Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

OPERADORES NORMALES Y SUS GENERALIZACIONES

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
HÉCTOR MANUEL GARDUÑO CASTAÑEDA

DIRECTOR DE TESIS
DR. SLAVISA DJORDJEVIC

PUEBLA, PUE. SEPTIEMBRE, 2011

No te des por vencido, ni aún vencido,
no te sientas esclavo, ni aún esclavo;
trémulo de pavor, piénsate bravo,
y acomete feroz, ya mal herido.
Ten el tesón del clavo enmohecido
que ya viejo y ruin, vuelve a ser clavo;
no la cobarde estupidez del pavo
que amaina su plumaje al primer ruido.
Procede como Dios que nunca llora;
o como Lucifer, que nunca reza;
o como el robledal, cuya grandeza
necesita del agua, y no la implora...
Que muerda y vocifere vengadora,
ya rodando en el polvo, tu cabeza.

Agradecimientos

Agradezco ante todo al Antiguo Maestro y Amigo, a quien aún cuando aunque alguna vez dejé de seguir, me tendió la mano de nuevo.

Gracias también a Lucía. Tu ayuda ha sido, literalmente, como sonidos de cuerdas que avientas desde tus maderas. No dejes de cantar las canciones de una historia.

Por supuesto, agradezco a mis padres por el apoyo que me brindaron y la paciencia que tuvieron mientras se desvelaban alejados de una luz ténue que por debajo de las escaleras brillaba durante los momentos en que mi tiempo aplicaba para llevar a cabo mi reto: Alberto y Patricia.

A mi abuela: pocas veces he sentido tanta confianza en mí como tú lo has hecho: Celia.

Agradezco a los maestros que durante mi vida he conocido. Por quienes aprendí a escribir, y luego a contar. Los que me iniciaron en este camino de ciencias desde joven y los que en los últimos años me han guiado. Hoy puedo llamarlos también Amigos: Javier, Juan Alberto y Fernando. Nunca olvidaré sus enseñanzas.

A quienes me empujaron en las dudas y, sabiendo que para mí esto no fue un sacrificio, sacrificaron su tiempo matando la impaciencia con tal de nunca dejarme caer, y cuando lo hacía, me levantaron. Por quienes nada de esto sería posible: Xavier, Raúl, David, Ignacio, Fernando, Humberto y Ricardo.

Y particularmente a todos aquellos que nunca confiaron en nuestro proyecto, porque gracias a ustedes tuvimos la fuerza para concluirlo.

Al Dr. Slavisa Djordjevic: su guía fue un mapa dentro de una cueva que nunca había explorado, y su confianza y paciencia nos han permitido llegar a este fín. Gracias por la dirección de este proyecto así como por su cuidado y preocupación por quien ahora lo agradece, así como al Dr. John Conway: han sido un gran honor su colaboración y sus opiniones sobre este trabajo.

No se puede pasar por alto el agradeciemiento al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla por el apoyo recibido a través del Programa de Becas-Tesis CONCYTEP 2010, así como al Secretario General de nuestra Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, José Ramón Eguibar.

Finalmente, a Ella. A la que para agradecerle, bien habría que escribir otra tesis. Por las lágrimas que nos despedían en la noche. Por las palabras dichas y las guardadas. Por las canciones cantadas y compartidas, y las risas que siempre me regalaste. Por robarme el corazón y guardarlo en una caja. Por convertirte en un cometa mensajero de tardes doradas y otoños amarillos que tomó la noche y la resumió en sus ojos para que yo la entendiera. Dentro de tu viaje celestial, te detuviste un momento frente a mí, y ya no pude soltarte. Esto es para tí. Si la mente tras nuestro proyecto fue mía, el corazón de él eres tú: Gracias Fernanda.

Por los que están y por quienes ya se han ido, ya que después volveremos a vernos. Y como en palabras se nos va la vida, agradezco a la misma por dejarme jugar con las mías.

GRACIAS

Introducción

Hoy en dia, uno de los campos más importantes de la teoría de operadores es el análisis espectral, en el cual muchos matemáticos trabajan activamente.

Durante las últimas décadas, este campo de estudio, y en general la teoría de operadores, ha dirigido su interés al estudio de diversas clases de operadores especiales, y particularmente, generalizaciones de operadores normales; entre estas podemos mencionar la investigación sobre los operadores no normales, donde destacan las clases quasinormal, subnormal, hyponormal, quasihyponormal, p-hyponormal y normaloide.

Sin embargo, no existe una teoría completa que abarque estas generalizaciones en espacios de Hilbert, aún cuando los operadores normales llevan un papel fundamental en diversas áreas del conocimiento como lo son las ingenierías y la mecánica cuántica, lo cual muestra su importancia en la solución de problemas teóricos y prácticos.

Esta situación nos plantea la necesidad de realizar una investigación sistemática y concentrada de los problemas de las generalizaciones de los operadores normales, lo cual aportaría claridad y proveería al tema de una aproximación unificada para su estudio.

Uno de los objetivos de esta tesis es trabajar en dicha investigación mediante un estudio comparativo entre las diferentes generalizaciones de operadores normales, y la aplicación de estos conocimientos a la teoría espectral.

Para ello, usaremos los métodos contemporáneos del análisis funcional, análisis complejo, teoría de aproximaciones, teoría de la medida e integración y obviamente, de la teoría de operadores y sus espectros.

Otro de los objetivos es facilitar los estudios sobre generalizaciones de operadores normales. Esto debido a la poca y extremadamente complicada literatura existente. Es por ello que la gran mayoría de las demostraciones de los resultados del capítulo 2 se deben a nuestro equipo de trabajo.

Notación

Adoptaremos la siguiente notación:

- Usaremos $\mathbb{N}^*$ para denotar al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

- Si U, V son espacios vectoriales subyacentes en el mismo campo y $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal, denotaremos el núcleo y la imagen de T como $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$ respectivamente.

- Si X,Y son espacios normados, denotaremos como $\mathbb{B}(X, Y)$ al espacio de transformaciones lineales acotadas de X a Y y si $X = Y$ escribiremos $\mathbb{B}(X)$ para $\mathbb{B}(X, X)$. También, siempre que hablemos de transformaciones lineales acotadas, nos referiremos a ellas simplemente como operadores. Los operadores identidad y nulo se denotarán como I y Θ respectivamente.

- Siempre que hablemos de subespacio de un espacio normado X, estaremos refiriéndonos a un subespacio vectorial que es cerrado en la topología de la norma de X.

- Si X es un espacio con producto interno, a su producto se le denotará como $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ y si no hay peligro de confusión para el espacio con producto interno del cual se trate, simplemente se escribirá $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para tal producto. H,K representarán siempre espacios de Hilbert a menos que se indique lo contrario.

- Todas las proyecciones mencionadas serán proyecciones ortogonales, y las isometrías serán lineales.

- Si $A \subseteq \mathbb{C}$, denotaremos con $\mathcal{L}^p(A)$ al espacio de funciones módulo p-integrables según Lebesgue con dominio A y valores en $\mathbb{C}$. Es decir,

$$\mathcal{L}^p(A) = \left\{ \text{funciones } f : A \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_A |f(z)|^p dm(z) < \infty \right\}.$$

Más aún, $\mathcal{L}_a^p(A)$ significará el subespacio vectorial de $\mathcal{L}^p(A)$ que consiste en las funciones analíticas. Esto es:

$$\mathcal{L}_a^p(A) = \{\ f \in \mathcal{L}^p(A) \mid f \text{ es analítica en } A\ \} \,.$$

- Si (X, τ) es un espacio topológico, denotaremos con Σ_X a la σ-álgebra de Borel asociada a (X, τ). En particular, cuando $X \subset \mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tomará τ como la topología relativa a la topología usual de $\mathbb{K}$ a menos que se indique otra topología.

- Si (X, d) es un espacio métrico, para $x \in X$ y $r > 0$ denotaremos con $B(x, r)$ y $B[x, r]$ a la bola abierta con centro en x y radio r y a la cerradura de dicha bola respectivamente. En particular, en $\mathbb{C}$ con la métrica usual, escribiremos simplemente con $\mathbb{D}$ para $B(0, 1)$. Si $A \subseteq X$, denotaremos la frontera de A con ∂A y con $d(x, A)$ a la distancia de x a A.

- Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la τ-cerradura de A será denotada por $\mathrm{clo}_\tau[A]$, y si no hay peligro de confusión sobre la topología de la que se trate, simplemente escribiremos $\mathrm{clo}[A]$.

Índice general

OPERADORES NORMALES Y SUS GENERALIZACIONES

Héctor Manuel Garduño Castañeda

Septiembre 2011

Capítulo 1

Operadores normales

Los operadores normales constituyen una de las clases más importantes de operadores dentro de los espacios de Hilbert. En este capítulo describiremos algunas de sus propiedades.

En la sección 1.1 haremos una breve introducción a la Teoría de álgebras normadas, específicamente las C^*-álgebras. Éstas nos serán de gran ayuda para estudiar los espacios de operadores y algunos teoremas espectrales de representación.

En la sección 1.2 estudiaremos algunas propiedades del espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert y pondremos particular interés en los operadores normales para finalmente presentar un par de ejemplos en los que usaremos conceptos de la sección 1.2 y de la Teoría de la Integración.

En la sección 1.3 analizaremos algunos tipos de operadores normales: autoadjuntos y unitarios. Además, entre los autoadjuntos tendremos un particular interés en las proyecciones y los operadores positivos.

Finalmente en la sección 1.4 examinaremos uno de los teoremas de representación espectral para operadores normales.

La mayoría de los resultados presentados en toda la sección no serán demostrados en la misma, debido a que pueden encontrarse en cualquier libro de nivel medio de análisis funcional, tal como [Kub], exceptuando de esta ausencia de argumentación al teorema de descomposición polar y a los teoremas de representación espectral dada la importancia de éstos últimos dentro de la teoría de operadores. Además haremos uso de muchos de estos resultados sin hacer cita explícita.

1.1. Álgebras y C^*-álgebras

Definición 1.1. Un *álgebra* es un espacio vectorial A junto con un mapeo bilineal, llamado producto o multiplicación en A,

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

tal que $a(bc) = (ab)c$ para cualesquiera $a, b, c \in A$. Un álgebra abeliana es un álgebra tal que $ab = ba$ para cualesquiera $a, b \in A$.

Una *subálgebra de* A es un subespacio vectorial B de A tal que si $b_1, b_2 \in B$ entonces $b_1 b_2 \in B$.

Definición 1.2. Una norma $\|\cdot\|$ en un álgebra A se dice *submultiplicativa* si $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todos $a, b \in A$. Un álgebra A con una norma submultiplicativa es llamada *álgebra normada*. Si A tiene una *unidad* e, es decir, $ea = ae = a$ siendo $a \in A$ cualquiera, y $\|e\| = 1$, se dice que A es una *álgebra normada con unidad*.

Notemos que en la definición de unidad no únicamente hemos pedido que e cumpla un papel de neutro multiplicativo, sino también que sea de norma 1. Esto es debido a que si solamente pedimos la propiedad de neutralidad, tenemos $\|a\| = \|ae\| =\leq \|a\|\|e\|$ para cualquier $a \in A$. Si $a \neq \theta$, entonces $\|a\| \neq 0$, y por lo tanto $1 \leq \|e\|$. Luego, no podemos asegurar que $\|e\| = 1$.

Si A es un álgebra normada, entonces de la desigualdad

$$\|aa_1 - bb_1\| \leq \|a\|\|b - b_1\| + \|a - a_1\|\|b_1\|$$

se desprende que la operación multiplicación es continua.

Un álgebra normada cuya métrica, inducida por la norma, es completa se llama *álgebra de Banach*. Si A es un álgebra de Banach y tiene unidad, entonces se conoce como *álgebra de Banach con unidad*.

Definición 1.3. Un *homomorfismo* de un álgebra A a un álgebra B es un mapeo lineal $\phi : A \longrightarrow B$ tal que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ para cualesquiera $a, b \in A$. Un homomorfmismo $\phi : A \longrightarrow B$ es *unitario* si A y B tienen unidad, e y e' respectivamente, tal que $\phi(e) = e'$.

Definición 1.4. Sea A un álgebra con unidad e. Diremos que $a \in A$ es *invertible* si existe un elemento $b \in A$ tal que $ab = ba = e$.

En este caso, b es único y se denota por a^{-1}. El conjunto

$$\text{Inv}(A) = \{a \in A \mid a \text{ es invertible}\}$$

es entonces un grupo.

Definición 1.5. Sea A un álgebra con unidad e. Se define el *espectro de* $a \in A$ como el conjunto

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda e \notin \text{Inv}(A)\}.$$

Al conjunto $\rho(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda e \in \text{Inv}(A)\}$ se le conoce como *resolvente de* a.

Teorema 1.6 (de Gelfand)**.** *Si a es un elemento de un álgebra de Banach con unidad, entonces $\sigma(a)$ es no vacío y compacto.*

Más aún, bajo las condiciones anteriores, al ser $\sigma(a)$ compacto, es acotado, y por tanto tiene sentido el número $\sup\limits_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$, el cual es llamado *radio espectral de* a, y se denota como $r(a)$. Es posible demostrar que $r(a) \leq \|a\|$.

Definición 1.7. Una *involución* en un álgebra A es un mapeo conjugado-lineal $a \mapsto a^*$ en A tal que $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^* a^*$ para todos $a, b \in A$. El binomio $(A, *)$ es llamado *álgebra involutiva*, o $*$*-álgebra ("álgebra estrella")*.

Si A es un álgebra involutiva con unidad e, entonces claramente $e^* = e$.

Usando el concepto de álgebra involutiva, podemos definir a un elemento a de tal álgebra como *normal* si conmuta con su imagen bajo la involución. Es decir, si $a^* a = a a^*$.

Definición 1.8. Una C^*-álgebra es un $*$-álgebra de Banach A tal que $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para cualquier $a \in A$

Un ejemplo de C^*-álgebra con unidad es $C(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y definiendo $f^* = \overline{f}$ para cada $f \in C(\Omega)$. Nótese que toda $f \in C(\Omega)$ es normal, ya que $f \cdot f^* = |f|^2 = f^* \cdot f$. Aquí, la unidad es la función constante 1. Luego, $\mathrm{Inv}(C(\Omega)) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0 \text{ para toda } z \in \Omega\}$.

De esta manera, si $f \in C(\Omega)$, entonces es sencillo probar que $\sigma(f) = f(\Omega)$.

Ya hemos visto que el concepto de homomorfismo entre álgebras sirve para identificar álgebras con subálgebras de álgebras más grandes. Ello motiva a hacer lo mismo para C^*-álgebras:

Definición 1.9. Si A_1 y A_2 son dos C^*-álgebras, un mapeo $\varrho : A_1 \longrightarrow A_2$ es un $*$-*homomorfismo* (homomorfismo estrella) si ϱ es un homomorfismo de álgebras y preserva involuciones. Es decir, si $\varrho(a^*) = \varrho(a)^*$ para toda $a \in A_1$. ϱ se dice $*$-*isomorfismo* (isomorfismo estrella) si es un $*$-homomorfismo biyectivo. En este caso, decimos que A_1 y A_2 son $*$-isomorfos.

Notemos que si A_1 de la definición anterior tiene unidad e, y A_2 es $*$-isomorfo a A_1, entonces A_2 tiene unidad. En efecto, sea $\varrho : A_1 \longrightarrow A_2$ un $*$-isomorfismo. Entonces $\varrho(e)$ es la unidad de A_2.

También, si A_1 y A_2 son C^*-álgebras con unidad isomorfas, bajo el $*$-isomorfismo $\varrho : A_1 \longrightarrow A_2$, y $a \in \mathrm{Inv}(A_1)$, entonces $\varrho(a) \in \mathrm{Inv}(A_2)$ y $[\varrho(a)]^{-1} = \varrho(a^{-1})$. Luego, $\mathrm{Inv}(A_2) = \varrho(\mathrm{Inv}(A_1))$.

Con estas condiciones de isomorfía entre A_1 y A_2 bajo ϱ, siendo las dos C^*-álgebras con unidad, tenemos que si $a \in A_1$, entonces $\sigma_{A_2}(\varrho(a)) = \sigma_{A_1}(a)$.

Por tanto, podemos decir que si A_1 y A_2 son C^*-álgebras con unidad $*$-isomorfas, entonces el $*$-isomorfimo conserva espectros.

Otro concepto importante relacionado con las C^*-álgebras es el de C^*-álgebra generada. Dados una C^*-álgebra A con unidad y $S \subseteq A$, el conjunto

$$C_0^*(S) = \bigcap\{B \subseteq A \mid B \text{ es una } C^*\text{-subálgebra de } A \text{ y } S \subseteq B\}$$

es una C^*-subálgebra de A, llamada *C^*-álgebra generada por S*, la cual es la menor C^*-subálgebra de A que contiene a S. Si $S = \{a\}$, entonces escribimos $C_0^*(a)$ en lugar de $C_0^*(S)$.

Aunque es posible que $C_0^*(S)$ no tenga a la unidad e, llamemos *C^*-álgebra generada por S y la unidad* al conjunto $C^*(S) = C_0^*(S \cup \{e\})$. Si $S = \{a\}$, escribimos $C^*(a)$ en lugar de $C^*(S)$. En éste caso, $C^*(a)$ es la cerradura de todos los polinomios con indeterminadas en a, a^* y e. Es decir,

$$C^*(a) = clo_{\|\cdot\|_A}\{p(a, a^*) \mid p \text{ es un polinomio en } a \text{ y } a^*\}.$$

Sabemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, entonces $C(\Omega)$ es una C^*-álgebra. En particular, si A es una C^*-álgebra y $a \in A$, entonces por el teorema de Gelfand sabemos que $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, de modo que $C(\sigma(a))$ es una C^*-álgebra. Tenemos:

Teorema 1.10. *Si A es una C^*-álgebra con unidad tal que $A = C^*(a)$ para alguna $a \in A$, entonces existe un único $*$-isomorfismo $\varrho : A \longrightarrow C(\sigma(a))$ tal que $\varrho(a) = Id$.*

El siguiente resultado, aunque corolario, es el más importante de toda esta sección:

Corolario 1.11. *Si A es una C^*-álgebra y $a \in A$ es normal, entonces existe un $*$-homomorfismo inyectivo $\Phi_a : C(\sigma(a)) \longrightarrow A$, con $\Phi_a(f) = f(a)$, tal que:*

(a) $\|\Phi_a(f)\|_A = \|f\|_\infty$ *para toda $f \in \sigma(a)$.*

(b) *El rango de Φ_a es $C^*(a)$.*

Por lo tanto, Φ_a de este corolario es un $*$-isomorfismo de $C(\sigma(a))$ sobre $C^*(a)$. A este $*$-homomorfismo se le conoce como *cálculo funcional para el elemento normal a*. Este $*$-homomorfismo es único en el sentido de que si ϱ es otro $*$-isomorfismo de $C(\sigma(a))$ sobre $C^*(a)$ tal que ϱ(la función constante 1) $= e$ y $\varrho(Id) = a$, entonces $\varrho = \Phi_a$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $g \in C(\Omega)$. Recordemos que g es normal. Más aún, tenemos que $\sigma_{C(\Omega)}(g) = g(\Omega)$. Notemos que en este caso, Φ_g viene dada como $\Phi_g(f) = f(g) = f \circ g$ para cada $f \in C(\sigma(g)) = g(\Omega)$. Denotemos por $C_g(\Omega)$ al conjunto $\{f \circ g \mid f \text{ es continua en } g(\Omega)\}$. Hemos mostrado que el rango de Φ_g es $C_g(\Omega)$, y como este rango es $C^*(g)$, entonces $C^*(g) = C_g(\Omega)$.

Ahora bien, si A es una C^*-álgebra con unidad, $a \in A$ normal, y $f \in C(\sigma(a))$, entonces $\sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a))$ por lo dicho en los párrafos anteriores. Pero también, como Φ_a es un $*$-isomorfismo de $C(\sigma(a))$ sobre $C^*(a)$, conserva espectros. Es decir,

$$f(\sigma(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = \sigma_A(\phi_a(f)) = \sigma_A(f(a)).$$

Hemos mostrado el fundamental:

Teorema 1.12 (Teorema del Mapeo Espectral (TME))**.** *Sea A una C^*-álgebra con unidad y $a \in A$ normal. Si $f \in C(\sigma(a))$, entonces*

$$\sigma_A(f(a)) = f\left(\sigma(a)\right).$$

1.2. Introducción a los Operadores Normales

Recordemos que dados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ lineal, se dice que T es *acotado* si la imagen de cualquier conjunto acotado en la topología de la norma de X bajo T es acotada en la topología de la norma de Y. Equivalentemente, se dice que T es acotado si existe un $c > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ para cualquier $x \in X$.

Para cada $T : X \longrightarrow Y$ acotada, se define la *norma de T* como el número $\sup\limits_{x \in X \setminus \{\theta\}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$, que también puede ser calculado como $\sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$.

Por tanto, si T es acotado, tenemos que $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ para toda $x \in X$. El conjunto de transformaciones lineales acotadas de X a Y se denota por $\mathbb{B}(X, Y)$. Fácilmente se demuestra que éste es un espacio vectorial, y el binomio $(\mathbb{B}(X, Y), \|\cdot\|)$ es un espacio normado, donde $\|\cdot\|$ es la norma definida arriba. Más aún, es sencillo observar que $\mathbb{B}(X)$ es un álgebra de Banach con unidad cuando tomamos como producto al producto usual de transformaciones lineales, y a X como espacio de Banach.

Teorema 1.13 (Fórmula de Gelfand-Beurling)**.** *Si $T \in \mathbb{B}(H)$, entonces $r(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Dado $T \in \mathbb{B}(H, K)$, una de las principales consecuencias de que H y K sean de Hilbert es la existencia de un único operador, denotado por T^*, tal que $T^* \in \mathbb{B}(K, H)$ y el cual cumple con la relación $\langle Tx, y\rangle_K = \langle x, T^*y\rangle_H$ para todos los $x \in H$ e $y \in K$.El operador T^* es llamado operador *adjunto* de T.

Entre las propiedades básicas del adjunto de un operador, tenemos, para cualesquiera $S, T \in \mathbb{B}(H, K)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, el campo subyacente:

- $(S + T)^* = S^* + T^*$.
- $(\alpha S)^* = \overline{\alpha} S^*$.
- $(T^*)^* = T$.
- $\|T^*\| = \|T\|$.
- $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Además, si $H = K$:

- $(T^n)^* = T^{n*} = T^{*n} = (T^*)^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Y si T es invertible,

- $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Obsérvese que entonces si H es de Hilbert, tendremos que $\mathbb{B}(H)$ es una C^*-álgebra donde la involución de un operador es su adjunto.

También es importante el siguiente resultado, que relaciona los núcleos y las imágenes de un operador con su adjunto.

Proposición 1.14. *Si $T \in \mathbb{B}(H, K)$, entonces:*

(a) $\mathcal{N}(T) = [\mathcal{R}(T^*)]^\perp = \mathcal{N}(T^* T)$.

(b) $\mathrm{clo}[\mathcal{R}(T)] = [\mathcal{N}(T^*)]^\perp = \mathrm{clo}[\mathcal{R}(T T^*)]$.

(a*) $\mathcal{N}(T^*) = [\mathcal{R}(T)]^\perp = \mathcal{N}(T T^*)$.

(b*) $\mathrm{clo}[\mathcal{R}(T^*)] = [\mathcal{N}(T)]^\perp = \mathrm{clo}[\mathcal{R}(T^* T)]$.

Un concepto que nos va a ser fundamental es el de reductibilidad.

Definición 1.15. Sea X un espacio vectorial, y $T : X \longrightarrow X$ una transformación lineal. Si M es un subespacio vectorial de X, se dice que M es *invariante para* T, o T*-invariante*, o *invariante bajo* T, si $T(M) \subseteq M$.

Definición 1.16. Sea X un espacio con producto interno, y $T \in \mathbb{B}(X)$. Si M es un subespacio de X tal que M y $M^{\perp}$ son T-invariantes, entonces se dice que M *reduce a* T, o M *es un subespacio reductor de* T.

Es claro que si X y T son como la definición anterior, entonces $\{\theta\}$ y X reducen a T. Por tanto, siempre que digamos que M es un subespacio reductor de T, entenderemos que $\{\theta\} \neq M \neq X$.

Si $X = H$ es de Hilbert, podemos decir más:

Teorema 1.17. *Sean H de Hilbert, M un subespacio de H y $T \in \mathbb{B}(H)$. Entonces son equivalentes:*

(a) *M reduce a T.*

(b) *$T = T|_M \bigoplus T|_{M^{\perp}}$, lo cual significa que T tiene una representación matricial de la forma*

$$T = \begin{bmatrix} T|_M & \Theta \\ \Theta & T|_{M^{\perp}} \end{bmatrix} : H = M \bigoplus M^{\perp} \longrightarrow H = M \bigoplus M^{\perp}.$$

(c) *$PT = TP$, donde P es la proyección de H sobre M.*

(d) *M es invariante para T y para T^*, en cuyo caso $(T|_M)^* = T^*|_M$.*

Observemos que si M reduce a $T \in \mathbb{B}(X)$, donde X no es necesariamente de Hilbert, entonces $M^{\perp}$ también lo hace.

Por otra parte, si M reduce a T, la investigación de T se *reduce* a la investigación de operadores más pequeños, $T|_M$ y $T|_{M^{\perp}}$, lo cual justifica la terminología ”subespacio reductor”.

Definición 1.18. Si H y K son espacios de Hilbert, un *isomorfismo* de H sobre L es una isometría suprayectiva $U : H \longrightarrow K$. Si $A \in \mathbb{H}$ y $B \in \mathbb{B}(K)$, entonces A y B son *unitariamente equivalentes* si existe un isomorfismo $U : H \longrightarrow K$ tal que $UAU^{-1} = B$.

Definición 1.19. Dado $N \in \mathbb{B}(H)$, se dice *normal* si

$$N^*N = NN^*.$$

Es claro que esta definición coincide con la dada para elementos normales de una C^*-álgebra. De la definición de operador normal obtenemos inmediatamente estas consecuencias:

Teorema 1.20. *Sea $N \in \mathbb{B}(H)$. Son equivalentes:*

(a) *N es normal.*

(b) *$\|N^*x\| = \|Nx\|$ para toda $x \in H$.*

Teorema 1.21. *Si $N \in \mathbb{B}(H)$ es normal, entonces $\|N^*Nx\| = \|N^2x\|$ para cualquier $x \in H$.*

Veamos algunos ejemplos clásicos de operadores normales. Para ello, una definición y un lema previo.

Definición 1.22. Sea $A \in \mathbb{B}(H)$. El *espectro puntual aproximativo* de A se define como el conjunto $\sigma_{ap}(A)$ formado por los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\inf\{\|(A - \lambda\mathrm{I})x\| \ : \ \|x\| = 1\} = 0$

Lema 1.23. *Si $N \in \mathbb{B}(H)$ es normal, entonces $\sigma(N) = \sigma_{ap}(N)$.*

Ejemplo 1.24. Si μ es una medida regular de Borel con soporte compacto en $\mathbb{C}$, y $N_\mu : \mathcal{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mu)$ se define como $N_\mu f = Id \cdot f$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, entonces N_μ es un operador normal tal que $N_\mu^* f = \overline{Id} \cdot f$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, y $\sigma(N_\mu) = K$, donde $K = supp(\mu)$.[1]

Notemos que bajo estas condiciones, $Id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en K, en el sentido usual del cálculo infinitesimal por alguna $M > 0$. Además $\mu(K) < \infty$ por ser K compacto.

[1] $supp(\mu)$ es el soporte de la medida μ. Recordemos que éste se define como el complemento del conjunto $\bigcup\{U \ : \ U$ es abierto y $\mu(U) = 0\}$.

El hecho de que N_μ sea lineal es sencillo de demostrar. Además,

$$\begin{aligned}
\|N_\mu f\|^2 &= \|Id \cdot f\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{C}} |zf(z)|^2 d\mu \\
&= \int_K |zf(z)|^2 d\mu \\
&= \int_K |z|^2 |f(z)|^2 d\mu \\
&\leq \int_K M^2 |f(z)|^2 d\mu \\
&= M^2 \int_K |f(z)|^2 d\mu \\
&= M^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

de donde $\|N_\mu f\| \leq M\|f\|$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Esto es, N_μ es acotada.

También,

$$\begin{aligned}
\langle N_\mu f, g \rangle &= \langle Id \cdot f, g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}} z f(z) \overline{g(z)} d\mu(z) \\
&= \int_K f(z) \overline{\overline{z}}\ \overline{g(z)} d\mu(z) \\
&= \int_K f(z) \overline{\overline{z} g(z)} d\mu(z) \\
&= \langle f, \overline{Id} \cdot g \rangle.
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $N_\mu^*(g) = \overline{Id} \cdot g$ para toda $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. De esta manera, si $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, entonces $N_\mu^* N_\mu f = N_\mu^*(Id \cdot f) = \overline{Id} \cdot Id \cdot f = |Id|^2 \cdot f$, y de la misma forma, $N_\mu N_\mu^* f = |Id|^2 \cdot f$, de modo que N_μ es normal.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin K$.

Entonces $\mathcal{N}(\lambda \mathrm{I} - N_\mu) = \{\theta\}$ (Aquí, $\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función idénticamente nula). En efecto. Si $f \in \mathcal{N}(\lambda \mathrm{I} - N_\mu)$, tenemos $\theta = (\lambda \mathrm{I} - N_\mu)(f) = \lambda f - Id \cdot f$. Esto es, $0 = \lambda f(z) - z f(z)$ μ-c.s., o equivalentemente, $(\lambda - z) f(z) = 0$ para μ-casi toda $z \in \mathbb{C}$. Queremos probar que $f(z) = 0$ para μ-casi toda $z \in \mathbb{C}$.

Tomemos $\mathfrak{F} = \{z \mid f(z) \neq 0\}$ y $\mathfrak{E} = \{z \mid (\lambda - z) f(z) \neq 0\}$. Entonces $\mu(\mathfrak{E}) = 0$. Como toda la medida está concentrada en $supp(\mu) = K$, se sigue que $\mu(\mathfrak{F}) = \mu(\mathfrak{F} \cap K)$. Sea $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \cap K$. Si $\mathfrak{F}_0 = \emptyset$ tendremos que su medida es nula y de esta manera $f(z) = 0$ para μ-casi toda $z \in \mathbb{C}$. En caso contrario, si $z \in \mathfrak{F}_0$, significa que $z \neq \lambda$ y $f(z) \neq 0$. Luego, $(\lambda - z)f(z) \neq 0$, y por lo tanto $z \in \mathfrak{E}$. Esto es, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{E}$. De ahí determinamos $0 = \mu(\mathfrak{F}_0) = \mu(\mathfrak{F})$.

Con eso, tenemos $f(z) = 0$ μ-c.s. Hemos demostrado que si $\lambda \notin K$, entonces $\lambda\mathrm{I} - N_\mu : \mathcal{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{R}(\lambda\mathrm{I} - N_\mu)$ es inyectiva.

Veamos que es sobreyectiva. Sea $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Esto es, $\int_{\mathbb{C}} |g|^2 d\mu = \int_K |g|^2 d\mu < \infty$. Como $\lambda \notin K$, se sigue que la función $(\lambda - Id)^{-1}$ es continua en K, y al ser éste conjunto compacto, dicha función es esencialmente acotada, digamos por A, lo cual significa que $\|(\lambda - Id)^{-1}|_K\|_\infty \leq A$. Luego, es claro que $g \cdot (\lambda - Id)^{-1} \in \mathcal{L}^2(\mu)$, ya que nuevamente, la integral estará concentrada en K.

Llamemos $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función dada por

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \notin K \\ g(z)(\lambda - z)^{-1} & \text{si} \quad z \in K \end{cases}$$

Por el análisis precedente, $G \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Pero además $(\lambda\mathrm{I} - N_\mu)(G) = \lambda G - Id \cdot G$ es la función dada por $\lambda G(z) - zG(z) = (\lambda - z)G(z)$, que se reescribe como:

$$(\lambda - z)G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \notin K \\ g(z) & \text{si} \quad z \in K \end{cases}$$

Como $\mu(\mathbb{C} \backslash K) = 0$, entonces $g = (\lambda\mathrm{I} - N_\mu)(G)$ μ-c.s., y al ser $G \in \mathcal{L}^2(\mu)$, se sigue que $\lambda\mathrm{I} - N_\mu$ es sobreyectiva siempre que $\lambda \notin K$

Luego, $\lambda\mathrm{I} - N_\mu$ es biyectiva para cada $\lambda \in \mathbb{C} \backslash supp(\mu)$, y por el Teorema del Mapeo Inverso, $(\lambda\mathrm{I} - N_\mu)^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$. Esto es, $\mathbb{C} \backslash supp(\mu) \subseteq \rho(N_\mu)$, de donde $\sigma(N_\mu) \subseteq supp(\mu)$.

Supongamos ahora que $\lambda \in K$. Sea $B_n = B(\lambda, \frac{1}{n})$. Como B_n es abierto y μ es una medida de Borel, entonces B_n es μ-medible, por lo que si $\mu(B_n) = 0$, entonces λ está en un abierto con medida 0, así que, por definición, $\lambda \notin K$. Luego, $\mu(B_n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la regularidad de μ, también se cumple que $\mu(B_n) < \infty$.

Sea $f_n = [\mu(B_n)]^{-1/2}\chi_{B_n}$. Es claro que $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$, y

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |f_n|^2 d\mu \\
&= \int_{\mathbb{C}} [\mu(B_n)]^{-1}\chi_{B_n} d\mu \\
&= \int_{B_n} [\mu(B_n)]^{-1} d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \cdot \mu(B_n) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

de modo que $\{f_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^2(\mu)$ de vectores unitarios. Además:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda \mathrm{I} - N_\mu)(f_n)\|^2 &= \frac{1}{\mu(B_n)} \|(\lambda - Id)\chi_{B_n}\|^2 \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{\mathbb{C}} |\lambda - z|^2 \chi_{B_n}(z) d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} |\lambda - z|^2 d\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{B_n} \frac{1}{n^2} d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(B_n)} \cdot \frac{\mu(B_n)}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

de modo que $\|(\lambda \mathrm{I} - N_\mu)(f_n)\| \leq \frac{1}{n}$.

Luego, $\text{ínf}\{\|(\lambda \mathrm{I} - N_\mu)(f)\| \mid \|f\| = 1\} = 0$, por lo que, por definición, $\lambda \in \sigma_{ap}(N_\mu)$. Como N_μ es normal, del lema anterior concluimos $\sigma_{ap}(N_\mu) = \sigma(N_\mu)$, de modo que $\lambda \in \sigma(N_\mu)$.
En suma, $K \subseteq \sigma(N_\mu)$, y concluimos que $\sigma(N_\mu) = supp(\mu)$.

Nuestro segundo ejemplo aplica la teoría ya revisada de álgebras:

Ejemplo 1.25. Si (X, Ω, μ) es un espacio de medida σ-finita, para cada $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, se define M_ϕ en $\mathcal{L}^2(\mu)$ como la transformación multiplicación por ϕ. Esto es, $M_\phi f = \phi \cdot f$. Es decir, $M_\phi f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$[M_\phi f](z) = \phi(z) f(z).$$

M_ϕ es un operador, o en símbolos, $M_\phi \in \mathbb{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$, ya que M_ϕ es claramente lineal y

$$\begin{aligned}
\|M_\phi f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mu)} &= \|\phi \cdot f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mu)} \\
&= \int_X |\phi(z) f(z)|^2 d\mu(z) \\
&\leq \int_X \|\phi\|^2_\infty |f(z)|^2 d\mu(z) \\
&= \|\phi\|^2_\infty \int_X |f(z)|^2 d\mu(z) \\
&= \|\phi\|^2_\infty \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mu)}.
\end{aligned}$$

Observar que no únicamente hemos probado la continuidad de M_ϕ, sino también hemos demostrado que $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. De hecho, es posible mostrar que $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

También, si $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$:

$$\begin{aligned}
\langle M_\phi f, g \rangle &= \langle \phi \cdot f, g \rangle \\
&= \int_X \phi(z) f(z) \overline{g(z)} d\mu(z) \\
&= \int_X f(z) \overline{\overline{\phi(z)}}\ \overline{g(z)} d\mu(z) \\
&= \int_X f(z) \overline{\overline{\phi(z)} g(z)} d\mu(z) \\
&= \langle f, \overline{\phi} \cdot g \rangle \\
&= \langle f, M_{\overline{\phi}} g \rangle.
\end{aligned}$$

Lo anterior, junto con el hecho de que $\overline{\phi}$ también sea un elemento de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, nos muestra que $M^*_\phi = M_{\overline{\phi}}$.

Por otra parte, si $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, entonces

$$\|M_\phi f\|^2 = \|\phi \cdot f\|^2 = \int_X |\phi|^2 |f|^2 d\mu = \int_X |\overline{\phi}|^2 |f|^2 d\mu = \|\overline{\phi} \cdot f\|^2 = \|M^*_\phi f\|^2.$$

Por (b) del Teorema 1.20, tenemos que M_ϕ es normal para cada $\phi \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

La función $\tau : \mathcal{L}^\infty(\mu) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$ dada por $\tau(\phi) = M_\phi$ es un $*$-homomorfismo de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ a $\mathbb{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$.

Para ver la conservación de productos, sean $\phi, \psi \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Como $\tau(\phi), \tau(\psi)$ y $\tau(\phi \cdot \psi)$ son elementos de $\mathbb{B}(\mathcal{L}^2(\mu))$, debemos probar que $\tau(\phi \cdot \psi)(f) = \tau(\phi)\tau(\psi)(f)$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (Recordemos que la multiplicación en $\mathbb{B}(H)$ es la composición de operadores). Pero

$$\begin{aligned}
\tau(\phi \cdot \psi)(f) &= M_{\phi \cdot \psi} f \\
&= \phi \cdot \psi \cdot f \\
&= \phi \cdot (\psi \cdot f) \\
&= \phi \cdot (M_\psi f) \\
&= M_\phi M_\psi f \\
&= \tau(\phi)\tau(\psi)(f).
\end{aligned}$$

Hemos probado que τ es un homomorfismo. Veamos que es un $*$-homomorfismo.

Debemos mostrar que $\tau(\phi^*) = \tau(\phi)^*$ para cada $\phi \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, y esto se obtiene observando

$$\tau(\phi^*) = \tau(\overline{\phi}) = M_{\overline{\phi}} = M_\phi^* = \tau(\phi)^*.$$

Hemos probado nuestra afirmación. Análogamente a como se hizo el análisis sobre el espectro del operador normal del ejemplo anterior, se demuestra que $\sigma(M_\phi) = ess - ran(\phi)$.

1.3. Clases especiales de operadores normales

1.3.1. Operadores autoadjuntos y unitarios

Definición 1.26. Un operador $T \in \mathbb{B}(H)$, siendo H espacio de Hilbert, es *autoadjunto* si $T^* = T$, lo cual significa, por definición de adjunto de un operador, que para todos $x, y \in H$:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Una buena caracterización de los operadores autoadjuntos se sigue del hecho de que en un espacio X con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se cumple $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para $x, y \in X$ arbitrarios:

Teorema 1.27. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert. Si T es autoadjunto, entonces $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cualquier $x \in X$. Si además H es complejo y $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cualquier $x \in X$, se tiene que T es autoadjunto.*

Es importante notar que el hecho de que H sea complejo es fundamental para que se verifique el teorema anterior. Es por ello que conviene tomar a lo largo de todo este documento, tal como se hace en la gran mayoría de los textos, espacios vectoriales sobre el campo de los complejos, a menos que se indique lo contrario[2].

El Teorema 1.27 nos permite definir un orden parcial en el conjunto de operadores autoadjuntos de un espacio H. Diremos que el operador autoadjunto $Q \in \mathbb{B}(H)$ es *positivo*[3] si $0 \leq \langle Qx, x\rangle$ para cualquier $x \in H$. Esta relación se denota como $\Theta \leq Q$ ó $Q \geq \Theta$. El conjunto de operadores positivos en un espacio de Hilbert H será denotado por $\mathbb{B}^+(H)$. En símbolos:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^+(H) &= \{T \in \mathbb{B}(H) \ : \ \langle Tx, x\rangle \geq 0 \text{ para cualquier } x \in H\} \\ &\subseteq \text{ Operadores autoadjuntos.} \end{aligned}$$

Obsérvese que si $T \in \mathbb{B}(H, K)$, entonces $(TT^*)^* = (T^*)^*(T)^* = T^{**}T^* = TT^*$ y de la misma forma $(T^*T)^* = T^*T$. Esto es, TT^* y T^*T son autoadjuntos y elementos de $\mathbb{B}(H)$. De hecho, $0 \leq \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$ para $x \in H$ arbitrario, por lo que T^*T es positivo. Análogamente, $TT^* \in \mathbb{B}^+(H)$.

Presentamos a continuación una importante proposición que, aunque de naturaleza simple, resulta ser de gran utilidad para demostrar densidad de imágenes de operadores en términos de su núcleo.

Proposición 1.28. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$ autoadjunto. Si $\mathcal{N}(T) = \{\theta\}$, entonces la imagen de T es densa en H.*

Corolario 1.29. *Sea $N \in \mathbb{B}(H)$ normal. Si $\mathcal{N}(N) = \{\theta\}$, entonces la imagen de N es densa en K.*

---

[2]La razón anterior, junto con el hecho de que la teoría espectral encuentra mayor riqueza en el caso complejo nos lleva a tomar ese convencionalismo.

[3]Algunos textos utilizan la expresión *no negativo* para referirse a lo que hemos llamado *positividad*, dejando esta última para operadores $T \in \mathbb{B}(H)$ tales que $\langle Tx, x\rangle > 0$ siempre que $x \neq \theta$.

Demostración.

Como $\mathcal{N}(N) = \{\theta\}$, por (a) de la Proposición 1.14, $\mathcal{N}(N^*N) = \{\theta\}$. Por la proposición anterior, $\mathcal{R}(N^*N)$ es denso en H. Es decir, $\text{clo}[\mathcal{R}(N^*N)] = H$. Al ser N normal, tenemos $\text{clo}[\mathcal{R}(N^*N)] = \text{clo}[\mathcal{R}(NN^*)]$, pero ahora por (b) de la misma Proposición 1.14, $\text{clo}[\mathcal{R}(NN^*)] = \text{clo}[\mathcal{R}(N)]$.

$\square$

Por otra parte, tomemos $S, T \in \mathbb{B}(H)$. Notemos que si T y S son autoadjuntos, entonces $(T-S)^* = T^* - S^* = T - S$, por lo que $T - S$ es autoadjunto. Si $T - S$ es autoadjunto (en particular, si T y S lo son) y $\Theta \leq T - S$, entonces escribimos $S \leq T$ ó $T \geq S$. Se muestra fácilmente que ésta relación es reflexiva, transitiva y antisimétrica en el conjunto de operadores con diferencia autoadjunta en H, y por lo tanto obtenemos un orden parcial ahí. De este modo, siempre que hablemos de operadores $S, T \in \mathbb{B}(H)$ que cumplan la relación anterior, entenderemos a $S - T$ como autoadjunto. En particular, si S es autoadjunto, $S \leq \Theta$ si y sólo si $\Theta \leq -S$.

Existen muchas propiedades sobre la relación anterior. Algunas de las más importantes son:

Lema 1.30. *Sean* $T_1, T_2, T \in \mathbb{B}(H)$ *y* $\alpha \geq 0$.

(a) *Si* $T_1 \geq T_2$ *y* $T_2 \geq T_1$, *entonces* $T_1 = T_2$.

(b) *Si* $T_1 \geq T_2$, *entonces* $T_1 + T \geq T_2 + T$.

(c) *Si* $T_1 \geq T_2$, *entonces* $\alpha T_1 \geq \alpha T_2$.

Más aún, con invertibilidad podemos agregar que:

Teorema 1.31. *Sea* $Q \in \mathbb{B}(H)$ *invertible..*

(a) *Si* Q *es positivo, entonces* $Q^{-1} \in \mathbb{B}^+(H)$.

(b) *Si* $Q \in \mathbb{B}(H)$ *es tal que* $Q \geq \mathrm{I}$, *entonces* $\Theta \leq U^{-1} \leq \mathrm{I}$.

Podemos ahora definir los operadores proyección:

Definición 1.32. Sea $P \in \mathbb{B}(H)$. P se dice *proyección ortogonal* si es autoadjunto y $P^2 = P$. Como hemos dicho en la sección de notaciones, nosotros simplemente llamaremos proyecciones a las proyecciones ortogonales. [4]

Luego, si P es una proyección, es fácil demostrar que es un operador positivo. La interpretación geométrica de las proyecciones permite demostrar que si $M = \mathcal{R}(P)$ y $N = \mathcal{N}(P)$, entonces $M^{\perp} = N$ y $H = M \bigoplus N$; este hecho las hace tan importantes, y además las caracteriza: Si $M \subset H$ es un subespacio, entonces exite una única proyección $P \in \mathbb{B}(H)$ tal que $M = \mathcal{R}(P)$ y $M^{\perp} = \mathcal{N}(P)$. También, se puede definir a las proyecciones ortogonales como aquellas $P \in \mathbb{B}(H)$ que son idempotentes y normales. Es sencillo ver que ambas definiciones son equivalentes.

Una importante caracterización de las proyecciones es la siguiente:

Proposición 1.33. *Sea $P \in \mathbb{B}(H)$ un operador idempotente diferente del nulo. Son equivalentes:*

(a) *P es una proyección.*

(b) *P es autoadjunto.*

(c) *P es positivo.*

(d) *$\|P\|$=1.*

Los teoremas con mayor influencia en este trabajo y otros textos referentes a proyecciones están relacionados con la interpretación geométrica de las mismas, de la cual ya hemos dado una idea. Estos resultados son:

[4] En la mayoría de los textos, el término *proyección* es utilizado para nombrar a los operadores idempotentes, mientras que *proyección ortogonal* para los operadores idempotentes que son autoadjuntos.

Teorema 1.34 (De la proyección-1a. Versión). *Todo espacio de Hilbert H tiene una descomposición en suma directa*

$$H = M \bigoplus M^{\perp}$$

donde M es cualquier subespacio de H.

Teorema 1.35 (De la proyección-2a. Versión). *Para cualquier M subespacio de un espacio de Hilbert H existe una única proyección $P \in \mathbb{B}(H)$ con $\mathcal{R}(P) = M$.*

Para las demostraciones de ambos teoremas remitimos al lector a [Kub], en donde se da una versión más del Teorema de la Proyección, la cual hemos preferido no incluir debido a que únicamente usaremos las interpretaciones que hemos citado.

Como primera aplicación de estos resultados tenemos:

Teorema 1.36. *Si $T \in \mathbb{B}(H)$, entonces $H = \operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)] \bigoplus \mathcal{N}(T^*)$.*

Demostración. Como $\operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)]$ es un subespacio de H, entonces $H = \operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)] \bigoplus [\operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)]]^{\perp}$ por el Teorema 1.34.

Por otra parte, usando (b) de la Proposición 1.14 tenemos $\operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)] = [\mathcal{N}(T^*)]^{\perp}$. Al ser $\mathcal{N}(T^*)$ cerrado, se sigue que $\left[[\mathcal{N}(T^*)]^{\perp}\right]^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)$.

Por tanto $\mathcal{N}(T^*) = \left[[\mathcal{N}(T^*)]^{\perp}\right]^{\perp} = [\operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)]]^{\perp}$. Con lo anterior es fácil concluir.

$\square$

Corolario 1.37. *Si $T \in \mathbb{B}(H)$ es autoadjunto, entonces $H = \mathcal{N}(T) \bigoplus \operatorname{clo}[\mathcal{R}(T)]$.*

Si M es T-invariante, con $T \in \mathbb{B}(H)$, entonces $T(M) \subseteq M$, y por lo tanto $T|_M \in \mathbb{B}(M)$, pero $T^*(M)$ no necesariamente es subconjunto de M. Para ver esto, basta con tomar a M distinto de cualquier subespacio reductor de T. Entonces si queremos devolver a M en sí mismo mediante T^* debemos proyectar $T^*(M)$ en M.

Lema 1.38. *Si* $S, T \in \mathbb{X}$*, donde* X *es un espacio con producto interno, y* $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ *para todo* $x \in X$*, entonces* $S = T$*.*

Proposición 1.39. *Sea* M *un subespacio de* H *y* $T \in \mathbb{B}(H)$*. Si* M *es* T*-invariante, entonces* $(T|_M)^* = PT^*|_M$*, donde* $P \in \mathbb{B}(H)$ *es la proyección sobre* M*, y además* $(T|_M)^* \in \mathbb{B}(M)$*. En general* $(T|_M)^{*n} = PT^{*n}|_H$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y por tanto* $\|(T|_M)^{*n}\| \leq \|T^n\|$*.*

Demostración. Es claro que tanto $(T|_M)^*$ como $PT^*|_M$ están en $\mathbb{B}(M)$, debido a la T-invarianza de M. Al ser M un subespacio, es un conjunto cerrado contenido en un espacio de Hilbert. Luego, M es en sí mismo de Hilbert. Esto nos asegura la existencia de los adjuntos de ciertos operadores que vamos a utilizar a continuación.

Sean $u, v \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (T|_M)^* u, v\rangle &= \langle u, T|_M v\rangle \\
&= \langle u, Tv\rangle \\
&= \langle u, TPv\rangle \\
&= \langle (TP)^* u, v\rangle \\
&= \langle P^*T^* u, v\rangle \\
&= \langle PT^* u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora es fácil concluir on el lema anterior y procediendo por inducción.

$\square$

Continuemos ahora con el estudio de los operadores unitarios.

Definición 1.40. Sea $U \in \mathbb{B}(H)$. U se dice *unitario* si es invertible y $U^{-1} = U^*$.

Estos operadores nos resultarán de vital importancia para este trabajo, y a continuación enlistamos sus siguientes propiedades básicas. La última es la más relevante.

Proposición 1.41. *Sea* $U \in \mathbb{B}(H)$*. Son equivalentes:*

(a) *U es unitario.*

(b) *$\|U^*x\| = \|Ux\| = \|x\|$ para cualquier $x \in H$. Por lo tanto, $\|U^*\| = \|U\| = 1$*

(c) *U es una isometría normal.*

1.3.2. Raíces positivas y descomposición polar

Sea $T \in \mathbb{B}(H)$. Si existe un operador $S \in \mathbb{B}(H)$ tal que $S^2 = T$, entonces S es llamada una *raíz cuadrada* de T. Como sucede con los números reales positivos, los operadores positivos tienen una única raíz positiva. Formalizando la idea:

Teorema 1.42. *Todo operador positivo $Q \in \mathbb{B}(H)$ tiene una única raíz cuadrada positiva $S \in \mathbb{B}(H)$, denotada por $Q^{\frac{1}{2}}$, la cual conmuta con todo operador en $\mathbb{B}(H)$ que conmute con Q. Esto es, si $Q \in \mathbb{B}^+(H)$, entonces existe un único $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{B}^+(H)$ tal que $(Q^{\frac{1}{2}})^2 = Q$.*

Entre las propiedades de las raíces cuadradas positivas, tenemos:

Teorema 1.43. *Si $Q \in \mathbb{B}(H)$ es positivo, entonces*

(a) *Q^n es positivo para toda $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *$\|Q^{\frac{1}{2}}\|^2 = \|Q\| = \|Q^2\|^{\frac{1}{2}}$.*

(c) *$\mathcal{N}(Q^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(Q^2)$ y $\operatorname{clo}[\mathcal{R}(Q^{\frac{1}{2}})] = \operatorname{clo}[\mathcal{R}(Q)] = \operatorname{clo}[\mathcal{R}(Q^2)]$.*

Ya hemos visto que, dado $T \in \mathbb{B}(H, K)$, el operador $T^*T \in \mathbb{B}(H)$ es positivo. Por tanto, tiene sentido hablar de su raíz cuadrada positiva: $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Definimos el *operador valor absoluto* de T como la raíz positiva anterior y se denotará por $|T|$. Es decir, $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, por lo cual $|T|^2 = T^*T$ y, por el análisis hecho en general para raíces positivas, se cumple $|T| \in \mathbb{B}(H)$.

Para completar las definiciones de esta subsección, introducimos el concepto de isometría parcial:

Definición 1.44. Una *isometría parcial* es un operador que actúa isométricamente en el complemento ortogonal de su núcleo. Esto es, $U \in \mathbb{B}(H, K)$ es una isometría parcial si $U|_{[\mathcal{N}(U)]^\perp}$ es una isometría.

Podemos caracterizar las isometrías parciales mediante el siguiente:

Teorema 1.45. *Si $U \in \mathbb{B}(H, K)$ es una isometría parcial, entonces $U = VP$, donde $V : [\mathcal{N}(U)]^\perp \longrightarrow K$ es una isometría y $P : H \longrightarrow H$ la proyección de H sobre $[\mathcal{N}(U)]^\perp$.*

De manera inversa, sea M un subespacio de H. Si $V : M \longrightarrow H$ es una isometría y $P : H \longrightarrow H$ es la proyección de H sobre M, entonces el operador $U = VP : H \longrightarrow H$ es una isometría parcial.

Usando la notación del teorema anterior, como $U = VP$ y $V = U|_{[\mathcal{N}(U)]^\perp}$, tenemos que $\|V\| \leq \|U\| = \|VP\| \leq \|V\|\|P\| = \|V\|$ y $\mathcal{R}(U) \subseteq \mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(U|_{[\mathcal{N}(U)]^\perp}) \subseteq \mathcal{R}(U)$, por lo que $\|W\| = \|V\| = 1$ y $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(V)$. Luego, al ser la imagen de una isometría un subespacio, se observa que $\mathcal{R}(U) = \mathrm{clo}[\mathcal{R}(U)]$. Hemos demostrado así que la imagen de una isometría parcial es un subespacio. $[\mathcal{N}(U)]^\perp$ y $\mathcal{R}(U)$ son llamados espacio inicial y final de la isometría parcial U, respectivamente.

Una nueva analogía entre los operadores de un espacio de Hilbert y los números complejos es recordar que cada complejo puede ser escrito como el producto de un complejo de módulo 1 y un real no negativo. Esta analogía se ve claramente en el siguiente:

Teorema 1.46 (Descomposición polar)**.** *Si $T \in \mathbb{B}(H, K)$, existe una isometría parcial $U \in \mathbb{B}(H, K)$ con espacio inicial $[\mathcal{N}(T)]^\perp$ y espacio final* $\mathrm{clo}[\mathcal{R}(T)]$ *tal que*

$$T = U|T|$$

y $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(|T|)$. Más aún, si $T = ZQ$, donde $Q \in \mathbb{B}(H)$ es un operador positivo y $Z \in \mathbb{B}(H, K)$ es una isometría parcial con $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{N}(Q)$, entonces

$Q = |T|$ y $Z = U$.

Antes de exponer la demostración de este resultado, veamos un lema previo:

Lema 1.47. *Sean M y N subespacios vectoriales densos de los espacios de Banach X y Y. Si $A : M \longrightarrow N$ es una isomorfismo isométrico de M sobre N, entonces existe un único isomorfismo isométrico $B : X \longrightarrow Y$ de X sobre Y que extiende a A.*

Con este lema, procedamos a la demostración del Teorema 1.46:

Demostración.
Únicamente probaremos la existencia, pues es la parte que utilizaremos más adelante.

Escribamos la definición de $|T|$: $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Recordemos que $T^*T \in \mathbb{B}(H)$ y, por (c) del Teorema 1.43, $\text{clo}[\mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})] = \text{clo}[\mathcal{R}(T^*T)]$, y como T^*T es autoadjunto, entonces por la Proposición 1.14, $\text{clo}[\mathcal{R}(T^*T)] = [\mathcal{N}(T^*T)]^{\perp}$. Nuevamente, por (c) del Teorema 1.43, $[\mathcal{N}(T^*T)]^{\perp} = [\mathcal{N}((T^*T)^{\frac{1}{2}})]^{\perp} = [\mathcal{N}(T)]^{\perp}$. En conclusión: $\text{clo}[\mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})] = [\mathcal{N}(T)]^{\perp}$.

Consideremos el mapeo $V_0 : \mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow K$ dado por $V_0(T^*T)^{\frac{1}{2}}x = Tx$ para cualquier $x \in H$. Veamos que este mapeo está bien definido. Es decir, veamos que si $z \in \mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$ es tal que $z = (T^*T)^{\frac{1}{2}}x$ y $z = (T^*T)^{\frac{1}{2}}y$ para algunas $x, y \in H$, entonces $Tx = Ty$. Para ello, notemos que $(T^*T)^{\frac{1}{2}}x = (T^*T)^{\frac{1}{2}}y$ implica que $T^*Tx = T^*Ty$, lo cual equivale a $T(x-y) \in \mathcal{N}(T^*)$. Pero por (a*) de la Proposición 1.14, eso significa que $T(x-y) \in [\mathcal{R}(T)]^{\perp}$. De ahí se deduce $T(x-y) \in \mathcal{R}(T) \cap [\mathcal{R}(T)]^{\perp}$, de donde $T(x-y) = \theta$, lo cual muestra que V_0 está bien definida.

Es fácil notar que V_0 es lineal y $\mathcal{R}(V_0) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Más aún, como $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle (T^*T)^{\frac{1}{2}}x, (T^*T)^{\frac{1}{2}}x\rangle = \|(T^*T)^{\frac{1}{2}}x\|^2$, entonces

$$\|V_0(T^*T)^{\frac{1}{2}}x\| = \|Tx\|^2 = \|(T^*T)^{\frac{1}{2}}x\|^2$$

para todo $x \in H$, de donde $\|V_0y\| = \|y\|$ para todo $y \in \mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$, así que V_0 es una isometría lineal sobre su rango. Extendámosla a todo $\text{clo}[\mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})]$, que recordemos que es lo mismo que $\text{clo}[\mathcal{R}(T^*T)]$, y sea $V : \text{clo}[\mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})] \longrightarrow \text{clo}[\mathcal{R}(V_0)]$ dicha extensión. V es una isometría lineal con $\mathcal{R}(V) \subseteq \text{clo}[\mathcal{R}(V_0)] \subseteq \text{clo}[\mathcal{R}(T)]$.

En realidad, como el mapeo $V_0 : \mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow \mathcal{R}(V_0)$ es un isomorfismo isométrico, se sigue del lema anterior que el mapeo $V : \text{clo}[\mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})] \longrightarrow \text{clo}[\mathcal{R}(V_0)]$ es de nuevo un isomormismo isométrico. Como

$$V(T^*T)^{\frac{1}{2}}x = V_0(T^*T)^{\frac{1}{2}}x = Tx$$

para todo $x \in H$, entonces $T = V(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, y por lo tanto $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(V)$, y por lo dicho en el primer párrafo de la demostración, tenemos que $V : \mathcal{N}(T)^{\perp} \longrightarrow K$ es una isometría lineal (recordemos que $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ es un espacio de Hilbert, así que $\mathcal{R}(V) = \text{clo}[\mathcal{R}(V)]$). Sea $P : H \longrightarrow H$ la proyección de H sobre $\mathcal{N}(T)^{\perp}$. Entonces $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(T)^{\perp}$, y por tanto $VPy = Vy$ para todo $y \in [\mathcal{N}(T)]^{\perp} = \mathcal{R}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$, lo cual implica que $VP(T^*T)^{\frac{1}{2}}x = V(T^*T)^{\frac{1}{2}}x$ para todo $x \in H$. Esto es, $VP(T^*T)^{\frac{1}{2}} = V(T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Haciendo $U = VP : H \longrightarrow K$ obtenemos $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Como $V = U|_{\mathcal{R}(P)} = U|_{[\mathcal{N}(T)]^{\perp}}$ es una isometría y P una proyección, entonces $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(VP) = \mathcal{N}(P) = [\mathcal{R}(P)]^{\perp} = \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$ y $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(V) = \text{clo}[\mathcal{R}(T)]$.

Por tanto $U : H \longrightarrow K$ es una isometría parcial con espacio inicial $[\mathcal{N}(T)]^{\perp}$, espacio final $\text{clo}[\mathcal{R}(T)]$ y $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}((T^*T)^{\frac{1}{2}})$.

□

Con lo anterior, hemos visto que podemos escribir una transformación lineal acotada como el producto de una isometría parcial con un operador positivo de manera única. Esta descomposición es conocida como *descomposición polar*.

Si $T = UQ$ es la descomposición polar de T, siendo U el factor isometría parcial, entonces U^*U es la proyección sobre $[\mathcal{N}(U)]^{\perp} = [\mathcal{N}(Q)]^{\perp} = \text{clo}[\mathcal{R}(Q)]$. Por lo tanto $T = UQ$ implica $U^*T = Q$. Una consecuencia del Teorema 1.46 es:

Corolario 1.48. *Sea $T = UQ$ la descomposición polar de un operador $T \in \mathbb{B}(H, K)$, siendo U el factor isometría parcial.*

(a) *$U \in \mathbb{B}(H, K)$ es una isometría si y solo si $\mathcal{N}(T) = \{\theta\}$.*

(b) *$U \in \mathbb{B}(H, K)$ es una coisometría*[5] *si y sólo si* $\text{clo}[\mathcal{R}(T)] = K$.

[5] Es decir, U^* es una isometría

Por lo tanto, si $T = UQ$ es la descomposición polar de T, entonces U es unitario si y sólo si T es inyectiva y tiene imagen densa. En particular, si T es invertible, entonces $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}}$, donde U es unitario.

1.3.3. Medidas espectrales

Una de las grandes aplicaciones de la Teoría de la Medida, y en particular, de las medidas vectoriales, es el concepto de *medida espectral*. La importancia de esta noción se deriva de uno de los dos teoremas más importantes acerca de operadores normales: la representación integral de un operador normal.

En esta sección estudiaremos este tipo de medidas vectoriales. En el apartado 2.3.2 generalizaremos dicho concepto para estudiar una generalización del Teorema de representación integral, el cual analizaremos en la siguiente sección.

Comenzamos introduciendo la definición más importante de esta parte. Aunque casi todos los ejemplos y aplicaciones que se encuentran en la literatura envuelven únicamente medidas de Borel definidas en espacios localmente compactos, las propiedades que definen una medida espectral serán establecidas en general para cualquier espacio medible.

Definición 1.49. Si X es un conjunto, Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X, y H un espacio de Hilbert, una *medida espectral* en (X, Ω, H) es una función $E : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}(H)$ con las siguientes propiedades:

(a) $E(\Delta)$ es una proyección para cada $\Delta \in \Omega$.

(b) $E(\emptyset) = \Theta$ y $E(X) = \mathrm{I}$.

(c) Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$, entonces $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.

(d) Si $\{\Delta_n\} \subseteq \Omega$ es una sucesión de medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n).$$

Por la condición (c) de la definición anterior, las proyecciones $E(\Delta_n)$ en (d) son ortogonales dos a dos, ya que los conjuntos Δ_n son disjuntos entre sí. Es decir, $E(\Delta_n)E(\Delta_m) = \Theta$ si $n \neq m$, ya que $E(\Delta_n)E(\Delta_m) = E(\Delta_n \cap \Delta_m) = E(\emptyset) = \Theta$ si $n \neq m$. La convergencia en la parte (d) es en la topología fuerte.

Esto significa que, si hacemos $F_n = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) \in \mathbb{B}(H)$, entonces para cada $x \in H$ se tiene que

$$\left\| \left(E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \right) - F_n \right) x \right\| \to 0.$$

Notemos también que para mencionar una medida espectral es necesario hacer referencia a su tripleta subyacente (X, Ω, H), donde cada elemento es como en la definición de arriba.

Antes de pasar a las primeras aplicaciones de las medidas espectrales, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.50. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida σ-finita, y $E : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{L}^2(X))$ dada por $E(\Delta)f = \chi_\Delta \cdot f$. Esto significa que $E(\Delta) : \mathcal{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mu)$ es tal que la imagen, bajo esta función, de cualquier función de cuadrado integrable en el espacio de medida dado, es la multiplicación por una función característica. Bajo la notación del Ejemplo 1.25, se puede reescribir a $E(\Delta)$ como $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$. Entonces E define una medida espectral en $(X, \Omega, \mathcal{L}^2(\mu))$.

En efecto. Como el rango de la función χ_Δ, en el sentido del cálculo usual, es $\{0, 1\}$, entonces $\overline{\chi_\Delta} = \chi_\Delta$, así que del Ejemplo 1.25, tenemos que $E(\Delta)^* = M_{\overline{\chi_\Delta}} = M_{\chi_\Delta} = E(\Delta)$. Por tanto, $E(\Delta)$ es autoadjunto. También, $E(\Delta)^2 f = E(\Delta)(E(\Delta)f) = E(\Delta)(\chi_\Delta \cdot f) = \chi_\Delta \cdot \chi_\Delta \cdot f = \chi_\Delta \cdot f = E(\Delta)f$. Por tanto, $E(\Delta)$ es idempotente, así que por definición, se concluye que $E(\Delta)$ es una proyección para cada $\Delta \in \Omega$.

Por otra parte, $E(\emptyset) = M_{\chi_\emptyset} = M_\theta = \Theta$ y $E(X) = M_{\chi_X} = M_{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$.

Además, si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$, entonces $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = M_{\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}} = M_{\chi_{\Delta_1}} M_{\chi_{\Delta_2}} = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$, ya que $\phi \mapsto M_\phi$ es un $*$-homomorfismo.

Finalmente, si $\{\Delta_n\} \subseteq \Omega$, y $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, tenemos que $E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k\right) f = \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k} \cdot f = f \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\Delta_k}$.

Ahora bien, $\sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta_k} \cdot f = f \cdot \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta_k}$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\left\|\left[E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_n\right)-\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)\right]f\right\| &= \left\|E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_n\right)f-\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)f\right\| \\
&= \left\|f\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\Delta_k}-f\cdot\sum_{k=1}^{n}\chi_{\Delta_k}\right\| \\
&= \left\|f\left[\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\Delta_k}-\sum_{k=1}^{n}\chi_{\Delta_k}\right]\right\| \\
&= \left\|f\sum_{k=n+1}^{\infty}\chi_{\Delta_k}\right\| \\
&= \left\|f\cdot\chi_{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k}\right\| \\
&= \left(\int_X |f\cdot\chi_{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k}|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_X |f|^2 d\mu \int_X \chi_{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k} d\mu \\
&= \|f\|^2\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k\right).
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de continuidad de una medida, haciendo $n \to \infty$ tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\Delta_k\right) \to 0.$$

Por tanto, $\|[E(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_n)-\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)]f\| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ y n grande.

Hemos demostrado que E cumple los axiomas de medida espectral en la terna $(X, \Omega, \mathcal{L}^2(\mu))$.

La propiedad madre que poseen las medidas espectrales es que casi cualquier cuestión sobre ellas puede ser reducida a su estudio puntual, en el sentido de analizar su naturaleza no como funciones de conjuntos medibles, sino como el efecto que tienen como proyecciones en el espacio de Hilbert subyacente. Esto lo hacemos mediante el siguiente lema:

Lema 1.51. *Si E es una medida espectral en (X, Ω, H) y $x, y \in H$, definamos $E_{x,y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y\rangle$. Entonces $E_{x,y}$ es una medida compleja en Ω con variación total no mayor a $\|x\|\|y\|$.*

Demostración.

Sean $x, y \in H$. Entonces $E_{x,y}(\emptyset) = \langle E(\emptyset)x, y\rangle = \langle \Theta x, y\rangle = \langle \theta, y\rangle = 0$. Además, si $\{\Delta_n\} \subseteq \Omega$ es una sucesión de medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned} E_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) &= \left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) x, y\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x, y\right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\Delta_n)x, y\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,y}(\Delta_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E_{x,y}$ es una medida compleja. Por otra parte, sean $\Delta_1, \cdots, \Delta_n \in \Omega$ disjuntos dos a dos tales que $X = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_n$. Si tomamos $\alpha_i \in \mathbb{C}$ con $|\alpha_i| = 1$ y tales que $|\langle E(\Delta_i)x, y\rangle| = \alpha_i \langle E(\Delta_i)x, y\rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |E_{x,y}(\Delta_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle E(\Delta_i)x, y\rangle| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle E(\Delta_i)x, y\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\Delta_i)x, y\right\rangle \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\Delta_i)x \right\| \|y\|. \end{aligned}$$

Pero los vectores $\{\alpha_i E(\Delta_i)x\}$ son ortogonales dos a dos así que, por el teorema de Pitágoras,

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\Delta_i) x\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|E(\Delta_i)x\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)x\|^2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i)x\right\|^2 \\
&= \left\|E\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_n\right) x\right\|^2 \\
&\leq \left\|E\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_n\right)\right\|^2 \|x\|^2 \\
&= 1 \cdot \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

De ahí se concluye que la variación total de $E_{x,y}$ es a lo más $\|x\|\|y\|$.

$\square$

Con base en lo anterior, dada una medida espectral en la terna (X, Ω, H) y $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ acotada y medible, al ser $E_{x,y}$ una medida en Ω, tiene sentido hablar de la integral, finita por el acotamiento, de ϕ respecto a $E_{x,y}$. De hecho, si definimos $F_\phi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ por $F_\phi(x, y) = \int_X \phi dE_{x,y}$, tenemos entonces que $|F(x, y)| \leq \|\phi\|_\infty \|x\|\|y\|$, donde hemos usado el Lema 1.51. Además, si ϕ

es simple y positiva con representación estándar $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, entonces

$$\begin{aligned}
F_\phi(x+y,z) &= \int_X \phi dE_{x+y,z} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{x+y,z}(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle E(A_i)(x+y), z\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\langle E(A_i)x, z\rangle + \langle E(A_i)y, z\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle E(A_i)x, z\rangle + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle E(A_i)y, z\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{x,z}(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{y,z}(A_i) \\
&= \int_X \phi dE_{x,z} + \int_{\mathcal{X}} \phi dE_{y,z} \\
&= F_\phi(x,z) + F_\phi(y,z).
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $F_\phi(\cdot,\cdot)$ es aditiva en su primer variable para toda ϕ medible, positiva y simple, de donde es aditiva en su primer variable para cualquier ϕ medible y acotada (lo cual, obviamente incluye el caso en que ϕ es compleja).

De la misma manera se prueba que es semilineal en la segunda variable, de modo que $F_\phi(\cdot,\cdot)$ es, siempre que ϕ sea medible y acotada, una forma sesquilineal.

Éste fue es el primer paso para demostrar la mitad del llamado Teorema de Representación integral para operadores normales, el cual, como ya hemos dicho, será estudiado en la siguiente sección.

Proposición 1.52. *Si E es una medida espectral en (X, Ω, H) y $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es acotada y Ω-medible, entonces existe un único operador $T_\phi \in \mathbb{B}(H)$ tal que si $\epsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$ es una Ω-partición de X con $\sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x, y \in \Delta_k\} < \epsilon$ para $k \in \{1, \cdots, n\}$, entonces para cualquier elección de x_k, con $x_k \in \Delta_k$,*

$$\left\| T_\phi - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \epsilon.$$

Demostración.

Sabemos, por la discusión de los párrafos precedentes, que $F_\phi : H\times H \longrightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal acotada, de modo que por el teorema de Riesz, existe un operador $T \in \mathbb{B}(H)$ tal que $F_\phi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ para cualesquiera $x, y \in H$, y además, $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Sean $\epsilon > 0$, $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$ y $x_1, \cdots, x_n$ como en el enunciado de la proposición. Para cualesquiera $x, y \in H$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\langle Tx, y\rangle - \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\langle E(\Delta_i)x, y\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} [\phi(z) - \phi(x_k)] dE_{x,y}(z)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} |\phi(z) - \phi(x_k)| d|E_{x,y}|(z) \\
&\leq \epsilon \int_X d|E_{x,y}|(z) \\
&\leq \epsilon \|x\|\|y\|.
\end{aligned}$$

Denotando a T como T_ϕ y tomando el supremo sobre todos los vectores unitarios x, y, se obtiene lo pedido.

□

El operador T_ϕ obtenido es llamado *la integral de ϕ con respecto a E*, y es denotado por $\int \phi dE$.

Luego, para cualesquiera $x, y \in H$, se tiene

$$\left\langle \left(\int \phi dE\right) x, y \right\rangle = \int_X \phi dE_{x,y}.$$

Examinemos el operador T_ϕ obtenido. Calculemos T_ϕ^*:

$$\begin{aligned}
\langle T_\phi^* x, y\rangle &= \langle x, T_\phi y\rangle \\
&= \overline{\langle T_\phi y, x\rangle} \\
&= \overline{\int_X \phi dE_{y,x}} \\
&= \int_X \overline{\phi dE_{y,x}} \\
&= \int_X \overline{\phi} dE_{x,y} \\
&= \left\langle \left(\int \overline{\phi} dE\right) x, y \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como la igualdad anterior se cumple para cualesquiera $x, y \in H$, entonces $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$. Esto es,

$$T_\phi^* = \int \overline{\phi} dE.$$

Ahora bien, sea $\psi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ otra función medible y acotada. Entonces, por la Proposición 1.52, existe $T_\psi \in \mathbb{B}(H)$ con las propiedades que dicho enunciado describe. Si $\epsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$ es una Ω-partición de X son tales que, si hacemos $\omega = \phi, \psi$ ó $\phi \cdot \psi$, entonces $\sup\{|\omega(x) - \omega(y)| \ : \ x, y \in \Delta_k\} < \epsilon$ para $k \in \{1, \cdots, n\}$, obtenemos por la mencionada proposición que para cualquier elección $x_k \in \Delta_k$,

$$\left\| T_\omega - \sum_{k=1}^{n} \omega(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \epsilon.$$

Así, para cualquier elección $x_k \in \Delta_k$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int \phi\psi dE - T_\phi T_\psi \right\| \\
\leq \ & \epsilon + \left\| \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k)\psi(x_k)E(\Delta_k) - \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)E(\Delta_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j) \right) \right\| \\
& + \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)E(\Delta_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j) \right) - T_\phi T_\psi \right\|
\end{aligned}$$

Pero $E(\Delta_i)E(\Delta_j) = E(\Delta_i \cap \Delta_j)$ y $\{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$ es una partición de X, por lo que

$$\begin{aligned}
\left\| \int \phi\psi dE - T_\phi T_\psi \right\| \ \leq \ & \epsilon + \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)E(\Delta_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j) - T_\psi \right) \right\| \\
& + \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)E(\Delta_i) - T_\phi \right) T_\psi \right\| \\
\leq \ & \epsilon(1 + \|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty).
\end{aligned}$$

Hemos demostrado así que $T_{\phi\cdot\psi} = T_\phi T_\psi$ para cualesquiera ϕ, ψ Ω-medibles y acotadas.

En particular, $T_\phi T_\phi^* = T_\phi T_{\overline{\phi}} = T_{\phi\cdot\overline{\phi}} = T_{|\phi|^2}$, de donde es claro que T_ϕ es normal.

Lo que el teorema de representación integral para operadores normales es el inverso de esta propiedad.

De hecho, podemos decir más. Escribamos $B(X, \Omega)$ para el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que son Ω-medibles y acotadas, considerado como el espacio normado cuya norma es la norma del supremo. Entonces $B(X, \Omega)$ es una espacio de Banach y una C^*-álgebra, donde la involución de un elemento es su conjugado complejo.

Pasamos ahora a definir un concepto fundamental en la teoría de álgebras.

Definición 1.53. Sea A una C^*-álgebra con unidad e. Una *representación de* A es un $*$-homomorfismo $\varrho : A \longrightarrow \mathbb{B}(H)$, donde H es algún espacio de Hilbert, tal que $\varrho(e) = \mathrm{I}$.

Como vemos, la idea de las representaciones es identificar C^*-álgebras arbitrarias con C^*-subálgebras de espacios de operadores.

Proposición 1.54. *Si E es una medida espectral para (X, Ω, H) y $\varrho : B(X, \Omega) \to \mathbb{B}(H)$ es definida por $\varrho(\phi) = T_\phi$, entonces ϱ es una representación de $B(X, \Omega)$.*

Demostración.

Como $\varrho(\phi) \in \mathbb{B}(H)$, entonces basta probar que ϱ es un $*$-homomorfismo y que $\varrho(Id) = \mathrm{I}$. Esto último es claro de la definición de T_ϕ, así que nos enfocaremos en la parte del morfismo.

Sin embargo, por la discusión precedente hemos demostrado que $\varrho(\phi \cdot \psi) = \varrho(\phi)\rho(\psi)$ para todos $\phi, \psi \in B(X, \Omega)$. Entonces, basta con ver que ϱ es aditiva y preserva involuciones.

Pero esto se verifica fácilmente:

$$
\begin{aligned}
\varrho(\phi + \psi) &= T_{\phi+\psi} \\
&= \int (\phi + \psi) dE \\
&= \int \phi dE + \int \psi dE \\
&= T_\phi + T_\psi \\
&= \varrho(\phi) + \varrho(\psi)
\end{aligned}
$$

y $\varrho(\overline{\phi}) = T_{\overline{\phi}} = T_\phi^* = \varrho(\phi)^*$.

Esto concluye la prueba.

□

En particular, si X es compacto, entonces cualquier medida espectral teniendo como espacio medible a (X, Σ_X) define una representación de $C(X)$, ya que $C(X) \subseteq B(X, \Sigma_X)$. Importante es observar que el recíproco de esta afirmación es cierta.

Teorema 1.55. *Si X es compacto y $\varrho : C(X) \longrightarrow \mathbb{B}(H)$ es una representación, entonces existe una única medida espectral E definida en Σ_X tal que para cualesquiera $x, y \in H$, $E_{x,y}$ es una medida regular compleja de Borel y*

$$\varrho(f) = \int f dE.$$

La prueba de este teorema es puramente técnica, de modo que es preferible analizar lo que el resultado nos dice.

Sea N un operador normal en un espacio de Hilbert H. Podemos encajar a $C(\sigma(N))$ isométricamente en $C^*(N) \subseteq \mathbb{B}(H)$ mediante un único cálculo funcional Φ_N y tal que $\Phi_N(Id) = N$ debido al Corolario 1.11. Por tanto, Φ_N es, por definición, una representación de la C^*-álgebra $C(\sigma(N))$, y por el Teorema 1.55, existe una medida espectral E en $(\sigma(N), \Sigma_{\sigma(N)}, H)$ tal que $f(N) = T_f$ para cualquier $f \in C(\sigma(N))$. Pero $\Phi_N(f) = f(N)$ para cada $f \in C(\sigma(N))$, por lo que $\Phi_N(f) = T_f$.

1.3.4. Representación espectral de operadores normales

Finalizamos nuestro estudio de los operadores normales con uno de sus resultados fundamentales.

Teorema 1.56 (Teorema Espectral de representación integral para operadores normales (TERI))**.** *Si N es un operador normal, entonces existe una única medida espectral E definida en $\Sigma_{\sigma(N)}$ tal que*

(a) *$f(N) = T_f$ para cualquier $f \in C(\sigma(N))$.*

(b) *Si Δ es un relativamente abierto no vacío y subconjunto de $\sigma(N)$, entonces $E(\Delta) \neq \Theta$.*

Demostración.
Básicamente hemos hecho la demostración al final de la subsección anterior.

$\square$

Sabemos que $\Phi_n(f) = T_f$ para toda $f \in C(\sigma(N))$, y $g(z) = \overline{z}$ es continua, así que por el análisis hecho antes acerca de T_f^*, tenemos que $\displaystyle\int_{\sigma(N)} \overline{z} dE(z) = N^* = g(N)$

Como aplicación básica del TERI podemos caracterizar completamente las clases de operadores normales estudiadas mediante el espectro:

Proposición 1.57. *Sea $\Gamma = \partial\mathbb{D}$. Si $N \in \mathbb{B}(H)$ es normal, entonces*

(a) *N es unitario si y sólo si $\sigma(N) \subseteq \Gamma$.*

(b) *N es autoadjunto si y sólo si $\sigma(N) \subseteq \mathbb{R}$.*

(c) *N es positivo si y sólo si $\sigma(N) \subseteq [0, \infty)$.*

(d) *N es una proyección si y sólo si $\sigma(N) \subseteq \{0, 1\}$.*

Demostración. Sea $N = \displaystyle\int_{\sigma(N)} z dE$ la representación integral de N. El punto principal en que se basa la demostración es que $\Phi_N(f) = T_f$ para toda $f \in \mathbb{C}(\sigma(N))$, y Φ_N es una representación.

(a) Como $\sigma(N) \subseteq \Gamma$, entonces $0 \in \rho(N)$. Es decir, N es invertible. Sea $g : \sigma(N) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = z^{-1} - \overline{z}$. Es claro que $g \in C(\sigma(N))$, así que por el TERI,

$$N^{-1} - N^* = g(N) = \int_{\sigma(N)} \frac{1}{z} - \overline{z} dE = \int_{\sigma(N)} \frac{1 - |z|^2}{z} dE.$$

Como $\sigma(N) \subseteq \Gamma$, sabemos que $|z| = 1$ para cada $z \in \sigma(N)$. Luego, en la ecuación anterior tenemos:

$$N^{-1} - N^* = \int_{\sigma(N)} 0dE = 0 \int_{\sigma(N)} dE = 0E(\sigma(N)) = 0\mathrm{I} = \Theta,$$

lo cual significa que $N^{-1} = N^*$.

(b) Utilizando la misma técnica, tenemos: $N - N^* = \displaystyle\int_{\sigma(N)} z - \overline{z} dE$. Pero como $\sigma(N) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\overline{z} = z$ para cada $z \in \sigma(N)$. Así, la ecuación anterior se reescribe como

$$N - N^* = \int_{\sigma(N)} z - \overline{z} dE = \int_{\sigma(N)} 0dE = \Theta,$$

o equivalentemente, $N = N^*$.

(c) Por (b), N es autoadjunto. Sea $x \in H$. Sea $\Delta \in \Sigma_{\sigma(N)}$. Como cada $E(\Delta)$ es una proyección, y las proyecciones son positivas, entonces $E_{x,x}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, x\rangle \geq 0$. Por tanto, $E_{x,x}$ define una medida positiva en $\Sigma_{\sigma(N)}$ (ya que $E_{x,y}$ define una medida compleja). Tomemos $f : \sigma(N) \longrightarrow [0, \infty)$, siendo f una función simple, $\langle Tx, x\rangle$-medible y tal que $f(z) \leq z$ para toda $z \in \sigma(N)$, con representación estándar $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\Delta_k}$. Recordar que bajo estas condiciones, tenemos $\alpha_k \geq 0$. Entonces

$$\int_{\sigma(N)} f dE_{x,x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E_{x,x}(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle E(\Delta_k)x, x\rangle.$$

Como $\langle E(\Delta)x, x\rangle \geq 0$, deducimos que $\alpha_k \langle E(\Delta)x, x\rangle \geq 0$. Luego, $\int_{\sigma(N)} f dE_{x,x} \geq 0$.

Así,

$$\langle Nx, x\rangle = \int_{\sigma(N)} z dE_{x,x} = \sup \left\{ \int_{\sigma(N)} f dE_{x,x} \ : \ f \text{ es simple y } 0 \leq f(z) \leq z \right\} \geq 0.$$

Por el Corolario 1.27, N es positivo.

(d) Se sigue, análogamente a los incisos anteriores, de que

$$T^2 - T = \int_{\sigma(N)} z(1-z)dE.$$

$\square$

Capítulo 2

Generalizaciones de los operadores normales

En este capítulo estudiaremos algunas de las generalizaciones del concepto de operadores normales. Para motivar ideas, tomemos un operador normal $N \in \mathbb{B}(H)$. Es decir, $N^*N = NN^*$. De entre las formas que se ocurren para generalizar la ecuación anterior, nos hemos enfocado particularmente en tres.

El concepto de subnormalidad fue introducido por Halmos en [Hal1], donde llama a esta clase de operadores "completamente subnormales".El término subnormal como se usa hoy en día aparece por primera vez en [Hal2].

Al tiempo que Halmos introdujo dicho concepto, define la hyponormalidad. Ambas nociones fueron inspiradas por el desplazamiento unilateral, quizás el operador no normal mejor entendido. Éste fue el ejemplo dominante de operador subnormal durante veinticinco años. Su influencia hoy aún se siente, pero ya no es el ejemplo típico.

Otro ejemplo, o clase de ejemplos, que ha sido de gran influencia es la multiplicación por z en el espacio de funciones analíticas de cuadrado integrable en una región, conocido como operador de Bergman.

En 1955, Joseph Bram e I. M. Singer, independientemente, caracterizaron los operadores subnormales cíclicos como la multiplicación por z en $P^2(\mu)$, la cerradura de los polinomios en $\mathcal{L}^2(\mu)$ para alguna medida μ con soporte compacto en el plano. Sin embargo, recientemente estos operadores no han sido examinados lo suficiente. Una razón para esto puede ser nuestra ignorancia sobre ejemplos de medidas.

2.1. Los operadores de desplazamiento

Uno de los tipos de operadores más estudiados dentro del análisis es el de los desplazamientos. En nuestro proyecto de investigación estos operadores han tenido gran importancia, por lo que consideramos oportuno hacer un breve recorrido por su estructura.

Definición 2.1. Sea $S \in \mathbb{B}(H)$. Se dice que S es un *desplazamiento unilateral* si existe una sucesión $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de subespacios de H, ortogonales dos a dos, tales que:

(a) $H = H_0 \bigoplus H_1 \bigoplus H_2 \bigoplus H_3 \bigoplus \cdots$ y

(b) $S(H_n) = H_{n+1}$ y $S|_{H_n}$ es una isometría para toda $n \in \mathbb{N}^*$. Esto es, S mapea isométricamente a H_n sobre H_{n+1}.

De la definición anterior, es claro que $S|_{H_n} : H_n \longrightarrow H_{n+1}$ es unitario, y por lo tanto las dimensiones de todos los H_n son iguales, en el sentido de Hilbert, a la dimensión del espacio de Hilbert H_0. Por otra parte, si $x \in H_0$, entonces $x \perp y$ cualquiera que sea $y \in H_{n+1}$, donde n es arbitrario en $\mathbb{N}^*$. Luego, un simple argumento muestra que $H_0 = [\mathcal{R}(S)]^\perp$, y de paso, que $\mathcal{R}(S)$ es cerrado. Se define la *multiplicidad* del desplazmiento unilateral S como la dimensión de Hilbert de este espacio. Es decir, la multiplicidad de S es, por definición, $\dim(H_0) = \dim\big([\mathcal{R}(S)]^\perp\big)$.

Referente a esto, tenemos la siguiente:

Proposición 2.2. *Dos desplazamientos unilaterales son unitariamente equivalentes si y sólo si tienen la misma multiplicidad.*

La demostración puede verse en [Kub], pp 421-422. Más aún, una consecuencia importante de lo anterior es:

Corolario 2.3. *Si $S \in \mathbb{H}$ es un desplazamiento unilateral y T se define en $H_0 \bigoplus H_0 \bigoplus H_0 \bigoplus \cdots$ como*

$$T(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots ,$$

entonces S y T son unitariamente equivalentes.

Esto nos dice que si $S \in \mathbb{B}(H)$ es un desplazamiento unilateral, con $H = H_0 \bigoplus H_1 \bigoplus \cdots$, simplemente podemos suponer a H como

$$H = H_0 \bigoplus H_0 \bigoplus H_0 \bigoplus \cdots$$

y a S como el operador tal que si $x \in H$, entonces Sx es la descomposición en suma directa de x desplazada un lugar a la derecha. Luego, es claro que los desplazamientos unilaterales son isometrías.

Enunciamos el importante resultado de descomposición:

Teorema 2.4 (La descomposición de Von Newmann-Wold). *Si S es una isometría en H y H_∞ se define como $H_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n(H)$, entonces:*

(a) *H_∞ reduce a S.*

(b) *$S|_{H_\infty}$ es unitario.*

(c) *$S|_{H_\infty^\perp}$ es un desplazamiento unilateral.*

La demostración de este interesante teorema puede consultarse en [Con1].

2.2. Operadores hyponormales

Sean $S, T \in \mathbb{B}(H)$ dos operadores. Definimos al operador $[S, T]$ como $[S, T] := ST - TS$. Se sigue de inmediato que $[S, T] \in \mathbb{B}(H)$ para cualesquiera $S, T \in \mathbb{B}(H)$.

Si hacemos $S = T^*$, tendremos $[T^*, T] = T^*T - TT^*$. Es claro entonces que $N \in \mathbb{B}(H)$ es normal si y sólo si $[N^*, N] = \Theta$.

Por otra parte, recordemos que la relación de orden parcial *positividad* se define para operadores cuya diferencia es autoadjunta. En particular, para cualquier $T \in \mathbb{B}(H)$ se cumple que T^*T y TT^* son ambos operadores positivos y $T^*T - TT^*$ es autoadjunto. Esto es: $[T^*, T]$ es un operador autoadjunto para toda $T \in \mathbb{B}(H)$. Luego, podemos examinar su *positividad*.

De esta manera, hemos mostrado que la siguiente definición tiene sentido. Y además da pie a una importante generalización del concepto de normalidad. A saber:

Definición 2.5. Sea $T \in \mathbb{B}(H)$. T se dice *hyponormal* si

$$[T^*, T] \equiv T^*T - TT^* \geq \Theta.$$

Equivalentemente $T \in \mathbb{B}(H)$ es hyponormal si y sólo si $T^*T \geq TT^*$. Utilizando la definición de la desigualdad anterior, encontramos el primer

Lema 2.6. *Un operador $T \in \mathbb{B}(H)$ es hyponormal si y sólo si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ para toda $x \in H$.*

Por el contrario, si se cumple la desigualdad $TT^* \geq T^*T$ para alguna $T \in \mathbb{B}(H)$, se dice que T es *cohyponormal*. Los operadores que son hyponormales o cohyponormales son llamados *seminormales*. Y de hecho, es claro que un operador es normal si y sólo si es hyponormal y cohyponormal.

Ejemplo 2.7. Sea $H = \ell^2$ y tomemos $U : H \longrightarrow H$ la transformación lineal dada como

$$U\{x_n\} = U(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) = (x_2, x_3 + 2x_1, x_4 + 2x_2, x_5 + 2x_3, \cdots)$$

para cualquier $\{x_n\} = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^2$. Es claro que $U \in \mathbb{B}(H)$.

Por otra parte, un sencillo cálculo muestra que U^* viene dada como

$$U^*\{x_n\} = U^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) = (2x_2, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_4, x_3 + 2x_5, \cdots).$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
\|U\{x_n\}\|^2 - \|U^*\{x_n\}\|^2 &= \|U(x_1, x_2, x_3, \cdots)\|^2 - \|U^*(x_1, x_2, x_3, \cdots)\|^2 \\
&= x_2^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_{n+1} + 2x_{n-1})^2 - \left(4x_2^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_{n-1} + 2x_{n+1})^2\right) \\
&= -3x_2^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(x_{n+1} + 2x_{n-1})^2 - (x_{n-1} + 2x_{n+1})^2\right] \\
&= -3x_2^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[-3x_{n+1}^2 + 3x_{n-1}^2\right] \\
&= 3x_1^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Así, por el Lema 2.6 concluimos la hyponormalidad de U. Sin embargo, si hacemos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots) = (1, 0, -2, 0, 0, \cdots)$:

$$\begin{aligned}
U(1, 0, -2, 0, 0, \cdots) &= (0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, \cdots) \\
U^2(1, 0, -2, 0, 0, \cdots) &= (0, 0, -4, 0, -8, 0, 0, \cdots)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
U^*(1, 0, -2, 0, 0, \cdots) &= (0, -3, 0, -2, 0, 0, 0, \cdots) \\
U^{*2}(1, 0, -2, 0, 0, \cdots) &= (-6, 2, -11, 0, -2, 0, 0, \cdots).
\end{aligned}$$

De ahí obtenemos

$$\|U^{*2}(1, 0, -2, 0, 0, \cdots)\| = \sqrt{165} > \sqrt{80} = \|U^2(1, 0, -2, 0, 0, \cdots)\|,$$

lo cual demuestra por el mismo Lema 2.6 que U^2 no es hyponormal.

Es importante resaltar del ejemplo anterior la naturaleza escondida del operador U. Obsérvese que $U = S_+^* + 2S_+$ donde S_+ es el operador de desplazamiento derecho en ℓ^2. En general se puede demostrar que si S_+ es un operador desplazamiento de multiplicidad 1, entonces $S_+^* + 2S_+$ es un operador hyponormal. Sin embargo, también es importante notar que $(S_+^* + 2S_+)^2$ no lo es.

La hyponormalidad es cerrada bajo producto con escalares no negativos y traslaciones con la identidad:

Lema 2.8. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$ hyponormal.*

(a) *Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces αT es hyponormal.*

(b) $\mathrm{I} - T$ *es hyponormal.*

Demostración.

(a) Basta con observar que $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$. Como $T^*T \geq TT^*$, y $|\alpha|^2 \geq 0$, entonces por el Lema 1.30, $|\alpha|^2 T^*T \geq |\alpha|^2 TT^*$. Pero el lado izquierdo de esta desigualdad es $|\alpha|^2 T^*T = \overline{\alpha}T^* \cdot \alpha T = (\alpha T)^* \alpha T$, y análogamente, el lado derecho es $\alpha T(\alpha T)^*$.

(b) Por el Lema 1.30, $\mathrm{I} - T - T^* + T^*T \geq \mathrm{I} - T - T^* + TT^*$. Pero el lado izquierdo de esta desigualdad es $(\mathrm{I} - T^*)(\mathrm{I} - T) = (\mathrm{I} - T)^*(\mathrm{I} - T)$, y el derecho es $(\mathrm{I} - T)(\mathrm{I} - T^*) = (\mathrm{I} - T)(\mathrm{I} - T)^*$. Por tanto

$$(\mathrm{I} - T)^*(\mathrm{I} - T) \geq (\mathrm{I} - T)(\mathrm{I} - T)^*.$$

□

Corolario 2.9. *Sea T hyponormal. Entonces $\lambda \mathrm{I} - T$ es hyponormal para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Continuando con algunas de las propiedades de los operadores hyponormales, tenemos la siguiente:

Proposición 2.10. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$ un operador hyponormal.*

(a) *Si T es invertible, entonces T^{-1} es hyponormal.*

(b) *Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $x \in H$ es un vector propio asociado a λ, entonces $T^*x = \overline{\lambda}x$.*

(c) *Si $Tx = \lambda x$ y $Ty = \overline{\lambda}y$, entonces $x \perp y$.*

Demostración.

(a) Recordemos que en general si U es positivo e invertible, entonces, por (b) del Teorema 1.31, $U \geq \mathrm{I} \Rightarrow U^{-1} \leq \mathrm{I}$. Por el (a) del mismo, $U^{-1} \geq \Theta$. Con esto, como en nuestro caso es T hyponormal, tenemos

$$\begin{aligned}
& T^*T \geq TT^* \\
\Rightarrow\ & T^{-1}(T^*T)(T^*)^{-1} \geq T^{-1}(TT^*)(T^*)^{-1} \\
\Rightarrow\ & T^{-1}(T^*T)(T^*)^{-1} \geq \mathrm{I} \\
\Rightarrow\ & \mathrm{I} \geq (T^{-1}(T^*T)(T^*)^{-1})^{-1} = T^*T^{-1}(T^*)^{-1}T \\
\Rightarrow\ & T^{-1}(T^*)^{-1} = (T^*)^{-1}(T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1} \leq (T^*)^{-1}T^{-1}
\end{aligned}$$

y esto significa que T^{-1} es hyponormal.

(b) Utilizando el Corolario 2.9 y el Lema 2.6,

$$\|(T^* - \lambda \mathrm{I}x)\| = \|(T - \lambda\mathrm{I})^* x\| \leq \|(T - \lambda\mathrm{I})x\| = 0.$$

(c) $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$

□

Veamos ahora que la restricción de un operador hyponormal a cualquier subespacio invariante sigue siendo hyponormal. Este hecho contrasta con la normalidad, ya que ésta no cumple con dicha propiedad.

Proposición 2.11. *Sea M un subespacio invariante para $T \in \mathbb{B}(H)$.*

(a) *Si T es hyponormal, entonces $T|_M$ es hyponormal.*

(b) *Si T es hyponormal y $T|_M$ es normal, entonces M reduce a T.*

Demostración.

(a) Bastará con mostrar que $\|T|_M x\| \geq \|(T_M)^* x\|$ para todo $x \in M$, según el Lema 2.6. Por la Proposición 1.39, $T|_M \in \mathbb{B}(M)$. Sea P la proyección de H sobre M. La misma proposición afirma que $(T|_M)^* = PT^*|_M$. Sea $x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|(T_M)^* x\| &= \|PT^*|_M x\| \\
&\leq \|P\|\|T^*|_M x\| \\
&= \|T^*|_M x\| \\
&= \|T^* x\| \\
&\leq \|Tx\| \\
&= \|T|_M x\|,
\end{aligned}$$

en donde para obtener la última desigualdad hemos utilizado la hyponormalidad de T y el Lema 2.6.

(b) Utilizando matrices de operadores tenemos que

$$T = \begin{bmatrix} N & A \\ \Theta & B \end{bmatrix}$$

es la representación de T respecto a $H = M \bigoplus M^\perp$.

Hagamos $N = T|_M$. Entonces $N \in \mathbb{B}(M)$ es normal. Además

$$T^* = \begin{bmatrix} N^* & \Theta \\ A^* & B^* \end{bmatrix}$$

es la representación matricial de T^* relativa a $H = M \bigoplus M^\perp$.

Por lo tanto

$$T^*T = \begin{bmatrix} N^* & \Theta \\ A^* & B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & A \\ \Theta & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^*N & N^*A \\ A^*N & A^*A + B^*B \end{bmatrix}$$

y análogamente

$$TT^* = \begin{bmatrix} NN^* + AA^* & AB^* \\ BA^* & BB^* \end{bmatrix}$$

son las representaciones de T^*T y TT^* relativas a $H = M \bigoplus M^\perp$.

Usando la normalidad de N, se sigue de lo anterior que

$$\Theta \leq [T^*, T] = \begin{bmatrix} -AA^* & N^*A - AB^* \\ A^*N - BA^* & A^*A + B^*B - BB^* \end{bmatrix}.$$

Sean $u \in M$ y $x = u \oplus \theta \in H = M \bigoplus M^{\perp}$. Entonces

$$[T^*, T]x = \begin{bmatrix} -AA^* & N^*A - AB^* \\ A^*N - BA^* & A^*A + B^*B - BB^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -AA^*u \\ (A^*N - BA^*)\, u \end{bmatrix}.$$

Esto significa que $[T^*, T]x = [T^*, T](u \oplus \theta) = -AA^*u \oplus (A^*N - BA^*)\, u \in H = M \bigoplus M^{\perp}$. Utilizando la hyponormalidad de T obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle [T^*, T]x, x \rangle \\ &= \langle -AA^*u \oplus (A^*N - BA^*)\, u, u \oplus \theta \rangle \\ &= \langle -AA^*u, u \rangle + \langle (A^*N - BA^*)\, u, \theta \rangle \\ &= -\langle AA^*u, u \rangle \\ &= -\langle A^*u, A^*u \rangle \\ &= -\|A^*u\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que $A^*u = \theta$ para toda $u \in M$, de modo que es $A^* = \Theta$, o equivalentemente, $A = \Theta$. Entonces T se reescribe como

$$T = \begin{bmatrix} N & \Theta \\ \Theta & B \end{bmatrix},$$

lo cual equivale a que M reduzca a T.

$\square$

En vista de este resultado, obtenemos una consecuencia cuya importancia es mayor a la de dicha proposición. Obtendremos las condiciones para que la restricción de un operador normal a algún subespacio invariante siga siendo normal.

Corolario 2.12. *Sea M un subespacio invariante para un operador normal $N \in \mathbb{B}(H)$. $N|_M$ es normal si y sólo si M reduce a N.*

Demostración.

(⇒) Supongamos que $N|_M$ es normal. Como N es normal, es hyponormal, y por (b) de la proposición anterior tenemos que M reduce a N.

($\Leftarrow$) Supongamos que M reduce a N. Entonces N puede descomponerse como

$$N = \begin{bmatrix} N|_M & \Theta \\ \Theta & N|_{M^\perp} \end{bmatrix},$$

definido en $H = M \bigoplus M^\perp$. Notemos que $N|_M \in \mathbb{B}(M)$. Queremos ver que dicho operador es normal, y para ello, habrá que calcular $(N|_M)^*$, lo cual no es complicado debido a la condición de M como espacio reductor, y obtenemos así $(N|_M)^* = N^*|_M$. Análogamente, es $(N|_{M^\perp})^* = N^*|_{M^\perp}$.

Por lo anterior,

$$N^* = \begin{bmatrix} N^*|_M & \Theta \\ \Theta & N^*|_{M^\perp} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, utilizando la normalidad de N y las representaciones matriciales anteriores es sencillo concluir.

$\square$

Proposición 2.13. *Si $T \in \mathbb{B}(H)$ es hyponormal, entonces $\|T^n\| = \|T\|^n$, y por lo tanto $\|T\| = \mathrm{T}$.*

Demostración.
Notemos que si $x \in H$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \langle T^* T^n x, T^{n-1}x\rangle \leq \|T^*T^n x\|\|T^{n-1}x\| \leq \|T^{n+1}x\|\|T^{n-1}\|x.$$

Por lo tanto $\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\|\|T^{n-1}\|$.

Utilizando la desigualdad anterior y procediendo por inducción se tiene lo deseado.

$\square$

De inmediato obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 2.14. *Si T es hyponormal, entonces $r(T) = \|T\|$. Esto es, el radio espectral de T es igual a su norma.*

Demostración.
Se desprende del hecho de que $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Corolario 2.15. *Si T es hyponormal y $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces* $\|(T - \lambda \mathrm{I})^{-1}\| = d(\lambda, \sigma(T))^{-1}$.

Proposición 2.16. *Si T es hyponormal y λ es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

2.3. Operadores subnormales

Como hemos mencionado al principio del capítulo anterior, la noción de subnormalidad fue introducida por Halmos. A lo largo de esta sección trataremos con los operadores subnormales y revisaremos con frecuencia sus propiedades utilizando los operadores de Bergman así como el operador de desplazamiento. Definiremos el concepto de medidas en operadores positivos, el cual es un análogo a la noción de medidas espectrales para operadores subnormales y finalizaremos con un análisis topológico del conjunto de operadores subnormales.

2.3.1. Nociones básicas

Antes de introducir la definición de operadores subnormales, analizaremos brevemente un par de operadores.

Ejemplo 2.17. Tomemos G un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{L}^2(G)$. Tenemos entonces la siguiente:

Definición 2.18. El *operador de Bergman* para G es la transformacion lineal S definida en $\mathcal{L}^2_a(G)$ por $Sf = Id \cdot f$. Es decir, $Sf : G \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dado como $[Sf](z) = zf(z)$.

Notar que S así definida es acotada. Por tanto podemos hablar del operador de Bergman de acuerdo a nuestras notaciones iniciales. Veamos algunas propiedades básicas de la definición anterior.

Teorema 2.19. *Para* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}_a^p(G)$ *es un espacio de Banach.*

En particular $\mathcal{L}_a^2(G)$ es un espacio de Hilbert.

Luego, sabemos que para el operador de Bergman S definido en $\mathcal{L}_a^2(G)$ existe su operador adjunto $S^* \in \mathbb{B}(\mathcal{L}_a^2(G))$.

Notemos ahora que S es normal en su dominio, el cual es $\mathcal{L}_a^2(G)$.

Dada la importancia que tiene el operador de Bergman en el igualmente importante espacio $\mathcal{L}_a^2(G)$, es deseable poder extenderlo a todo $\mathcal{L}^2(G)$ de manera continua y conservando la normalidad. Consideremos $\mathcal{L}_a^2(G)$ como un subespacio de $\mathcal{L}^2(G)$. En éste último definamos una transformación lineal $N : \mathcal{L}^2(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(G)$ dada por $Nf = Id \cdot f$. Esto es $Nf : G \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dado como $Nf(z) = zf(z)$.

Por el Ejemplo 1.25, sabemos que N es normal, ya que $N = M_{Id}$ y G es abierto y acotado, por lo que $Id : G \longrightarrow G$ pertenece a $\mathcal{L}^\infty(G)$. Por tanto hemos encontrado una "extensión" normal acotada del operador de Bergman. Por sí solo lo anterior ya es un éxito, debido a que el problema de extensión de transformaciones lineales, el cual es tratado por el teorema de Hahn-Banach, no es tan sencillo en el caso de querer conservar propiedades como la normalidad.

Para nuestro siguiente ejemplo, o familia de ejemplos, recurrimos nuevamente al operador de desplazamiento.

Ejemplo 2.20. Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ una isometría. Si S es un desplazamiento unilateral, por el Corolario 2.3, podemos suponer $H = M \bigoplus M \bigoplus \cdots$ para un cierto M subespacio de H, y definido como

$$S(x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots) = \theta \oplus x_0 \oplus x_1 \cdots .$$

Sea $K = \cdots \bigoplus M_{-2} \bigoplus M_{-1} \bigoplus M_0 \bigoplus M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus \cdots$, donde $M_n = M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definamos U en K como

$$U(\cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus \widehat{x}_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \cdots \oplus x_{-3} \oplus x_{-2} \oplus \widehat{x}_{-1} \oplus x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots ,$$

donde el símbolo $\widehat{\ }$ es usado para denotar la localización de la coordenada cero.

Es claro que U es unitario. Si H se identifica con el subespacio de K formado por los vectores con coordenadas negativas nulas, entonces H es un subespacio de K, es U-invariante y $U|_H = S$. Hemos logrado extender unitariamente a S para actuar sobre un superespacio de H.

Por otra parte, si S no es un desplazamiento, entonces la descomposición de Von Newmann-Wold nos dice que $S = S_0 \bigoplus S_1$ en $H = H_0 \bigoplus H_1$, donde S_0 es un desplazamiento unilateral y S_1 es unitario. Entonces existe un espacio de Hilbert K_0 que contiene a H_0 y un unitario U_0 en K_0 tal que H_0 es U_0-invariante y $U_0|_{H_0} = S_0$. Sean $K = K_0 \bigoplus H_1$ y $U = S_0 \bigoplus S_1$. Es claro que U es unitario, H es un subespacio de K y este subespacio es U-invariante.

Hemos podido extender unitariamente cualquier isometría a todo un superespacio.

El estudio anterior motiva a la tan esperada:

Definición 2.21. Un operador S en un espacio de Hilbert H es *subnormal* si existe un espacio de Hilbert K que contiene a H y un operador normal N en K tal que N deja invariante a H y $S = N|_H$. O equivalentemente, si existe un espacio de Hilbert K que contiene a H y un operador normal N en K tal que

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}$$

para algún $T \in \mathbb{B}(H^\perp)$ y $X \in \mathbb{B}(H^\perp, H)$.

La notación introducida en la definición anterior será la que adoptaremos a partir de ahora. También diremos que $N \in \mathbb{B}(K)$ es una extensión normal de $S \in \mathbb{B}(H)$ desde H hasta K. Por tanto los operadores de Bergman y las isometrías son operadores subnormales.

Es importante resaltar el siguiente resultado, que relaciona los conceptos de subnormalidad e hyponormalidad.

Proposición 2.22. *Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal. Entonces S es hyponormal.*

Demostración.

Sean $N \in \mathbb{B}(K)$ una extensión normal de S a un cierto K y $P \in \mathbb{B}(K)$ la proyección de K sobre H. Por la Proposición 1.39, sabemos que $S^{*n}x = PN^{*n}x$ y $\|S^{*n}x\| \leq \|N^n x\|$ para cualquier $x \in H$. Entonces $\langle SS^*x, x\rangle = \|S^*x\|^2 \leq \|Nx\|^2 = \langle S^*Sx, x\rangle$.

Por definición, lo anterior significa que $S^*S - SS^* \geq 0$, que es lo que se quería demostrar.

□

Lema 2.23. *Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal. Si $N \in \mathbb{B}(K)$ es una extensión normal de S, y H reduce a N, entonces S es normal.*

Demostración. Supongamos que H reduce a N. Por la normalidad de N y la N-invarianza de H, se sigue que $N|_H$ es normal por el Corolario 2.12. Pero este último es S.

□

Es claro que todo operador normal es subnormal. Luego, diremos que $S \in \mathbb{B}(H)$ es *subnormal no trivial* si es subnormal pero no es normal. En éstos términos, el Lema 2.23 nos dice que si $S \in \mathbb{B}(H)$ es un operador subnormal no trivial, entonces H no reduce a ninguna extensión normal de S.

Proposición 2.24. *Todo operador normal es extensión de un operador subnormal.*

Demostración.

En efecto. Si $N \in \mathbb{B}(K)$ es normal, entonces tiene un subespacio no trivial N-invariante, digamos H. Sea $S = N|_H$. Entonces S es subnormal con extensión normal N.[1]

□

[1]Este es el famoso Problema de Von Newmann: ¿Toda transformación lineal T en un espacio de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial? Se sabe que los operadores normales responden afirmativamente a esta cuestión, así como los subnormales.

Los tipos de normalidad que hemos analizado son la autoadjunta y la unitaria. Investiguemos un poco las extensiones normales de este tipo.

Proposición 2.25 (S. Djordjevic-H. Garduño). *Si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal y tiene una extensión autoadjunta, entonces S es normal.*

Demostración. Sea N una extensión autoadjunta de S al superespacio K de H. Luego, es

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}.$$

Como la representación anterior de N es relativa a $K = H \bigoplus H^{\perp}$, entonces N^* tiene como representación relativa a $K = H \bigoplus H^{\perp}$ a

$$N^* = \begin{bmatrix} S^* & \Theta \\ X^* & T \end{bmatrix}.$$

Al ser N autoadjunto, tendremos $N = N^*$, de modo que $S = S^*$, lo cual significa que S es autoadjunto.

$\square$

Sabemos que si $S \in \mathbb{B}(H)$ es una isometría, entonces es subnormal y tiene una extensión unitaria. Vale ahora preguntarse si el reciproco es cierto, lo cual nos lleva la siguiente proposición:

Proposición 2.26 (S. Djordjevic-H. Garduño). *Si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal y tiene una extensión unitaria, entonces S es una isometría.*

Demostración. Sea N una extensión unitaria de S al superespacio K de H. Luego, es

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}.$$

Como la representación anterior de N es relativa a $K = H \bigoplus H^{\perp}$, entonces tiene como representación relativa a $K = H^{\perp} \bigoplus H$ a

$$N = \begin{bmatrix} T^* & \Theta \\ X & S \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la representación de N^* relativa a $K = H^\perp \bigoplus H$ viene dada por:

$$N^* = \begin{bmatrix} T & X^* \\ \Theta & S^* \end{bmatrix}.$$

Al ser N unitario, tendremos $N^*N = \mathrm{I}_K$, y haciendo tal cálculo en términos de las matrices de operadores anteriores obtenemos:

$$N^*N = \begin{bmatrix} T & X^* \\ \Theta & S^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* & \Theta \\ X & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TT^* + X^*X & X^*S \\ S^*X & S^*S \end{bmatrix}.$$

Pero esto no es otra cosa mas que la matriz de operadores

$$\mathrm{I}_K = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{H^\perp} & \Theta \\ \Theta & \mathrm{I}_H \end{bmatrix}.$$

Concluimos que $S^*S = \mathrm{I}_H$. Por tanto es fácil determinar que S es una isometría.

□

2.3.2. Medidas con valores en los operadores positivos: *POM*

Conviene en este momento hacer una analogía entre los operadores subnormales y los normales. Al ser los primeros "tan cercanos" a los últimos, es de esperar que hayan propiedades que ambas clases compartan. Entre ellas es deseable obtener representaciones por medio de integrales para los operadores subnormales. Para ello, supongamos que tenemos H subespacio de un espacio K. Tomemos E una medida espectral en (X, Σ_X, K). Al ser H subespacio de K, podemos hablar de la proyección P de K sobre H.

Definamos $Q(\Delta) := PE(\Delta)|_H$ para cada $\Delta \in \Sigma_X$. Es claro que $Q(\Delta) \in \mathbb{B}(H)$ con $\|Q(\Delta)\| \leq 1$. Observemos las siguientes propiedades:

1. Q "transforma" proyecciones en operadores positives. En efecto, sea $x \in H$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle Q(\Delta)x, x\rangle &= \langle PE(\Delta)|_H x, x\rangle \\ &= \langle E(\Delta)|_H x, Px\rangle \\ &= \langle E|_H x, x\rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Q preserva la imagen de X bajo E:

$$\begin{aligned} Q(X) &= PE(X)|_H \\ &= P\mathrm{I}|_H \text{ ya que } E \text{ es medida espectral subyacente en} X \\ &= P|_H \\ &= \mathrm{I}|_H \end{aligned}$$

3. $\langle Q(\cdot)x, x\rangle$ es una medida regular de Borel para toda $x \in H$, lo cual se verifica por definición. Esto es análogo al hecho de que $\langle E(\cdot)y, z\rangle$ sea una medida regular de Boral para todos $y, z \in K$.

Pues bien, dadas estas propiedades tan cercanas a los axiomas que definen a las medidas espectrales, conviene definir las funciones Q que las verifiquen. Esto lo hacemos en la siguiente:

Definición 2.27. Sea X un espacio localmente compacto y H espacio de Hilbert. Una *medida de valores en los operadores positivos* (POM por sus siglas en inglés) en (X, Σ_X, H) es una función Q la cual cumple:

- $Q(\Delta)$ es un operador positivo elemento de $\mathbb{B}(H)$ para toda $\Delta \in \Sigma_X$.
- $Q(X) = \mathrm{I}$.
- $\langle Q(\cdot)x, x\rangle$ es una medida regular de Borel para toda $x \in H$.

Es claro que toda medida espectral es una POM. Sin embargo, el inverso de esta afirmación es falso, no obstante hemos encontrado una forma para obtener una POM a partir de una medida espectral cualquiera. De hecho, es un resultado de Naimark que toda POM proviene de una medida espectral de esta manera, como puede verse en [Ber] y [Fil].

En base a la definición anterior, si Q es una POM en (X, Σ_X, H) y ϕ es una función Borel medible y acotada en X con valores en $\mathbb{C}$, entonces $\int \phi dQ$ denotará al único operador $S_\phi \in \mathbb{B}(H)$ definido por la forma cuadrática acotada

$$\langle S_\phi f, f\rangle = \int \phi(x) d\langle Q(x)f, f\rangle$$

para toda $f \in H$.

Como ya hemos tenido la oportunidad de conocer el operador de Bergman para un $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto y acotado, presentamos entonces un ejemplo de POM relacionado con este tipo de operadores.

Ejemplo 2.28. Tomemos $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Para cada $\Delta \in \Sigma_{\mathbb{D}}$, definamos $E(\Delta) : \mathcal{L}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{D})$ dada por

$$E(\Delta)f = \chi_\Delta \cdot f;$$

es decir, $E(\Delta)f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{D})$ tiene como regla de asignacion a

$$[E(\Delta)f](z) = \chi_\Delta(z)f(z).$$

E es una medida espectral para la terna $(\mathbb{D}, \Sigma_{\mathbb{D}}, \mathcal{L}^2(\mathbb{D}))$. Si en el Teorema 2.19 hacemos $G = \mathbb{D}$, entonces obtenemos que $H = \mathcal{L}^2_a(\mathbb{D})$ es un subespacio de Hilbert de $\mathcal{L}^2(\mathbb{D})$.

Llamemos pues P a la proyección de $\mathcal{L}^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{L}^2_a(\mathbb{D})$. Es decir, $Pf \in \mathcal{L}^2_a(\mathbb{D})$ para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{D})$. En [Hed] se muestra que Pf viene dada por:

$$[Pf](z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA,$$

donde A es la medida de área normalizada.

De esta forma, para $\Delta \in \Sigma_{\mathbb{C}}$ tenemos que $Q(\Delta) := PE(\Delta)|_H$ es una POM. Entre otras cosas, esto significa que $Q(\Delta)f = PE(\Delta)|_H f \in H$ para cada $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{D})$, y así, de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} [Q(\Delta)f](z) &= [PE(\Delta)|_H f](z) \\ &= [P(\chi_\Delta \cdot f)](z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\chi_\Delta(w)f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA \\ &= \int_{\mathbb{D}\cap\Delta} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA \end{aligned}$$

2.3.3. Caracterizaciones integrales y algebraicas de la subnormalidad

Pasamos ahora a presentar el primer teorema importante de esta sección, con el cual caracterizaremos a los operadores subnormales.

Teorema 2.29. *Si $S \in \mathbb{B}(H)$, entonces son equivalentes:*

(a) *S es subnormal.*

(b) *Para cualesquiera $x_0, x_1, \ldots, x_n \in H$ se cumple*

$$\sum_{j,k} \langle S^j x_k, S^k x_j \rangle \geq 0.$$

(c) *Para cualesquiera $x_0, x_1, \ldots, x_n \in H$ se cumple*

$$\sum_{j,k} \langle S^{j+k} x_k, S^{j+k} x_j \rangle \geq 0.$$

(d) *Si $B_0, B_1, \ldots, B_n \in C^*(S)$ entonces*

$$\sum_{j,k} B_j^* S^{*k} S^j B_k \geq 0.$$

(e) *Existe una POM Q con soporte compacto subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que*

$$S^{*n} S^m = \int \overline{z}^n z^m dQ(z) \text{ para todos los } m, n \geq 0.$$

(f) *Existe una POM Q en un intervalo $[0, a] \subseteq \mathbb{R}$ tal que*

$$S^{*n} S^n = \int t^{2n} dQ(t) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración.

(a)⇒(b): Sean $x_0, \ldots, x_n \in H$. Tomemos una extension normal $N \in \mathbb{B}(K)$ de S desde H hasta K. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}\langle S^j x_k, S^k x_j\rangle &= \sum_{j,k}\langle N^j x_k, N^k x_j\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle N^{*k} N^j x_k, x_j\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle N^j N^{*k} x_k, x_j\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle N^{*k} x_k, N^{*j} x_j\rangle \\ &= \left\|\sum_k N^{*k} x_k\right\|\end{aligned}$$

(b)⇒(c): Tomemos $x_0, \ldots, x_n \in H$ y sea $y_k = S^k x_k \in H$. Como estamos suponiendo (b), entonces

$$0 \le \sum_{j,k}\langle S^j y_k, S^k y_j\rangle = \sum_{j,k}\langle S^{j+k} x_k, S^{j+k} x_j\rangle.$$

(c)⇒(a): Ver [Con1].

(b)⇒(d): Sean $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{C}^*(S)$, $x \in H$ y $x_k = B_k x \in H$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}0 &\le \sum_{j,k}\langle S^j x_k, S^k x_j\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle S^j B_k x, S^k B_j x\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle (S^k B_j)^* S^j B_k x, x\rangle \\ &= \sum_{j,k}\langle B_j^* S^{*k} S^j B_k x, x\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j,k} B_j^* S^{*k} S^j B_k x, x\right\rangle\end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar.

(d)⇒(b): Por el lema de Zorn,

$$\text{cualquier operador } = \bigoplus \text{ operadores } *\text{-cíclcicos.}$$

Así que podemos suponer que S tiene un vector $*$-cíclico e_0; es decir, asumamos que $H = clo[\mathcal{C}^*(S)e_0]$. Si $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{C}^*(S)$ entonces

$$\sum_{j,k} \langle S^j x_k, S^k x_j \rangle \geq 0$$

se cumple para $x_k = B_k e_0$. Como la desigualdad anterior es cierta en un conjunto denso de H, entonces es cierta en todo H.

(a)⇒(e): Sea $N \in \mathbb{B}(K)$ una extensión normal de S desde H hasta K con representación espectral $N = \int z dE(z)$. Tomemos P la proyección de K sobre H. Definamos

$$Q(\Delta) := PE(\Delta)|_H$$

para todo $\Delta \in \Sigma_{\mathbb{C}}$.

Entonces Q es una POM con soporte compacto $\sigma(N)$. Si $h \in H$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle S^{*n} S^m h, h \rangle &= \langle N^{*n} N^m h, h \rangle \\
&= \int \overline{z}^n z^m d\langle E(z)h, h \rangle \\
&= \int \overline{z}^n z^m d\langle E(z)h, Ph \rangle \\
&= \int \overline{z}^n z^m d\langle PE(z)h, h \rangle \\
&= \int \overline{z}^n z^m d\langle Q(z)h, h \rangle \\
&= \left\langle \left(\int \overline{z}^n z^m dQ(z) \right) h, h \right\rangle,
\end{aligned}$$

de donde $S^{*n} S^m = \displaystyle\int \overline{z}^n z^m dQ(z)$.

(e)⇒(f): Sea Q la POM dada por hipótesis en la condición (e) y $K = \text{supp} Q$. Definamos Q_+ tal que para cada $\Delta \in \Sigma_{[0,\infty)}$ se tenga

$$Q_+(\Delta) := Q\{z \in \mathbb{C} : |z| \in \Delta\}.$$

De hecho $Q_+(\Delta) = Q(\tau^{-1}(\Delta))$ donde $\tau(z) = |z|$. Entonces Q_+ es una POM con soporte contenido en $[0,a]$ siendo $a = \text{máx}_{z\in K} |z|$. Para cualquier $h \in H$ se da:

$$\int t^{2n} d\langle Q_+(t)h, h\rangle = \int |z|^{2n} d\langle Q(z), h, h\rangle$$

donde hemos usado el teorema de integración para transformaciones que conservan la medida.

(f)⇒(c): Fijemos $f_0, f_1, \ldots, f_n \in H$ y definamos las medidas de valor scalar $\mu_{j,k}$ por

$$\mu_{j,k}(\Delta) = \langle Q(\Delta)f_j, f_k\rangle.$$

Sea μ una medida positiva en $[0,a]$ tal que $\mu_{j,k} \ll \mu$ para cualesquiera j,k. Tomemos $h_{j,k} = \dfrac{d\mu_{j,k}}{d\mu}$ (la derivada de Radon-Nikodym).

Para cada $F \in C[0,a]$, $\rho(F) = \int F dQ$ es un operador y $\rho \in \mathbb{B}(C[0,a], \mathbb{B}(H))$ es un mapeo lineal positivo. Notar que para cualquier $F \in C[0,a]$,

$$\langle \rho(F)f_j, f_k\rangle = \int F d\mu_{j,k} = \int F h_{j,k} d\mu.$$

Más aún si $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ y $F \geq 0$ entonces

$$\sum_{j,k} \left(\int F h_{j,k} d\mu \right) \lambda_j \overline{\lambda_k} = \left\| \sum_j \rho(F)^{\frac{1}{2}} \lambda_j f_j \right\|^2 \geq 0.$$

Se sigue que $(h_{j,k}(t))_{j,k}$ es una matriz positiva de $(n+1)\times(n+1)$ para $[\mu]$ casi toda t, lo cual implica

$$\sum_{j,k} h_{j,k}(t) t^{2j} t^{2k} \geq 0 \ [\mu] - c.s.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \sum_{j,k} h_{j,k}(t) t^{2(j+k)} d\mu(t) \\ &= \sum_{j,k} \int t^{2(j+k)} d\mu_{j,k}(t) \\ &= \sum_{j,k} \langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k\rangle, \end{aligned}$$

y se tiene lo pedido.

□

Por supuesto existen otras versiones del teorema anterior, una de las cuales puede ser consultada en [Con2].

Hagamos ahora algunos comentarios respecto de este resultado. Primero, notar que la condición (d) del Teorema 2.29 nos dice cómo definir a los elementos subnormales de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, lo cual es importante debido a que los elementos normales de tales álgebras están bien definidos aún sin usar el lenguaje de la teoría de operadores. Lo anterior se resume en la siguiente:

Definición 2.30. Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{C}^*$-álgebra, un elemento $s \in \mathcal{A}$ es *subnormal* si

$$\sum_{j,k} a_j^* s^{*k} s^j a_k \geq 0$$

para cualesquiera $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{C}^*(s)$ y $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Hemos obtenido así una caracterización puramente algebráica de los operadores subnormales.

También, la condición (e) del Teorema 2.29 puede ser interpretada como un análogo al teorema de representación espectral para operadores subnormales que dimos en el primer capítulo.

2.3.4. Extensiones normales mínimas y pureza de un operador

Si S es subnormal, existen muchas extensiones normales para S, dado que si N es una extensión normal para tal operador, entonces $N \oplus M$ es también una extensión normal para S, siendo M cualquier otro operador.

Continuando con esta exploración sobre las extensiones normales de un operador subnormal, definamos

$$\mathcal{L} := \bigvee \left\{ N^{*k} x : x \in H,\ k = 0, 1, 2, \cdots \right\},$$

donde $N \in \mathbb{B}(K)$ una extensión normal de $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal.

Entonces $K \supseteq \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ es un subespacio que reduce a N y contiene a H. Así, $N|_{\mathcal{L}}$ es también una extensión normal para S. Además, si W es un subespacio reductor para N que contiene a H, entonces $N^{*k}x \in W$ para cualquier $x \in H$ y $n \geq 0$. Esto es, $W \supseteq \mathcal{L}$.

Lo anterior motiva a la siguiente:

Definición 2.31. Si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal y $N \in \mathbb{B}(K)$ es una extensión normal de S a K, entonces N es llamada una *mínima extensión normal de S* si

$$K = \bigvee \left\{ N^{*k}x : x \in H,\ k = 0, 1, 2, \cdots \right\}.$$

Es claro entonces por la discusión precedente a la definición anterior que para cualquier operador subnormal existe al menos una mínima extensión normal relacionada con él.

Un primer uso de las extensiones mínimas viene directamente relacionado con el ya comentado hecho de que si S es subnormal y N es una extensión normal para dicho operador, entonces $N \oplus M$ es también una extensión normal para S, siendo M cualquier otro operador, en el sentido de que para estudiar a las extensiones normales de S podemos "deshacernos" de M.

Esto queda plasmado en la siguiente:

Proposición 2.32. *Si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal y $N \in \mathbb{B}(K)$ es una extensión normal de S en K, entonces N es una mínima extensión normal de S si y sólo si K no tiene subespacios propios que contengan a H y reduzcan a N.*

En otras palabras, si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal y $N \in \mathbb{B}(K)$ es una mínima extensión normal de S al superespacio K de H, entonces en cualquier subespacio propio de K $N-$invariante que contenga a H se pierde la normalidad. Esto es, si quitamos vectores linealmente independientes a K entonces N deja de ser normal.

El resultado que estamos por enunciar nos permite adoptar una notación para extensiones mínimas normales y hablar de unicidad.

Proposición 2.33. *Si S es un operador subnormal, entonces cualesquiera dos mínimas extensiones normales son unitariamente equivalentes.*

Luego, usaremos la notación $N = mne(S)$ para indicar que si S es subnormal, entonces N es *su* mínima extensión normal (*minimal normal extension*).Más aún, un resultado útil para verificar si un operador normal es mínima extensión normal de un subnormal cuando ya se conoce una de éste último y sencillo de demostrar es el siguiente:

Proposición 2.34. *Sean $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal, $N = mne(S)$, con $N \in \mathbb{K}$, y $M \in \mathbb{B}(L)$ una extensión normal de S a todo L tal que N y M son unitariamente equivalentes. Entonces M también es una mínima extensión normal.*

Por otra parte, un resultado clásico sobre normalidad nos dice que si $A \in \mathbb{B}(H)$ para algún H, entonces existe un mínimo subespacio H_0 de H en el cual $A|_{H_0}$ es normal, donde la minimalidad es en el sentido de que $A_1 := A|_{H_0^\perp}$ no tiene subespacios reductores en los cuales sea normal[2].

Eso nos lleva a recordar la

Definición 2.35. Un operador A es *puro* si no tiene subespacios reductores propios en los que sea normal.

Es decir, $A \in \mathbb{B}(H)$ es puro si $H_0 = \{\theta\}$ siendo H_0 como en el párrafo precedente.

Ahora bien, como lo que nos interesa es obtener información acerca de la mínima extensión normal de un operador subnormal, finalizamos esta sección presentando la siguiente:

Proposición 2.36. *Sea S es subnormal no trivial, con*

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}.$$

Son equivalentes:

[2]Ver [Con3], pp127.

(a) *S es puro.*

(b) *$N^* = mne(T)$.*

(c) *El menor subespacio de H que reduce a S y contiene a $X(H^\perp)$ es H.*

(d) *No hay ninguna proyección no nula definida en H que conmute con S y cuyo núcleo contenga a la imagen de X.*

Demostración.

(a)⇒(b) Sea $L = \bigvee \left\{ N^n y \;:\; y \in H^\perp \,, n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$. Sabemos que $N^* = mne(T)$ si y solo si $K = L$ (Proposición 2.32). Como $H^\perp \subseteq L$, ortogonalizando ambos lados de esta inclusión, obtenemos $L^\perp \subseteq H$. Por tanto $L^\perp = H \cap L^\perp$, y entonces este espacio reduce a N ya que L lo reduce, y $N|_{L^\perp} = N|_{H \cap L^\perp} = S|_{H \cap L^\perp}$ pues S es la restricción de N a H, y en consecuencia la restricción de N a cualquier subespacio de H es S restringido a dicho subespacio. Al ser N normal, su restricción a cualquier subespacio reductor es normal. En particular $N|_{L^\perp}$ es normal. Si S es puro, entonces al ser $L^\perp$ un subespacio de H tendremos que $L^\perp = \{\theta\}$, y por tanto es $L = K$, que es lo que se quería demostrar.

(b)⇒(c) Sea V el menor subespacio de H que reduce a S y contiene a $X\left(H^\perp\right)$. Queremos ver que $V = H$. Es claro que H reduce a S y $X(H^\perp) \subseteq H$, por lo que $V \subseteq H$. Supongamos que $V \neq H$.

Si de alguna manera tenemos $V = \{\theta\}$, entonces $X\left(H^\perp\right) = \{\theta\}$, de donde $X = \Theta$. Por tanto en la representación como matriz de operadores de N tenemos

$$N = \begin{bmatrix} S & \Theta \\ \Theta & T^* \end{bmatrix},$$

de modo que H reduce a N. Entonces S es normal, lo cual contradice la subnormalidad no trivial del mismo operador.

Por tanto no puede ser $\{\theta\} = V$. Luego, como hemos supuesto $V \neq H$, concluimos que V es un subespacio propio de H. Por otra parte, al ser $V \subset H$, tomando ortogonales respecto a K a ambos lados de tal contención, se da $H^\perp \subseteq V^\perp$. A partir de ahora y hasta el final de esta parte de la prueba, $V^\perp$ representará el ortogonal de V en el espacio K.

Si $V^\perp = K$, entonces $V = K^\perp = \{\theta\}$, por lo que V es un subespacio trivial de H, lo cual contradice la definición de V. Además si $V^\perp = \{\theta\}$, entonces $V = K$, y al ser $V \subset H$, tendremos $H = K$, por lo que S es normal, contradiciendo la subnormalidad no trivial nuevamente. Al haber pinchado en hueso en ambas situaciones, hemos demostrado que $V^\perp$ es un subespacio propio de K y contiene a $H^\perp$.

Afirmamos que $V^\perp$ reduce a N^*. En efecto. Como V reduce a S, es S y S^* invariante. Sea $x \in V^\perp$. Si $z \in V$ es arbitrario, entonces $\langle N^*x, z\rangle = \langle x, Nz\rangle$, y al ser V un espacio S-invariante y $N|_V = S|_V$, se sigue que $\langle x, Nz\rangle = \langle x, Sz\rangle = 0$, ya que $x \in V^\perp$ y $Sz \in V$. Esto significa que $N^*x \in V^\perp$; es decir, que $V^\perp$ es N^*-invariante. Análogamente, utilizando la S^*-invarianza de V, concluimos que $V^\perp$ es N-invariante. Estos hechos nos indican que $V^\perp$ reduce a N^*. En suma, $V^\perp$ es un subespacio propio de K que reduce a N^* y contiene a $H^\perp$, lo cual contradice la minimalidad de la extensión N^*. Por tanto es $V = H$.

(c)⇒(d) Supongamos que el menor subespacio de H que reduce a S y contiene a $X\left(H^\perp\right)$ es H. Queremos ver que no existen proyecciones no nulas que conmuten con S y cuyo núcleo contenga a la imagen de X.

Para ello, supongamos lo contrario. Es decir, pensemos que existe una proyección $P \in \mathbb{B}(H)$ tal que $P \neq \Theta$, $PS = SP$ y $X(H^\perp) \subseteq \mathcal{N}(P)$. Sea $M = \mathcal{R}(P)$. Como $X(H^\perp) \subseteq \mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{N}(P) = M^\perp$, entonces $X(H^\perp) \subseteq M^\perp$.

Observemos a $M^\perp$, donde el ortogonal se toma respecto a H. Si $M^\perp = H$, entonces $M = \{\theta\}$, lo cual significa que $P = \Theta$, contradiciendo la definición de P. Por tanto $M^\perp$ es un subespacio de H que no es H.

Por otra parte, como $PS = SP$, un sencillo cálculo muestra que $(\mathrm{I} - P)S = S(\mathrm{I} - P)$. Pero $\mathrm{I} - P$ es la proyección de H sobre $M^\perp$. Esto nos dice que la proyección de H sobre $M^\perp$ conmuta con S, lo cual equivale a decir que $M^\perp$ reduce a S.

En resumen, $M^\perp$ es un subespacio menor que H que reduce a S y contiene a $X\left(H^\perp\right)$, lo cual contradice la hipótesis.

(d)⇒(a) Supongamos que S no es puro y veamos que existe una proyección no nula que conmuta con S y cuyo núcleo contiene a la imagen de X.

Un simple cálculo muestra que $Xy = PNy$ para todo $y \in H^{\perp}$, donde P es la proyección de K sobre H. Por otra parte, como S no es puro, existe un subespacio propio M de H que reduce a S y para el cual $S|_M$ es normal. Sea Q la proyección de H sobre M. Como M es no trivial, entonces $Q \neq \Theta$. Pero también, al ser M reductor de S, tendremos $QS = SQ$.

Basta ahora que demostremos que $X(H^{\perp}) \subseteq \mathcal{N}(Q)$. Como $\mathcal{N}(Q) = M^{\perp}$, donde el ortogonal se toma respecto a H, entonces queremos ver que $\langle z, x\rangle_H = 0$ para todo $x \in M$ y $z \in X(H^{\perp})$. Para ello, tomemos $z \in X(H^{\perp})$. Entonces existe un $y \in H^{\perp}$ tal que $z = Xy$.

Luego, si $x \in M$ es arbitrario, $\langle z, x\rangle_H = \langle Xy, x\rangle_H = \langle PNy, x\rangle_H = \langle Ny, Px\rangle_K = \langle Ny, x\rangle_K = \langle y, N^*x\rangle_K$ donde hemos hecho uso de que $x \in M \subseteq H$ y P es la proyección de K sobre H.

Finalmente, observemos que como M reduce a S, entonces es S-invariante. Por tanto M es N-invariante, ya que $S = N|_H$, y además $N|_M$ es normal, pues $N|_M = S|_M$. Así, por el Corolario 2.12, M reduce a N. Esto implica que M es N^*-invariante. De esta manera $N^*x \in M$, de donde $N^*x \in H$. Concluimos que $\langle y, N^*x\rangle_K = 0$, que es lo que queríamos probar.

□

2.3.5. Factores que miden la subnormalidad de un operador

En esta sección nos hemos propuesto medir la subnormalidad de un operador. Para ello hemos tomado en consideración dos vertientes: Dado $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal, por una parte, al ser acotado, sabemos que existe un subespacio de H, digamos M, el cual reduce a S, y tal que $S|_M$ es normal y $S|_{M^{\perp}}$ no tiene subespacios reductores en los que sea normal. Es decir, M es el máximo subespacio S-invariante de H en el que S es normal. Por otra parte, la subnormalidad asegura la existencia de un superespacio K de H en el cual podemos extender a S de tal manera que el operador extensión es normal, pero mínimamente, en el sentido de que si V es un espacio reductor de K, entonces H no está contenido propiamente en V. Es decir, si V es un subespacio de K que contiene propiamente a H, entonces el operador extensión de S restringido a V no es normal.

Luego, si $S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal con $N \in \mathbb{B}(K)$ siendo su mínima extensión normal y M el mayor subespacio de H en que S es normal, ¿Cuántos vectores linealmente independientes hemos sumado a H para obtener K? ¿Cuántos vectores linealmente independientes hemos quitado a H para obtener M? Las respuestas a estas interrogantes son los factores que hemos considerado para el nombre de este apartado.

Recordemos que si X e Y son espacios normados, y $T \in \mathbb{B}(X, Y)$, entonces T se dice *compacto* si para cada $M \subseteq X$ acotado tenemos $T(M)$ relativamente compacto.

Proposición 2.37. *Si $T \in \mathbb{B}(H)$ es hyponormal y compacto, entonces es normal.*

La demostración de este resultado puede consultarse en [Kub], pp. 504 y en [Con3], pp 142.

Investiguemos sobre la primera cuestión. Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal y $mne(S) = N \in \mathbb{B}(K)$. Entonces

$$K = \bigvee \left\{ N^{*k}x : x \in H,\ k = 0, 1, 2, \cdots \right\}.$$

Por tanto, si H es separable, también K, de modo que H y K son isomorfos como espacios de Hilbert. Esto nos dice que para obtener K a partir de H debemos sumar un conjunto numerable de vectores linealmente independientes a H. Por tanto sabemos ahora que H y K no son tan diferentes.

Cabe entonces ver si la suma de este conjunto de vectores linealmente independientes es finita. Es decir, si $H^{\perp}$ es finito dimensional. Para ello, veamos la siguiente:

Proposición 2.38 (S. Djordjevic-H. Garduño)**.** *Sean $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal y $mne(S) = N \in \mathbb{B}(K)$. Si $H^{\perp}$ es finito dimensional, entonces S es normal.*

Demostración.

Sea

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}$$

la representación matricial de operadores de la mínima extensión normal de S relativa a $K = H \bigoplus H^\perp$. Entonces

$$N^* = \begin{bmatrix} T & X^* \\ \Theta & S^* \end{bmatrix}$$

es la representación de N^* relativa a $K = H^\perp \bigoplus H$. Como T es subnormal, es de paso hyponormal, y al ser $\mathcal{R}(T)$ subespacio de $H^\perp$, y éste es finito dimensional, concluimos que T es compacto. Luego, T es normal por la proposición anterior.

Pero también sabemos que $H^\perp$ es N^*-invariante, ya que N^* es una extensión normal de T. Como $T = N^*|_{H^\perp}$ es normal, entonces $H^\perp$ reduce a N^*. Luego, $H^\perp$ es N y N^*-invariante.

La N-invarianza de $H^\perp$ permite escribir a N en notación de matriz de operadores respectiva a $K = H \bigoplus H^\perp$ como

$$N = \begin{bmatrix} S & \Theta \\ \Theta & T^* \end{bmatrix},$$

por lo que es

$$N^* = \begin{bmatrix} S^* & \Theta \\ \Theta & T \end{bmatrix}$$

relativo a $K = H \bigoplus H^\perp$.

Lo anterior nos dice que H es N^*-invariante, y por la subnormalidad de S, también es N-invariante. Esto equivale a que H reduzca a N, por lo que $N|_H$ es normal. Pero este operador es precisamente S.

$\square$

Notemos que en la prueba anterior únicamente hicimos uso de la finito dimensionalidad de $H^\perp$ para mostrar que T es compacto. Por tanto, podemos simplemente debilitar las hipótesis y considerar:

Corolario 2.39 (S. Djordjevic-H. Garduño). *Sean* $S \in \mathbb{B}(H)$ *subnormal y*

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}$$

una extensión normal de S. *Si* T *es compacto, o equivalentemente, si* T^* *lo es, entonces* S *es normal.*

2.4. Operadores quasinormales

Otra clase de operadores no necesariamente normales es la de los quasinormales. Estos se definen de la siguiente manera:

Definición 2.40. Un operador $S \in \mathbb{B}(H)$ se dice *quasinormal* si S y S^*S conmutan.

Es claro cómo la quasinormalidad generaliza a la normalidad de un operador. Formalizando lo anterior obtenemos el siguiente

Proposición 2.41. *Sea* $N \in \mathbb{B}(H)$. *Si* N *es normal, entonces es quasinormal.*

Demostración.
Al ser N normal, tenemos $N^*N = NN^*$. Basta ahora con multiplicar la igualdad anterior por N a izquierda y derecha.

□

En esta sección presentamos algunos resultados clásicos sobre operadores quasinormales y una caracterización más de operadores subnormales. Estos son:

Proposición 2.42. *Sea* $S \in \mathbb{B}(H)$. *Si* $S = UA$ *es la descomposición polar de* S, *entonces*

$$S \text{ es quasinormal} \iff UA = AU.$$

Demostración.
Notemos que al ser $S = UA$, por definición de descomposición polar se cumple que $A = (S^*S)^{1/2}$ y así $A^2 = S^*S$. Luego:

($\Leftarrow$) Como $S = UA = AU$ obtenemos:

$$\begin{aligned} SA^2 &= UAA^2 \\ &= UA^3 \\ &= A^2UA \\ &= A^2S \end{aligned}$$

de donde se deduce la quasinormalidad de S.

($\Rightarrow$) Si S es quasinormal entonces $SA^2 = A^2S$ por lo dicho al principio. Por tanto $SA = AS$ debido al Teorema 1.42, así que $(UA - AU)A = (S - AU)A = SA - AUA = SA - AS = \Theta$. Esto es: $UA - AU = \Theta|_{\mathcal{R}(A)}$. Pero si $x \in (\mathcal{R}(A))^{\perp} = \mathcal{N}(A)$, por definición de U, $Ux = \theta$. Así, $UA - AU = \Theta$.

$\square$

Proposición 2.43. *Todo operador quasinormal es subnormal.*

Demostración.
Supongamos que $S \in \mathbb{B}(H)$ es quasinormal. Veamos que podemos pretender que $\mathcal{N}(S) = \{\theta\}$. En efecto, en caso contrario escribamos $\mathcal{L} = \mathcal{N}(S)$. Por la proposición anterior, $S^* = AU^* = U^*A$ y por tanto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}^*$. Sea $S_1 := S|_{\mathcal{L}^{\perp}}$. Así que $S = S_1 \oplus \Theta|$ en $\mathcal{L}^{\perp} \oplus \mathcal{L} = H$. Ahora, $S^*S = S_1^*S_1 \oplus \Theta$. Por lo tanto $SS^*S = S_1S_1^*S_1 \oplus \Theta$ y $S^*SS = S_1^*S_1S_1 \oplus \Theta$, y al ser $SS^*S = S^*SS$ por ser S quasinormal, tenemos que $S_1S_1^*S_1 \oplus \Theta = S_1^*S_1S_1 \oplus \Theta$; esto es, S_1 es quasinormal.

Pero también de la igualdad $S = S_1 \oplus \Theta$ en $\mathcal{L}^{\perp} \oplus \mathcal{L} = H$ se concluye que si S_1 es subnormal, entonces S también lo es.

Por otra parte, si $x \in \mathcal{L}^{\perp}$ y $x \in \mathcal{N}(S_1)$ entonces $\theta = S_1x = Sx$, por lo que $x \in \mathcal{N}(S)$. De esta manera $x \in \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L} = \{\theta\}$, de donde $\mathcal{N}(S_1) = \{\theta\}$.

Hemos probado que si la proposición es cierta cuando $\mathcal{N}(S) = \{\theta\}$, entonces debe ser cierta en caso de que $\mathcal{N}(S) \neq \{\theta\}$. Luego, sea $S \in \mathbb{B}(H)$ quasinormal con $\mathcal{N}(S) = \{\theta\}$. Si $S = UA$ es su descomposición polar entonces U es una isometría. Tomemos $E = UU^*$. Es decir, E es la proyección sobre $\mathcal{R}(U)$. Así que $(\mathrm{I} - E)U = U^*(\mathrm{I} - E) = \Theta$.

Definamos $V, B \in \mathbb{B}(H \oplus H)$ por

$$V = \begin{bmatrix} U & \mathrm{I} - E \\ \Theta & U^* \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} A & \Theta \\ \Theta & A \end{bmatrix}$$

y sea $N = VB$.

Como $UA = AU$ y $U^*A = AU^*$ se sigue que N es normal.

Pero

$$N = \begin{bmatrix} S & (\mathrm{I} - E)A \\ \Theta & U^*A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & (\mathrm{I} - E)A \\ \Theta & S^* \end{bmatrix}$$

que es la notación matricial introducida en la definición de operador subnormal. Esto concluye la prueba.

$\square$

Nótese que para el desplazamiento unilateral de multiplicidad 1, la descomposición polar correspondiente es $S_+\mathrm{I}$. Es decir, $S_+ = S_+\mathrm{I}$ ya que $S_+^*S_+ = \mathrm{I}$. De paso obtenemos que S_+ es quasinormal por la Proposición 2.42. Además sabíamos que es subnormal. Por otra parte, $\mathcal{N}(S_+) = \{\theta\}$. Luego, usando la construcción para demostrar la Proposición 2.43 se obtiene una extensión normal N para S_+. En realidad, como hemos dicho, tomando $S = S_+ = U$, $A = \mathrm{I}$ y $E = S_+S_+^*$ en la demostración de la proposición 2.43 tenemos que al ser $S_+^*S_+ = \mathrm{I}$, se cumple $E^2 = E$, $(\mathrm{I} - E)^2 = \mathrm{I} - E$, $ES_+ = S_+$, $S_+^*E = S_+^*$ y

$$N = \begin{bmatrix} S_+ & \mathrm{I} - E \\ \Theta & S_+^* \end{bmatrix} \text{ y } N^* = \begin{bmatrix} S_+^* & \Theta \\ \mathrm{I} - E & S_+ \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$N^*N = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \Theta \\ \Theta & \mathrm{I} \end{bmatrix} = N^*N.$$

Pasamos ahora a exponer una caracterización de los operadores subnormales, pero en términos de operadores quasinormales.

Teorema 2.44. *Sea* $S \in \mathbb{B}(H)$. *Entonces:*

$$S \text{ es subnormal } \Longleftrightarrow S \text{ tiene una extensión quasinormal.}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si S es subnormal, existe $N \in \mathbb{B}(K)$, para algún K, que es una extensión normal de S. Pero al ser N normal, por la Proposición 2.41, N es quasinormal y extiende a S.

($\Leftarrow$) Supongamos que S tiene una extensión quasinormal. Es decir, existen H_1 de Hilbert y $S_1 \in \mathbb{B}(H_1)$ quasinormal tales que H es un subespacio S_1-invariante de H_1 y $S = S_1|_H$. Al ser S_1 quasinormal, por la proposición anterior, es subnormal. Luego, existen K de Hilbert y $N \in \mathbb{B}(K)$ quasinormal tales que H_1 es un subespacio N-invariante de K y $S_1 = N|_{H_1}$. Es claro que N es una extensión normal de S.

$\square$

Como aplicación de los resultados anteriores podemos dar el siguiente:

Ejemplo 2.45. Sea A un operador positivo en un espacio de Hilbert L. Definamos S en $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L_n$, donde $L_n = L$ para toda n, dado como

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ A & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Donde por comodidad hemos escrito $0 = \Theta$. Por supuesto, con un abuso de notación, estamos suponiendo al espacio $H = \{x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty\}$ con el producto interno

$$\langle x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots , y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y_k \rangle$$

Que S sea acotado es sencillo de probar. Por otro lado, si $\oplus x_k \in H$ entonces:

$$S(\oplus x_k) = S(x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus \cdots .$$

También, obsérvese que S^* viene dada como:

$$S^*(\oplus x_k) = S^*(x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = Ax_2 \oplus Ax_3 \oplus Ax_4 \oplus \cdots .$$

Luego,

$$\begin{aligned} S^*S(\oplus x_k) &= S^*(\theta \oplus Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus \cdots) \\ &= A^2x_1 \oplus A^2x_2 \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} SS^*S(\oplus x_k) &= S(A^2x_1 \oplus A^2x_2 \oplus \cdots) \\ &= \theta \oplus A^3x_1 \oplus A^3x_2 \oplus \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S^*SS(\oplus x_k) &= S^*S(\theta \oplus Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus \cdots) \\ &= \theta \oplus A^3x_1 \oplus A^3x_2 \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Esto es, S es, por definición, quasinormal.

Si seguimos con la idea de la demostración del Teorema 1.46, debemos tomar inicialmente $U_1 : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(S)$ dada por $U_1(Tx) = Ax_1 \oplus Ax_2 \oplus \cdots$.

Para hallar U_2: Sea $y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \in \mathrm{clo}(\mathcal{R}(T))$. Entonces existe una sucesión de elementos en H, digamos $\{x_1^{(n)} \oplus x_2^{(n)} \oplus x_3^{(n)} \oplus \cdots\}_n$, tal que

$$y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \lim_{n\to\infty} T(x_1^{(n)} \oplus x_2^{(n)} \oplus x_3^{(n)} \oplus \cdots).$$

De esta manera, por continuidad,

$$\begin{aligned} U_2(y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus \cdots) &:= \lim_{n\to\infty} U_1(T(x_1^{(n)} \oplus x_2^{(n)} \oplus x_3^{(n)} \oplus \cdots)) \\ &= \lim_{n\to\infty} S(x_1^{(n)} \oplus x_2^{(n)} \oplus x_3^{(n)} \oplus \cdots) \\ &= \lim_{n\to\infty} \theta \oplus Ax_1^{(n)} \oplus Ax_2^{(n)} \oplus \cdots \\ &= \theta \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus \cdots \end{aligned}$$

.

Ahora debemos extender U_2 a todo H tomando la extensión U tal que $U\{\oplus x_n\} = \theta \oplus \theta \oplus \cdots$ para toda $\{\oplus x_n\}$ en $[\mathcal{R}(T)]^\perp$.

Luego, se concluye que $W : H = \mathrm{clo}(\mathcal{R}(T)) \bigoplus (\mathcal{R}(T))^\perp \to H$ dada por

$$W = \begin{pmatrix} S_+ & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}$$

es el factor isometría parcial de la descomposición polar de S.

De hecho, es posible demostrar que casi todos los operadores quasinormales son de la forma del operador S dado en el ejemplo anterior, para lo cual necesitaremos los conceptos de opeador puro y mínimas extensiones normales, por lo que posponemos este resultado.

2.5. Relaciones entre las clases de operadores no normales

En esta sección estudiaremos cómo se relacionan las clases de operadores no normales estudiadas.

Hemos demostrado la siguiente cadena de contenciones:

$$\text{Normales} \subset \text{Quasinormales} \subset \text{Subnormales} \subset \text{Hyponormales}\ ,$$

y de hecho, jugando con el operador de desplazamiento unilateral de multiplicidad 1, es posible demostrar que las contenciones anteriores son propias.

Teorema 2.46. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$ un operador quasinormal. Si T es invertible, entonces es normal.*

Teorema 2.47. *Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal. Si $N = mne(S)$, entonces S es quasinormal si y sólo si H es invariante para N^*N.*

Antes de pasar a su demostración, un resultado auxiliar:

Lema 2.48. *Sean $S, T \in \mathbb{B}(K)$, y H un subespacio de K. Si H es ST-invariante, entonces $S(\mathcal{R}(T|_H)) \subseteq H$.*

Demostración.
Llamemos $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}(T|_H)$. Por hipótesis, tenemos que $ST(H) \subseteq H$. Sea $y \in \mathcal{R}$. Entonces existe $x \in H$ tal que $y = Tx$. Luego, $Sy = STx \in H$, que es lo que se quería probar.

$\square$

Ahora sí. Demostremos el Teorema 2.47
Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que H es invariante para N^*N. Como $N^*N \in \mathbb{B}(K)$, por el Lema 2.48, tenemos que $N^*(\mathcal{R}(N|_H)) \subseteq H$. Pero $\mathcal{R}(N|_H) = \mathcal{R}(S)$. Sea $\mathcal{R}$ este último conjunto. Hemos demostrado que $N^*(\mathcal{R}) \subseteq H$.

Como $S^* : H \longrightarrow H$, entonces tiene sentido hablar de $S^*|_{\mathcal{R}}$. Por (b) del mismo lema, $S^* = PN^*|_H$. Por lo tanto, si $y \in \mathcal{R}$, entonces $S^*y = PN^*|_H y = N^*|_H y$. Luego, si $x \in H$, entonces $S^*Sx = N^*Sx = N^*Nx$. Es decir, $N^*N|_H = S^*S$. De esta manera, es claro que $S^*S \in \mathbb{B}(H)$ es subnormal.

Por otra parte, al ser H N^*N-invariante, tenemos que $NN^*Nx = SN^*Nx$ para toda $x \in H$. Como N es normal, entonces es quasinormal, y por lo tanto $NN^*Nx = N^*NNx = N^*NSx$ para toda $x \in H$. Pero $Sx \in H$, de modo que $N^*NSx = S^*SSx$ para toda $x \in H$.

Luego, $SS^*Sx = S^*SSx$ para cualquier $x \in H$.

($\Leftarrow$) Supongamos que S es quasinormal. Por el Teorema 1.21, si $x \in H$, entonces $\|N^*Nx\|^2 = \|N^2x\|^2$. Pero como $S = N|_H$, y $\mathcal{R}(S) \subseteq H$, obtenemos $S^2 = N^2|_H$, de donde:

$$\begin{aligned}
\|N^2x\|^2 &= \|S^2x\|^2 \\
&= \langle S^2x, S^2x\rangle \\
&= \langle Sx, S^*SSx\rangle \\
&= \langle Sx, SS^*Sx\rangle \\
&= \langle S^*Sx, S^*Sx\rangle \\
&= \|S^*Sx\|^2
\end{aligned}$$

Esto es, $\|S^*Sx\|^2 = \|N^*Nx\|^2$ para toda $x \in H$.

Por otra parte, sean $X \in \mathbb{H}^\perp, \mathbb{K}$ y $T \in \mathbb{B}(H^\perp)$ tales que

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$N^*N = \begin{bmatrix} S^*S & S^*X \\ X^*S & X^*X + TT^* \end{bmatrix}.$$

Como $K = H \bigoplus H^{\perp}$, si $x \in H$, se sigue que $x = x \oplus \theta$, de donde

$$N^*N(x \oplus \theta) = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^S x \\ X^*Sx \end{pmatrix}.$$

Luego, $\|N^*N(x \oplus \theta)\|^2 = \|N^*Nx\|^2 = \|S^*Sx\|^2 + \|X^*Sx\|^2$, por lo cual $X^*Sx = \theta$ para cualquier $x \in H$. Como $X^*S \in \mathbb{B}(H, K)$, se concluye que $X^*S = \Theta$. Así,

$$N^*N = \begin{bmatrix} S^*S & S^*X \\ \Theta & X^*X + TT^* \end{bmatrix},$$

lo cual significa que H es N^*N-invariante.

$\square$

Podemos observar de (a), con la notación del resultado anterior, que si S es subnormal y H es N^*N-invariante, entonces S^*S es subnormal, con extensión normal N^*N. Por (b) del mismo resultado, vemos que si S es quasinormal, entonces H es N^*N-invariante, y como N^*N es autoadjunto, entonces H reduce a N^*N. Por lo tanto, por el Corolario 2.48, $N^*N|_H$ es normal. Pero $N^*N|_H^* = N^*N|_H$, así que $N^*N|_H$ es autoadjunto.

Para el siguiente criterio, el cual nos indica cómo pasar de un operador hyponormal a un operador subnormal, utilizaremos el próximo teorema, del cual omitimos su demostración para evitar desviarnos de los fines de esta sección.

Teorema 2.49 (de Morrel)**.** *Sea $S \in \mathbb{B}(H)$ tal que:*

(a) *T es hyponormal.*

(b) *$[T^*, T]$ tiene rango 1.*

(c) *$\mathcal{N}([T^*, T])$ es T invariante.*

Entonces $T - \beta\mathrm{I}$ es quasinormal para alguna $\beta \in \mathbb{C}$.

Demostración.
Recordemos que $T^*T - TT^*$ es autoadjunto. Es decir $[T^*, T]$ es autoadjunto. Por el Corolario 1.37, sabemos que $H = \mathcal{N}[T^*, T] \bigoplus \mathrm{clo}\,[\mathcal{R}[T^*, T]]$.

Por otra parte $\dim(\mathcal{R}[T^*, T]) = 1$, de modo que existe un $y \in H$ con $y \neq \theta$ tal que $\mathcal{R}[T^*, T] = \mathrm{span}\{y\}$. Además $\mathrm{clo}\,[\mathcal{R}[T^*, T]] = [\mathcal{N}[T^*, T]]^{\perp}$ por (b) de la Proposición 1.14, y al ser $\mathcal{R}[T^*, T]$ de dimensión finita, se da la igualdad $\mathcal{R}[T^*, T] = \mathrm{clo}\,[\mathcal{R}[T^*, T]]$. En suma tenemos $\mathrm{span}\{y\} = \mathcal{R}[T^*, T] = [\mathcal{N}[T^*, T]]^{\perp}$.

Usando $\mathcal{R}[T^*, T] = \mathrm{span}\{y\}$, concluimos la existencia de un $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $[T^*, T]y = \mu y$. Análogamente, es $[T^*, T]Ty = \alpha y$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $\mu = 0$, entonces $y \in \mathcal{N}[T^*, T]$, por lo cual $y \in \mathcal{N}[T^*, T] \bigcap [\mathcal{N}[T^*, T]]^{\perp}$ y por tanto $y = \theta$. Luego $\mu \neq 0$. Tomemos $\beta = \dfrac{\alpha}{\mu}$.

Sea $x \in H$. Entonces $x = u + \lambda y$ para algunos $u \in \mathcal{N}[T^*, T]$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. De ahí:

$$
\begin{aligned}
[T^*, T](T - \beta\mathrm{I})x &= [T^*, T](T - \beta\mathrm{I})(u + \lambda y) \\
&= ([T^*, T](T - \beta\mathrm{I})u) + \lambda\,([T^*, T](T - \beta\mathrm{I})y) \\
&= [T^*, T](Tu - \beta u) + \lambda[T^*, T](Ty - \beta y) \\
&= [T^*, T]Tu - \beta[T^*, T]u + \lambda[T^*, T]Ty - \lambda\beta[T^*, T]y \\
&= [T^*, T]Tu - \theta + \lambda\alpha y - \lambda\beta\mu y \\
&= [T^*, T]Tu + \lambda\,(\alpha - \beta\mu)\,y \\
&= [T^*, T]Tu + \lambda\left(\alpha - \frac{\alpha}{\mu}\mu\right)y \\
&= [T^*, T]Tu + \lambda(\alpha - \alpha)y \\
&= [T^*, T]Tu + \theta \\
&= [T^*, T]Tu.
\end{aligned}
$$

Como $u \in \mathcal{N}[T^*, T]$, y este espacio es T-invariante, entonces $Tu \in \mathcal{N}[T^*, T]$. Esto significa que $[T^*, T]Tu = \theta$, y sustituyendo en la cadena de igualdades anterior, se tiene $[T^*, T](T - \beta\mathrm{I})x = \theta$ para todo $x \in H$. Esto es $[T^*, T](T - \beta\mathrm{I}) = \Theta$.
Finalmente, un simple cálculo muestra que lo anterior es equivalente a $(T -$

$\beta \mathrm{I})(T-\beta \mathrm{I})^*(T-\beta \mathrm{I}) = (T-\beta \mathrm{I})^*(T-\beta \mathrm{I})(T-\beta \mathrm{I})$, lo cual implica, por definición, la quasinormalidad de $T-\beta\mathbb{I}$.

□

Corolario 2.50. *Si T satisface las condiciones del Teorema de Morrel (Teorema 2.49), entonces T es subnormal.*

Tenemos pues condiciones para que un operador hyponormal sea subnormal, un subnormal sea quasinormal, y un quasinormal sea normal. Además ya sabíamos, de la Proposición 2.37, que si T es hyponormal y compacto, entonces es normal.

Además, con invertibilidad y contractibilidad, tenemos:

Proposición 2.51. *Sea $T \in \mathbb{B}(H)$ hyponormal e invertible. Si T y T^{-1} son contracciones, entonces T es normal.*

Demostración.

Como T es invertible, entonces T^* lo es. También, $\|T^{*-1}\| = \|T^{-1*}\| = \|T^{-1}\| \leq 1$. Notar que

$$\|Tx\| = \|TT^{*-1}T^*x\| \leq \|TT^{*-1}\|\|T^*x\| \leq \|T\|\|T^{*-1}\|\|T^*x\| \leq \|T^*x\|.$$

Luego, por el lema 2.6, T^* es hyponormal. Por definición, tenemos que T es cohyponormal, y como un operador es normal si y sólo si es hyponormal y cohyponormal, se tiene lo pedido.

□

Más aún, existe una serie de resultados que relacionan la hyponormalidad con las clases especiales de operadores normales. A saber:

Teorema 2.52. *Sea $\Gamma = \partial\mathbb{D}$ y $T \in \mathbb{B}(H)$ hyponormal.*

(a) *Si $\sigma(T) \subseteq \Gamma$, entonces T es unitario.*

(b) *Si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, entonces T es autoadjunto.*

(c) *Si* $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, *entonces* T *es positivo.*

(d) *Si* $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$, *entonces* T *es una proyección.*

¡Basta! Alguien me espera, y tengo que llegar. Nos vemos pronto.

Conclusiones

Con el presente trabajo hemos mostrado algunas de las técnicas más habituales para explorar las propiedades de las principales generalizaciones de los operadores normales, y particularmente, de los operadores subnormales.

Como se ha dicho antes, existe muy poca bibliografía sobre estos temas, y esperamos haber cumplido con uno de nuestros principales objetivos: brindar claridad a su estudio, para que, como alguna vez dije, ningún otro estudiante interesado en los operadores no normales deba enfrentarse a las mismas complicaciones.

La Subsección2.3.5 es una idea original de los autores con el objetivo de medir la subnormalidad de un operador. En base a eso, hemos conjeturado lo siguiente:

Conjetura 1 (de G). *Dado $S \in \mathbb{B}(H)$ subnormal, con $mne(S) = N \in \mathbb{B}(K)$ dado por*

$$N = \begin{bmatrix} S & X \\ \Theta & T^* \end{bmatrix},$$

existen una medida vectorial μ en K tal que $\mu(K \backslash H) = \mu(H^{\perp} \backslash A)$, donde $A \subseteq H^{\perp}$ es el conjunto donde T alcanza su pureza.

Finalmente, los operadores subnormales muestran una de las analogías más importantes que existen entre la variable compleja y la teoría de operadores. Lo que nosotros conseguimos forma parte de un proyecto más ambicioso consistente en la aplicación de varias técnicas de la teoría de operadores para el estudio de funciones analíticas en conjuntos abiertos.

Bibliografía

[Agl] J. Agler, *Hypercontractions and subnormality*, J. Operator Theory, 13, (1985).

[Ber] S. K. Berberian, Notes on Spectral Theory, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[Con1] J. B. Conway, The theory of subnormal operators, Math Surveys and Monographs, vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.

[Con2] J. B. Conway, A course in Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics, vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[Con3] J. B. Conway, Subnormal Operators, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1981.

[Fil] P. A. Fillmore, Notes on Operator Theory, Van Nostrand, New York.

[Hal1] P. R. Halmos, *Normal dilations and extensions of operators*, *Summa Bras. Math. 2*, 125-134.

[Hal2] P. R. Halmos, *Spectra and spectral manifolds*, *Ann. Soc. Polon. Math. 25*, 43-49.

[Hed] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman spaces, *Graduate Texts in Mathematics, Springer*, 2000, p5.

[Hil] E. Hille, Analytic Function Theory, Vol. 1, 2da. Edición, New York:Chelsea.

[Kub] C. S. Kubrusly, Elements of Operator Theory, Birkhauser Boston.

[Mur] G. J. Murphy, C^*-algebras and operator theory.

[Rud] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill.