BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Titulo de la tesis:

"MODELO DE ENSEÑANZA AGA PARA MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN MEDIA Y MEDIA SUPERIOR"

Presenta:

Gustavo Pedro Meza Pérez

Para obtener el titulo de:

Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Puebla, Pue. Marzo 2011

AGRADECIMIENTOS.

Le doy Gracias a Dios por todos los beneficios recibidos a lo largo de toda la carrera y por permitirme elaborar el presente trabajo.

A mis padres (Gustavo y Lydia), por darme su apoyo incondicional y la oportunidad de estudiar la Licenciatura en Matemáticas.

A mi hermana (Maritza), por sus buenos consejos, sus críticas y su buen ejemplo.

A mi Asesor de Tesis: Licenciado Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, por darme la oportunidad de trabajar con él y apoyarme en todo momento con sus comentarios, sus ideas, sus buenos consejos y por corregir mis errores para poder mejorar y no desesperarme.

A la Maestra Laura Lidia Ortega Xochicale por todo su apoyo, por invitar a los niños y a algunos por obligarlos a venir los sábados, también por su entusiasmo y su gran disposición para ayudarme.

A mis sinodales: Dra. Esperanza Guzmán Ovando, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar y Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por sus preguntas, su interés y por sus correcciones para mejorar mi trabajo, pues todo lo que me dijeron fue tomado en cuenta.

A mis amigos Israel Méndez Conde, Ayerim Patria Herrera Castillo y Alma Vega Cortázar, por su apoyo para realizar mi tesis.

Gracias especiales a los protagonistas principales de AGA, ellos son:

Diana Durán	*Gustavo Morales*	*Abigail Galindo*
Raúl Cruz	*Yosafat Rico*	*María de Jesús Cuecuecha*
Víctor Olvera	*Pedro Jiménez*	*Angélica Muñoz*
Antony Hernández	*Jocelyn Limón*	*Daniel Zamora*
Jazmin Ventura	*Nayelli Mijangos*	*Carina Canseco*
Oscar Montes	*Giselle Bolaños*	*Juan Marcelo*
Carlos Viveros	*Mildred Apango*	*Janeth Gasca*
Rocío Capilla	*Luis Ángel González*	*María Julia Méndez*
Valeria Flores	*Homero Jafet*	*Jacqueline Gasca*
Luz Mariana Nieto	*Alejandra Mancilla*	*Daniel Coyotl*
Ana Karen Castillo	*Sarahí Valerio*	*Miyeri Laguna*
Yolitzin Zarate	*Enrique Neri*	*Cristian Escalona*

INDICE

Introducción

El presente trabajo de Tesis propone y explica un modelo de enseñanza para matemáticas de nivel medio y medio superior (secundaria y bachillerato), el cual consiste de tres fases: Actividades, Generar ideas y Argumentación y se explica en el capítulo II.

En el capítulo I damos los antecedentes para responder ampliamente la pregunta: ¿Por qué un modelo de enseñanza? Para ubicarnos en el contexto educativo de México y ver la necesidad de un modelo diferente al tradicional, en el capítulo I hablamos sobre las competencias básicas que los alumnos de secundaria y bachillerato deben adquirir de acuerdo a los lineamientos actuales de la SEP, también damos la definición de PISA (por sus siglas en inglés, Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos,), la de Philippe Perrenoud, José Moya y la de la Comisión Europea, entre otras.

Incluimos un breve análisis de los resultados de la Prueba PISA realizada en el 2009, publicada en diciembre de 2010 y comentada en los periódicos de circulación nacional. Román (2011. 7 de diciembre). Detallamos los 6 niveles que contempla está Prueba para ubicar a nuestros jóvenes. El promedio de nuestro país fue de 419 puntos en matemáticas, 422 puntos en lectura y 405 en ciencias. La mayoría de los estudiantes de 15 años se encuentran en el nivel 1 y 2, el 22% están en el nivel menor a 1, no hay que perder de vista este dato, los alumnos mexicanos son poco competitivos respecto a los países que ocupan los primeros lugares debido a la "gran diferencia" que existe. También se mencionan las habilidades y destrezas matemáticas que toma en cuenta esta evaluación. OCDE/PISA (2000). El proyecto PISA define con claridad *Competencia Matemática*. INEE (2006), hay otras definiciones como la del Departamento de Educación del País Vasco y la de Colombia.

PISA evalúa la habilidad para resolver problemas de los jóvenes de 15 años, actualmente se reconoce que el concepto de metacognición (aprender a pensar) es importante en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas, consideramos algunas definiciones: Díaz B. (2005), Giry (2003), entre otros y la similitud que guardan.

Veremos brevemente como la metacognición está relacionada con la Resolución de Problemas y como gradualmente los alumnos que desarrollan sus habilidades metacognitivas se vuelven más autónomos, en lo que a aprendizaje se refiere.

En el segundo capítulo se presenta el Modelo AGA, proponemos muchos ejemplos para mostrar su aplicación, es fácil dado que solo consta de 3 momentos clave.

En este modelo el maestro debe planear su curso en base a actividades (resolución de problemas y otras) por ello incluimos la Planeación de Actividades, basado en la Guía del Profesor Algebra. IPN (2002), en esta misma obra proponen un modelo basado en 3 etapas: HACER – REFLEXIONAR – COMUNICAR.

Sin embargo sugieren "diez características" que deben cumplir las actividades. Las que trabajan son: Problemas, problemas con guía, Actividades en internet, Ejercicios, lecturas y proyectos, pero con esta propuesta, en nuestra opinión el docente tiene mucho trabajo antes de iniciar la clase. Un modelo de enseñanza docente más sencillo tiene claras ventajas, sobre todo en su implementación real.

La Dirección General de Bachilleratos (DGB) implementa en el 2008 el enfoque por competencias, es por eso que hablamos brevemente sobre este tema y retomamos las definiciones de competencia básica, competencia genérica y competencia disciplinar dadas por la DGB (2009)

En el capítulo II se puso a prueba el Modelo AGA con alumnos de la secundaria técnica No.1, en los meses de mayo a julio de 2010 y de enero a marzo de 2011. Las edades de los niños participantes fueron de 12 y 13 años (primer año en su mayoría y también de segundo grado), y un grupo de "Niños Talento" o niños con aptitudes sobresalientes (11-12 años) de noviembre de 2009 a junio de 2010. Las sesiones con los alumnos de la Secundara Técnica No.1 se impartieron durante los sábados, donde los chicos se volvieron los protagonistas, dejando al profesor (en este caso su servidor), en segundo plano.

Usamos el término genérico de **ACTIVIDADES** para incluir problemas, juegos relacionados con las matemáticas y en general todo tipo de situaciones didácticas (papiroflexia, rompecabezas, puzles, recursos en internet) que pueden ser explicadas de manera sencilla y realizadas bajo la supervisión del maestro. Un recurso en internet de gran ayuda que consultamos es Wolfram Demontrations Project. Disponible en:
http://demonstrations.wolfram.com [2011. 15 de febrero].

Las actividades que se llevaron a cabo consistieron en resolver diversos problemas de aritmética, álgebra, fracciones, probabilidad, geometría, conteo, conjuntos, entre otros.

En esta propuesta el docente tiene una participación menos protagónica que en una clase tradicional, aquí él propone el trabajo a realizar, son los jóvenes los que tienen el papel más importante, ellos realizan el trabajo "fuerte".

En las sesiones sabatinas se incluyeron actividades recreativas donde elaboraron un cubo, cajas para regalo y un cilindro diferente al desarrollo convencional, es decir, los niños propusieron un desarrollo distinto al que se revisa en clases. Aquí pusieron mucho de su ingenio y creatividad, la parte medular del trabajo es LA GENERACION DE IDEAS. En el capítulo II se proponen algunas actividades, que han sido probadas en distintos Centros Escolares, con excelentes resultados, como son "Broken Heart Tangram", "Loculus of Archimedes". Wolfram Project (2006), "Futbol Algebraico" Zeleny P. (2008) (en mi práctica docente lo apliqué obteniendo buenos y sorpresivos resultados), construcción de papalotes con forma geométrica, construcción de un balón de futbol, "cubo invertible", cuerpos geométricos flexibles, entre otros.

Debido a su importancia se considera el concepto de metacognición y aprendizaje autónomo, quisimos averiguar qué habilidades metacognitivas tienen los estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, para este fin, se propusieron algunos ejercicios aplicados a alumnos de 1º, 3º, 5º, 7º y 9º semestre, con el propósito de verificar qué tan conscientes de su pensamiento son y compararlos con los de los niños. Los de 1er. semestre mostraron poco desarrollo de sus habilidades metacognitivas. Los de 7º y 9º no fueron los mejor posicionados, este privilegio les corresponde a los de 3º y 5º semestre, de acuerdo a sus respuestas. Eso sí, los de semestres más avanzados lograron demostrar su afirmación.

Al final del capítulo II revisamos la cuestión afectiva del alumno, pues, aunque en un principio no se tenía contemplado este rubro, nos dimos cuenta que influye mucho en la participación y el desarrollo de habilidades metacognitivas de los pequeños. Anexamos algunos de los comentarios de los jóvenes que participaron en las sesiones y revisamos algunos artículos que hablan de este tema: González y Villalonga (2006), Gómez Chacón (2000). Otro aspecto importante que cabe mencionar es: El Modelo AGA (ACTIVIDADES, GENERAR IDEAS Y ARGUMENTAR), puede adaptarse al Programa de Estudios que debe seguir el maestro y lo más importante, avanzar con más facilidad que con el enfoque tradicional en el mismo.

Al final de la revisión de las sesiones, y los comentarios de los niños participantes en la utilización del Modelo.

En el Capítulo III del presente trabajo se presenta la manera de utilizar AGA en la planeación de una clase, se proponen algunas sesiones de ejercicios y otras actividades que pueden resultar útiles para revisar diferentes temas. Para ello tomamos el Plan de estudios de acuerdo a la DGB (2009) y el de la SEP para secundarias. Programas de

Estudio (2006). AGA se puso a prueba con niños que aceptaron la invitación de trabajar los sábados para ver si eran capaces de GENERAR IDEAS a partir de sus conocimientos previos, ellos mostraron ser capaces de "movilizar todos sus recursos para resolver los problemas", es importante mencionar que no se dio ningún antecedente o explicación. Se puede fomentar el desarrollo de competencias como son, ARGUMENTAR, comunicar, resolver problemas, exponer de forma oral o escrita principalmente. Un niño con confianza en sí mismo, GENERA MAS IDEAS y no tiene miedo a comentarlas, no se requiere de la aplicación de exámenes tradicionales extensos para evaluar a los estudiantes y resulta natural emplear otras estrategias de evaluación como: trabajos creativos, proyectos (bachillerato) y portafolio.

Con el método de enseñanza AGA es posible avanzar en cualquier Programa de un curso de matemáticas de secundaria y bachillerato pues una ACTIVIDAD puede tocar varios tópicos del programa a cubrir, por ejemplo: Con el problema del dominó que se encuentra en el Capítulo II se revisan propiedades de la suma, "la formula de Gauss" para la suma de enteros consecutivos, también puede vincularse con probabilidad. Con un juego que consiste en lanzar 3 dados, de igual manera se pide que anoten la suma de los puntos de las caras superiores, que realicen 100 lanzamientos y lo comparen con la probabilidad teórica (conteo).

"No pretendamos que las cosas cambien si siempre hacemos lo mismo"

CAPITULO I
APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

¿Por qué un modelo de enseñanza?

El aprendizaje de las matemáticas en los niveles básicos es un problema en muchos países, donde los niños incluso manifiestan un claro rechazo, que finalmente repercute en su elección de carrera. Gilberto Guevara Niebla (1997) indica que:

> *"México vive desde hace una generación una catástrofe silenciosa: su deterioro educativo. En el siglo XX México amplió su cobertura educativa en forma vertiginosa, pero los resultados efectivos de la educación que imparte son deplorables. El aspecto más alarmante es el bajo rendimiento académico, que se refleja en las calificaciones de los alumnos en exámenes, que los interrogan sobre los contenidos de los planes de estudio que han cursado. Causa y efecto es el problema crucial de la frecuente irrelevancia de los contenidos educativos para la vida práctica y el equipaje cultural de los alumnos",* sentencia*: "Escolarizamos pero no educamos".*

El problema de la Enseñanza es muy amplio y complejo, por ello centrémonos en la labor del docente de matemáticas, en la que muy pocos profesores están satisfechos con los resultados de su trabajo y como marco de referencia tomamos los programas oficiales de México. Cuando un maestro se plantea enseñar determinados contenidos matemáticos escolares, pone en funcionamiento de manera implícita una serie compleja de ideas sobre lo que significa aprender matemáticas y cómo se puede ayudar a los alumnos en este proceso. La profesión docente se ha vuelto muy difícil a causa de las exigencias actuales y de los nuevos enfoques para la educación. Espera que su proceso de enseñanza genere un aprendizaje en el alumno y diseña estrategias de acuerdo a su propia "teoría implícita" de cómo se aprenden las matemáticas. Así por ejemplo, un profesor puede creer que si lleva a cabo explicaciones de modo detallado y exhaustivo en el pizarrón, sus alumnos, al escucharlo atentamente, interiorizarán su explicación y asimilaran los contenidos matemáticos de su discurso: existe un saber objetivo que posee el maestro y aprender es apropiarse de él para poder reproducirlos con fidelidad. Esta es la forma tradicional de enseñar, basada en la transmisión de saberes ya establecidos como forma de perpetuar la cultura matemática.

Afortunadamente ha habido avances, a pesar de que la enseñanza tradicional está fuertemente arraigada los cambios son lentos, es necesario replantear la educación matemática en el nivel medio ya que es claro que no podemos volver al pasado, pero el futuro es incierto, la tecnología hace obsoletas muchas cosas, pero otras tantas son valiosas en la preparación de los niños y adolescentes, por ello en el capítulo II presentamos un modelo de enseñanza, fácil de aplicar y el cual puede de manera flexible adaptarse a las condiciones concretas de cada grupo de alumnos. Siempre se tuvo en mente el trabajo de Terezinha Nunes y Peter Bryant donde insisten que los alumnos "ya saben muchas cosas" pero de manera fragmentada y que es necesario tomar en cuenta ese conocimiento como punto de partida, como un "trampolín", el fracaso escolar no solo se debe a "fallas en el razonamiento lógico de los niños". Estos autores dan un punto de vista no tradicional sobre "fracaso escolar".

También basamos nuestra propuesta en los principios de aprendizaje enunciados por la American Psychological Association (APA). Pero antes es importante comentar algunos puntos para ubicarnos en el contexto actual de la enseñanza de acuerdo a los programas vigentes en México.

I.1 Diferentes concepciones de Competencias.

La enseñanza de las matemáticas según marca el programa oficial de SEP está basada en competencias. Sin duda este enfoque produce opiniones encontradas, es de señalar que existen diversas concepciones, lo que oscurece un poco la discusión, en este apartado trataremos de señalar claramente los puntos importantes para la educación matemática, haciendo referencia a los programas oficiales y los documentos difundidos por PISA, dada su relevancia internacional.

El modelo por competencias se implementó de manera oficial en toda la República Mexicana a partir del ciclo escolar 2008 -2009 DGB (2009), aunque en el bachillerato del IPN data de 2001. IPN (2002)

Se comentan brevemente algunos términos relacionados. Las competencias básicas se refieren al dominio, por parte del alumno sobre lo que él conoce, sus habilidades, valores y actitudes. Para poder aplicarlo en la solución de los problemas que deba enfrentar en la escuela, en el trabajo o en la vida cotidiana. Son genéricas o básicas. La Dirección General de Bachilleratos (DGB) marca competencias genéricas.

Existen muchas definiciones de competencia de diversos autores como, Philippe Perrenoud, la ANUIES, La Comisión Europea, la de la OCDE (Organización de Colaboración para el Desarrollo Económico), la de la DGB, la de José Moya, entre otras. A nosotros nos interesan las competencias matemáticas para nivel medio, por eso NO ENTRAMOS AL ANÁLISIS DE LAS DIFERENTES CONCEPCIONES, PUES EL TEMA ES SUMAMENTE CONTROVERSIAL.

Competencias centrales o básicas: son aquellas que se adquieren en la escuela para moverse en la vida de manera funcional; disciplina, comprensión lectora, matemáticas básicas, capacidad para planear, ejecutar y terminar algo, hablar correctamente, ser crítico y hacer juicios sobre la propia capacidad.

Competencias para la vida: es el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, valores, creencias y principios que se ponen en juego para resolver los problemas y situaciones que emergen en un momento histórico determinado, el que le toca vivir al sujeto que interactúa en el ambiente.

Una competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentar con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones. (**Philippe Perrenoud**)

Tres ejemplos más concretos son:

- Saber orientarse en una ciudad desconocida; ésta competencia moviliza la capacidad de leer un plano o croquis, de situar dónde se está, pedir información o consejos, y también distintos conocimientos: concepto de escala, elementos de topografía, conocimiento de una serie de puntos de señales geográficos;

- Saber atender a un niño enfermo; esta competencia moviliza capacidades (saber observar señales fisiológicas, tomar la temperatura, administrar el tratamiento médico correcto), y también conocimientos: conocimiento de las patologías y de sus síntomas, medidas urgentes, terapias, de las precauciones que deben tomarse, de los riesgos, de los medicamentos, de los servicios médicos y farmacéuticos.

- Saber votar de acuerdo con sus intereses; esta competencia moviliza capacidades (saber informarse, saber llenar una papeleta de voto), y también conocimientos:

conocimiento de las instituciones políticas, de lo que está en juego en la elección, candidatos, partidos, programas, políticas de la mayoría en el poder, etc. **(Estudio Internacional de Tendencias Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés))**

Competencia: Conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias sociales. Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo el proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. (**ANUIES)**

Competencia: se refiere a una combinación de destrezas, conocimientos, aptitudes y actitudes, y a la inclusión de la disposición para aprender además del saber común. (**COMISIÓN EUROPEA)**

Competencia: Conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, habilidades, actitudes y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiestan en su desempeño en situaciones y contextos diversos. (**SEP (primaria y secundaria), DGB (bachilleratos))**

El concepto de competencia pone el acento en los resultados del aprendizaje, en lo que el alumno es capaz de hacer al término del proceso educativo. Le permiten continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de la vida. (**MIGUEL ZABALZA BERAZA)**

Una competencia es la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales para realizar una actividad. Cada competencia reposa sobre una combinación de habilidades prácticas y cognitivas interrelacionadas, conocimientos, motivación, valores actitudes, emociones y otros elementos sociales y comportamentales que pueden ser movilizados conjuntamente para actuar de manera eficaz. (**OCDE)**

Competencia: Es la forma en que una persona moviliza todos sus recursos para resolver una tarea en un contexto determinado. **(José Moya)**

Nosotros coincidimos con la definición de José Moya.

Por otro lado, SEP impone su enfoque a los maestros (a través del llenado de las planificaciones con formatos rígidos), hay algunos que se oponen, pero la gran mayoría vive en la confusión y sigue la corriente. Dando un maquillaje y usando la terminología de competencias solo en el papel. No hay una definición universalmente aceptada, tal vez por eso valga la pena, como referencia, tomar en cuenta la definición de PISA.

Según la DGB cada materia tiene sus propias competencias. Pero nos interesa concretamente la competencia matemática. En particular los documentos difundidos por PISA que lo definen, al menos, con claridad, explicando los términos principales de su definición (podemos o no estar de acuerdo).

I.2 Competencias Matemáticas y resultados de México en la Evaluación PISA.

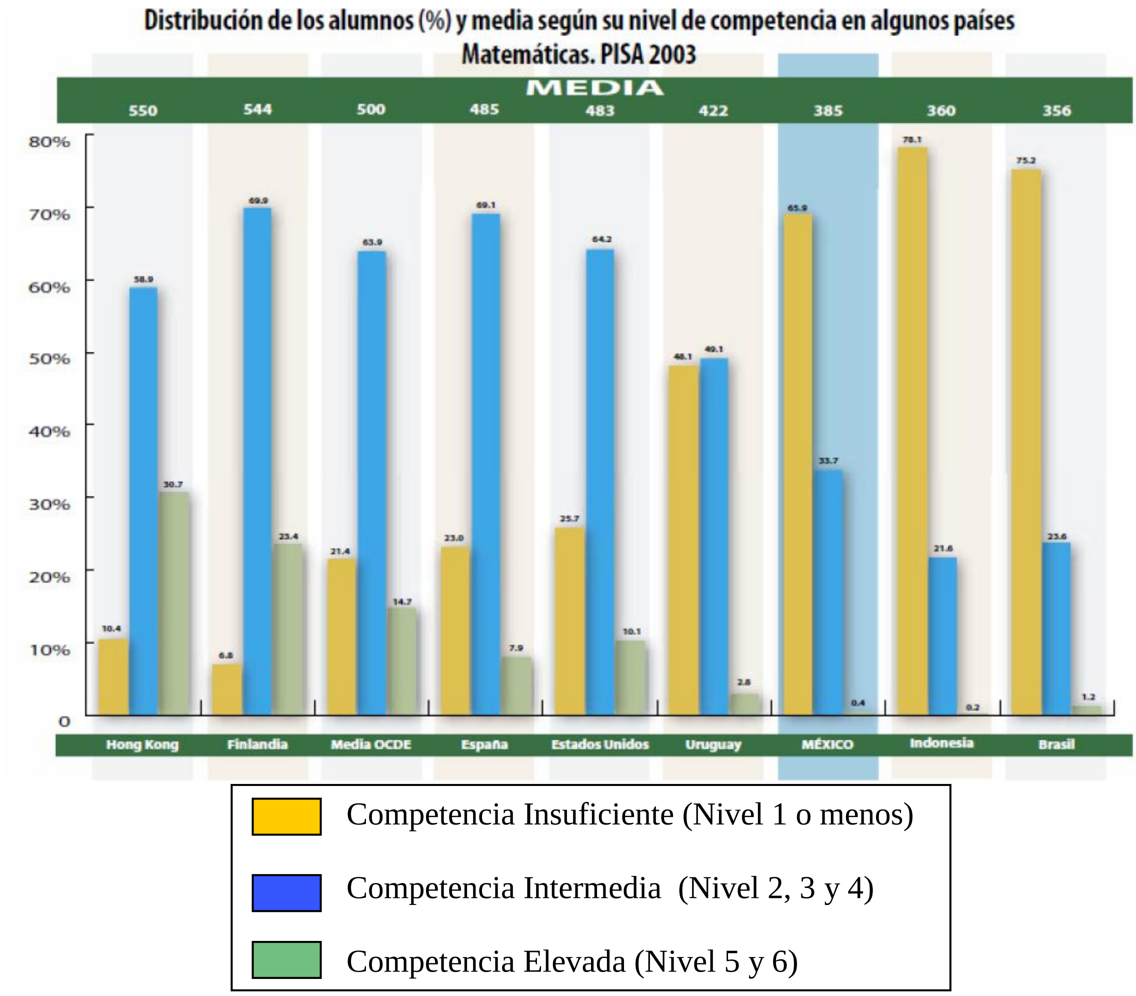
México es miembro de la OCDE (Organización de Colaboración para el Desarrollo Económico) desde 1994. La OCDE inició el proyecto PISA (Programme for International Student Assessment, es decir, Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos) en 1997 con el propósito de ofrecer la evolución de los resultados de los sistemas educativos, medidos a través de la valoración del rendimiento de los alumnos de 15 años en competencias consideradas clave, como son la lectora, **la matemática** y la científica. Estos resultados completan el panorama de indicadores educativos que viene publicando la OCDE desde 1992. Reporte Español (PISA 2009)

En los resultados de la Evaluación PISA 2009, México obtiene el lugar 49, sólo por arriba de Chile, Argentina, Brasil, Colombia, Perú y Panamá (6 menos que en el 2006). Promedió 419 puntos en matemáticas. Román (2010. 7 de diciembre). México sólo es comparable por promedio de puntos con los países latinoamericanos. Esto muestra la consistencia de PISA. Los alumnos de 3º de secundaria y 1º de bachillerato solo pueden resolver, razonar y explicar ejercicios sencillos de aritmética (nivel 1 y 2)

Debe quedar claro que los resultados muestran que la mayoría de los alumnos mexicanos están en los niveles 1 y 2 de 6, comparados con los primeros lugares donde la gran mayoría se ubica en el nivel 5.

21% están en el nivel menor que 1 (¡la quinta parte!), 29% en el nivel 1, 28% se encuentran en el nivel 2, 16% en el 3, 5% se ubican en el nivel 4 y solo 1% en el nivel 5. Tristemente el nivel 6 se quedó en 0%.

La **Gráfica 1** marca los resultados comparativos con los primeros lugares (Hong Kong y Finlandia), sus promedios son altos porque la gran mayoría de sus estudiantes están muy cerca del 100% de respuestas correctas, nuestro país se encuentra totalmente al revés, pocos se encuentran en los niveles más altos. Estos datos se obtuvieron de la Prueba PISA 2003. La noticia "buena" es que "le ganamos a Brasil". Fox (2004)



Grafica 1. Resultados de la Prueba PISA 2003. México comparado con los primeros lugares y la media de la OCDE. (PISA 2003)

A continuación se describen cada uno de los seis niveles de la Prueba PISA.

NIVEL 1. (De 358 a 420 puntos)

Responden preguntas sobre contextos familiares; identifican información y realizan procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas; realizan acciones obvias a partir de un estímulo dado y logran darle seguimiento inmediato.

NIVEL 2. (De 421 a 482 puntos)

Realizan inferencias directas; extraen información relevante de una fuente, utilizando un sólo modelo de representación; emplean un grado básico de algoritmos, fórmulas, procedimiento o convenciones; realizan razonamientos e interpretaciones literales de los resultados.

NIVEL 3. (De 483 a 544 puntos)

Ejecutan procedimientos descritos con claridad; seleccionan y aplican estrategias sencillas de solución de problemas; interpretan y utilizan representaciones basadas en fuentes diversas de información; elaboran comunicaciones breves sobre sus interpretaciones y resultados.

NIVEL 4. (De 545 a 606 puntos)

Los estudiantes trabajan de forma eficaz con modelos explícitos que describen situaciones concretas complejas; seleccionan e integran diferente información vinculándola con situaciones de la vida real; razonan en contextos de manera flexible; elaboran y comunican explicaciones y argumentos con base en interpretaciones propias.

NIVEL 5. (De 607 a 668 puntos)

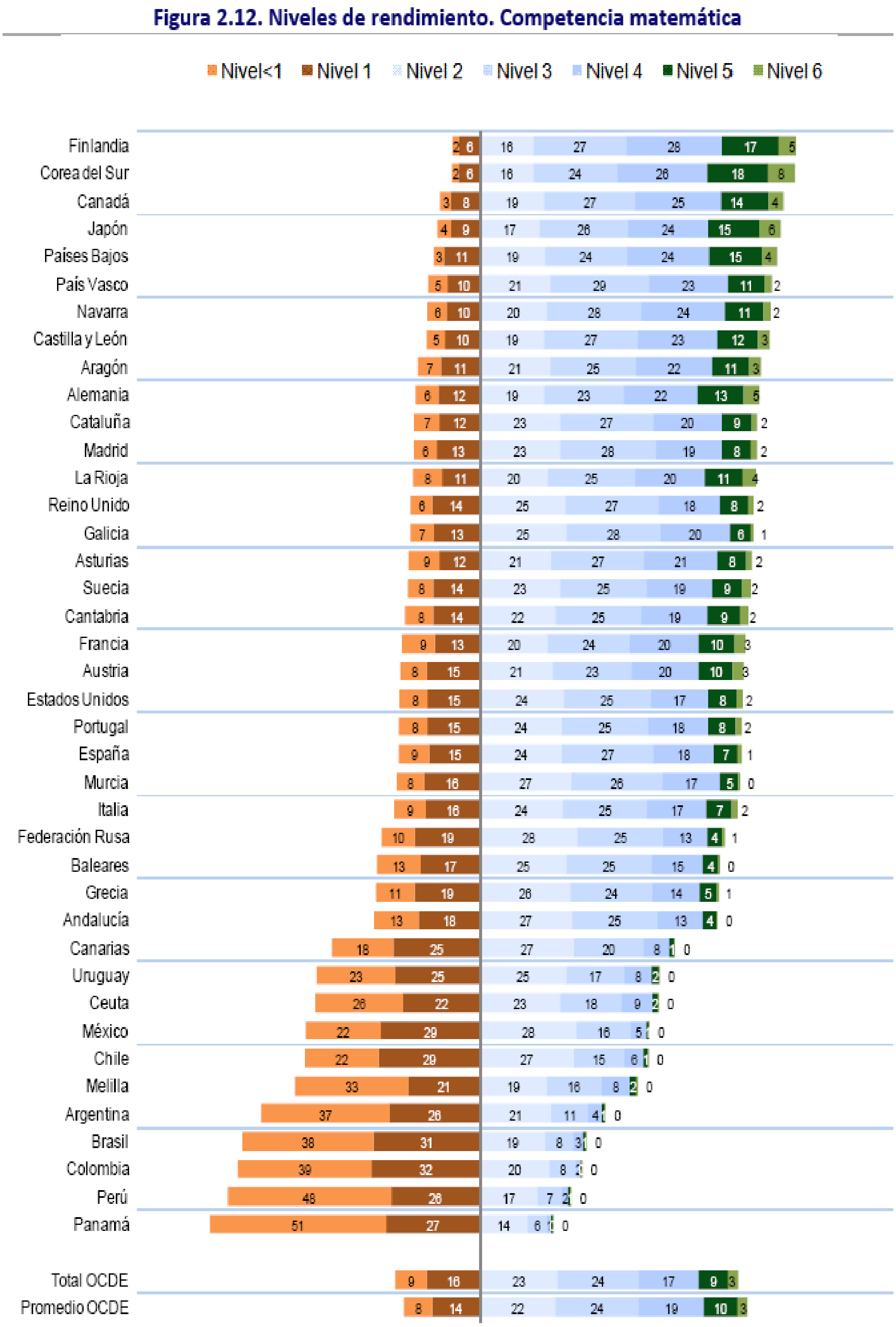
Los estudiantes desarrollan y trabajan con modelos para situaciones complejas; seleccionan, comparan y evalúan las estrategias apropiadas de resolución de problemas; muestran habilidades de pensamiento desarrollado; formulan y comunican adecuadamente interpretaciones y razonamientos.

NIVEL 6. (Más de 668 puntos)

Los estudiantes conceptúan, generalizan y utilizan información basada en su investigación y establecen modelos de situaciones complejas; vinculan fuentes diversas de información; piensan y razonan a un nivel avanzado; comprenden y dominan operaciones y relaciones matemáticas simbólicas; formulan y comunican con precisión sus reflexiones

Habilidades y Destrezas Matemáticas Relevantes en Educación Matemática (OCDE/PISA 2000)
Habilidad de pensamiento matemático
Habilidad de Representación
Habilidad de Diseño
Habilidad para plantear y resolver problemas
Habilidad de simbolización, formal y técnica.
Habilidad de Comunicación
Habilidad de Argumentación Matemática
Habilidad para la utilización de ayudas y herramientas.

Cuadro 1. Tomado de Vila Corts, Antoni y Callejo de la Vega, María Luz. *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Pág. 170



Nota: los países están ordenados de manera descendente en función de su promedio en la competencia matemática.
Fuente: OECD PISA 2009 database, Vol. I, Table I.3.3 y Table S.I.s.
Elaboración: Instituto de Evaluación, Anexo 2, Tabla 2.2.

Gráfica 2. Resultado de la Prueba PISA en el área de matemáticas del año 2009. Reporte Español (2009)

México obtuvo 387 puntos en el 2000, 385 puntos en el 2003 (**Ver Gráfica 1**), 406 en el 2006 y 419 puntos en el 2009. (**Ver Gráfica 2**). Lo que vemos es que no hay avance significativo. Seguimos bajos en el ranking, por más que nos digan que "le ganamos a Brasil", México es constante, es el ÚLTIMO de los miembros de la OCDE.

"Decir que estamos enseñando cuando nadie está aprendiendo, es como decir que estamos vendiendo y nadie compra".

Buscamos en la página oficial de PISA y conseguimos el resumen general 2009, curiosamente México no despliega todo el informe correspondiente con oportunidad, varios países, por ejemplo España y Estados Unidos sí. Ahora veamos las competencias que PISA menciona.

Para los críticos de la validez en los resultados de México en la Prueba PISA, debemos recordar que México es miembro de la OCDE desde 1994, por lo que tiene la obligación de participar en dicha Prueba. Cabe señalar que hay países que no son miembros de la OCDE y realizan la evaluación por invitación, la cual obviamente es aceptada pues creen en la seriedad de PISA. Así mismo México es comparable con los países Latinoamericanos en PISA 2009, con los cuales compartimos muchos rasgos histórico-sociales, culturales y económicos comunes.

Las competencias en el Proyecto PISA.

El proyecto PISA enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de unas competencias determinadas por parte de los alumnos de 15 años al término del periodo de su educación obligatoria, competencias que tienen por finalidad formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente. El concepto de competencia en el proyecto OCDE/PISA pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.

Las competencias elegidas por el proyecto PISA. Marco Teórico PISA (2003) son:

1. Pensar y razonar
2. **Argumentar**
3. Comunicar
4. Modelar
5. **Plantear y resolver problemas**
6. Representar

7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

El proyecto PISA considera que los logros de los estudiantes en la resolución de problemas se puede expresar mediante este conjunto de competencias. Conviene observar que las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas, relacionadas con algún tipo de análisis conceptual.

Dentro del proyecto OCDE/PISA la definición de *competencia matemática* es la siguiente:

La competencia matemática es la capacidad del individuo para identificar y comprender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar las matemáticas y relacionarse con ellas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. INEE (2006)

La siguiente definición nos la da el Departamento de Educación, Universidades e Investigación del País Vasco:

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

A continuación se transcriben cada una de las competencias según PISA.

Pensar y razonar

Esto incluye la capacidad de:

Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay?, ¿Cómo encontrarlo? Si es así,… ¿entonces? etc.).

Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones;

Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas).

Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar

Esto incluye las capacidades de:

Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático.

Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos.

Disponer de sentido para la heurística (Qué puede (o no) ocurrir y ¿porqué?)

Crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar

Esto incluye las capacidades de:

Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita.

Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.

Modelar

Incluye las capacidades de:

Estructurar el campo o situación que va a modelarse.

Traducir la realidad a una estructura matemática.

Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.

Trabajar con un modelo matemático.

Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.

Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones)

Dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas

Incluye las capacidades de:

Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados)

Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar

Incluye las capacidades de:

Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.

Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal, técnico y las operaciones

Incluye las capacidades de:

Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico, formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.

Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.

Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.

Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Niveles de competencias

Las competencias enunciadas admiten diferentes niveles de profundidad. Los expertos del proyecto OCDE/PISA consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ejercicios con los que evaluar las competencias:

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

¿Qué pasa si un alumno reprueba?, ¿es incompetente, es burro?, la respuesta es NO, lo clasificamos de acuerdo a los tres niveles anteriores, en ese caso se encuentra en el Nivel 1, solo puede hacer problemas muy sencillos.

El informe mencionado proporciona ejemplos sencillos de ejercicios para cada uno de estos niveles.

Ejemplos de ejercicios de Reproducción:

Eje. 1. Resolver la ecuación $7x - 3 = 13x + 15$

Eje. 2. Calcular la media de 7, 12, 8, 14, 15 y 9

Eje. 3. Escribir 69% como fracción.

Eje. 4. Si se colocan 1000 euros en una cartilla de ahorros con un interés del 4%, ¿Cuántos euros habrá en la cuenta después de un año?

Ejemplos de problemas de Conexión

Eje. 1. María vive a 2 kilómetros del colegio, Martín a 5. ¿A qué distancia vive María de Martín?

Eje. 2. Una Pizzería sirve dos tipos de pizza redonda, del mismo grosor y diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 3 dm y cuesta 3 euros. La mayor tiene un diámetro de 4 dm y cuesta 4 euros. ¿Cuál es la pizza que tiene mejor precio? Explica tu razonamiento.

Ejemplo de problema de Reflexión

Eje. 1. En un cierto país el presupuesto de defensa es de 30 millones de dólares para 1980. El presupuesto total para ese año es de 500 millones de dólares. Al año siguiente el presupuesto de defensa es de 35 millones de dólares, mientras que el presupuesto total es de 605 millones de dólares. La inflación durante el periodo que cubren los dos presupuestos es del 10%.

A. Se le invita a hacer una exposición ante una sociedad pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este periodo. Explica cómo hacerlo.

B. Se le invita a hacer una exposición ante una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa se ha incrementado en este periodo. Explica cómo hacerlo.

Al considerar los bajos resultados de México en PISA la única conclusión es que nuestro sistema educativo requiere mucho trabajo para mejorar la enseñanza de las matemáticas, ya que dominar algunas de las competencias anteriores requiere mucho tiempo de estar practicando, además debe mejorarse la relación con las demás "materias" lectura y ciencias concretamente: dominar graficado de funciones y sus aplicaciones requiere mucho trabajo, por ello mismo es necesario un buen modelo de enseñanza con énfasis en la metacognición.

Requiere un nuevo enfoque para la enseñanza de las matemáticas.

"*Si trabajamos de la misma forma de siempre… obtendremos los mismos resultados".*

El objetivo de presentar algunos conceptos de PISA sobre competencia matemática es mostrar que nuestro Modelo (ver Capitulo II), no contradice este enfoque.

I.3 La reforma según la Dirección General de Bachilleratos (DGB)

En la década pasada, las autoridades educativas de nuestro país, mostraron interés en ampliar la cobertura de los niveles educativos básico y medio superior. En el caso de la educación media superior, tal como lo señala el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, actualmente se atiende a poco más de tres quintas partes de la población de 16 a 18 años en una modalidad escolarizada, sin embargo los índices de eficiencia terminal son en

promedio del 60%, lo cual denota altos niveles de reprobación y deserción entre los alumnos. Se ha identificado la necesidad de que los estudiantes de este nivel educativo desarrollen capacidades y habilidades básicas.
También se observo la necesidad de actualizar los contenidos educativos, materiales y métodos de enseñanza, de tal forma que la educación que se imparta tenga mayor relevancia y pertinencia para los aprendices.
Los estudiantes de bachillerato deben desarrollar competencias, tanto para la vida como para el trabajo. Para el logro de este objetivo, la Subsecretaría de Educación Media Superior inició el proceso de Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) con el propósito de establecer un Sistema Nacional de Bachillerato unificando sus diferentes tipos (general, tecnológico y profesional técnico).

- Fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo.
- Proporcionar una educación pertinente y relevante al alumno.
- Facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los diferentes tipos de escuelas.

Propósitos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior

Uno de los ejes principales de la Reforma es la definición de un Marco Curricular Común, que compartirán todas las instituciones de bachillerato, basado en un enfoque educativo orientado al desarrollo de **competencias**.
Algunas de las competencias básicas que debe desarrollar el discente (sinónimo de alumno) de bachillerato de acuerdo con la DGB son:

- ♦ **Aprender por sí mismo,** poniendo en práctica métodos y técnicas para lograr su progreso intelectual.
- ♦ Desempeñarse individual o grupalmente de manera **autónoma** en su vida escolar y diaria.

- Manejar la información dada en diferentes lenguajes, como pueden ser representaciones gráficas, el lenguaje matemático, simbólico, de cómputo, entre otros.
- Expresarse correctamente en español, de forma oral (ARGUMENTACIÓN) y escrita e interpretar los mensajes en ambas formas.

Las competencias genéricas son aquellas que los jóvenes deben desempeñar y las que les permitirán comprender su entorno (local, regional, nacional o internacional) e influir en él, contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y practicar una convivencia adecuada en sus ámbitos social, profesional, familiar, etc. Estas competencias junto con las disciplinares básicas constituyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato.

A continuación se enlistan las **competencias genéricas** que marca la DGB:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Todas y cada una de las materias en diferente medida buscan el desarrollo de las competencias genéricas.

A través del Marco Curricular Común se reconoce que el bachillerato debe orientarse hacia:

- El desarrollo personal y social de los futuros ciudadanos, a través de las competencias genéricas. Cabe señalar que estas competencias, constituyen a su vez el perfil de egreso de la Educación Media Superior.
- El desarrollo de capacidades académicas que posibiliten a los estudiantes continuar sus estudios superiores, al proporcionarles las competencias disciplinares básicas.
- El desarrollo de capacidades específicas para una posible inserción en el mercado laboral, mediante las competencias profesionales básicas o extendidas.

Las competencias son procesos complejos de desempeño integral con idoneidad en determinados contextos, que implican la articulación y aplicación de diversos saberes, para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad y comprensión, dentro de una perspectiva de mejoramiento continuo y compromiso ético.

Características que presenta este enfoque educativo:

a) El educando es el sujeto que construye sus aprendizajes, gracias a su capacidad de pensar, actuar y sentir.

b) El logro de una competencia será el resultado de los procesos de aprendizaje que realice el aprendiz, a partir de las situaciones de aprendizaje con las cuales entra en contacto y su propia experiencia.

c) Las situaciones de aprendizaje serán significativas para el estudiante en la medida que éstas le sean atractivas, cubran alguna necesidad o recuperen parte de su entorno actual.

d) Toda competencia implica la movilización adecuada y articulada de los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales en una situación concreta de aprendizaje.

e) La adquisición de una competencia se demuestra a través de la **RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA REVISAR QUE LA RESPUESTA ES CORRECTA Y LA ARGUMENTACIÓN PARA DESARROLLAR HABILIDADES METACOGNITIVAS.**

f) El desarrollo de competencias educativas implica reconocer distintos niveles de desempeño.

g) La función del docente es promover y facilitar el aprendizaje entre los estudiantes, a partir de ACTIVIDADES, selección de materiales, y acompañar el proceso de aprendizaje

del estudiante.
A manera de conclusión, podemos retomar lo que nos comenta Anahí Mastache, el reconocer que las competencias van más allá de las habilidades básicas, ya que implican desarrollar en los estudiantes la capacidad de captar el mundo circundante, ordenar sus impresiones, comprender las relaciones que se suscitan entre los hechos que observan y actuar en consecuencia.
De tal forma que nuestra educación debe dejar de lado la memorización, la mecanización de "métodos", y promover saberes que se puedan emplear en la vida cotidiana, que se manifiesten en la capacidad de **resolución de problemas** dentro y fuera del contexto escolar.
Para incorporar el enfoque por **competencias** que establece el Marco Curricular Común, la Dirección General de Bachillerato inició, en el 2008, la revisión y actualización del plan y programas de estudio del bachillerato general; partiendo de los propósitos del plan de estudios, los cuales se señalan a continuación:

- Proveer al educando de una cultura general que le permita interactuar con su entorno de manera activa, propositiva y crítica (formación básica);
- Prepararlo para su ingreso y permanencia en la educación superior, a partir de sus inquietudes y aspiraciones profesionales (formación propedéutica);
- Y finalmente promover su contacto con algún campo productivo real que le permita, si ese es su interés y necesidad, incorporarse al ámbito laboral (formación para el trabajo).

I.4 Principios de aprendizaje

Para explicar los pobres resultados de los alumnos los investigadores en la materia nos proponen varios motivos: grupos muy numerosos, bajo salario de los maestros, escaso material didáctico, libro de texto con pocos ejemplos y problemas, "hasta debajo de las piedras se buscan". De acuerdo con Terezinha Carraher y David Carraher en el capítulo II de su libro "En la Vida diez y en la escuela cero" proponen una explicación interesante*: "Es común aceptar algunas teorías para explicar el fracaso pero los maestros se quedan fuera del debate, es decir, los educadores se liberan de la responsabilidad de estar involucrados en una escuela incapaz de generar resultados"*. Citan a Poppovic: "*La institución escolar, sus valores, sus métodos, sus criterios, su didáctica, su organización continúan fuera del debate".* Mencionan el fracaso escolar como un fracaso de la escuela localizado en:

a) La incapacidad de comprender la capacidad real del niño.

b) El desconocimiento de los procesos naturales que llevan al niño a adquirir el conocimiento

c) La incapacidad de establecer un puente entre el conocimiento formal que desea trasmitir y el conocimiento práctico del cual el niño, por lo menos en parte, ya dispone.

Creemos que una propuesta para mejorar la enseñanza de las matemáticas debe estar basada en principios de aprendizaje, ya que no podemos olvidar los avances de la psicología en esta materia. La enseñanza de las matemáticas es un esfuerzo complejo, y no hay recetas para ayudar a todos los estudiantes a aprender o para ayudar a los profesores a ser efectivos. Sin embargo en la actualidad mucho se sabe acerca de la enseñanza, y este conocimiento debe guiar el desempeño profesional.

De acuerdo a la APA (American Psychological Association) (1990), los principios de aprendizaje centrados en el alumno son:

1. Naturaleza del proceso de aprendizaje.

El aprendizaje de una materia compleja es más eficaz cuando es un proceso intencional de construcción de sentido a partir de la información y experiencia.

2. Objetivos del proceso de aprendizaje.

El estudiante exitoso, con el ***tiempo y con el apoyo de instrucción y orientación, puede crear sentido (significado), representaciones coherentes del conocimiento.***

3. Construcción del conocimiento.

El estudiante exitoso puede vincular la información nueva con los conocimientos actuales de manera significativa.

4. Pensamiento estratégico.

El estudiante exitoso puede crear y utilizar su repertorio de estrategias de pensamiento y razonamiento para lograr objetivos de aprendizaje complejos. **(Resolver Problemas)**

5. Pensar sobre el pensamiento. (Metacognición)

Estrategias de orden superior para seleccionar y monitorear las operaciones de vigilancia mental facilita el pensamiento creativo y crítico.

6. Contexto de aprendizaje

***El aprendizaje se ve influido por factores ambientales, incluyendo la cultura, la tecnología y las prácticas de enseñanza*. (Pueden ser adversos)**

7. Influencias Motivacionales y emocionales en el aprendizaje

Qué y cuánto se aprende es influenciado por la motivación* del *alumno. Motivación para aprender, a su vez, está influido por el estado emocional* del *individuo,* las *creencias, intereses y metas, y los hábitos de pensar. Como experiencia los niños se motivan al ser tomadas en cuenta sus soluciones.

8. Motivación intrínseca para aprender.

La ***creatividad del alumno, el pensamiento de orden superior, y la curiosidad natural, todos contribuyen a la motivación para aprender. Motivación intrínseca es estimulada por las tareas de la novedad y la dificultad óptima, pertinente para sus intereses personales, y por elección personal y el control.***

9. Efectos de la motivación sobre el esfuerzo.

Adquisición de conocimientos y habilidades complejas requiere ampliarse el esfuerzo y la práctica guiada. Los alumnos sin motivación para aprender, la voluntad de ejercer este esfuerzo es poco probable, sin coacción*. *Cuando resolvemos un problema de alguna manera nos hacemos una buena representación de él.

En **"How Student Learn".** Donovan (2004). Se explican los siguientes principios de aprendizaje.

1. Los estudiantes llegan al aula con concepciones previas acerca de cómo funciona el mundo. Si no se incorpora al estudio esta comprensión inicial, es posible que ellos no asimilen los nuevos conceptos e información que se les están enseñando; o puede suceder que los aprendan para responder un examen, pero que, fuera del aula, regresen a sus concepciones previas.

2. Para desarrollar la competencia en un área de investigación, los estudiantes deben:
(a) Tener una base profunda de saberes factuales (basado en hechos);
(b) Comprender hechos e ideas en el contexto de un marco conceptual y
(c) Organizar los saberes en formas que faciliten el acceso a ellos y su aplicación.
3. Un enfoque "metacognitivo" de la instrucción puede ayudar a los estudiantes a aprender a asumir el control de su propio aprendizaje, por medio de la definición de metas, y de la permanente vigilancia de su progreso hacia el logro de ellas.

Los tres principios fundamentales de aprendizaje anteriormente descritos, aunque parecen sencillos, tienen profundas implicaciones para la empresa de enseñar y formar maestros. Los profesores deben informarse de las concepciones preexistentes que los estudiantes traen al aula, y trabajar con ellas. Los docentes deben enseñar su materia en profundidad, ofreciendo muchos ejemplos en los que opera el mismo concepto y proporcionando una sólida base de conocimientos factuales (basada en hechos). Esto requiere que:

Se cambie de un cubrimiento superficial de todos los temas de una materia, a un cubrimiento en profundidad de menos temas que permita la comprensión de conceptos claves en esa disciplina.

Desde luego que no tiene que abandonarse la meta de avanzar y terminar el programa. Pero debe haber un número suficiente de casos de estudio en profundidad, para permitir que los estudiantes asimilen los conceptos definitorios en dominios específicos contenidos en una disciplina.

(Conceptos clave como sumar igualdades para resolver sistemas de ecuaciones, la propiedad distributiva, entre otras).

La enseñanza de destrezas metacognitivas debería incorporarse en el currículo de una variedad de materias de estudio. Dado que la metacognición toma con frecuencia la forma de un diálogo interior, puede suceder que muchos estudiantes no sean conscientes de su importancia, a menos que el proceso sea explícitamente enfatizado por los profesores. Estos principios, ya son conocidos con una redacción un poco diferente, por ejemplo, ver "Estrategias docentes para un aprendizaje significativo" de Frida Díaz Barriga, pero lo importante es ¿como los aplicamos en una clase de matemáticas?

Como se ve la metacognición es un factor importante para el aprendizaje por ello explicaremos metacognición en relación a la Resolución de Problemas (RP)

Los estudiantes aprenden matemáticas a través de las experiencias que los maestros proveen.

La enseñanza es un esfuerzo complejo, y no hay recetas para ayudar a todos los estudiantes a aprender o para ayudar a los profesores a ser efectivos. Sin embargo mucho se sabe acerca de la enseñanza efectiva, y este conocimiento debe guiar el desempeño profesional.

PARA SER EFECTIVOS, LOS MAESTROS DEBEN CONOCER Y ENTENDER PROFUNDAMENTE LAS MATEMATICAS QUE ELLOS ENSEÑAN Y SER CAPACES DE EXTRAER DE ESE CONOCIMIENTO CON FLEXIBILIDAD SUS TAREAS DE ENSEÑANZA.

Además, la enseñanza efectiva requiere reflexión y esfuerzos continuos de búsqueda y mejoramiento. Los maestros deben tener oportunidad de refrescar sus ideas (fuentes).

La enseñanza efectiva requiere conocimiento y entendimiento de las matemáticas, de los estudiantes como aprendices, y estrategias pedagógicas.

Los docentes necesitan diferentes clases de conocimiento matemático - conocimiento de todo el campo-, conocimiento profundo y flexible acerca de los objetivos del curriculum y acerca de las ideas importantes que son centrales en su grado (semestre -año)

Los maestros tienen diferentes estilos y estrategias para ayudar a los estudiantes a aprender ideas matemáticas particulares, y no hay un camino recto (camino real) para enseñar. La enseñanza efectiva requiere desafíos y soporte a través de un ambiente de aprendizaje en el salón de clases. La enseñanza efectiva parte de la creencia de que cada estudiante puede y espera entender matemáticas y que cada uno de ellos será apoyado en sus esfuerzos para alcanzar este objetivo. Las acciones del maestro son tales que ánima a pensar, preguntar, resolver problemas, discutir sus ideas, estrategias y soluciones. El profesor es responsable de la creación de un ambiente intelectual donde el pensamiento matemático serio es la norma. Mas que los aspectos materiales (mesa, bancas etc.) el ambiente de clase comunica y anima al aprendizaje de las matemáticas porque son valiosas.

¿Se motiva en el salón de clases la discusión y colaboración entre los estudiantes?, ¿se pide a los estudiantes que justifiquen su pensamiento en un ambiente de libertad y respeto, donde no se critican los errores en forma negativa?

Las tareas matemáticas son usadas para introducir ideas matemáticas importantes, captar la atención del alumno y desafiarlos intelectualmente con tareas bien escogidas, podemos "picar" la curiosidad del estudiante.

LA ENSEÑANZA EFECTIVA REQUIERE LA BUSQUEDA CONTINUA DEL PERFECCIONAMIENTO.

La enseñanza efectiva involucra la observación de los estudiantes, escucharlos cuidadosamente (sus ideas y explicaciones) y usar la información para tomar decisiones

Otro maestro solo propone problemas y da indicaciones esporádicas y al final revisa.

En el siguiente apartado se presenta el significado de principio de enseñanza y también cuales deben ser estos principios para la enseñanza de las matemáticas de acuerdo a los estándares de la NCTM (por sus siglas en inglés, Comisión Nacional de Maestros de Matemáticas).

Principios para la enseñanza de las matemáticas. NCTM (2000):

Equidad. La excelencia en la educación matemática requiere equidad: altas expectativas y fuerte soporte para **todos los estudiantes.**

Curriculum. El curriculum es más que una colección de actividades, debe ser coherente, enfocado en matemáticas importantes, debe estar bien articulado a través de todos los grados.

ENSEÑANZA. La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere entender qué saben los estudiantes, qué necesitan aprender y entonces desafiarlos y apoyarlos para que aprendan también como sea posible. Saber cómo aprenden los estudiantes.

APRENDIZAJE. Los estudiantes deben aprender matemáticas con entendimiento, construcción activa de nuevo conocimiento a partir de su experiencia y conocimiento previo.

Estimación (evaluación). Debe estar soportada por el aprendizaje de matemáticas importantes y proveer información importante para estudiantes y maestros.

Tecnología: es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y realza el aprendizaje de los estudiantes.

Podemos explicar porque un modelo es lo que proponemos en el capítulo II y luego comentamos algunos puntos necesarios.

I.5 Metacognición: Aprender a Pensar

Empecemos con el significado de metacognición.

Metacognición: Conocimiento y control de las actividades del pensamiento y el aprendizaje. Díaz B. (2005)

La metacognición comprende al menos dos componentes separados:

- Estar consciente de las habilidades, estrategias y los recursos que se necesitan para ejecutar una tarea de manera efectiva –a saber que hacer-
- La capacidad para saber cómo y cuándo hacer las cosas.

Entendemos por metacognición la capacidad que tenemos de autorregular el propio aprendizaje y resolver problemas, es decir de planificar que estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia… transferir todo ello a una nueva actuación.

El conocimiento metacognitivo abarca toda la información que posee un individuo sobre sus propias cogniciones (ideas, puntos de vista, canal de comunicación, auditivo, visual o kinestésico) y de cómo se comportan cuando están en acción. Se debe fomentar el dialogo externo cuestionando al alumno sobre su trabajo, lo que lo lleva reflexionar y desarrollar su dialogo externo.

Esto implica dos dimensiones muy relacionadas:

a) El conocimiento sobre la propia cognición implica ser capaz de tomar conciencia del funcionamiento de nuestra manera de aprender y comprender los factores que explican que los resultados de una actividad, sean positivos o negativos. Por ejemplo: Cuando resuelves un problema matemático y decides utilizar un diagrama o quizás plantear y resolver una ecuación. De esta manera puede usar cualquiera de las dos opciones y llegar a la respuesta correcta. Pero el conocimiento del propio conocimiento no siempre implica resultados positivos en la actividad intelectual, ya que es necesario recuperarlo y aplicarlo en actividades concretas y utilizar las estrategias idóneas para cada situación de aprendizaje.
b) La regulación y control de las actividades que el alumno realiza durante su aprendizaje. Esta dimensión incluye la planificación de las actividades cognitivas, el control del proceso intelectual y la evaluación de los resultados.

METACOGNICIÓN Y AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. Conocimiento de la cognición (metacognición)

- Conocimiento del qué
- Noción del cómo
- Conocimiento del cuándo y el dónde
- Variables o categorías de persona, tarea y estrategia
- Experiencias metacognitivas

2. Regulación del conocimiento (autorregulación)

- Planificación y aplicación del conocimiento
- Monitoreo y supervisión (regulación, seguimiento y comprobación)
- Evaluación (relacionada con las categorías de personas, tarea y estrategias)

Cuadro 2. La Metacognición y autorregulación del aprendizaje. Tomado de Díaz Barriga, Frida. *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo*. Pág. 246

El rol de la metacognición se podría comprender si analizamos las estrategias y habilidades que se utilizan en el futbol: la velocidad, la coordinación y el estilo son propios de cada jugador, sin que necesite ser consciente en cada momento de los movimientos que hace. Por otro lado el entrenador hace que cada uno de ellos sea consciente de sus movimientos y estrategias y de esta manera puedan llegar al autocontrol y coordinación. En nuestro caso, el alumno debe hacer las funciones de entrenador y jugador. Primero ha de desarrollar y perfeccionar los procesos básicos (capacidades cognitivas básicas) con la ayuda de las técnicas de aprendizaje. En segundo lugar, el alumno ha de tener unos conocimientos específicos del contenido a aprender (conocimientos previos).

I.6 La Metacognición en la Resolución de Problemas

Una tarea propicia para la activación cognitiva es la resolución de problemas (RP).

Para resolver un problema se deben de utilizar recursos cognitivos, como los conocimientos previos con los que cuente el individuo para aplicarlos a la situación.

Donde destaca la METACOGNICION Y LAS ACTITUDES (interés y confianza).

De acuerdo con este enfoque, la metacognición consiste en ese “saber” que desarrollamos sobre nuestros propios procesos y productos del conocimiento y lo usamos para algún fin en especifico (en nuestro caso la RP).

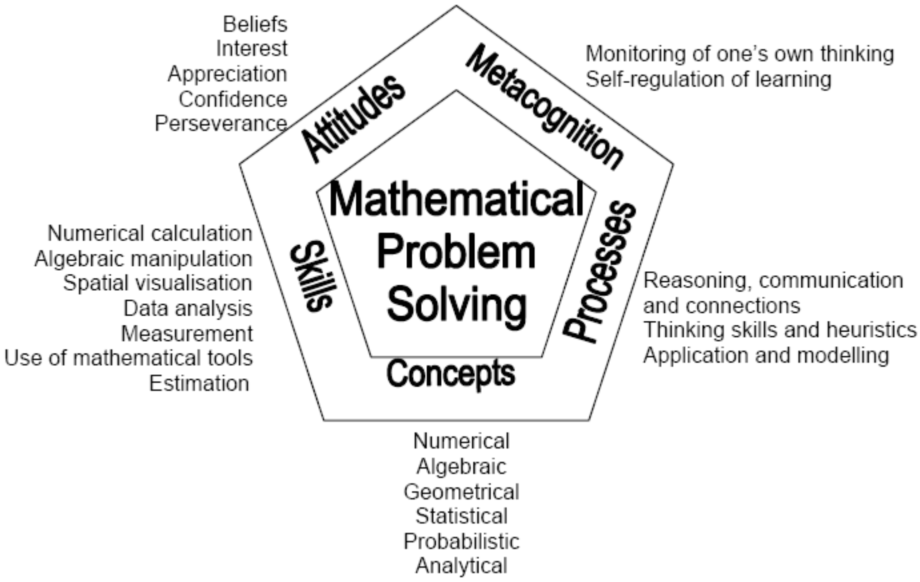


Diagrama1. *Resolución de Problemas Matemáticos* (Metacognición, Emociones, Conceptos, Habilidades, Heurísticas). Tomado del Documento Curricular de Primaria del Ministerio de Educación de Singapur 2006. Pág. 6.

El concepto se refiere al "conocimiento acerca de la cognición", una segunda línea habla más bien de la "regulación de la cognición".

El conocimiento y comprensión acerca de la cognición, es de tipo estable, constatable y falible. Primordiales cuando se quiere resolver un problema (¿qué hago?, ¿cómo lo hago?, ¿estaré bien?, "mejor lo hago otra vez"). Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también de que caminos no tomar.

Es **constatable** o **verbalizable** porque cualquiera "puede reflexionar sobre sus propios procesos".

El avance de la metacognición es gradual y se da a lo largo de la educación del chico. Se pretende que esta vaya mejorando y para ello es importante la resolución de problemas (RP).

Por lo tanto la metacognición en la resolución de problemas es una herramienta y recurso intelectual. Se manifiesta cuando alguien está en la búsqueda de la solución de un problema y para ello, estudia con detalle y a conciencia sus elementos así como los pasos dados hacia su solución.

Coloquialmente, la metacognición se puede describir como "voces interiores", algo así como Pepito Grillo cuando hablaba con Pinocho, las cuales ayudan a responder algunas cuestiones como “¿Qué estoy haciendo para resolver este problema?, ¿por qué y para qué lo estoy haciendo?”.

Como en la película de dibujos animados, estas voces no deben ser subestimadas, porque:

a) Pueden ayudarnos a seguir la ruta correcta para resolver el problema y revisar si efectivamente se llega a la solución.
b) Constituyen mecanismos de control del proceso que hacen posible “advertir de cualquier error cometido durante el desarrollo de la solución”
c) Permiten “hacer un seguimiento más estricto de la estrategia empleada y de sus primeros resultados”
d) Ayudan “para buscar estrategias de resolución especificas, efectivas y productivas ”

Lo que debe hacer un individuo Metacognitivo
1. Optimizar tiempo y esfuerzo mental
2. Mantener un autocontrol de las acciones realizadas
3. Evaluar el proceso practicado para no perder información complementaria y útil.

De acuerdo con el **Diagrama 2**, el plano cognitivo que esté intentando alguna persona para resolver un problema ejerce una **acción intelectual** sobre determinado **objeto** (por ejemplo, el enunciado de un problema); tal acción tiene una **intención**, de la cual quien resuelve está enterado y consciente.

La intención se convierte en **criterio para controlar y supervisar**, tanto la acción ejercida sobre el objeto, como la actividad para resolver lo que se pide.

Por ejemplo si la lectura de un enunciado tiene como objetivo entender un problema. El individuo estará enfrascado en la Fase Inicial del Proceso mientras no haya logrado comprenderlo. Aquí, la oración del problema es el **objeto** sobre el cual se ejerce la **acción** de **lectura** y ésta se hace con la **intención** de **comprender**, es decir, captar la estructura profunda del planteamiento.

Si el individuo luego de leer por primera vez el planteamiento se da cuenta que no ha comprendido el problema, entonces vuelve a leer o utiliza dibujos o se enfoca en casos particulares (heurísticas) (**Diagrama 1).** Luego que logra dominar todos los puntos, entonces podemos hablar de autonomía.

AMBITO DE LA METACOGNICIÓN

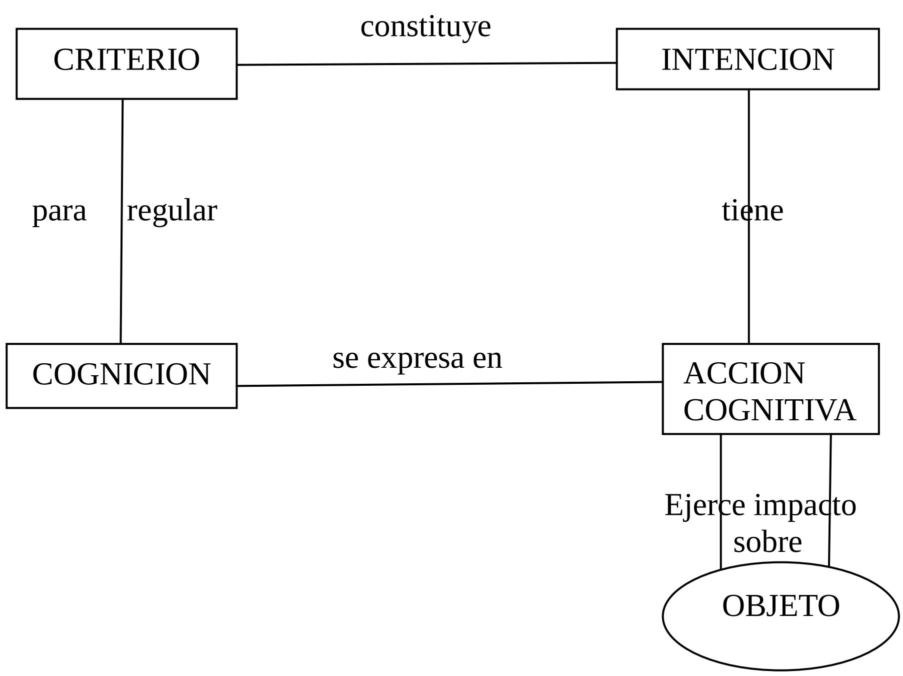


Diagrama 2. Esquema para interpretar el accionar metacognitivo durante la resolución de problemas matemáticos con texto. Tomado de "*La Metacognición y la Resolución de Problemas Matemáticos con Texto*" de Fredy E. González de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

I.7 Aprendizaje Autónomo.

Un punto importante que queremos destacar es que en nuestro sistema educativo los alumnos se vuelven dependientes del profesor, siempre esperando sus indicaciones, no tienen iniciativa para estudiar por su cuenta, es decir nunca leen o investigan, por gusto, por curiosidad. Robert Sternberg indica que el desarrollo de la metacognición conduce a la autonomía personal.

"*Los niños no necesitan aprender todo aspecto matemático que deben conocer. Si comprenden cómo se estructura el conocimiento matemático pueden generar conocimientos que no han aprendido*". Tomado de La Matemática desde la perspectiva del niño de Terezinha Nunes y Peter Bryant pág. 272.

Nosotros lo interpretamos así: Para resolver problemas de fracciones no necesitan dominar los algoritmos. Ejemplo: Ayerim vende aceite de coco para broncear en la playa de San Agustín que esta por el rumbo de Huatulco, cuenta con 16 litros y los quiere embasar en botellas de 3/4.

¿Cuántas botellas necesita? (Un problema similar es resuelto en la Sesión 2 del capítulo II). Tenemos confianza en el niño, en su poder creativo, su conocimiento es grande pero incompleto. Pueden GENERAR IDEAS para resolver problemas.

De acuerdo con Resnick, los aprendizajes complejos no se logran aislando las componentes visibles, desarrollándolas e integrándolas posteriormente, sino más bien simultáneamente.

Debemos considerar que la resolución de un problema en el salón de clases es un proceso muy complejo; para poder crear un ambiente de ánimo para los chavos (como dice Cantinflas en la película “El Profe”), es necesario que aprendamos a participar en cada modalidad de trabajo: individual, equipo y grupo completo.

Para poder ser autónomo, en lo que a aprendizaje se refiere, se necesitan desarrollar:

- ❖ Habilidades para usar el conocimiento y utilizarlos para alcanzar un propósito más complejo.
- ❖ Las actitudes que nos permiten enfrentar situaciones con una parte importante de incertidumbre.
- ❖ Aplicar en una situación distinta a aquella en la que aprendimos el nuevo conocimiento.

El autor Gerard Vergnaud citado por Nunes (1997) menciona que los conceptos matemáticos tienen tres facetas:

Facetas según Gerard Vergnaud	Aprender Invariantes Lógicos Aprender Sistemas Matemáticos Convencionales Aprender Requerimientos Matemáticos en diversas situaciones

Es necesario representar las situaciones de los problemas para poder resolverlos.

Pero tiene que utilizarse algún sistema de signos como herramienta para pensar.

¿En matemáticas como se puede favorecer el desarrollo de la autonomía?

La respuesta es RESOLVIENDO PROBLEMAS.

La influencia de los demás siempre existe, los conocimientos y procedimientos de otras personas nos los hemos apropiado, ya han pasado al control de nuestra mente.

Se trata de establecer de qué forma se ejerce esa mediación de y cesión de los propios dispositivos de aprendizaje.

La **autonomía** de aprendizaje es la facultad de tomar decisiones que permitan regular el propio aprendizaje para aproximarlo a una determinada meta.

Esta facultad de gobernarse a uno mismo cuando se aprende, tal como define el diccionario el término **autonomía**, recibe el nombre de **metacognición** que nos permite ser conscientes de nuestra cognición, es decir, de algunos de los procesos y productos que elaboramos en nuestra mente.

Debemos lograr que nuestros alumnos sean capaces de autorregular sus acciones para aprender; implica hacerlos más conscientes de las decisiones que toman.

Cualquier concepto matemático que se enseña en la primaria los discentes ya lo comprenden en cierta medida. Esta comprensión suele ser fragmentada y limitada, lo que puede conducirlos al error en algunas situaciones.

Esta comprensión naciente se debe considerar un TRAMPOLIN para que los estudiantes aprendan más sobre conceptos matemáticos.

Pero… ¿Se potencia en los estudiantes su capacidad metacognitiva, transfiriéndoles habilidades autorreguladoras de planificación, supervisión y evaluación de sus procesos mentales de toma de decisiones?

El profesor se limita a imponer unas tareas o “deberes”. Es común que el estudiante suele optar por utilizar sus sistemas de estudios habituales –cortar, fotocopiar y pegar; ensayo y error, etc.- que dan lugar a aprendizajes de carácter superficial, sumamente inflexibles y poco duraderos en el tiempo.

El contenido se recoge en documentos textuales y multimedia que pueden acompañarse de una guía de estudio. La eficacia de estas orientaciones genéricas suele ser nula. Los estudiantes difícilmente modifican su forma de aprender por un conjunto de consejos bien intencionados.

- Trabajo individual y en equipo
- Resolución de Problemas y realizar las actividades matemáticas
- Dialogo Constructivo (Platica con sentido)
- Evaluación de tu trabajo, del equipo y en el grupo

Lo que se requiere para promover la independencia del estudiante

Se explican, paso a paso, las operaciones qué debe hacer el alumno para estudiar y aprender la materia. Muy pronto el estudiante adquiere una rutina de estudio para enfrentarse a los distintos tipos de actividades que le proporciona el curso; sin embargo, se trata de un aprendizaje muy algorítmico y rígido.

Este tipo de prácticas se aleja de un enfoque que pueda promover aprendices autónomos. Se trata de un aprendizaje individualizado y dependiente de los requerimientos de otros.

La enseñanza de estos procesos autorreguladores suele adoptar la forma de guías o pautas de interrogantes que el estudiante deberá cerrar tomando las decisiones apropiadas para cada una de las actividades de aprendizaje que inicie. El término decisiones apropiadas, se refiere a la ejecución de acciones que se aproximan a la consecución del objetivo, minimizando al máximo cualquier efecto indeseable.

Autonomía es la posibilidad que tiene el estudiante de autorregular su propio proceso de estudio y aprendizaje en función de los objetivos que persigue, así el aprendizaje autónomo de cualquier contenido debe ser:

- **Intencional**, puesto que se dirige al objetivo.
- **Consciente,** en el sentido de que es objeto de supervisión y regulación metacognitiva constante, para no apartarse excesivamente del objetivo.
- **Sensible a las variables relevantes del contexto de enseñanza-aprendizaje**, dado que el alumno deberá responder del aprendizaje que haya realizado en un nivel de exigencia y bajo unas condiciones determinadas.

Aprendizaje estratégico es una formulación más precisa que la de aprendizaje autónomo (o independiente).

Ser autónomo aprendiendo supone, dominar un conjunto amplio de estrategias para aprender, o lo que es lo mismo, ser capaz de tomar decisiones intencionales y conscientes, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje perseguidos.

Obtener una estrategia no significa saber realizar o ejecutar correctamente las distintas operaciones de un procedimiento o técnica de aprendizaje, lo que quiere decir es que en circunstancias esa técnica será útil. A través de la interacción con los demás, el niño obtiene formas, procedimientos para adquirir y gestionar sus conocimientos e ideas, por desgracia, resultan ser simples y reproductivas.

La escuela debería compensar este déficit enseñando procedimientos de orden superior que permitan al estudiante elaborar y organizar sus conocimientos de manera más compleja y sofisticada.

Una enseñanza que persiga favorecer la adquisición de estrategias de aprendizaje debería respetar los siguientes principios.

- ✓ Es preciso que el profesor explicite a los estudiantes el sentido, la utilidad y el valor de la estrategia que pretende enseñar. Por ejemplo, hacer resúmenes.

- ✓ Es imprescindible enseñar los procedimientos necesarios para aprender en las diferentes disciplinas y permitir que los estudiantes puedan practicar de forma suficiente y en situaciones variadas estos procedimientos para que su dominio les permita utilizarlos de manera flexible y estratégica.

- ✓ Es necesario que las actividades propuestas y los métodos utilizados favorezcan la cesión gradual de la responsabilidad a los alumnos.

- ✓ Es preferible empezar con ejercicios simples y cerrados, ir progresando hacia problemas más abiertos y que supongan mayores demandas cognitivas.

- ✓ Es deseable proveer espacios en los que se pueda analizar de forma explícita el proceso de resolución seguido por los alumnos.

CONDUCIR UN PROCESO DE EDUCACIÓN METACOGNOSCITIVA

El objetivo de la educación metacognoscitiva es promover la autonomía cognoscitiva del alumno.

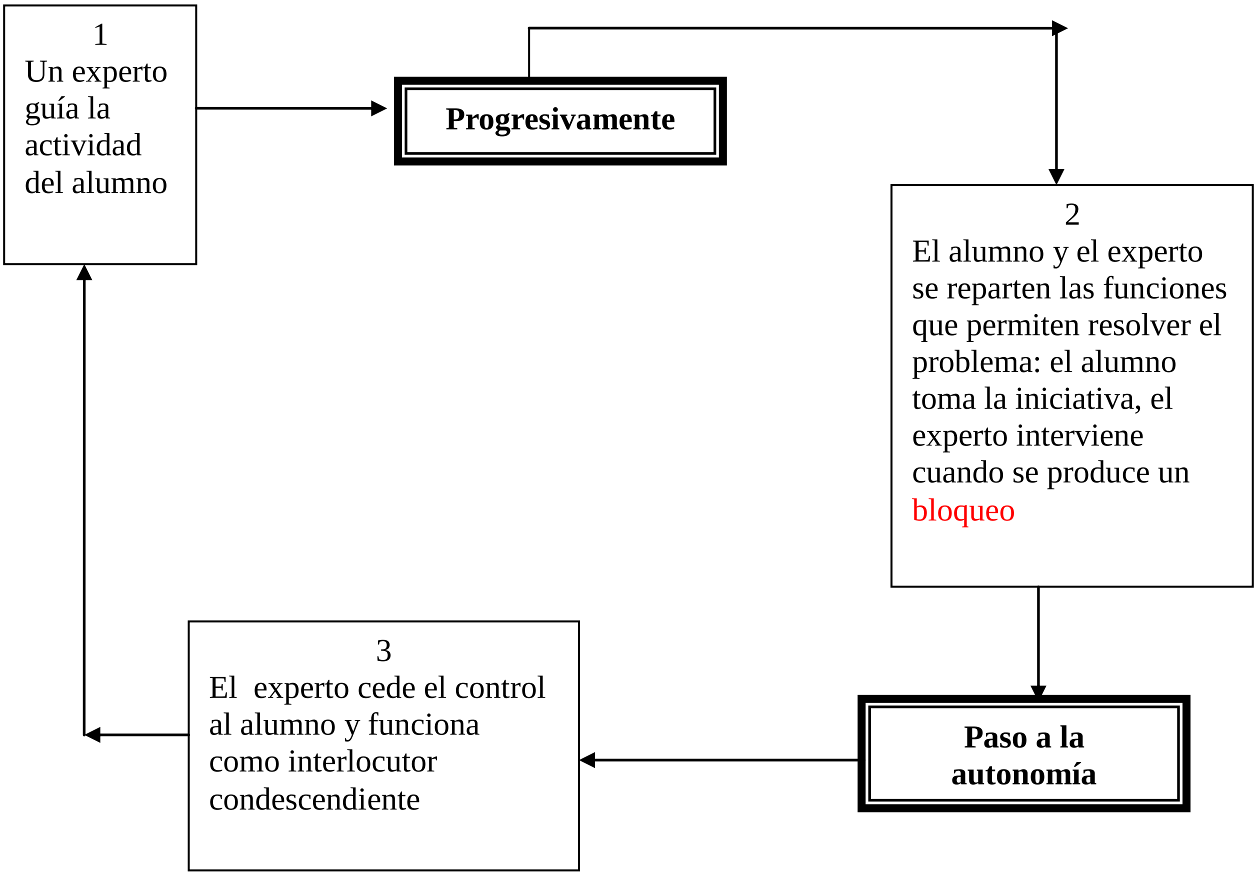


Diagrama 2. Pasos que se deben seguir para llegar al control de la acción. Tomado de Marcel Giry página 157 de su libro “Aprender a pensar, aprender a razonar”

Enseñar una estrategia implica ceder o transferir progresivamente el control de la estrategia, para que se apropie de ella y pueda empezar a utilizarla de manera autónoma. Transferir o ceder el control de una estrategia; es tanto como traspasar la ruta de interrogantes y decisiones, haciendo hincapié en los momentos críticos de la resolución, en la justificación bien argumentada de por qué la solución adoptada parece aquí la mejor. Deberíamos distinguir entre un primer momento en el que se presenta la estrategia, una segunda etapa en la cual el alumno puede practicar con la estrategia aprendida, bajo la guía del profesor, y una última fase en la que se espera que el estudiante, poco a poco demuestre un dominio cada vez mas autónomo de la estrategia aprendida. (**Diagrama 2**).

CAPITULO II

PRESENTACION DEL MODELO DE ENSEÑANZA AGA

“La matemática ha constituido, tradicionalmente la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado está tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seriamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces.”

Puig Adam

II.1 Planeación de Actividades

a) El Modelo AGA es muy sencillo de implementar, aquí el alumno trabaja más. El profesor solo “planea” ya no expone, planea las actividades o problemas a discutir en clase, pero esto no significa que su tarea sea secundaria (facilitador, mediador, instructor), debe tener claros los objetivos.
b) Hay que poner énfasis de que en este Modelo se requiere la firme convicción del maestro, de que los alumnos son creativos e inventivos. No se debe eliminar la iniciativa de los niños. Si no saben inventan, proponen, lo intentan, no tienen miedo del error.

La planeación de las actividades (puede ser una sesión de resolución de problemas) nos sirve para saber qué esperamos que respondan los estudiantes, o dónde puede haber dificultades, o cuáles son los errores más frecuentes en los que pueden caer ya que dada la experiencia y aplicación de determinado problema nos lo puede indicar.
Es claro también que puede existir algo que no esté en la planeación, por ejemplo, una respuesta novedosa, inesperada (creativa), una dificultad nueva, tal vez el problema sea muy complicado para ellos, por lo que se requiera empezar con otros con menor grado de dificultad, entre otros.
Se propone que la actividad (resolución de problemas) se pueda hacer en equipos (3 ó 4), así el profesor invitará a sus estudiantes a dar una respuesta por grupo de trabajo, por lo que el docente se concentrará en revisar solamente 5 ó 6 respuestas (una por equipo),

donde la respuesta fue tomada por consenso y la misma puede tener 2 métodos de solución. (Es claro que la respuesta debe ser la misma)

Otra opción es que trabajen en parejas (una u otra opción va a depender del grado de avance que tengan sus alumnos), se sugiere que el profesor haga un expediente de sus problemas, el objetivo es que prevea las cosas que pueden pasar. Con este material el maestro puede poner qué puntos de su programa cubre, un mismo problema puede revisar varios tópicos. (Por ejemplo con un problema de geometría se puede trabajar ángulos, áreas y perímetros).

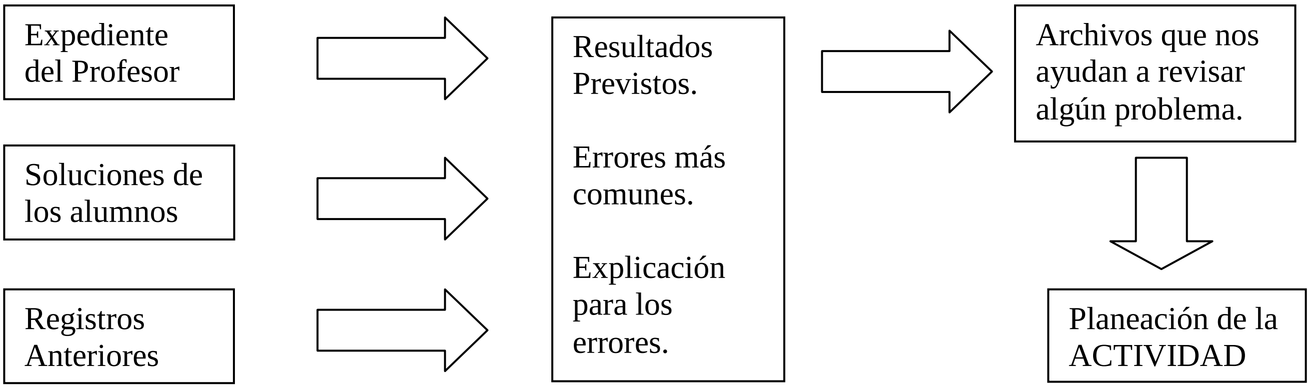


Figura 1. Planeación de la Actividad.
(Basado en “Guía del Profesor Algebra”. IPN 2002)

Si el maestro quiere seguir con lo postulado en su programa de estudio, puede elegir una actividad que se vincule a ese tema, la ventaja que tiene es que puede tocar varios puntos a partir de dicha actividad o problema.

El objetivo principal es que el alumno NO esté pasivo en clase, se recomiendan pocas clases de tipo expositivo, solo en caso necesario (para introducir nuevo tema), por ejemplo al iniciar un nuevo tema combinatoria, funciones generadoras, funciones y limites etc. Pero además de problemas también se pueden incluir otro tipo de actividades a juicio del profesor.

ACTIVIDAD

El Profesor:

Selecciona la actividad de aprendizaje a desarrollarse en cada sesión.

Propone y organiza la actividad de aprendizaje.

Debe estar preparado para lo inesperado.

Hace preguntas y sugerencias estilo Polya. (Busca un problema relacionado, resuelve un

problema similar más sencillo, divide el problema en partes, etc.)
Responde a las preguntas o dudas que tengan los alumnos, respecto a la actividad.
Entendemos por Actividad: problemas, juegos, consultar internet, ejercicios físicos, entre otros.

Los Estudiantes:

Son los actores principales de la ACTIVIDAD.

Trabajan en equipo o individualmente sobre la actividad propuesta por el profesor.

Elaboran una solución por escrito, si es en equipo puede haber dos soluciones, pero debe quedar claro que tiene que ser el mismo resultado.

GENERAR IDEAS

Los Estudiantes:
Piensan, inventan, crean, GENERAN IDEAS, proponen soluciones.
Presentan, si se le solicita sus ideas al profesor (que tal si se pierden)
Hacen preguntas, si existe algún bloqueo.
Discuten y llegan a un consenso, la idea debe darla cualquiera al azar (cuando trabajan en equipo se pelean y se explican, entre ellos se entienden mejor)
La consigna es dar solo una respuesta o ideas.

El Profesor:
Trabaja con los equipos, para que adquieran confianza porque sus ideas son tomadas en cuenta.
Platica y escucha las soluciones, da sugerencias y explicaciones breves, nunca responde directamente a las preguntas de los alumnos, tampoco les dice "como se hace".
Dirige la discusión de las soluciones según el objetivo de la actividad.
Vigila que trabajen de acuerdo a la actividad, atiende el trabajo de todos los equipos.
Decide el orden de presentación de las soluciones.
En caso de que los alumnos NO GENEREN IDEAS, entonces debe dar las GRANDES IDEAS, para avanzar (por ejemplo, sumar igualdades para resolver sistemas de ecuaciones)

ARGUMENTAR

Los Estudiantes:

Organizan la presentación oral de sus soluciones a todos sus compañeros.

Comparten y discuten su trabajo con el resto del grupo.

Defienden su solución con argumentos para sostener sus afirmaciones o sus soluciones.

El Profesor:

Puede intervenir, dando un enfoque más teórico de acuerdo al programa.

Comenta con los estudiantes las soluciones y da ejercicios para "consolidar" y reafirmar sus conocimientos.

La intervención del profesor se da hasta la argumentación de los alumnos, después de revisar sus ideas y explicaciones para motivarlos a dar una segunda solución más clara y que no deje dudas.

Define, de acuerdo a los avances obtenidos, la próxima actividad.

Como se ve el desarrollo de la actividad tiene como eje las ideas de los alumnos, el maestro ya no intenta que los alumnos piensen como él

Ejemplo 1. El dominó común y corriente tiene 28 fichas que van del (0, 0) ("mula de blancas"), (0, 1),…, hasta el (6, 6) ("mula de seises") ¿cuántas fichas tendrá un dominó que va del (0, 0),…, hasta el (10, 10)? (Se encontró en un Centro Comercial que existe el dominó que llega hasta la "mula" del quince (15, 15), ¿cuántas fichas tiene este dominó?)

El propósito del maestro puede ser aplicar las propiedades de una serie finita de términos positivos y la Fórmula para la suma de Gauss.

Lo inesperado es que tal vez cambie su propósito, es decir, de acuerdo a las IDEAS que surjan por parte de los alumnos puede cambiar ligeramente su objetivo, aprovechando el interés de sus aprendices. Por ejemplo puede "desviarse" hacia combinatoria y preguntar de cuántas fichas consta un dominó del (0, 0) hasta la ficha (n, n).

Ejemplo 2. Se lanzan tres dados, entonces con niños pequeños, el propósito puede ser, jugar a sumar los puntos de los dados. Si el maestro lo prefiere, de acuerdo al grupo puede trabajar una introducción a la teoría de probabilidades y preguntar qué tiene mayor probabilidad, “suma 10” o “suma 9”, en bachillerato.

II.2 Modelo AGA en acción

Para poner en práctica el Modelo AGA, se trabajó con alumnos de primer año de la secundaria Técnica No.1 en los meses de mayo, junio y julio de 2010, llegaron sin “etiquetas” de “listos”, “inquietos”, “flojos”, nuestra primera consigna fue identificar sus conocimientos y habilidades previas. Regresaron en enero de 2011. Se propusieron sesiones de trabajo que constaron de ejercicios de geometría, probabilidad, álgebra, operaciones con fracciones, aritmética, conteo, sumatorias, conjuntos, entre otros, Estos ejercicios fueron tomados del XI Concurso de Primavera de Matemáticas, en su segunda etapa por la Facultad de Matemáticas de la U.C.M (España), otros son de “100 Problemas de Matemáticas para 5º y 6º de Educación Primaria” y de la “Nueva Guía de Estudio Auxiliar para Sexto Año. Para la prueba de admisión a las escuelas secundarias con más de 2000 preguntas”, donde más de 800 son ejercicios de matemáticas.
También armaron cuerpos geométricos como cubos, cajas para regalos y cilindros.

Alumnos con los que se trabajó implementando AGA.

Escuchando las Ideas de los Alumnos. Parte Medular de AGA.

A continuación reproduzco las sesiones de ejercicios que se trabajaron durante este tiempo.

Lo importante es que LOS NIÑOS GENERARON IDEAS.

Las soluciones que se presentan en la revisión de las sesiones son con base en las ideas de los niños, no se transcriben literalmente, se hacen algunos ajustes de edición, pero SUS IDEAS las plasmé lo mejor posible.

Para romper el hielo con un nuevo grupo se proponen como material inicial los siguientes ejercicios a manera ilustrativa (el docente puede escoger otros).

Sesión de inicio

1. El kilo de tortillas costaba 6.20 y su precio aumentó 0.50 más. ¿Cuánto costará ahora 3 kilogramos de tortillas?

2. En la operación de abajo, el número que debe ocupar los cuadros es:

$$\begin{array}{rcccc} & \square & 9 & \square & \square \\ - & 4 & \square & 8 & \square \\ \hline & 3 & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

3. Un automóvil corre a una velocidad de 120 kilómetros por hora. ¿Cuántos metros recorre en 2:45 horas?

4. En la operación de abajo, el número que debe ocupar los cuadros es:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\ \ \square \\
\hline
\square\,4 & 5\ \ 4\ \ 6 \\
 & \ \ \ 6\ \ 6 \\
 & \ \ \ 1\ \ 8
\end{array}
$$

5. Luz traza un cuadrado de 12cm. por lado y otro que mide la tercera parte de cada lado. ¿Cuál es el área del pequeño?

6. Encuentra el número que escrito en el cuadro completa correctamente la multiplicación.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \square & 1 & 4 \\
 & \times & 4 & 3 \\
\hline
 & 6 & 4 & \square \\
8 & 5 & 6 & \\
\hline
9 & \square & 0 & \square
\end{array}
$$

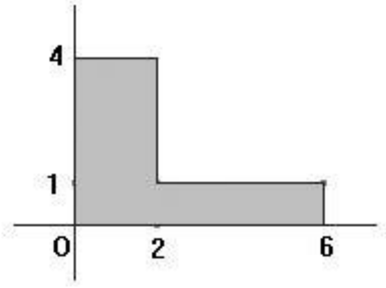
Esta sesión es meramente de exploración, se consideraron las operaciones con cuadros para ser completados, pues a los estudiantes les agrada este tipo de ejercicios, en las siguientes haremos énfasis en los enunciados que nos generen más de una posibilidad de resolución, como también los que nos den más de una respuesta y elegir cuál es la correcta.

La idea es aprovechar los conocimientos previos de los alumnos, NO ENSEÑAMOS NADA DE INICIO, ni damos indicaciones de cómo resolver los problemas.

Lo importante es proponer PROBLEMAS Y TOMAR EN CUENTA LAS SOLUCIONES DE LOS ALUMNOS Y AYUDARLOS A ARGUMENTAR.

SESIÓN 1

1. Hallar el área y el perímetro de la figura sombreada que se encuentra en el plano cartesiano



2. Se usan los dígitos 1, 2, 3 y 4 para generar 256 números diferentes cada uno con cuatro dígitos. Se pueden repetir dígitos, de tal modo que 1111 y 1113 son dos de los números formados. La suma de los 256 números formados es:

3. En mi huerto cosecho una cebolla cada 4 días, un tomate cada 15 y una lechuga cada 18 días. Si me como los productos el mismo día que los cosecho. ¿Cada cuántos días podré hacerme una ensalada mixta? (tomate, lechuga y cebolla.)

4. O es el centro de un cuadrado de lado 4cm. y M el punto medio de un lado. ¿Cuál es el área en cm^2 del cuadrado de lado OM?

5. Se tira una moneda 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan exactamente dos caras seguidas?

6.a) ¿En cuál de estos números la cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las decenas y las unidades?

531 2321 311 2010 3111

b) Escribe tú un número comprendido entre 10,000 y 100,000 en el que la cifra de las centenas sea igual a la suma de la cifra de las decenas y la de las unidades. (No vale que las tres últimas cifras sean ceros)

c) ¿Cuál es el menor número de tres cifras que cumple esta condición?

d) ¿Cuál es el menor número comprendido entre 10, 000 y 100, 000 que cumple esta condición? (No vale que las tres últimas cifras sean ceros)

7. El número 195 se ha obtenido al multiplicar dos números impares consecutivos. ¿Qué números se han multiplicado?

8. La suma de los cuadrados de los 20 primeros enteros positivos es 2870.
¿Cuál es la suma de los cuadrados de los 19 primeros enteros positivos?

9. ¿Cuál será el cociente de dividir el número que resulta del producto 27 x 31 x 35 x 39 x 43 entre el que resulta del producto 43 x 39 x 35 x 31 x 3?

10. Encuentra el número que falta para que sea cierta la siguiente igualdad:

2000 x 125 = 25 x…

11. David quiere hacer una valla alrededor de su jardín. Para ello piensa clavar unas estacas separándolas 1m. El jardín de David mide 30m de largo y 20m de ancho y en cada esquina pone una estaca. ¿Cuántas estacas necesita?

12. ¿Qué número es el 3 × 106 + 5 × 106 + 2 × 106?

13. ¿Cuál es el resultado de restar la suma de los pares del 2 al 100 a la suma de los impares del 1 al 99?

14. ¿Qué número falta para que sea cierta la igualdad?

10 x 20 x 30 = 1000 x…

15. A Dani le dijeron que multiplicara un número por 5 y, por error, lo que hizo fue dividirlo por 5. La respuesta que dio fue 5. ¿Qué respuesta debería haber dado si hubiera hecho lo que le dijeron?

16. En el cuadrado mágico de la figura sabes que las horizontales, verticales y diagonales suman lo mismo. ¿Qué número debe aparecer en la casilla marcada con X?

X		
	15	3
12		24

La Primera sesión fue para diagnosticar sus conocimientos previos, los cuales resultaron ser de regulares a buenos, pues pudieron resolver con relativa facilidad los 16 problemas. Al igual que la anterior, una puede usarse para nivel secundaria y esta para bachillerato, o como prefiera.

Para está sesión pongo en análisis los ejercicios 2 y 3.

Problema 2. Se usan los dígitos 1, 2, 3 y 4 para generar 256 números diferentes cada uno con cuatro dígitos. Se pueden repetir dígitos, de tal modo que 1111 y 1113 son dos de los números formados. La suma de los 256 números formados es:

Este problema causó conflicto, pues no encontraban una manera más rápida de sumar los 256 números, así que la sugerencia fue que se fijaran en el primer número de la lista (1111) y el último (4444), luego que los sumaran (1111+ 4444 = 5555), después que observaran el segundo (1112) y el penúltimo (4443) y que volvieran a hacer la adición (1112 + 4443 = 5555 de nuevo). Con esta sugerencia dedujeron que debían hacer 128 sumas iguales o multiplicar 128 x 5555 = 711,040. Que es la respuesta correcta.

En este caso se propone cambiar este problema por otro más sencillo que solo incluya los números que se forman con los primeros dos o tres dígitos y en sesiones posteriores incluirlo (siguiendo las sugerencias de Polya)

Problema 3. En mi huerto cosecho una cebolla cada 4 días, un tomate cada 15 y una lechuga cada 18 días. Si me como los productos el mismo día que los cosecho. ¿Cada cuántos días podré hacerme una ensalada mixta? (tomate, lechuga y cebolla.)

Para la resolución del mismo, los estudiantes propusieron algunos métodos de solución. El primero consiste en hacer una tabla con las 3 legumbres.

Cebolla	Tomate	Lechuga
4	15	18
8	30	36
12	45	54
16	60	72
20	75	90
24	90	108
28	105	126
32	120	144
36	135	162
40	150	180

Cebolla	Tomate
44	165
48	180
52	
56	
60	
64	
68	
72	
76	
80	

Cebolla
84
88
92
96
100
104
108
112
116
120

Cebolla
124
128
132
136
140
144
148
152
156
160

Cebolla
164
168
172
176
180

Es un poco extensa, se muestra que en el día 180 las 3 se van a encontrar (y no antes), por lo que en este día se va a poder hacer una ensalada mixta.

Otro procedimiento fue hallar el mínimo común múltiplo (mcm)

4 – 15 – 18	2
2 – 15 – 9	2
1 – 15 – 9	3
1 – 5 – 3	3
1 – 5 – 1	5
1 – 1 – 1	

$\left.\begin{matrix}2\\2\\3\\3\\5\end{matrix}\right\}$ 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 180

El mínimo común múltiplo (mcm) como su nombre lo indica es múltiplo de los 3 y es el más pequeño por lo que "cada 180 días se pueden utilizar los tres ingredientes para hacer una ensalada mixta" y no antes.

Con la tabla y con el mcm queda claro que la respuesta es cada180 días podrá realizar su ensalada con los tres ingredientes.

Otra respuesta que me dieron fue realizar un calendario (no la incluyo), donde contaba los días en los que cada vegetal se cultivaba, marcándolos (fue muy extenso, pues es más de medio año) y así llegar al día 180 donde los tres coincidían.

Cada sesión cuenta con problemas clave, los demás son complementarios. Es decir, en este trabajo prestamos mayor atención a los ejercicios en los que se dan 2 ó más formas de resolverse, así como los que dan diferentes respuestas, esto es para poder analizarlas y ver la generación de ideas de los chicos, con su respectiva argumentación.

Los niños mostraron su iniciativa en esta primera sesión, no tienen miedo al error, algunas veces se “atoran” y esta es la parte esencial, aprovechar sus ideas, para poder “desatorarlos”

SESIÓN 2

1. A medio día compré un jugo de 750ml. por 2€ (euros) ¿Cuánto costará un litro del mismo jugo?

2. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 9900.

3. ¿Cuántos segundos tardará un tren de 200m de largo en pasar completamente un túnel de 200m a una velocidad de 200 km/hora?

4. ¿Cuál es el mayor y cuál el menor número de cuatro cifras en el que todas ellas son diferentes?

5. Cuando las tres últimas cifras de un año son cifras consecutivas en orden creciente (como por ejemplo en 1123), decimos que se trata de un año ascendente. ¿Cuál fue el último año ascendente? ¿Cuál será el próximo?

6. Dos litros de aceite cuestan 10 €, ¿cuánto costará un cuarto?

7. Pablo tiene una bolsa de canicas, le da la mitad a Sofía y luego un tercio de las que quedan en la bolsa se las da a Carmen. Finalmente le quedan 6 canicas en la bolsa a Pablo. ¿Cuántas canicas tenia Pablo al inicio?

8. Nueve gallinas ponen 12 huevos en 4 días. ¿Cuántos huevos pondrán 4 gallinas en 9 días?

9. Alejandra tiene 40 litros de agua de jamaica y los quiere poner en botellas de ¾ de litro. ¿Cuántas botellas necesita Alejandra?

10. En un grupo hay 4 chicas por cada 3 chicos. Si en total hay 35 estudiantes. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?

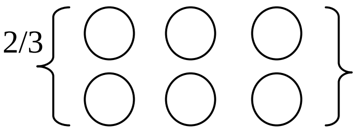
Con lo revisado en la sesión 1, la siguiente, se realizó con la información obtenida anteriormente. Nos interesaron los problemas 7, 9 y 10, a continuación presento algunos de los procedimientos que propusieron los estudiantes.

Problema 7. Pablo tiene una bolsa de canicas, le da la mitad a Sofía y luego un tercio de las que quedan en la bolsa se las da a Carmen. Finalmente le quedan 6 canicas en la bolsa a Pablo. ¿Cuántas canicas tenia Pablo al inicio?

Para este ejercicio, los desarrollos para llegar a la respuesta correcta fueron:

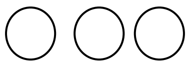
Trabajar hacia atrás. Es decir iniciar con el último dato, “le quedan 6 canicas”, antes de esto a Carmen le da 1/3, entonces le sobran 2/3 que es igual a 6, de aquí que 1/3 son 3. Por lo tanto antes de darle canicas a Carmen le quedaban 3/3 que equivalen a 9; a Sofía le dio la mitad, entonces ½ son 9 canicas, por lo tanto el total de canicas de Pablo antes de repartirlas entre Sofía y Carmen eran 18.

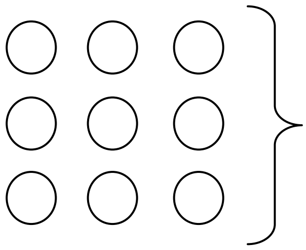
Representarlo por medio de diagramas o dibujos.



Le quedan 6 canicas a Pablo.

Pero a Carmen le dio 1/3,



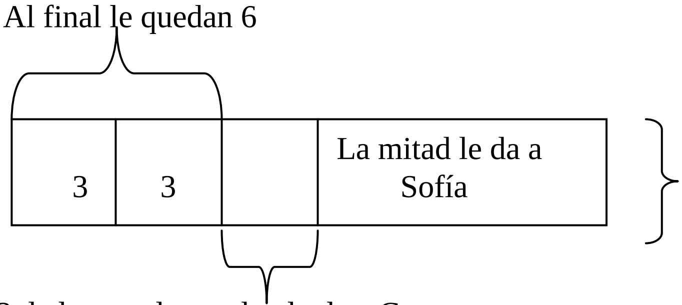


Se tiene que 9 le quedaron después de darle la mitad a Sofía

Por lo que el total de canicas es 18. (1/2 son 9)

Método Grafico.

Al final le quedan 6



Número de canicas de Pablo

1/3 de las que le quedan le da a Carmen

Por lo anterior se deduce que a Carmen le dio 3 canicas (6 ocupa 2/3 de las que le quedaron después de darle la mitad a Sofía), entonces la mitad son 9 canicas y el total son 18.

Otra forma de resolverlo es mediante el álgebra. (Utilizar ecuaciones de primer grado)

Si c = número de canicas de Pablo, entonces tenemos la siguiente ecuación:

$c - 1/2\ c - 1/3\ (1/2\ c) = 6$. Escrito de otra forma.

$\frac{1}{2} c - 1/6\ c = 6$. Resolviendo para c obtenemos que la respuesta es:

$$c = 18$$

Problema 9. Alejandra tiene 40 litros de agua de jamaica y los quiere poner en botellas de ¾ de litro. ¿Cuántas botellas necesita Alejandra?

Para solucionar el problema de Alejandra y su venta de agua los estudiantes hicieron lo siguiente:

1. Primero convirtieron los ¾ de litro en mililitros es decir ¾ de litro = 750 ml. hicieron lo mismo con los 40 litros, es decir 40 litros = 40,000 ml. Después hicieron una división 40,000 ÷ 750 = 53.3….

La respuesta que dieron es que necesita 53 botellas y todavía le sobra un poco de agua.

2. Otra forma de enfrentar dicho problema fue. "Si la botella es de 3/4 y tenemos 40 litros, entonces tenemos 40 x 4 = 160 cuartos de litro que envasar, entonces si divido 160 ÷ 3 = 53. 3"

Se requieren de 53 botellas para envasar el agua.

3. Hubo quien dibujo sus botellas y fue restando cada que llenaba una (el procedimiento fue muy largo).

Parece que usar **fracciones** puede facilitar las cosas, este problema nos invita a echar mano de ellas para mostrar su utilidad.

Problema 10. En un grupo hay 4 chicas por cada 3 chicos. Si en total hay 35 estudiantes. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?

Este ejercicio nos dio varios procedimientos para poder resolverlos, algunos fueron los siguientes:

Elaboración de Tablas

Niñas	4	8	12	16	20
Niños	3	6	9	12	15
Total	7	14	21	28	35

Con la ayuda de esta tabla, es claro que hay 5 niñas más que niños en el grupo.

Alguien más "**sumó"** a los niños con las niñas (7) luego dividió 35 ÷ 7 = 5

Después multiplica 5 x 4 = 20 (número de niñas)

y 5 x 3 = 15 (número de niños). Finalmente resta (20 - 15) y el resultado es que son 5 niñas más que niños.

También el **álgebra** nos puede ayudar:

Si x = número de niñas

y = número de niños y cada 4 niñas hay 3 niños, entonces:

(1) $x + y = 35$

$3x = 4y$, igualando a cero: (2) $3x - 4y = 0$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1)\ x + y = 35$$

$$(2)\ 3x - 4y = 0$$

Para resolverlo, multiplicamos por 4 la ecuación (1) y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 4x + 4y = 140 \\ \\ (2)\ 3x - 4y = 0\end{array}\right\}$$

Si sumamos (1) y (2) eliminamos a "y" y nos queda:

$7x = 140$, despejando x:

$$x = 140 / 7$$

$$x = 20.$$

Sustituimos x en la ecuación (1) original $x + y = 35$:

$20 + y = 35$, resolvemos para y:

$$y = 35 - 20$$

$$y = 15$$

La respuesta es que hay 20 niñas y 15 niños, por lo que son 5 niñas más en el grupo.

Puede resultar un poco confuso el uso del álgebra para resolver este problema, procediendo de las otras formas se llega a la respuesta de una manera más rápida, lo importante es que se emplee para volverlo una herramienta de gran utilidad, para solucionar ejercicios más complicados, donde una tabla sea poco conveniente.

SESIÓN 3

1. Un recipiente está lleno hasta 2/5 de su capacidad. Si le faltan 27 litros para estar lleno, la capacidad total del recipiente, en litros, es:
2. ¿Qué cifra se ha perdido aquí: $1/8 + 3/8 = \square/6 + 1/6$?

3. La suma de dos enteros consecutivos es 2001. ¿Cuánto vale el producto de su suma por su diferencia?

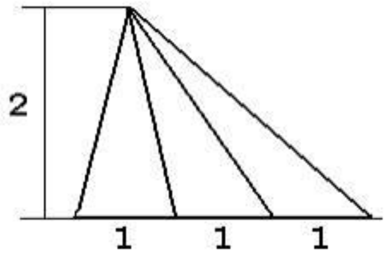
4. Cada uno de los 6 Hermanos mide 1.80m, pero cuando se sube uno encima del otro para determinados números acrobáticos, miden, entre los dos, 330cm. ¿Cuántos cm mide la torre formada por los seis Hermanos?

5. Una abuela reparte una cantidad de dinero entre sus diez nietos de la siguiente forma: al 2º le deja la mitad que al 1º, al 3º la mitad que al 2º, al 4º la mitad que

al 3º y así sucesivamente. Si al más pequeño le deja 1 €, ¿qué cantidad de dinero repartió?

6. Bruno compra un automóvil nuevo, recorre sus primeros 15, 000km. El rota o intercambia las 5 llantas (al comprar un auto nuevo va incluida la de refacción también sin usar). Indica ¿cómo las debe rotar para que las llantas se gasten igual?

7. ¿Cuánto suman las áreas de todos los triángulos que se pueden formar en la figura de abajo?



8. En un concurso de 25 preguntas, contesté correctamente el 60%. ¿Cuántas preguntas contesté correctamente?

9. El perímetro del mayor de dos cuadrados es 8 veces el perímetro del pequeño. ¿Cuántos cuadrados pequeños tengo que utilizar para, sin montarse uno sobre otro, cubrir el cuadrado grande?

10. El otro día hice una lista de todos los números de 7 cifras que contenían exactamente 6 nueves. ¿Cuántos números tenía mi lista?

En esta sesión los ejercicios que tomamos en cuenta son el 4, 5 y 6.

Problema 4. Cada uno de los 6 Hermanos mide 1.80m, pero cuando se sube uno encima del otro para determinados números acrobáticos, miden, entre los dos, 330cm. ¿Cuántos cm. mide la torre formada por los seis Hermanos?

Para resolver el problema de los 6 Hermanos los chicos hicieron uso de los siguientes procedimientos:

1. Algunos multiplicaron 1.80 por 6 y obtuvieron 10.80 metros. Después multiplicaron 0.30 por 3 que resulta 0.90 metros. Al final resta 10.80 – 0.90 = 9.90 metros.

2. Otros niños hicieron el producto 3.30 por 3 (pues si se suben dos miden 3.30 metros por 3 porque se hacen 3 parejas) y también obtienen 9.90 metros.

3. Unos mas hicieron dibujos y notaron que el ultimo de los hermanos ya no iba a sostener a nadie más, por lo que multiplicaron 1.80 por 6 que es igual a: 10.80 metros luego restan 1.50 (resultado de multiplicar 5 por 0.30 metros), y el resultado es 9.40 metros, que es la respuesta correcta.

Se utilizó el método gráfico para ejemplificar donde estaba el error en el cálculo.

Problema 5. Una abuela reparte una cantidad de dinero entre sus diez nietos de la siguiente forma: al 2º le deja la mitad que al 1º, al 3º la mitad que al 2º, al 4º la mitad que al 3º y así sucesivamente. Si al más pequeño le deja 1 €, ¿qué cantidad de dinero repartió?

Para el problema de la abuelita la mayoría de los alumnos utilizaron el método de trabajar hacia atrás, es decir, empezaron con que al último nieto le dio un euro, entonces al noveno le dio 2 y así sucesivamente. Es decir el resultado es $2^{10} = 1024$. (Esto es incorrecto)

También usaron tablas. Llenándolas de atrás hacia adelante.

Nieto	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Dinero	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Aquí el resultado es 512 euros, es decir $2^9 = 512$. (Respuesta correcta)

Problema 6. Bruno compra un automóvil nuevo, recorre sus primeros 15, 000km. El rota o intercambia las 5 llantas (al comprar un auto nuevo va incluida la de refacción también sin usar). Indica ¿cómo las debe rotar para que las llantas se gasten igual?

Para el problema de Bruno y su auto nuevo, se encontraron dos formas de resolverlo.

Respuesta 1. Hacer el cambio de llantas cada mil kilómetros, para dejarlo claro se utilizó una tabla:

Llantas A	B	C	D	E	Kilómetros recorridos por el automóvil
1000 km	1000 km	1000 km	1000 km	Descansa	1000 km
2000 km	2000 km	2000 km	Descansa	1000 km.	2000 km
3000 km	3000 km	Descansa	2000 km	2000 km	3000 km
4000 km	Descansa	3000 km	3000 km	3000 km	4000 km
Descansa	4000 km	4000 km	4000 km	4000 km	5000 km
5000 km	5000 km	5000 km	5000 km	Descansa	6000 km
6000 km	6000 km	6000 km	Descansa	5000 km	7000 km
7000 km	7000 km	Descansa	6000 km	6000 km	8000 km
8000 km	Descansa	7000 km	7000 km	7000 km	9000 km
Descansa	8000 km	8000 km	8000 km	8000 km	10, 000 km
9000 km	9000 km	9000 km	9000 km	Descansa	11, 000 km
10, 000 km	10, 000 km	10, 000 km	Descansa	9000 km	12, 000 km
11, 000 km	11, 000 km	Descansa	10, 000 km	10, 000 km	13, 000 km
12, 000 km	Descansa	11, 000 km	11, 000 km	11, 000 km	14, 000 km
Descansa	12, 000 km	12, 000 km	12, 000 km	12, 000 km	15, 000 km

Como se puede observar, cada 5 mil kilómetros que recorre el auto, las llantas recorrían 4 mil kilómetros. Siguiendo con este proceso, al llegar a los 10 mil kilómetros que el carro recorría, las llantas tenían un desgaste de 8 mil kilómetros cada una. Finalmente, al llegar a los 15 mil kilómetros, las 5 llantas fueron utilizadas en 12 mil.

Otra alumna hizo algo similar:

Respuesta 2.

Llanta 1	Llanta 2	Llanta 3	Llanta 4	Llanta 5	Kilómetros que recorre el carro
3 mil km.	3 mil km.	3 mil km.	3 mil km.	X	3 MIL
6 mil km.	6 mil km.	6 mil km.	X	3 mil km.	6 MIL
9 mil km.	9 mil km.	X	6 mil km.	6 mil km.	9 MIL
12 mil km.	X	9 mil km.	9 mil km.	9 mil km.	12 MIL
X	12 mil km.	12 mil km.	12 mil km.	12 mil km.	15 MIL

El cambio se va a dar cada 3 mil kilómetros, se llega a la misma respuesta, al cabo de 15 mil kilómetros todas las llantas habrán recorrido 12 mil cada una. Ambos procedimientos fueron expuestos a sus compañeros, al terminar la segunda exposición pregunte "¿quién está bien?", nadie contesto, todos se quedaron callados, después de una pausa, les comente "ambos están bien" y su reacción fue de sorpresa, no daban crédito a lo que veían sus ojos, pero luego de explicar con más detalle "les cayó el 20".

Quizás por fines prácticos utilicemos está ultima respuesta, pues cambiar cada mil kilómetros de llanta, se puede hacer tedioso y solo cambiarlas cada 3 mil resulta menos trabajo.

SESIÓN 4

1. ¡El 80 % de los estudiantes de la Secundaria Técnica No. 1 está a favor de que haya exámenes no avisados!, proclamó el Director con satisfacción olvidando conscientemente que al 80 % de los estudiantes de la escuela no se les había preguntado nada. ¿Qué porcentaje de los estudiantes de la secundaria le habían dicho al Director que estaban a favor de los exámenes no avisados?

2. Si dibujas dos rectas paralelas al eje X, tres rectas paralelas al eje Y y cuatro rectas paralelas a la recta $y = x$, ¿cuál es el menor número posible de puntos de corte entre las nueve rectas que has dibujado?

3. El número 710 se puede escribir como suma de 5 enteros consecutivos ¿Cuál es el más pequeño?
4. Un avión tarda 2 horas y 30 minutos en ir de Madrid a Roma. Si hubiera ido un 20 % más rápido, ¿cuánto habría tardado?

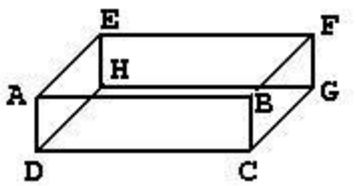
5. Un rectángulo es 25 veces más largo que ancho. ¿Cuál es el cociente entre su perímetro y el perímetro del cuadrado de igual área?

6. Si tengo 10 años más que mi hermano y hace 10 años él tenía 10 ¿Qué edad tendré dentro de otros 10 años?

7. Tengo algunas estrellas dibujadas en una cartulina y están separadas 1.5 cm. Si se dibujan 65 estrellas. ¿Cuál será la distancia entre la primera y la última?

8. En una clase de 30 estudiantes, hay 7 que tienen gafas, 15 que tienen calculadoras y 2 que tienen gafas y calculadoras. ¿Cuántos de ellos no tienen ni gafas ni calculadoras?

9. ¿Cuál es el volumen de la figura si AB= 13, BC=7 y CG= 9?



En la sesión 4 vamos a poner énfasis en los ejercicios 3, 4 y 8.

Problema 3. El número 710 se puede escribir como suma de 5 enteros consecutivos ¿Cuál es el más pequeño?

Para el ejercicio 3, los niños hicieron lo siguiente:

Se dividió 710 entre 5 que es igual a: 142, entonces es el número que está “en medio”, es decir los números son:

140 (142 – 2), 141 (142 - 1), 142, 143 (142 + 1), 144 (142 + 2).

Por lo tanto el número consecutivo más pequeño es 140.

Procedimientos similares realizaron; se aplicó aquí el de prueba y error.

También usaron el álgebra:

Si n es el número más pequeño entonces:

$$\underbrace{n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)}_{\text{SUMA DE 5 ENTEROS CONSECUTIVOS}} = 710$$

Haciendo operaciones arriba llegamos a: 5n + 10 = 710

Resolviendo la ecuación para n:

$$5n = 710 – 10$$

$$5n = 700$$

$$n = 700 / 5$$

$$n = 140$$

El número más pequeño es 140.

Problema 4. Un avión tarda 2 horas y 30 minutos en ir de Madrid a Roma. Si hubiera ido un 20 % más rápido, ¿cuánto habría tardado?

Para el ejercicio 4 los dicentes propusieron los siguientes procedimientos:

“Regla de Tres”:

2 horas 30 minutos	100%
¿?	20 %

Algunos la aplicaron directa, es decir, no tomaron en cuenta que el tiempo estaba dado en 2 unidades diferentes y llegaron a respuestas erróneas.

Para los que se fijaron en las unidades de tiempo, lo que hicieron fue pasar las horas a minutos,

2 horas = 120 minutos, después le agregan los 30 extras y resultan 150 minutos de viaje.

Después multiplican 150 minutos por 20 = 3000, después dividen entre 100

3000 / 100 = 30, por lo que 30 minutos es el 20%. Finalmente restan 30 minutos del tiempo total, por lo que el viaje lo realizarán en 2 horas solamente.

Algunos otros prefirieron convertir los minutos a horas, es decir, 30 minutos = 0.5 horas Y proceden de la misma forma: 2.5 por 20 = 50, después 50 entre 100, 50 / 100 = 1 / 2 = 0.5.

Para restar 0.5 a 2.5 y da como resultado 2 horas de viaje.

Otros chicos dividieron 2.5 horas entre 5 (ya que el 20% equivale a la quinta parte del total)

2.5 ÷ 5 = 0.5. Restan 2.5 – 0.5 = 2 horas de viaje.

Se procedió igual pero con los tiempos expresados en minutos 150 ÷ 5 = 30

150– 30 = 120 minutos de viaje, o lo que es lo mismo, 2 horas.

Problema 12. En una clase de 30 estudiantes, hay 7 que tienen gafas, 15 que tienen calculadoras y 2 que tienen gafas y calculadoras. ¿Cuántos de ellos no tienen ni gafas ni calculadoras?

En el ejercicio de las gafas y las calculadoras nos encontramos con lo siguiente:

Algunos jóvenes razonaron así: “si son 30 estudiantes, 7 tienen gafas, 15 calculadoras y 2 gafas y calculadoras, entonces: 7 + 15 + 2 = 24, por lo que 6 son los estudiantes que no tienen ni gafas ni calculadoras”.

Otros dijeron casi lo mismo solo que si identificaron que los 2 que tienen gafas y calculadoras se estaban contando 2 veces en los 7 que tienen gafas y los 15 que tienen calculadoras, por lo que 5 solo tienen gafas y 13 solo tienen calculadoras más los 2 que tienen ambas cosas da como resultado 20, entonces 10 son los que no tienen ni gafas ni calculadoras. Respuesta correcta.

También se puede hacer uso de dibujos o esquemas (o con diagramas de Venn para ver cómo están distribuidos los alumnos del grupo de 30 que dice el ejercicio)

SESIÓN 5

1. En la operación de abajo, el único número que debe de ocupar los cuadros es:

$$\begin{array}{rl} & \quad\ \ 2\,\square \\ \square\ 6 & \overline{\big)\ 8\ 4\ 0} \\ & \ \ 1\ 2\ 0 \\ & \quad\ \ 1\ 2 \end{array}$$

2. El Barcelona F.C. jugó 40 partidos en la temporada regular de la Liga Española, si ganó 70% de ellos. ¿Cuántos ganó?

3. Si los alumnos de Primero de Secundaria entran a las 7:30 horas, salen a las 14:30 horas, y tienen un receso de 30 minutos.
   a) ¿Cuántos minutos tienen de clase?
   b) Si tienen clases de 7:00 a 14:00 horas y 6 descansos de 10 minutos entre cada clase. ¿Cuántos minutos tienen de clase?

4. Abigail compró 3 libretas de $25.5 cada una, 1 juego de geometría de $48.5, 1 libro de matemáticas de $65.7 y 1 lápiz de $4.2. ¿Cuánto recibe de cambio si paga con un billete de a $500?

5. En la carretera que va de México a Veracruz, Puebla se encuentra en el kilometro 135 y Orizaba en el kilometro 305. ¿En qué kilometro está el punto medio entre las ciudades de Puebla y Orizaba?

6. Jazmín vende agua de limón en vasos de ¼ de litro a $7.50 cada uno. Si un día vendió 8 litros y medio de agua. ¿Cuál fue el total de la venta?

7. Valeria vendió 40 periódicos a $5.25 cada uno. Guardó la mitad de su dinero y con la otra mitad compró revistas sabatinas a $7.50 cada una. ¿Cuántas revistas sabatinas compró?

8. Una fotografía de 12cm. de largo por 8cm. de ancho, se amplificara 4 veces su tamaño. ¿Cuál es el área de la fotografía ampliada?

9. Con 150 gramos de chocolates se llenan tres bolsitas del mismo tamaño. ¿Cuántas bolsitas iguales se llenarán con 550 gramos?

10. Diana gastó $45 para el almuerzo y le quedan 4 séptimas partes de lo que tenía para el desayuno y la comida. ¿Cuánto dinero tiene para la comida?

En la sesión 5 los problemas que destacaron por tener más de una respuesta son el 2, 6 y 10.

Problemas 2. El Barcelona F.C. jugó 40 partidos en la temporada regular de la Liga Española, si ganó 70% de ellos. ¿Cuántos ganó?

Para la resolución del ejercicio 2, los estudiantes aplicaron otra vez "regla de tres"

40 partidos	100%
X	70%

Entonces X = $\frac{(40)(70)}{100}$ = 28. Que es el número de juegos que ganó el Barcelona esa temporada.

Alguien más me dijo lo siguiente "Si 40 es el total, entonces el 50% son 20 partidos (la mitad), y 8 es el 20% (la quinta parte), entonces: 70% = 50% + 20% = 20 + 8 = 28 partidos en total ganó".

Otra forma de resolverlo fue: "Si 40 es el 100%, entonces 4 es el 10% (la decima parte), entonces
4 x 7 = 28, resulta el 70%. Por lo que 28 es la respuesta de partidos ganados"

Problema 6. Jazmín vende agua de limón en vasos de ¼ de litro a $7.50 cada uno. Si un día vendió 8 litros y medio de agua. ¿Cuál fue el total de la venta?
A continuación describo algunos de los procedimientos que utilizaron en el ejercicio 6. (La venta de agua de Jazmín)

a) Para resolverlo, convirtieron los 8 y medio litros de agua a cuartos de litro:

1 litro	4/4	4 x 7.50 = $30
8 litros	32/4	32 x 7.50 = $240
½ litro	2/4	2 x 7.50 = $15
8 ½ litros de agua	34/4	240 + 15 = $255

Se obtiene el precio de 8 litros de agua, después el de ½ litro, finalmente se suman y se llega a la respuesta $255.

b) Algunos otros lo que hicieron primero fue obtener el precio del litro de agua ($30), después multiplican el resultado por 8 (30 x 8 = 240), después deducen cuánto vale medio litro de agua (1 litro cuesta $30, entonces por medio litro se pagan $15) y suman los resultados.
(240 + 15 = $ 255). Llegando a la respuesta correcta.

Problema 10. Diana gastó $45 para el almuerzo y le quedan 4 séptimas partes de lo que tenía para el desayuno y la comida. ¿Cuánto dinero tiene para la comida?

En el problema del desayuno de Diana, me encontré con lo siguiente:

- A algunos estudiantes no les quedó claro que desayuno y almuerzo se pueden utilizar como sinónimos.
- Otros mencionaron que “si le quedan 4 /7 partes, entonces se gastó 3/7, por lo que divido 45 entre 3 y así, 15 es igual a un séptimo, entonces 4 por 15 es 60. Le quedan $60 a Diana”
- Unos más procedieron de manera similar que la anterior solo que primero encontraron todo el dinero de Diana ($105) y luego restaron los $45 del almuerzo. Para llegar al resultado ($60)

SESIÓN 6

1. Sarahí recibe la mitad de dinero del que le dan a Jocelyn; ella recibe la cuarta parte de lo que le dan a Fernando. Si Fernando recibe $32. ¿Cuánto le corresponde a Sarahí?

2. Un frasco de café en polvo de 200 gramos cuesta $20. En oferta uno de 250 gramos cuesta lo mismo que el de 200 gramos. Comprando un frasco en oferta ¿de cuánto es el ahorro? y si compro 2 frascos en oferta ¿qué porcentaje me ahorro?

3. De un mismo material se han hecho cubos macizos de aristas distintas a saber, 6 cm, 8cm, 10cm. y 12cm. Hay que colocar los cubos en los platillos de una balanza de modo que los cubos queden en equilibrio. ¿Qué cubos ponemos en cada platillo, para que la balanza quede en equilibrio?

4. Josafat quiere comprar un jersey de la selección nacional que cuesta $1080.00; únicamente tiene las 5/8 partes del precio. ¿Cuánto dinero le falta para comprárselo?

5. Mildred vende agua de limón en vasos de ¼ de litro a $7.50 cada uno. Prepara 20 litros, un día vendió 8 litros y medio de agua.

a) ¿Cuál fue el total de la venta?

b) ¿Cuánta agua le sobro?

6. En una bolsa de canicas 3/5 partes son rojas, 1/3 son azules y 18 son amarillas. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

7. Jafet y sus tres amigos fueron al cine, pagaron con un billete de $500 y les regresaron $352 porque cada boleto cuesta:

8. Un libro de matemáticas cuesta $240. ¿Qué porcentaje descuentan al disminuir $36?

9. Una fotocopiadora hace 10 copias en 1 minuto 15 segundos. Sino deja de funcionar, ¿en cuánto tiempo hará 600 copias del mismo original?

10. Si tienes en una bolsa 9 canicas: 2 rojas, 3 verdes y 4 amarillas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una de color amarillo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una verde o una roja?

11. Tres amigos fueron a la dulcería. Raúl gastó $29 y compró 1 caramelo y 2 paletas. Luis Ángel gastó $43 y compró 1 caramelo y 2 chocolates. ¿Cuánto gastó Eduardo si compró 1 caramelo, 1 paleta y 1 chocolate?

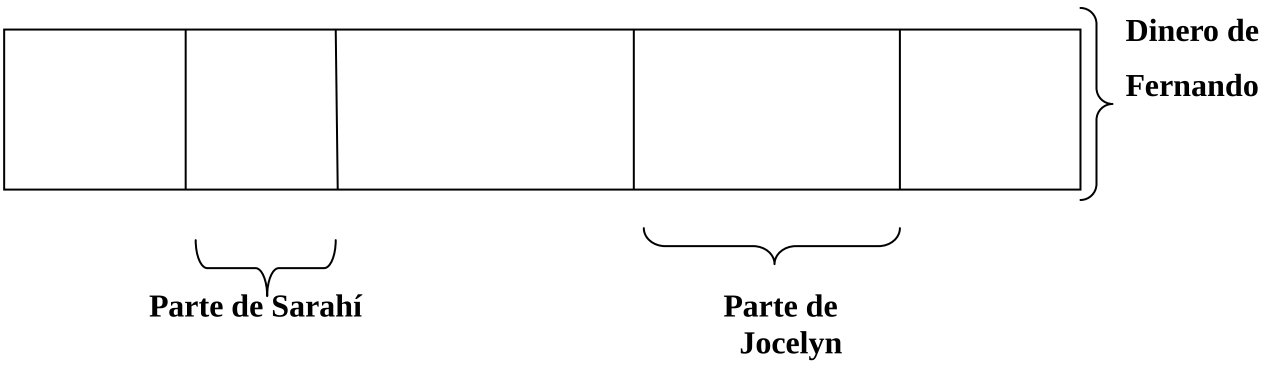
12. Daniel se toma una taza de café con leche, al inicio cuando está llena tiene el doble de leche que de café. Cuando Daniel se ha tomado la mitad, vuelve a llenar la taza con leche. ¿Qué fracción hay ahora de café?

En esta sesión nos concentramos en los ejercicios 1, 2, 3, 6, 8 y 9 (Una sesión bastante interesante pues propusieron muchas soluciones diferentes para cada uno de los ejercicios mencionados.)

Problema 1. Sarahí recibe la mitad de dinero que le dan a Jocelyn; ella recibe la cuarta parte de lo que le dan a Fernando. Si Fernando recibe $32. ¿Cuánto le corresponde a Sarahí?

Se parte del hecho de que Fernando recibe $32, entonces la cuarta parte es 32/4= $8, que es el dinero que recibe Jocelyn y la mitad de 8 es $4, que es lo que le dan a Sarahi.

Se usa el método grafico:



Con la ayuda de la ilustración se puede ver que la parte que le toca a Sarahí es una octava de la que le toca a Fernando, entonces 32/ 8 = $4.

También hicieron lo siguiente: = $\frac{32}{\frac{4}{2}} = \frac{32}{\frac{4}{\frac{2}{1}}} = \frac{32}{8} = 4.$

Explicación:

32 entre 4 y luego entre dos, usando “regla del sándwich” (extremos con extremos y medios con medios, 32 x 1 y 4 x 2), resulta 32 entre 8, que es igual a $4, la parte que le corresponde a Sarahí en el ejercicio.

Problema 2. Un frasco de café en polvo de 200 gramos cuesta $20. En oferta uno de 250 gramos cuesta lo mismo que el de 200 gramos. Comprando un frasco en oferta ¿de cuánto es el ahorro? y si compro 2 frascos en oferta ¿qué porcentaje me ahorro?

La primera pregunta la contestaron así: “Si 200 gramos cuestan $20, entonces 100 gramos cuestan $10, 50 gramos $5 y 10 gramos $1.” Por lo que el ahorro es de $5.

También hicieron lo siguiente: “Como 200 gramos cuestan $20, 200 ÷20 = 10. Esto nos dice que 10 gramos cuestan $1, entonces 50 costarán $5 y ese es el ahorro”.

Nuevamente apareció la “regla de tres”

Gramos	Precio	
200	20	x = $\frac{(250)(20)}{200}$ = 25.
250	x	

Entonces el frasco de 250 gramos cuesta $25 y cuando está en oferta se ahorra $5.

Para la segunda pregunta me dijeron lo siguiente:

Si compra dos frascos gasta $40 pesos y se ahorra $10. Entonces se ahorró la quinta parte, o sea un 20%. También se utiliza la regla de tres.

$50	100%	x = $\frac{(40)(100)}{50} = \frac{400}{5}$= 80%. Entonces el ahorro es del 20%.
$40	x	

Se usaron algunas variantes de la regla de tres (en lugar de escribir $40 escribían $10, que era el ahorro en la compra de dos frascos), se concluye que el ahorro es el 20%.

En el problema 3 si hubo dificultades

Problema 3. De un mismo material se han hecho cubos macizos de aristas distintas a saber, 6cm, 8cm, 10cm. y 12cm. Hay que colocar los cubos en los platillos de una balanza de modo que los cubos queden en equilibrio. ¿Qué cubos ponemos en cada platillo, para que la balanza quede en equilibrio?

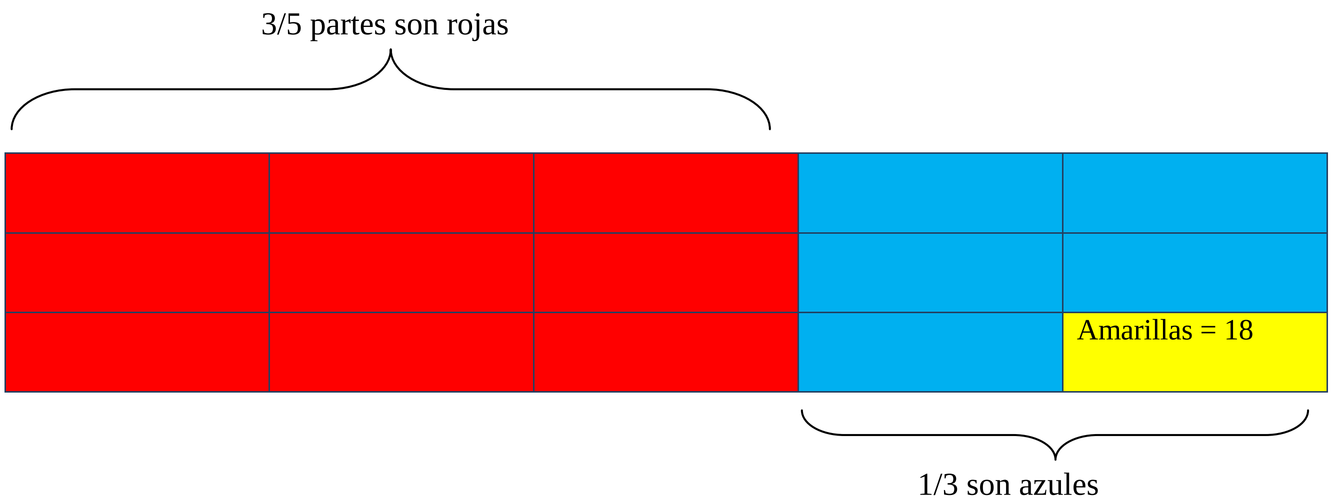
- La mayoría de los chicos, tomaron en cuenta la medida del arista y su respuesta fue: 6 y 12 en una, 10 y 8 en la otra (coinciden 18).
- Pero se les olvidó considerar que la balanza sirve para pesar no para medir longitudes. Por lo que no tomaron en cuenta el volumen de los cubos.
- Un alumno obtuvo los volúmenes de los cubos (216, 512, 1000 y 1728 cm^3 respectivamente), pero le faltó ARGUMENTAR más su respuesta, pues solo tenía las operaciones aun sin decidir como acomodarlos en la balanza.
- Solo una alumna (Maritza de 12 años) del grupo de Niños Talento contestó y argumentó correctamente.

Aquí se sugiere que antes de presentar el problema se resuelvan ejercicios previos que involucren cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, para que vean la diferencia entre cada uno.

Problema 6. En una bolsa de canicas 3/5 partes son rojas, 1/3 son azules y 18 son amarillas. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

Para el ejercicio 6 se utilizaron métodos descritos con anterioridad, aquí se los presento:

GRÁFICO: De forma horizontal está dividido en tercios y de forma vertical en quintos.



El total de canicas se dividió en 15 partes y la única que quedo es la amarilla, entonces el total de canicas, es 18 x 15 = 270 canicas en total hay en la bolsa. Para comprobarlo revisamos que 270 ÷ 5 = 54, entonces 3 x 54 = 162 canicas rojas. 270 ÷ 3 = 90 azules y 18 amarillas.

162 + 90 + 18 = 270. ¡La respuesta es correcta!

También realizaron una suma de fracciones 3/5 + 1/3 = $\frac{9+5}{(5)(3)} = \frac{14}{15}$. Entonces para completar un entero falta 1/15 y también se sabe que 18 canicas son amarillas y no hay de más colores, por lo que 18 es igual a 1/15. Para encontrar el total hacemos lo siguiente: 18 x 15 (igual que en el método grafico) y el resultado es: 270. Respuesta correcta.

Por medio de una ecuación tenemos lo siguiente:

x = número de canicas.

$$3/5x + 1/3x + 18 = x$$
$$14/15x + 18 = x$$
$$x - 14/15x = 18$$
$$1/15\, x = 18$$
$$15(1/15\, x = 18)$$
$$x = (15)\,(18)$$
$$x = 270.$$

Problema 8. Un libro de matemáticas cuesta \$240. ¿Qué porcentaje descuentan al disminuir \$36?

Por tratarse de porcentaje, los alumnos sistemáticamente utilizan la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{ll} \$240 & 100\% \\ \$36 & x \end{array}\right\} \frac{(36)(100)}{240} = \frac{(6)(6)(10)(10)}{(6)(4)(10)} = \frac{60}{4} = 15$$

Se concluye que el descuento es del 15%.

Otros razonamientos.

Si el costo total del libro es de \$240, entonces el 10% es de 24 pesos, luego \$12 es el 5%. Por lo tanto \$36 = \$24 (10%) + \$12 (5%). Equivale al 15%.

Alguien más hizo lo siguiente. Empezó con que 240 es el 100%. Por lo que \$2.4 es el 1%. Después hizo una división $36 \div 2.4 = 15$. Es decir 15% es el descuento que se hizo.

Problema 9. Una fotocopiadora hace 10 copias en 1 minuto 15 segundos. Sino deja de funcionar, ¿en cuánto tiempo hará 600 copias del mismo original?

Para resolverlo se hizo lo siguiente:

1. Convertir a segundos el tiempo que se lleva en sacar 10 copias (75 segundos), después dividir 600 ÷ 10 = 60. El resultado se multiplica por 75 (60 x 75 = 4500 segundos). Así se puede quedar la respuesta, o también convertir a minutos (4500 ÷ 60 = 75 minutos). Es decir en 1 hora con 15 minutos se obtienen todas las copias.

2. Por medio de tablas:

Copias	Minutos	segundos
10	1	15
20	2	30
30	3	45
40	5	00
50	6	15
60	7	30
70	8	45
80	10	00
90	11	15
100	12	30

En esta tabla se puede ver que 100 copias se obtienen en 12 minutos con 30 segundos. Si se multiplica por 6 el resultado: 72 minutos con 180 segundos (180 segundos = 3 minutos)

El tiempo que toma la maquina en obtener 600 copias es de 75 minutos.

3. “Regla de Tres”

Copias	tiempo
10	1 minuto 15 segundos
600	x

$$x = \frac{(600)(1.25\ minutos\ )}{10} = 60 \text{ x } 1.25 = 75$$

La respuesta es 75 minutos. Cabe mencionar que también se hizo la conversión de segundos a minutos. 15 segundos = $\frac{1}{4}$ minuto= 0.25 minutos.

SESIÓN 7.

Justifica tus respuestas.

1. La cerca A mide 720 metros, la B es la cuarta parte de la de A. ¿Cuánto mide la cerca C si es la tercera parte de la B?

2. Al formar en el piso sus soldaditos, Emmanuel se dio cuenta que había 5 filas con 7 soldaditos cada una y sobraban 6. Entonces pensó: "si ahora los acomodo todos en filas de 9 soldaditos, los que me sobraran son:…."

3. En una escuela primaria hay 2,192 alumnos, ½ son de 1º. y 2º, ¼ son de 3º y 4º 1/16 son de 5º y el resto de 6º, ¿cuántos niños son de 5º y 6º?
4. La temperatura de un enfermo registrada durante una semana ha sido la siguiente: Lunes 37.5^o, martes 38.5^o, miércoles 38.1^o, jueves 37.2^o, viernes 36.2^o, sábado, 36^o y domingo 35.9^o. ¿Cuál fue su promedio de temperatura?

5. Omar compró útiles escolares y pagó $697.00 y le descontaron $ 11.85 ¿Qué por ciento le descontaron?
6. ¿Cuál es el promedio de ¾, 5/8, ½ y 3/16?

7. ¿Cuál es el número a cuyo doble se le suma la mitad del mismo número y da como resultado 40?

8. En una caja hay cierto número de bolas blancas, el doble de bolas negras y el triple de bolas verdes. Si en la caja hay en total 126 bolas.
   a) ¿Cuántas bolas hay de cada color?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola de color blanca?

9. Si las naranjas son dos veces más caras que los duraznos y los duraznos son un tercio más caros que los limones. Si los limones cuestan (tu sugiérelo, pero el precio debe ser ENTERO), entonces las naranjas ¿cuánto cuestan? (Indicación: no valen decimales los precios son ENTEROS para los 3 productos)

10. En un examen de 36 preguntas por cada acierto se otorgan 4 puntos y por cada error se restan 3 puntos. Un alumno obtuvo 60 puntos. ¿Cuántos aciertos y cuántos errores cometió?

En la sesión número 7 se encontraron algunos métodos para resolver los ejercicios 3, 5, 8 y 10.

Problema 3. En una escuela primaria hay 2,192 alumnos, ½ son de 1º y 2º, ¼ son de 3º y 4º 1/16 son de 5º y el resto de 6º, ¿cuántos niños son de 5º y 6º?

Tuvieron que utilizar fracciones entonces los niños de 1º y 2º son la mitad de 2192 ÷ 2 = 1096.
2192 ÷ 4 = 548 son de 3º y 4º. 2192 ÷ 16 = 137 son de 5º. Entonces:

Niños de 6º = 2192(total de alumnos) – 1096(1º y 2º) – 548(3º y 4º) – 137(5º)=411.

Respuesta: 137(niños de 5º) + 411(niños de 6º) = 548 son de 5º y 6º.

Se uso el método gráfico. (La barra representa a todos los niños 2192)

Niños de 1º y 2º = $\frac{1}{2}$	niños de 3º y 4º =$\frac{1}{4}$	niños de 5º $^{1}/_{16}$	

El resto son de 6º grado $\frac{3}{16}$. En el grafico se puede apreciar que los niños de 5º y 6º son $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Entonces 2192 ÷ 4 = 548. Por lo tanto 548 niños son de 5º y 6º grado.

También hubo quien sumó las fracciones $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$. Entonces el resto de los niños son de 6º. Para completar los $\frac{16}{16}$ faltan $\frac{3}{16}$. Por lo que $\frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Son los niños de 5º y 6º y proceden a hacer la misma división que en el grafico 2192 ÷ 4 = 538. Estos son los alumnos de 5º y 6º.

Problema 5. Omar compró útiles escolares y pagó $697.00 y le descontaron $ 11.85 ¿Qué por ciento le descontaron?

Algunos obtuvieron el 1% de \$697, que es \$6.97, después se divide 11.85 ÷ 6.97 = 1.70% es el descuento que le hicieron a Omar.
Otro utilizaron lo que parece el método más eficaz (quizás el más utilizado), la "Regla de Tres"

$$\left.\begin{array}{ll} \$697 & 100\% \\ \$11.85 & x \end{array}\right\} \frac{(11.85)(100)}{697} = x.$$ Haciendo operaciones: $\frac{1185}{697} = 1.70 = x$

El descuento es de 1.70%.

Otros alumnos partieron del hecho de que \$697 es el 100%, entonces 348.5 es el 50%. O que 69.7 es el 10%, entre otros, para llegar a que 11.85 es el 1.70%, esto llevo más tiempo que a los chicos que empezaron con que 6.97 es el 1%.

Problema 8. En una caja hay cierto número de bolas blancas, el doble de bolas negras y el triple de bolas verdes. Si en la caja hay en total 126 bolas.

a) ¿Cuántas bolas hay de cada color?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola de color blanca?

Para poder contestar el b) se debe responder primero al a). Si se equivocaban, entonces lo hacían en los 2 incisos.

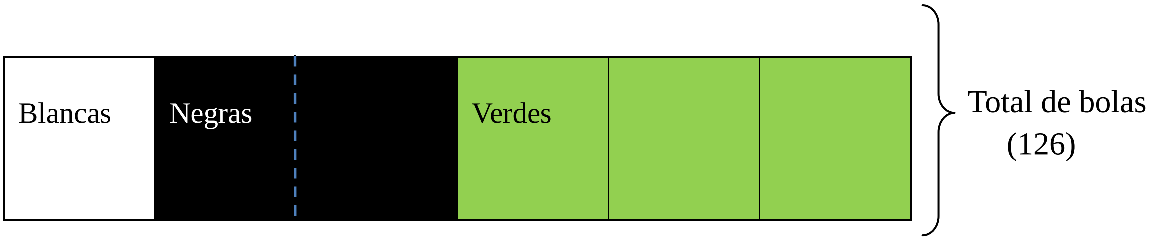
Para resolverlo se planteó una ecuación de primer grado con una incógnita

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{ bolas blancas} \\ 2x = \text{bolas negras} \\ 3x = \text{bolas verdes} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x + 2x + 3x = 126 \\ 6x = 126 \\ x = \dfrac{126}{6} \\ x = 21 \end{array}$$

a) Entonces en la caja hay 21 bolas blancas, 42 bolas negras y 63 bolas verdes.

b) La probabilidad de obtener una blanca es de $\frac{21}{126} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

El método gráfico ayuda a ejemplificar la situación:



Cada división representa a las bolas blancas (las negras son el doble de la blancas y las verdes el triple de las blancas). En este caso el gráfico queda expresado en términos de las bolas blancas. Entonces $\frac{126}{6}$ equivale a 21 es el número de bolas blancas. El doble son negras, entonces son 42. Y el triple son verdes, por lo que 63 son verdes.

Para contestar el b), se procede de la misma manera que en el anterior:

$$Probabilidad = \frac{número\ \ de\ exitos}{número\ \ de\ eventos\ \ posibles} = \frac{21\ bolas\ \ blancas}{126\ bolas\ \ en\ total} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$$

Problema 10. En un examen de 36 preguntas por cada acierto se otorgan 4 puntos y por cada error se restan 3 puntos. Un alumno obtuvo 60 puntos. ¿Cuántos aciertos y cuántos errores cometió?

Para resolverlo:

Prueba y error. Algunos jóvenes proponían un número de respuestas acertadas y comprobaban si era el correcto, sino, de acuerdo al resultado tomaban un número más grande o más pequeño.

También se usaron tablas:

Aciertos	Errores	Puntos
36	0	36 x 4 = 144
35	1	35 x 4 = 140 – 3 = 137
34	2	34 x 4 = 136 – 6 = 130
33	3	123
32	4	116
31	5	109
30	6	102
29	7	95
28	8	88

Aciertos	Errores	Puntos
27	9	81
26	10	74
25	11	67
24	12	60
23	13	53

Por lo que las respuestas correctas fueron 24 y 12 los errores.

Otra forma de llegar a la solución es planteando un sistema de ecuaciones:

a = número de aciertos
b = número de errores

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{número de aciertos} \\ b = \text{número de errores} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1)\ a + b = 36 \\ 2)\ 4a - 3b = 60 \end{array}$$

Para resolverlo se utiliza el método de suma y resta:

1) $3a + 3b = 108$ (se multiplicó la ecuación 1 por 3)

2) $\underline{4a - 3b = \quad 60}$

$7a \quad = \quad 168$ (se suman las ecuaciones 1) y 2))

$$a = \frac{168}{7} = 24.$$

Es decir 24 es el número de preguntas correctas.

Se sustituye el valor de a en la ecuación 1)

$$24 + b = 36,$$
$$b = 36 - 24,$$
b = 12, es el número de errores.

SESIÓN 8

1. En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hay de cada clase si en total hay 156 personas?

2. En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 61 cabezas y 196 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

3. Llevo recorridos 7/15 de un camino y aún me queda 1/3 de kilometro para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?

4. Se han consumido 7/8 de un tanque de agua. Se reponen 38 litros y se queda lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del tanque.

5. Tengo 3 barriles y 600 litros de cerveza que distribuyo en partes iguales en cada barril. El primero se llena hasta sus 2/3 partes; el segundo hasta sus 4/5 partes. ¿Qué fracción del tercero se llenará si se sabe que su capacidad es la suma de la de los otros dos?

6. Una octava parte de los alumnos de primero año no pueden ir a una excursión de fin de cursos debido a su bajo desempeño en matemáticas; los 3/5 de los que pensaban ir pierden el permiso de sus padres, y además, el día del viaje, pierden el tren 1/21 de los que quedaban. Al final van a la excursión 80 alumnos. ¿Cuántos alumnos tenía el curso?

7. Una librería vendió 84 libros a dos precios distintos a $45 y otro a $36 y obtuvo de la venta $3105 pesos. ¿Cuántos libros había de cada clase?

8. Se han de repartir $720 entre algunas personas, pero cuatro de ellas renuncian a su parte, con lo cual las otras cobran $6 más. ¿Cuántas eran las personas que había al principio y cuánto dinero les correspondía?

9. Una persona realiza 3/5 partes de un viaje en ferrocarril, los 7/8 del resto en autobús y los 10 km. que le quedan los recorre en bicicleta. Averigua cuantos km. recorrió en total.

10. Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 4224.

Esta fue la última sesión de ejercicios que se trabajó con los chicos. Los problemas que arrojaron 2 o más soluciones fueron el 1, 3, 5 y 9.

Problema 1. En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hay de cada clase si en total hay 156 personas?

Se puede resolver mediante la resolución de una ecuación de primer grado.

h = número de hombres en la fiesta.

2h= número de mujeres

3(h + 2h) = número de niños.

Entonces la ecuación que hay que resolver es:

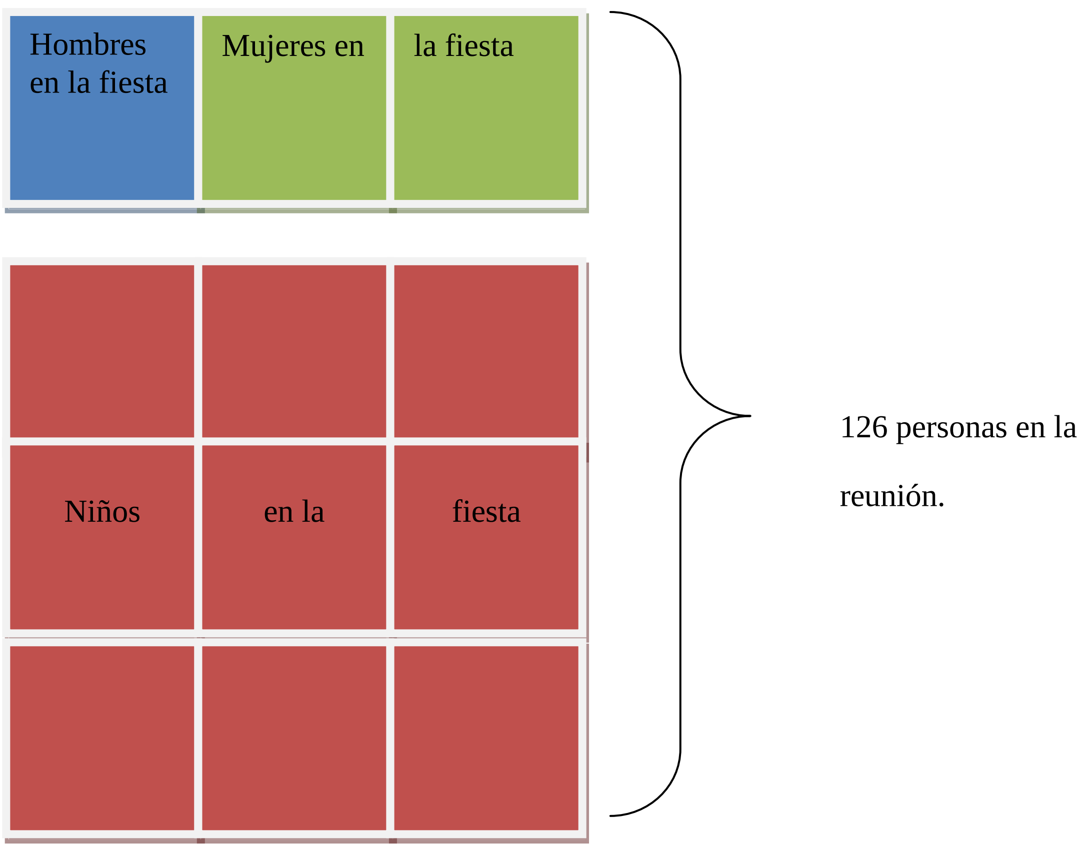
$$h + 2h + 9h = 156$$

$$12h = 156$$

$$h = \frac{156}{12} = 13.$$

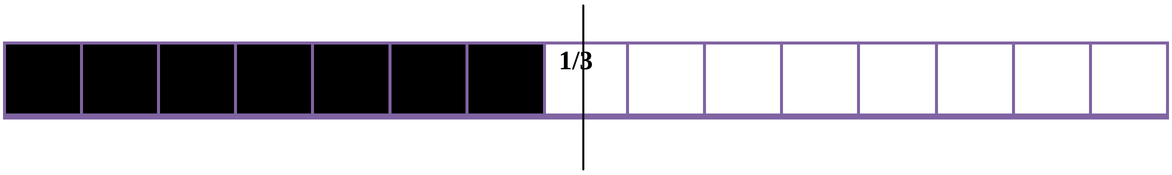
Entonces el número de hombres en la reunión es de 13. Como las mujeres son el doble, se sigue que 26 féminas hay en la fiesta. Por último los niños son el triple que de hombres y mujeres juntos (39), por lo que hay 117 infantes.

El método gráfico también puede ser útil:



Cada cuadrito representa la cantidad de hombres que hay en la fiesta (se puede expresar el número de mujeres y de niños en términos del de hombres). En este caso tenemos que: número de hombres = $\frac{156}{12} = 13$. Número de mujeres = 26 (doble de hombres). Número de niños = 117(triple de hombres y mujeres juntos 3(13 + 26)).

Problema 3. Llevo recorridos 7/15 de un camino y aún me queda 1/3 de kilometro para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?



Como le falta 1/3 de kilometro para llegar a la mitad, entonces 7/15 = 14/30, de aquí se deduce que 1/3 de kilometro es igual a 1/30 del camino (14/30 + 1/30 = 15/30 = 1/2).

Multiplicamos 30(1/3 km) = 10 km. Es la longitud del camino.

Otros estudiantes hicieron esta suma: 7/15 + 1/3 km = ½ del camino.

Si se multiplica por 2, se obtiene la longitud de todo el camino. Entonces nos queda:

2 (7/15 + 1/3 km = ½ del camino) = 14/15 + 2/3 km. = 1 (representa a todo el camino). Es decir 2/3 de kilometro es igual a 1/15 del camino. Por lo que 2/3 x 15 = 30/3 = 10. La respuesta es 10 km tiene de longitud el camino.

Algunos otros convirtieron 1/3 de kilometro a metros (1/3km = 333.3m), como ha recorrido 7/15 de camino y le faltan 333.3m metros para llegar a la mitad del mismo, entonces 7/15 + 333.3m = la mitad del camino.

Por lo que 333.3m = “medio quinceavo”, se sigue que 666.6m= 1/15. Para llegar a la respuesta se multiplica 666.6m x 15 = 9999 m. Las anteriores respuestas fueron 10 km (10,000m.). Está respuesta difiere de un metro, con los ejemplos anteriores se puede ARGUMENTAR porque ambas respuestas son validas.

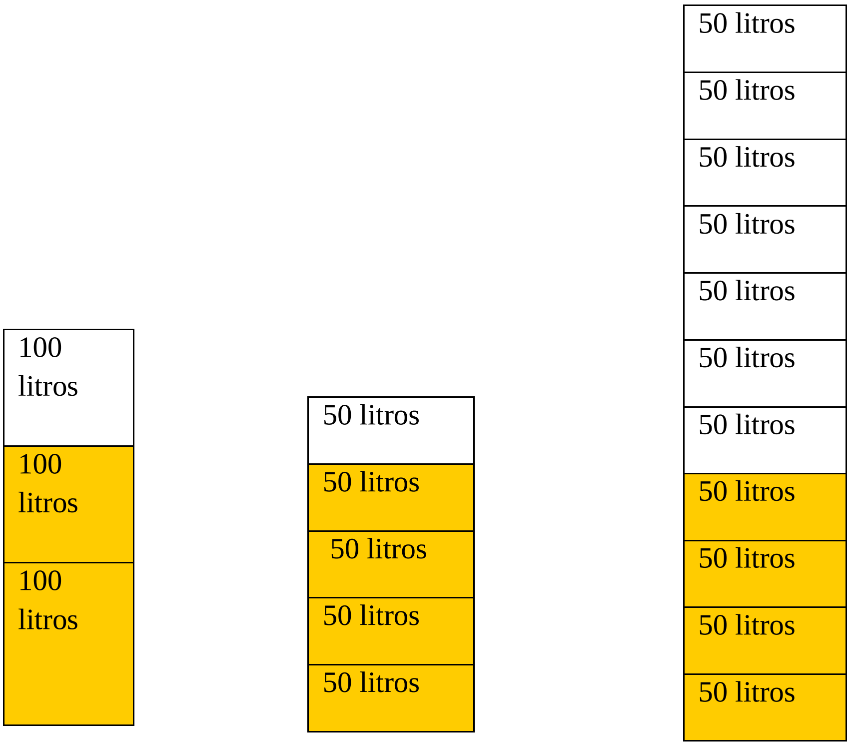
Problema 5. Tengo 3 barriles y 600 litros de cerveza que distribuyo en partes iguales en cada barril. El primero se llena hasta sus 2/3 partes; el segundo hasta sus 4/5 partes. ¿Qué fracción del tercero se llenará si se sabe que su capacidad es la suma de la de los otros dos?

Como se divide en partes iguales la cerveza, entonces 200 litros es igual a 2/3 partes del primero, luego 100 litros es 1/3 parte y la capacidad del barril es de 300 litros. En el segundo 200 litros son 4/5 partes, por lo que 50 litros es la 1/5 parte; la capacidad del segundo barril es de 250 litros. El tercer barril tiene como capacidad la suma de los otros dos, es decir, 550 litros, si se vacían 200 litros, la fracción que se llena es de: $\frac{200}{550} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$

Otra manera es utilizando:

Método Gráfico.

En los dibujos podemos apreciar cómo fueron llenados los barriles con 200 litros cada uno. Al primero le faltaron 100 litros, es decir 1/3. Al segundo 50 litros, 1/5. El tercero es la suma de las capacidades de los otros 2. Por lo que su capacidad es de 550 litros. Y la fracción que se llena es 4/11 partes. .



Barril 1 Barril 2 Barril 3

Problema 9. Una persona realiza 3/5 partes de un viaje en ferrocarril, los 7/8 del resto en autobús y los 10km. que le quedan los recorre en bicicleta. Averigua cuantos km. recorrió en total.

¿Por qué insistir en el método gráfico?

Por experiencias que comentan varios profesores, muchos niños se resisten a escribir su solución, que han obtenido “mentalmente”, e incluso al ver su libreta, se comprueba que apenas ha escrito algo. La respuesta tiene un claro fundamento psicológico: El funcionamiento de la memoria. Los psicólogos han identificado tres tipos de memoria, la memoria inmediata, la de corto y la de largo plazo.

La memoria inmediata, es muy limitada. La de largo plazo es prácticamente ilimitada, claro, se requiere de atención. La inmediata llega a unos segundos y a pocos datos, por eso a los niños pequeños les cuesta trabajo entender un problema con más de una condición. Al insistirle a los discentes que representen los datos mediante un gráfico, se les obliga a leer con más cuidado y una vez que ha hecho el dibujo, pueden visualizar más de un dato a la vez y sobretodo "ver" la relación entre ellos, con lo cual liberan su memoria inmediata. Retomando el problema 9 de la sesión 8, el gráfico propuesto fue:

Recorre en	ferrocarril 3/5	Partes	7/8	En	bus	del	res	to		10 km

Lo que queda en blanco son los 10 km. que recorre en bicicleta.

Es decir 1/8 del resto (en este caso 2/5 es el resto), son 10 km. Por lo tanto 4/8 = 1 /5 del resto

4 x 10 km = 40 km. = 1/5. Por lo tanto recorrió en total 40 x 5= 200km.

Se puede plantear una ecuación de primer grado donde la incógnita es d = la distancia que recorrió en total.

(1) 3/5 d + 7/8 (2/5 d) + 10 = d.

Resolviendo la ecuación (1):

$$3/5\, d + 14/40\, d + 10 = d$$

$$\frac{(8)(3)+14}{40}\, d + 10 = d \quad \text{Se suman las fracciones.}$$

$$\frac{24+14}{40}\, d + 10 = d \quad \text{Se simplifican números}$$

$$\frac{38}{40} d + 10 = d \ \text{Despejamos}\ d$$

$$d - \frac{38}{40} d = 10 \quad \text{Se realizan las operaciones indicadas.}$$

$\frac{40-38}{40}d = 10$ Resolvemos para *d*

$\frac{2}{40}d = 10$ (2 multiplica, entonces pasa dividiendo. 40 divide, por lo que pasa multiplicando)

$d = 10\left(\frac{40}{2}\right)$Se resuelve la división 40 ÷ 2

$d = 10\ (20)$Se hace el último paso

d = 200

Se concluye que la distancia recorrida es de 200 km.

También lo contestaron sin alguna ecuación, pero si con la suma de las fracciones:

$\frac{3}{5} + \frac{7}{8}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{14}{40} + \frac{(3)(8)+14}{40} = \frac{24+14}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$. Entonces falta $\frac{1}{20}$ para completar el trayecto, que es lo que recorre en bicicleta (10 km.) Por lo que la distancia recorrida en el viaje es igual a:

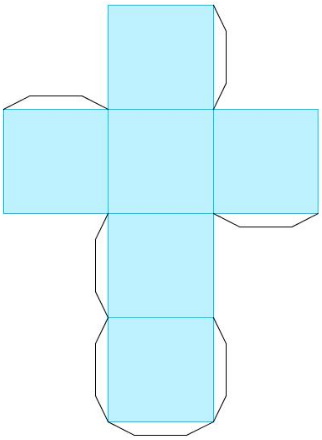
10 x 20 = 200km.

Se llega a la misma respuesta con 3 procedimientos diferentes. Es interesante ver cómo, a lo largo de las sesiones, los estudiantes GENERABAN MAS IDEAS y las ponían en práctica. Reconocieron las que los ayudaban y las que no les eran útiles (metacognición), para poder contestar correctamente los ejercicios.

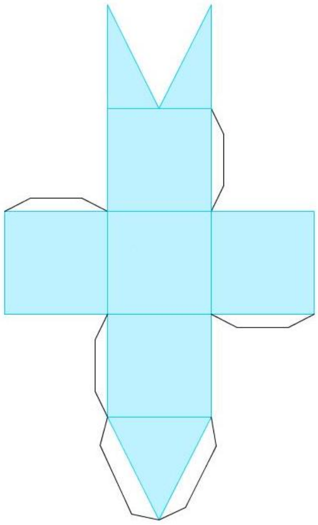
Las últimas sesiones estuvieron acompañadas de actividades didácticas, se propuso que los niños realizaran un cubo distinto al convencional, (Se presentó un ejemplo donde una cara de un cubo estaba cortada en forma triangular y al momento de ensamblarlo, se unía con su cara respectiva con l mismo corte para que se acomodara bien), se les distribuyo material para que crearan su cubo.

En esta sesión se mostró el poder que puede alcanzar el Modelo AGA.

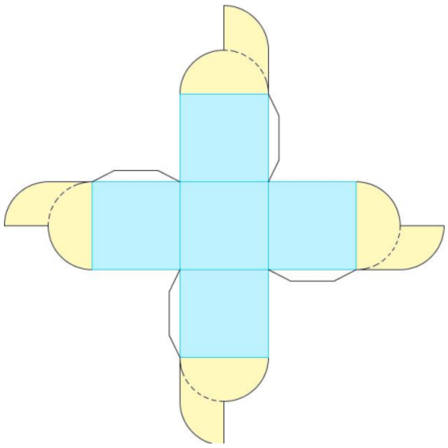
ACTIVIDAD: Hacer un cubo diferente al usual.



Desarrollo Usual.



Desarrollo Creativo



Caja para regalo

GENERAR IDEAS: No importa cómo, ningún cubo fue igual a otro, la variedad de tamaños, de formas de pestañas fue bastante buena. Los chicos explotaron sus ideas, sino al máximo, si a un gran nivel.

ARGUMENTAR: Gracias a la Planeación de Actividades estaba previsto que algunos cubos no iban a cerrar, pero su argumentación para decirme como lo habían hecho fue clave para que se dieran cuenta donde estaban equivocados, así que se les dio más material para que lo hicieran de nuevo. El resultado fue más satisfactorio.

Además de realizar su cubo, los temas que se revisaron fueron cálculo de perímetros, áreas y volúmenes y como ningún cubo era igual fue interesante ver como algunos tenían la misma capacidad.

Las pestañas tenían diferentes formas, así que para obtener el área de las mismas cobró importancia. Algunos datos coincidían a pesar de la diversidad de formas.

Para ciertos temas no es necesario tanto preámbulo para plantear problemas. Por ejemplo áreas. Con ello se puede avanzar rápidamente en geometría, en lugar de iniciar con definiciones.

Retomando los conceptos del capítulo I, específicamente la metacognición, porque esto no puede trabajarse en el aire, el punto de partida son las respuestas de los niños.

Para ellos la solución y el razonamiento están muy ligados, el mecanismo de activación de la metacognición y el razonamiento (argumentación) es la comparación de respuestas, lo valioso es la parte viva, de la revisión de las soluciones, aquí es donde el maestro juega el papel más importante.

"Problema de las llantas" (**Problema 6, Sesión 3).** Los 2 alumnos presentan ante el grupo su solución, la pregunta "¿CUÁL ES LA CORRECTA?". Quedaron desconcertados.

Aquí es donde se inicia la metacognición y la argumentación. De otra forma se trabaja en el vacío, solo serían palabras huecas.

II.3 Desarrollo de la metacognición en estudiantes universitarios.

Para ver cómo han desarrollado su metacognición alumnos universitarios, se aplicaron ejercicios a discentes de distintos semestres de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP.

El siguiente problema fue propuesto para alumnos de 1er. Semestre de licenciatura en física aplicada formaba parte de un examen que realizaron.

Problema. Toma dos números reales positivos diferentes cualesquiera cuya suma sea 1. El mayor se eleva al cuadrado y le sumamos el menor. Por otro lado, al menor lo elevamos al cuadrado y le sumamos el mayor.

a) ¿Qué suma es mayor?

b) Explica tu respuesta

c) Escribe todas tus ideas

Reproduzco de manera fidedigna algunas de las respuestas de los estudiantes.

1. Tomamos .7 y el .3 Tenemos que .7 + .3 = 1

$$\left.\begin{array}{l}(.7)^2 + .3 = .79 \\ (.3)^2 + .7 = .79\end{array}\right\}$$

Las sumas son iguales porque tenemos primero el .7 que es mayor, a elevarlo nos da .49. Si a ese .49 le sumamos .3, entonces tendríamos .79. Ahora con .3 al cuadrado nos da .09 centésimos más .7 nos da .79, vamos a llegar a la misma cantidad, es decir, .79 debido a que estamos trabajando con números decimales los cuales al elevarlos al cuadrado nos da un número decimal menor por consiguiente al sumarlo con el decimal que no está al cuadrado, el número resultante es igual en ambos casos. Respuestas de a) y b)

c) Yo creo que la suma de un número más el cuadrado en ambos casos nos da el mismo por el hecho de que son ***complemento*** ya que juntos suman 1, por lo mismo ***me imagino*** que al elevar uno al cuadrado sumado con el otro nos dará lo mismo si hacemos el procedimiento al contrario.

2. a) La suma de los dos casos son iguales, ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

1º $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{12+9}{27}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$

2º $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{3+18}{27}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$

b) 1º El orden de los números no afecta la suma

2º Si alguno de los números, se le hace otra operación, que sea la misma para los 2, el resultado sigue siendo el mismo.

3º ***Es como*** una ***consistencia*** de la suma.

c) Para que la suma sea 1, los únicos números que cumplen para esto son las fracciones.

3. Dos números serían 0.3 y 0.7, al sumarlos me da 0.3 + 0.7 = 1, ahora elevaré $(0.7)^2$ y luego le sumaré 0.3. 0.49 + 0.3 = 0.79.

Y ahora elevaré $(0.3)^2$ y le sumaré 0.7, me queda 0.79. La pregunta en a) es ¿qué suma es mayor?

a) Son iguales las sumas.

b) El mayor número fue 0.7 al elevarlo al cuadrado me dio 0.49 y al sumarle el menor, o sea, 0.3 me dio 0.79, en caso contrario me da igual 0.79 la suma total, por lo tanto al elevar mi mayor número al cuadrado es igual a la anterior.

c) Pienso que se debe a que la suma de ambos me da 1, por lo tanto me da lo mismo, entonces no importa a quien eleve al cuadrado, su suma será la misma.

4. a) Ejemplo: 0.4 + 0.6 = 1

$(0.4)^2 + 0.6 = 0.16 \;\; 0.6 = 0.76$

$0.4 + (0.6)^2 = 0.4 + 0.36 = 0.76$ son iguales

b) La suma tiene que ser igual ya que la cifra en sí no cambia al elevarse al cuadrado, el factor de que ambos números sumen una cantidad y siempre va a ocurrir si a esta cantidad le haremos el mismo cambio, su resultante nunca va a cambiar ***es como en una ecuación***, si de ambos lados, elevamos al cuadrado, el resultado no se verá afectado, puesto que ambas se elevaron al cuadrado. Aquí pasa lo mismo, alteramos ambas cantidades.

5. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \qquad \frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{21}{27}\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{21}{27}$

a) Las dos sumas son iguales.

b) Porque lo único que hicimos fue elevar al cuadrado un número, de la suma, después hicimos lo mismo en la otra. Estamos elevando ambos términos al cuadrado y como las dos (antes) llegaban a uno ***no pasa nada*** al elevar una primera y otra después.

c) Al principio pensaba que tenía que salir algo diferente pues no lo había razonado, ya haciendo operaciones descubrí que no hacía falta.

6. $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}=\frac{4}{64}+\frac{48}{64}=\frac{52}{64}$

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{16}{64}+\frac{36}{64}=\frac{52}{64}$$

a) Son iguales

b) Salen iguales porque en ambos casos solo se está elevando al cuadrado un solo número, por lo que al no haber sido elevado el cuadrado del otro número, este va a hacer que el resultado sea mayor o menor. Y además el hecho de que son números que se complementan para obtener un entero, tiene que ver mucho porque es lo que permite que el resultado sea igual.

c) Esto pasa solamente cuando el resultado de la suma de ambos números es 1.

Es algo complicado explicar lo que sucede, pero también interesante el haber obtenido ese resultado.

7. Sean a, b números reales positivos tal que a + b = 1. Suponemos a > b

$$a^2 + b \qquad \text{ó} \qquad a + b^2$$

a) ¿Qué suma es mayor? Son iguales ambas sumas

b) Explica tu respuesta. Son iguales ambas sumas porque si elevamos un número racional al cuadrado obtenemos un número más pequeño, si tenemos dos números racionales que sumen 1 y uno sea mayor que el otro.

Si el número mayor lo elevamos al cuadrado obtenemos un número menor al que obtendríamos al elevar el otro número al cuadrado.

Si elevamos ambos números al cuadrado el mayor resulta menor por lo que sumado a otro tendríamos.

$a^2 + b = a + b^2$ porque si $a + b = 1$ y $a > b > 0$ y $b^2 > a^2$ entonces $a^2 + b = a + b^2$

c) Escribe todas tus ideas. Solo es igual la suma para números positivos. No pueden ser ambos cero, pero uno sí.

8. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9+4}{16} = \frac{13}{16}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \frac{1+12}{16} = \frac{13}{16}$$

a) ninguna

b) y c) Ya que al desarrollar el problema se llega al mismo resultado ya que hay una proporción o propiedad que en una suma si cualquiera de los sumandos se eleva al cuadrado y se le suma lo demás se llega al mismo resultado y pasa lo mismo con otro que se eleve al cuadrado y se le sume lo restante.

9. $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ son reales positivos, diferentes y su suma es 1

Si $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = \frac{13}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} = \frac{13}{16}$

a) Las dos sumas son iguales

b) Al hacer el procedimiento es una forma de explicar

c) Me dejo sin palabras, pero si un número fraccionario se eleva al cuadrado se vuelve más pequeño y al sumarlo con lo que faltaba para ser 1 pues llegará a un valor menor a 1 pero será igual a la otra suma.

10. Tomo el .3 y .7, su suma es 1, .3 + .7 = 1. .7 x .7 = .49 + .3 = .79 y

.3 x .3 = .09 + .7 = .79

Los números que cumplen con está igualdad son los menores a 1, los decimales porque igual si lo hacemos con .6 y .4, la suma es .76, es por la ***acomodación*** de decimales también estamos de acuerdo en que no es lo mismo poner .49 + .03 = .52 a

.49 +.3 = .79. Es ***acomodación*** de decimales (números).

Otra bien podría ser que al elevar al cuadrado decimales menores a .9 estos serán decimales, entonces las sumas de decimales menores a .9 serán iguales ***ya que no metemos enteros.***

11. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}=\frac{36+4}{64}=\frac{52}{64}=\frac{13}{16}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}=\frac{4+48}{64}=\frac{52}{64}=\frac{13}{16}$$

Otro caso para verificar:

.3 +.7 = 1 $(.3)^2 + .7 = .09 + .7 = .79$ $.3 + (.7.)^2 = .3 + .49 = .79$

a) Pues las sumas son iguales

b) Hay una estructura similar a: $a^2 + b = a + b^2$ y creo que se debe a la conmutatividad pues sería lo mismo que hacer $a^2 - b^2 = a - b$ que nos dice que entre estos números siempre habrá la misma diferencia entre este caso de números.

c) ***<u>Mis ideas</u>***

Pues como ya dije, puede que se deba a la conmutatividad se debe a las propiedades axiomáticas.

12. Esta es la demostración que realizó un estudiante:

Tenemos que a + b =. Son diferentes y mayores que cero. $a > b > 0$, por ejemplo.

Si el mayor se eleva al cuadrado y le sumamos el menor, tenemos $a^2 + b$.

Si el menor se eleva al cuadrado y le sumamos el mayor, tenemos $b^2 + a$

¿Cuál es mayor?, a) Son iguales

b) y c) Dado que $a + b = 1, \Rightarrow b = 1 – a \wedge a = 1 – b$

$b= 1 – a \Rightarrow a^2 + b = a^2 + 1 – a \wedge a + b^2 = a + (1 - a)^2$

$\Rightarrow a^2 + b = a^2 – a + 1 \wedge a + b^2 = a +1 – 2a + a^2$

$\Rightarrow a^2 + b = a^2 –a + 1 \wedge a + b^2 = a^2 – a +1$

$\Rightarrow a^2 + b = a + b^2$

Una demostración puede ser la siguiente:

Sean x, y números reales diferentes, mayores que cero tales que $x + y = 1$. Entonces

$\mathbf{x = 1 – y}$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos $(x)^2 = (1 - y)^2$ se sigue:

$x^2= 1 – 2y + y^2$. Sumamos "y" a ambos lados, nos queda $x^2 + y = 1 – 2y + y^2 + y$

Reduciendo términos semejantes, $x^2 + y = 1 – y + y^2$ sabemos que $\mathbf{x = 1 – y}$, sustituimos y tenemos $x^2+ y = x + y^2$. Por lo tanto la suma es igual.

Se aplicó el ejercicio a otros estudiantes (de 3º y 5º semestre), pero se hizo una modificación al enunciado.

Problema. Toma 2 números reales positivos (diferentes) cuya suma sea 1. Si el mayor se eleva al cuadrado y se le suma el menor y por otro lado el menor se eleva al cuadrado y se le suma el mayor ¿Qué resultado es mayor? **Demuestra tu afirmación.**

El alumno Israel M. C. de 3er. Semestre hizo lo siguiente:

"Primero leí el texto y no entendí lo que pedían.

Me concentré en los datos, en las condiciones del problema.

Me confundí en R positivos y pensé en los enteros.

Me di cuenta de que no eran los enteros si no nada más los del intervalo (0,1)

Los cuadrados en el intervalo (0,1) son engañosos", pensó rápidamente.

"Volví a leer.

Y ya entendí lo que finalmente pedía el problema"

"Hice un dibujo del intervalo (0,1) lo dividí en 2 segmentos uno más grande que el otro, hice un cuadrado en cada segmento, pensé en áreas".

"Pensó en la pregunta del problema: ¿Cuál era el mayor?". De seguro uno es mas es más grande que el otro, nunca pensé en la otra posible solución del problema, que fueran iguales”.

“Empecé hacer desigualdades:

a^2+ b? $b^2 + a$, a^2 + b inicié a compararlo con otros términos para ver si llegaba a la otra $b^2 + a$ de igual manera compraré tratando de que fueran iguales.

Tenía en mente que $a > b$, $a^2 < a$, $b < b$, $b > b^2$ empecé a hacer cuentas pero no llegue a nada, **empecé a desesperarme**.”

“De seguro me iba a dar cuenta de que uno era mayor que el otro”, sintió frustración.

“Empecé hacer ejercicios numéricos para darme cuenta cuál era mayor. Empecé a sentir ¡ansiedad! Porque ya estaban terminando los demás compañeros”

“Cuando inicie hacer las operaciones me di cuenta de que daban diferentes resultados, que eran mayor, menor e iguales (aquí fue cuando el profesor dijo que tenía tiempo para realizarlo que lo hiciera con calma) hice bien las cuentas y ya quedaban iguales”

“Me di cuenta de que no había considerado que $a + b = 1$ que es una de las condiciones del problema”.

“Dejé de trabajar desigualdades”

“Pensé que $a + b = 1$ y $(a + b)^2 = 1$ pensé en desarrollar el binomio y de seguro aquí está el truco, hay que igualar $(a + b)^2 = 1$.

Desarrollé el binomio, factorice de dos maneras diferentes donde aparecían las expresiones que iba a relacionar: $a^2 + b(2a + b) = 1 = b^2 + a(2b + a)$

Creí que el problema se reducía a demostrar que $(2a + b) = (2b + a)$ intenté hacer varios despejes, factorizaciones pero no llegaba a nada.

Me di cuenta de que no avanzo en nada, volví a utilizar la condición de que $a + b = 1$ en las factorizaciónes que había hecho y luego vi el parecido”

En este caso se puede ver como la metacognición se hace presente, pues en todo momento analiza si va por buen camino, o no. Pues es consciente de su propio pensamiento. Se da cuenta de que lo que hace no lo está llevando a ningún lado, entonces vuelve a leer el problema e intenta otra solución, hasta que llega a la que presenta, la reproduzco a continuación:

$$1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a + b) = a^2 + b(1 + a) = a^2 + b + ab$$

$$1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = b^2 + a(2b + a) = b^2 + a(1 + b) = b^2 + a + ab$$

$$a + b = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b + ab = b^2 + a + ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b = b^2 + a.$$

Mi compañero, si bien, paso por varios minutos de desconcierto gracias a sus habilidades metacognitivas no se perdió del todo y tomó el camino que lo llevó a la solución. Si solamente nos quedamos con la solución final, nos perdemos del proceso, sin embargo, el rescatarlo le permitirá ser más consciente y controlar mejor sus pensamientos. Es lo que le da fuerza al Modelo, la Argumentación.

También expongo las demostraciones de otros alumnos, para que se vea la diferencia entre semestres más avanzados respecto a los de nuevo ingreso y como sus respuestas y forma de razonar varían entre los chicos, algunos ya son conscientes de sus propios pensamientos, pero otros no. Este es el enfoque que queremos darle a la metacognición para resolver problemas (RP).

1. Sea a, $b \in R$, $a + b = 1$. Supongamos que $a > b$. ejemplo:

   $2/3 > 1/3$. $4/9 + 1/3 = 7/9$. $2/3 + 1/9 = 7/9$

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a^2 + b \\ 2) & b^2 + a \end{array}\right\} \text{¿Quién es mayor?}$$

Como a + b = 1 $\Rightarrow$ a = 1 – b

Sustituimos en 1) $a^2 + b = (1 - b)^2 + b$

$$= 1 - 2b + b^2 + b$$

$$= 1 - b + b^2 = b^2 - b + 1$$

Ahora sustituimos en 2)

$$b^2 + a = b^2 + 1 - b$$

$$= b^2 - b + 1$$

$$\therefore a^2 = b^2 + a$$

$\therefore$ Son iguales

2. Sea $x \neq y$, supongamos $x > y$

$x + y = 1$, $x^2 + y$? $y^2 + x$, sabemos que $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ (esto último es un error, pero veamos que no lo usa en su demostración, por lo que no se ve afectada,

$0 < x < 1$, $x^2 < x$)

Pero $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$, ahora sustituyendo el valor de x tenemos:

$$x^2 + y = (1 - y)^2 + y \quad \wedge \quad y^2 + x = y^2 + 1 - y$$

$$= 1^2 - 2y + y^2 + y \qquad = y^2 - y + 1 \ (2)$$

$$= 1 - y + y^2 = y^2 - y + 1 \ (1)$$

$\therefore$ De (1) y (2) podemos decir que $x^2 + y = y^2 + x$

Demostración:

Sean x, y $\in$ Q, x + y = 1 $\Rightarrow x = 1 - y$

$$\Rightarrow x^2 = 1 - 2y + y^2$$

Entonces $x^2 + y = 1 - 2y + y^2 + y = 1 - y + y^2$

$y^2 + x = 1 - y + y^2$

$\therefore x^2 + y = y^2 + x \ \forall x, y \in Q$

3. La siguiente respuesta está equivocada, la transcribo tal cual está en el original (con todo y faltas de ortografía):

“No hay mayor problema porque de las 2 formas son iguales:

Devido a que la suma de un número con su **neutro** siempre es el mismo y biceversa, además de que aparte podemos ver como tomamos el cero que seria el neutro y el 1 que es único”.

Dem. Sea a, 0 $\in$ R. Ahora $a + 0 = a \Rightarrow a^2 = 2a$ pero en nuestro caso tomamos a 1 y su cuadrado es el mismo”

4. Aquí esta otra prueba con errores:

“Como sabemos $a^2 < a \Rightarrow a^2 + b < a + b$ por ser b $\in$ [0, 1]

además $b^2 < b \Rightarrow b^2 + a < b + a = 1$

$$\Rightarrow a^2 + b < a + b = 1 \wedge b^2 + a < b + a = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b = b^2 + a\text{”}$$

20 alumnos contestaron este ejercicio, 11 (55%), hicieron la demostración y concluyeron que los resultados son iguales. 7 (35%), cometieron errores en la demostración o no lo contestaron. El 10% restante (2 estudiantes), uno propuso un ejemplo numérico y dijo que eran iguales. El otro hizo dos pruebas en una hay algunos fallos, la otra está bien.

Siguiendo en la misma línea presento un grupo de alumnos de 7º y 9º semestre de licenciatura en matemáticas y matemáticas aplicadas la contestación que le dieron al mismo ejercicio de los números positivos descrito anteriormente.

1. Sean $x \neq y$ donde, $x, y \in R$ y supongamos que $x > y$, $y > 0$, luego $x + y = 1$

$$\Rightarrow x = 1 - y \quad \text{ó } y = 1 - x.$$

$$x^2 + y = x^2 + (1 - x) \text{ sustituyendo el valor de } y$$

$$= x^2 + 1 - x$$

$$\text{luego } y^2 + x = (1 - x)^2 + x \text{ sustituyendo el valor de } y$$

$$= 1 - 2x + x^2 + x$$

$$= 1 - x + x^2$$

$$\text{se sigue que } x^2 + y = y^2 + x$$

Por lo tanto los resultados son iguales.

2. Sean $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Sup. que $x < y$

$x + y^2$ y $x + y^2$. sup. que $x + 1 + x^2 - 2x = x^2 - x + 1$

$x + (1 - x)^2$ $x^2 + 1 - x$ $x - 2x = -x$

$x + 1 + x^2 - 2x$ $-x = -x$

3. La suma en ambos casos serian iguales entre sí.

(1) $x + y = 1$ y $x \neq y$ tenemos que *i*) $x < y$ o *ii*) $x > y$

(2) $x^2 + y = 1$ (El alumno despeja y en (1) y sustituye) $x^2 + 1 - x = c$

(3) $y^2 + x = c_1$ ("Acomoda" términos) $x^2 - x + 1 = c$

P.D. que $c = c_1$

$$y = 1 - x$$

$$(1 - x)^2 + x = c_1 \text{ como}$$

$$1 - 2x + x^2 + x = c_1$$

$$x^2 - x + 1 = c_1 \text{ y } x^2 - x + 1 = c$$

tenemos que $c = c_1$

4. $a + b = 1 \quad a > 0, \; b > 0 \; a \neq b \Rightarrow a \neq .5 \wedge b = .5$

Supongamos que $a > b$ y por reducción al absurdo supongamos sin pérdida de generalidad que el primero al cuadrado es mayor que el pequeño al cuadrado más el mayor:

$a^2 + b > b^2 + a \wedge b = 1 - a \Rightarrow b^2 = 1 + a^2 - 2a$

$\Rightarrow a^2 + b > 1 + a^2 - 2a + a = 1 + a^2 - a \Rightarrow a^2 + b > a^2 + 1 - a$

$\Rightarrow b > 1 - a$!!! pues $b = 1 - a$

Análogamente supongamos que el mayor al cuadrado más el menor, es menor que el otro caso.

Si $a^2 + b < b^2 + a$ como $b = 1 - a \Rightarrow a^2 + b < a^2 + 1 - a$

$\Rightarrow b < 1 - a$!!! pues $b = 1 - a$

$$\Rightarrow a^2 + b = b^2 + a$$

5. Sean a, $b \in [0, 1]$ t.q. $a + b = 1$ y $a < b$

$$\Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2$$

además $\forall$ x, y > 0, si $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

$$\Rightarrow a^2 + b = a^2 + b = a^2 + 1 - a$$

$$\text{y} a + b^2 = a + 1 - 2a + a^2 = 1 - a + a^2$$

$$\therefore a^2 + b = a + b^2 \quad \forall a, b \in [0, 1] \text{ t.q. } a < b \text{ y } a + b = 1$$

$\therefore$ Ningún resultado es mayor que el otro.

6. Sean x, y dos números diferentes y positivos tomando su suma $x + y = 1$

despejando a x: $x = 1 - y$

1. $x^2 + y$
2. $y^2 + x$

Sustituyendo a *x* en las 2 ecuaciones:

$$(1 - y)^2 + y = 1 - 2y + y^2 + y = 1 - y + y^2 = y^2 - y + 1 \ *$$

$$y^2 + (1 - y) = y^2 - y + 1 \ **$$

Las 2 ecuaciones (*, **) son iguales

$\therefore$ el resultado de las dos sumas es igual.

Se puede distinguir como los estudiantes de nuevo ingreso utilizan más la escritura para expresar sus ideas, solo uno de 30 hizo la demostración y hubo muchos que se equivocaron hasta con los ejemplos numéricos.

Los alumnos de 3º y 5º semestre hacen más demostraciones pero se siguen equivocando en algunos detalles de su escritura, en general son más conscientes de lo que deben hacer para contestar el ejercicio. Aquí de 20 alumnos, 11 hacen correcta su demostración, 2 no lo contestan y los 7 restantes se equivocan en la prueba.

Finalmente los de 7º y 9º se van directo a la demostración, pero de 22 alumnos solo 6 demuestran de manera correcta el problema (22 %), 10 se equivocan o no lo pueden hacer (46%) y 6 no respondieron (22%), aquí influyó que el ejercicio fue el último de una lista de 6 para que no lo contestaran o lo hicieran mal.

Se puede ver la diferencia entre semestres más avanzados respecto a los de primero. Esto también se puede ver reflejado en alumnos de 1º de secundaria y de 3º de secundaria. Así como aprendices de 2º de nivel medio respecto a estudiantes de 2º año de nivel medio superior.

El avance de la metacognición es gradual y se da a lo largo de la educación del chico. Se pretende que está vaya mejorando y para ello es importante la resolución de problemas (RP)

Si mis compañeros hubieran trabajado resolviendo problemas en su educación básica, y haciendo énfasis en la metacognición los resultados hubiesen sido mejores.

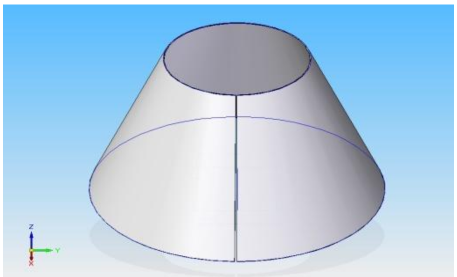
Este modelo de enseñanza ayuda en gran medida a volver al estudiante, un ESTUDIANTE AUTÓNOMO capaz de tomar decisiones y prestar atención a esas voces internas (metacognición) y llegar a objetivos claros.

La tercera fase (argumentación) es muy importante porque al pedir a los estudiantes que expliquen su respuesta se les está obligando de cierta manera a reflexionar sobre sus pensamientos. Al presentar sus argumentos frente al resto de sus compañeros en un ambiente de respeto y donde los errores no son calificados negativamente, los estudiantes poco a poco empiezan a desarrollar sus habilidades metacognitivas pues se dan en lo social para pasar después al plano interpersonal.

A continuación presento algunas **ACTIVIDADES** que se pueden realizar y los temas que se vinculan con la misma.

II.4 Actividades que propone AGA

1. **"Cubeta".** Una cubeta es un cono truncado. Se trata de calcular su volumen a partir de la fórmula del cono. El profesor explica dicha fórmula y como se corta el cono para obtener la cubeta (de aquí depende el corte que se le haga)



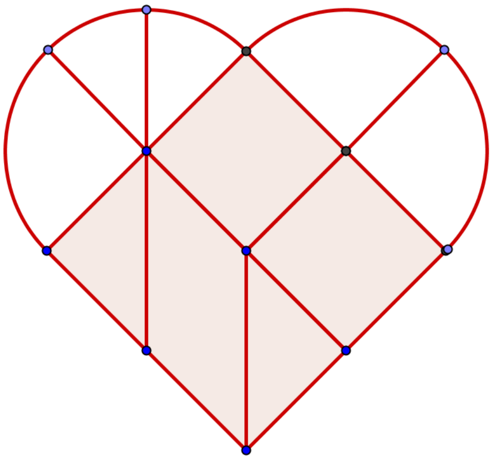
2. **"El volumen de un cilindro"** A partir de una hoja (puede ser una cartulina o una hoja tamaño oficio), se forma un cilindro tomando la hoja verticalmente, después de manera horizontal hacemos el cilindro. La pregunta es: ¿Qué cilindro tiene mayor volumen?

3. **"Cubos Mágicos"** Es semejante a los "Cuadros Mágicos" solo que están en 3 dimensiones. Sirve para despertar el interés, es laborioso así que se requiere de paciencia y perseverancia.

4. **“Futbol Aritmético”** Se trata de hacer operaciones (suma, resta, multiplicación, división), para llegar a un resultado propuesto, pero se le ponen restricciones.

Ejemplo: Puedes utilizar los dígitos 1, 2, 3, 5, 7, 8 y 9 (si quieres cambias los números). El resultado para un equipo es 47, entonces con operaciones aritméticas y los dígitos propuestos se debe llegar al resultado. Y se propone otro resultado para el equipo rival. El turno se alterna, Si aciertas es un ¡goooool!, si el resultado es incorrecto, pierdes el turno y pasa al rival la oportunidad de anotar.

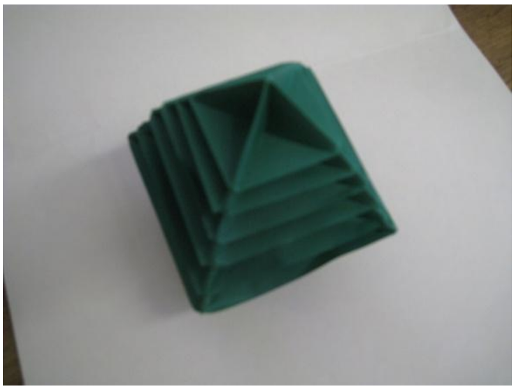
5. **“Broken Heart Tangram”** Zeleny, E (2008). Disponible en: http://demonstrations.wolfram.com. (2011.15 de febrero) Es un tangrama. La base es un cuadrado y dos semicírculos. La tarea es que los niños lo dividan usando diferentes figuras geométricas. Cada alumno debe hacer uno diferente al de sus compañeros (tamaño, colores y material). Los temas que se pueden revisar son cálculo de áreas y fracciones. (Ideal si tu novia terminó contigo o si te acaban de rechazar)



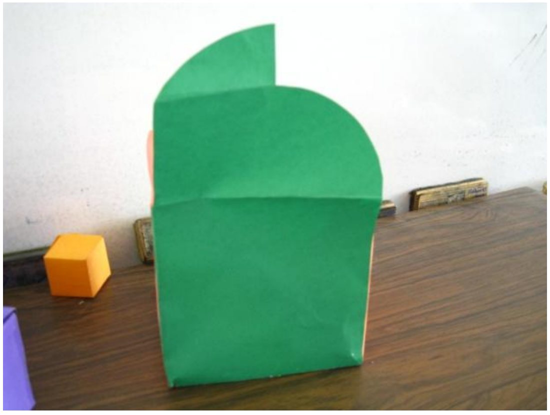
CORAZON ROTO

6. **“Ases y Reyes”** Con baraja inglesa (la española también puede servir), se toman 5 cartas al azar (o 4), se toma una más, el juego consiste en usar operaciones aritméticas y las 5 primeras cartas (o 4 según sea el caso) para obtener el valor del naipe extra.

7. **“Pino Navideño”** Consiste en hacer un arbolito con papiroflexia, se puede llevar a la sumatoria de los cuadrados. $(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$

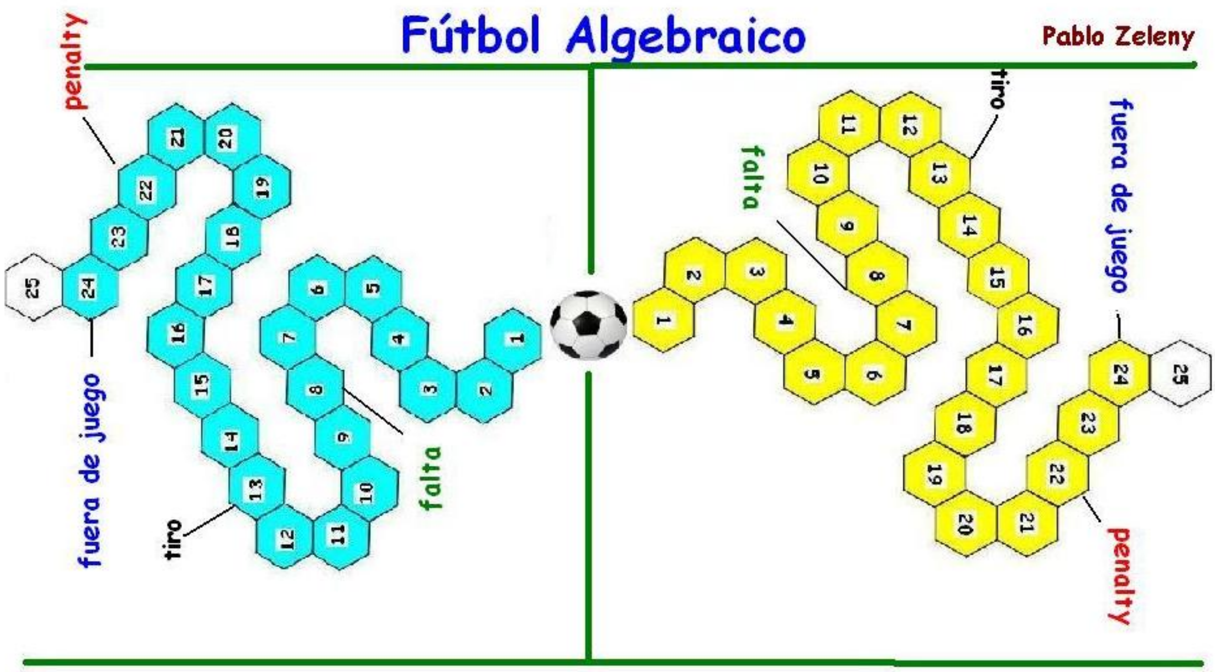


8. **“Tarjeta o Caja de Regalo para San Valentín”** Se presenta un modelo de tarjeta y caja y se pide que la hagan más grande o más pequeña. Utilizando figuras geométricas, se le pide a los estudiantes que cada quien realice una diferente. (Contrario al “Broken Heart”, pueden regalársela a tu pareja o decirle cuanto te gusta a “aquella” persona)

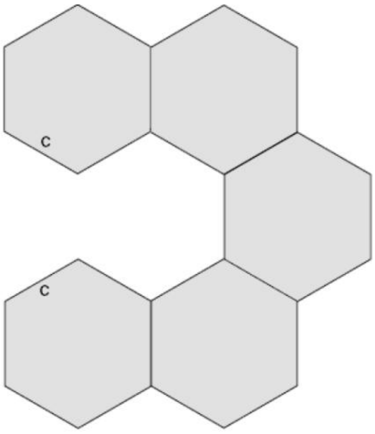


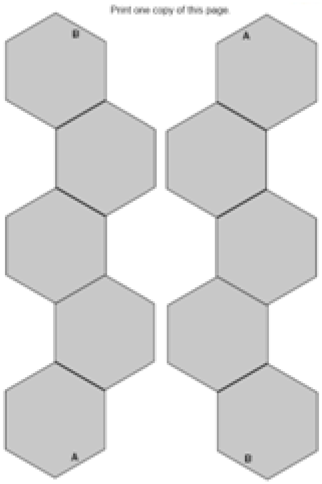
Cajas para regalos elaborados por Jocelyn Limón (izquierda) y Carlos Viveros (derecha)

9. **“Fútbol Algebraico”** Se juega con 3 personas como mínimo (2 jugadores y un árbitro) en un tablero y un dado. Los alumnos colocan en tarjetas diferentes ecuaciones (de primer grado, sistemas de ecuaciones, de segundo grado o problemas que requieran del planteamiento de una ecuación). El dueño de las tarjetas fungirá como árbitro, pues repartirá sus ecuaciones o problemas (como el profesor prefiera organizar la actividad) a los jugadores. Los contendientes tirarán el dado y avanzará el número de casillas que indique siempre y cuando obtenga la respuesta correcta de la tarjeta que el árbitro le dé. Si cae en fuera de juego o en la falta, perderá su turno. Si cae en tiro vuelve a lanzar el dado, si cae en penalti, tiene la posibilidad de ganar si acierta, en caso contrario, se quedará en esa casilla y le dará oportunidad a su rival de anotar. Gana quien llegue al gol primero (la portería es el #25)



10. **“Pambol”** A partir de una plantilla, el alumno debe armar un balón de futbol soccer (es el balón clásico, presentado en el Mundial de Fútbol de México 1970, formado por hexágonos y pentágonos, llamado Tel Star), después obtendrá su área y volumen.



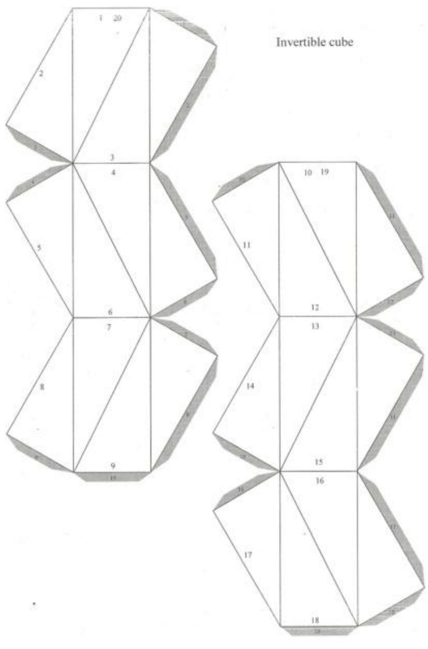


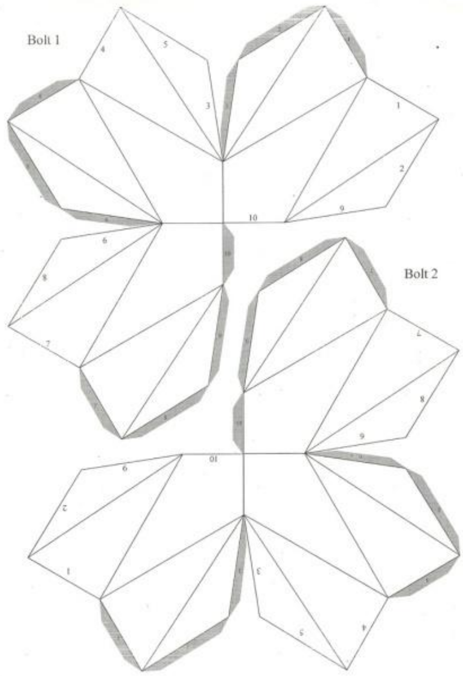
Tomado de Schlumberger Limited (2000).
Disponible en: www.slb.com/seed (2011. 10 de marzo)

Imagen del balón ya armado (izquierda). El Prof. Pablo Zeleny mostrando el balón (derecha)

11. **Construcción de Papalotes**. A partir de la elaboración de papalotes que los niños hagan, se inicia una clase de geometría, en lugar de empezar con definiciones.

12. **"Invertible Cube"** A partir de una plantilla, los pupilos armarán un cubo invertido, calcularán su perímetro, área y volumen. Además sabrán que existen diferentes formas de ensamblar un cubo.





13. **Papiroflexia**. Se presenta la actividad para formar diferentes cuerpos geométricos con ayuda del arte de doblar papel. Se pueden revisar temas como vértices, aristas, caras, perímetro, área, volumen, ejes de simetría, semejanza, según el profesor lo requiera.

Cubo y Caja realizados por papiroflexia. En foto de derecha a izquierda Ayerim Patria Herrera, Gustavo Meza, Raúl Cruz y Juan Marcelo.

Para terminar con este capítulo me gustaría revisar la parte afectiva del alumnado, esto no estaba en mi plan original, pero me di cuenta de la importancia que tiene para lograr un buen desempeño. Revisé algunos artículos que hablan algo al respecto y escribo algunas opiniones de los niños que participaron en la aplicación del modelo.

II.6 Comentarios de los alumnos sobre el curso donde se utilizó el Modelo AGA.

1) "*Aprendí cosas y el profesor era bueno y divertido y me pasó a resolver al pizarrón un problema que yo hice y yo quise pasar porque si lo hice*" Luis Ángel González 2°B

2) "*Bueno, el curso de mate con los problemas que nos ponían, algunos eran fáciles de resolver pero ahí pude ver como es la forma de razonar de otros, además pude corregir mis errores y pude usar razonamientos de otros".* Fernando Neri 2° A

3) *"Me gustó ir a clases porque me sirvió para entender cosas que en la escuela no entendía… yo sí volvería a tomarlo, para mí vale la pena aprender matemáticas así con el profe Gustavo".* Rocío Varela 2° E

4) *“Me gustó porque conviví con compañeros de distintos grupos y se me hicieron interesantes los problemas. Fue divertido”.* Cristian Escalona 2° E

5) *“En lo personal las asesorías estuvieron padres, me agradaría volver a ir. Me sentí cómoda con los compañeros y el profesor que fue muy amable y muy atento”.* Valeria Flores 2° E

6) “*Yo opino que las clases de mate estuvieron bien porque aprendí nuevas cosas que me sirvieron en la escuela, ya siento que puedo más en matemáticas. Si hubiera otro curso yo si iría”.* Ma. de Jesús Cuecuecha 2° E

7) “*En el curso con el profesor Gustavo aprendí a hacer más rápido las operaciones, y eso me ayudó bastante en la escuela. Aquí casi todos trabajaban y eso me distrae menos”.* Yolitzin Zarate2° A

8) “*Me gustó la capacitación de matemáticas de los profes de la BUAP, los problemas estuvieron interesantes”.* Abigail Galindo 2° E

9) “*Los problemas del curso fueron distintos a los que me ponen a resolver del libro. Me gustaron y no me aburrí y aprendí. Ya sé hacer más rápido las operaciones y los del grupo ya no se burlan de mí, al contrario ya me respetan. Volvería a ir para aprender más cosas”.* Pedro Jiménez 2° E

10) “*Este curso fue muy bonito porque te enseñan cosas más allá de lo que sabes. Siento que soy más inteligente ahora”.* Giselle Bolaños 2° E

11) “*Este curso me sirvió mucho para poder comprender más rápido las matemáticas y porque nos ponían a razonar y no llenar huecos con números, también nos enseñaron a sacar más rápido los resultados y ya puedo más en la escuela”.* Nayeli Mijangos 2° E

12) *Se me hicieron más divertidas las matemáticas. Nos ponían en equipo y como que se trabaja mejor. Me enseñaron otras cuentas o mecanismos para comprender las matemáticas”.* Mildred Apango 2° E

13) “*Me pareció interesante y divertido el curso de matemáticas, me enseñaron cosas que en la escuela no nos enseñan, el profe Gustavo era buena onda y su forma de explicar me gustó. Siempre a lo que no le entendías el no los explicaba y a la primera le entendía pero sin que él te hiciera el trabajo. Lo malo es que no tenemos mucho acceso a este tipo de cursos. La verdad es que quien vaya a estos cursos no se va a arrepentir y el que fue no se arrepiente. A mí en lo personal me gustaría regresar, me explican de manera personal”.* Luz Mariana Nieto 2° A

14) “*Me gustó porque me explicaban los problemas y el resultado. Me explicaban lo que no entendía y lo que no sabía y también me gustó porque entre todos nos apoyábamos. El maestro que nos dio era muy divertido aunque en las hojas que nos daban venían problemas muy difíciles pero cuando ya los entendías ya eran fáciles. También me gustó la hora de entrada. En la escuela no me gusta porque son en las últimas horas. Es más pesado así. Quiero seguir yendo al curso y con el profe Gustavo por favor”.* Sarahí Valerio Vargas 2°A

15) “*Bueno pues si fueron divertidas y eso que nos la pasábamos trabajando en equipos y así aprendes más. Yo no quería ir pero la maestra Xochicali me obligó y que bueno. Algunas operaciones que se me dificultaban ahora ya son más fáciles y he mejorado. Fue buena experiencia”.* Alejandra Mancilla 2° A

16) “*A mí me gustaban las clases porque se explicaban cada uno de los problemas con el profe Gustavo y le entendíamos a la primera, ojalá hubiera otro curso porque pues el álgebra se me dificulta”.* Ana Karen Castillo 2° A

17) “*Bueno pues las clases eran diferentes porque aunque éramos muchos todos íbamos con ganas de trabajar y aunque algunos jugaban al ver trabajar a los demás pues lo hacían. En la escuela nos toca en la semana las últimas horas y es más pesado aprender así”.* Carlos Viveros 2° C

18) "*Me gustó el curso y algunos problemas me parecían muy interesantes. Me gustó que salías de la clase con los problemas ya resueltos, aunque a veces quedaron varios pendientes. Las matemáticas me gustaron hasta la secundaria, pero con este curso me gustan más".* Homero Jafet 2° C

De acuerdo con González de Galindo y Villalonga de García, se debe promover el desarrollo de los estudiantes, dándoles una participación activa en su aprendizaje.
Por ello, con la interacción entre ellos se pretende facilitar el aprendizaje. Por eso se evalúan los conocimientos previos de los alumnos.
La metacognición y la argumentación de los alumnos dejan claro sus propios criterios de comprensión, es por eso que se deben incluir ACTIVIDADES MOTIVADORAS.
Los factores afectivos en el aprendizaje de las matemáticas juegan un papel importante. A las conclusiones a las que llego Cadoche fueron que a la matemática la consideran los estudiantes una disciplina difícil, con poca o ninguna utilidad para la vida cotidiana, demasiado teórica, algo aburrida. Se le adjudica el dudoso prestigio de necesitar "gustar" para ser aprendida.
Los niños dijeron, entre otras cosas, "nos gustaba porque tomaban en cuenta nuestra solución", "nuestras opiniones", "nuestras IDEAS fueron tomadas en cuenta". "si nos hacían caso"
Hubo niños que se sorprendían pues tenían un aspecto negativo porque en la escuela primaria les decían "tú no sabes matemáticas"
Se partía de cero en el aspecto de que estudiantes podían o no.
El modelo lo llevamos a una zona de éxito, "los niños si PUEDEN".
Ellos llevaron un rol activo y eso les gusto.
Algunos maestros han puesto en práctica algunas actividades que presentamos:

Maestra Laura Lidia Ortega Xochicale (Secundaria Técnica No. 1). Además invitó a los niños a asistir los sábados.

Maestra Laura Sonia García Aburto (Secundaria Técnica No. 60 y Bachillerato CENHCH)

Profesora y Directora Alicia Zempoaltécatl Martínez (Telesecundaria Federal "Ignacio M. Altamirano" Vista Hermosa Soltepec Puebla)

Profesora María Modesta Martínez y Martínez (Secundaria General “Profr. Filiberto Quiroz” Tepeaca Puebla)

Maestra Hilde Von Raesfeld Oteo (Colegio Humboldt)

Profesor Raymundo López Gómez (Centro Escolar Profr. Gregorio de Gante)

Cualquier maestro debe saber en dónde están los niños (a cuanto conocimiento se refiere), a dónde los quiere llevar y lo más importante es ¿Cómo los llevo?, ¿con qué métodos, estrategias de enseñanza? Donovan (2004)

Nosotros tenemos la respuesta: **utilizando AGA.**

CAPITULO III: AGA Y EL PROGRAMA DE ESTUDIOS DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO.

“Proporcionar oportunidades a los alumnos para resolver, explorar, investigar y discutir problemas en una amplia variedad de situaciones, es una idea clave para que el aprendizaje de las matemáticas constituya una experiencia positiva significativa” Giménez (2004)

“El modelo de cátedra expositiva en el que fuimos educados ha mostrado sus limitaciones cuando se trata de lograr aprendizajes complejos, además de que fomenta actitudes en los estudiantes que son incompatibles con las competencias básicas…pero no se cambian las creencias ni se modifican los hábitos de un día para otro así que deben darse evidencias de que otras alternativas funcionan razonablemente bien” IPN (2002)

En este capítulo daremos algunas sugerencias de temas específicos de secundaria y bachillerato aclaramos que no se trata de una simple recopilación de problemas. El objetivo es mostrar que se puede planear el curso en base a actividades (juegos, problemas, papiroflexia, ensamble de cuerpos geométricos, etc.). Corresponde al profesor seleccionar la que más le convenga de acuerdo al tema que pretende enseñar.
Tal vez sea necesario recordar la experiencia de muchos profesores. Es más difícil motivar a alumnos de bachillerato, el denominador común: “la falta de sus conocimientos de matemáticas” y por otro lado su enorme apatía.

III.1 Programa de Estudios de Secundaria.

De acuerdo al Plan Vigente que data de 2006 los tres años escolares se dividen en bloques, en lugar de unidades. Se transcribe directamente del portal de la SEP consultado el 7 de febrero de 2011. Donde se detalla lo que se espera de los alumnos y que está disponible en: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas.

A continuación presentamos propuestas de Problemas para algunos temas de cada Bloque. Son sugerencias de acuerdo a los temas que están en el Programa Oficial.

Primer Grado

Bloque 1

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Conozcan las características del sistema de numeración decimal (base, valor de posición, número de símbolos) y establezcan semejanzas o diferencias respecto a otros sistemas posicionales y no posicionales.

Ejemplo para 1B1.1

Problema. Toma un número de dos dígitos, forma otro número invirtiendo los dígitos del primero, resta el mayor del menor, demuestra que la diferencia siempre es divisible entre nueve.

2. Comparen y ordenen números fraccionarios y decimales mediante la búsqueda de expresiones equivalentes, la recta numérica, los productos cruzados u otros recursos.

Ejemplo para 1B1.2

Problema: En un examen que tiene cierto número de preguntas Sofía contestó correctamente 15 de las 20 primeras preguntas y 1/3 de las preguntas restantes. En total tuvo la mitad de las preguntas contestadas correctamente. ¿Cuántas preguntas tuvo el examen?

3. Representen sucesiones numéricas o con figuras a partir de una regla dada y viceversa. (Se sugiere presentar sucesiones e indicar qué número continua)

Ejemplo para 1B1.3

Pregunta: ¿Cuál es el siguiente número en la sucesión: 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24?

4. Construyan figuras simétricas respecto de un eje e identifiquen cuáles son las propiedades de la figura original que se conservan.

Ejemplo para 1B1.4

Actividad: Los alumnos realizarán un cono, un cilindro o un cubo con desarrollos diferentes al tradicional. Ver CRICED (2005) (Video)

5. Resuelvan problemas de conteo con apoyo de representaciones gráficas.

Bloque 2

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones.

Ejemplo para 1B2.1

Problema: En una bolsa de canicas 3/5 partes son rojas, 1/3 son azules y 18 son amarillas. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

2. Resuelvan problemas que implican efectuar multiplicaciones con números decimales.

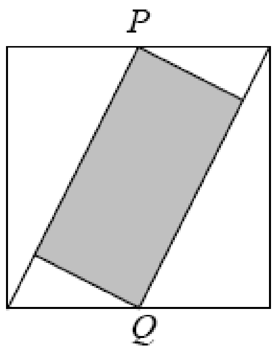
Ejemplo para 1B2.2

Pregunta: ¿Cuál es el valor de $(0.3)^2 + 1$?

3. Justifiquen el significado de fórmulas geométricas que se utilizan al calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.

Ejemplo para 1B2.3

Problema: *P* y *Q* son los puntos medios de los lados del cuadrado de perímetro 4 cm. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



4. Resuelvan problemas de proporcionalidad directa del tipo valor faltante, con factor de proporcionalidad entero o fraccionario y problemas de reparto proporcional.

Ejemplo para 1B2.4

Problema: Para iniciar un negocio se requieren de $40,000. Paulina gana $20,000 al mes y Dolores gana $30,000. Ambas acordaron dividir la inversión en partes proporcionales. ¿Cuánto dinero tiene que dar cada una para iniciar el negocio?

Bloque 3

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican efectuar divisiones con números decimales.

2. Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales.

Ejemplo para 1B3.2

Problema: Un automóvil al salir de viaje lleva de gasolina una cierta cantidad en su depósito. El viaje lo hace en dos etapas: en la primera consume 1/5 de la gasolina. En la segunda gasta ¼ de lo que quedaba. Al final del trayecto acaba con 30l. ¿Con cuántos litros emprendió el viaje?

3. Resuelvan problemas que implican el cálculo de porcentajes o de cualquier término de la relación: Porcentaje = cantidad base × tasa.

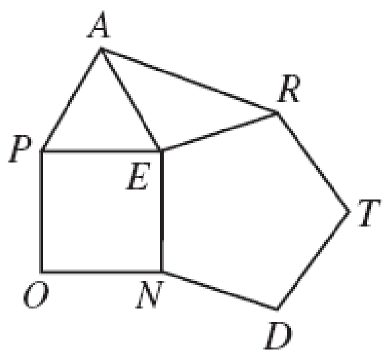
Ejemplo para 1B3.3

Problema: Un avión tarda 2 horas y 30 minutos en ir de Madrid a Roma. Si hubiera ido un 20% más rápido ¿cuánto habría tardado?

4. Resuelvan problemas que implican el cálculo de cualquiera de los términos de las fórmulas para calcular el área de triángulos, romboides y trapecios. Asimismo, que expliquen la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.

Ejemplo para 1B3.4

Problema: Un pentágono regular es una figura que tiene 5 lados iguales y 5 ángulos internos iguales. En el dibujo, ERTDN es un pentágono regular. AEP es un triángulo equilátero, AER es un triángulo isósceles y ENOP es un cuadrado. Si ER= 7, ¿Cuál es el área de ERTDN y AER?, ¿cuál es el perímetro de PAE y de ENOP?



5. Interpreten y construyan gráficas de barras y circulares de frecuencias absolutas y relativas.

Ejemplo para 1B3.5

Problema: De los 36 estudiantes de una clase, 26 aprobaron el último examen de Matemáticas. De los restantes, los 3/5 obtuvieron 4 de calificación y el resto un 3. Si repartes todos estos datos en un círculo, ¿cuántos grados debes asignar al sector de los que obtuvieron un 3?

6. Comparen la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos aleatorios para tomar decisiones.

Ejemplo para 1B3.6

Problema: Alicia tira al aire una moneda y Pedro tira dos. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia obtenga el mismo número de caras que Pedro?

Bloque 4

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Identifiquen, interpreten y expresen, algebraicamente o mediante tablas y gráficas, relaciones de proporcionalidad directa.

Para 1B4.1 podemos sugerirle que realice problemas de velocidad, distancia y tiempo mediante las formulas: $v = \frac{d}{t},\ d = vt\ y\ t = \frac{d}{v}$

Ejemplo para 1B4.1

Problema: ¿Cuántos segundos le llevará a un tren de 300m de largo viajando a 100 km por hora rebasar a un hombre que corre a 10km por hora en la misma dirección?

2. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales.

3. Construyan círculos que cumplan con ciertas condiciones establecidas.

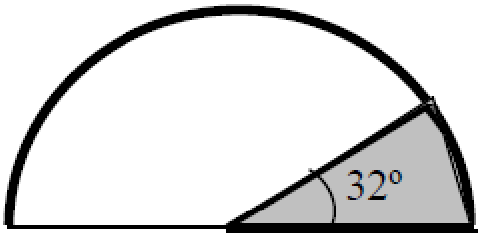
Ejemplo para 1B4.3

Problema: Si el cuadrado inscrito a una circunferencia tiene un área de 12 cm^2 el cuadrado circunscrito ¿qué área tendrá en cm^2?

4. Justifiquen y usen las fórmulas para calcular el perímetro o el área del círculo.

Ejemplo para 1B4.4

Problema: En el diagrama de la figura se ha representado el resultado obtenido por el PAN en un congreso de 225 diputados. ¿Cuántos diputados obtuvo este partido?



Bloque 5

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas aditivos que implican el uso de números con signo.

Ejemplo para 1B5.1

- Grupo uno -

LUGAR	CLUB	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS
1	UANL	9	5	3	1	12	4	8	18
2	Monterrey	9	4	1	4	13	10	3	13
3	Guadalajara	9	2	5	2	10	7	3	11
4	Necaxa	9	3	2	4	5	6	-1	11
5	S. Laguna	9	3	1	5	9	14	-5	10
6	UAG	9	3	0	6	10	21	-11	9

- Grupo dos -

LUGAR	CLUB	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS
1	América	10	5	1	4	19	15	4	16
2	San Luis	10	3	5	2	12	10	2	14
3	Atlas	9	4	1	4	11	9	2	13
4	Toluca	9	3	3	3	15	14	1	12
5	Atlante	9	3	1	5	8	9	-1	10
6	Pachuca	9	2	3	4	5	12	-7	9

- Grupo tres -

LUGAR	CLUB	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS
1	UNAM	9	6	3	0	19	8	11	21
2	M. Morelia	9	5	3	1	21	13	8	18
3	Cruz Azul	9	4	3	2	16	11	5	15
4	Puebla	9	3	1	5	6	11	-5	10
5	Jaguares	9	2	2	5	6	13	-7	8
6	Querétaro	9	2	2	5	8	18	-10	8

Tabla General del fútbol mexicano (en línea). Disponible en http://www.femexfut.org.mx (2011. 8 de marzo)

Se les pide a los discentes que sumen la diferencia de goles.
Grupo 1 (+) 14 (-) 17
Grupo 2 (+) 9 (-) 8
Grupo 3 (+) 25 (-) 22
Ambos suman (+) 48 (-) 48 y por lo tanto el total es 0.
Puede explicar ¿por qué?

2. Expliquen las razones por las cuales dos situaciones de azar son equiprobables o no equiprobables.

Ejemplo para 1B5.2

Problema: El guardián del Laberinto me deja entrar si lanzando un dado saco al menos el doble de puntos que él. Si el dado es cúbico, con caras numeradas del uno al seis, ¿qué probabilidad tengo de entrar?

3. Resuelvan problemas que implican una relación inversamente proporcional entre dos conjuntos de cantidades.

4. Resuelvan problemas que impliquen interpretar las medidas de tendencia central.

Ejemplo para 1B5.4

Problema: Si un ángulo de un triángulo es 40º, ¿cuál es la media de los otros dos?

Segundo grado.

Bloque 1

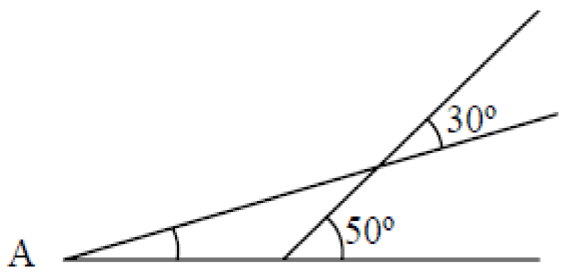
Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican efectuar sumas, restas, multiplicaciones y/o divisiones de números con signo.

2. Justifiquen la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o cuadrilátero.

Ejemplo para 2B1.2

Problema: ¿Cuánto mide el ángulo *A* de la figura?



3. Resuelvan problemas de conteo mediante cálculos numéricos.

Ejemplo para 2B1.3

Problema: Un juego consiste en contar todos los números del 1 al 100 saltándote aquellos que son múltiplos de 3 o acaban en 3. ¿Cuántos números te tienes que saltar?

4. Resuelvan problemas de valor faltante considerando más de dos conjuntos de cantidades.

5. Interpreten y construyan polígonos de frecuencia.

Bloque 2

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Evalúen, con calculadora o sin ella, expresiones numéricas con paréntesis y expresiones algebraicas, dados los valores de las literales.

2. Resuelvan problemas que impliquen operar o expresar resultados mediante expresiones algebraicas.

Ejemplo para 2B2.2

Problema: Si el número de tres cifras $6ab$ verifica que $6ab - ba6 = cd7$, entonces $c + d$ es igual a:

3. Anticipen diferentes vistas de un cuerpo geométrico.

4. Resuelvan problemas en los que sea necesario calcular cualquiera de los términos de las fórmulas para obtener el volumen de prismas y pirámides rectos. Establezcan relaciones de variación entre dichos términos.

Ejemplo 2B2.4

Problema: En un acuario de base rectangular de dimensiones 100 cm por 40 cm y altura 50 cm, el agua llega hasta una altura de 37 cm. Si sumergimos totalmente una piedra de 1000 cm^3 de volumen, ¿hasta qué altura, en cm, subirá el agua?

5. Resuelvan problemas que implican comparar o igualar dos o más razones.

6. Resuelvan problemas que implican calcular e interpretar las medidas de tendencia central.

Ejemplos para 2B2.6

Problema 1: La media de 4 números es k. Si añadimos el número 40, la media de los cinco números ahora es 14. ¿Cuánto vale k?

Problema 2: Si la media de cinco enteros positivos distintos es 15 y la mediana 18, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar alguno de ellos?

Bloque 3

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Elaboren sucesiones de números con signo a partir de una regla dada.

2. Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$; donde los coeficientes son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos.

3. Expresen mediante una función lineal la relación de dependencia entre dos conjuntos de cantidades.

Para 2B3.3 Se sugiere buscar y proponer problemas donde pueda introducirse al final el concepto de función lineal. Como son los problemas de velocidad:

$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{v} * \boldsymbol{t} = \boldsymbol{d}$. Donde ***t*** es la variable independiente.

Ejemplo para 2B3.3

Problema: Cuando Israel camina va a una velocidad de 6 km/h, cuando trota va a 15 km/h y en bicicleta va a 30km/h. Un día caminó media hora, tres cuartos de hora fue al trote y usó la bicicleta por 30 minutos. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total? ¿Qué tiempo estuvo haciendo ejercicio?

4. Establezcan y justifiquen la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.

Ejemplo para 2B3.4

Problema: ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de nueve lados?

5. Argumenten las razones por las cuales una figura geométrica sirve como modelo para recubrir un plano.

6. Identifiquen los efectos de los parámetros *m y b* de la función $y = mx + b$, en la gráfica que corresponde.

Bloque 4

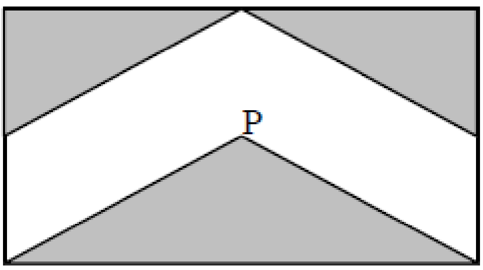
Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.

2. Resuelvan problemas geométricos que implican el uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos.

Ejemplo para 2B4.2

Problema: Si el punto P es el centro del rectángulo de lados 12 y 5 metros, entonces el área de la zona sombreada es:



3. Interpreten y relacionen la información proporcionada por dos o más gráficas de línea que representan diferentes características de un fenómeno o situación.

4. Resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad de dos eventos independientes.

Ejemplo 2B4.4

Problema: Cuando tiras un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, no puedes ver la cara sobre la que se apoya. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las otras cinco caras sea divisible por 6?

5. Relacionen adecuadamente el desarrollo de un fenómeno con su representación gráfica formada por segmentos de recta.

Bloque 5

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo para 2B5.1

Problema: Un ama de casa cuenta con $108 para comprar huevos. Al llegar a la tienda observa que la docena vale $7.20 más de lo que había calculado, por lo que compra media docena menos de lo previsto. ¿Cuánto paga por un huevo y cuántos huevos compró?

2. Determinen el tipo de transformación (traslación, rotación o simetría) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada.

3. Identifiquen y ejecuten simetrías axiales y centrales y caractericen sus efectos sobre las figuras.

Ejemplo para 2B5.3

Actividad Sugerida: Papiroflexia. Remarcando los puntos que al docente le interesen como pueden ser, ejes de simetría, ángulos, áreas de figuras semejantes, vértices, entre otros.

4. Resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad de dos eventos que son mutuamente excluyentes.

Ejemplo para 2B5.4

Problema: Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor o igual que el de cruces?

Tercer Grado.

Bloque 1

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes al efectuar cálculos.

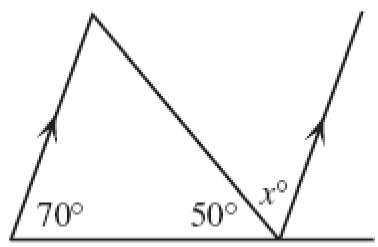
Ejemplo para 3B1.1

Problema: A 5 buenos amigos les encantan los números. Así cada vez que René encuentra un número n lo multiplica por 3 y le suma 12, es decir $3n + 12$. Alex hace esto: $4n + 8$. Mario: $7n + 21$. Guillermo $5n + 5$ y Abraham $6n + 6$. Después de hacer sus cálculos gritan su resultado. Ayer oí que uno gritó: ¡trescientos cuarenta y tres! ¿Quién gritó?

2. Apliquen los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de figuras geométricas.

Ejemplo para 3B1.2

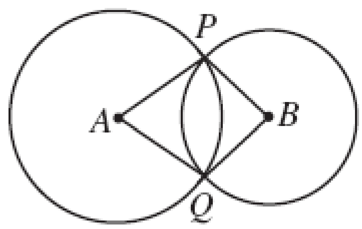
Problema: En el diagrama, ¿Cuál es el valor de x?



3. Resuelvan problemas que implican relacionar ángulos inscritos y centrales de una circunferencia.

Ejemplo para 3B1.3

Problema: En el diagrama, dos círculos con centros en A y B intersecan a los puntos$P$ y Q tales que $\angle PAQ = 60° \angle PBQ = 90°$. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo con centro en A con respecto al área del círculo con centro en B?



4. Resuelvan problemas que implican determinar una razón de cambio, expresarla algebraicamente y representarla gráficamente.

Bloque 2

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado, asumiendo que éstas pueden resolverse mediante procedimientos personales o canónicos.

Ejemplo para 3B2.1

Pregunta: ¿Cuál es el valor de x si $(5 - 3x)^5 = -1$?

2. Resuelvan problemas que implican utilizar las propiedades de la semejanza en triángulos y en general en cualquier figura.

3. Resuelvan problemas de probabilidad que impliquen utilizar la simulación.

Bloque 3

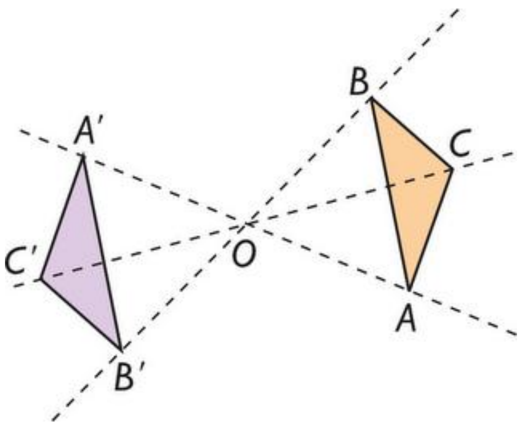
Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Interpreten y representen, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y no lineales.

2. Utilicen adecuadamente la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

3. Resuelvan problemas geométricos que implican el uso del teorema de Tales.

4. Conozcan las condiciones que generan dos o más figuras homotéticas, así como las propiedades que se conservan y las que cambian.



Bloque 4

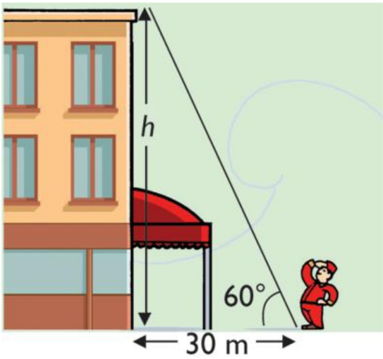
Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Representen algebraicamente el término general, lineal o cuadrático, de una sucesión numérica o con figuras.

2. Resuelvan problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras y razones trigonométricas.

Ejemplo para 3B4.2

Problema: Con los datos que se proporcionan en la imagen. ¿Cuál es la altura del edificio?



3. Resuelvan problemas que implican el uso de procedimientos recursivos, tales como el crecimiento poblacional o el interés sobre saldos insolutos.

Bloque 5

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que impliquen calcular el volumen de cilindros y conos o cualquier término de las fórmulas que se utilicen. Anticipen cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

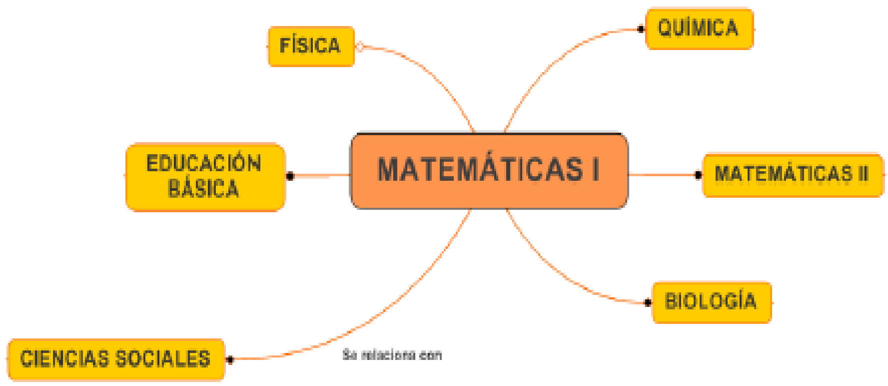
Ejemplo para 3B5.1

Problema: El volumen de un cilindro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. El volumen en cm^3 del mayor cilindro inscrito en un paralelepípedo rectángulo con medidas 10cm. x 10cm. x 15cm.

Sin embargo, nos parece evidente que el Bloque 5 concretamente el punto 1 puede introducirse al principio del curso, es decir, se recomienda empezar por lo más fácil, hay muchos maestros que nunca terminan y se quejan de que no les alcanza el tiempo para terminar el Programa. El 3B5.1 es ideal para introducir actividades de construcción de cuerpos geométricos (algunos ejemplos ya citados como la cubeta, construcción de cilindros)

III.2 Programa de Estudios de Bachillerato de acuerdo a la DGB

Como parte de la formación básica anteriormente mencionada (I.3), a continuación se presenta el programa de estudios de la asignatura de Matemáticas I, que pertenece al campo de conocimiento del mismo nombre y se integra con cuatro cursos. El campo de conocimiento de matemáticas, conforme al Marco Curricular Común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar. DGB (2009)



Las matemáticas del área básica alimentan a la Física, Química y Biología.

Tomado de Matemáticas I. Series de Programas de Estudio. SEP/DGB 2009

Esta asignatura está organizada en diez bloques de conocimiento, con el objeto de facilitar la formulación y/o resolución de situaciones o problemas de manera integral en cada uno, y de garantizar el desarrollo gradual y sucesivo de distintos conocimientos, habilidades, valores y actitudes, en el estudiante.

Se enlistan los cuatro cursos de matemáticas divididos en bloques de acuerdo a la DGB. Para la introducción al cálculo, tenemos una propuesta interesante la cual aparece al final de la revisión de los cuatro cursos.

MATEMATICAS I

Bloque I Resuelve problemas aritméticos y algebraicos

Ejemplo para el Bloque I: Problemas que se pueden hacer primero jugando

2 CORREDORES

Pones una manzana cada 5 metros (10 en total), en el inicio del recorrido pones un cesto. El corredor va por la primera manzana y regresa y la pone en el cesto, corre por la segunda y regresa, hasta que va por la última manzana.

Para obtener los metros que recorrió se hace lo siguiente:

10 +20 +30++++ porque voy y vengo

2(5+10+15+…+50) el dos porque voy y vengo. COMO FACTOR COMUN

10(1+2+3++...+10) USO DE LA FORMULA DE GAUSS.

Ya que los alumnos realizaron la actividad, que están involucrados se hacen preguntas.

(A+B)C = AC +BC. Propiedad Distributiva.

¿Cuántos metros corrieron?

¿Cómo puedo sumarlos más rápido?

¿Qué papel tiene el 2 en las operaciones anteriores?, etc.

Bloque II Utiliza magnitudes y números reales

Ejemplo para el Bloque II: ¿Cuál es el resultado de dividir 23.03 entre 0.1?

Bloque III Realiza sumas y sucesiones de números

Ejemplo para el Bloque III: a) ¿Cuál es la suma los diez primeros números positivos?

La suma de nueve de los diez primeros números positivos es 50.

b) ¿Cuál es el que no he sumado?

Bloque IV Realiza transformaciones algebraicas I

Bloque V Realiza transformaciones algebraicas II

Ejemplo para los Bloques IV y V: Para ayudar a los dicentes con el despeje de formulas se puede:

1. Proponer ejercicios que tengan que ver con velocidad, distancia y tiempo.

$$\frac{d}{t} = v \qquad d = vt \qquad t = \frac{d}{v}$$

Se escribe un ejemplo numérico: $\frac{20}{5} = 4, 20 = (5)(4), \ \frac{20}{4} = 5$

Para aumentar el grado de dificultad, tengo 2 actividades que puse en práctica:

2. “**Dinero Fácil**”

El profesor lanzará un desafío a sus estudiantes (para ello necesitará un billete, entre más alta sea la denominación del papel moneda mayor será la atención que los alumnos pondrán.) Sostendrá el billete de tal manera que el punto medio quede entre los dedos del aprendiz, lo dejará caer y si lo atrapa será suyo.

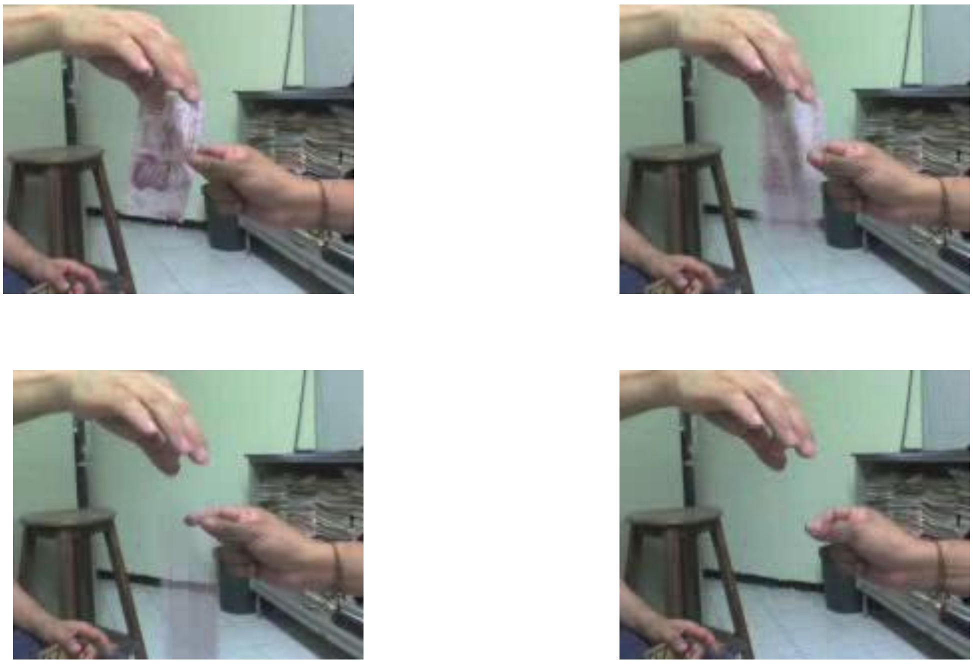


Imagen 1. El Billete no puede ser atrapado.

¡No podrá atraparlo! (**Imagen 1**) Explicación: Se necesita al menos 1/7 de segundo para que los impulsos nerviosos viajen del ojo al cerebro y de ahí a los dedos. Pero de acuerdo a la ecuación $d = \frac{1}{2}gt^2$ en solo 1/8 de segundo el billete cae 8 centímetros, que es la mitad de la longitud del billete. Hewitt (1999)

Con esta actividad se pueden revisar fracciones y el despeje de fórmulas. Ya que se tiene la atención de los discentes necesitaremos una regla y se hace el mismo experimento (se deja caer la regla entre los dedos, deben atraparla, como se muestra en la **Imagen 2**), para calcular su tiempo de reacción deben despejar de la ecuación $d = \frac{1}{2}gt^2$ el tiempo $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$. También se revisa cambio de unidades, pues la distancia que obtienen está dada en centímetros, así que deben “pasarla” a metros. Se vincula un tema de física con uno de matemáticas.

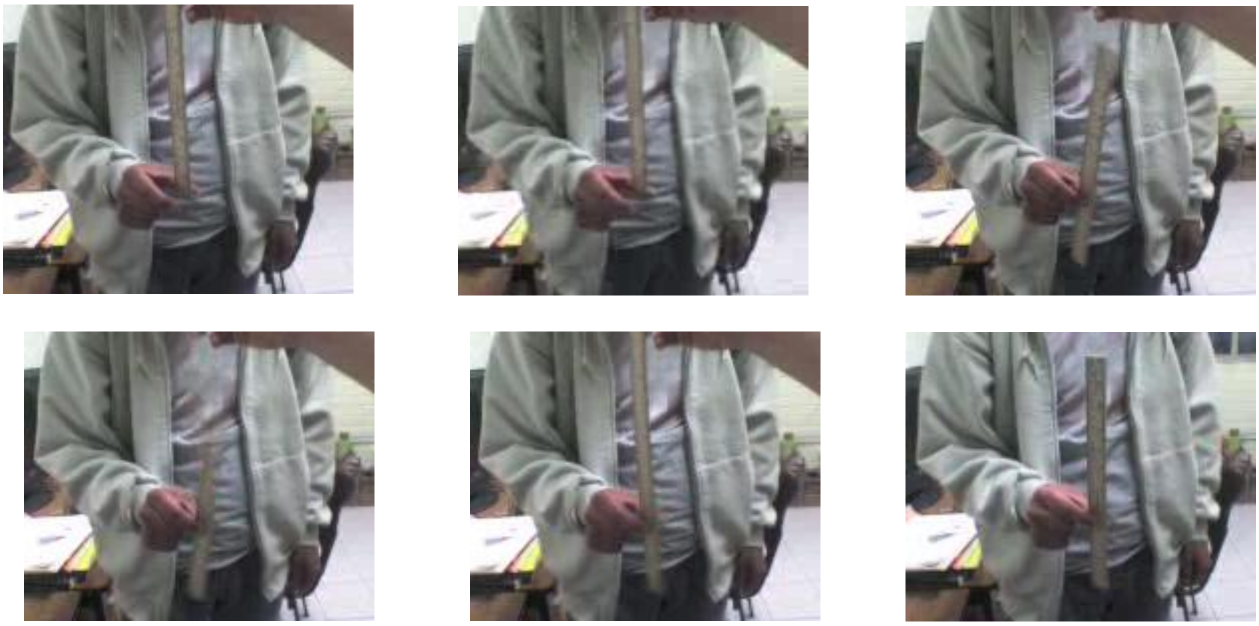


Imagen 2. Se deja caer una regla para tomar la medida que pasa entre los dedos, para así calcular el tiempo de reacción.

3. “**Everybody Jump, Jump**”

En la misma línea que la actividad anterior, se calculará el “tiempo de vuelo” de los estudiantes. Necesitamos un flexometro y muchas ganas de brincar. Se colocará el flexometro pegado a una pared y el aprendiz junto a él para que dé un brinco muy alto y así ver cuántos centímetros (o metros, si es que es basquetbolista profesional) logra despegarse del suelo. Utilizará la misma fórmula de la actividad anterior para calcular su “tiempo de vuelo”. Se revisa despeje de ecuaciones, unidades de longitud y como la física depende estrechamente de las matemáticas.

Bloque VI Resuelve ecuaciones lineales I
Bloque VII Resuelve ecuaciones lineales II
Bloque VIII Resuelve ecuaciones lineales III
Bloque IX Resuelve ecuaciones cuadráticas I
Bloque X Resuelve ecuaciones cuadráticas II
Ejemplo para los Bloques VI-X: Para la parte de ecuaciones lineales y cuadráticas, como actividad se puede optar por el “**FUTBOL ALGEBRAICO**”, se trabaja por parejas, el profesor funge como el árbitro de los distintos juegos y propone ecuaciones explícitas ($2x + 56 = 3x – 30$, por ejemplo), para un jugador y después otra para el oponente ($4x + 42 = 2x - 51$), del mismo estilo. Existen muchas variantes, tal vez en lugar de

ecuaciones, decida elegir problemas para que los resuelvan. Si este es el caso se sugiere ir de problemas sencillos a más complicados. Se pueden hacer equipos de 3 integrantes (2 jugadores y el árbitro), en este caso en una sesión previa se les pide a los chicos que propongan de 10 a 15 ecuaciones y las lleven en tarjetas para jugar. En el 2009 lo implemente con alumnos de 1º de bachillerato, donde se obtuvieron buenos resultados. La sorpresa que me lleve es que los jóvenes dejaron de tenerle “pánico” a las “*x*” y entendieron que pueden ocupar cualquier letra y así darle “sentido” a lo que hacen. El comentario de uno de mis alumnos fue: “Cuando usaba la “*x*” no podía resolver ecuaciones, ahora que utilizo la “*a*” ya puedo”

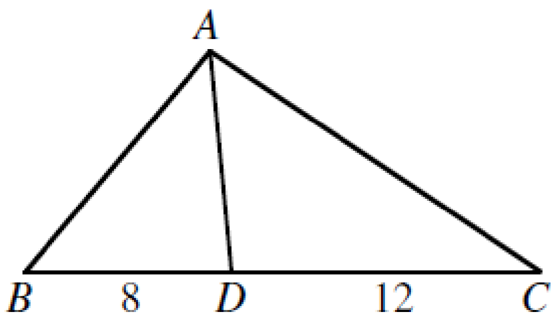
En la foto aparece el Profesor Gabriel Moreno. Es una variante del Futbol Algebraico presentado en el capítulo II, pues aquí pueden jugar 4 participantes o 4 equipos.

Pasemos al temario de Matemáticas II (2º semestre de bachillerato)

MATEMÁTICAS II

Bloque I Utiliza triángulos: ángulos y relaciones métricas

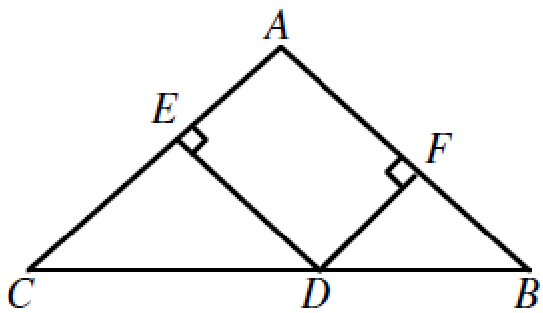
Ejemplo para Bloque I: El área del triángulo $\Delta\, ABC$ es 60cm^2. Si $BD = 8\text{cm}$ y $DC = 12\text{cm}$, el área (en cm^2) de ΔABD es:



Bloque II Comprende la congruencia de triángulos

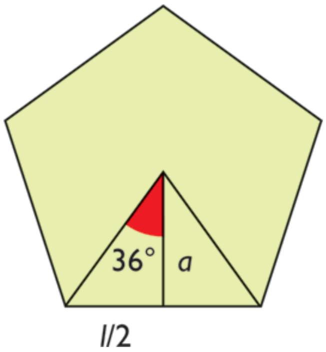
Bloque III Resuelve problemas de semejanza de triángulos y Teorema de Pitágoras.

Ejemplo para el Bloque III: En el triángulo $\Delta\, ABC$, $AC = AB = 25$ y $BC = 40$. D es un punto sobre BC. A partir del punto D, se trazan perpendiculares a AC en E y a AB en F. ¿Cuánto mide $DE + DF$?



Bloque IV Reconoce las propiedades de los polígonos

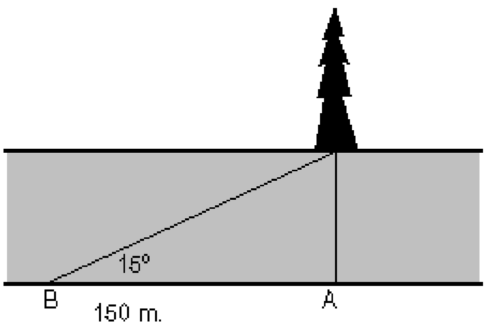
Ejemplo para el Bloque IV: ¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado 10 cm?



Bloque V Emplea la circunferencia

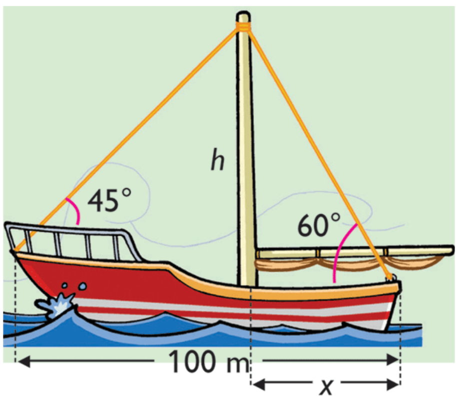
Bloque VI Describe las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos

Ejemplo para el Bloque VI: Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 150 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 15º con nuestra orilla. Calcular la anchura del río.



Bloque VII Aplica funciones trigonométricas

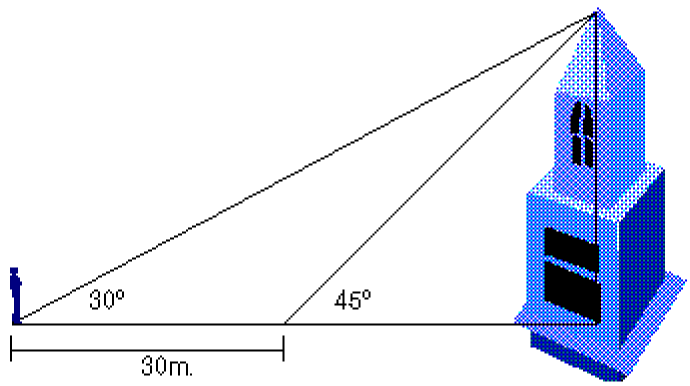
Ejemplo para el Bloque VII: El mástil de un velero se halla unido a la proa y a la popa por dos cables que forman con la cubierta ángulos de 45° y 60°, respectivamente. Si el barco tiene una longitud de 100 m, ¿cuál es la altura del mástil?



Bloque VIII Aplica las leyes de senos y cosenos

Ejemplo para el Bloque VIII

Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de 30º, si avanzamos 30 metros, el ángulo pasa a ser de 45º. Calcular la altura del edificio.



Bloque IX Aplica la estadística elemental

Bloque X Emplea los conceptos elementales de probabilidad

Ejemplo para el Bloque X. Dos personas juegan a lanzar una moneda de modo que uno de ellos se anota un tanto cuando sale cara y el otro cuando sale cruz. Cada uno pone $30 y acuerdan que el primero que gane 8 lanzamientos se queda con los $60. Pero por una causa ajena a ambos, deben interrumpir la partida cuando uno ha ganado 7 lanzamientos y el otro solo 5. ¿Cómo debe repartirse el dinero?

Este problema es muy interesante para introducir al alumno al cálculo de probabilidades. Pues tiene varias formas de resolverse. Regresar el dinero de cada quien. Repartir de forma proporcional el dinero. Pascal para resolverlo, no se fijó en lo que había pasado, sino en lo que podría acontecer.

MATEMÁTICAS III.

Bloque I Reconoce lugares geométricos.

Bloque II Aplica las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos.

Ejemplo para el Bloque II: Dado un rectángulo PQRS en el plano cartesiano P(3, 2), Q(p, 2), R(p, 12) y S(3, 2). Hallar el valor de p, para que el área del rectángulo sea 120.

Bloque III Integra los elementos de una recta como lugar geométrico.

Bloque IV Utiliza distintas formas de la ecuación de una recta.

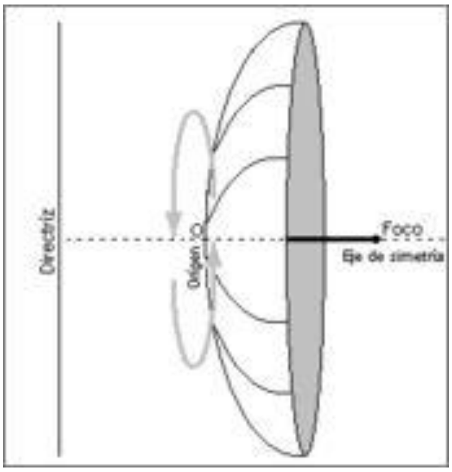
Ejemplo para el Bloque IV: La recta L corta al eje X en el punto (-8, 0). El área sombreada es 16 (en el cuadrante 2). ¿Cuál es la pendiente de la recta?

Bloque V Emplea la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Bloque VI Utiliza distintas ecuaciones de la circunferencia.

Bloque VII Emplea la ecuación de la parábola con vértice en el origen.

Ejemplo para el Bloque VII: Se tiene un reflector parabólico cuya forma se obtiene haciendo girar un arco de parábola que empieza en el vértice, alrededor del eje de la parábola. Si el foco está a 9cm. del vértice y el arco parabólico tiene 16cm. de profundidad. ¿Cuál es la abertura del reflector?



Bloque VIII Utiliza distintas ecuaciones de la parábola.

Ejemplo para el Bloque VIII: Un puente parabólico de acero, tiene diez metros de altura, con el eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados 20m. ¿Está el foco de la parábola sobre el agua o debajo de ella, y a qué distancia de la superficie está?

Bloque IX Emplea la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Ejemplo para el Bloque IX: Se traza el contorno de una hortaliza de forma elíptica colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16m. y colocando un lazo de longitud total del 36m. alrededor de ellas; se traza el contorno empleando una tercera estaca que al girar alrededor de las dos fijas mantiene al lazo en tensión. ¿De qué largo y de qué ancho será la hortaliza?

Bloque X Utiliza distintas ecuaciones de la elipse.

Ejemplo para el Bloque X: La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20m. de largo y 16m. de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro?

MATEMATICAS IV

Bloque I Reconoce y realiza operaciones con distintos tipos de funciones.

Bloque II Aplica funciones especiales y transformaciones de gráficas.

Bloque III Emplea funciones polinomiales de grados cero, uno y dos.

Bloque IV Emplea funciones polinomiales de grados tres y cuatro.

Bloque V Emplea funciones polinomiales factorizables.

Bloque VI Emplea funciones racionales.

Bloque VII Aplica funciones exponenciales y logarítmicas.

Bloque VIII Emplea funciones periódicas.

Sugerencia para el temario de Matemáticas IV: Utilice un graficador (GeoGebra, Graphmatica, Graph de Ivan Johansen), son de acceso libre.

Ejemplo: Utilizando GeoGebra el maestro explica los principios de graficado (ver Anton (1998)) para funciones partiendo de funciones conocidas como $y = x^2$

$y = abs\ x$, $y = 1/x$, $y = x^3$ y $y = \sqrt[3]{x}$

Actividad: Graficar a mano la siguiente lista de funciones sin hacer tabla de valores indicando la secuencia de transformaciones o principios de graficado.

Lista de Problemas.

$y = 1 + (x - 2)^2$	$y = 2 - (x + 1)^2$
$y = -2(x + 1)^2 - 3$	$y = \frac{1}{2} (x - 3)^2 + 2$
$y = x^2 + 6x$	$y = x^2 + 6x - 10$
$y = 1 + 2x - x^2$	$y = \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 3)$

Si tú conoces la gráfica de $y = \sqrt{x}$, entonces graficá las siguientes funciones indicando los principios de graficado.

$y = 3 - \sqrt{x+1}$ | $y = 1 + \sqrt{x-4}$

$y = ½\ \sqrt{x} + 1$ | $y = -\sqrt{3x}$

El mejoramiento de las nuevas tecnologías son significativas, cambiando la forma de trabajo de los matemáticos y aproximándose a la resolución de problemas. Utilizan programas llamados Computers Algebra Systems (CAS)

La clase teórica (más formal) es inevitable sin embargo no queremos que sea interminable, donde el alumno solo está sentado escuchando la exposición magistral.

El vicio común de los alumnos es estudiar un día antes del examen. Hay que demostrar el teorema de Pitágoras, la suma de un triángulo interno, el seno de la suma de ángulos, pero, debemos insistir…

III.3 Actividades usando "Wolfram Demonstrations Project"

Wolfram Demonstrations Project es la muestra de la herramienta tecnológica. Se tiene acceso con facilidad. Estamos de acuerdo que hay más opciones, sobre todo en línea.

Describiré algunos de los temas que aparecen en Wolfram.

1. Loculus of Archimedes.

Hace más de 2000 años Arquímedes inventó un juego de disección llamado el Loculus, haciéndola el rompecabezas más antiguo del mundo. En 2003, Bill Cutler enumeró todas las soluciones con la ayuda de un programa de ordenador. Sin rotaciones y reflexiones, hay 536 distintas soluciones.

2. Using Common Denominators to Add Fractions (Usar el común denominador para sumar fracciones)

Esta demostración muestra cómo utilizar denominadores comunes para sumar fracciones.

3. Conic Section Curves (secciones cónicas)

Ajustar el valor de a, b y c en los formularios normalizados para elipses, hipérbolas y parábolas. También puede mover el centro y ver otros puntos relacionados y líneas.

4. Conic Sections: Equations and Graphs

(Secciones cónicas: Graficas y ecuaciones)

Está demostración lo ayudará a comprender mejor las elipses, parábolas e hipérbolas.

5. The Fundamental Theorem of Calculus (Teorema Fundamental del Cálculo)

Si f es una función continua en $[a$, b$]$ y F es una primitiva de f en $[a$, b$]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ = F (b) - $F(a)$. Si tomamos $a = 0$ y F (a) = 0, entonces, $F(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x y f (x) es la derivada (pendiente) de F (x).

6. Expression Machine (Máquina de Expresiones Algebraicas)

Está maquina de expresiones algebraicas ilustra el uso de variables. Las indicaciones que debe seguir son: "Haga clic en la nariz para crear una nueva expresión. Elegir diferentes valores de x dará resultados diferentes. Trata de predecir el resultado antes de seleccionar el siguiente valor de x".

Si trabaja al pie de la letra siguiendo su programa, se avanza muy lentamente, si utiliza actividades como las que proponemos o a partir de la solución de un problema, el avance es más significativo, pues puede tocar varios temas. Después de que los alumnos han terminado de explicar o argumentar sus soluciones, el maestro puede resaltar los puntos correspondientes a los temas de su programa (en este caso, expresiones algebraicas, coeficiente, exponente, etc.) De tal forma que resulta más natural. Y las definiciones "no caen del cielo".

Los alumnos generan la idea y descubren que pueden hacerlo para números más pequeños y deducen la regla.

Se tienen muchas actividades, pero la idea es justificar que AGA se puede usar con facilidad en bachillerato, este el objetivo de los ejemplos que se presentaron.

Esta es la idea general con la que puede trabajar un docente. No tiene que ser "nada del otro mundo", combinar actividades y resolución de problemas, lo importante es que la clase expositiva se utilice para introducir un tema nuevo o para desbloquear a los alumnos, es decir, el profesor, hablará lo menos posible (10 o 15 minutos por sesión). Un maestro con 30 años de experiencia comenta antes de iniciar un nuevo ciclo escolar:

> *"He dado mi clase por muchos años, está vez mis alumnos la darán por mi".*

CONCLUSIONES

- Se comprobó que los estudiantes a pesar de no conocer muchos conceptos si son capaces de resolver problemas con sus propios métodos, es decir, SI GENERAN IDEAS. Si bien es cierto que los niños saben poco, por otro lado, tienen gran creatividad e ingenio y con AGA es lo que queremos aprovechar.

- Se pudo comprobar que los niños son creativos al resolver los problemas y realizar las actividades. Pues a diferencia de una clase tradicional toman un rol más activo. No se limitan a repetir las ideas del Profesor.

- Los niños son creativos a diferencia de los adultos, porque no se aferran a sus ideas.

- En el Modelo AGA no es necesaria la aplicación de exámenes.

- En el Modelo AGA no es necesaria la aplicación de exámenes tradicionales, pues los alumnos son evaluados constantemente con sus ideas y argumentación. Es decir, el maestro debe advertir que mejora su explicación.

- A partir de una Actividad se pueden tocar varios temas del programa y así avanzar en el mismo, dependiendo del interés y el nivel de conocimiento de los discentes.

- La Planeación de Actividades puede enfocarse en un solo tema. En la presentación del modelo, las sesiones de ejercicios fueron de varios tópicos, estas solo se pueden tratar de uno solo (por ejemplo, ecuaciones de 1er. grado)

- Con el Modelo AGA puede fomentar competencias como son Resolver Problemas (RP), ARGUMENTAR, COMUNICAR, EXPONER EN FORMA ORAL O ESCRITA principalmente.

- Con AGA se busca que los alumnos logren un avance sobre sus habilidades, sus conocimientos. Es decir que se note un cambio en su gusto por las matemáticas y su participación activa en clase así como corregir los errores que puedan tener.

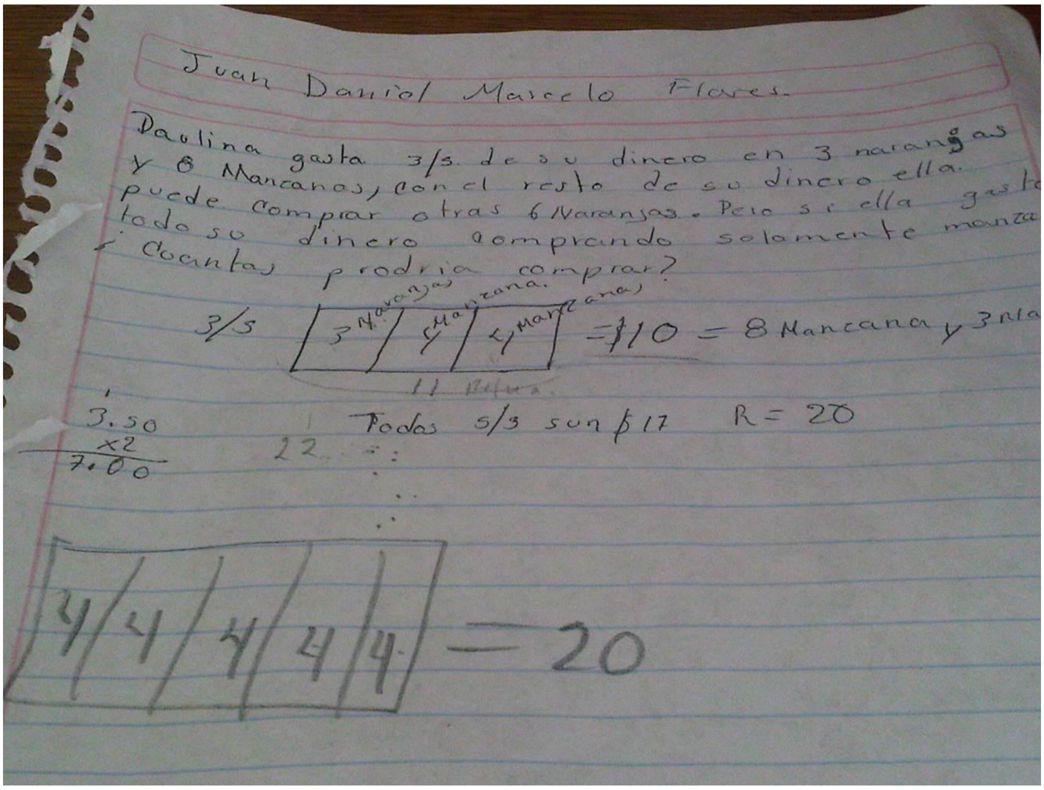
- ¡AGA es maravilloso, versátil, ya que el docente lo puede ajustar de acuerdo a sus necesidades!

- ♠ Los alumnos se mostraron con más confianza y gusto por el ÉXITO al ser tomados en cuenta para participar. Discípulos que estaban en el anonimato por su timidez, mostraron tener muy BUENAS IDEAS al motivarlos a pasar al pizarrón.
- ♠ AGA lleva al alumno a una zona de ÉXITO. Pues él poco a poco, por si solo halla las respuestas.
- ♠ Rompemos con la clase tradicional, para hacerla más dinámica. Donde el discente es el protagonista principal.
- ♠ Se resuelve la contradicción entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la vida cotidiana. Se vinculan con el Modelo AGA, de acuerdo a Terezinha Carraher.
- ♠ La clase tradicional no fomenta la participación de los niños. Por lo tanto no tienen oportunidad de argumentar. Pero si no se práctica no podemos esperar que los niños de la noche a la mañana tengan habilidades para argumentar. La inteligencia se construye utilizándola.
- ♠ Trabajando de esta manera se pueden esperar mejores resultados en la evaluación PISA. Recordando que la quinta parte de los jóvenes de 15 años se encuentran en el nivel menor que 1, es decir, solo resuelven los problemas más sencillos.
- ♠ Si lo pensamos, los problemas podrían parecer muy fáciles, pero la realidad de las escuelas comunes y corrientes nos muestran que los niños siguen sufriendo en la clase de matemática, porque no utilizan un buen método de enseñanza. Por eso AGA es una opción, es fácil de implementar pues solo consta de tres momentos clave y no se requieren de teorías rebuscadas y exóticas para el docente.

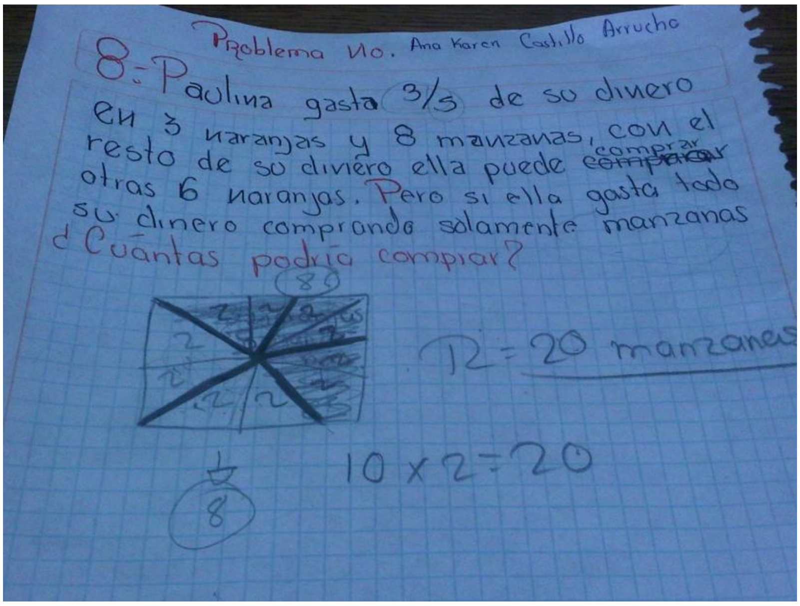
ANEXOS

Presento algunas imágenes con el trabajo que los niños realizaron:

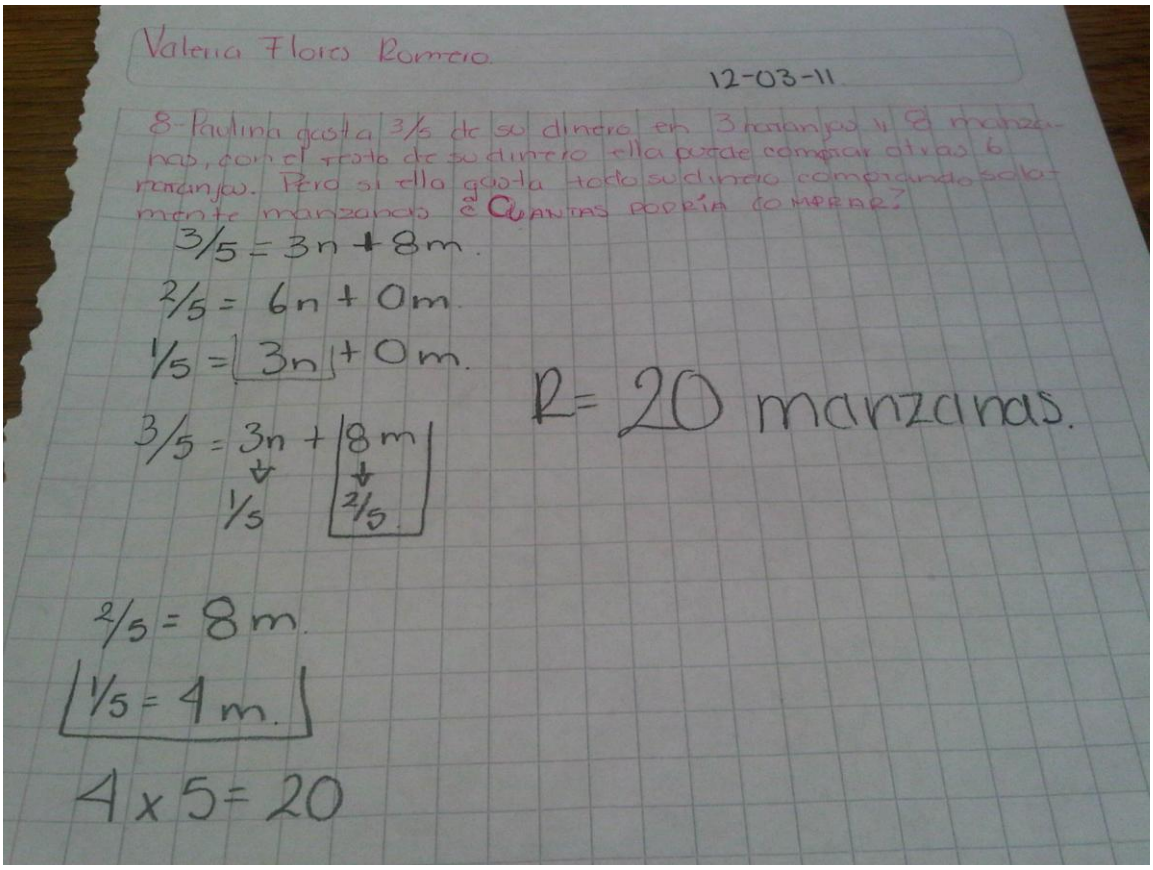
Problema: Paulina gasta 3/5 de su dinero en naranjas y 8 manzanas, con el resto de su dinero ella puede comprar otras 6 naranjas. Pero sí ella gasta todo su dinero comprando solamente manzanas ¿Cuántas podría comprar?



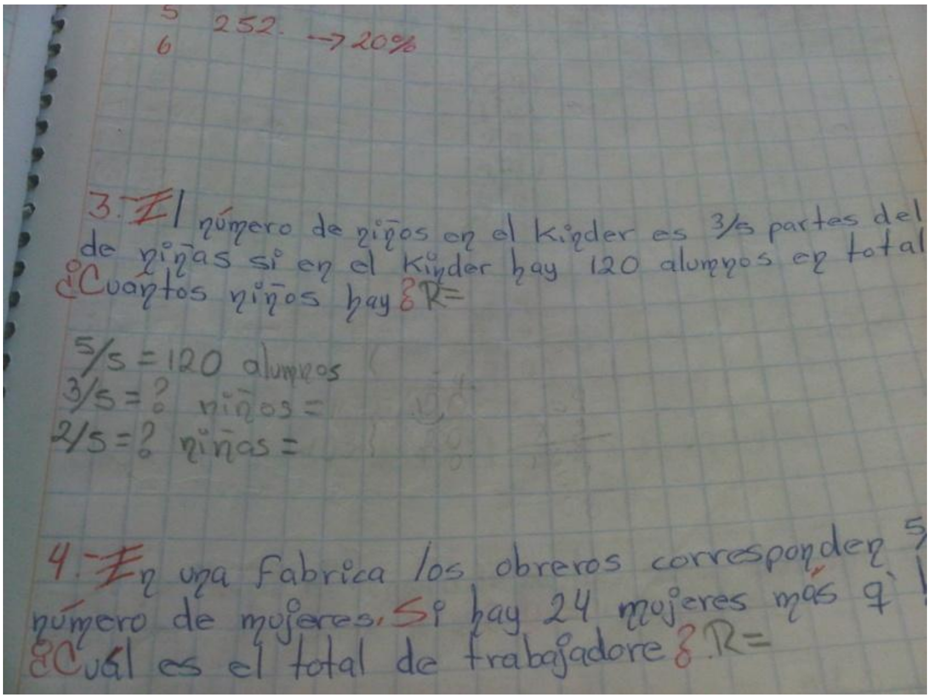
Ejercicio resuelto por Juan Daniel Marcelo Flores. Utiliza el método gráfico.



Solución de Ana Karen Castillo Arrucha utilizando el método gráfico.



Solución de la alumna Valeria Flores Romero usando "ecuaciones", note que comúnmente "igualan" fracciones con números enteros ("3/5 = 3n + 8 m")



Problemas resueltos por Diana Durán se observa lo mismo que en la imagen anterior ("5/5 = 120 alumnos")

BIBLIOGRAFÍA

Anton, Howard. (1998). *Calculus. A New Horizon*. USA. John Wiley&Sons, Inc.

Balbuena Corro, Hugo (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria Antología. La matemática expulsada de la escuela. Articulo*. México.
Programa Nacional de Actualización Permanente.

Cadoche, Lilian y Pastorelli, Sonia. *Concepciones de los alumnos ingresantes a la Universidad acerca de la matemática*. Argentina. Universidad Nacional del Litoral.

Carraher, Terezinha. Carraher, David y Schliemann, Analúcia (2004). *En la Vida Diez, en la Escuela Cero*. México. Siglo XXI Editores.

Castelló, Montserrat. *La organización de la enseñanza estratégica en los centros de educación secundaria*. España. Departamento de Psicología de la Educación. Universidad Ramón Llull y Universidad Autónoma de Barcelona.

Chamorro, Ma. Del Camen [Coord.](2006). *Didáctica de las Matemáticas*. España. Prentice Hall. Colección Didáctica Primaria.

Corbalan, Fernando (1994). *Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. España. Síntesis S.A.

CRICED, Universidad Tsukuba. Proyecto Conjunto CRICED-JICA (2005). *Explorar las clases Matemáticas de Japón: Para compartir las Ideas Claves.* [Video] Japón. Tsubota, Kozo la escuela primaria anexa a la Universidad de Tsukuba.

Díaz Barriga, Frida. (2005). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México. Mc Graw Hill.

Donovan, M. Suzanne y Bransford, John D. (Eds.) (2004). *How Students Learn*. USA. National Research Council.

Ehrenberg, Miriam y Otto. (2002). *Cómo desarrollar una máxima capacidad cerebral*. España. Enter.

Escuelas Infantiles de Reggio Emilia (2005). *La inteligencia se construye usándola.* España. Ministerio de Educación y Ciencia. Morata Ediciones.

Facultad de Matemáticas de la U.C.M. *XI Concurso de Primavera de Matemáticas*. España.

Filloy, Eugenio (2003). *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*. México. FCE.

Giménez, Joaquim, Santos, Leonor y da Ponte Joao Pedro (2004). *La actividad matemática en el aula*. España. Grao.

Giry, Marcel (2003). *Aprender a pensar, aprender a razonar.* México. Siglo XXI Editores.

González, Fredy E. La *Metacognición y la Resolución de Problemas Matemáticos con Texto.* Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

González de Galindo, Susana y Villalonga de García, Patricia. (2006). *Enseñemos Matemática favoreciendo la comunicación y la actividad del alumno.* Argentina. Universidad de Tucumán.

Guevara Niebla, Gilberto. (1995). *La Catástrofe Silenciosa*. México. FCE.

Hahan y Dzewas. Mathematik 6. Deutschland. Westermann.

Hewitt G, Paul (1999). *Física Conceptual*. México. Pearson.

Instituto Politécnico Nacional. (2002). *Algebra para Nivel Medio Superior, guía para el profesor.* México. IPN.

Martínez Ramírez, Carlos [Comp.]. (1995) *Nueva Guía de Estudio Auxiliar para Sexto Año. Para la prueba de admisión a las escuelas secundarias con más de 2000 preguntas.* México. MAGNUM S.A. de C.V.

Ministerio de Educación de Singapur. (2006). *Documento Curricular de Primaria.* Singapur.

Monereo, Carlos. *La Enseñanza Estratégica: Enseñar para la Autonomía*. España. Departamento de Psicología de la Educación. Universidad Autónoma de Barcelona.

Moya, José (2007). *¿Qué podemos entender por competencias?* [Conferencia en video] [En línea] Disponible en: http://www.youtube.com/watch?v=oH-B-m7jCQ0 [2011. 3 de marzo]. Granada. CEP de Motrill.

Nunes, Terezinha y Bryant, Peter. (1997) *Las Matemáticas y su aplicación. La perspectiva del niño.* México. Siglo XXI Editores.

Robinson, Ken y Aronica, Lou (2009). *El Elemento*. México. Grijalbo.

Roman, José Antonio (2010. 7 de diciembre). *Revela OCDE resultados de la Prueba PISA 2009*. La Jornada. p. 17.

Secretaría de Educación Pública (2006). *Educación Básica Secundaria Matemáticas. Programas de Estudio 2006.* México. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Secretaría de Educación Pública (2006). Plan de Estudios para Matemáticas de Secundaria [en línea]. Disponible en: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas [2011. 7 de febrero]

Secretaría de Educación Pública, DGB (2009). *Matemáticas I. Serie Programas de Estudio.* México.

Vila, Antoni y Callejo, Ma. Luz. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* España. Narcea.

Wolfram Demonstrations Project [en línea]. Disponible en: http://demonstrations.wolfram.com [2011. 15 de febrero]