BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

IMÁGENES CONTINUAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

IDALIA GUADALUPE BAUTISTA CALLEJAS

DIRECTORES DE TESIS

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
DR. JAVIER SÁNCHEZ MARTÍNEZ

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE DE 2017

Dedicado

A mis Padres:
Raymundo Bautista Chavarria
Gregoria Callejas Pérez

A mis hermanos:
Karina Zuzely Bautista Callejas
Roberto de Jesús Bautista Callejas

Agradecimientos

A menudo uno da por hecho las mismas cosas que más merecen gratitud, es por eso que en este espacio quiero agradecer a todos aquellos que me acompañaron en este largo camino.

Primeramente, quiero agradecer a Dios por darme la sabiduría y el entendimiento necesarios para poder llegar hasta este momento.

A ti mamá, porque cuando las cosas se ponían difíciles siempre tenías las palabras correctas que me hacían recuperar el rumbo, por todo lo que hiciste y que serías capaz de hacer si te lo pidiera. Sin ti no sería quien soy actualmente. A ti papá, porque sé que has hecho todo lo que está a tu alcance para darme siempre lo mejor, por ser un gran ejemplo a seguir y por sentirte orgulloso de todos mis logros. Aunque hoy soy mujer, siempre seré tu niña.

Agradezco a mis hermanos, que siempre serán una parte muy importante en mi vida, gracias por confiar en mi, por su apoyo incondicional en todo momento, por compartir conmigo grandes momentos de diversión y de tristeza también, no duden que como ahora están para mi, yo siempre estaré para ustedes.

A mis directores de tesis el Dr. Raúl Escobedo Conde y el Dr. Javier Sánchez Martínez, por confiar en mi y en mi capacidad para desarrollar este trabajo, por toda su paciencia y sobre todo por transmitirme muchos de sus conocimientos.

A mis sinodales la Dra. María de Jesús López Toriz, el Dr. Agustín Contreras Carreto y el M.C. Manuel Ibarra Contreras, por tomarse el tiempo de leer mi tesis y por sus aportes a ésta.

A mis grandes amigos, Aileen, Andrés y Miguel, por hacer más llevadero el tiempo en la carrera, por estar en los momentos en que más los necesité y sobre todo por compartir hermosas experiencias. En especial a mi compañero y amigo Antonio de Jesús por su valiosa ayuda en la realización de esta tesis.

Introducción

El trabajo de esta tesis está basado principalmente en la traducción al español de algunos capítulos del texto en inglés titulado *Mappings* [4], escrito por el Dr. Janusz Jerzy Charatonik, mientras trabajaba en el Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Nuestro trabajo en esta tesis es estudiar algunas clases de funciones entre espacios métricos compactos y, en algunos casos, entre continuos (que son espacios, que además de ser métricos compactos, son conexos). Nos ocuparemos en las funciones monótonas, abiertas, confluentes y débilmente confluentes.

Este trabajo se divide en siete capítulos, en el primero de éstos se presentan los conceptos y resultados básicos de la topología general y de la teoría de los continuos.

En el Capítulo 2 estudiamos funciones continuas, homeomorfismos y propiedades que se preservan bajo ellos, también demostramos un resultado muy importante de la topología general, el Teorema de metrización de Urysohn. Por último damos una definición del conjunto de Cantor, probamos algunas de sus propiedades y demostramos que todo espacio métrico compacto es imagen continua de este conjunto.

El Capítulo 3 está dedicado a los espacios localmente conexos, damos la definición de conexidad en pequeño y estudiamos cómo están relacionados estos conceptos. Veremos bajo qué condiciones la imagen continua de un espacio localmente conexo es localmente conexo.

Iniciamos el Capítulo 4 con la definición de función monótona y demostramos algunas equivalencias de este concepto. Enunciamos y demostramos el teorema de reducción de Brouwer, el cual nos ayuda a demostrar resultados sobre continuos irreducibles respecto a alguna propiedad. También en este capítulo demostramos que la imagen monótona de una curva cerrada simple es una curva cerrada simple. Caracterizamos a los continuos hereditariamente unicoherentes por medio de funciones hereditariamente monótonas. Damos los conceptos de espacios totalmente disconexos y 0-dimensionales, demostrando que en los espacios métricos compactos estos conceptos son equivalentes.

En el Capítulo 5 demostramos que toda imagen abierta del intervalo cerrado $[0, 1]$ es un arco. Definimos el concepto de funciones casi-interiores, OM y MO y la relación que existe entre ellas. Veremos que la clase de las funciones MO está contenida en la clase de las funciones OM y que esta contención es propia.

En el Capítulo 6 caracterizamos a los continuos hereditaramente indescomponibles vía funciones confluentes.

El Capítulo 7 lo dedicamos a demostrar que toda función continua de un continuo sobre un arco es débilmente confluente, y generalizamos este hecho hacia todos los continuos tipo arco.

Debemos notar la importancia del estudio de algunas clases de funciones entre continuos, una referencia en este tema es la tesis doctoral de T. Maćkowiak, *Funciones continuas entre continuos* [10]. Nadler nos muestra en el Capítulo XIII de su libro [11] un excelente estudio de varias clases de funciones; el Capítulo 5 del libro de Topología y sistemas dinámicos III, atiende también este tema de *Funciones especiales entre continuos* [2], de igual manera en el Capítuo 4 de Topología y sus aplicaciones 4 [1] se atiende este tema. En el Capítuo 8, *El intervalo cerrado, la circunferencia y sus funciones continuas*, del libro Topología y sistemas dinámicos IV [7] se hace un extenso estudio sobre continuos que son homeomorfos a sus imágenes bajo ciertos tipos de funciones, más recientemente el Capítulo 1 del libro Topología y sus aplicaciones 5 [3]también nos muestra un estudio de funciones especiales entre continuos.

Idalia Guadalupe Bautista Callejas
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Diciembre de 2017

Índice general

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos

En este capítulo exponemos algunas nociones y resultados básicos de la topología general, los cuales utilizaremos para el desarrollo de esta tesis.

En todo el escrito utilizaremos la siguiente notación: $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales, $\mathbb{Q}$ al conjunto de números racionales, $\mathbb{Z}$ al conjunto de todos los números enteros, $\mathbb{N}$ al conjunto de enteros positivos (numeros naturales), $\mathbb{C}$ al conjunto de numeros complejos e $\mathbb{I}$ al conjunto de números reales en el intervalo unitario $[0,1]$. Todos ellos considerados con sus respectivas topologías generadas por su métrica Euclideana.
Dado un conjunto A, $|A|$ denotará a la cardinalidad de A, en particular $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

El espacio topológico $\mathbb{I}^{\aleph_0}$, dotado con la topología producto, es llamado **Cubo de Hilbert**.

1.1 Definición. Una **topología** sobre un conjunto no vacío, X es una colección, τ, de subconjuntos de X, llamados **abiertos**, que satisface las siguientes tres condiciones:

1. La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ;
2. La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ;
3. $\{\emptyset, X\} \subset \tau$.

El par (X, τ) es llamado **espacio topológico**.

En ocasiones y para simplificar la escritura escribiremos simplemente X, para denotar a un espacio topológico, en caso de que esté entendida la topología con la que se considera.

Por ejemplo, para un conjunto no vacío X, la **topología indiscreta** para X, τ_i es aquella definida por $\tau_i = \{\emptyset, X\}$. Observese que cualquier topología τ para el conjunto X, satisface que $\tau_i \subset \tau$. De la misma manera, consideramos la **topología discreta**, τ_d, para X, como la topología dada por el conjunto potencia de X, es decir, la topología en que cada subconjunto de X es abierto. Es fácil notar que:

1. Si τ es cualquier topología para X, entonces $\tau \subset \tau_d$.

2. Si τ es una topología para X, se tiene que $\tau = \tau_d$ si y sólo si para cada $x \in X$, se cumple que $\{x\} \in \tau$.

1.2 Definición. Una **base** para X se define como una familia $\mathfrak{B}$ de conjuntos abiertos en X tal que cada conjunto abierto no vacío de X es la unión de elementos en $\mathfrak{B}$. En otras palabras, para cada $U \in \tau$ con $U \neq \emptyset$ y para cada $p \in U$, existe $V \in \mathfrak{B}$ tal que $p \in V \subset U$.

1.3 Definición. Dado un espacio topológico (X, τ) diremos que un subconjunto F de X es **cerrado** en X si $X \setminus F$ es abierto en X.

1.4 Teorema. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces:

i) $X, \emptyset$ son cerrados en X.

ii) Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de cerrados en X, entonces $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado en X.

iii) Si $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ es una colección finita de cerrados en X, entonces $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. i) Notemos que $X \setminus X = \emptyset$ que es abierto en X, por lo que X es un conjunto cerrado en X.
De igual manera $X \setminus \emptyset = X$ que también es un conjunto abierto en X, por lo que $\emptyset$ es un conjunto cerrado en X.

ii) Supongamos que $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de cerrados en X.
Por demostrar que $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado en X. Basta demostrar que $X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ es un conjunto abierto en X.
Note que $X\setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} X \setminus F_\alpha$, como F_α es un conjunto cerrado en X para cada $\alpha \in I$, entonces $X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto en X para cada $\alpha \in I$. Así $\bigcup_{\alpha\in I} X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto en X.
Por lo tanto $X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ es un conjunto abierto en X.

iii) Supongamos que $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ es una colección finita de cerrados en X. Por demostrar que $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ es un conjunto cerrado en X.
Basta demostrar que $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ es un conjunto abierto en X.
Tenemos que $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcap_{k=1}^{n} X \setminus F_k$, como F_k es un conjunto cerrado en X para $k \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $X \setminus F_k$ es un conjunto abierto en X para $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Así $\bigcap_{k=1}^{n} X \setminus F_k$ es un conjunto abierto en X.
Por lo tanto $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ es un conjunto abierto en X.

□

1.5 Definición. Una **métrica** para un conjunto no vacío X es una función $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes condiciones:
(M1) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
(M0) $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$.

La pareja (X, ρ) es llamada **espacio métrico**.

Sean (X, ρ) un espacio métrico y $x, y, z \in X$. Si sustituimos a z por

y en la ecuación **(M0)** obtenemos que
$\rho(x,y) \leq \rho(y,x) + \rho(y,y)$, así que por la condición **(M1)**,

(a) $\rho(x,y) \leq \rho(y,x)$,

de la misma manera, si se intercambia x con y, también se obtiene

(b) $\rho(y,x) \leq \rho(x,y)$,

así, por (a) y (b) tenemos que
(M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (Propiedad de simetría).
Usando la propiedad de simetría en **(M0)**, se obtiene que
(M3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (Desigualdad del triángulo).
De la desigualdad del triángulo también se deduce que
(M4) $\rho(x,y) \geq 0$.

Usualmente las ecuaciones **(M2)**, **(M3)** y **(M4)**, se suelen poner como condiciones en la definición de métrica.

1.6 Definición. Dado un espacio métrico (X,ρ), definimos τ_ρ, la **topología generada por** ρ como sigue. Para cada punto $p \in X$ y cada número real $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in X : \rho(p,x) < \varepsilon\}$$

llamado la **bola en** X **con centro** p **y radio** ε.

De esta manera $A \in \tau_\rho$ si y sólo si para todo $p \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset A$.

Con el único fin de simplificar la escritura escribiremos únicamente X para refererirnos a un espacio métrico, entendiendo que en X está definida alguna métrica.

1.7 Definición. Dados un espacio topológico (X,τ) y $A \subset X$, definimos la **cerradura** de A en X como el conjunto

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : X \setminus F \in \tau \text{ y } A \subset F\}.$$

Nótese que, si L es cerrado en X y $A \subset L$, entonces $\overline{A} \subset L$, ya que al ser L un cerrado en X que contiene a A se cumple que $\overline{A} \subset L$.
La función que a cada subconjunto A de X le asigna el conjunto cerrado $\overline{A}$, cumple las siguientes propiedades, llamadas *axiomas de Kuratowski* o *axiomas de cerradura*:

1.8 Teorema. Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$, entonces

a) $A \subset \overline{A}$;

b) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$;

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

d) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

e) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Demostración. a) Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la familia de subconjuntos de X tales que $X \setminus F_\alpha \in \tau$ y $A \subset F_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces $A \subset \bigcap\{F_\alpha\}$, ya que si $a \in A$ y $A \subset F_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces $a \in F_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $a \in \bigcap F_\alpha$.
Por lo que $A \subset \bigcap\{F_\alpha\} = \overline{A}$

b) Supongamos que $A \subset B$, por a) tenemos que $B \subset \overline{B}$, entonces $A \subset \overline{B}$ y $\overline{B}$ es cerrado, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

c) Tenemos que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Por otro lado, como $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son cerrados en X entonces $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado, además $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ entonces $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
Así $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) Por a), $\emptyset \subset \overline{\emptyset}$. Además $\emptyset$ es cerrado en X y $\emptyset \subset \emptyset$ por lo que $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$.
Así $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

e) Por a), $\overline{A} \subset \overline{(\overline{A})}$; por otro lado $\overline{A}$ es cerrado en X y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $\overline{(\overline{A})} \subset \overline{A}$.
Así $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. □

1.9 Corolario. Sea X un espacio topológico y $F \subset X$, entonces:

1) F es cerrado si y sólo si $F = \overline{F}$.

2) F es abierto si y sólo si $X \setminus F = \overline{X \setminus F}$.

Demostración.

1) $\Rightarrow]$ Supongamos que F es cerrado en X, por el Teorema 1.8 $F \subset \overline{F}$, además por hipótesis F es cerrado en X y $F \subset F$, por lo que $\overline{F} \subset F$.
Así, $F = \overline{F}$.
$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que $F = \overline{F}$, sabemos que $\overline{F}$ es cerrado pues es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados, pero $F = \overline{F}$. Así, F es cerrado.

2) $\Rightarrow]$ Supongamos que F es abierto entonces $X \setminus F$ es cerrado, entonces, por 1) $X \setminus F = \overline{X \setminus F}$.
$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que $X \setminus F = \overline{X \setminus F}$ entonces, por 1) $X \setminus F$ es cerrado, luego $X \setminus (X \setminus F)$ es abierto. Por lo que F es abierto.

$\square$

Similarmente a la cerradura, uno puede definir el **interior** de un conjunto $A \subset X$ como

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{G \subset X : G \in \tau \text{ y } G \subset A\},$$

es decir, el interior de A es el abierto más grande de X contenido en A.

1.10 Lema. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$, entonces A es abierto en X si y sólo si $\operatorname{int}(A) = A$.

Demostración.
$\Rightarrow]$ Supongamos que A es abierto en X, notemos que $A \subset A$, se tiene que $A \subset \bigcup\{G \subset X : G \in \tau \text{ y } G \subset A\}$, por lo que $A \subset \operatorname{int}(A)$.
Por otro lado sea $p \in \operatorname{int}(A)$ entonces existe $G \subset X$ tal que $G \in \tau$ y $p \in G \subset A$, de esta manera, $p \in A$. Así, $\operatorname{int}(A) \subset A$.
$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que $\operatorname{int}(A) = A$, notemos que $\operatorname{int}(A)$ es un conjunto abierto en X pues es la unión arbitraria de conjuntos abiertos en X. Así, $\operatorname{int}(A)$ es abierto en X, pero $\operatorname{int}(A) = A$. Por lo que A es abierto en X. $\square$

1.11 Lema. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\operatorname{int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Demostración. Se tiene que $X \setminus \overline{X \setminus A} = X \setminus \bigcap\{F \subset X : X \setminus F \in \tau$ y $A \subset F\} = \bigcup X \setminus \{F \subset X : X \setminus F \in \tau$ y $A \subset F\} = \bigcup\{F \subset X : F \in \tau$ y $F \subset A\} = \mathrm{int}(A)$. □

El concepto de interior puede generalizarse al siguiente concepto. Dado un punto $x \in X$, una **vecindad de** $x \in X$ la entenderemos como cualquier subconjunto $U \subset X$ para el cual existe $V \in \tau$, tal que $x \in V \subset U$.
Note que si $U \subset X$, U es una vecindad de x en X si y sólo si $x \in \mathrm{int}(U)$, así que cualquier conjunto abierto y no vacío en X es una vecindad de cada uno de sus puntos.

Definiremos otros conceptos relacionados con conjuntos abiertos y conjuntos cerrados de un espacio topológico (X, τ).

1.12 Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, se define la **frontera** de A como el conjunto

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

De la definición se puede observar que $x \in Fr(A)$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset \neq (X \setminus A) \cap U$.

Nuestra experiencia con conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, pueden llevarnos a cometer un error cuando consideramos espacios más generales. Por ejemplo, en los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con su topología usual, es fácil demostrar que los conjuntos unipuntulales son cerrados. Sin embargo, este hecho no es cierto cuando se consideran espacios topológicos arbitrarios. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ y consideramos la topología para A definida por

$$\tau_A = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\},$$

el conjunto unipuntual $\{b\}$ no es cerrado, pues $\{a, c\}$ no es abierto. Las topologías en las que los conjuntos unipuntuales no son cerrados, son consideradas por muchos matemáticos como algo extraño. Por lo tanto, con frecuencia se imponen condiciones adicionales que eviten ejemplos como este, llevando a la clase de espacios bajo consideración más cerca de aquellos en donde se aplica nuestra intuición geométrica, dichas condiciones son conocidas como **axiomas de separación** y fueron sugeridas en un principio por el matemático Félix Hausdorff.

Los axiomas de separación que se usarán en el presente trabajo son los siguientes.

Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que X es un espacio topológico:

1. T_0 si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X, existe un conjunto abierto $U \subset X$, que contiene a uno de ellos pero no al otro;

2. T_1 si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X, exiten abiertos U y V de X tales que $x \in U$ y $y \in V$ y además $y \notin U$ y $x \notin V$;

3. T_2 (también llamado **de Hausdorff**) si para cualesquiera par de puntos distintos x y y de X existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$;

4. T_3 (también llamado **regular**) si X es T_1 y para todo $x \in X$ y cada cerrado $F \subset X \setminus \{x\}$ existen U y V abiertos de X tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$;

5. $T_{3\frac{1}{2}}$ (también llamado **espacio de Tychonoff**) si X es T_1 y para todo $x \in X$ y para cualquier cerrado C contenido en $X \setminus \{x\}$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(C) \subset \{1\}$;

6. T_4 (también llamado **normal**) si X es T_1 y para cualesquiera dos cerrados ajenos $A, B \subset X$ existen dos abiertos ajenos U, V en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$;

7. T_5 si X es T_1 y para cualesquiera A, B subconjuntos de X con $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$, existen conjuntos abiertos ajenos U y V, en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. A este espacio también se le conoce como **espacio hereditariamente normal**.

8. T_6 (también llamado **espacio perfectamente normal**) si X es T_4 y para todo cerrado F de X, se cumple que F es un conjunto G_δ de X; es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $G_n \in \tau$ de tal manera

que $F = \bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Los siguientes conceptos serán utilizados en esta tesis, propiedades acerca de ellos pueden consultarse en textos clásicos de la topología.

Un subconjunto A de X se dice que es:

- **denso** si $\overline{A} = X$, equivalentemente, si para cada $U \in \tau$ con $U \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$;
- **frontera** si $X \setminus A$ es denso;
- **denso en sí mismo** si para todo $p \in A$ y para cualquier $U \in \tau$ tal que $p \in U$ se cumple que $U \setminus \{p\} \cap A \neq \emptyset$.

Un punto $p \in A$ es llamado un **punto aislado** de A si $\{p\} \in \tau$.

De esta manera, un conjunto es denso en sí mismo, si y sólo si no tiene puntos aislados.

El espacio X se dice que es **separable** si existe un conjunto numerable $A \subset X$ que es denso en X.

Se dice que X es **conexo** si no se puede descomponer como la unión de dos subconjuntos cerrados no vacíos y disjuntos. En caso contrario se dice que el espacio es **disconexo**.

Si $x \in X$, se define la **componente** de x en X como la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x.

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X, si $X = \bigcup \mathcal{A}$. Si además $\mathcal{A} \subset \tau$, decimos que $\mathcal{A}$ es una **cubierta abierta** de X. Si $\mathcal{A}$ es una cubierta de X, diremos que una familia $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, es una **subcubierta** de $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}_1$ es una cubierta de X. Diremos que X es **compacto** si dada cualquier cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X, existe una subcubierta $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ de tal manera que $\mathcal{C}_1$ es un conjunto finito.

1.13 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathscr{A}$ tiene la **propiedad de intersección finita** (p.i.f.) si para cada subconjunto finito $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ se tiene que $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{F}} A \neq \emptyset$.

1.14 Teorema. Un espacio X es compacto si y sólo si para cualquier familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos cerrados en X tal que $\mathscr{A}$ tiene la p.i.f., entonces $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$.

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto. Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos cerrados en X tal que $\mathscr{A}$ tiene la p.i.f. Supongamos que $\bigcap \mathscr{A} = \emptyset$. Nótese que $X = X \setminus \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} X \setminus A$, por lo que $\{X \setminus A : A \in \mathscr{A}\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, se tiene que existen $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_i$.
Notemos que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ esto implica que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $\mathscr{A}$ tiene la p.i.f.
$\Leftarrow$] Supongamos que X no es compacto, por lo que cualquier cubierta abierta para X no tiene ninguna subcubierta abierta finita para X.
Sea $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta para X, se tiene entonces que $\mathscr{C} = \{X \setminus C_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de subconjuntos cerrados en X.
Sea $\{X \setminus C_i : i \in \{1, \cdots, n\}\}$ una subcolección finita de la familia $\mathscr{C}$.
Nótese que $\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus C_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$ ya que X no es compacto, es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus C_i \neq \emptyset$, por lo que $\mathscr{C}$ tiene la p.i.f., así, por hipótesis, $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$.
Por otra parte, $\bigcap \mathscr{C} = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus C_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = X \setminus \bigcup \mathscr{C} = \emptyset$, ya que $\mathscr{C}$ es una cubierta abierta para X, así, $\bigcap \mathscr{C} = \emptyset$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, X es compacto. $\square$

Dada una sucesión de subconjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, definimos el **límite superior**, **límite inferior** y **límite**, respectivamente, de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, denotados por $\limsup A_n$, $\liminf A_n$ y $\lim A_n$, respectivamente, de la siguiente forma:

1. $\limsup A_n = \{x \in X :$ para todo abierto U en X, tal que $x \in U$, existe un conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in J$,

$U \cap A_n \neq \emptyset\}$.

2. $\text{lím inf } A_n = \{x \in X :$ para todo abierto U en X, tal que $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N, U \cap A_n \neq \emptyset\}$

3. Decimos que un subconjunto A de X es el límite de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y escribimos $\text{lím } A_n = A$ si se cumple que

$$\text{lím inf } A_n = A = \text{lím sup } A_n.$$

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes proposiciones.

1.15 Proposición. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos en un espacio métrico, X, y $x \in X$. Entonces:

a) $x \in \text{lím inf } A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \in A_n$ y $\text{lím } x_n = x$.

b) $x \in \text{lím sup } A_n$ si y sólo si existen $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x_{n_k} \in A_{n_k}$ se cumple que $\text{lím } x_{n_k} = x$.

Demostración.

a) $\Rightarrow]$ Sea $x \in \text{lím inf } A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\alpha_n = \text{ínf}\{\rho(x, a) : a \in A_n\}$.
Veamos que $\text{lím } \alpha_n = 0$.
Para hacer esto supongamos que $\text{lím } \alpha_n \neq 0$, es decir, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > k$ y $\alpha_{n_k} \geq \varepsilon$. Entonces se determina una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_k} \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
Notemos que $B_{\varepsilon}(x) \cap A_{n_k} = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En otro caso existe $j \in \mathbb{N}$ y un punto $y \in B_{\varepsilon}(x) \cap A_{n_j}$, se tiene que $\alpha_{n_j} \leq \rho(x, y) < \varepsilon$ lo cual es una contradicción.
Se sigue que $x \notin \text{lím inf } A_n$, esto también es una contradicción.
Esto prueba que $\text{lím } \alpha_n = 0$.
Ahora, por la definición de α_n, podemos fijar un punto $x_n \in A_n$ tal que $\rho(x, x_n) < \alpha_n + \frac{1}{n}$.
Por lo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\text{lím } x_n = x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y para todo $n \geq N$, $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2}$.
Se sigue que $\rho(x, x_n) < \alpha_n + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Por lo tanto, $\lim x_n = x$.
$\Leftarrow$] Por hipótesis existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \in A_n$ y $\lim x_n = x$. Entonces, para cada U vecindad de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.
Esto implica que $x \in \liminf A_n$.

b) $\Rightarrow$] Por hipótesis, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto J_k definido por $J_k = \{n \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A_n \neq \emptyset\}$ es infinito. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fijemos un elemento $n_k \in J_k$ y fijemos un punto $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A_{n_k}$. Se tiene que las sucesiones $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ satisfacen la conclusión, ya que $\rho(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ y $\lim x_{n_k} = x$.
$\Leftarrow$] Sea U una vencidad de x. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$.
Como $\lim x_{n_k} = x$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$, $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$, es decir, $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$. Se sigue que, para todo $k \geq K$, $x_{n_k} \in U \cap A_{n_k}$, luego el conjunto $J = \{n \in \mathbb{N} : U \cap A_n \neq \emptyset\}$ es infinito.
Esto implica que $x \in \limsup A_n$.

$\square$

1.16 Observación.

1) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

2) Si X es un espacio métrico y compacto, entonces $\limsup A_n \neq \emptyset$, si $A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

3) Si $A_n \subset B_n$, entonces $\limsup A_n \subset \limsup B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

4) Si $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n$

1.17 Proposición. Para cada sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio X, se tiene que $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ son conjuntos cerrados en X.

Demostración. Por el Teorema 1.8 inciso a) tenemos que $\limsup A_n \subset \overline{\limsup A_n}$. Resta probar que $\overline{\limsup A_n} \subset \limsup A_n$.
Sean $x \in \overline{\limsup A_n}$ y U un abierto en X tales que $x \in U$, entonces $U \cap \limsup A_n \neq \emptyset$. Sea $z \in U \cap \limsup A_n$, entonces existe un conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in J, U \cap A_n \neq \emptyset$. Así, $x \in \limsup A_n$. Por lo que, $\limsup A_n = \overline{\limsup A_n}$
Por otro lado, por el Teorema 1.8 inciso a) se tiene que $\liminf A_n \subset \overline{\liminf A_n}$. Resta porobar la otra inclusión.
Sea $x \in \overline{\liminf A_n}$ y U un abierto en X tal que $x \in U$, entonces $U \cap \liminf A_n \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap \liminf A_n$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N, U \cap A_n \neq \emptyset$. Se sigue que $x \in \liminf A_n$. Así $\overline{\liminf A_n} \subset \liminf A_n$.
Por lo tanto, $\limsup A_n = \overline{\limsup A_n}$. $\square$

Capítulo 2

Funciones continuas

En el presente capítulo estudiaremos el concepto de función continua, posteriormente introducimos los conceptos de funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos, veremos cómo están relacionados estos conceptos. Para terminar, daremos la definición del conjunto de Cantor y demostraremos que todo espacio métrico compacto es imagen continua de este conjunto.

En lo siguiente y cuando no exista confusión escribiremos sólo X, en lugar de (X, τ) ó (X, ρ), para referirnos a un espacio topológico o espacio métrico, respectivamente.

2.1 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es **continua en un punto** $x_0 \in X$ si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y existe una vecindad U de x_0 en X tal que $f(U) \subset V$. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es **continua** si es continua en cada punto $x_0 \in X$.

De la definición se sigue que f es continua en x_0 si para cada $V \in \tau_Y$ existe $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$ y $f(U) \subset V$.

Una o varias maneras para verificar la continuidad de una función puede encontrarse en el siguiente teorema.

2.2 Teorema. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) f es continua;

b) para cada subconjunto abierto H de Y, $f^{-1}(H)$ es abierto en X;

c) para cada subconjunto cerrado K de Y, $f^{-1}(K)$ es cerrado en X;

d) para cada subconjunto $A \subset X$ se cumple que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sea H un subconjunto abierto de Y, entonces para cada punto $x \in f^{-1}(H)$ el conjunto H es una vecindad de $f(x)$, por la continuidad de f existe V un vecindad abierta de x tal que $f(V) \subset H$; esto es, $V \subset f^{-1}(H)$, lo cual implica que $f^{-1}(H)$ es un conjunto abierto.
b) $\Rightarrow$ *c)* Si K es cerrado en Y, entonces $Y \setminus K$ es abierto en Y, así que $f^{-1}(Y \setminus K)$ es abierto en X por hipótesis. Dado que $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus K)$, obtenemos que $f^{-1}(K)$ es cerrado en X.
c) $\Rightarrow$ *d)* Sea K cualquier conjunto cerrado de Y tal que $f(A) \subset K$. Por hipótesis $f^{-1}(K)$ es un conjunto cerrado de X que contiene a A. Entonces $\overline{A} \subset f^{-1}(K)$, de aquí que $f(\overline{A}) \subset K$. Como esto es cierto para cualquier conjunto cerrado K que contenga a $f(A)$, concluimos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
d) $\Rightarrow$ *a)* Sean $x \in X$ y V un abierto que contiene a $f(x)$. Consideremos $A = X \setminus f^{-1}(V)$ y $U = X \setminus \overline{A}$. Notemos que U es un abierto en X. Afirmamos que $x \in U$. Supongamos por el contrario que $x \in \overline{A}$, es decir $f(x) \in f(\overline{A})$. Dado que

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)},$$

$f(x) \in \overline{f(A)}$. Observemos que

$$\overline{f(A)} = \overline{f(X \setminus f^{-1}(V))} \subset \overline{Y \setminus V},$$

como $\overline{Y \setminus V}$ es cerrado, entonces $\overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$. Lo cual es una contradicción al hecho que $f(x) \in V$. Por lo tanto $f(U) \subset V$. $\square$

2.3 Teorema. Sean X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías para X. $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si $Id_X : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_1)$ es una función continua.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea $Id_X : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_1)$. Veamos que Id_X es continua.
Sea $U \in \tau_1$, entonces $Id_x^{-1}(U) = U \in \tau_2$, ya que $\tau_1 \subset \tau_2$.
Por lo que $Id_X^{-1}(U) \in \tau_2$. Por lo tanto, Id_X es continua.
$\Leftarrow$] Supongamos que $Id_X : (X, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_1)$ es continua, entonces

para cada $V \in \tau_1$ se tiene que $Id_X^{-1}(V) \in \tau_2$, pero $Id_X^{-1}(V) = V$, es decir, para cada $V \in \tau_1$ se tiene que $V \in \tau_2$.
Por lo tanto, $\tau_1 \subset \tau_2$. $\square$

2.4 Teorema. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función y ζ una cubierta abierta (finita cerrada) de X. Si la función

$$f\,|_A : A \longrightarrow Y$$

es continua para cada $A \in \zeta$, entonces f es continua.

Demostración. Supongamos que ζ es una cubierta abierta de X. Tomemos a V un conjunto abierto de Y. Notemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= X \cap f^{-1}(V) \\ &= \left(\bigcup \{A \subset X : A \in \zeta\}\right) \cap f^{-1}(V) \\ &= \bigcup \left\{A \cap f^{-1}(V) \subset X : A \in \zeta\right\} \\ &= \bigcup \left\{(f\,|_A)^{-1}(V) : A \in \zeta\right\} \end{aligned}$$

Dado que $(f\,|_A)^{-1}(V)$ es abierto en X para cada $A \in \zeta$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto, pues es unión de abiertos. De aquí que, por el Teorema 2.2, f es continua.
Si consideramos a ζ una cubierta finita de cerrados de X, entonces la demostración es análoga, ya que la unión finita de cerrados es cerrada, así que la imagen inversa de cerrados en Y es un cerrado en X, por el Teorema 2.2, f sería continua. $\square$

2.5 Definición. Una propiedad $\mathcal{P}$ definida para espacios topológicos es un **invariante continuo** si se tiene que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva y X cumple la propiedad $\mathcal{P}$, entonces Y satisface $\mathcal{P}$.

2.6 Teorema. Las siguientes propiedades son invariantes continuos:

a) separabilidad;

b) compacidad;

c) conexidad.

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios X y Y.

a) Si X es separable, existe $A \subset \overline{A} = X$ con la condición que $|A| = \aleph_0$. Entonces $B = f(A) \subset Y$ y

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{B} \subset Y,$$

es decir $\overline{B} = Y$. Más aún $|B| = |f(A)| \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$. Con lo cual concluimos que Y es separable.

b) Supongamos que X es compacto. Sea $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de Y, por el Teorema 2.2 la familia $\{f^{-1}(A_i) : i \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X existe una subcubierta finita de X, digamos $\{f^{-1}(A_{i_0}), ..., f^{-1}(A_{i_k})\}$; es decir $X = \bigcup\{f^{-1}(A_{i_j}) : j \in \{0, ..., k\}\}$, por lo tanto

$$Y = f(X) = f(\bigcup\{f^{-1}(A_{i_j}) : j \in \{0, ..., k\}\})$$

$$= \bigcup\{f(f^{-1}(A_{i_j}) : j \in \{0, ..., k\}\}$$

$$= \bigcup\{A_{i_j} : j \in \{0, ..., k\}\}.$$

Así que Y es compacto.

c) Supongamos que X es conexo y que Y no lo es, entonces existen dos cerrados, ajenos y no vacíos A y B de Y tales que $Y = A \cup B$. Notemos que

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Por el Teorema 2.2, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son cerrados, no vacios y disjuntos, lo cual contradice la conexidad de X. Por lo tanto, si X es conexo entonces Y lo es.

□

Uno de los más importantes tipos de funciones continuas es la clase de los homeomorfismos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, es llamada un **homeomorfismo** si:

1. f es continua;

2. f es biyectiva;
3. f^{-1} es continua.

Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es llamada **encaje**, si considerando a la función f sobre su imagen, $f : X \longrightarrow f(X) \subset Y$ es un homeomorfismo.
Otros dos tipos de funciones especiales son las llamadas **abiertas** y **cerradas**. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es abierta (cerrada) si para cada conjunto abierto (cerrado) $A \subset X$, el conjunto $f(A)$ es abierto (cerrado) en Y.
Nótese que las funciones abiertas (cerradas) no necesariamente son continuas. Para esto, veamos el siguiente ejemplo.

2.7 Ejemplo. Consideremos $Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_d)$, donde τ_i y τ_d son las topologías indiscreta y discreta, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$.
Sea $A \in \tau_i$, entonces $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.
Si $A = \emptyset$, entonces $Id_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \in \tau_d$.
Si $A = \mathbb{R}$, entonces $Id_{\mathbb{R}}(A) = \mathbb{R} \in \tau_d$.
Por lo que $Id_{\mathbb{R}}$ es una función abierta, pero no es continua, ya que si $p \in \mathbb{R}$, entonces $\{p\} \in \tau_d$. Luego $Id_{\mathbb{R}}^{-1}(\{p\}) = \{p\}$, pero $\emptyset \neq \{p\} \neq \mathbb{R}$, por lo que $\{p\} \notin \tau_i$.
Así $Id_{\mathbb{R}}$ no es continua.

También hay funciones que son abiertas, pero no cerradas, cerradas, pero no abiertas y funciones que no son ni abiertas ni cerradas. Veamos algunos ejemplos de ellas.

2.8 Ejemplo. Cualquier función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ no es abierta ni cerrada. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ cualquier biyección, entonces:

- f es continua pues $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ es un espacio discreto.
- f no es abierta pues $\{1\} \in \tau_{\mathbb{N}}$, sea $x = f(1) \in \mathbb{Q}$, así $f(\{1\}) = \{x\}$. Observemos que $\{x\}$ no es abierto en $\mathbb{Q}$. Por lo que f no es abierta.
- Además f no es cerrada, en otro caso f sería un homeomorfismo y por tanto abierta.

2.9 Ejemplo. La proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $p((x, y)) = x$ es abierta, pero no cerrada. Sabemos por ejemplo que la hipérbola

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$, mientras que $p(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

2.10 Ejemplo. Sea $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{2} & \text{, si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]; \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{, si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]; \\[2ex] \dfrac{3x-1}{2} & \text{, si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

es cerrada, pero no abierta.
Notemos que f no es abierta. Sea $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ abierto en $\mathbb{I}$. Se tiene que $f(A) = f((\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = \{\frac{1}{2}\}$ que no es abierto en $\mathbb{I}$.

Para ver que f es cerrada, usaremos el siguiente teorema.

2.11 Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si existe una familia finita de conjuntos cerrados en X, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y si $f_{|C_i} : C_i \longrightarrow Y$ es cerrada para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces f es cerrada.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ una familia de conjuntos cerrados en X tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y $f_{|C_i} : C_i \longrightarrow Y$ cerrada para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Sea U un conjunto cerrado en X, nótese que $f(U) = f(X \bigcap U) = f((\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \bigcap U) = f(\bigcup_{i=1}^{n} (C_i \bigcap U)) = \bigcup_{i=1}^{n} f(C_i \bigcap U) = \bigcup_{i=1}^{n} f_{|C_i}(U)$.
Dado que $f_{|C_i}$ es cerrada para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces $f_{|C_i}(U)$ es cerrado en Y para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así $f(U)$ es cerrado en Y pues es la unión finita de conjuntos cerrado en Y.
Por lo tanto f es cerrada. $\square$

Usando el Teorema 2.11 es fácil ver que f, definida como en el Ejemplo 2.10, es cerrada.

2.12 Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ función biyectiva, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) f es un homeomorfismo;

2) f es continua y abierta;

3) f es continua y cerrada.

Demostración. f es homeomorfismo si y sólo si f es continua, biyectiva y f^{-1} es continua, si y sólo si para todo $U \subset X$ abierto en X, $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en Y, si y sólo si f es abierta.
Por lo tanto 1) es equivalente a 2).
2) $\Rightarrow$ 3) Sea F cerrado en X, $Y \setminus f(F) = f(X) \setminus f(F) = f(X \setminus F)$.
Como F es cerrado en X, entonces $X \setminus F$ es abierto en X.
Como f es abierta, entonces $f(X \setminus F)$ es abierto en Y. Por lo tanto $Y \setminus f(F)$ es abierto en Y, por lo que $f(F)$ es cerrado en Y. Así, f es cerrada.
3) $\Rightarrow$ 2) Sea G abierto en X, $Y \setminus f(G) = f(X) \setminus f(G) = f(X \setminus G)$.
Como G es abierto en X, entonces $X \setminus G$ es cerrado en X.
Como f es cerrada, entonces $f(X \setminus G)$ es cerrado en Y. Por lo tanto $Y \setminus f(G)$ es cerrado en Y, luego $f(G)$ es abierto en Y. Por lo tanto, f es abierta. $\square$

2.13 Proposición. Sea X un espacio topológico compacto y $A \subset X$ cerrado, entonces A también es compacto.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de A, notemos que $X = A \cup (X \setminus A) = (\bigcup\limits_{i\in I} U_i) \bigcup (X \setminus A)$. Como $X \setminus A$ es abierto, entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ unido con $X \setminus A$ es una cubierta abierta de X, pero X es compacto, entonces existen $i_1, i_2, ..., i_n$ tales que $X = A \cup (X \setminus A) = (\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}) \bigcup (X \setminus A)$.

Así $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$, por lo tanto es compacto. $\square$

2.14 Proposición. Sea X un espacio topológico T_2 y $A \subset X$ compacto, entonces A es cerrado.

Demostración. Sea $A \subset X$ compacto. Probaremos que $X \setminus A$ es abierto, luego A será cerrado.
Sea x_0 un punto de $X \setminus A$. Vamos a demostrar que existe una vecindad de x_0 que no intersecta a A. Para cada punto a de A, elijamos vecindades disjuntas U_a y V_a de los puntos x_0 y a, respectivamente. La colección $\{V_a | a \in A\}$ es una cubierta de A por abiertos de X; como A es compacto, entonces existen $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_n}$ tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$. El conjunto abierto

$$V = V_{a_1} \bigcup \cdots \bigcup V_{a_n}$$

contiene a A, y es disjunto del abierto

$$U = U_{a_1} \bigcap \cdots \bigcap U_{a_n}$$

que se forma al tomar la intersección de las correspondientes vecindades de x_0. Por lo tanto, U es una vecindad de x_0 que no intersecta a A. $\square$

2.15 Teorema. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua de un espacio compacto X sobre un espacio de Hausdorff Y, entonces f es cerrada.

Demostración. Sea F un cerrado en X, por la Proposición 2.13 F es compacto, luego, como f es continua, por el Teorema 2.6 $f(F)$ es un subconjunto compacto de Y y dado que Y es Hausdorff, por la Proposición 2.14 $f(F)$ es un subconjunto cerrado en Y. Por lo tanto, f es una función cerrada. $\square$

2.16 Corolario. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y biyectiva, donde X es un espacio compacto y Y es un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Por el Teorema 2.15, f es cerrada y por hipótesis f es continua, así, por el Teorema 2.12 f es un homeomorfismo. $\square$

2.17 Proposición. Sean X un espacio topológico, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $z \in X$. Entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ si y sólo si para cada subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe una subsucesión $\{z_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j\to\infty} z_{n_{k_j}} = z$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea U un abierto en X tal que $z \in U$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $z_n \in U$. Fijemos $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq N$. Se tiene que $\forall k \geq K$, $n_k \geq n_K$ y más aún, $n_k \geq N$, por lo cual $z_{n_k} \in U$, es decir, $\forall k \geq K$, $z_{n_k} \in U$.
Esto prueba que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z$
Similarmente, para cada subsucesión $\{z_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, se tiene que $\lim\limits_{j\to\infty} z_{n_{k_j}} = z$.
$\Leftarrow$]Supongamos, por el contrario, que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a z, entonces existe U abierto en X que contiene a z tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq k$ y $z_{n_k} \notin U$.
Tomando a los z_{n_k} anteriores, tenemos que $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{z_n\}$ y esta subsucesión no tiene alguna subsucesión que converja a z, ya que en caso contrario, si existe $\{z_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} z_{n_{k_j}} = z$, entonces para U abierto en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ si $j \geq N$ entonces $z_{n_{k_j}} \in U$, pero los $z_{n_{k_j}}$ son algún z_{n_k} de la sucesión construida para la cual $z_{n_k} \notin U$, esto nos da una contradicción, por lo que la subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ no tiene subsucesión convergente a z, contradiciendo la hipótesis inicial.
Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. $\square$

2.18 Teorema. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces para todo $x \in X$ y para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Además, si X y Y son espacios métricos, entonces el recíproco también es cierto.

Demostración. Sea $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a x.
Mostraremos que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.
Sea U un abierto en Y que contiene a $f(x)$. Como f es una función continua y U es abierto Y, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y es tal que $x \in f^{-1}(U)$, pues $f(x) \in U$.
Dado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in f^{-1}(U)$. De donde se implica que si $n \geq N$, entonces $f(x_n) \in U$. Con lo cual se concluye que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.
Ahora supongamos que X y Y son espacios métricos.

Sea un subconjunto A de X. Probaremos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (véase el Teorema 2.2).
Fijemos un punto $y \in f(\overline{A})$. Sea $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$. Como X es un espacio métrico, se tiene que existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $f(A)$. Por hipótesis, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, se sigue que, $f(x) \in \overline{f(A)}$, es decir, $y \in \overline{f(A)}$. Así $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Por lo tanto, f es una función continua. $\square$

2.19 Teorema. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función suprayectiva entre espacios métricos compactos, entonces f es continua si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y para cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en Y se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ implica que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que f es continua y que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
Fijemos un punto $x \in \limsup f^{-1}(y_n)$, por la Proposición 1.15 existe una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión de puntos en X, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in f^{-1}(y_{n_k})$ y $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.
Observemos que $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y además $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, ésto último se tiene porque f es continua, se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x)$. Por otra parte, como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. En consecuencia, $f(x) = y$, luego $x \in f^{-1}(y)$.
Ésto prueba que lim sup $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$.
$\Leftarrow$] Supongamos que f no es continua, entonces existe $x \in X$ y existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$.
Luego existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que ninguna de sus subsucesiones converge al punto $f(x)$ (véase la Proposición 2.17). Por otra parte, como Y es métrico y compacto, sabemos que $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, es decir, existe un punto $y \in Y$ y una subsucesión $\{f(x_{n_{k_j}})\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = y$.
Notemos que $y \neq f(x)$.
Denotemos $y_j = f(x_{n_{k_j}})$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Así $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y y $\lim\limits_{j\to\infty} y_j \neq f(x)$. Nótese que $x_{n_{k_j}} \in f^{-1}(y_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, por ésto $x \in$ lim sup$f^{-1}(y_j)$. Por hipótesis, lim sup $f^{-1}(y_j) \subset f^{-1}(y)$. Así, $x \in f^{-1}(y)$, es decir, $f(x) = y$, lo cual es una contradicción.

Esta contradicción implica que f es continua. $\square$

2.20 Proposición. Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff entonces X es normal.

Demostración. Sean A y B cerrados y disjuntos en X, como X es compacto entonces A y B son compactos.
Dado $a \in A$ elijamos conjuntos abiertos y disjuntos U_a y V_a que contengan a $\{a\}$ y B respectivamente, entonces $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$, es decir, $\{U_a | a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto entonces existen $a_1, a_2, ..., a_n \in X$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$, luego, basta considerar $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$, además definamos $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$.
Se tiene que $B \subset V$ y $A \subset U$, además
$U \cap V = (\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i})) = \emptyset$
Por lo tanto X es normal. $\square$

2.21 Proposición. Si X es un espacio métrico compacto entonces es separable.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}, \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta para X, por tanto existen ${x_1}^n, {x_2}^n, ..., {x_{m_n}}^n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}({x_i}^n)$

Sea $A_n = \{{x_1}^n, {x_2}^n, ..., {x_{m_n}}^n\}$ y definamos $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Nótese que D es numerable.
Mostraremos que $\overline{D} = X$. Basta mostrar que $X \subset \overline{D}$
Sean $x \in X$ y U un conjunto abierto tal que $x \in U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Así, existe $i \in \{1, 2, ..., m_n\}$ tal que $x \in B_{\frac{1}{n}}({x_i}^n)$. Por lo que ${x_i}^n \in B_\varepsilon(x) \subset U$, entonces $U \cap D \neq \emptyset$. $\square$

2.22 Proposición. Si X es un espacio métrico separable entonces X es segundo numerable.

Demostración. Sea $D \subset X$ un conjunto denso y numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in D\}$. De esta manera B_n es una familia numerable. Consideremos $\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
Afirmamos que β es base para X.
Sea $x \in X$ y U abierto tal que $x \in U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$.
Tomemos $d \in D \bigcap B_{\frac{1}{2n}}(x)$.
Por demostrar que $x \in B_{\frac{1}{2n}}(d) \subset U$.
Sea $y \in B_{\frac{1}{2n}}(d)$, entonces $\rho(y, x) \leq \rho(y, d) + \rho(d, x) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.
Por lo que $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Así $B_{\frac{1}{2n}}(d) \subset B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$.
Por lo tanto $x \in B_{\frac{1}{2n}}(d) \subset U$. □

2.23 Lema. Si X es un espacio T_1 y para cada subconjunto $F \subset X$ y cada abierto $W \subset X$ con $F \subset W$ existe una sucesión de abiertos $W_1, W_2, ...$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ y $\overline{W_i} \subset W$, $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces X es normal.

Demostración. Sean A y B conjuntos cerrados y ajenos en X. Por hipótesis, tomando a $F = A$ y $W = X \setminus B$ existen conjuntos abiertos $W_1, W_2, ...$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ y $\overline{W_i} \cap B = \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
De forma similar, existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, ...$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ y $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $G_i = W_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \overline{V_j} = \bigcap_{j=1}^{i} (W_i \setminus \overline{V_j})$ y

$H_i = V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \overline{W_j} = \bigcap_{j=1}^{i} (V_i \setminus \overline{W_j})$.
Notemos que G_i, H_i son conjuntos abiertos para cada $i \in \mathbb{N}$. Además $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = U$, pues si $a \in A$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a \in W_i$ y

$\overline{V_j} \cap A = \emptyset$ si $j \leq i$; de este modo, $a \in W_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \overline{V_j} = G_i$.

También $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = V$.
Para terminar, basta mostrar que $U \cap V = \emptyset$. Sean $i, j \in \mathbb{N}$. Si $j \leq i$, entonces $G_i = W_i \setminus \bigcup_{l=1}^{i} \overline{V_l} \subset W_i \setminus V_j$ y $H_j = V_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j} \overline{W_k} \subset V_j$, así $G_i \cap H_i = \emptyset$.
Si $i \leq j$, entonces $H_j = V_j \setminus \bigcup_{l=1}^{j} \overline{W_l} \subset V_j \setminus W_i$ y $G_i = W_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i} \overline{V_k} \subset W_i$, así $H_j \cap G_i = \emptyset$.
Por lo tanto, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $H_i \cap G_j = \emptyset$. Con lo cual se concluye que $U \cap V = \emptyset$. $\square$

2.24 Corolario. Si X es un espacio topológico regular y segundo numerable, entonces X es normal.

Demostración. Sea F un conjunto cerrado en X y W un conjunto abierto en X tal que $F \subset W$. Sea $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X.
Para cada $x \in F$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_x} \subset W$, más aún, se puede pedir que $x \in \overline{B_{n_x}} \subset W$, pues X es regular. Con esto, $F \subset \bigcup_{x \in F} B_{n_x}$ y $\overline{B_{n_x}} \subset W$.
Observemos que $\{B_{n_x} : x \in F\} \subset \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Con esto, X cumple las hipótesis del Lema 2.23. Por lo tanto, X es normal. $\square$

2.25 Definición. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es el conjunto de todas las funciones $C : I \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, donde para cada $\alpha \in I$, $C(\alpha) \in X_\alpha$.
Un elemento $C \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, lo escribimos $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, para cada $\alpha \in I$, $x_\alpha \in X_\alpha$. Al elemento x_β le llamamos la β-ésima coordenada de $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.
Al conjunto X_β le llamamos el β-ésimo factor de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.
Para cada $\beta \in I$, definimos $\Pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$, dada por $\Pi_\beta(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}) = x_\beta$ y le llamamos la β-ésima función proyección.

Al espacio $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ le asignamos la topología producto, la cual no se menciona aquí, pues su estudio se escapa al objetivo de esta tesis, pero puede ser consultado en el capítulo 4 de [5].

2.26 Teorema. Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, $f : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y para cada $\beta \in I, \Pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$. La función f es continua si y sólo si, para todo $\beta \in I, \Pi_\beta \circ f : X \longrightarrow X_\beta$ es continua.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que f es una función continua. Como para todo $\beta \in I, \Pi_\beta$ es una función continua, se sigue que para todo $\beta \in I, \Pi_\beta \circ f$ es continua.
$\Leftarrow$] Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ un básico canónico de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, donde U_i es un conjunto abierto en X_{α_i} para $i \in \{1, 2, ..., n\} \subset I$, entonces

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)) = \bigcap_{i=1}^{n}(f^{-1}(\Pi_{\alpha_i}{}^{-1}(U_i)) = \bigcap_{i=1}^{n}(f^{-1}\circ\Pi_{\alpha_i}{}^{-1})(U_i)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n}(\Pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_i).$$

Luego, como para cada $\beta \in I, \Pi_\beta \circ f$ es continua, en particular, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}, \Pi_{\alpha_i} \circ f$ es una función continua, se tiene que $(\Pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_i)$ es un conjunto abierto en X. Como la intersección finita de conjuntos abiertos en X es un conjunto abierto en X, se sigue que, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.
Por lo tanto, f es una función continua. □

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [5, Teorema 4.1].

2.27 Teorema. (Lema de Urysohn) Sea X un espacio topológico. X es normal si y sólo si, para cualesquiera dos conjuntos cerrados A y B ajenos en X existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ función continua tal que $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$.

2.28 Teorema. Si $\{f_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de funciones continuas real valuadas en un espacio de Hausdorff X tal que para cada $x_0 \in X$ y para cada conjunto abierto U en X con $x_0 \in U$, existe $\alpha_0 \in J$ tal que $f_{\alpha_0}(x_0) > 0$ y $f_{\alpha_0}(X \setminus U) \subset \{0\}$, entonces la función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^J$ definida por $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ para cada $x \in X$, es un encaje.

Demostración. Dadas las hipótesis, consideremos la función F definida como se describe en el enunciado del teorema. Notemos que esta función F es continua, ya que para cada $\beta \in J, (\Pi_\beta \circ F)(x) = \Pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_\beta(x)$, es decir, $(\Pi_\beta \circ F)(x) = f_\beta(x)$, la cual es continua por hipótesis. Así, por el Teorema 2.26, F es continua.
Por otra parte, es claro que F es inyectiva, porque si $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ entonces existe $\alpha_0 \in J$ tal que $f_{\alpha_0}(x_1) > 0$ y $f_{\alpha_0}(x_1) = 0$, así $f_{\alpha_0}(x_1) \neq f_{\alpha_0}(x_1)$, por lo cual $(f_\alpha(x_1))_{\alpha \in J} \neq (f_\alpha(x_2))_{\alpha \in J}$, es decir, $F(x_1) \neq F(x_2)$.
Denotemos $Y = F(X) \subset \mathbb{R}^J$. Tenemos que $F : X \longrightarrow Y$ es una función biyectiva y continua. Veamos que F de X en Y es una función abierta. Fijemos un conjunto abierto U en X. Debemos demostrar que $F(U)$ es un conjunto abierto en Y, es decir, para cada $z \in F(U)$ debemos encontrar un conjunto abierto V_z en $\mathbb{R}^J$ tal que $z \in V \cap Y \subset F(U)$.
Fijemos un punto $z_0 \in F(U)$ y tomemos un punto $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) = z_0$. Por hipótesis existe $\alpha_0 \in J$ tal que $f_{\alpha_0}(x_0) > 0$ y $f_{\alpha_0}(X \setminus U) \subset \{0\}$. Denotemos $V = \Pi_{\alpha_0}^{-1}((0, \infty))$. Es claro que V es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^J$.
Además, como $F(x_0) = (f_\alpha(x_0))_{\alpha \in J} := z_0$, se tiene que
$\Pi_{\alpha_0}(z_0) = \Pi_{\alpha_0}((f_\alpha(x_0))_{\alpha \in J}) = f_{\alpha_0}(x_0) \in (0, \infty)$, por lo cual $z_0 \in V$. Así $V \cap Y$ es un conjunto abierto en Y y $z_0 \in V \cap Y$. Resta ver que $V \cap Y \subset F(U)$. Para esto último, fijemos un punto $z \in V \cap Y$. Como $Y = F(X)$ existe $x \in X$ tal que $F(x) = z$. Se tiene que, $(f_\alpha(x))_{\alpha \in J} = z$, por esto, $\Pi_{\alpha_0}(z) = \Pi_{\alpha_0}((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_{\alpha_0}(x)$ y como $z \in V = \Pi_{\alpha_0}^{-1}((0, \infty))$, se tiene que, $\Pi_{\alpha_0}(z) \in (0, \infty)$. Se sigue que, $f_{\alpha_0}(x) > 0$. Luego, $x \notin X \setminus U$ pues $f_{\alpha_0}(X \setminus U) \subset \{0\}$, es decir, $x \in U$. Como $F(x) = z$, esto prueba que $z \in F(U)$. Por lo tanto, $V \cap Y \subset F(U)$. Esto demuestra que $F(U)$ es un conjunto abierto en Y.
Con todo se tiene que, $F : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, es decir F es un encaje de X en $\mathbb{R}^J$. □

2.29 Teorema. El cubo de Hilbert $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ es metrizable.

Demostración. Consideremos la función $D : \mathbb{I}^{\aleph_0} \times \mathbb{I}^{\aleph_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\ x_n - y_n\ |}{2^n}$, para todo par $((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})$ en $\mathbb{I}^{\aleph_0}\times\mathbb{I}^{\aleph_0}$.

Veamos que D es una métrica en $\mathbb{I}^{\aleph_0}$. Sea $S_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{|\ x_n - y_n\ |}{2^n}$, para cada $m\in\mathbb{N}$ y recordemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\ x_n - y_n\ |}{2^n} = \lim_{m\to\infty} S_m$.

(1) Veamos que $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\geq 0$, para cada $((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\in\mathbb{I}^{\aleph_0}\times\mathbb{I}^{\aleph_0}$.
Como $|\ x_n - y_n\ |\geq 0$, se tiene que $\frac{|x_n-y_n|}{2^n}\geq 0$, luego $S_m\geq 0$ para cada $m\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $0\leq \displaystyle\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\ x_n - y_n\ |}{2^n}$.
Así $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})\geq 0$.

(2) Supongamos que $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0$ y supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}\neq(y_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces para algún $n_0\in\mathbb{N}, |\ x_{n_0}-y_{n_0}\ |>0$ y por tal, $S_{n_0}>0$. Notemos que $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ es creciente, por lo que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_m>0$, lo cual es una contradicción, pues $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_m = 0$. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(y_n)_{n=1}^{\infty}$.
Por otro lado, supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(y_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $S_m = 0$, de ahí que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_m = 0$. Por lo tanto $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0$

(3) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{I}^{\aleph_0}\times\mathbb{I}^{\aleph_0}$ y sean $S_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{|\ x_n - y_n\ |}{2^n}$ y $S'_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{|\ y_n - x_n\ |}{2^n}$.
Como $S_m = S'_m$ para cada $m\in\mathbb{N}$, se tiene que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} S'_m$.
Así $D((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = D((y_n)_{n=1}^{\infty},(x_n)_{n=1}^{\infty})$.

(4) Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{I}^{\aleph_0}\times\mathbb{I}^{\aleph_0}$.
Notemos que

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid x_n - z_n + z_n - y_n \mid}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid x_n - z_n \mid}{2^n}$$
$$+ \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid x_n - z_n \mid}{2^n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\mid z_n - y_n \mid}{2^n}.$$

Tomando el límite cuando m tiende a infinito, se tiene que
$D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) \leq D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}) + D((z_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty})$.

De $(1), (2), (3)$ y (4) se deduce que D es una métrica en $\mathbb{I}^{\aleph_0}$.

Ahora veamos que $\tau_D = \tau$ donde τ es la topología producto en $\mathbb{I}^{\aleph_0}$.
Veamos que $\tau_D \subset \tau$.
Sea $U = B'_{\epsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})$ un elemento básico de τ_D que contiene a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Afirmamos que $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{N} \Pi_j^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{2^N}}(x_j))$
$\subset U$.
Para ver esto, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{N} \Pi_j^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{2^N}}(x_j))$.
Queremos probar que $D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \epsilon$.
Observemos que

$$D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n}$$
$$< \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon}{2^n 2^N} + \frac{\epsilon}{2} = (1 - \frac{1}{2^N})\frac{1}{2^N}\epsilon + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ahora probemos que $\tau \subset \tau_D$.
Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{I}^{\aleph_0}$ y $U = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \Pi_j^{-1}(B_{\epsilon_j}(x_j))$ un elemento básico canónico de τ que contiene a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2^2}, \ldots, \frac{\epsilon_k}{2^k}\}$.
Mostremos que $B_{\epsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty}) \subset U$.
Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\epsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})$, entonces $D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \epsilon$, es decir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid x_n - y_n \mid}{2^n} < \epsilon$. Por lo que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\frac{|x_n - y_n|}{2^n} < \epsilon \leq \frac{\epsilon_j}{2^j}$, lo que implica que si $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ entonces $\mid x_n - y_n \mid < \epsilon_j$ y por lo tanto, $B_{\epsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty}) \subset U$.
Así $\tau_D = \tau$.

Por lo tanto, $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ es metrizable. $\square$

El siguiente es un resultado bien conocido en la Topología General y es conocido como el *Teorema de Metrización de Urysohn*.

2.30 Teorema. Para X un espacio T_1, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es regular y segundo numerable;

2. X es separable y metrizable;

3. X es homeomorfo a algún subespacio del cubo de Hilbert $\mathbb{I}^{\aleph_0}$.

Demostración. Veamos que (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)
(1) $\Rightarrow$ (3)
Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B_n$, podemos tomar un conjunto abierto U en X tal que $x \in U$ y $\overline{U} \subset B_n$, ya que X es regular. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset U$. Notemos que $\overline{B_m} \subset B_n$.
Denotemos $J = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \overline{B_m} \subset B_n\}$. Por el párrafo previo, observamos que J es un conjunto no vacío. Además J es numerable. Por el Corolario 2.24 se tiene que X es un espacio normal, ahora por el Teorema 2.27, para cada $(n,m) \in J$ existe una función continua, $f_{n,m} : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_{n,m}(\overline{B_m}) \subset \{1\}$ y $f_{n,m}(X \setminus B_n) \subset \{0\}$.
Denotemos $\mathscr{F} = \{f_{n,m} : (n,m) \in J\}$. Se tiene que $\mathscr{F}$ es una familia numerable de funciones continuas realvaluadas definidas en X. Además, si $x \in X$ y W es un conjunto abierto en X tal que $x \in W$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_0} \subset W$ y existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{m_0}$ y $\overline{B_{m_0}} \subset B_{n_0}$.
Así $(n_0, m_0) \in J$, también se tiene que f_{n_0,m_0} es un elemento de $\mathscr{F}$ tal que
$f_{n_0,m_0}(\overline{B_{m_0}}) \subset \{1\}$ y $f_{n_0,m_0}(X \setminus B_{n_0}) \subset \{0\}$; en particular $f_{n_0,m_0}(x) > 0$ y $f_{n_0,m_0}(X \setminus W) \subset \{0\}$. Es decir, la familia $\mathscr{F}$ satisface la condición del Teorema 2.28. En consecuencia, la función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^J$ definida por $F(x) = (f_{n,m}(x))_{(n,m)\in J}$ es un encaje de X en $\mathbb{R}^J$. Denotemos $Y = F(X)$ y notemos que para cada $x \in X$, $f_{n,m}(x) \in [0,1]$, por lo cual $F(x) \in [0,1]^J$. Así $Y \subset [0,1]^J$.
En conclusión, tenemos que Y es un subespacio de $[0,1]^J$ y F es un homeomorfismo entre X y Y. Como J es numerable, se tiene que $[0,1]^J \approx \mathbb{I}^{\aleph_0}$.

Esto prueba que (1) implica (3).
Veamos que (3) $\Rightarrow$ (2)
Por el Teorema 2.29 se tiene que $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ es metrizable, y es compacto por el Teorema de Tychonoff; se sigue que $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ es separable, por la Proposición 2.21. Así $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ tiene una base numerable (véase Proposición 2.22). Sea $Y \subset \mathbb{I}^{\aleph_0}$ tal que X sea homeomorfo a Y, se tiene que Y tiene una base numerable, además Y es metrizable, pues Y es subespacio de $\mathbb{I}^{\aleph_0}$. Se verifica que X es metrizable y tiene una base numerable (pues X y Y son homeomorfos). Como segundo numerable implica separable, se concluye que X es separable y metrizable. Esto prueba que (3) implica (2).
Por último veamos que (2) $\Rightarrow$ (1)
Si X es separable y metrizable, entonces X tiene una base numerable, por la Proposición 2.22. Como metrizabilidad implica regularidad, se tiene que X es regular.
Así hemos probado que (2) implica (1). Con lo cual queda probado el teorema. □

Utilizando el Teorema 2.30 probaremos en el siguiente resultado.

2.31 Teorema. La imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio de Hausdorff es metrizable.

Demostración. Sean X compacto, Y espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Por el Teorema 2.6 tenemos que Y es compacto. Luego, por la Proposición 2.20 Y es normal, eso implica que Y es regular. Por el Teorema 2.30, es suficiente probar que Y es segundo numerable para concluir la metrizabilidad de Y.
Sea $\mathfrak{B}$ una base numerable para X (notemos que X es compacto, separable, por lo que tiene una base numerable). Sea $\mathfrak{C}$ la familia que consta de todas las uniones de un número finito de conjuntos de $\mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{C}$ es una colección numerable de conjuntos abiertos. Nótese que, para cada $C \in \mathfrak{C}$ tenemos que C es abierto, así $X \setminus C$ es cerrado. Notemos que, por el Teorema 2.15 f es cerrada, por lo que $f(X \setminus C)$ es cerrado, entonces $Y \setminus f(X \setminus C)$ es abierto.

Sea $\mathfrak{D} = \{Y \setminus f(X \setminus C) : C \in \mathfrak{C}\}$. Como $\mathfrak{C}$ es numerable, $\mathfrak{D}$ es una colección numerable de subconjuntos de Y. Mostraremos que $\mathfrak{D}$ es una base para Y. Sean U un abierto no vacío en Y y $p \in U$. Así, $f^{-1}(p) \subset f^{-1}(U)$. Nótese que $f^{-1}(U)$ es abierto por el Teorema 2.2.

Nuevamente por el Teorema 2.2 $f^{-1}(p)$ es un subconjunto cerrado de X, luego por la Proposición 2.13 $f^{-1}(p)$ es compacto. Para cada $x \in f^{-1}(p) \subset f^{-1}(U)$ tomemos a $B(x) \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B(x) \subset f^{-1}(U)$. Sea $\mathfrak{B}' = \{B(x) : x \in f^{-1}(p)\}$.
Dado que $\mathfrak{B}'$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(p)$, existe una subcubierta finita
$\{B(x_1), ..., B(x_n)\} \subset \mathfrak{B}'$ de $f^{-1}(p)$, es decir

$$f^{-1}(p) \subset B(x_1) \cup ... \cup B(x_n) \subset f^{-1}(U).$$

Consideremos a $C = B(x_1) \cup ... \cup B(x_n)$. Así, $C \subset f^{-1}(U)$, por lo que $X \setminus f^{-1}(U) \subset X \setminus C$, es decir $f(X \setminus f^{-1}(U)) \subset f(X \setminus C)$. Dado que

$$f(X \setminus f^{-1}(U)) = f(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(U)) = f(f^{-1}(Y \setminus U)) = Y \setminus U$$

entonces $Y \setminus f(X \setminus C) \subset U$. Así $p \in Y \setminus f(X \setminus C)$, de lo contrario $p \in f(X \setminus C)$, por lo que $X \setminus C \cap f^{-1}(p) \neq \emptyset$, lo cual contradice que $f^{-1}(p) \subset C$. En resumen, para todo abierto U en Y, para todo $p \in U$, existe $D = Y \setminus f(X \setminus C) \in \mathfrak{D}$ tal que $p \in D \subset U$. Así $\mathfrak{D}$ es una base para Y. $\square$

Ahora, mostraremos que cada espacio métrico y compacto, es la imagen continua del Conjunto de Cantor. Para esto recordemos la definición del Conjunto de Cantor.
Dado un intervalo cerrado $A = [a, b]$ en $\mathbb{R}$, donde $a < b$ se tiene que $\left[a, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}\right], \left[\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right]$ y $\left[\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}, b\right]$ son tres intervalos de la misma longitud, a saber $\frac{b-a}{3}$, cuya unión es el intervalo A.
Denotemos por $M(A)$ el intervalo abierto $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right)$. Observemos que $A \setminus M(A)$ es la unión de dos intervalos cerrados $[a, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}]$ y $\left[\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}, b\right]$ y estos son las componentes conexas de $A \setminus M(A)$. En este caso, el intervalo abierto $M(A)$ es llamado *el tercio medio* del intervalo cerrado A.
Sea $A_0 = [0, 1]$ y para cada $n \geq 1$ denotemos $A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup\{M(E) : E \in \mathscr{C}(A_{n-1})\}$, donde $\mathscr{C}(A_n) = \{E \subset A_n : E$ es componente conexa de $A_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $A_n \subset A_{n-1}$, en particular $A_n \subset A_0 = [0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
También A_n se puede expresar de la siguente manera.
Para cada $n \in \mathbb{N}, A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} (\frac{1 + 3^k}{3^n}, \frac{2 + 3^k}{3^n})$.

Además denotemos $C = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. C es llamado *El Conjunto de Cantor* en el intervalo $[0,1]$.

2.32 Proposición. El número de componentes conexas de A_n es igual a 2^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Haremos inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces
$$A_n = A_0 \setminus \bigcup_{k=0}^{0}(\frac{1+3^k}{3^1}, \frac{2+3^k}{3^n}) = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$
Dado que $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ son conjuntos compactos, se tiene que A_n tiene $2 = 2^1 = 2^n$ componentes conexas. Así, el resultado se cumple cuando $n = 1$.
Supongamos ahora que el número de componentes conexas de A_n es 2^n. Tenemos que A_{n+1} se obtiene de A_n a partir de restarle a A_n la unión de los tercios medios de cada componente conexa de A_n, es decir, cada componente conexa de A_n se divide en tres intervalos iguales y se le retira el intervalo abierto de en medio, entonces de cada componente conexa de A_n se obtienen dos componentes conexas de A_{n+1}. De modo que A_{n+1} tiene el doble de componentes conexas que A_n. Dado que A_n tiene 2^n componentes conexas, se tiene que A_{n+1} tiene $2(2^n) = 2^{n+1}$ componentes conexas.
Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, el número de componentes de A_n es 2^n. $\square$

2.33 Proposición. Para cada $n \in \mathbb{N}, A_n$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}, A_n$ es la unión de 2^n componentes conexas. Como cada componente conexa es un conjunto cerrado, se tiene que A_n es la unión de 2^n conjuntos cerrados. Además, la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, se sigue que A_n es un conjunto cerrado. $\square$

2.34 Observación. Notemos que $C = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto cerrado, ya que cada A_n es un conjunto cerrado. Además la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Por lo tanto, C es un conjunto cerrado.
Además $C \subset [0,1]$. También se sigue que C es la intersección de conjuntos cerrados en el intervalo $[0,1]$ a saber $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, la cual tiene

la p.i.f. Como $[0,1]$ es compacto y $C = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ se sigue que C es no vacío.
Más aún, por la definición de cada A_n podemos notar que todo número de la forma $\frac{k}{3^j}$, donde $k \in \{0, 1, \ldots, 3^j - 1\}$ y $j \in \mathbb{N}$ pertenece a A_n para todo $n \in \mathbb{N}$.
Es decir, el conjunto $\{\frac{k}{3^j} : j \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \ldots, 3^j - 1\}\}$ está contenido en el conjunto de Cantor, por esto C es un conjunto infinito.

2.35 Teorema. Tenemos lo siguiente:

(a) C es compacto.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto C es homeomorfo a C^n y a $C^{\aleph_0}$.

(c) Sea $P_n^m = A_n^m \cap C$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$, donde m denota la m-ésima componente conexa de A_n. El conjunto $\{P_n^m : n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ es una base para C y además P_n^m es un conjunto abierto y cerrado en C para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diám} P_n^m = 0$.

Demostración.
(a) Tenemos que C es un conjunto cerrado y además $C \subset [0,1]$ donde $[0,1]$ es un conjunto compacto, lo cual implica que C es un conjunto compacto.
(b) Para esta demostración, ver [13, Corolario 30.6].
(c) Primero veamos que $\{P_n^m : n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ es una base para C.
Sean $x \in C$ y U un abierto en C tal que $x \in U$. Sea V un abierto en $[0,1]$ tal que $U = C \cap V$, como $x \in V$, se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [0,1] \subset V$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. Como $x \in C$, se tiene que existe $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $x \in A_n^m$. Con esto $x \in P_n^m$.
Resta ver que $P_n^m \subset U$.
Sea $y \in P_n^m$. Como $y \in A_n^m$ se sigue que $y \in (x - \frac{1}{3^n}, x + \frac{1}{3^n}) \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset V$, es decir $y \in V$. Así $y \in C \cap V = U$. Con lo cual, $P_n^m \subset U$.
Por lo tanto, $\{P_n^m : n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ es una base para C.
Ahora, como A_n^m es cerrado en $[0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$, se tiene que $A_n^m \cap C = P_n^m$ es cerrado en C, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$.

Por otro lado, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$, P_n^m es la intersección de un intervalo abierto en $[0,1]$ con C, pues si $A_n^m = \left[\frac{a}{3^n}, \frac{a+1}{3^n}\right]$, entonces $P_n^m = A_n^m \cap C = \left(\frac{a-1}{3^n}, \frac{a+2}{3^n}\right) \cap C$. Con esto P_n^m es un conjunto abierto en C. $\square$

2.36 Teorema. Existe una función continua y suprayectiva $f : C \longrightarrow [0,1]$.

Demostración. Definimos $F_n : C \longrightarrow 2^{[0,1]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como sigue:

$$F_1(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & si \quad x \in A_1^1 \\ [\frac{1}{2}, 1] & si \quad x \in A_1^2 \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} [0, \frac{1}{4}] & si \quad x \in A_2^1 \\ \\ [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] & si \quad x \in A_2^2 \\ \\ [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] & si \quad x \in A_2^3 \\ \\ [\frac{3}{4}, 1] & si \quad x \in A_2^4 \end{cases}$$

.
.
.

$F_n(x) = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$ si $x \in A_n^m$ con $m \in \{1, ..., 2^n\}$.

Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}, F_n$ es semicontinua superiormente.
Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $x \in C$ y U un conjunto abierto en $[0,1]$ tal que $F_n(x) \subset U$. Como $x \in C$ entonces existe $m \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que $x \in A_n^m$.
Sea W un conjunto abierto en $[0,1]$ tal que $x \in A_n^m \subset W$ y $W \cap A_n^j = \emptyset$ si $j \in \{1, ..., 2^n\} \setminus \{m\}$.
Sea $V = W \cap C$, nótese que V es un conjunto abierto en C, además si $y \in V$, entonces $y \in A_n^m$, así $F_n(y) = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}] = F_n(x) \subset U$.
Por lo que $F_n(y) \subset U$ para todo $y \in V$.
Por lo tanto, F_n es semicontinua superiormente.

Veamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}, F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ para cada $x \in C$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in C$, entonces existe $k \in \{1, .., 2^{n+1}\}$ tal que $x \in A_{n+1}^k$, luego $F_{n+1}(x) = [\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}}]$.
Como k es natural, entonces es par o impar.
Supongamos que k es par, entonces $k = 2m$, para algún $m \in \mathbb{N}, (m \leq 2^n)$, entonces $A_{n+1}^k = A_{n+1}^{2m} \subset A_n^m$.
Así $x \in A_n^m$ y $F_n(x) = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$
Ahora
$F_{n+1}(x) = [\frac{2m-1}{2^{n+1}}, \frac{2m}{2^{n+1}}] = [\frac{2m-1}{2^{n+1}}, \frac{m}{2^n}] \subset [\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{m}{2^n}] = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}] = F_n(x)$.
Por lo que $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$.

Por otro lado, si k es impar, entonces $k = 2m - 1$ para algún $m \in \mathbb{N}, (m \leq 2^n)$, entonces $A_{n+1}^k = A_{n+1}^{2m-1} \subset A_n^m$, así $x \in A_n^m$ y $F_n(x) = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$
Entonces
$F_{n+1}(x) = [\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{2m-1}{2^{n+1}}] = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{2m-1}{2^{n+1}}] \subset [\frac{m-1}{2^n}, \frac{2m}{2^{n+1}}] = [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}] = F_n(x)$.
Por lo que $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$, para todo $x \in C$.

Ahora veamos que $[0,1] = \bigcup_{x \in C} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in C, F_n(x) \subset [0,1]$, entonces $\bigcup_{x \in C} F_n(x) \subset [0,1]$.
Luego, si $a \in [0,1]$, entonces existe $x \in C$ tal que $a \in F_n(x)$ (Por la definición de F_n), entonces $a \in \bigcup_{x \in C} F_n(x)$. Por lo que $[0,1] \subset \bigcup_{x \in C} F_n(x)$.
Por lo tanto, $[0,1] = \bigcup_{x \in C} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por último veamos que $\lim_{n \to \infty} diam(F_n(x)) = 0$. Para cada $x \in C$.
Recordemos que $diam(F_n(x)) = sup\{d(a,b) : a, b \in F_n(x)\}$.
Sea $x \in C$. Notemos que por la definición de F_n, se tiene que $d(a,b) \leq \frac{1}{2^n}$, para cada $a, b \in F_n(x)$. Luego, dado que $0 \leq d(a,b)$, para cada $a, b \in F_n(x)$ y cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq diam(F_n(x)) \leq \frac{1}{2^n}$. Tomando límites se tiene que $0 \leq \lim_{n \to \infty} diam(F_n(x)) \leq \lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{2^n}$, entonces

$0 \leq \lim_{n\to\infty} diam(F_n(x)) \leq 0$.
Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} diam(F_n(x)) = 0$ para cada $x \in C$.

Así por [11, 7.4] existe $f : C \longrightarrow [0,1]$ función continua y suprayectiva. $\square$

2.37 Corolario. Existe una función continua y suprayectiva $\phi : C \longrightarrow [0,1]^{\aleph_0}$.

2.38 Definición. Una función continua $r : X \longrightarrow Y$ es llamada **retracción** siempre que $Y \subset X$ y la función continua $r_{|_Y}$ es la identidad en Y.
El espacio Y es llamado un *retracto* de X.

Es fácil verificar que r es una retracción si y sólo si $r \circ r = r$.

2.39 Teorema. Todo subconjunto cerrado y no vacío de C es un retracto de C.

Demostración. Vamos a mostrar que para cada $\emptyset \neq F = \overline{F} \subset C$ existe una retracción $r : C \longrightarrow F$.
Dado que $\{P_n^m : n \in \mathbb{N}, m \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ es una base para C y $C \setminus F$ es un conjunto abierto en C, entonces existe un subconjunto $J \subset \mathbb{N}$ y para cada $n \in J$, existe un subconjunto $E_n \subset \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $C \setminus F = \bigcup\{P_n^m : n \in J, m \in E_n\}$.
Observemos que si $n \geq n'(m \in E_n$ y $m' \in E_{n'})$, entonces $P_n^m \cap P_{n'}^{m'} = \emptyset$ o $P_n^m \subset P_{n'}^{m'}$. Por esto podemos suponer que $P_n^m \cap P_{n'}^{m'} = \emptyset$ para cualquier $n, n' \in J, m \in E_n$ y $m' \in E_{n'}$.
Ahora, para cada $n \in J$ y cada $m \in E_n$ denotemos por z_n^m al punto de F tal que $d(z_n^m, P_n^m) = \inf\{d(z, P_n^m) : z \in F\}$. Notemos que z_n^m existe porque F es cerrado.
Definimos $r : C \longrightarrow F$ por

$$r(x) = \begin{cases} x & , si \quad x \in F \\ \\ z_n^m & , si \quad x \in P_n^m, n \in J \text{ y } m \in E_n (P_n^m \subset C \setminus F). \end{cases}$$

Nótese que r está bien definida pues $P_n^m \cap P_{n'}^{m'} = \emptyset$ para cualquier $n, n' \in J, m \in E_n$ y $m' \in E_{n'}$.
Como $r_{|_F}$ es la identidad, se tiene que r es suprayectiva. Falta ver que

r es continua.
Sea $x \in C$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ un sucesión en C tal que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$.
Por demostrar que, $\lim\limits_{i\to\infty} r(x_i) = r(x)$.
Analicemos dos casos:
(1) Si $x \in C \setminus F$, entonces existen $n \in J$ y $m \in E_n$ tal que $x \in P_n^m$. Como P_n^m es un conjunto abierto en C y $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, se tiene que existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in P_n^m$ para todo $i \geq L$.
Se tiene que $r(x) = z_n^m$ y $r(x_i) = z_n^m$ para todo $i \geq L$.
Así, en este caso, se concluye que $\lim\limits_{i\to\infty} r(x_i) = r(x)$.
(2) Si $x \in F$, entonces tenemos dos subcasos:
(2.1) Existe $L \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq L, x_i \in F$, en este subcaso $r(x_i) = x_i$ y $r(x) = x$. Como $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, se tiene que $\lim\limits_{i\to\infty} r(x_i) = r(x)$.
(2.2) No existe $L \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq L, x_i \in F$, en este subcaso se encuentra una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}, x_{i_j} \in C \setminus F$. Entonces existe $n(j) \in J$ y $m \in E_{n(j)}$ tal que $x_{i_j} \in P_{n(j)}^m$. Luego $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \bigcup D$, donde $D = \{P_{n(j)}^m : j \in \mathbb{N}\}$.
Nótese que D no es un conjunto finito, pues de lo contario existiría $P_{n(j_0)}^m \subset D$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq r$ entonces $x_{i_j} \in P_{n(j_0)}^m$. Y dado que $P_{n(j_0)}^m$ es cerrado y $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j} = x$, se tiene que $x \in P_{n(j_0)}^m$, lo cual es una contradicción pues $x \in F$. Así D no es finito.
Luego como $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diám} P_n^m = 0$, se tiene que $\lim\limits_{j\to\infty} \text{diám} P_{n(j)}^m = 0$.
Ahora, sea $q_n^m \in P_n^m$ el punto del conjunto cerrado P_n^m el cual está más cerca del punto z_n^m. Se tiene entonces, por la definición de los puntos z_n^m, q_n^m, que $\mid z_n^m - q_n^m \mid = d(z_n^m, P_n^m) \leq d(x, P_n^m)$.
Por lo tanto $\mid z_{n(j)}^m - q_{n(j)}^m \mid \leq d(x, P_{n(j)}^m) \leq \mid x - x_{i_j} \mid$.
Así, tenemos lo siguiente:
$\mid z_{n(j)}^m - x \mid \leq \mid z_{n(j)}^m - x_{i_j} \mid + \mid x_{i_j} - x \mid \leq \mid z_{n(j)}^m - q_{n(j)}^m \mid + \mid q_{n(j)}^m - x_{i_j} \mid + \mid x_{i_j} - x \mid \leq 2 \mid x_{i_j} - x \mid + \text{diám} P_{n(j)}^m$.
Ahora sea $\epsilon > 0$, luego existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $j \geq N_1, \mid x - x_{i_j} \mid < \frac{\epsilon}{4}$ y para todo $j \geq N_2, \mid \text{diám} P_{n(j)}^m - 0 \mid < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces
$\mid z_{n(j)}^m - x \mid \leq 2 \mid x_{i_j} - x \mid + \text{diám} P_{n(j)}^m < 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para cada $j \geq N$.
Como $x_{i_j} \in P_{n(j)}^m$, se tiene que $r(x_{i_j}) = z_{n(j)}^m$, es decir $\mid r(x_{i_j}) - r(x) \mid < \epsilon$ para cada $j \geq N$.
Se concluye que $\lim\limits_{j\to\infty} r(x_{i_j}) = x = r(x)$. Luego, por la Proposición

1.15 se tiene que $\lim\limits_{i\to\infty} r(x_i) = r(x)$. Con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

2.40 Teorema. Para cada espacio métrico y compacto X existe una función continua y suprayectiva $f : C \longrightarrow X$.

Demostración. Sea X espacio métrico compacto. Por la Proposición 2.21 se sabe que X es separable, y por el Teorema 2.30 existe un homeomorfismo

$$h : X \longrightarrow h(X) \subset [0,1]^{\aleph_0}.$$

Así, $h(X)$ es compacto, entonces es cerrado en $[0,1]^{\aleph_0}$. Recordemos que por el Corolario 2.37, existe una función continua y suprayectiva

$$\phi : C \longrightarrow [0,1]^{\aleph_0}.$$

Entonces pongamos $F = \phi^{-1}(h(X)) \subset C$. El Teorema 2.39, nos garantiza que existe $r : C \longrightarrow F$ una retracción. Sea $f = h^{-1} \circ (\phi|_F) \circ r$. (Véase el siguiente Diagrama).

$$\begin{array}{ccccc} & r & & & \\ C & \longrightarrow & F & \subset & C \\ f\downarrow & & \downarrow \phi|_F & & \downarrow \phi \\ X & \longrightarrow & h(X) & \subset & [0,1]^{\aleph_0} \\ & h & & & \end{array}$$

$\square$

2.41 Problema. ¿Séra cierto el recíproco del Teorema 2.40? Es decir, ¿si un espacio topológico es imagen continua del conjunto de Cantor, entonces es métrico compacto?

Como la compacidad se preserva bajo la continuidad, entonces imágenes continuas del conjunto de Cantor son espacios compactos, sin embargo la propiedad de metrización no es una propiedad invariante bajo funciones continuas, así que no se puede asegurar que, en general, el recíproco del Teorema 2.40 sea cierto.
El Teorema 2.31 nos permite dar solución al Problema 2.41, y esto lo enunciamos en el siguiente corolario.

2.42 Corolario. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces X es imagen continua del conjunto de Cantor si y sólo si X es métrico compacto.

Demostración.
$\Rightarrow$] Si X es imagen continua del conjunto de Cantor, entonces existe $f : C \longrightarrow X$, función continua y suprayectiva. Como X es de Hausdorff, por el Teorema 2.31, X es metrizable. El Teorema 2.35, nos dice que C es compacto, entonces por el Teorema 2.6, $f(C) = X$, es compacto. Por lo tanto, X es métrico compacto.
$\Leftarrow$] Si X es métrico compacto, entonces por el Teorema 2.40, se tiene que X es imagen continua del conjunto de Cantor. $\square$

Capítulo 3

Espacios localmente conexos

En este capítulo enunciamos las definiciones de conexidad local y conexidad en pequeño, daremos algunos resultados que relacionan estos conceptos. Además veremos que la imagen continua de un espacio localmente conexo, en general, no es un espacio localmente conexo y mostraremos bajo qué condiciones sí lo es. Finalmente demostramos que todo espacio de Hasudorff es imagen continua del intervalo $[0, 1]$ si y sólo si es un continuo localmente conexo.

Dado un espacio topológico X, recordemos que una **base local** $\beta(x)$ en x es una colección de vecindades del punto x que tienen la propiedad de que para cada vecindad U de x, existe un elemento $V \in \beta(x)$ tal que $V \subset U$.

3.1 Definición. Un espacio X es **localmente conexo** en un punto $x \in X$, si existe una base local $\beta(x)$ compuesta de conjuntos abiertos y conexos. El espacio X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

3.2 Definición. Un espacio X es **conexo en pequeño** en un punto p de X ($c.i.k.$ en p), si para cada conjunto abierto, U de X, con $p \in U$, existe un conjunto conexo, V de X, tal que $p \in int(V)$ y $V \subset U$. El espacio X es conexo en pequeño ($c.i.k.$) si X es $c.i.k.$ en x para todo punto x de X.

3.3 Observación. Un espacio X es localmente conexo en p implica que X es $c.i.k.$ en p. Pero el recíproco no es cierto, esto se puede consultar en [13, Ejemplo 27.15].

3.4 Teorema. Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es localmente conexo;
2. X es *c.i.k.*;
3. Para cada abierto U de X y para cada componente, C, de U, se tiene que C es abierto en X.

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ Sean $p \in X$ y U un abierto en X tal que $p \in U$. Como X es localmente conexo en p, entonces existe un conjunto abierto y conexo, V de X, tal que $p \in V \subset U$.
Dado que V es abierto, se tiene que $V = int(V)$. Así existe V conexo tal que $p \in int(V)$ y $V \subset U$.
Por lo tanto X es *c.i.k.* en p. Como p lo elegimos arbitrario, se tiene que X es *c.i.k.*
$2 \Rightarrow 3$ Supongamos que X *c.i.k.* Sean U un abierto de X y C una componente de U. Si x es un punto de C podemos elegir un conjunto conexo, V, de X tal que $x \in int(V)$ y $V \subset U$. Como V es conexo, entonces V está contenido en la componente C de U. Por lo que $p \in int(V) \subset C$. Así C es abierto en X.
$3 \Rightarrow 1$ Supongamos que las componentes de los conjuntos abiertos de X son abiertos. Dado un punto x de X y un abierto U de X tal que $x \in U$, sea C la componente de U que contiene a x. Ahora, C es conexo y es abierto en X por hipótesis, entonces X es localmente conexo en x. Por lo tanto X es localmente conexo. $\square$

3.5 Definición. Sean X, Y espacios topológicos y sea $p : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. La función p se dice que es una **función de identificación** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

3.6 Proposición. Si $p : X \longrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una función de identificación.

Demostración. Como p es una función continua, se tiene que para cada abierto U de Y, $p^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X.
Ahora, como p es suprayectiva, se tiene que $p(p^{-1}(U)) = U$ para cada subconjunto U de Y. Si p es abierta y para cada subconjunto U de Y

$p^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $p(p^{-1}(U)$ es abierto en Y, es decir, U es abierto en Y.
Por otro lado, si p es cerrada y para cada subconjunto U de Y, $p^{-1}(U)$ es abierto en X, tomemos al conjunto cerrado $X \setminus p^{-1}(U)$ y consideremos su imagen bajo p, así se tiene que $p(X \setminus p^{-1}(U)) = p(X) \setminus p(p^{-1}(U)) = Y \setminus U$ es un conjunto cerrado en Y, por lo que U es abierto en Y.
Se concluye entonces que, p es una función de identificación. □

3.7 Definición. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.

3.8 Proposición. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un espacio de Haudorff y compacto, X y U es un conjunto abierto en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset U$ para cada $n \geq m$.

Demostración. Supongamos que tal m no existe, entonces $A_n \nsubseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathscr{A} = \{A_n \setminus U : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, la cual tiene la p.i.f. Ya que si $\{A_1 \setminus U, A_2 \setminus U, \cdots, A_k \setminus U\}$ es una familia finita de la familia $\mathscr{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k}(A_i \setminus U) \subset A_i \setminus U$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. Dado que $A_i \nsubseteq U$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, se tiene que $A_i \setminus U \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$.
Así $\bigcap_{i=1}^{k}(A_i \setminus U) \neq \emptyset$.
Por lo que $\mathscr{A}$ tiene la p.i.f.
Como X es compacto, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus U) \neq \emptyset$.
Dado que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus U) \subset (A_n \setminus U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \setminus U \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $A_n \nsubseteq U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de ahí que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \nsubseteq U$, lo cual es una contadicción. □

3.9 Corolario. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, no vacíos de un espacio compacto X, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Sea $U = \emptyset$, entonces se tiene que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$.
Notemos que U es un conjunto abierto en X, por la Proposición 3.8 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset U$, pero $A_m \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $U = \emptyset$.
Por lo que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. □

3.10 Corolario. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, conexos, no vacíos de un espacio de Hausdorff y compacto, X, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subconjunto cerrado, no vacío y conexo de X.

Demostración. Denotemos por $\mathscr{A}$ al conjunto $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
Notemos que $\mathscr{A}$ es una intersección numerable de subconjuntos cerrados en X, por lo que $\mathscr{A}$ es un conjunto cerrado en X. Por el Corolario 3.9 se tiene que $\mathscr{A}$ es un conjunto no vacío. Resta probar que $\mathscr{A}$ es un conjunto conexo.
Supongamos que $\mathscr{A}$ no es conexo, entonces $\mathscr{A} = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son conjuntos cerrados, no vacíos y ajenos. Como A_1 es un espacio normal, existen abiertos y ajenos en A_1, V y W tales que $B_1 \subset V$ y $B_2 \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces por la Proposición 3.8 tenemos que $A_m \subset U$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $A_m = (A_m \cap V) \cup (A_m \cap W)$. Como $B_1 \cup B_2 = \mathscr{A} \subset A_m$ y dado que $B_1 \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$ y $B_2 \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$, tenemos que $A_m \cap V \neq \emptyset$ y $A_m \cap W \neq \emptyset$. Por lo que el continuo A_m no es un conjunto conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathscr{A}$ es conexo. □

Del Corolario 3.10 se puede concluir que la intersección arbitraria de una sucesión decreciente de continuos es un continuo.

3.11 Teorema. Si X y Y son continuos y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

Demostración. Sean X y Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Como X y Y son continuos, se tiene que X es un espacio compacto y Y es un espacio de Hausdorff. Luego, por el Teorema 2.15, se sigue que f es cerrada. $\square$

En general, la imagen continua de un espacio localmente conexo no tiene porque ser un espacio localmente conexo.

3.12 Ejemplo. Consideremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ cualquier función continua y biyectiva. Como $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, $\mathbb{N}$ es localmente conexo y f es continua. Sin embargo $\mathbb{Q}$ no es un espacio localmente conexo pues las componentes de cada abierto en $\mathbb{Q}$ es cada punto y ese no es un conjunto abierto en $\mathbb{Q}$, así, por el Teorema 3.4 $\mathbb{Q}$ no es localmente conexo.

Así que, para lograr una conclusión satisfactoria, es necesario agregar condiciones adicionales para una función continua.

3.13 Teorema. Si X es un espacio localmente conexo y $f : X \longrightarrow Y$ es una función de identificación, entonces Y es localmente conexo.

Demostración. Por el Teorema 3.4 bastará probar que las componentes de los conjuntos abiertos de Y también son conjuntos abiertos en Y. Sean U un abierto en Y y C una componente de U. Supongamos que $x \in f^{-1}(C)$ y sea C_x la componente de $f^{-1}(U)$ que contiene a x. Dado que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y X es localmente conexo, se tiene que C_x es un conjunto abierto en X. Como f es continua y C_x es conexo, se tiene que $f(C_x)$ es conexo y $f(x) \in f(C_x) \cap C$. Además, como $C_x \subset f^{-1}(U), f(C_x) \subset U$, se sigue que $f(C_x) \subset C$ por la definición de componente. Por lo tanto, $x \in C_x \subset f^{-1}(C)$. De ahí que $f^{-1}(C)$ es abierto en X. Luego C es abierto en Y, pues f es una función de identificación.
Por lo tanto, Y es localmente conexo. $\square$

3.14 Corolario. Si X es un continuo localmente conexo y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entonces Y es un continuo localmente conexo.

Demostración. Dado que X es compacto, conexo y de Hausdorff y f es continua y suprayectiva entonces Y es compacto, conexo y de Hausdorff, es decir, un continuo, luego por el Teorema 3.11 se tiene que f es cerrada y por la Proposición 3.6 f es una función de identificación. Como X es localmente conexo, se sigue del Teorema 3.13 que Y es localmente conexo. $\square$

3.15 Definición. Un **arco** es cualquier continuo homeomorfo a $\mathbb{I}$. Si A es un arco y $h : \mathbb{I} \to A$ es un homeomorfismo, definimos los puntos finales de A como el par de puntos en A, $h(0)$ y $h(1)$.

3.16 Definición. Un espacio topológico X es **arco-conexo** si para cada par de puntos $p, q \in X$ existe un arco A tal que $\{p, q\} \subset A \subset X$.

3.17 Definición. Un espacio topológico X es **uniformemente localmente arco-conexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos $x, y \in X$, con la condición que $\rho(x, y) < \delta$ existe un arco A contenido en X de manera que x y y son los puntos finales de A y $\text{diam}(A) < \varepsilon$.

3.18 Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos (X, ρ_X) y (Y, ρ_Y) es **uniformemente continua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ tales que $\rho(x, y) < \delta$ se cumple que $\rho_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$.

3.19 Lema. Si X es un espacio métrico y compacto, entonces para cada cubierta abierta $\mathscr{U}$, de X, existe un número $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto A de X con $\text{diám}(A) < \delta$, existe un elemento U de $\mathscr{U}$ tal que $A \subset U$.
A δ se le llama un número de Lebesgue para la cubierta $\mathscr{U}$.

Demostración. Sea X un espacio métrico y compacto y supongamos que existe una cubierta abierta $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X que no tiene un número de Lebesgue. Por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe algún $x_n \in X$ tal que la bola $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ no está contenida en ningún abierto de $\mathscr{U}$.
Como X es métrico compacto, se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sea $x \in X$ el límite de esta sucesión y sea $j \in I$ tal que $x \in U_j$. Como U_j es abierto, se tiene que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U_j$. Tomemos un $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{n_{k_0}} < \frac{r}{2}$ y $d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{r}{2}$.
Por la desigualdad del triángulo, si $z \in B_{\frac{r}{2}}(x_{n_{k_0}})$, entonces $d(z, x) \leq$

$d(z, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Es decir, $B_{\frac{r}{2}}(x_{n_{k_0}}) \subset B_r(x)$.
Así, se tiene que $B_{\frac{1}{n_{k_0}}}(x_{n_{k_0}}) \subset B_{\frac{r}{2}}(x_{n_{k_0}}) \subset B_r(x) \subset U_j$, lo cual es una contradicción por como definimos los x_n. $\square$

La recíproca del lema anterior no es cierta, es decir, existen espacios métricos no compactos con la propiedad del número de Lebesgue.

3.20 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{Z}$ con la métrica usual. Entonces, sin importar cuál sea la cubierta abierta $\mathscr{U}$, $\delta = 1$ es un número de Lebesgue para $\mathscr{U}$, pues para cada $x \in X$, $B_1(x) = \{x\}$ y en particular está contenido en algún elemento de la cubierta $\mathscr{U}$.

3.21 Lema. Sean $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si (X, ρ_X) es compacto entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que, si $\rho_X(x, y) < \delta_x$ entonces $\rho_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Así $\mathscr{B} = \{B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta para X. Como X es un espacio métrico compacto, por el Lema 3.19, se tiene que existe $\delta > 0$ un número de Lebesgue para $\mathscr{B}$ tal que para cada $x, y \in X$ de tal manera que $\rho_X(x, y) < \delta$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\rho_X(x, x_0) < \frac{\delta_{x_0}}{2} < \delta_{x_0}$ y $\rho_Y(y, x_0) < \frac{\delta_{x_0}}{2} < \delta_{x_0}$. Luego $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho_Y(f(y), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, porque f es continua.
De esta manera, si $\rho_X(x, y) < \delta$ se cumple que $\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_Y(f(x), f(x_0)) + \rho_Y(f(x_0), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Por lo tanto, f es uniformemente continua. $\square$

3.22 Teorema. Sea X un continuo localmente conexo. Entonces:

1. X es arco-conexo;
2. cada subcojunto conexo y abierto de X es arco-conexo;
3. X es uniformemente localmente arco-conexo.

Para la prueba ver [13, 31.2].

3.23 Teorema. Un espacio de Hausdorff, X, es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$ si y sólo si X es un continuo localmente conexo.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es un espacio de Hausdorff y que existe una función continua y suprayectiva, $f : [0,1] \longrightarrow X$.
Es claro que X debe ser un espacio compacto y conexo, pues estas propiedades se preservan bajo funciones continuas, véase Teorema 2.6. Además por el Teorema 2.31 sabemos que X es un espacio metrizable. Así, X es un continuo, luego f es una función cerrada véase Teorema 3.11. Luego por la Proposición 3.6 f es de identificación. Así se obtiene por Teorema 3.13 que X es un espacio localmente conexo.
Esto prueba la necesidad.

$\Leftarrow$] Supongamos que X es un continuo, métrico y localmente conexo. Consideremos una función continua y suprayectiva, f, definida en el conjunto de Cantor, $C \subset [0,1]$, sobre X, véase Teorema 2.40.
Denotemos por $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ a la colección de las componentes conexas de $[0,1] \setminus C$, las cuales están enumeradas por su tamaño y para los que son de igual tamaño numeradas de izquierda a derecha. Es decir, $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $I_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $I_3 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, $I_4 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $I_5 = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $I_6 = \left(\frac{17}{27}, \frac{18}{27}\right)$ e $I_7 = \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$, etc.
Extenderemos la definición de f a cada uno de los conjuntos $I_n, n \in \mathbb{N}$.
Denotemos $I_n = (p_n, q_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Como X es uniformemente localmente arco-conexo, por el Teorema 3.22, existe una sucesión de números positivos $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

1. $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ y $\rho(x,y) < \delta_n$ existe un arco $A(x,y) \subset X$ con puntos extremos x y y tal que $diam(A(x,y)) < \frac{1}{2^n}$.
   Como $f : C \longrightarrow X$ es uniformemente continua, existe una sucesión de números positivos $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\eta_{n+1} < \eta_n < \frac{1}{2^{n+1}}$ y
2. $\forall x, y \in C$ con $|x - y| < \eta_n$ se tiene que $\rho(f(x), f(y)) < \delta_n$

Afirmación:
Existe una subsucesión $\{\eta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión de enteros positivos $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$

(i) $\eta_{n_{k+1}} \leq diam(I_m) < \eta_{n_k}$, para todo $m \in \{m_k + 1, ..., m_{k+1}\}$; y

(ii) $diam(I_m) < \eta_{n_{k+1}}$, para todo $m > m_{k+1}$

Para probar esta afirmación procederemos por inducción.
Caso $k = 1$
Denotemos $n_1 = 1$ y $m_1 = \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : \eta_{n_1} \leq diam(I_m)\}$.

Notemos que $1 \leq m_1$ ya que $\eta_{n_1} = \eta_1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} = diam(I_1)$.
Además, para cada $m \in \{1, ..., m_1\}$, $\eta_{n_1} \leq diam(I_m)$; y para cada $m > m_1$ $diam(I_m) < \eta_{n_1}$.
En particular, tenemos que $diam(I_{m_1+1}) < \eta_{n_1}$.
Denotemos $n_2 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \leq diam(I_{m_1+1})\}$ y $m_2 = \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : \eta_{n_2} \leq diam(I_m)\}$.
Observamos que n_2 está determinado ya que $\text{lím}\, \eta_n = 0$ y $0 < diam(I_{m_1+1})$.
También m_2 está determinado ya que m_1+1 pertenece al conjunto $\{m \in \mathbb{N} : \eta_{n_2} \leq diam(I_m)\}$ y este conjunto es finito pues $\text{lím}\, diam(I_m) = 0$.
Por otra parte, es claro que:

(I) $\eta_{m_2} \leq diam(I_m) < \eta_{n_1}$, para cada $m \in \{m_1 + 1, ..., m_2\}$; y

(II) $diam(I_m) < \eta_{m_2}$, para cada $m > m_2$.

Esto completa la prueba para el caso $k = 1$.

Paso inductivo.
Supongamos que se han determinado conjuntos de enteros positivos $\{n_1, ..., n_k\}$ y $\{m_1, ..., m_k\}$ de modo que:

i) $\eta_{n_k} \leq diam(I_m) < \eta_{n_{k-1}}$, para todo $m \in \{m_{k-1} + 1, ..., m_k\}$; y

ii) $diam(I_m) < \eta_{n_k}$, para todo $m > m_k$.

Por la condición (ii) de la afirmación se tiene que $diam(I_{m_k+1}) < \eta_k$.
Denotemos $n_{k+1} = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \eta_n \leq diam(I_{m_k+1})\}$ y $m_{k+1} = \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : \eta_{n_{k+1}} \leq diam(I_m)\}$.
Observemos que n_{k+1} está determinado pues $\text{lím}\, \eta_n = 0$ y $0 < diam(I_{m_k+1})$.
También m_{k+1} está determinado ya que $m_k + 1$ pertenece al conjunto $\{m \in \mathbb{N} : \eta_{n_{k+1}} \leq diam(I_m)\}$ y este conjunto es finito pues $\text{lím}\, diam(I_m) = 0$.

Por otra parte obsérvese que:
$\eta_{n_{k+1}} \leq diam(I_m)$ para cada $m \in \{m_k + 1, ..., m_{k+1}\}$, ya que m_{k+1} es el número natural más grande para el cual esta desigualdad es cierta.
También $diam(I_m) < \eta_{n_k}$, para todo $m > m_k$, esta desigualdad se da por la hipótesis de inducción, o sea en la condición ii).
Así se tiene que:

(a) $\eta_{n_{k+1}} \leq diam(I_m) < \eta_{n_k}$, para cada $m \in \{m_k + 1, ..., m_{k+1}\}$.

(b) $diam(I_m) < \eta_{n_{k+1}}$, para todo $m > m_{k+1}$.

En resumen, los enteros positivos n_{k+1} y m_{k+1}, definidos como arriba, cumplen con las condiciones (I) y (II), lo cual completa la prueba de la afirmación.

A continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una función, f_n con dominio el intervalo cerrado $\overline{I_n} = [p_n, q_n]$ analizando dos casos:

- $f(p_n) = f(q_n)$; en este caso denotamos $A_n = \{f(p_n)\}$ y definimos $f_n : \overline{I_n} \longrightarrow A_n$ como $f_n(x) = f(p_n)$ para todo $x \in \overline{I_n}$, es decir, en este caso f_n es la función constante definida en $\overline{I_n}$ de valor $f(p_n)$.

- $f(p_n) \neq f(q_n)$; en este caso existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \{m_k + 1, ..., m_{k+1}\}$, por la condición (i) de la afirmación se tiene que $|p_n - q_n| < \eta_{n_k}$; luego por la condición 2 se obtiene que $\rho(f(p_n), f(q_n)) < \delta_n$, luego por la condición 1 tomamos un arco A_n en X con puntos extremos $f(p_n)$ y $f(q_n)$ y tal que $diam(A_n) < \frac{1}{2^n}$. En este caso consideramos un homeomorfismo $f_n : \overline{I_n} \longrightarrow A_n$ tal que $f_n(p_n) = f(p_n)$ y $f_n(q_n) = f(q_n)$.

Ahora definimos $g : [0,1] \longrightarrow X$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in C \\ f_n(x) & si \quad x \in \overline{I_n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Notemos que g es una función suprayectiva pues f lo es, sólo resta probar que g es una función continua.
Para esto sea $x \in [0,1]$ y $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = x$.
Analicemos dos casos:

1) Si $x \in [0,1] \setminus C$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_n$. Como I_n es un conjunto abierto en $[0,1]$ y $\lim x_l = x$ se tiene que existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $x_l \in I_n$, para todo $l \geq L$.
Se tiene que $g(x_l) = f_n(x_l)$ para todo $l \geq L$ y $g(x) = f_n(x)$.
Dado que f_n es una función continua, se tiene que $\lim f_n(x_l) = f_n(x)$.
Así, en este caso, se concluye que $\lim\limits_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$.

2) Si $x \in C$, en este caso usaremos la Proposición 2.17 para probar que $\lim\limits_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$.

Sea $\{g(x_{l_j})\}_{j=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión $\{g(x_l)\}_{l=1}^{\infty}$.
Analicemos dos subcasos:

2.1) La sucesión $\{x_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{x_{l_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{l_{j_k}} \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
En este subcaso $g(x_{l_{j_k}}) = f(x_{l_{j_k}})$ y $g(x) = f(x)$ así, tomamos la subsucesión $\{g(x_{l_{j_k}})\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{g(x_{l_j})\}_{j=1}^{\infty}$.
Notemos que $\lim g(x_{l_{j_k}}) = \lim f(x_{l_{j_k}}) = \lim f(x_l) = f(x) = g(x)$, ya que f es continua, así se tiene que $\lim g(x_{l_{j_k}}) = g(x)$, luego, por la Proposición 2.17 se concluye que $\lim\limits_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$.

2.2) La sucesión $\{x_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ no tiene subsucesiones en C. Es decir, el conjunto $\{x_{l_j} : j \in \mathbb{N}\} \cap C$ es finito, luego podemos suponer que $x_{l_j} \in [0,1] \setminus C$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
Notemos que $\forall j \in \mathbb{N}$, existe $l_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_{l_j} \in I_{l_j}$.
Como $x_{l_{j_k}} \to x$, se tiene que $x \in \overline{I_{l_{j_k}}}$, entonces $g(x) = f_m(x)...(*)$.
A continuación dividimos el análisis en dos subcasos:

2.2.1) La sucesión $\{I_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{I_{l_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $I_{l_{j_k}} = I_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$.
Notemos que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{l_{j_k}} \in I_{l_{j_k}} = I_m$, entonces $g(x_{l_{j_k}}) = f_m(x_{l_{j_k}})$.
Tomamos la subsucesión formada por las imágenes de los $x'_{l_{j_k}}s$ bajo g, es decir, tomamos la subsucesión $\{g(x_{l_{j_k}})\}_{k=1}^{\infty}$.
Notemos que $\lim g(x_{l_{j_k}}) = \lim f_m(x_{l_{j_k}}) = f_m(x) = g(x)$, esto último por la continuidad de f_m y por $(*)$, luego, por la Proposición 2.17 se tiene que $\lim\limits_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$.

2.2.2) La sucesión $\{I_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ no tiene subsucesión constante, en este subcaso podemos suponer que $I_{l_{j_1}} \neq I_{l_{j_2}}$ si $j_1 \neq j_2$.
Probaremos que $\lim\limits_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$. Para hacer esto, primero notemos que:
$\rho(p_{l_j}, x) \leq \rho(p_{l_j}, x_{l_j}) + \rho(x_{l_j}, x) \leq diam(\overline{I_{l_j}}) + \rho(x_{l_j}, x)...(**)$.
Por esto y tomando en cuenta que $\lim diam(\overline{I_l}) = 0$, $\lim \rho(x_{l_j}, x) = 0$, se obtiene que $\lim p_{l_j} = x$.
Luego como la función $f : C \longrightarrow X$ es continua y puesto que $p_{l_j}, x \in C$, se sigue que $\lim f(p_{l_j}) = f(x)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2}$ y $\rho(f(p_{l_j}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $j \geq N$, esto último es posible por $(**)$.
Notemos que $\forall j \geq N$, $diam(A_{l_j}) < \frac{1}{2^{l_j}} \leq \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Por otra parte notemos que:
$\rho(g(x_{l_j}), g(x)) \leq \rho(g(x_{l_j}), g(p_{l_j})) + \rho(g(p_{l_j}), g(x)) = \rho(f_{l_j}(x_{l_j}), f_{l_j}(p_{l_j})) + \rho(f(p_{l_j}), f(x)) \leq diam(A_{l_j}) + \rho(f(p_{l_j}), f(x))$.
Se sigue que, para todo $j \geq N$
$\rho(g(x_{l_j}), g(x)) \leq diam(A_{l_j}) + \rho(f(p_{l_j}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Esto demuestra que $\lim\limits_{l \to \infty} g(x_l) = g(x)$.

Así, por todo lo anterior, se tiene que la función g es continua. $\square$

Dado un espacio topológico X, consideramos los siguientes conjuntos:

$$L(X) = \{p \in X : X \text{ es } c.i.k. \text{ en p } \} \text{ y } N(X) = X \setminus L(X).$$

Las siguientes tres afirmaciones son tomadas de [6].

3.24 Lema. Sean X y Y espacios de Hausdorff y compactos, $V \subset X$ y $y \in Y$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva y $f^{-1}(y) \subset int(V)$, entonces $y \in int(f(V))$.

Demostración. Observemos que $f^{-1}(y) \subset int(V)$ implica que $f^{-1}(y) \cap (\overline{X \setminus V}) = \emptyset$, luego $y \notin f(\overline{X \setminus V})$, es decir, $y \in Y \setminus f(\overline{X \setminus V})$.
Notemos que f es una función cerrada, ver Teorema 2.15. Así, $f(\overline{X \setminus V})$ es un conjunto cerrado en Y. En consecuencia, $Y \setminus f(\overline{X \setminus V})$ es un conjunto abierto en Y.
Por otra parte, veamos que $Y \setminus f(V) \subset f(\overline{X \setminus V})$. Para hacer esto, sea $z \in Y \setminus f(V)$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$. Notemos que $x \notin V$. Así, $x \in X \setminus V$. Como $X \setminus V \subset \overline{X \setminus V}$, se tiene que $f(x) \in f(X \setminus V) \subset f(\overline{X \setminus V})$, esto implica que $z \in f(\overline{X \setminus V})$.
Esto prueba que $Y \setminus f(V) \subset f(\overline{X \setminus V})$. Se sigue que $Y \setminus f(\overline{X \setminus V}) \subset f(V)$.
En resumen, $Y \setminus f(\overline{X \setminus V})$ es un conjunto abierto en Y tal que $y \in Y \setminus f(\overline{X \setminus V}) \subset f(V)$. Esto prueba que $y \in int(f(V))$. $\square$

3.25 Teorema. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, $y \in Y$. Si X es c.i.k. en x, para todo $x \in f^{-1}(y)$, entonces Y es c.i.k. en y, es decir,

$$f^{-1}(y) \subset L(X) \text{ implica que } y \in L(Y).$$

Demostración. Sea U un abierto en Y tal que $y \in U$. Entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$. Así, para cada $x \in f^{-1}(y)$, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X tal que $x \in f^{-1}(U)$. Luego, por hipótesis, para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe un conjunto conexo U_x en X tal que $x \in int(U_x)$ y $U_x \subset f^{-1}(U)$. Denotemos $V = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(y)\}$, notemos que $f^{-1}(y) \subset int(V)$, así por el Lema 3.24 deducimos que $y \in int(f(V))$.
Observemos que $f(V) = \bigcup\{f(U_x) : x \in f^{-1}(y)\}$ y para cada $x \in f^{-1}(y)$, $f(U_x)$ es un conjunto conexo en Y, tal que $y \in f(U_x)$; por ésto $f(V)$ es un conjunto conexo en Y.
Por otro lado, como $U_x \subset f^{-1}(U)$ para cada $x \in f^{-1}(y)$, se tiene que $f(U_x) \subset U$ para cada $x \in f^{-1}(y)$. Esto implica que $f(V) \subset U$.
En resumen, $f(V)$ es un conjunto conexo en Y tal que $y \in int(f(V))$ y $f(V) \subset U$. Por lo tanto Y es *c.i.k.* en y. $\square$

3.26 Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios compactos X y Y. Entonces para cada $y \in Y$ tal que Y no es c.i.k. en y, existe un punto $x \in X$ tal que X no es c.i.k. en x y $f(x) = y$, es decir,

$$N(Y) \subset f(N(X)).$$

Demostración. Dado que $Y \setminus N(Y) = L(Y)$, la inclusión es equivalente a

$$Y \setminus f(N(X)) \subset L(Y).$$

Tomemos $y \in Y \setminus f(N(X))$. Así $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Y \setminus f(N(X))) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(f(N(X))) \subset X \setminus N(X) = L(X)$.
Es decir, $f^{-1}(y) \subset L(X)$. Aplicando el Teorema 3.25 tenemos que $y \in L(Y)$. Por lo tanto $Y \setminus f(N(X)) \subset L(Y)$. $\square$

3.27 Lema. Si A y B son subconjuntos abiertos (cerrados) de un espacio X tales que $X = A \cup B$ y $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces $F : X \longrightarrow Y$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$$

es una función continua.

Demostración. Sea U abierto (cerrado) en Y.
Notemos que $F^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \in U\} = \{x \in A \cup B : F(x) \in U\} = \{x \in A : F(x) \in U\} \bigcup \{x \in B : F(x) \in U\} = \{x \in A : f(x) \in U\} \bigcup \{x \in B : g(x) \in U\} = f^{-1}(U) \bigcup g^{-1}(U)$.
Como $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(U)$ son conjuntos abiertos (cerrados) en A y B respectivamente y estos son abiertos (cerrados) en X, se tiene que $F^{-1}(U)$ es abierto (cerrado) en X. □

Observación:
En los Teoremas 3.25 y 3.26 no se puede sustituir la condición de conexidad en pequeño por la de conexidad local, como lo muestra el ejemplo que sigue.

Mostraremos un ejemplo en el cual tenemos dos espacios métricos y compactos X y Y, $y \in Y$, y una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$, tales que X es localmente conexo en x, para todo $x \in f^{-1}(y)$, pero Y no es localmente conexo en y.

Para esto, definamos a X y Y como sigue:
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (\frac{1}{2^{n-1}})$ y $b_n = (\frac{3}{2^{n+1}})$, puntos en $\mathbb{R}^2$.
Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$. Definimos $L_{n,m}$ el segmento de recta que tiene como extremos a los puntos $(\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{m+1}})$ y $(\frac{1}{2^{n-1}}, 0)$.
Sea $X_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} L_{n,m} \bigcup L_n$, donde L_n es el segmento de recta con puntos extremos a_n y a_{n+1}.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento de recta que tiene como extremos los puntos a_{n+1} y b_n.
Así definimos a X como $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Por otro lado, sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \leq m$. Definimos $M_{n,m}$ como el segmento de recta que tiene como extremos los puntos $(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m})$ y a_n.
Sea $Y_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} M_{n,m} \bigcup M_n$, donde M_n es el segmento de recta con puntos extremos a_n y b_n.
Así se define a Y como $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
Véase la figura 3.1.

Ahora, sea $p = (0, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el homeomorfismo $h_n : X_n \longrightarrow Y_n$ tal que $h_n(L_{n,m}) = M_{n,m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y

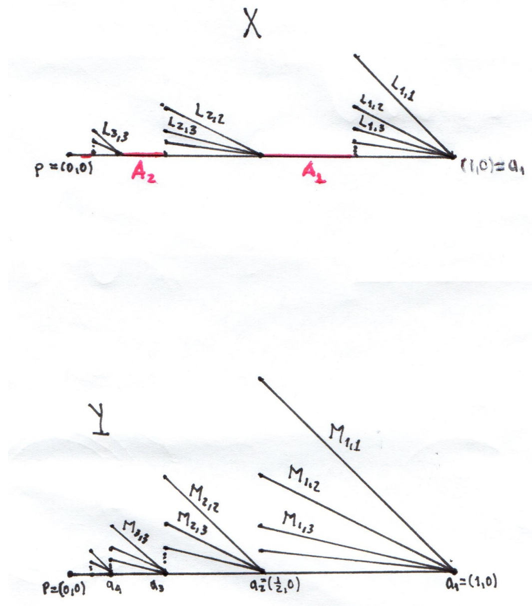

Figura 3.1: Espacios X y Y

$h_n(a_n) = a_n$.
Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $Z_n = X_n \cup A_n$ y definamos $g_n : Z_n \longrightarrow Y_n$ como sigue: $g_n(x) = \begin{cases} h_n(x) & si \quad x \in X_n \\ a_{n+1} & si \quad x \in A_n \end{cases}$

Finalmente, sea $f : X \longrightarrow Y$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} g_n(x) & si \quad x \in Z_n \\ p & si \quad x = p \end{cases}$$

Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f|_{\bigcup_{n=1}^{k} Z_n} : \bigcup_{n=1}^{k} Z_n \longrightarrow Y$ es una función continua (por el Lema 3.27).

Ahora probaremos que f es una función continua. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tales que $\lim x_n = x$. Por demostrar que $\lim f(x_n) = f(x)$

Analicemos dos casos:

(1) $x \neq p$; en este caso existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Z_k = \overline{X_k} \cup A_k$. Notemos que $x \notin \bigcup\limits_{n\neq 2}^{\infty} Z_n$ y notemos también que $\overline{\bigcup\limits_{k+2}^{\infty} Z_n} = \bigcup\limits_{n=k+2}^{\infty} Z_n \bigcup \{p\}$.

Así $x \in X \setminus \overline{\bigcup\limits_{k+2}^{\infty} Z_n} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k+1} Z_n$.

Se puede suponer que $x_n \in X \setminus \overline{\bigcup\limits_{k+2}^{\infty} Z_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Así, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{k+1} Z_n$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\bigcup\limits_{n=1}^{k+1} Z_n$.

Como $f|_{\bigcup\limits_{n=1}^{k+1}}$ es una función continua, se tiene que $\lim f(x_n) = f(x)$. Por lo que, para éste caso, se tiene que f es una función continua.

(2) $x = p$; notar que $X \subset Y$. Así $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se puede ver como una sucesión de Y. Además $diam(Y_n) = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$, el cual converge a 0.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim x_n = p$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - p|| < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n \geq N$. Observemos que $x_N \in Y_M$, así podemos suponer que para todo $n \geq N$, $x_n \in \bigcup\limits_{k=M}^{\infty} Y_k$ y además $f(x_n)$ está en el mismo segmento de recta que x_n.
Como $\lim diam(Y_n) = 0$, se tiene que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $diam(Y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n \geq N'$.
Sea $N^* = máx\{N, N', N^*\}$. Notemos que $||f(x_n) - x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N^*$ (pues $f(x_n), x_n$ están en el mismo segmento).
Así, si $n \geq N^*$, entonces $||f(x_n)-p|| \leq ||f(x_n)-x_n||+||x_n-p|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Por lo tanto, $\lim f(x_n) = f(p) = p$.
Así, se tiene que f es una función continua.

Notemos que $f^{-1}(p) = \{p\}$ y X es localmente conexo en p, pero Y no

es localmente conexo en p.
Así, hemos mostrado que X es localmente conexo en x, para todo $x \in f^{-1}(p)$, pero Y no es localmente conexo en p.

3.28 Problema. Dado un espacio topológico X y una clase $\mathscr{F}$ de funciones, caracterizar el conjunto de todos los espacios que son imágenes del espacio X bajo las funciones de la clase $\mathscr{F}$, es decir, caracterizar al conjunto $\mathscr{F}(X) = \{f(X) : f \in \mathscr{F}\}$.
Por ejemplo, si C denota el conjunto de Cantor y $\mathscr{F}$ denota la clase de todas las funciones continuas, entonces $\mathscr{F}(C)$ es la familia de todos los espacios métricos compactos (ver Teorema 2.40); además $\mathscr{F}([0,1])$ es la familia de todos los continuos localmente conexos, ver Teorema 3.23.

3.29 Observación. Si un continuo no degenerado, X, localmente conexo es tomado en lugar de $[0,1]$, entonces la siguiente igualdad es cierta.

$$\mathscr{F}(X) = \mathscr{F}([0,1]).$$

Demostración. $\subseteq$] Si $Y \in \mathscr{F}(X)$, entonces existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(X) = Y$. Como X es localmente conexo, sabemos que $X \in \mathscr{F}([0,1])$, es decir, existe $g \in \mathscr{F}$ tal que $g([0,1]) = X$. Se tiene que $f \circ g \in \mathscr{F}$ y $f \circ g([0,1]) = f(g([0,1])) = f(X) = Y$. Así $Y \in \mathscr{F}([0,1])$.
Por lo tanto, $\mathscr{F}(X) \subseteq \mathscr{F}([0,1])$.

$\supseteq$] Si $Z \in \mathscr{F}([0,1])$, entonces existe $h \in \mathscr{F}$ tal que $h([0,1]) = Z$.
Por otra parte, sean $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Por el Lema de Urysohn (caracterización de la normalidad), existe una función continua $l : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $l(p) = 0$ y $l(q) = 1$. Como $l(X)$ es conexo, se tiene que $l(X) = [0,1]$. Se sigue que, $h \circ l \in \mathscr{F}$ y $h \circ l(X) = h(l(X)) = h([0,1]) = Z$.
Por lo tanto $Z \in \mathscr{F}(X)$.
Así $\mathscr{F}(X) = \mathscr{F}([0,1])$. $\square$

Capítulo 4

Funciones Monótonas

A lo largo de este capítulo estudiamos algunas propiedades de las funciones monótonas y usando el concepto de función hereditariamente monótona caracterizamos a los espacios hereditariamente unicoherentes. Por último demostramos el Teorema de factorización de Whyburn, el cual es un resultado relacionado con las funciones monótonas.

4.1 Definición. Una función continua y suprayectiva entre espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$, es **monótona** si, para cada punto $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

El primer resultado a demostrar establece que para funciones continuas cerradas, la monotonía equivale a la condición de que la preimagen de cada conjunto conexo en el rango es un conjunto conexo en el dominio.

4.2 Definición. Dos subconjuntos A y B de un espacio X están separados si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

4.3 Observación. Claramente dos conjuntos cerrados y ajenos están separados. También dos conjuntos abiertos ajenos están separados, ya que si U y V son conjuntos abiertos y ajenos, entonces $x \in V$ implica que $x \notin \overline{U}$, pues V es un abierto que tiene a x y es ajeno de U; se sigue que $\overline{U} \cap V = \emptyset$, similarmente se prueba que $U \cap \overline{V} = \emptyset$.

4.4 Proposición. Sea Y un subespacio de un espacio X. Si A y B son conjuntos separados en Y, entonces también lo son en X.

Demostración. Notemos que $\overline{A_Y} = Y \cap \overline{A}$, donde $\overline{A_Y}$ denota la cerradura de A en Y, ya que $y \in Y \cap \overline{A}$ si y sólo si, $y \in Y$ y para todo

abierto, U, en X tal que $y \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$ si y sólo si, $y \in Y$ y para todo abierto, U, en X tal que $y \in U$, $U \cap (Y \cap A) \neq \emptyset$ si y sólo si, $y \in Y$ y para todo abierto, U, en X tal que $y \in U$, $(U \cap Y) \cap A \neq \emptyset$ si y sólo si, $y \in \overline{A_Y}$.
Por lo que $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = \overline{A_Y} \cap B$, pero por hipótesis A y B están separados en Y, así $\overline{A_Y} \cap B = \emptyset$.
Por lo tanto, $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
De igual manera se prueba que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. □

4.5 Proposición. Un espacio X es conexo si y sólo si X no es la unión de dos de sus subconjuntos separados y no vacíos.

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $X = A \cup B$, donde A y B están separados en X. Se tiene que $\overline{A} \subset A \cup B$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset$; así $\overline{A} \subset A$. Luego $A = \overline{A}$, es decir A es cerrado. De igual manera se prueba que B es cerrado.
En resumen, A y B son subconjuntos de X, cerrados, ajenos tales que $X = A \cup B$. Como X es conexo se concluye que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Esto demuestra la implicación.
$\Leftarrow]$ Supongamos que X no es conexo, entonces $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos, ajenos y no vacíos, luego, por la Observación 4.3, se tiene que U y V están separados. Se sigue X se puede escribir como la unión de dos de sus subconjuntos separados y no vacíos. Esto demuestra la implicación. □

4.6 Lema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva y cerrada entre espacios topológicos, entonces:

i) Si $C \subset Y$, entonces $\overline{C} \subset f(\overline{f^{-1}(C)})$;

ii) Si $C_1 \cup C_2 \subset Y$, y los conjuntos $f^{-1}(C_1)$ y $f^{-1}(C_2)$ están separados, entonces C_1 y C_2 están separados.

Demostración. *i)* Sea C un subconjunto de Y, dado que f es suprayectiva, se tiene que $C = f(f^{-1}(C)) \subset f(\overline{f^{-1}(C)})$, es decir, $C \subset f(\overline{f^{-1}(C)})$, luego se sigue que $\overline{C} \subset \overline{f(\overline{f^{-1}(C)})}$, pero como f es cerrada, se tiene que $\overline{f(\overline{f^{-1}(C)})} = f(\overline{f^{-1}(C)})$.
Así se concluye que, $\overline{C} \subset f(\overline{f^{-1}(C)})$.
ii) Notemos que para cualesquiera subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$ se cumple que $B = f(f^{-1}(B))$, ya que f es suprayectiva.

Por otro lado $f(A) \cap f(f^{-1}(B)) = f(A \cap f^{-1}(B))$. Así $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.
Sea $C_1 \cup C_2 \subset Y$. Por *i)* se tiene que $\overline{C_1} \subset f(\overline{f^{-1}(C_1)})$, entonces $\overline{C_1} \cap C_2 \subset f(\overline{f^{-1}(C_1)}) \cap C_2 = f(\overline{f^{-1}(C_1)} \cap f^{-1}(C_2)) = \emptyset$ ya que $f^{-1}(C_1)$ y $f^{-1}(C_2)$ están separados.
Así $\overline{C_1} \cap C_2 = \emptyset$.
De manera similar se prueba que $C_1 \cap \overline{C_2} = \emptyset$.
Por lo tanto, C_1 y C_2 están separados. $\square$

4.7 Proposición. Si E es un subconjunto conexo de un espacio X y $E \subset A \cup B$, donde A y B están separados, entonces $E \subset A$ ó $E \subset B$.

Demostración. Dado que $E \subset A \cup B$, se tiene que $E = (E \cap A) \cup (E \cap B)$. Luego, como A y B están separados, se sigue que $E \cap A$ y $E \cap B$ también están separados.
Por otro lado, como E es conexo, se tiene que $E \cap A = \emptyset$ ó $E \cap B = \emptyset$.
Si $E \cap A = \emptyset$, entonces $E = E \cap B$, lo cual implica que $E \subset B$.
Si $E \cap B = \emptyset$, entonces $E = E \cap A$, lo cual implica que $E \subset A$.
Así $E \subset A$ ó $E \subset B$. $\square$

4.8 Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva y cerrada entre espacios topológicos. Entonces f es monótona si y sólo si para cada subconjunto conexo, C de Y, la imagen inversa $f^{-1}(C)$ es un conjunto conexo.

Demostración. $\Leftarrow$] Notemos que $\{y\}$ es un conjunto conexo, para cada $y \in Y$, luego por hipótesis $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo, es decir, $f^{-1}(y)$ es conexo, para cada $y \in Y$. Por lo que f es monótona.
$\Rightarrow$] Sea C un subconjunto de Y conexo. Vamos a mostrar que $f^{-1}(C)$ es conexo, para esto usaremos la Proposición 4.5.
Sea $f^{-1}(C) = A \cup B$, donde A y B están separados. Mostraremos que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$.
Si $y \in C$ y $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(y) \subset A$.
Sea $M = \{y \in C : f^{-1}(y) \subset A\}$, entonces $f^{-1}(M) \subset A$, ya que si $z \in f^{-1}(M)$, entonces $f(z) \in M$, entonces $f^{-1}(f(z)) \subset A$. Como $z \in f^{-1}(f(z))$, se tiene que $z \in A$.
Ahora, si $x \in A$, entonces $x \in f^{-1}(C)$, luego $f(x) \in C$. Notemos que $x \in f^{-1}(f(x)) \cap A$. Así $f^{-1}(f(x)) \cap A \neq \emptyset$. Como $f^{-1}(f(x))$ es un subconjunto conexo de $f^{-1}(C)$, se obtiene que $f^{-1}(f(x)) \subset A$ (véase Proposición 4.7). En consecuencia $f(x) \in M$. Así $f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(M)$.

Luego, $x \in f^{-1}(M)$. Esto prueba que $A \subset f^{-1}(M)$.
Con lo anterior se obtiene que $A = f^{-1}(M)$.
Similarmente, denotamos $N = \{y \in C : f^{-1}(y) \subset B\}$ y obtenemos que $B = f^{-1}(N)$.
Como A y B están separados, se tiene que $f^{-1}(M)$ y $f^{-1}(N)$ están separados. Por el Lema 4.6 se obtiene que M y N están separados.
Por otra parte, notemos que $C = M \cup N$, pues $y \in C$ implica que $f^{-1}(y) \subset A$ ó $f^{-1}(y) \subset B$, porque $f^{-1}(y)$ es conexo por hipótesis; así $y \in M$ ó $y \in N$.
Ahora, como C es conexo, se tiene que $M = \emptyset$ ó $N = \emptyset$. Así $f^{-1}(M) = \emptyset$ ó $f^{-1}(N) = \emptyset$. Luego $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$.
Esto prueba el teorema. $\square$

4.9 Corolario. Para una función continua y suprayectiva entre continuos, $f : X \longrightarrow Y$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es monótona;

(2) Para cada subconjunto conexo, C de Y, $f^{-1}(C)$ es conexo; y

(3) Para cada subcontinuo, C de Y, $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X.

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Sea C un subconjunto de Y conexo, por el Teorema 4.8, se tiene que $f^{-1}(C)$ es un conjunto conexo, ya que f es una función monótona y cerrada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea C un subcontinuo de Y. Como C es conexo, se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo en X, por hipótesis.
Por otro lado, como C es compacto, entonces C es cerrado, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado, ya que f es continua. Se tiene que $f^{-1}(C)$ es compacto por ser un subconjunto cerrado de un espacio compacto.
Por lo tanto, $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X.

(3) $\Rightarrow$ (1) Notemos que para cada $y \in Y$, $\{y\}$ es un subcontinuo de Y, por lo que $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ es un subcontinuo de X, en particular $f^{-1}(y)$ es conexo, para cada $y \in Y$. Así f es monótona. $\square$

4.10 Definición. Un continuo X es **irreducible** si X contiene dos puntos distintos p y q tales que ningún subcontinuo propio de X contiene a $\{p, q\}$. En este caso se dice que X es irreducible entre p y q.

Por ejemplo, en la figura 4.1 los continuos (1), (2), (3) y (4) son irreducibles entre los puntos p y q. Mientras que los continuos (5) y (6) no lo son, ya que podemos encontrar subcontinuos propios que contienen a dichos puntos.

4.11 Definición. Un espacio X se dice **irreducible respecto a una propiedad** P dada, siempre que el espacio X tenga la propiedad P, pero ninguno de sus subconjuntos propios cerrados y no vacíos tiene la propiedad P.

4.12 Definición. Una propiedad P se dice **inducible** siempre que para cada sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona decreciente de conjuntos compactos que tengan la propiedad P, entonces $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ también tiene la propiedad P.

Por ejemplo, la propiedad de ser conexo es una propiedad inducible.

4.13 Teorema. De Reducción de Brouwer. Si P es una propiedad inducible, entonces cualquier espacio X segundo numerable, compacto, no vacío que tenga la propiedad P contiene un subconjunto cerrado, no vacío el cual es irreducible con respecto a la propiedad P.

Demostración. Supongamos que X no contiene un subconjunto cerrado, no vacío el cual es irreducible con respecto a la propiedad P. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X. Como X es irreducible con respecto a la propiedad P, existe un subconjunto cerrado propio, C_1 de X tal que C_1 tiene la propiedad P. Notemos que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $C_1 \cap U_{m_1} = \emptyset$. Denotemos $M_1 = \{n \in \mathbb{N} :$ existe C cerrado y no vacío en X tal que C tiene la propiedad P y $C \cap U_{m_1}\}$.
Observemos que M_1 es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ (pues $m_1 \in M_1$). Denotemos $n_1 = \text{mín}\, M_1$. Tomemos un subconjunto cerrado (propio), A_1, no vacío de X con la propiedad P tal que $A_1 \cap U_{n_1} = \emptyset$. Por el supuesto inicial de esta demostración tenemos que A_1 no es irreducible con respecto a la propiedad P. Luego existe un subconjunto cerrado, propio, C_2, de A_1 tal que C_2 tiene la propiedad P.
Notemos que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $C_2 \cap U_{m_2} = \emptyset$ y $A_1 \cap U_{m_2} \neq \emptyset$.
Por la definición de n_1, tenemos que $n_1 < m_2$, pues $m_2 \in M_1$ y $n_1 \neq m_2$.
Denotemos $M_2 = \{n \in \mathbb{N} : n_1 < n$ y existe C cerrado y no vacío en X

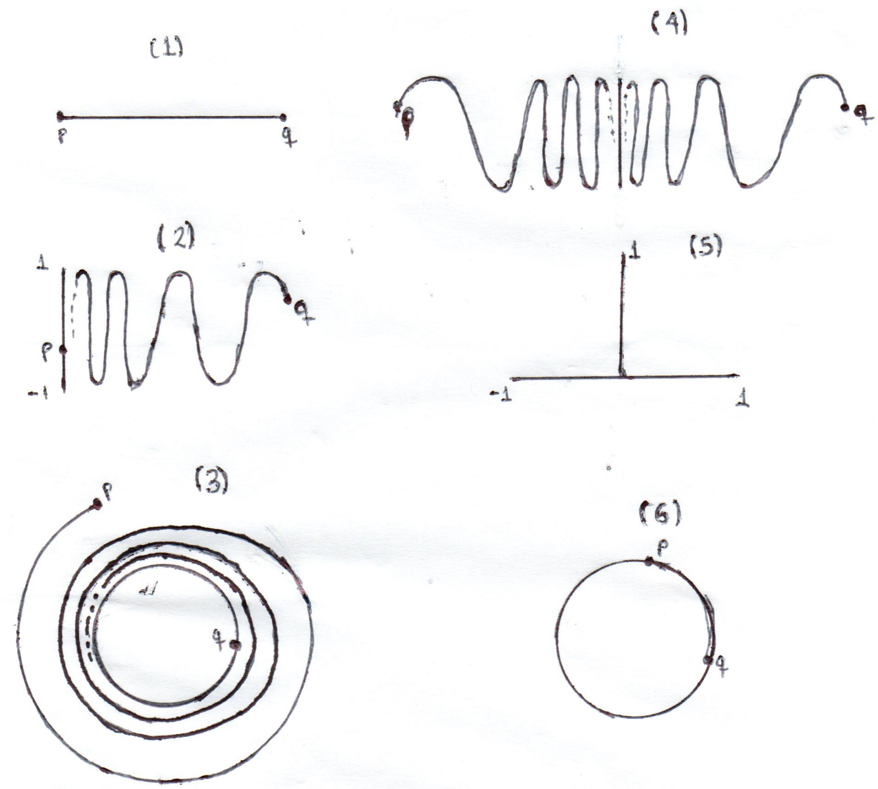

Figura 4.1: Ejemplos de continuos irreducibles y no irreducibles

tal que C tiene la propiedad P y $C \cap U_{m_2}\}$. Notemos que $m_2 \in M_2$.
Denotemos $n_2 = \text{mín } M_2$; y tomemos un subconjunto cerrado, propio, A_2, no vacío de X con la propiedad P tal que $A_2 \cap U_{n_2} = \emptyset$.
Inductivamente se determina una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, no vacíos de X, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que A_i tiene la propiedad P, para todo $i \in \mathbb{N}$ y $A_i \cap U_{n_1} = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$.
Denotemos $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Tenemos que A es un subconjuto cerrado y no vacío de X.
Por hipótesis la propiedad P es inducible. Por esto A tiene la propiedad P. Por el supuesto inicial de esta demostración, A no es irreducible

respecto a la propiedad P, así existe un subconjunto cerrado propio y no vacío B, de A tal que B tiene la propiedad P. Notemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap U_k = \emptyset$ y $A \cap U_k \neq \emptyset$. Como $A \cap U_{n_i} = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $k \neq n_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, notemos que $k \in M_1$ así $n_1 < k$. Se sigue que $k \in M_2$; luego $n_2 < k$. Inductivamente se obtiene que $n_i < k$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción, pues $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de enteros positivos. $\square$

4.14 Teorema. Si K es cualquier subconjunto cerrado de un continuo, X, entonces X contiene un subcontinuo irreducible alrededor de K.

Demostración. Veamos que la propiedad P de ser un subcontinuo de X que contenga a K es una propiedad inducible.
Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona decreciente de subcontinuos de X tal que cada A_n contiene a K, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sabemos que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subcontinuo de X, ya que cada A_n es un subcontinuo y además $A_{n+1} \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Dado que $K \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $K \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
Así, ser un subcontinuo de X que contenga a K es una propiedad inducible. Esto prueba que la propiedad P es una propiedad inducible.
Por el Teorema de reducción de Brouwer, X contiene un subconjunto cerrado y no vacío, digamos Y, el cual es irreducible con respecto a la propiedad P. Es decir, Y es un subcontinuo de X que contiene a K y ninguno de sus subconjuntos propios, cerrados y no vacíos tiene la propiedad P. Esto significa que si A es un subcontinuo propio de Y, entonces A no contiene a K.
Así, Y es un subcontinuo de X irreducible alrededor de K. $\square$

4.15 Corolario. Para un continuo X las siguientes condiciones son equivalentes:

1) X es un arco;

2) X es irreducible y localmente conexo;

3) X es irreducible y arco-conexo.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Como X es un arco, se tiene que es un continuo irreducible entre los puntos 0 y 1, es decir, es un continuo irreducible y también por ser un arco es un continuo localmente conexo.
2) $\Rightarrow$ 3) Como X es localmente conexo, se tiene por el Teorema 3.22, que X es arco-conexo.
Por lo que X es irreducible y arco-conexo.
3) $\Rightarrow$ 1) Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$ tales que X es irreducible entre p y q. Como X es arco-conexo, se tiene que existe un arco $A \subset X$ tal que $\{p, q\} \subset A$. Dado que X es irreducible entre p y q y A es un subcontinuo de X, se sigue que $A = X$. Por lo que X es un arco. $\square$

4.16 Teorema. Si un continuo X es irreducible entre p y q y si $f : X \longrightarrow Y$ es una función monóntona y suprayectiva, entonces el continuo Y es irreducible entre $f(p)$ y $f(q)$.

Demostración. Sea C un subcontinuo de Y tal que $f(p), f(q) \in C$. Se tiene que $f^{-1}(C)$ es un subcontinuo de X, por el Corolario 4.9. Notemos que $p, q \in f^{-1}(C)$. Dado que X es irreducible entre p y q, se tiene que $f^{-1}(C) = X$.
Por otro lado, como f es suprayectiva, se sigue que $C = f(f^{-1}(C))$, pero $f^{-1}(C) = X$, por lo que $C = f(X) = Y$, es decir $C = Y$.
Por lo tanto, Y es irreducible entre $f(p)$ y $f(q)$ $\square$

Veremos que la imagen de una curva cerrada simple, bajo una función monótona es una cruva cerrada simple. Para esto, primero probaremos algunos lemas.

4.17 Definición. Una curva cerrada simple es un espacio el cual es homeomorfo al espacio $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

4.18 Lema. Un continuo no degenerado, X, es una curva cerrada simple si y sólo si $X \setminus C$ es conexo, para todo subconjunto conexo, C de X.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea C un subconjunto conexo de$X$. Notemos que si $|X \setminus C| \leq 1$, entonces $X \setminus C = \emptyset$ o $X \setminus C$ es un conjunto con un único punto; así, en este caso, $X \setminus C$ es conexo. Luego, en lo que sigue suponemos que $|X \setminus C| \geq 2$. Probaremos que $X \setminus C$ es arco-conexo, luego, es conexo.
Para esto, sean $p, q \in X \setminus C$, con $p \neq q$. Notemos que X es la unión de

dos arcos, digamos A y B, con puntos extremos p y q, de tal forma que $A \cap B = \{p, q\}$. También notemos que $C \subset X \setminus \{p, q\} = (A \setminus \{p, q\}) \cup (B \setminus \{p, q\})$ y que $A \setminus \{p, q\}$ y $B \setminus \{p, q\}$ son conjuntos separados en X.
Como C es conexo, se sigue que $C \subset A \setminus \{p, q\}$ o $C \subset B \setminus \{p, q\}$.
Sin perder generalidad, podemos suponer que $C \subset A \setminus \{p, q\}$. Así, $C \cap B = \emptyset$, luego $B \subset X \setminus C$. Como B es un arco con puntos extremos p y q, se concluye que $X \setminus C$ es arco-conexo.
$\Leftarrow$] Supongamos que $X \setminus C$ es conexo, para todo subconjunto conexo, C, de X. Demostraremos que X es una curva cerrada simple, para esto usaremos [11, 9.31].
Sean $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Por demostrar que $X \setminus \{p, q\}$ no es conexo.
Supongamos que $X \setminus \{p, q\}$ es conexo, entonces por hipótesis se tiene que $\{p, q\}$ es conexo. Notemos que $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\}$, por lo que $\{p, q\}$ no es conexo, lo cual es una contradicción.
Lo cual demuestra la implicación. $\square$

4.19 Teorema. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona. Si X es una curva cerrada simple, entonces Y es una curva cerrada simple.

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$.
Supongamos que $Y \setminus \{y_1, y_2\}$ es conexo, entonces $f^{-1}(Y \setminus \{y_1, y_2\})$ es conexo. Notemos que $f^{-1}(Y \setminus \{y_1, y_2\}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(\{y_1, y_2\}) = X \setminus f^{-1}(\{y_1\} \cup \{y_2\}) = X \setminus (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2))$. Por lo que $X \setminus (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2))$ es conexo.
Como X es una curva cerrada simple, por el Lema 4.18, se tiene que $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ es conexo, pero esto es una contradicción, ya que $f^{-1}(y_1)$ y $f^{-1}(y_2)$ son conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos.
Así $Y \setminus \{y_1, y_2\}$ no es conexo. Nuevamente, por el Lema 4.18 se tiene que Y es una curva cerrada simple. $\square$

Las funciones monótonas están relacionadas con un tipo especial de continuos, a saber, los hereditariamente unicoherentes.

4.20 Definición. Un continuo X es **unicoherente** si siempre que X se escriba como la unión de dos de sus subcontinuos, la intersección de éstos es un conjunto conexo.

En la figura 4.2 se muestran ejemplos de continuos unichoerentes y continuos que no lo son.

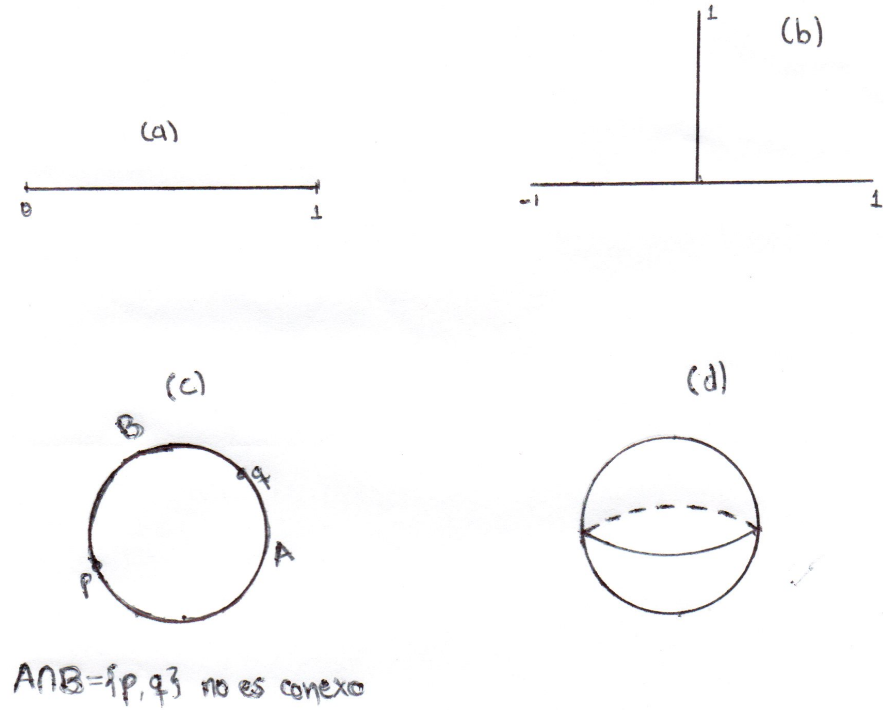

Figura 4.2: Los continuos (a), (b) y (d) son ejemplos de continuos unicoherentes, mientras que el continuo (c) no lo es.

4.21 Definición. Un continuo X es **hereditariamente unicoherente** si cada subcontinuo de X es unicoherente.

4.22 Proposición. Un continuo X es hereditariamente unicoherente si y sólo si, la interesección de cada dos subcontinuos de X es conexo.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sean Y y Z subcontinuos de X y supongamos que $Y \cap Z \neq \emptyset$, de lo contrario no hay nada que probar.
Notemos que $Y \cup Z$ es un subcontinuo de X, luego como X es hereditariamente unicoherente, se tiene que $Y \cap Z$ es conexo.
$\Leftarrow$]Sea Y un subcontinuo de X, y sean A y B subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$.
Notemos que A y B también son subcontinuos de X, por lo que $A \cap B$

es conexo, por hipótesis.
Así Y es unicoherente. Lo cual demuestra la implicación. $\square$

4.23 Definición. Una función continua y suprayectiva, $f : X \longrightarrow Y$ entre continuos X y Y es **hereditariamente monótona** si para cada subcontinuo, A, de X, la función restringida a A, $f_{|_A} : A \longrightarrow f(A)$ es monótona.

4.24 Teorema. Un continuo X es hereditariamente unicoherente si y sólo si, cada función monótona $f : X \longrightarrow Y$ es hereditariamente monótona.

Demostración.
$\Rightarrow]$ Sea X un continuo hereditariamente unicoherente y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona.
Tomemos un subcontinuo A de X y consideremos la función $f_{|_A} : A \longrightarrow f(A)$. Sea $y \in f(A)$. Notemos que $f_{|_A}^{-1}(y) = A \cap f^{-1}(y)$.
Dado que f es monótona, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo, además es cerrado en X por la continuidad de f, por lo que $f^{-1}(y)$ es un continuo. Luego, por la Proposición 4.22, $A \cap f^{-1}(y)$ es conexo. Así $f_{|_A}^{-1}(y)$ es conexo. Por lo tanto f es hereditariamente monótona.
$\Leftarrow]$ Supongamos que X no es hereditariamente unicoherente, entonces existen subcontinuos de X, A y B, tales que $A \cap B$ no es conexo.
Definamos una relación, $\simeq$ sobre X, de la siguiente forma: $x \simeq y$ si y sólo si $x = y$ o $x, y \in B$.
Veamos que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

> Notemos que $\simeq$ es reflexiva, pues para cada $x \in X, x = x$, así $x \simeq x$.
>
> Sean $x, y \in X$ tales que $x \simeq y$, entonces $x = y$ o $x, y \in B$, es decir, $y = x$ o $y, x \in B$, así $y \simeq x$. Por lo que $\simeq$ es simétrica.
>
> Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \simeq y$ y $y \simeq z$, entonces $x = y$ o $x, y \in B$; y $y = z$ o $y, z \in B$, se tiene que $x = z$ o $x, z \in B$, por lo que $x \simeq z$. Así $\simeq$ es transitiva.

Por lo tanto, $\simeq$ es una relación de equivalencia.
Notemos que las clases de equivalencia de $\simeq$ son los conjuntos singulares o el continuo B, el cual es la única clase de equivalencia no degenerada para $\simeq$, es decir, $X/\simeq = \{\{x\} : x \in X \setminus B\} \cup \{B\}$.

Sea la función cociente $q : X \longrightarrow X/\simeq$ dada por $q(x) =$ la clase de equivalencia de x, es decir,

$$q(x) = \begin{cases} \{x\}, & si \quad x \in X \setminus B \\ B, & si \quad x \in B \end{cases}$$

Nótese que q es una función monótona, pues
$q^{-1}(\{x\}) = \{x \in X : q(x) = \{x\}\} = \{x\}$; y
$q^{-1}(\{B\}) = \{x \in X : q(x) = \{B\}\} = B$.
Es decir, la preimagen de cada subconjunto conexo del codominio es un conjunto conexo en el dominio.
Pero la función $q_{|A} : A \longrightarrow q(A)$ dada por

$$q_{|A}(x) = \begin{cases} \{x\}, & si \quad x \in A \setminus B \\ B, & si \quad x \in B \end{cases}$$

no es una función monótona, pues
$q_{|A}^{-1}(\{B\}) = \{x \in A : q_{|A}(x) = \{B\}\} = A \cap B$, el cual no es un conjunto conexo.
Lo cual demuestra la implicación. $\square$

Un resultado importante relacionado con las funciones monótonas es el Teorema de factorización de Whyburn. Para formularlo, recordemos otra clase de funciones opuestas a las monótonas. Empezamos con las definiciones necesarias.

4.25 Definición. Un espacio X es **totalmente disconexo**, si cada subconjunto no vacío y conexo de X consta de sólo un punto.

De la definición se sigue que un espacio X es totalmente disconexo si y sólo si todas las componentes de X son conjuntos singulares.

4.26 Definición. Un espacio X es **0-dimensional** si tiene una base formada por conjuntos abiertos y cerrados.

A continuación demostraremos que en los espacios métricos compactos estos dos conceptos coinciden.
Veamos los siguientes lemas que ayudarán a la demostración de este hecho.

4.27 Lema. Si K es una componente de un espacio de Hausdorff y compacto, X, entonces $K = \bigcap\{E \subset X : E$ es abierto y cerrado en X y $K \subset E\}$.

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{E \subset X : E$ es abierto y cerrado en X y $K \subset E\}$ y sea $H = \cap\mathscr{F}$. Notemos que $K \subset H$.

Afirmamos que H es conexo. Para esto supongamos lo contrario, entonces $H = A \cup B$, donde A y B son conjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos en H.
Como A y B son cerrados en H y este último es cerrado en X, se tiene que A y B son cerrados y ajenos en X.
Sean U y W abiertos y ajenos en X tales que $A \subset U$ y $B \subset W$, esto por la normalidad de X.
Notemos que $H \subset U \cup W$, luego $X \setminus (U \cup W) \subset X \setminus H = \bigcup\{X \setminus E : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } K \subset E\}$. Se tiene que $\{X \setminus E : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } K \subset E\}$ es una cubierta abierta para $X \setminus (U \cup W)$ que es compacto por ser cerrado en X, entonces existen $E_1, E_2, \cdots, E_n$ subconjuntos abiertos y cerrados en X que contienen a K, tales que $X \setminus (U \cup W) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}(X \setminus E_i)$, se sigue que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \subset U \cup W$.
Por otra parte, $K \subset H = A \cup B$ y dado que K es conexo, se tiene que $K \subset A$ o $K \subset B$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $K \subset A$.
Denotemos $F := \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \cap U$. Notemos que F es abierto en X y $K \subset F$.
Por otro lado notemos que $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \cap (X \setminus W)$, pues $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \subset U \cup W$.
Así F también es cerrado en X, por lo que $H \subset F$, es decir, $A \cup B \subset F \subset U$, lo cual implica que $B \subset U$, de ahí que $B \subset U \cup W$, por lo que $U \cup W \neq \emptyset$ pues $B \neq \emptyset$.
Esto contradice el hecho de que U y W sean ajenos.
Por lo que H es conexo, y así $K = H$. $\square$

4.28 Lema. Supongamos que $K \subset V \subset X$, donde X es un espacio de Hausdorff compacto, V es abierto en X y K es una componente de X. Entonces existe un conjunto abierto y cerrado, A, tal que $K \subset A \subset V$.

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{E \subset X : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } K \subset E\}$. Por el lema anterior, tenemos que $K = \cap\mathscr{F}$.
Debemos probar que existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \subset V$. Para esto supongamos lo contrario. Esto implica que $E \subset X \setminus V$ para todo $E \in \mathscr{F}$, es decir, $E \setminus V \neq \emptyset$ para todo $E \in \mathscr{F}$.
Denotemos $\mathscr{G} = \{E \subset V : E \in \mathscr{F}\}$. Se tiene que $\mathscr{G}$ es una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos, de X, además $\mathscr{G}$ tiene la p.i.f.,

porque si $\{E_1, \cdots, E_n\} \subset \mathscr{F}$, entonces
$\bigcap_{i=1}^{n}(E_i \setminus V) = (\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \setminus V$ y notemos que $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ es un conjunto abierto y cerrado en X, además $K \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, pues $K \subset E_i$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, así $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{F}$, luego $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \setminus V \neq \emptyset$ (por nuestra suposición), por esto $\mathscr{G}$ tiene la p.i.f.
Como X es compacto obtenemos que $\bigcap \mathscr{G} \neq \emptyset$. (Véase Teorema 1.14)
Ahora notemos que
$\bigcap \mathscr{G} = \bigcap\{E \setminus V : E \in \mathscr{F}\} = \bigcap\{E : E \in \mathscr{F}\} \setminus V = \bigcap \mathscr{F} \setminus V = K \setminus V$.
Concluimos que $K \setminus V \neq \emptyset$, es decir, $K \nsubseteq V$. Esto contradice la hipótesis. Con lo cual se demuestra el lema. $\square$

4.29 Teorema. Un espacio X métrico y compacto es $0-$*dimensional* si y sólo si, X es totalmente disconexo.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea C subconjunto de X con más de un punto. Veamos que C no es conexo.
Sean $x, y \in C$ tales que $x \neq y$. Como X es T_1, por hipótesis, se tiene que $\{y\}$ es un conjunto cerrado en X, así $X \setminus \{y\}$ es abierto en X y $x \in X \setminus \{y\}$. Luego existe $D \subset X$ abierto y cerrado tal que $x \in D \subset X \setminus \{y\}$. Notemos que $D \cap C$ y $(X \setminus D) \cap C$ son conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos en C, además $(D \cap C) \cup [(X \setminus D) \cap C)] = C$. Por lo que C no es un conjunto conexo.

$\Leftarrow$] Sea $\beta = \{A \subset X : A$ es abierto y cerrado$\}$. Veamos que β es una base para X.
Sean $x \in X$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Nótese que $\{x\}$ es una componente conexa de X, por hipótesis y además $\{x\} \subset U$, luego por el Lema 4.28 existe un conjunto V abierto y cerrado en X tal que $\{x\} \subset V \subset U$, es decir, existe $V \in \beta$ tal que $x \in V \subset U$. Por lo tanto β es una base para X. $\square$

4.30 Definición. Una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ es **ligera** si para cada punto $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces la representación de f en la forma $f = f_2 \circ f_1$, donde $f_1 : X \longrightarrow Z$ y $f_2 : Z \longrightarrow Y$ son funciones continuas, es llamada una factorización de f. En otras palabras, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

A continuación anotamos tres resultados importantes, cuyas demostraciones se escapan a los objetivos de esta tesis, pero citamos donde se pueden revisar.

4.31 Teorema. Sean X, Y espacios métricos compactos.
Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces el conjunto $\mathscr{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es una descomposición semicontinua superiormente (usc) de X, el cual es homeomorfico a Y.
Recíprocamente, cualquier descomposición usc de X es un espacio métrico compacto, el cual es una imagen continua de X.

Ver demostración en [11, 3.21].

4.32 Lema. Sea X un espacio métrico y compacto y sea $\mathscr{D}$ una descomposición usc de X, sea $\mathscr{C} = \{C \subset X : C$ es una componente de algún $D \in \mathscr{D}\}$. Entonces $\mathscr{C}$ es una descomposición usc de X.

Ver demostración en [11, 13.2].

4.33 Proposición. Sean X y Y espacios topológicos, M espacio cociente de X, $f : X \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow Y$funciones. Entonces g es continua, si y sólo si $g \circ f$ es continua.

Ver demostración en [11, 3.23].

4.34 Teorema. Sean X y Y espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces existe un espacio métrico y compacto, M, y una función $m : X \longrightarrow M$ monótona y una función $l : M \longrightarrow Y$ ligera tal que $f = l \circ m$.

Demostración.
Sea $\mathscr{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ y sea $\mathscr{C} = \{C \subset X : C$ es una componente

de algún $f^{-1}(y) \in \mathscr{D}_f\}$. Por el Teorema 4.31 $\mathscr{D}_f$ es usc y por el Lema 4.32, $\mathscr{C}$ es usc.
Por lo tanto, si denotamos por M a $\mathscr{C}$, con la topología descomposición, entonces por la segunda parte del Teorema 4.31, M es un espacio métrico compacto.
Ahora sea $m : X \longrightarrow M$ la función natural dada por $m(x) =$ el único $C_x \in \mathscr{C}$ tal que C_x es la componente de $f^{-1}(f(x))$ que contiene a x. Nótese que m es una función continua y suprayectiva y además m es mónotona, pues si $z \in M$ entonces existe $x \in X$ tal que $z = C_x$, donde C_x es la componente de $f^{-1}(f(x))$ que contiene al punto x y $m^{-1}(z) = \{w \in X : m(w) = z\} = \{w \in X : m(x) = C_x\} = C_x$, por lo que $m^{-1}(z)$ es conexo, para cada $z \in M$.
Sea $l : M \longrightarrow Y$ definida para cada $t \in M$ como $l(t) =$ el único punto en $f(m^{-1}(t))$. Notemos que si $x \in X$, entonces $x \in m(x)$ y $m(x)$ es una componente de $f^{-1}(y)$ para un único punto $y \in Y$. Así $l(m(x)) = y$.
Por otra parte, notamos que $x \in f^{-1}(f(x))$. Luego; si E es la componente de $f^{-1}(f(x))$ que contiene al punto x, entonces $E = m(x)$. Se sigue que $f(x) = y$. En resumen, para cada $x \in X$, se tiene que $f(x) = l(m(x))$, es decir, $f = l \circ m$.
Por la definición de la topología cociente, tenemos que m es una función continua; así mismo, como $l \circ m$ coincide con f, la cual es una función continua, se tiene que l es una función continua, véase la Proposición 4.33.
Resta probar que l es ligera. Para esto fijamos un punto $y \in Y$ y un subconjunto conexo, no vacío, K, de $l^{-1}(y)$. Como m es monótona, $m^{-1}(K)$ es un subconjunto conexo de X. Además $f = l \circ m$, se tiene que $l(m(m^{-1}(K))) = l(K) = \{y\}$, es decir, para todo $x \in m^{-1}(K)$, $f(x) = y$. Así $m^{-1}(K) \subset f^{-1}(y)$.
Sea C la componente de $f^{-1}(y)$ tal que $m^{-1}(K) \subset C$, se sigue que $m(m^{-1}(K)) \subset m(C)$, así $K \subset \{C\}$, se concluye que $K = \{C\}$.
Esto prueba que K es un conjunto que consta de un único elemento de M, esto significa que $l^{-1}(y)$ es un conjunto totalmente disconexo. $\square$

Capítulo 5

Funciones abiertas

En este capítulo estudiaremos las clases de funciones del tipo abierta: casi-interiores, funciones MO y funciones OM. También se estudia detalladamente las inclusiones que existen entre estas clases de funciones. Además, se muestran ejemplos de funciones para verificar que algunas inclusiones son propias. Empezaremos este capítulo recordando la definición de una función abierta.

5.1 Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es **abierta**, si para cada subconjunto abierto, A de X, $f(A)$ es abierto en Y.

5.2 Definición. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, entonces un subconjunto, A de X, es llamado un **conjunto inverso** (bajo f) si $A = f^{-1}(f(A))$.

5.3 Proposición. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si $B \subset Y$, entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto inverso.

Demostración. Dado que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, se tiene que $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ $\subset f^{-1}(B)$.
Por otro lado, si $x \in f^{-1}(B)$, entonces $f(x) \in f(f^{-1}(B))$, luego $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. Así $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. $\square$

5.4 Proposición. Un subconjunto, A de X es un conjunto inverso bajo $f : X \longrightarrow Y$ si y sólo si, para cada conjunto $S \subset X$, se tiene que $f(A \cap S) = f(A) \cap f(S)$.

Demostración.
$\Rightarrow]$ Sea $S \subset X$, dado que f es función, se tiene que $f(A \cap S) \subset$

$f(A) \cap f(S)$. Veamos ahora la otra inclusión.
Sea $y \in f(A) \cap f(S)$. Como $y \in f(A)$, entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(A)) = A$. Notemos que $f^{-1}(y) \cap S \neq \emptyset$, ya que $y \in f(S)$.
Sea $x \in f^{-1}(y) \cap S$, se tiene que $x \in (f^{-1}(y) \cap A) \cap S$, por lo que $y = f(x) \in f(A \cap S)$.
Por lo tanto, $f(A \cap S) = f(A) \cap f(S)$.
$\Leftarrow$] Notemos que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Veamos que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Supongamos que existe $x \in f^{-1}(f(A)) \setminus A$. Tomemos $S = \{x\}$, se tiene que $A \cap S = \emptyset$, así $f(A \cap S) = \emptyset$.
Dado que $x \in f^{-1}(f(A))$, se tiene que $f(x) \in f(A)$ y es claro que $f(x) \in f(S)$, así $f(A) \cap f(S) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. $\square$

5.5 Proposición. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta, entonces para cada conjunto inverso $A \subset X$, la función $f|_A : A \longrightarrow f(A)$ es abierta.

Demostración. Sea U un conjunto abierto en A, entonces existe un conjuntos abierto V en X tal que $U = A \cap V$. Como V es abierto en X, se tiene que $f(V)$ es abierto en Y. Notemos que $f|_A(U) = f(U)$ y $f(U) = f(A \cap V) = f(A) \cap f(V)$, por la Proposición 5.4, es decir, $f|_A(U) = f(A) \cap f(V)$ con $f(A) \cap f(V)$ es abierto en $f(A)$.
Por lo tanto, $f|_A(U)$ es abierto en $f(A)$. $\square$

5.6 Proposición. Sean X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces, para cada $A \subset X$, se tiene que:

i) $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$;

ii) $\overline{f(A)} \setminus f(A) \subset f(\overline{A} \setminus A)$; y

Si A es abierto y f es abierta, entonces

iii) $fr(f(A)) \subset f(fr(A))$.

Demostración. i) Como f es una función continua, entonces por el Teorema 2.2 d), se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Veamos la otra inclusión.
Notemos que f es una función cerrada, por el Teorema 2.15. Y dado que $\overline{A}$ es cerrado, entonces $f(\overline{A})$ es cerrado, además $f(A) \subset f(\overline{A})$.

Dado que $\overline{f(A)} = \bigcap\{F : F \text{ es cerrado en } Y \text{ y } f(A) \subset F\}$, se tiene que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
Por lo tanto, $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

ii) Notemos que como f es función, entonces para cada $A, B \subset X$, se tiene que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$. Así, aplicando lo anterior a los conjuntos $f(\overline{A})$ y $f(A)$, se sigue que $f(\overline{A}) \setminus f(A) \subset f(\overline{A} \setminus A)$, pero por i), $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$, luego $\overline{f(A)} \setminus f(A) \subset f(\overline{A} \setminus A)$.

iii) Supongamos que A es un conjunto abierto y f un función abierta.
$fr(A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A}) = \overline{A} \cap (X \setminus A) = \overline{A} \setminus A$.
De igual forma, $fr(f(A)) = \overline{f(A)} \setminus f(A)$, y por ii) $\overline{f(A)} \setminus f(A) \subset f(\overline{A} \setminus A)$, entonces $fr(f(A)) \subset f(fr(A))$.

□

Recordemos la siguiente caracterización de las funciones abiertas entre espacios métricos compactos, que puede ser consultada en [8] y [9].

5.7 Teorema. Sean X, Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces f es abierta si y sólo si para cada punto $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, se tiene que $\lim y_n = y$ implica que $\limsup f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $\lim y_n = y$. Por la continuidad de f se tiene que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$, véase Teorema 2.19. Resta probar la otra inclusión. Para esto fijemos un punto $z \in f^{-1}(y)$ y un conjunto abierto, U en X, tales que $z \in U$. Por hipótesis f es una función abierta, así $f(U)$ es abierto en Y.
Como $f(z) = y$, se tiene que $y \in f(U)$, luego, puesto que $\lim y_n = y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N, y_n \in f(U)$. Así, para cada $n \geq N$ podemos tomar un punto $x_n \in U$ tal que $f(x_n) = y_n$. Se tiene que para cada $n \geq N$, $x_n \in f^{-1}(y_n) \cap U$. Esto prueba que $z \in \liminf f^{-1}(y_n)$. Se sigue que $z \in \limsup f^{-1}(y_n)$. Lo cual demuestra la implicación.
$\Leftarrow$] Supongamos que f no es abierta, entonces existe un subconjunto abierto, U de X tal que $f(U)$ no es abierto en Y, por lo que $f(U) \neq int(f(U))$, así podemos tomar un punto $y \in f(U) \setminus int(f(U))$. Notemos que $y \in fr(f(U)) = \overline{f(U)} \cap \overline{Y \setminus f(U)}$. En particular $y \in \overline{Y \setminus f(U)}$,

luego podemos tomar una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en $Y \setminus f(U)$ tal que $\lim y_n = y$. Por hipótesis se tiene que $\limsup f^{-1}(y_n) = f(y)$.
Por otra parte, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(U)) \subset X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es cerrado, se sigue que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$. Así $f^{-1}(y) \subset X \setminus U$. Además como $y \in f(U)$ podemos tomar un punto $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Así $x \in f^{-1}(y)$, se sigue que $x \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción porque $x \in U$.
Esta contradicción demuestra que f es una función abierta. □

La noción de frontera es una herramienta muy útil para definir varios conceptos en Topología. En particular, la noción de orden de un punto en un espacio (en el sentido de Menger-Urysohn).

5.8 Definición. Dado un punto p en un continuo X y un número cardinal β, decimos que el orden de X en p es menor o igual que β, escribimos $ord(p, X) \leq \beta$, si para cada abierto U en X, con $p \in U$, existe un abierto V en X, tal que $p \in V \subset U$ y la cardinalidad de la frontera de V es menor o igual que β. Escribimos $ord(p, X) = \beta$ para indicar que $ord(p, X) \leq \beta$ y es falso que $ord(p, X) \leq \alpha$, para todo número cardinal $\alpha < \beta$.

Por una curva entenderemos a un continuo 1-dimensional. Una curva X es llamada *regular* si $ord(p, X) \leq \omega$ y *racional* si $ord(p, X) \leq \aleph_0$, para cada $p \in X$.

5.9 Ejemplo.

(1) Se tiene que si $x \in (0, 1)$, entonces $ord(x, [0, 1]) = 2$, porque un abierto básico en $[0, 1]$ para x es de la forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, cuya frontera es el conjunto de dos puntos $\{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$. Por otra parte, notemos que $ord(0, [0, 1]) = 1$ y $ord(1, [0, 1]) = 1$.

(2) Para todo $x \in S^1$, se tiene que $ord(x, S^1) = 2$.

(3) Si $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$, denotemos $p = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$, entonces para $x \in T \setminus \{p, e_1, e_2, e_3\}$ se tiene que $ord(x, T) = 2$, $ord(p, T) = 3$ y $ord(e_i, T) = 1$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Además si X es un continuo tal que contiene un subcontinuo homeomorfo a T, entonces existe $x \in X$ tal que $ord(x, X) \geq 3$.
Al continuo T se le conoce como Triodo Simple

5.10 Corolario. Sean X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff, $p \in X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva y abierta. Entonces $ord(f(p), Y) \leq ord(p, X)$.

Demostración. Sean $p \in X$ y β un número cardinal tal que $ord(p, X) = \beta$. Sea U un abierto en Y tal que $f(p) \in U$. Note que $f^{-1}(U)$ es un abierto en X, pues f es continua, además $p \in f^{-1}(U)$. Luego, por hipótesis existe un abierto V en X tal que $p \in V \subset f^{-1}(U)$ con $|fr(V)| \leq \beta$. Dado que f es abierta, se tiene que $f(V)$ es abierto en Y. Nótese que $f(p) \in f(V) \subset U$.
Ahora, por la Proposición 5.6, se tiene que $fr(f(V)) \subset f(fr(V))$. Se sigue que $|fr(f(V))| \leq |f(fr(V))| \leq |fr(V)| \leq \beta$.
Por lo tanto, $ord(f(p), Y) \leq ord(p, X)$. □

5.11 Lema. Si X es un continuo, no degenerado, localmente conexo que no contiene un triodo simple, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración. Supongamos que X no es un arco. Probaremos que X es una curva cerrada simple.
Sabemos que todo continuo no degenerado contiene al menos dos puntos que no son de corte y el único continuo con exactamente dos puntos que no son de corte es el arco, véase [11, 6.6] y [11, 6.17].
Así existen tres puntos distintos, p, q y r en X que no son de corte, es decir, $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$, $X \setminus \{r\}$ son subconjuntos conexos de X. Note que estos tres conjuntos son abiertos en X. Sabemos que todo conjunto abierto y conexo en un continuo localmente conexo, es arcoconexo, véase [11, 8.26], así los conjuntos $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$, $X \setminus \{r\}$ son arco-conexos. Ahora consideremos un arco A en $X \setminus \{p\}$ con puntos extremos q y r; un arco B en $X \setminus \{q\}$ con puntos extremos p y r; y un arco C en $X \setminus \{r\}$ con puntos extremos p y q.
Como $p \notin A$, $q \notin B$, $r \notin C$ y dado que X no contiene triodos simples, entonces $A \cup B \cup C$ es una curva cerrada simple.
Ahora si tomamos un punto $x \in X \setminus (A \cup B \cup C)$, sin pérdida de generalidad tomamos un arco D con puntos extremos p y x, se tiene entonces que $B \cup C \cup D$ es un triodo simple, pero esto contradice la hipótesis.
Por lo tanto X es una curva cerrada simple. □

5.12 Corolario. Toda imagen abierta, no degenerada, del intervalo cerrado $[0, 1]$, es un arco, y además los puntos finales del dominio son mandados a los puntos finales del rango.

Demostración. Sea Y un continuo no degenerado y $f : [0,1] \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva y abierta. Sabemos, por el Ejemplo 5.9, que $ord(x, [0,1]) \leq 2$, para cada $x \in [0,1]$.
Sea $y \in Y$, entonces existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$, por el Corolario 5.10, se tiene que $ord(y, Y) \leq ord(x, [0,1])$, luego, $ord(y, Y) \leq 2$, para cada $y \in Y$. De esto se sigue que Y no contiene un triodo simple, véase Ejemplo 5.9.
Por el Teorema 2.15 se tiene que f es una función cerrada, luego por la Proposición 3.6 f es una función de identificación, así, por el Teorema 3.13, Y es localmente conexo. Por el Lema 5.11 se obtiene que Y es un arco o una curva cerrada simple.
Supongamos que Y es una curva cerrada simple. Se sabe que $ord(p, S^1) = 2$, para cada $p \in S^1$. Se sigue que $2 = ord(f(0), S^1) \leq ord(0, [0,1]) = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Y es un arco.
Sean $a, b \in Y$ con $a \neq b$, los puntos extremos del arco Y. Por demostrar que $f(0) \in \{a, b\}$.
Supongamos que $f(0) \notin \{a, b\}$, entonces existe $y \in Y \setminus \{a, b\}$ tal que $f(0) = y$. Notemos que $ord(y, Y) = 2$, pues y no es un punto extremo, y además $ord(y, Y) \leq ord(0, [0,1]) = 1$, así $2 \leq 1$, lo cual es falso.
Por lo tanto, $f(0) \in \{a, b\}$.
De la misma manera se demuestra que $f(1) \in \{a, b\}$.
Con lo cual queda demostrado el corolario. $\square$

5.13 Definición. Sea X un esapcio y $p \in X$. Se define la **casi-componente**, Q, del punto p en X, como la intesección de todos los subconjuntos de X abiertos y cerrados que contienen a p, es decir,

$$Q = \bigcap \{A \subset X : A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\}$$

5.14 Proposición. Si Q es la casi-componente de un punto p en un espacio compacto X y U es un conjunto abierto en X tal que $Q \subset U$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado, F en X, tal que $p \in F$ y $F \subset U$.

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{A : A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\}$. Se tiene que $Q = \bigcap \mathscr{F}$. Así $\bigcap \mathscr{F} \subset U$. Se sigue que, $X \setminus U \subset X \setminus (\bigcap \mathscr{F})$. Notemos que $X \setminus (\bigcap \mathscr{F}) = \bigcup \{X \setminus A : A \in \mathscr{F}\}$. Se obtiene que la colección $\{X \setminus A : A \in \mathscr{F}\}$ es una cubierta abierta para el conjunto $X \setminus U$, además, como este conjunto es cerrado en X, $X \setminus U$ es compacto, luego existe una subcolección finita $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathscr{F}$ tal que $X \setminus U \subset$

$\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_i$. Así $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_i) \subset U$, es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset U$. Denotemos $F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Es claro que F es un conjunto abierto y cerrado en X y $p \in F \subset U$. $\square$

5.15 Teorema. Sea X un espacio topológico, entonces:

a) La componente C de un punto p en X está contenida en la casi-componente Q del punto p.

b) Si X es compacto y de Hausdorff, entonces las componentes y casi-componentes coinciden.

Demostración.

a) Sea F un subconjunto abierto y cerrado de X que contiene a p. Nótese que los conjuntos $C \cap F$ y $C \setminus F$ están separados, cuya unión es C. Como $C \cap F \neq \emptyset$, se sigue que $C \setminus F = \emptyset$, es decir $C \subset F$, así $C \subset Q$.

b) Sean $p \in X$, C y Q la componente y casi-componente de p respectivamente. Por a) se tiene que $C \subset Q$, sólo resta probar que $Q \subset C$, para esto veamos que Q es un conjunto conexo.
Supongamos que existen A y B subconjuntos de Q cerrados y ajenos tales que $Q = A \cup B$ y supongamos que $p \in A$.
Nótese que A y B son cerrados y ajenos en X, por la normalidad de X, se tiene que existen U y V abiertos y ajenos en X tales que

$$A \subset U \text{ y } B \subset V \cdots (*).$$

Dado que $Q \subset U \cup V$, y por la Proposición 5.14, se tiene que existe un conjunto abierto y cerrado F tal que $F \subset U \cup V$.
Dado que $\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F$, se tiene que $U \cap F$ es abierto y cerrado. Como $p \in U \cap F$, entonces $Q \subset U \cap F$ y

$$B \subset Q \subset U \cap F \subset U \cdots (**).$$

De $(*)$ y $(**)$ se concluye que $B = \emptyset$. Así Q es conexo.

$\square$

5.16 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo si y sólo si para cada $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, se tiene que $fr(A) \neq \emptyset$.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea A un subconjunto propio y no vacío de X. Notemos que $X = \overline{A} \cup \overline{X \setminus A}$. Como $\overline{A} \neq \emptyset$, $\overline{X \setminus A} \neq \emptyset$ y X es conexo, se sigue que $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \neq \emptyset$. Esto significa que $fr(A) \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$]Supongamos que X no es conexo, así, existen conjuntos abiertos, ajenos y no vacíos, U y V en X, tales que $X = U \cup V$.
Notemos que $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y $X \setminus U = V$; también observemos que $fr(U) = \overline{U} \cap X \setminus U$. Se sigue que $fr(U) = \emptyset$. Se concluye que U es un subconjunto propio y no vacío de X, pues $X \setminus U = V$, cuya frontera es el conjunto vacío.
Esto prueba la implicación. □

5.17 Teorema. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta. Entonces para cada conjunto abierto y conexo, $B \subset Y$ y para cada casi-componente, C de $f^{-1}(B)$ se tiene que $f(C) = B$.

Demostración. Dado que $C \subset f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \subset B$. Resta probar que $B \subset f(C)$, para esto supongamos que existe $p \in B \setminus f(C)$, entonces $f^{-1}(p) \cap C = \emptyset$, es decir, $C \subset f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(p)$.
Como $f^{-1}(p)$ es cerrado en X, entonces es cerrado en $f^{-1}(B)$, por lo que $f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(p)$ es abierto en $f^{-1}(B)$, por la Proposición 5.14 existe U abierto y cerrado en $f^{-1}(B)$ tal que $C \subset U \subset f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(p)$, se sigue que $f(C) \subset f(U) \subset B \setminus \{p\}$. Por lo que $f(U) \neq \emptyset$ y $B \setminus f(U) \neq \emptyset$.
Como B es conexo, por la Proposición 5.16 se tiene que $fr_B(f(U)) \neq \emptyset$.
Note que $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ es abierta, por lo que
$fr_B(f(U)) \subset f(fr_{f^{-1}(B)}(U))$. Dado que U es abierto y cerrado en $f^{-1}(B)$, se tiene que $fr_{f^{-1}(B)}(U) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

5.18 Corolario. Sean X un espacio compacto y de Hausdorff, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y abierta. Entonces para cada continuo $Q \subset Y$ y para cada componente, C de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) = Q$.

Demostración. Consideremos la función $f|_{f^{-1}(Q)} : f^{-1}(Q) \longrightarrow Q$. Note que f es una función abierta, por la Proposición 5.5, luego por la

Proposición 5.3 $f^{-1}(Q)$ es un conjunto inverso. Además Q es abierto y conexo en Q. Como Q es compacto y Y es de Hausdorff, entonces Q es cerrado, luego como f es continua, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es cerrado en X, y como X es compacto, $f^{-1}(Q)$ es compacto, así sus componentes y casi-componentes coinciden, por lo que C es casi- componente de $f^{-1}(Q)$, luego por el Teorema 5.17 se concluye que $f(C) = Q$. $\square$

5.19 Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios topológicos es **confluente** si para cada continuo $Q \subset Y$ y para cada componente C de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) = Q$.

Observemos que de la definición anterior se deduce que el Corolario 5.18 puede ser reformulado como el siguiente teorema.

5.20 Teorema. Cada función abierta de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff es una función confluente.

5.21 Teorema. Cada función monótona es confluente

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona, Q un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(Q)$.
Nótese que $f^{-1}(Q)$ es conexo, véase el Corolario 4.9. Se sigue que $C = f^{-1}(Q)$. Así $f(C) = Q$ $\square$

Whyburn en [12] introduce una nueva clase de funciones continuas llamadas casi-interiores.

5.22 Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva es **casi-interior** si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto abierto, U de X tal que contiene a la componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in int(f(U))$.

5.23 Proposición. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta, entonces es casi-interior.

Demostración. Sean $y \in Y$ y C una componente de $f^{-1}(y)$. Tomemos U abierto en X tal que $C \subset U$.
Si $x \in C$, entonces $y = f(x) \in f(U)$. Como f es abierta, entonces $f(U)$ es abierto, por lo que $f(U) = int(f(U))$. Así $y \in int(f(U))$. $\square$

5.24 Corolario. Sean X y Y espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona, entonces f es casi-interior.

Demostración. Sea $y \in Y$, C una componente de $f^{-1}(y)$ y U abierto en X tal que $C \subset U$. Nótese que $f^{-1}(y)$ es conexo, así $C = f^{-1}(y)$, por lo que $f^{-1}(y) \subset U$, luego por el Lema 3.24 se tiene que $y \in int(f(U))$. $\square$

5.25 Teorema. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es casi-interior si y sólo si, para cada punto $y \in Y$ y para cada sucesión $\{y_n\} \subset Y$ se cumple que $\lim y_n = y$ implica que para cada componente, C, de $f^{-1}(y)$, $C \cap \limsup f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$.

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea C una componente de $f^{-1}(y)$.
Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $U_m = \bigcup\{B_{\frac{1}{m}}(x) : x \in C\}$.
Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $y \in int(f(U_m))$. Como $\lim y_n = y$, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos tomar un punto $y_{n_m} \in int(f(U_m))$. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_m \in U_m$ tal que $f(x_m) = y_{n_m}$.
Como X es métrico y compacto, existe un punto $x \in X$ y una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_{m_k} = x$.
Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{m_k} \in f^{-1}(y_{n_{m_k}})$, con lo cual se tiene que $x \in \limsup f^{-1}(y_n)$.
Por otra parte, notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $z_k \in C$ tal que $\rho(x_{m_k}, z_k) < \frac{1}{m_k}$. Observemos que
$\rho(z_k, x) \leq \rho(z_k, x_{m_k}) + \rho(x_{m_k}, x) < \frac{1}{m_k} + \rho(x_{m_k}, x)$
por lo cual $\lim z_k = x$. Como C es un conjunto cerrado en X, se sigue que $x \in C$.
Se concluye que, $C \cap \limsup f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$] Sea U un abierto en X que contiene a una componente C de $f^{-1}(y)$.
Si $y \notin int(f(U))$, entonces $y \in fr(f(U)) \subset \overline{Y \setminus f(U)}$, por lo que existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos en $Y \setminus f(U)$ tal que $\lim y_n = y$.
Dado que $f^{-1}(y_n) \subset X \setminus U$ y $X \setminus U$ es cerrado, se tiene que $\limsup f^{-1}(y_n)$ $\subset X \setminus U \subset X \setminus C$, es decir, $\limsup f^{-1}(y_n) \cap C = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis.
Esto demuestra la implicación. $\square$

5.26 Teorema. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas, con X compacto. Si g es ligera y $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es casi-interior, entonces g es abierta.

Demostración. Sea U un conjunto abierto en Y, para demostrar que $g(U)$ es abierto en Z, probaremos que $g(U) \subset int_Z(g(U))$. Para esto

fijemos un punto $z \in g(U)$, tomemos un punto $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Sea C una componente de $f^{-1}(y)$. Notemos que C es un subconjunto conexo de $(g \circ f)^{-1}(z)$. Sea C' la componente de $f^{-1}(g^{-1}(z))$ tal que $C \subset C'$.
Tenemos que $(g \circ f)(C') = \{z\}$, así que $f(C') \subset g^{-1}(\{z\})$, como g es ligera y $f(C')$ es conexo, se tiene que $f(C')$ es un conjunto degenerado, por lo que $f(C') = \{y\}$, luego $C' \subset f^{-1}(y)$, entonces C' está contenido en una componente de $f^{-1}(y)$, es decir $C' \subset C \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$, donde $f^{-1}(U)$ es abierto y $g \circ f$ es casi-interior, se tiene que $z \in int_Z(g \circ f)(f^{-1}(U))$. Como f es suprayectiva se tiene que $(g \circ f)(f^{-1}(U)) = g(U)$. Se sigue que $z \in int_Z(g(U))$.
Esto demuestra que $g(U) \subset int_Z(g(U)$. □

5.27 Corolario. Sean X, Y espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ una función casi-interior. Entonces existe un espacio métrico compacto Z y funciones $f_1 : X \longrightarrow Z$ y $f_2 : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = f_2 \circ f_1$, con f_1 monótona y f_2 ligera y abierta.

Demostración. Por el Teorema 4.34 existen Z un espacio métrico y compacto y funciones f_1 y f_2 tales que $f = f_2 \circ f_1$, con f_1 función monótona y f_2 ligera, luego por el Teorema 5.26 se tiene que f_2 es abierta. □

5.28 Proposición. Sean X, Y y Z espacios métricos compactos. Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones confluentes, entonces $g \circ f$ es una función confluente.

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Z y K una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$. Veamos que $(g \circ f)(K) = Q$.
Sea C la componente de $g^{-1}(Q)$ tal que $f(K) \subset C$. Notemos que $K \subset f^{-1}(C)$. Sea E la componente de $f^{-1}(C)$ tal que $K \subset E$.
Obsérvese que $(g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(C) = Q$. Así $E \subset (g \circ f)^{-1}(Q)$. Como E es conexo existe una componente K' de $(g \circ f)^{-1}(Q)$ tal que $E \subset K'$. Se tiene que $K \subset E \subset K'$ y además K y K' son componentes de $(g \circ f)^{-1}(Q)$.
Así $K = K'$, se sigue que $K = E$. Luego $f(K) = f(E) = C$, la última igualdad se tiene porque f es confluente.
En consecuencia $g(f(K)) = g(C) = Q$. Se concluye que $(g \circ f)(K) = Q$, por lo cual $g \circ f$ es confluente. □

5.29 Corolario. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es casi-interior, entonces f es confluente.

Demostración. Por el Corolario 5.27 f puede ser factorizada como $f = f_2 \circ f_1$, donde f_1 es monótona y f_2 es abierta, luego por el Teorema 5.21 se sigue que f_1 es confluente, y por el Teorema 5.18 f_2 es confluente. Por la Proposición 5.28 la composición $f_2 \circ f_1$ es confluente, es decir f es confluente. $\square$

5.30 Teorema. Sean X, Y y Z espacios métricos compactos, $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si f y g son casi-interiores, entonces $g \circ f$ también lo es.

Demostración. Sean $z \in Z$ y U un abierto en X tal que contiene a una componente, C, de $(g \circ f)^{-1}(z)$. Tenemos que $(g \circ f)(C) \subset \{z\}$, de modo que $f(C) \subset g^{-1}(z)$. Notemos que $f(C)$ es un subconjunto conexo de $g^{-1}(z)$. Sea C' la componente de $g^{-1}(z)$ tal que $f(C) \subset C'$.
Note que C' es cerrado en $g^{-1}(z)$ y éste último es cerrado en Y, por lo que C' es compacto y así un continuo.
Por otra parte tenemos que $C \subset f^{-1}(f(C)) \subset f^{-1}(C') \subset f^{-1}(g^{-1}(z))$.
Sea K la componente de $f^{-1}(C)$ tal que $C \subset K$. Notemos que K es un subconjunto conexo contenido en $(g \circ f)^{-1}(z)$ y que contiene a C. Como C es componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$, se tiene que $C = K$. Se sigue que C es una componente de $f^{-1}(C)$.
Por el Corolario 5.29 se tiene que f es confluente, luego se sigue que $f(C) = C'$.
Ahora, sean $y \in C'$ y $x \in C$ tal que $f(x) = y$, y sea C_y la componente de $f^{-1}(y)$ que contiene a x. Así $C \cap C_y \neq \emptyset$. Notemos que C_y es un subconjunto conexo de $f^{-1}(C)$, pues como $y \in C'$ entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(C')$ y además $C_y \subset f^{-1}(y)$, por lo cual $C_y \subset C$. De modo que $C_y \subset U$.
Como f es casi-interior, entonces $y \in int_Y(f(U))$. Dado que y fue un punto arbitrario de C' tenemos que $C' \subset int_Y(f(U))$.
Ahora como g es casi-interior, se sigue que $z \in int_Z(g(int_Y(f(U))))$.
Nótese que $int_Y(f(U)) \subset f(U)$, entonces $g(int_Y(f(U))) \subset g(f(U))$, de aquí que $int_Z(g(int_Y(f(U)))) \subset int(g \circ f)(U)$. Por lo que $z \in int(g \circ f)(U)$.
Así $g \circ f$ es casi-interior. $\square$

5.31 Definición. Una función continua y suprayectiva, f, entre espacios métricos compactos es una función **OM** si existen funciones, g y h, entre espacios métricos compactos, tales que $f = h \circ g$, donde g es monótona y h es abierta. Y es **MO**, si existen funciones, g y h, entre espacios métricos compactos, tales que $f = h \circ g$, donde g es abierta y h es monótona.

Una consecuencia inmediata de la definición es el siguiene corolario.

5.32 Corolario. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) f es casi-interior;

(ii) f es una función OM;

(iii) f se puede escribir como la composición $h \circ g$, donde g es monótona y h es ligera y abierta.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Como f es casi-interior, por el Corolario 5.27 existen funciones g y h, tales que $f = h \circ g$, donde g es monótona y h es ligera y abierta.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Si f puede escribirse como la composición $h \circ g$, con g monótona y h ligera y abierta, entonces f es una función OM.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Por hipótesis existen funciones, g y h tales que $f = h \circ g$, donde g es monótona y h es abierta. Por el Corolario 5.24 se tiene que g es casi-interior y por la Proposición 5.23, h es casi-interior, luego por el Teorema 5.30, f es casi-interior. □

5.33 Corolario. Sea f una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, si f es una función MO, entonces es una función OM.

Demostración. Como f es MO, entonces existen funciones g y h tales que $f = h \circ g$, con g abierta y h monótona.
Por la Proposición 5.23, g es casi-interior y por el Corolario 5.24, h es casi-interior, luego por el Teorema 5.30, $f = h \circ g$ es casi-interior. Finalmente, por el Corolario 5.32, f es una función OM. □

5.34 Corolario. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(n_1, \ldots, n_k)$ una $k-$upla ordenada tal que $n_i \in \{0, 1\}$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$ y si denotamos $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \{f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k : f_i$ es una función continua entre continuos, f_i es abierta si $n_i = 0$ y f_i es monótona si $n_i = 1$, $i \in \{1, ..., k\}\}$.
Entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{M}$; o $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{O}$; o $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{O}\mathscr{M}$; o $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{M}\mathscr{O}$, donde $\mathscr{M}$ es la clase de las funciones monótonas; $\mathscr{O}$ es la clase de las funciones abiertas; $\mathscr{O}\mathscr{M}$ es la clase de las funciones OM y $\mathscr{M}\mathscr{O}$ es la clase de las funciones MO.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k.
Si $k = 1$. Es claro, por la definición de $\mathscr{C}((n_1))$, que $\mathscr{M}((n_1)) = \mathscr{O}$ o $\mathscr{C}((n_1)) = \mathscr{M}$, según si $n_1 = 0$ o $n_1 = 1$.
Dado $k \in \mathbb{N}$, para cualquier $k-$upla ordenada $(n_1 \ldots, n_k)$, supongamos que
$\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k))$ coincide con $\mathscr{M}, \mathscr{O}, \mathscr{M}\mathscr{O}$ o $\mathscr{O}\mathscr{M}$.
Analizamos 4 casos:

(1) $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{M}$, en este caso, si $n_{k+1} = 0$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{M}\mathscr{O}$ y si $n_{k+1} = 1$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{M}$.

(2) $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{O}$, en este caso, si $n_{k+1} = 0$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}$ y si $n_{k+1} = 1$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}\mathscr{M}$.

(3) $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{M}\mathscr{O}$, en este caso, si $n_{k+1} = 0$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}\mathscr{M}$ y si $n_{k+1} = 1$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}\mathscr{M}$.

(4) $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_k)) = \mathscr{O}\mathscr{M}$, en este caso, si $n_{k+1} = 0$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}\mathscr{M}$ y si $n_{k+1} = 1$, entonces $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1})) = \mathscr{O}\mathscr{M}$.

En cualesquiera de los cuatro casos se tiene que $\mathscr{C}((n_1, \ldots, n_{k+1}))$ coincide con $\mathscr{M}, \mathscr{O}, \mathscr{M}\mathscr{O}$ o $\mathscr{O}\mathscr{M}$. Con lo cual se completa la prueba. $\square$

Para los espacios métricos compactos se tiene la siguiente inclusión $MO \subset OM$. La otra inclusión no siempre es cierta como veremos en el siguiente ejemplo.

5.35 Ejemplo. Existe una función $h : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tal que $h \in OM \setminus MO$.

Demostración. Consideremos la función $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3x, & si \quad x \in [0, \frac{1}{3}]; \\ 2 - 3x, & si \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ 0, & si \quad x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Sean las funciones $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ y $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & si \quad x \in [0, \frac{2}{3}]; \\ 1, & si \quad x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

respectivamente.

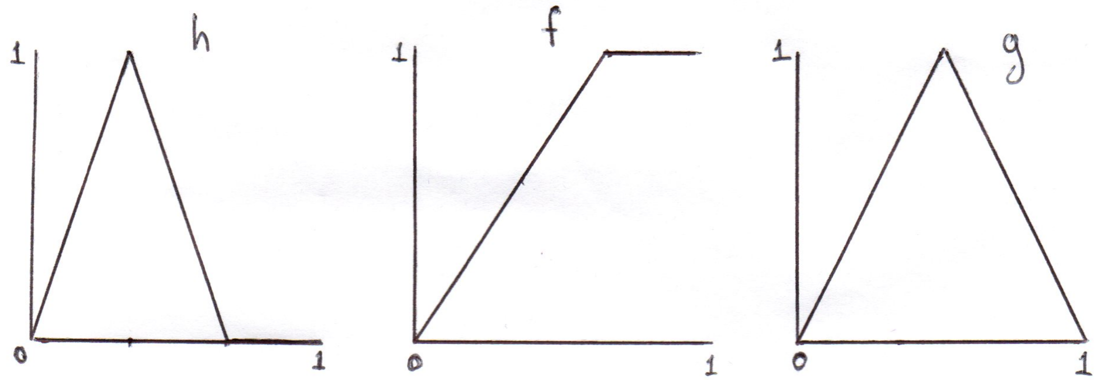

Figura 5.1: La figura muestra la gráfica de las funciones f, g y h.

Notemos que para cada $y \in [0,1)$, $f^{-1}(y) = \{\frac{2y}{3}\}$, el cual es un conjunto conexo en $[0,1]$.
Por otra parte, $f^{-1}(1) = [\frac{2}{3}, 1]$, el cual es un conjunto conexo en $[0,1]$.
Por lo que f es una función monótona.
Veamos que g es una función abierta, para esto mostraremos que la imagen bajo g de cada básico de $[0,1]$ es un conjunto abierto en $[0,1]$.
Notemos que los básicos en $[0,1]$ son de la forma $[0,\alpha)$, (α,β), $(\beta,1]$, con $0 < \alpha < \beta < 1$.

Tomaremos uno de los 3 casos, los otros casos serán similares.
Sea $A = (\alpha, \beta)$, entonces

$$g(A) = \begin{cases} [2\alpha, 2\beta], & si \quad \beta < \frac{1}{2} \\ [2\alpha, 1], & si \quad \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \beta \\ [2-2\beta, 2-2\alpha], & si \quad \frac{1}{2} < \beta \end{cases}$$

Así $g(A)$ es un conjunto abierto en $[0,1]$. Luego para cada abierto U en $[0,1]$ existen A_i básicos en $[0,1]$, con $i \in I$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} A_i$, por lo que $g(U) = g(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} g(A_i)$. Como $g(A_i)$ es un conjunto abierto en $[0,1]$, para cada $i \in I$, se tiene que $\bigcup_{i \in I} g(A_i)$ es un conjunto abierto en $[0,1]$.
Así g es una función abierta.
Ahora veamos que $h = g \circ f$.
Sea $x \in [0,1]$
Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, entonces $g(f(x)) = g(\frac{3}{2}x) = 2(\frac{3}{2}x) = 3x$;
Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, entonces $g(f(x)) = g(\frac{3}{2}x) = 2 - 2(\frac{3}{2}x) = 2 - 3x$;
Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, entonces $g(f(x)) = g(1) = 0$.
Por lo que para todo $x \in [0,1]$, $(g \circ f)(x) = h(x)$. Así $h = g \circ f$.
Por lo tanto $h \in OM$.
Afirmamos que h no es MO, para demostrar esto supongamos que h sí es MO; sean $f_0 : [0,1] \longrightarrow f_0([0,1])$, $g_0 : f_0([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ funciones continuas y suprayectivas tales que f_0 es abierta, g_0 es monótona y $h = g_0 \circ f_0$. Notemos que f_0 no es una función constante, pues h no lo es.
Denotemos $A = f_0([0,1])$, sabemos que A es un arco, no degenerado y que $a := f_0(0)$ y $b := f_0(1)$ son puntos extremos de A, véase Corolario 5.12.
Notemos que $g_0(a) = g_0(f_0(0)) = h(0) = h(1) = g_0(f_0(1)) = g_0(b)$, es decir, $g_0(a) = g_0(b)$. Denotemos $t_0 := g_0(a) = g_0(b)$. Sea $B = g_0^{-1}(g_0(a))$ y obsérvese que $B = g_0^{-1}(g_0(b))$.
Así $a \in B$ y $b \in B$, además B es conexo en A porque g_0 es monótona, y también es un conjunto cerrado en A porque g_0 es continua, así B es un subcontinuo de A.
Como A es irreducible entre a y b, se sigue que $B = A$. Esto implica que g_0 es la función constante definida en A, de valor t_0.
Así $g_0 \circ f_0 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es constante, de valor t_0, lo cual es una

contradicción, pues h no es constante.
Por lo tanto $h \notin MO$. $\square$

De los Corolarios 5.29 y 5.32 se deduce que las funciones OM son confluentes. En el siguiente ejemplo mostraremos que existen funciones confluentes que no son OM.

5.36 Ejemplo. Existe una función que es confluente, pero no es OM.

Demostración. Sea $A = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$. Se define $X := A \cup Y$, donde $Y = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\} \cup \{(x, sen(\frac{1}{x-1})) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2\}$.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ definida por

$$f((x,y)) = \begin{cases} (1,x), & si \quad (x,y) \in A \\ (x,y), & si \quad (x,y) \in Y. \end{cases}$$

Veamos que f es confluente. Para esto notemos que los únicos subcontinuos de Y son arcos en la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x-1})$, arcos en la barra límite, la barra límite o continuos parecidos al total, además las preimágenes de estos subcontinuos tienen 1 o 2 componentes conexas, las cuales bajo la función f van a dar a los respectivos subcontinuos. Por lo que f es confluente.
Sea $y = (0,1)$, obsérvese que $f^{-1}(y) = \{y, p\}$, donde $p = (0,1)$, así $\{p\}$ y $\{y\}$ son las componentes de $f^{-1}(y)$.
Sea $U = (-1,1) \times \{1\}$, nótese que $U = U' \cap X$ donde $U' = (-1,1) \times \mathbb{R}$ y U' es un abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo que U es un abierto en X.
Nótese que $\{p\} \subset U$, además $f(U) = \{1\} \times (-1,1)$, se tiene que $int(f(U)) = \emptyset$, pues claramente $Y \setminus f(U)$ es un conjunto denso en Y. Así $y \notin int(f(U))$.
Esto prueba que la función f no es casi-interior y por el Corolario 5.32, $f \notin OM$. $\square$

Capítulo 6

Funciones confluentes

En el Teorema 4.24 caracterizamos los continuos hereditariamente unicoherentes usando un tipo especial de funciones, llamadas hereditariamente monótonas. Ahora usaremos otra clase de funciones, llamadas funciones confluentes, para caracterizar a los continuos hereditariamente indescomponibles. Para esto, recordaremos algunas definiciones y lemas.

6.1 Definición. Un continuo es **descomponible** si es la unión de dos de sus subcontinuos propios, no degenerados. En otro caso se dice que es indescomponible.

De la definición se sigue que un continuo degenerado es indescomponible.

6.2 Lema. Si C es un subcontinuo conexo, no vacío, de un espacio conexo X, y si $X \setminus C = M \cup N$, donde los conjuntos M y N son no vacíos y están separados, entonces los conjuntos $C \cup M$ y $C \cup N$ son conexos. Más aún, si C es cerrado, entonces $C \cup M$ y $C \cup N$ son cerrados.

Demostración. Si $C = \emptyset$ se sigue la conclusión.
Supongamos que $C \neq \emptyset$ y que $C \cup M = A \cup B$, donde A y B están separados. Mostraremos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.
Dado que $C \subset A \cup B$ y como C es conexo, se tiene que $C \subset A$ o $C \subset B$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C \subset B$. Como A y B están separados, se tiene que A y C están separados, y en particular $A \cap C = \emptyset$, y dado que $A \subset C \cup M$, se sigue que $A \subset M$.
Por otro lado, como M y N están separados, entonces A y N están

separados, así A está separado de B y de N, en consecuencia, A y $B \cup N$ están separados.
Notemos que $X = C \cup M \cup N = A \cup B \cup N$. Es decir, X se escribe como la unión de dos de sus subconjuntos propios separados, y dado que X es conexo, se sigue que $A = \emptyset$ o $B \cup N = \emptyset$. Como $N \neq \emptyset$, entonces $A = \emptyset$.
Ahora, si $C = \overline{C}$, entonces $\overline{C \cup M} = C \cup \overline{M} = C \cup (\overline{M} \cap (C \cup M \cup N)) = C \cup ((\overline{M} \cap C) \cup (\overline{M} \cap M) \cup (\overline{M} \cap N)) = C \cup (\overline{M} \cap C) \cup M = C \cup M$.
Por lo que $C \cup M$ es cerrado. De la misma manera se prueba que $C \cup N$ es cerrado. $\square$

6.3 Lema. Un continuo indescomponible no puede ser separado por ninguno de sus subcontinuos.

Demostración. Sea X un continuo indescomponible y sea C un subcontinuo de X, no vacío. Supongamos que C separa a X, es decir, $X \setminus C = M \cup N$, con M y N subconjuntos de X, abiertos, no vacíos y ajenos.
Por el Lema 6.2, $C \cup M$ y $C \cup N$ son conjuntos conexos y son cerrados, ya que C es cerrado, es decir, estos conjuntos son subcontinuos de X.
Note que $X = (M \cup C) \cup (N \cup C)$, donde $M \cup C \neq \emptyset$ y $N \cup C \neq \emptyset$, por lo que X es descomponible, lo cual contradice la hipótesis. $\square$

6.4 Teorema. Un continuo X es indescomponible si y sólo si cada subcontinuo propio de X tiene interior vacío.

Demostración.
$\Rightarrow]$ Supongamos que existe un subcontinuo propio, C de X, no vacío, tal que $int(C) \neq \emptyset$. Tenemos que $int(C) = X \setminus \overline{X \setminus C}$, por lo que $\overline{X \setminus C} \neq X$.
Por el Lema 6.3, $X \setminus C$ es conexo, por lo que $\overline{X \setminus C}$ es conexo, y dado que este conjunto es cerrado, entonces es un subcontinuo de X. Así $X = C \cup \overline{X \setminus C}$, es decir, X está separado por dos de sus subcontinuos, se sigue que X es descomponible, lo cual contradice la hipótesis.
Así $int(C) = \emptyset$.
$\Leftarrow]$ Supongamos que X es descomponible, por lo que existen A y B subcontinuos propios de X, no degenerados, tales que $X = A \cup B$. Por hipótesis $int(A) = \emptyset$, pero sabemos que $int(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$, por lo que $X = \overline{X \setminus A}$. Dado que $X \setminus A \subset B$, tenemos que $\overline{X \setminus A} \subset \overline{B}$, y como $int(B) = \emptyset$, entonces B es cerrado, por lo que $\overline{B} = B$, de lo anterior se

concluye que $X \subset B$, así $X = B$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, X es indescomponible. $\square$

6.5 Definición. Un continuo es **hereditariamente indescomponible** si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

Para probar una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles vía funciones confluentes, veremos algunos lemas.

6.6 Lema. Sean X y Y espacios topológicos, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

Demostración. Sea $y \in f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)$, entonces existe un punto $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ tal que $f(x) = y$, esto es, para cada $i \in I$, $x \in A_i$, entonces $f(x) \in f(A_i)$ para cada $i \in I$, por lo que $y \in \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.
Por lo tanto, $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$. $\square$

6.7 Lema. Sean X y Y espacios métricos, con X compacto, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces $f(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$.

Demostración. Por el Lema 6.6, se tiene que $f(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$, resta ver la otra inclusión.
Sea $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$, entonces $y \in f(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) = y$.
Dado que X es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente. Sea $x_0 \in X$ tal que $\lim x_{n_k} = x_0$.
Sea $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, entonces $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ también es decreciente, así cada conjunto A_{n_k} contiene casi todos los elementos de la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (salvo los términos anteriores a n_k).
Nótese que $x_0 \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pues dado $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_j} \in A_{n_k}$

para todo $j \geq k$ porque $x_{n_j} \in A_{n_j} \subset A_{n_k}$.
Afirmamos que $x_0 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$, fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n$. Se tiene que $x_0 \in A_{n_k} \subset A_n$, así $x_0 \in A_n$.
Ahora, la continuidad de f implica que $f(x_0) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = y$, por lo que $y = f(x_0)$. Además $f(x_0) \in f(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$, así $y \in f(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$.

□

6.8 Teorema. Un continuo Y es hereditariamente indescomponible si y sólo si, cada función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva de un continuo X a Y es confluente.

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que Y es hereditariamente indescomponible y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Por demostrar que f es una función confluente. Sea Q un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(Q)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por C_n a la cerradura de la componente de $N(\frac{1}{n}, C) = \bigcup\{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in C\}$.
Como $N(\frac{1}{n+1}, C) \subset N(\frac{1}{n}, C)$, entonces $C_{n+1} \subset C_n$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $N(\frac{1}{n}, C)$ es un subconjunto abierto en X, no vacío, entonces $C_n \cap X \setminus N(\frac{1}{n}, C) \neq \emptyset$ [11, 5.7], y dado que $C \subset N(\frac{1}{n}, C)$, entonces $C \neq C_n$.
Por otro lado, tenemos que $C \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N(\frac{1}{n}, C)}$.
Afirmamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N(\frac{1}{n}, C)} \subset C$, lo demostraremos usando complementos, es decir, demostraremos que $X \setminus C \subset X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N(\frac{1}{n}, C)}$.
Sea $x \in X \setminus C$, por la normalidad de X existen abiertos y ajenos, U y V, en X tales que $C \subset U$ y $x \in V$. Nótese que para cada $z \in C$ existe $\varepsilon_z > 0$ tal que $B_{\varepsilon_z}(z) \subset U$, por lo que $\{B_{\frac{\varepsilon_z}{2}} : z \in C\}$ es una cubierta abierta para C. Dado que C es compacto existen $\frac{\varepsilon_{z_1}}{2}, \frac{\varepsilon_{z_2}}{2}, \cdots, \frac{\varepsilon_{z_k}}{2}$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\varepsilon_{z_i}}{2}}(z_i)$.
Nótese que $\varepsilon_{z_i} > 0$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$

tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon_{z_i}}{2}$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. Se tiene que $N(\frac{1}{m}, C) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\varepsilon_{z_i}}(z_i)$: pues si $w \in N(\frac{1}{m}, C)$, entonces existe $x \in C$ tal que $w \in B_{\frac{1}{m}}(x)$ y existe $z_i \in C$ tal que $x \in B_{\frac{\varepsilon_{z_i}}{2}}(z_i)$.
Por lo que $\rho(w, z_i) \leq \rho(w, x) + \rho(x, z_i) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon_{z_i}}{2} < \frac{\varepsilon_{z_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{z_i}}{2} = \varepsilon_{z_i}$.
Así $x \in \bigcup_{i=1}^{k} B_{\varepsilon_{z_i}}(z_i)$.
Dado que $C \subset f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) \subset Q$ y como $C \subset C_n$, entonces $f(C) \subset f(C_n)$, por lo que $Q \cap f(C_n) \neq \emptyset$.
Como $C \neq C_n$, entonces

1) $f(C_n) \setminus Q \neq \emptyset$.

Pues de lo contrario si $f(C_n) \setminus Q = \emptyset$, entonces $f(C_n) \subset Q$, por lo que $C_n \subset f^{-1}(Q)$, así $C = C_n$, lo cual es falso.
Consideremos la unión $B = f(C_n) \cup Q$ el cual es un subcontinuo de Y, entonces por hipótesis, B es indescomponible, por lo que $f(C_n) \subset Q$ o $Q \subset f(C_n)$. Por 1) la primera inclusión no puede ser cierta, así $Q \subset f(C_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Se tiene que $Q \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(C_n) = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = f(C)$, es decir $Q \subset f(C)$.
Se concluye que $f(C) = Q$, por lo tanto, f es confluente.
$\Leftarrow$] Supongamos que Y no es hereditariamente indescomponible, entonces existen A y B subcontinuos de Y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \setminus B \neq \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$.
Sea $a \in A \setminus B$ y sea $X = (Y \times \{0\}) \cup (\{a\} \times [0,1]) \cup (A \times \{1\})$. Tenemos que $X \subset Y \times [0,1]$, así definimos $f : X \longrightarrow Y$ como $f((y,t)) = y$, para cada $t \in [0,1]$.
Nótese que $f = g_{|X} : X \longrightarrow Y$ donde $g : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ es la función proyección a la primera coordenada. Por lo que f es una función continua, también f es suprayectiva pues $f(Y \times \{0\}) = Y$.
Sea $Q = B$, $f^{-1}(B) = ((A \cap B) \times \{1\}) \cup (B \times \{0\})$, así $f^{-1}(B)$ tiene dos componentes.
Note que $f((A \cap B) \times \{1\}) \subset A \cap B$, pero $A \cap B \neq B$, ya que $B \setminus A \neq \emptyset$.
Por lo que f no es confluente. $\square$

6.9 Teorema. Si f es una función continua de un continuo X, entonces existe un subcontinuo C de X el cual es irreducible respecto a la propiedad de ser un continuo tal que $f(C) = f(X)$.

Demostración. El continuo X, al ser un espacio métrico compacto es separable, véase la Proposición 2.21 y por la Proposición 2.22 X es segundo numerable, es decir, tiene una base numerable.
Veamos que la propiedad P de ser un continuo, B, tal que $f(B) = f(X)$ es una propiedad inducible.
Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona decreciente de continuos tal que $f(B_n) = f(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar que $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es un continuo tal que $f(B) = f(X)$.
Por el Corolario 3.10 sabemos que B es un continuo. Aplicando el Lema 6.7 tenemos que $f(B) = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(X) = f(X)$.
Por lo que la propiedad P es inducible.
Por el teorema de reducción de Brouwer, X contiene un subconjunto cerrado, no vacío, digamos C, el cual es irreducible con respecto a la propiedad P. Es decir, C es un subcontinuo de X tal que $f(C) = f(X)$ y ninguno de sus subcontinuos propios tiene la propiedad P. Esto significa que si A es un subcontinuo propio de C, entonces $f(A) \neq f(X)$. □

6.10 Teorema. Si X es un continuo y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, donde Y es un continuo indescomponible. Entonces X contiene un continuo indescomponible.

Demostración. Por el Teorema 6.9 existe un subcontinuo C de X, el cual es irreducible con respecto a la propiedad de que $f(C) = f(X)$.
Sean A y B dos subcontinuos propios y no vacíos de C, tales que $C = A \cup B$, por la irreductibilidad de C con respecto a la propiedad considerada, $f(A) \neq f(X)$ y $f(B) \neq f(X)$, es decir, $f(A) \neq Y$ y $f(B) \neq Y$.
Por otro lado, $f(C) = f(A) \cup f(B)$, por lo que $Y = f(A) \cup f(B)$, donde $f(A)$ y $f(B)$ son subcontinuos propios y no vacíos de Y, así Y es descomponible, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, C es indescomponible. □

Capítulo 7

Funciones débilmente confluentes

7.1 Definición. Una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ es **débilmente confluente** si para cada subcontinuo Q de Y existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.

7.2 Proposición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre continuos es débilmente confluente si y sólo si para cada subcontinuo Q de Y existe un subcontinuo L de X tal que $f(L) = Q$

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que f es débilmente confluente. Sea Q un subcontinuo de Y, entonces existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Notemos que C es un conjunto conexo y cerrado en X, por lo que es un subcontinuo de X. Sea $L = C$, así $f(L) = Q$.
$\Leftarrow$] Sea Q un subcontinuo de Y, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $f(L) = Q$, por lo que $L \subset f^{-1}(Q)$.
Sea C la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a L. Se tiene que $L \subset C$, así $f(L) \subset f(C) \subset Q$.
En resumen, $Q \subset f(C) \subset Q$, de ahí que $f(C) = Q$.
Esto prueba que f es débilmente confluente. $\square$

7.3 Proposición. Sea X un continuo. Si M es un subcontinuo de X tal que $M \cap H \neq \emptyset$ y $M \cap K \neq \emptyset$, donde H y K son dos subconjuntos cerrados de X, ajenos, entonces M contiene un subcontinuo L, el cual es irreducible con respecto a la propiedad de ser un subcontinuo de M tal que $L \cap H \neq \emptyset$ y $L \cap K \neq \emptyset$.

Demostración. Veamos que la propiedad P de ser un subcontinuo B, de M tal que $B \cap H \neq \emptyset$ y $B \cap K \neq \emptyset$, es una propiedad inducible.
Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona decreciente de subcontinuos de M tal que $B_n \cap H \neq \emptyset$ y $B_n \cap K \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, mostraremos que B es un subcontinuo de M tal que $B \cap H \neq \emptyset$ y $B \cap K \neq \emptyset$.
Por el Corolario 3.10, B es un subcontinuo de M. Por otra parte $B \cap H = (\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \cap H = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap H)$. Notemos que $\{B_n \cap H\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X, no vacíos, luego por el Corolario 3.9 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap H) \neq \emptyset$, por lo que $B \cap H \neq \emptyset$.
Análogamente se prueba que $B \cap K \neq \emptyset$. Por lo tanto, P es una propiedad inducible.
Por el Teorema de Reducción de Brouwer, X contiene un subconjunto cerrado, no vacío, digamos L, el cual es irreducible con respecto a la propiedad P, es decir L es un subcontinuo de M tal que $L \cap H \neq \emptyset$ y $L \cap K \neq \emptyset$ y ninguno de sus subcontinuos propios tiene la propiedad P. □

7.4 Proposición. Si X es un espacio de Hausdorff y compacto y A y B son subconjuntos cerrados de X tales que para cada componente C, de X, se tiene que $C \cap A = \emptyset$ o $C \cap B = \emptyset$, entonces existen subconjuntos cerrados F_1 y F_2 de X, ajenos, tales que $X = F_1 \cup F_2$, $A \subset F_1$ y $B \subset F_2$.

Demostración. Para cada $x \in A$ sea Q_x la casicomponente de x en X. Tenemos que Q_x coincide con la componente del punto x en X, véase Teorema 5.15. Por hipótesis se tiene que $Q_x \cap B = \emptyset$, es decir, $Q_x \subset X \setminus B$. Por la Proposición 5.14 existe un conjunto abierto y cerrado F_x tal que $x \in F_x$ y $F_x \subset X \setminus B$.
Tenemos que la colección $\mathscr{U} := \{F_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta para el conjunto A. Como A es compacto, existe una subcolección finita de $\mathscr{U}$ que cubre a A, es decir, existe un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de A tal que $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_{x_i}$. Denotemos $F_1 = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_{x_i}$ y $F_2 = X \setminus F_1$. Se tiene que F_1 y F_2 satisfacen la conclusión de la proposición. □

7.5 Lema. Sean X un continuo y a y b números reales tales que $0 \leq a < b \leq 1$. Si K es un subcontinuo del producto $X \times [0,1]$ tal que $K \cap (X \times \{a\}) \neq \emptyset$ y $K \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$, entonces K contiene un subcontinuo A tal que $A \subset X \times [a,b]$, $A \cap (X \times \{a\}) \neq \emptyset$ y $A \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$.

Demostración. Dadas las hipótesis, supongamos que K no contiene un subcontinuo con las propiedades indicadas. En particular tenemos que para cada componente C de $K \cap (X \times [a,b])$ se tiene que $C \cap (K \cap (X \times \{a\})) = \emptyset$ o $C \cap (K \cap (X \times \{b\})) = \emptyset$. Así, podemos aplicar la Proposición 7.4 para obtener dos subconjuntos cerrados F_1 y F_2 de $K \cap (X \times [a,b])$ ajenos, tales que $K \cap (X \times [a,b]) = F_1 \cup F_2$, $K \cap (X \times \{a\}) \subset F_1$ y $K \cap (X \times \{b\}) \subset F_2$.
Denotemos $K_1 = K \cap (X \times [0,a])$ y $K_2 = K \cap (X \times [b,1])$, se sigue que $K = (K_1 \cup F_1) \cup (K_2 \cup F_2)$.
Es fácil verificar que $K_1 \cup F_1$ y $K \cup F_2$ son conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, lo cual contradice la conexidad de K. Esta contradicción demuestra el Lema. $\square$

7.6 Proposición. Cada función continua de un continuo sobre un arco es débilmente confluente.

Demostración. Sean X un continuo y $f : X \longrightarrow [0,1]$ una función continua y suprayectiva.
Sea $Q := [a,b]$ un subcontinuo de $[0,1]$, con $0 < a < b < 1$.
Consideremos la función $g : X \longrightarrow X \times [0,1]$ definida por $g(x) = (x, f(x))$, para cada $x \in X$. Claramente g es una función continua.
Denotemos $G(f) := g(X)$, se tiene que $G(f)$ es un subcontinuo de $X \times [0,1]$, pues es la imagen continua de un continuo.
Notemos que $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Como f es suprayectiva, se tiene que para cada $t \in [0,1]$, $G(f) \cap (X \times \{t\}) \neq \emptyset$. En particular $G(f) \cap (X \times \{a\}) \neq \emptyset$ y $G(f) \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$. Por la Proposición 7.3 podemos encontrar un subcontinuo K de $G(f)$ tal que

(1) $K \cap (X \times \{a\}) \neq \emptyset$ y $K \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$.

Y para todo subcontinuo propio M de K se tiene que

(2) $M \cap (X \times \{a\}) = \emptyset$ o $M \cap (X \times \{b\}) = \emptyset$.

Se sigue que $K \subset (X \times [a,b])$ pues de lo contrario por el Lema 7.5 existe un subcontinuo A de K tal que $A \cap (X \times \{a\}) \neq \emptyset$ o $A \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$,

lo cual contradice (2).
Denotemos $L = p_1(K)$, donde $p_1 : X \times [0,1] \longrightarrow X$ es la función proyección en la primera coordenada, es decir, $p_1((x,t)) = x$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$. Es claro que L es un subcontinuo de X, pues es la imagen continua de un continuo.
Por (1) se tiene que existen puntos $x_a, x_b \in X$ tales que $(x_a, a), (x_b, b) \in K$ y puesto que $K \subset G(f)$ se tiene que $f(x_a) = a$ y $f(x_b) = b$.
Notemos que $\{x_a, x_b\} \subset L$, luego tenemos que $\{a, b\} \subset f(L)$.
Como $f(L)$ es un subcontinuo del intervalo $[a,b]$ se sigue que $[a,b] \subset f(L)$.
En lo que sigue probaremos que $f(L) \subset [a,b]$.
Sea $t \in f(L)$ entonces existe $x \in L$ tal que $f(x) = t$. Se sigue que $x \in p_1(K)$, luego existe $t' \in [0,1]$ tal que $(x,t') \in K$. Como $K \subset G(f)$, se tiene que $f(x) = t'$. Así $t = t'$. Entonces $(x,t) \in K$. Esto implica que $(x,t) \in X \times [a,b]$, por lo que $t \in [a,b]$, así $f(L) \subset [a,b]$.
Por lo tanto $f(L) = [a,b]$, es decir, $f(L) = Q$. $\square$

7.7 Definición. Sean X y Y espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Una función continua $f_\varepsilon : X \longrightarrow Y$ es una $\varepsilon-$**función** si para todo $y \in Y$ se tiene que $diam(f^{-1}(y)) < \varepsilon$.

7.8 Definición. Un continuo X es **tipo arco** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon-$función suprayectiva $f_\varepsilon : X \longrightarrow [0,1]$.

7.9 Ejemplo. Sea $X := Cl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = sen(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$, es decir, X es la gráfica de la función $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Afirmamos que X es un continuo tipo arco.

Para justificar esto sea $\varepsilon > 0$. Elíjase $x_0 \in (0,\varepsilon)$ tal que $sen(\frac{1}{x_0}) = 1$. Sea $h : [-1,1] \longrightarrow [0,x_0]$ un homeomorfismo tal que $h(-1) = 0$ y $h(1) = x_0$.
Nótese que $X = A \cup B$ donde $A = \{(x,y) \in X : x_0 \leq x \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in X : 0 \leq x \leq x_0\}$.
Definamos $f_\varepsilon : X \longrightarrow [0,1]$ de la siguiente manera
$$f_\varepsilon((x,y)) = \begin{cases} x & si \quad x \in A \\ h(y) & si \quad x \in B \end{cases}$$

Por la Proposición 3.27 se tiene que f_ε es una función continua.
Sea $t \in [0,1]$, si $x_0 < t$, entonces $f_\varepsilon^{-1}(t) = \{(t, sen(\frac{1}{t})\}$, por lo que $diam(f_\varepsilon^{-1}(t)) = 0 < \varepsilon$.

Si $t < x_0$, entonces $f_\varepsilon^{-1}(t) = \{(0, sen(\frac{1}{t})) : -1 < sen(\frac{1}{t}) \leq 1\}$, por lo que $diam(f_\varepsilon^{-1}(t)) \leq x_0 < \varepsilon$. Así f_ε es una $\varepsilon-$función.

7.10 Teorema. Sean X un continuo y Y un continuo tipo arco. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces f es débilmente confluente.

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Y. Dado que Y es un continuo tipo arco, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función continua y suprayectiva $g_n : Y \longrightarrow [0,1]$ tal que para cada $t \in [0,1]$ se tiene que $diam(g_n^{-1}(t)) < \frac{1}{n}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la composición $g_n \circ f : X \longrightarrow [0,1]$, la cual es una función débilmente confluente por la Proposición 7.6.
Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(Q)$ es un subcontinuo de $[0,1]$, ya que es la imagen continua de un continuo, entonces existe un subcontinuo C_n de X tal que $(g_n \circ f)(C_n) = g_n(Q) \ldots (1)$.
Por la compacidad de $C(X)$ existe un subconjunto C de X y existe una subsucesión $\{C_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim C_{n_j} = C$.
En lo que sigue vamos a demostrar que $f(C) = Q$.
Sea $x \in C$. Tomemos una sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim x_j = x$ y $x_j \in C_{n_j}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ [11, 4.11].
Dado que $diam(g_{n_j}^{-1}((g_{n_j} \circ f)(x_j))) < \frac{1}{n_j}$ y como $g_{n_j}(f(x_j)) \in g_{n_j}(Q)$ por (1), se tiene que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un punto $y_j \in Q$ tal que $g_{n_j}(f(x_j)) = g_{n_j}(y_j)$. Denotemos $t_j = g_{n_j}(y_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Se tiene que $f(x_j), y_j \in g_{n_j}^{-1}(t_j)$, se sigue que $\rho_Y(f(x_j), y_j) < \frac{1}{n_j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$.
Se obtiene que $\rho_Y(f(x), y_j) \leq \rho_Y(f(x), f(x_j)) + \rho_Y(f(x_j), y_j) = 0$, ya que $\lim f(x_j) = x_j$ y $\rho_Y(f(x_j), y_j) < \frac{1}{n_j}$, lo cual implica que $\lim y_j = f(x)$.
Luego como Q es cerrado, se concluye que $f(x) \in Q$. Esto prueba que $f(C) \subset Q$.
Sea $y \in Q$, por (1) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $z_n \in C_n$ tal que $g_n(f(z_n)) = g_n(y)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $t_n = g_n(y)$. Se sigue que $f(z_n), y \in g_n^{-1}(t_n)$ por lo cual $\rho_Y(f(z_n), y) < \frac{1}{n} \ldots (*)$.
Por la compacidad de X existe un punto $z \in X$ y existe una subsucesión $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim z_{n_j} = z$.
Como $\lim C_{n_j} = C$ se tiene que $z \in C$. Por la continuidad de f se sigue que $\lim f(z_{n_j}) = f(z) \ldots (**)$.
Por otra parte notemos que $\rho_Y(f(z), y) \leq \rho_Y(f(z), f(z_{n_j})) + \rho_Y(f(z_{n_j}), y)$.
De $(*)$ y $(**)$ se concluye que $\rho_Y(f(z), y) = 0$, así $f(z) = y$. Esto prueba

que $Q \subset f(C)$. Por lo tanto, $f(C) = Q$. Así f es débilmente confluente. $\square$

Bibliografía

[1] J. Angoa, R. Escobedo y M. Ibarra, *Topología y sus aplicaciones 4*, Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2016.

[2] F. Barragán y M. de J. López, *Funciones especiales entre continuos*, Capítulo 5 en Topología y Sistemas Dinámicos III. Editores J. Angoa y otros. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2010.

[3] F. Barragán, A. Rojas y S. Macías, *Funciones especiales entre continuos II*, Capítulo 1 en Topología y sus aplicaciones 5. Editores J. Angoa, R. Escobedo y M. Ibarra. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2017.

[4] J. J. Charatonik, *Mappings*, manuscrito sin publicar, 1996.

[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Atlantic Avenue, Boston, 1966.

[6] R. Engelking and A. Lelek, *Cartesian products and continuous images*, Colloq. Math. 8 (1961), p. 27-29.

[7] R. Escobedo, M. de J. López e I. Puga, *El intervalo cerrado, la circunferencia y sus funciones continuas*, Capítulo 8 en Topología y Sistemas Dinámicos IV. Editores J. Angoa y otros. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2011.

[8] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[9] A. Lelek and D. R. Read, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions*, Colloq. Math. 29, (1974), p.101-102.

[10] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1-95.

[11] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[12] G. T. Whyburn, *Open mappings on locally compact spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. 1, (1949), p. 1-25.

[13] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1970.