, como propuestas a futuro.

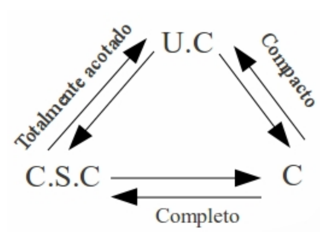
Teorema 3.2.10. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ *un espacio métrico completo. Sea* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio totalmente acotado y* $f: A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *una función CSC en* A*, entonces existe una única función* $g: \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*, CSC en* $\overline{A}$ *tal que para cada* $x \in A: \ g(x) = f(x)$

Demostración De los Teorema 1.3.1 y 3.2.7, f es unformemente continua, aplicando el Teorema 2.2.7, existe una única función $g: \overline{A} \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, uniformemente continua en $\overline{A}$ tal que para cada $x \in A: \ g(x) = f(x)$. Por el Teorema 2.2.2, g es CSC. □

Teorema 3.2.11. *Sean* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *un espacio métrico totalmente acotado,* $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$*.* $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es CSC, si y sólo si,* $d_{\mathbb{Y}}(f(S), f(T)) = 0$ *cuando* $S, T \subset \mathbb{X}$ *y* $d_{\mathbb{X}}(S, T) = 0$.

Demostración Del Teorema 3.2.7 f es uniformemente continua, aplicando el Teorema 2.2.6 se obtiene el resultado. □

Con los Teoremas 2.2.2, 2.1.4, 3.2.4, 3.2.5 y 3.2.7 obtenemos el siguiente diagrama.



Observando el diagrama, se nos viene a la mente la siguiente pregunta ¿es posible que en alguna de las equivalencias vistas en el esquema anterior podamos implicar alguna de las condiciones establecidas para el dominio? En general, la respuesta es que no.

Contraejemplo 3.2.2. *Sea* $\mathbb{X}$ *un conjunto infinito con la métrica discreta. Observemos que* $(\mathbb{X}, d_d)$ *no es compacto ni totalmente acotado. Toda función* *continua es uniformemente continua, además es CSC. Por el Teorema 2.2.2 y 2.1.4 se concluye también que f es CSC.*

Observación 3.2.4. *Como consecuencia inmediata se obtiene la siguiente afirmación, es falso que: sea $(\mathbb{X}, d)$ espacio métrico tal que toda funcion CSC de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ es uniformemente Continua. Entonces $\mathbb{X}$ es totalmente acotado.*

Definición 3.2.8. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Diremos que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico disconexo (no conexo), si existen U y V abiertos en $\mathbb{X}$ no vacíos, tales que*

$$\mathbb{X} = U \cup V \ \ y \ U \cap V = \varnothing.$$

Diremos que el espacio es conexo, si no es disconexo.

Teorema 3.2.12. *[10, Teorema 3.4.9, pág. 161] Sea f una función continua de un espacio métrico conexo $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$, y a, b puntos de $f(\mathbb{X})$ tales que $a < b$. Entonces para cada $y \in (a, b)$ existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración La demostración la haremos por contradicción. Sean a, b puntos de $f(\mathbb{X})$ tales que $a < b$. Supongamos que existe $y_0 \in (a, b)$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$, $f(x) \neq y_0$, entonces para cada $x \in \mathbb{X}$, $f(x) < y_0$ o $f(x) > y_0$. Definamos $A = \{f(x) \in \ f(\mathbb{X}) \mid f(x) < y_0\}$ y a $B = \{f(x) \in \ f(\mathbb{X}) \mid f(x) > y_0\}$. Veamos que A y B son abiertos en $f(\mathbb{X})$. Sea $y \in A$, entonces existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $f(x) = y$ y $f(x) < y_0$. Tomemos a $r = y_0 - y > 0$ y contruyamos $B(y, r)$ una bola abierta en $f(\mathbb{X})$ con la metrica inducida por $|\cdot|$.
Demostremos que $B(y, r) \subseteq A$. Sea $z \in B(y, r)$, entonces $z - y \leq |z - y| < r = y_0 - y$, así $z \leq y_0$. Entonces $B(y, r) \subseteq A$, por lo tanto A es un abierto en $f(\mathbb{X})$. De manera análoga se demuestra que B es abierto en $f(\mathbb{X})$.
Como f es una función continua de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en $\mathbb{X}$.
Es claro que $\mathbb{X} \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Veamos entonces $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

Supongamos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$, entonces existe $x_0 \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, entonces $f(x_0) < y_0$ y $f(x_0) > y_0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$, entonces $\mathbb{X}$ es disconexo. Esta contradicción demuestra el Teorema. $\square$

Teorema 3.2.13. *[10, Ejercicio 6, pág. 150] Si* $(\mathbb{X}, d)$ *es un espacio métrico que no es totalmente acotado, entonces existe una sucesión* $\{x_n\}$ *en* $\mathbb{X}$ *y un número positivo* α*, tal que* $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ *con* $n \neq m$*.*

Demostración Supongamos que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico que no es totalmente acotado. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que para $x_1 \in \mathbb{X}$ existe $x_2 \in \mathbb{X}$ tal que $d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \geq \alpha$. Para $\{x_1, x_2\}$ existe $x_3 \in \mathbb{X}$ tal que $d_{\mathbb{X}}(x_1, x_3) \geq \alpha$ *y* $d_{\mathbb{X}}(x_2, x_3) \geq \alpha$. Por inducción se obtiene que para cada $n \in \mathbb{N}$
$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ existe $x_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$ $d_{\mathbb{X}}(x_n, x_m) \geq \alpha$.
Por lo tanto hemos construido una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$ tal que $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ con $n \neq m$. $\square$

Teorema 3.2.14. *[3, Teorema 2.13.7, pág. 199] (Lema de Urysohn para Espacios Métricos) Sea* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico. Si* A, B *son conjuntos cerrados y disjuntos de* $\mathbb{X}$*, entonces existe una función* $f\colon \mathbb{X} \to [0, 1]$*, continua en* $\mathbb{X}$ *tal que,*

$$\text{para cada } x \in A,\ f(x) = 0;$$
$$\text{para cada } x \in B,\ f(x) = 1.$$

Nota. La demostración del **Lema de Urysohn para espacios Topológicos** es muy difícil, de hecho [8] la menciona como una genealidad.

Teorema 3.2.15. *[10, Ejercicio 8, pág. 150] Sean* $(\mathbb{X}, d)$ *es un espacio métrico que no es totalmente acotado y elegimos* $\{x_n\}$ *y* α *como el Teorema 3.2.13. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *construyamos una función uniformemente continua* $\phi_n\colon \mathbb{X} \to [0, 1]$

tal que

i)$\phi_n(x_n) = 1$

ii) $\phi_n(x) = 0$ *si* $d_{\mathbb{X}}(x, x_n) \geq \frac{\alpha}{3}$.

Dada una sucesión $\{c_n\}$ *de números reales, entonces* $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ *es una función continua.*

Demostración Tomemos $\{x_n\}$ y α como el Teorema 3.2.13. Por el **Lema de Urysohn**, construyamos para cada $n \in \mathbb{N}$ ϕ_n: $\mathbb{X} \to [0, 1]$ tal que

i)$\phi_n(x_n) = 1$

ii) $\phi_n(x) = 0$ si $d_{\mathbb{X}}(x, x_n) \geq \dfrac{\alpha}{3}$.

Que son funciones continuas. Sea $\{c_n\}$ de numeros reales, definamos $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$, veamos que f es continua.

Sean $z \in \mathbb{X}$ y $\varepsilon > 0$.

Observación 3.2.5. *Notemos que para cualquier* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n \neq m$, $B[x_n, \frac{\alpha}{3}] \cap B[x_m, \frac{\alpha}{3}] = \varnothing$. *Supóngase lo contrario y ocupe la desigualdad triangular.*

Caso I. Supongamos que existe un único $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in B(x_{n_0}, \frac{\alpha}{3})$, como $B(x_{n_0}, \frac{\alpha}{3})$ es abierto en $\mathbb{X}$, existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq B(x_{n_0}, \frac{\alpha}{3})$. Sea $y \in B(z, r)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq n_0$, $y \notin B(x_n, \frac{\alpha}{3})$. De lo contrario, existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n_0$ tal que $y \in B(x_m, \frac{\alpha}{3})$, entonces $d(x_{n_0}, x_m) \leq d(x_{n_0}, y) + d(y, x_m) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} < \alpha$, esto es una contradicción al Teorema 3.2.13. Entonces $f(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(y) = c_{n_0}\phi_{n_0}(y)$.

Por otro lado $c_{n_0}\phi_{n_0}$ es una función continua, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $y \in \mathbb{X}$,

$$\text{si } d(z, y) < \delta_1, \text{ entonces } |c_{n_0}\phi_{n_0}(z) - c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

Tomemos $\delta = \min\{r, \delta_1\} > 0$ tenemos que

$$|f(z) - f(y)| = |c_{n_0}\phi_{n_0}(z) - c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua.

Caso II. Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $z \notin B(x_n, \frac{\alpha}{3})$. Esto nos lleva dos subcasos:

1) Existe un único $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_0}, z) = \dfrac{\alpha}{3}$. Por la Observación 3.2.5, existe $r > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n_0$, $B(x_m, \frac{\alpha}{3}) \cap B(z, r) = \varnothing$. Sea $y \in B(z, r)$, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n_0$, $d(y, x_m) \geq \frac{\alpha}{3}$. Entonces $f(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(y) = c_{n_0}\phi_{n_0}(y)$.

Dado que $c_{n_0}\phi_{n_0}$ es una función continua. Existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $y \in \mathbb{X}$

$$\text{si } d(z, y) < \delta_2, \text{ entonces } |c_{n_0}\phi_{n_0}(z) - c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| = |c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

Tomemos $\delta = \min\{r, \delta_1\} > 0$ tenemos que

$$|f(z) - f(y)| = |c_{n_0}\phi_{n_0}(z) - c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| = |c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

2) Por otro lado si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $d(x_{n_0}, z) > \dfrac{\alpha}{3}$. Por la Observación 3.2.5, existe $r > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, $B(x_m, \frac{\alpha}{3}) \cap B(z, r) = \varnothing$. Observemos que para cualquier $y \in B(z, r)$, $d(x_m, y) \geq \dfrac{\alpha}{3}$ para $m \in \mathbb{N}$. Con lo que $f(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(y) = 0$. Si tomamos $\frac{\alpha}{3} = \delta$ tenemos que para cada $y \in \mathbb{X}$ si $d(z, y) < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(y)| = |c_{n_0}\phi_{n_0}(z) - c_{n_0}\phi_{n_0}(y)| = 0 < \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua. □

Ahora bien, nos preguntamos ¿qué condiciones se necesitan para que el recíproco del Teorema 3.2.4 sea verdadero? Veamos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.16. *[10, Teorema 3.4.11, pág. 161] Sea* $(\mathbb{X}, d)$ *un espacio métrico conexo tal que toda función continua de* $\mathbb{X}$ *a* $\mathbb{R}$ *es uniformemente continua. Entonces* $\mathbb{X}$ *es compacto.*

Demostración La demostración se hará por contradicción. Supongamos que $\mathbb{X}$ no es compacto, por el Teorema 1.5.2, $\mathbb{X}$ no es totalmente acotado o no es completo.

Supongamos que $\mathbb{X}$ no es totalmente acotado. Por el Teoerma 3.2.13, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$ y un número positivo α tal que $d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) \geq \alpha$ con $n \neq m$. Usando el Teorema 3.2.15, podemos construir, para cada k, una función uniformemente continua ϕ_n: $\mathbb{X} \to [0,1]$ tal que $\phi_k(x_k) = 1$, $\phi_k(x) = 0$ si $d_{\mathbb{X}}(x, x_k) \geq \frac{\alpha}{3}$ y $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n$ es una función continua bien definida en $\mathbb{X}$; para ser precisos, propongamos

$$\phi_k(x)=\max\{0, 1 - 3\alpha^{-1}d_{\mathbb{X}}(x, x_k)\}.$$

Nuestra hipótesis asegura que f es uniformemente continua. Ahora, $\mathbb{X}$ es conexo, la aplicación $x \mapsto d_{\mathbb{X}}(x, x_n)$ es continua en $\mathbb{X}$, $d_{\mathbb{X}}(x_n, x_n) = 0$, y $d_{\mathbb{X}}(x_{n+1}, x_n) \geq \alpha$. Del Teorema 3.2.12, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $d_{\mathbb{X}}(x, x_n) = \frac{\alpha}{3n}$. Entonces

$$f(x_n) - f(x) = n - (n-1) = 1.$$

Donde $n > 1$ es arbitrario. Sea $\varepsilon = 1$ y $\delta = \frac{\alpha}{3}$. Existen $x_n, x \in \mathbb{X}$ tales que $d_{\mathbb{X}}(x, x_n) = \frac{\alpha}{3n} < \delta$, pero $|f(x_n) - f(x)| \geq 1$, entonces f no es uniformemente continua. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{X}$ es totalmente acotado.

Ahora supongamos que $\mathbb{X}$ no es completo; existe una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en $\mathbb{X}$ no convergente a un punto en $\mathbb{X}$. Sin perdida de generalidad supongamos que $\mathbb{X}$ es subconjunto denso en su completación $(\widehat{\mathbb{X}}, d_{\mathbb{X}})$. También $\{x_n\}$ converge a un punto $x_\infty \in \widehat{\mathbb{X}} \setminus \mathbb{X}$. La función $x \mapsto d_{\mathbb{X}}(x, x_n)$ es (uniformemente) continua y tiene valores positivos sobre $\mathbb{X}$,

$$f(x) = \frac{1}{d_{\mathbb{X}}(x, x_\infty)}$$

define una función continua f: $\mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$. Por hipótesis, f es uniformemente continua en $\mathbb{X}$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \mathbb{X}$ y $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < 1$. Eligiendo N tal que $d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) < \delta$ para toda $n \geq N$, donde $d_{\mathbb{X}}(x_N, x_\infty) > 0$, existe números $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $m > N$ y

$$d_{\mathbb{X}}(x_m, x_\infty) < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} < d_{\mathbb{X}}(x_N, x_\infty).$$

Entonces $d_{\mathbb{X}}(x_m, x_N) < \delta$ pero

$$f(x_m) - f(x_N) > (k+1) - k = 1,$$

Contradiciendo la elección de la δ. Por lo tanto $\mathbb{X}$ es completo. □

Corolario 3.2.3. *Sea $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ espacio métrico. Si toda función continua de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces $\mathbb{X}$ es es completo.*

DEMOSTRACIÓN Es consecuencia inmedita del Teorema 3.2.16 □

Definición 3.2.9. *Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos. Se define:*

1. $C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \mid f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es una función continua y acotada$\}$.

2. $UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \mid f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es una función uniformemente continua y acotada$\}$.

3. $CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \mid f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es una función CSC y acotada$\}$.

Observación 3.2.6. *$UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Definición 3.2.10. *Definimos $d_\infty : C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \to \mathbb{R}$ como*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_{\mathbb{Y}}(f(x), g(x)) : x \in \mathbb{X}\}.$$

Esta métrica se conoce como la métrica uniforme en $C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Teorema 3.2.17. *[3, Teorema 3.2.2, pág. 229] Sean $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ espacios métricos. Si $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ es un espacio métrico completo, entonces $C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es completo.*

Teorema 3.2.18. *Sea $\{f_n\} \subseteq UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Si $\{f_n\}$ converge a f en $(C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$, entonces $f \in UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Demostración Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f, f_N) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Como $f_N \in UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{X}$ si $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f_N(x), f_N(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Por lo tanto si $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) &\leq d_{\mathbb{Y}}(f(x), f_N(x)) + d_{\mathbb{Y}}(f_N(x), f_N(y)) + d_{\mathbb{Y}}(f_N(y), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.2.19. *Sea $\{f_n\} \subseteq CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Si $\{f_n\}$ converge a f en $(C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$, entonces $f \in CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Demostración Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f, f_N) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Como $f_N \in CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ si $n, m \geq N_0$, entonces $d_{\mathbb{Y}}(f_N(x_n), f_N(x_m)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Por lo tanto si $n, m \geq N_0$, entonces

$$\begin{aligned} &d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(x_m)) \leq \\ &d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f_N(x_n)) + d_{\mathbb{Y}}(f_N(x_n), f_N(x_m)) + d_{\mathbb{Y}}(f_N(x_m), f(x_m)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Observación 3.2.7. *Los Teoremas 3.2.18 y 3.2.19, muestran que $UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ son cerrados en $C_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Ahora si $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ es un espacio métrico completo, aplicando los Teoremas 3.2.17 y 1.4.1, tendríamos que $UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ también son espacios métricos completos.*

Definición 3.2.11. *Sean $\mathbb{X}$ un espacio vectorial distinto del $\{0\}$ sobre un campo $\mathcal{K}$ (los números reales o complejos). Diremos que $\mathbb{X}$ es un álgebra, si para cada $x, y, z \in \mathbb{X}$ y $\alpha \in \mathcal{K}$, se define un producto con las siguientes propiedades:*

1. $xy \in \mathbb{X}$.

2. $(xy)z \;=\; x(yz)$.

3. $x(y+z) \;=\; xy + xz$.

4. $(x+y)z \;=\; xz + yz$.

5. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Observación 3.2.8. *Tomando* $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$=$\{f \mid f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es una función continua*$\}$ *y a* $CSC(\mathbb{X}, \mathbb{R})$=$\{f \mid f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es una función* $CSC\}$. *Con los Teoremas 2.1.8 y 3.1.2* $C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ *y* $CSC(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ *son una álgebra. Algo que no sucede con* $UC(\mathbb{X}, \mathbb{R})$=$\{f \mid f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es una función* $uniformemente\ continua\}$, *sin embargo,* $UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ *si lo es, por el Teorema 2.2.4.*
De la Observación 3.2.7, $C_b(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ *y* $CSC_b(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ *son espacios de Banach.*

Conclusiones

El análisis crítico de los conocimientos y de las demostraciones, es una fuente que propicia la creación de nuevos resultados, que en su mayoría se encuentran "ocultos".

Otro objetivo, además de la divulgación del concepto de Continuidad en el Sentido de Cauchy, es incitar el análisis profundo de éste, que permita un mejor desarrollo del concepto CSC en los espacios métricos.

La comparación de cualidades que poseen las funciones continuas y uniformemente continuas, desencadena una búsqueda de propiedades semejantes para funciones CSC. En el trabajo, se puede percibir que este tipo de funciones no conservan todas las propiedades de las funciones continuas y uniformemente continuas.

La poca información obtenida sobre las funciones CSC, permitió que las la demostraciones de algunos resultados se presente de manera innovadora, así como, el rumbo del trabajo, para el estudio de éste tipo de funciones. Un trabajo a futuro es mostrar más avances sobre este tema que inciten un mayor interés a este proyecto.

Bibliografía

[1] Cadenas Aldena Reinaldo Antonio, “Continuidad y Teorema de Heine-Cantor”, Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1, 2007, pp 71-76.

[2] Carothers N. L, “Real Analysis,Cambridge University Press, United States of America, 2000.

[3] Fraguela Collar Andrés. “Análisis Matemático Avanzado”, Textos Científicos, Puebla, 2004.

[4] Giles J. R., “Introduction to the Analysis of Metric Spaces“, Cambridge University Press, New York, 1987.

[5] Iribarren T. Ignacio L., “Topología de espacios Métricos”, Limusa, Caracas, 1987.

[6] Kreyszig Erwin, “Introductory Functional Analysis with Applications”, John Wiley y Sons. Inc., New York, 1978.

[7] Lowen-Colebunders Eva, “Function Classes of Cauchy Continuos Maps”, Marcel Dekker, New York, 1989.

[8] Munkres James R., “Topology”, Prentice Hall, United Stated Of America, 1975.

[9] Raggi Cárdenas Ma. Guadalupe, Escamilla Reyna Juan Alberto y Mendoza Torres Francisco Javier, “Introducción a la teoría de espacios métricos” , Textos Científicos, Puebla, 2010.

[10] S. Bridges Douglas, “Foundations of Real and Abstract Analysis”, Springer, New York,1998.

[11] Schechter Eric, “Handbook of Analysis and its Foundations”, Academic Press, United Stated Of America, 1997

[12] Snipes, R., “Functions that Preserve Cauchy Sequences”, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XXV (1977), 409-422.

Índice Alfabético