



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**UN RECORRIDO EN LA TEORÍA CLÁSICA DE
SUPERFICIES MÍNIMAS EN \mathbb{R}^3**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

GUADALUPE OCHOA CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

Octubre 2015

A mis padres...
Carolina y Taurino Arturo

La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.

Henri Poincaré (1854-1912) Matemático Francés.

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera como la de una escultura.

*Bertrand Russell (1872-1970) Filósofo, matemático y escritor
Inglés.*

Las matemáticas nos ayudan a descubrir la lógica que subyace al mundo tan complejo y caótico en el que vivimos.

Marcus du Sautoy Matemático, Universidad de Oxford, R.U.

Agradecimientos

En estas líneas expreso mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su apoyo he logrado terminar la carrera y culminar el presente trabajo.

Principalmente, agradezco de manera infinita a mis padres por apoyarme en todo momento y por haberme dado la oportunidad de tener una educación que de no ser por ellos nada de esto existiría, por esto y más gracias.

A mis hermanos Mari, Irene, Ciro y Silve por ser parte importante de mi vida, por su apoyo incondicional cuando más los he necesitado.

A mis sobrinos Mayra, Abigail e Israel y sus padre Gersain por ser parte de la familia y brindarnos alegrías.

A Cely, por ser parte de mi vida, por apoyarme en las buenas y en las malas, por brindarme su paciencia y amor a pesar de algunas veces sentirse desplazada en la realización de este proyecto.

A mi director de tesis, Juan Francisco Estrada por sugerirme este tema y brindarme su apoyo y paciencia, también por generar confianza en mí y hacerme ver que trabajando constantemente se logra resolver lo que a veces parecía que no se podía.

A mi jurado al Dr. Agustín Contreras, M.C. Julio Erasto Poisot y Dr. Juan Alberto Escamilla por aceptar amablemente hacer la revisión del presente trabajo que sin duda alguna mejoró la versión final.

Guadalupe Ochoa.

*Esta investigación fue realizada gracias al apoyo del
Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla.*

Introducción

La teoría de superficies mínimas forma parte de la Geometría Diferencial, en la cual se estudian inicialmente, las curvas y superficies en el espacio tridimensional usando técnicas del cálculo diferencial e integral. La existencia de superficies mínimas surge como una generalización del problema de encontrar las trayectorias más cortas entre dos puntos en una superficie llamadas geodésicas. El problema de encontrar geodésicas forma parte del estudio intrínseco de la geometría de una superficie, es decir, de las propiedades que dependen de la primera forma fundamental, mientras que la existencia de superficies mínimas es parte del estudio de sus propiedades extrínsecas, es decir, se agregan las propiedades que dependen de la segunda forma fundamental, pero también interactúa con la topología algebraica y diferencial así como con análisis complejo y el análisis funcional.

Posteriormente, la teoría de superficies mínimas se generalizó a dimensiones mayores que tres y por supuesto a variedades diferenciables reales y complejas.

Las superficies mínimas son, quizá, las superficies más estudiadas en Geometría Diferencial, siendo aún uno de los campos más atractivos de la investigación actual en Geometría. La belleza de los problemas que aquí se plantean, normalmente de enunciados sencillos, contrasta con la enorme dificultad que, en muchos casos, extraña su resolución.

El objetivo principal de este trabajo, desde luego, por razones de tiempo y espacio es la exposición y demostración de algunos resultados importantes que ha tenido esta teoría desde sus inicios en el siglo XVIII, emprendida por L. Euler y L. Lagrange (aunque ello suponga dejar de lado otras muchas no menos interesantes). Para la elección que haremos, nos hemos basado en primar resultados que estén basados en una de las herramientas más poderosas de la matemática, el análisis complejo, principalmente expondremos las publicaciones de las fórmulas de representación generales de superficies mínimas, dadas por Alfred Enneper (1864) y Karl Weierstrass (1866), en dichas fórmulas se hace la conexión de superficies mínimas con el análisis complejo. Estas representaciones se les conoce hoy en día como **La Representación de Weierstrass-Enneper** para superficies mínimas, y dice que cualquier

superficie mínima podrá ser representada por funciones holomorfas. En su respectivo capítulo veremos su construcción y aplicación de ésta representación.

También tocaremos aunque no con mucho detalle los dos temas centrales en la teoría de superficies mínimas tales como el **Teorema de Bernstein** (afirma que cualquier solución a la ecuación de superficie mínima sobre todo el plano es una función lineal) y **El problema de Plateau** (probar que para cada curva cerrada $C \subseteq \mathbb{R}^3$ existe una superficie S con área mínima y cuya frontera es C), por supuesto cada demostración hará uso de los conocimientos previos y herramientas de la rama matemática en la que se encuadra.

Índice

Introducción	I
1. Conceptos previos	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Definición de superficie	1
1.3. Transformaciones diferenciables	2
1.4. Plano tangente	6
1.5. Diferencial de una transformación diferenciable	12
1.6. La transformación de Gauss y la segunda forma fundamental .	13
1.7. Orientabilidad	13
1.7.1. Superficies orientables	14
1.8. Curvatura de una superficie.	18
1.8.1. Isometrías	23
1.9. Superficies regladas y superficies de revolución.	24
2. Superficies Mínimas	27
2.1. Orígenes de las superficies mínimas	27
2.1.1. La ecuación de superficie mínima y curvatura media . .	31
2.1.2. Superficie de Scherk	32
2.2. Relación entre Helicoide y el Catenoide	40
2.2.1. Isometría local entre el catenoide y el helicoide	40
2.3. Representación de Weierstrass-Enneper	43
2.4. Funciones armónicas y coordenadas isotermas	43
2.5. Teoremas de análisis complejo	48
2.5.1. Ceros, polos y singularidades aisladas	53
2.6. Transformaciones conformes	55
2.7. Construcción de la representación W.E.	60
2.7.1. De parametrizaciones isotermas a funciones holomorfas	62

2.7.2. Puntos de ramificación	68
2.8. La proyección estereográfica	69
2.9. La representación W-E siempre da una superficie mínima . . .	76
2.10. Superficie mínima no minimiza área	79
3. Teorema de Bernstein	85
3.1. Introducción	85
3.2. Preliminares	86
3.3. Teorema de Bernstein	89
3.4. Consecuencias del teorema de Bernstein	91
4. El problema de Plateau	95
4.1. Nota Histórica	95
4.2. Ideas sobre la prueba del problema de Plateau	97
Conclusiones	99
Bibliografía	101
Índice alfabético	104

Índice de figuras

1.1. Helicoide.	25
1.2. Catenoide.	26
2.1. Superficie de Scherk una parte.	36
2.2. Tablero de ajedrez.	36
2.3. Superficie de Scherk dos partes.	36
2.4. Superficie $f(x, y) = x \tan(y)$	37
2.5. Isometría local Catenoide-Helicoide.	42
2.6. Deformación isométrica del Helicoide en el Catenoide.	53
2.7. Superficie de Enneper.	61

13 de octubre de 2015

Capítulo 1

Conceptos previos

1.1. Preliminares

En este capítulo de conceptos previos damos las definiciones, proposiciones y propiedades necesarias para una correcta lectura de este trabajo. Las nociones que aquí se incluyen son las mínimas necesarias en un curso de introducción a la geometría diferencial. Todos estos conceptos que aquí se exponen, se pueden ver de forma más detallada y con demostraciones en [7], [12] y [14], principalmente. La historia de la Geometría Diferencial puede ser estudiada en [[5], pág. 318.].

1.2. Definición de superficie

En este trabajo hablamos de superficies, en especial superficies regulares, por lo tanto debemos comenzar definiendo lo que es una superficie regular y viendo sus propiedades.

Sea a un punto de \mathbb{R}^n y sea ϵ un número entero positivo. El conjunto de todos los puntos x de \mathbb{R}^n tales que

$$\|x - a\| < \epsilon$$

se denomina *n-bola* abierta de radio ϵ y centro a y la denotamos por $B(a, \epsilon)$.

Un subconjunto U de \mathbb{R}^n se dice que es abierto si, para cada $a \in U$, existe una *n-bola* $B(a, \epsilon)$ abierta con centro en a , completamente contenida en U .

Si A y B son subconjuntos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente, $f : A \rightarrow B$ se dice que es continua en $a \in A$ si los puntos en A cercanos a a son transfor-

mados mediante f a puntos en B cercamos a $f(a)$.

Más precisamente, f se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(u) - f(a)\| < \epsilon \text{ siempre que } \|u - a\| < \delta \text{ con } u \in A.$$

Entonces f se dice que es continua si es continua en cada punto de A .

Composición de funciones continuas es continua.

En vista de nuestra definición de conjunto abierto, podemos dar una equivalencia de continuidad: f es continua si y solo si, para cualquier abierto U de \mathbb{R}^m existe un conjunto abierto V de \mathbb{R}^n tal que $f^{-1}(U) = \{x \in A \mid f(x) \in U\} = V \cap A$.

Definición 1.1. Sea $f : A \rightarrow B$, f se dice que es un **homeomorfismo**¹ de A en B si f es biyectiva, es continua y $f^{-1} : B \rightarrow A$ es continua, y se dice que A es homeomorfo a B si existe una homeomorfismo de A en B .

1.3. Transformaciones diferenciables

Demos un repaso breve del cálculo vectorial, revisando algunos conceptos básicos que más adelante extenderemos a otras áreas.

Definición 1.2. Una transformación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en $a \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

La norma es esencial, ya $f(a+h) - f(a) - \lambda(h)$ está en \mathbb{R}^m y h está en \mathbb{R}^n . La transformación lineal λ se designa por $Df(a)$ y se denomina la diferencial de f en a . La justificación de la existencia de la transformación lineal puede verse en [18].

Definición 1.3. Una transformación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si f es diferenciable para todo $a \in A$. Por otra parte, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces f se llama diferenciable si f se puede extender a una transformación diferenciable en algunos conjuntos abiertos que contiene A .

¹La palabra homeomorfismo viene del griego $\delta\mu\iota\omicron\varsigma$ (homoiōs) = misma y $\mu\omicron\rho\phi\acute{\eta}$ (morphē) = forma.

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n una transformación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave o de clase $C^\infty(U)$, si admite derivadas parciales de todos los ordenes y son continuas en U .

Definición 1.4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice que $f : A \rightarrow B$ es **difeomorfismo**, si es diferenciable, biyectiva, y su inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ es también diferenciable.

Resulta inmediato que la composición de transformaciones diferenciables entre subconjuntos es también diferenciable, y la composición de difeomorfismos, es difeomorfismo.

Muchas veces es conveniente considerar la matriz de $Df(a)$.

Definición 1.5. La diferencial de f , $Df(x)$ asigna a cada punto $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ una transformación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n es $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$Df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

esta matriz $m \times n$ se denomina la **matriz Jacobiana** de f en x , y se indica por $f'(x)$.

Definición 1.6. (Superficie regular). Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una transformación $x : U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que:

1. x es diferenciable, i.e., de clase C^∞ .
2. x es un homeomorfismo.
3. Para cada $q \in U$, la diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

Llamamos a la transformación x una parametrización o un sistema de coordenadas (locales) de S en p y a $x(U) \subseteq S$ una vecindad coordinada de p , la colección de todas estas parametrizaciones es llamado el **atlas** de S . Nos referiremos a las derivadas parciales de x , $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$, por x_u, x_v , respectivamente. Hay otro tipo de superficies, las superficies parametrizadas, que definiremos a continuación.

Nota 1.7. La transformación $x: U \rightarrow V \cap S$ se llama una carta, parche o parametrización local de S en p .

Definición 1.8. (Superficie parametrizada). Una superficie parametrizada $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación diferenciable x de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 . El conjunto $x(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama la traza de x .

La superficie parametrizada x es regular si la diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno para todo $q \in U$ (i.e., los vectores $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ son linealmente independientes para todo $q \in U$). Un punto $p \in U$ donde dx_q no es uno a uno se llama punto singular de x .

Ejemplos de parametrizaciones

Ejemplo 1.9. 1. *Parametrización de Monge*

La gráfica de una transformación real de dos variables $z = f(x, y)$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . Se define una parametrización

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

donde u y v son el rango sobre el dominio de f .

2. *Coordenadas esféricas*

Cuya parametrización está definida por

$$x(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$$

El siguiente lema muestra una razón del porqué la suavidad de superficies es importante para nosotros, antes recordemos que:

Definición 1.10. Una *curva diferenciable* es una transformación diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Diremos que la *curva* α es *plana* cuando exista un plano Π de \mathbb{R}^3 tal que $Im(\alpha) \subseteq \Pi$. A $Im(\alpha)$ le llamaremos la traza de α . Las componentes de α serán representadas por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

y a t le llamaremos el parámetro de la curva. A $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ le llamamos el *vector tangente* o *velocidad* de α en t . La recta tangente a α en t es la recta de \mathbb{R}^3 que pasa por $\alpha(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$, esto es

$$\{\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.11. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} se llama **curva regular** si $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Lema 1.12. Sea S una superficie. Si $\alpha : I \rightarrow x(D) \subseteq S$ es una curva suave en \mathbb{R}^3 la cual está contenida en la imagen de una parametrización x de S , entonces para funciones suaves únicas $u(t), v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)).$$

Demostración. Como α es suave, la composición $x^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow D$ es suave por definición. Ahora, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, así $x^{-1}\alpha(t) = (u(t), v(t))$. Por lo tanto

$$\alpha(t) = x(x^{-1}\alpha(t)) = x(u(t), v(t)).$$

Para probar que $u(t)$ y $v(t)$ son únicas, supongamos que $\alpha(t) = x(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ para cualesquiera dos funciones \bar{u} y \bar{v} . Note que, podemos asumir que \bar{u} y \bar{v} están definidas en I esto es verdad vía una reparametrización. Entonces

$$(u(t), v(t)) = x^{-1}\alpha(t) = x^{-1}(x(\bar{u}(t), \bar{v}(t))) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t)).$$

■

La equivalencia natural asociada a la diferenciabilidad es el concepto de difeomorfismo.

Definición 1.13. Dos superficies regulares S y \hat{S} son **difeomorfas** si existe una transformación diferenciable $\varphi : S \rightarrow \hat{S}$ con inversa diferenciable $\varphi^{-1} : \hat{S} \rightarrow S$.

A tal φ se le llama un *difeomorfismo* de S a \hat{S} .

Nota 1.14. La noción de difeomorfismo desempeña el mismo papel en el estudio de superficies regulares que el concepto de isomorfismo en el estudio de espacios vectoriales. En otras palabras, desde el punto de vista de la diferenciabilidad, dos superficies difeomorfas son indistinguibles.

Definición 1.15. Una transformación $\varphi : U \subseteq S \rightarrow \hat{S}$ es un **difeomorfismo local** en $p \in U$ si existe una vecindad $V \subseteq U$ de p tal que φ restringida a V es un difeomorfismo sobre un conjunto abierto $\varphi(V) \subseteq \hat{S}$.

Definición 1.16. Una **reparametrización** de una superficie S es una composición $x \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $f : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo.

1.4. Plano tangente

Deseamos definir, para cualquier punto de una superficie dada, la mejor aproximación lineal a la superficie en la vecindad del punto. Esta definición juega un papel fundamental en el estudio de planos y curvas en el espacio. Construiremos éste objeto de la noción de vector tangente a una curva como se vio anteriormente, lo que vamos a definir es el concepto de vector tangente a una superficie en la vecindad del punto. Esto nos permitirá hablar de diferencial de una transformación diferenciable y de poder estudiar la geometría de una superficie haciendo uso de este cálculo diferencial.

Antes veamos la siguiente

Definición 1.17. Una curva diferenciable en una superficie regular S es una transformación diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Definición 1.18. Sea S una superficie y $p \in S$ un punto. Decimos que el vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a S en p , si podemos encontrar una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, con $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. El conjunto que consiste de todos los vectores tangentes de S en el punto p suele ser representado por $T_p S$ llamado **plano tangente**.

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 | v \text{ es un vector tangente a } S \text{ en } p\}.$$

Es decir los vectores tangentes a una superficie son los vectores tangentes a curvas en \mathbb{R}^3 que estén contenidas en la superficie. Cinemáticamente, son todas las posibles velocidades con las que pueden ser recorridas las curvas en la superficie en el punto en cuestión.

Lema 1.19. Sea S una superficie, $p \in S$, y $X : U \rightarrow S$ una parametrización de S en $p \in X(U)$. Entonces

$$T_p S = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$$

Demostración.

Sea $w \in \mathbb{R}^2$. Consideremos el segmento de línea $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, con $\epsilon > 0$, dada por $\beta(t) = q + tw$, donde $q = X^{-1}(p)$. La curva verifica que $\beta(0) = q$ y $\beta'(0) = w$. Así, tomando $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ para la composición $\alpha = X \circ \beta$, tenemos que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = (X \circ \beta)'(0) = (dX)_q(w)$. Por lo tanto, $(dX)_q(\mathbb{R}^2) \subseteq T_p S$, ya que α toma estos valores en S .

Ahora tomemos un vector v tangente a S en p . Por definición, existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos asumir, por continuidad de α que su traza está contenida en $X(U)$. Definamos una curva en U por $\beta = X^{-1} \circ \alpha$. Entonces tenemos que $\beta(0) = q$ y $\alpha = X \circ \beta$. Así, $v = \alpha'(0) = (X \circ \beta)'(0) = (dX)_q(\beta'(0))$, esto es, cualquier vector tangente a S en p está en la imagen de $(dX)_q$.

■

En particular $T_p S$ es un espacio vectorial de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 al que llamamos el plano tangente a S en p .

Observación 1.20. Si $X : U \rightarrow S$ es una parametrización de S que cubre a p y $q = X^{-1}(p)$ entonces por el Lema anterior, tenemos que $(dX)_q(\mathbb{R}^2)$ no depende de X y que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ es una base de $T_p S$

Conviene notar que si $S_1 \subseteq S$ es un abierto de S y $p \in S_1$, entonces $T_p S_1 = T_p S$.

Consideremos una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ y un punto $p \in S$, tenemos que el plano tangente de S en p , $T_p(S)$, es un plano vectorial por 1.19 que está contenido en \mathbb{R}^3 , luego podemos tomar $w_1, w_2 \in T_p(S)$ y calcular producto interno usual en \mathbb{R}^3 éste induce en cada plano tangente $T_p(S)$ un producto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, es decir, si $w_1, w_2 \in T_p(S) \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interno de w_1 y w_2 como vectores en \mathbb{R}^3 . A este producto interno, que es una forma bilineal simétrica, corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0$$

Definición 1.21. (Primera forma fundamental). La forma cuadrática $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ que hemos definido en el párrafo anterior es la primera forma fundamental de la superficie regular S en $p \in S$.

Básicamente, la primera forma fundamental, nos permite encontrar la longitud de un vector tangente (en un plano tangente). Si w es un vector tangente,

$|w|^2 = w \cdot w$. ¿porqué es interesante? Se hace interesante si estas pensando w no sólo como coordenadas en \mathbb{R}^3 , sino como combinación lineal de los dos vectores de la base, $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial x}{\partial v}$. $w = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}$;

entonces

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot \left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + 2ab \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + b^2 \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Existen algunas diferencias de notación entre Do Carmo y Osserman que será útil verlas aquí para evitar confusiones en algunas partes de la tesis.

Do Carmo escribe 1.1 como $Ea^2 + 2Fab + Gb^2$, y se refiere a todo esto como en la definición anterior $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$. En realidad, él está usando u y v en lugar de a y b en este punto, ya que estas coordenadas vienen de un vector tangente lo que quiere decir que son la $u'(q)$ y $v'(q)$. Osserman dice $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ y $g_{22} = G$.

Con base a lo anterior, denotemos la matriz Jacobiana la transformación $x(U)$ por

$$M = (m_{ij}); m_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2.$$

Note que las columnas de M son los vectores

$$\frac{\partial x}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \right)$$

Para vectores $V = (v_1, \dots, v_n)$, $W = (w_1, \dots, w_n)$ se define el producto interior por

$$V \cdot W = \sum_{k=1}^n v_k w_k$$

y el producto exterior, denotado por \wedge como

$$V \wedge W ; W \wedge V \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$$

donde, los componentes de $V \wedge W$ son los determinantes

$$\det \begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}, i < j,$$

Finalmente introduzcamos la matriz

$$G = (g_{ij}) = M^T M ; g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \quad (1.2)$$

Note que G es una matriz 2×2 . Para calcular $\det(G)$ recordemos la identidad de Lagrange:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

Usando la identidad de Lagrange uno puede deducir:

$$\det G = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \right|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right)^2. \quad (1.3)$$

Note que los *coeficientes de la primera forma fundamental* son:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle;$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle;$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle.$$

La primera forma fundamental es la expresión de cómo la superficie S hereda el producto interno natural de \mathbb{R}^3 . Geométricamente, nos permite hacer mediciones en la superficie (longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones) sin necesidad de referirnos al espacio ambiente \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie.

■ LONGITUD

Sabemos que la longitud de una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ entre t_0 y t_1 ($t_0, t_1 \in I$) viene dada por la integral $L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$.

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S , supongamos que la curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida en S . Entonces $\alpha(t) = \mathbf{x}(\beta(t)) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, donde $\beta : I \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable en U . Específicamente, β se define como $\beta(t) = \mathbf{x}^{-1}(\alpha(t))$.

Tomemos a $\alpha'(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))' = \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$. Abreviado, tenemos $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$.

Luego $\alpha' \cdot \alpha' = (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(u')^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)u'v' + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)(v')^2$. Es decir,

$$\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2,$$

con $\alpha(t) = p$.

Entonces

$$|\alpha'| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = \sqrt{I_p(\alpha)}.$$

Como $p_0 = \alpha(t_0) = \mathbf{x}(\beta(t_0)) = \mathbf{x}(u(t_0), v(t_0))$ y $p_1 = \alpha(t_1) = \mathbf{x}(\beta(t_1)) = \mathbf{x}(u(t_1), v(t_1))$. Podemos expresar la longitud de arco como

$$L_S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_p(\alpha)} dt.$$

■ ÁNGULOS

Tenemos que

$$I_P(u, v) = E(u, v)u^2 + 2F(u, v)uv + G(u, v)v^2.$$

Esta transformación define una manera diferente de expresar el producto escalar entre vectores de $T_p(S)$. A saber, sean $\vec{u}, \vec{w} \in T_p(S)$. Como $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ es una base de $T_p(S)$, tenemos $\vec{u} = v_2\mathbf{x}_u + v_1\mathbf{x}_v$ y $\vec{w} = w_2\mathbf{x}_u + w_1\mathbf{x}_v$. Luego

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (v_2\mathbf{x}_u + v_1\mathbf{x}_v) \cdot (w_2\mathbf{x}_u + w_1\mathbf{x}_v) = v_1w_1\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + (v_2w_1 + v_1w_2)\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v_2w_2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$

Si $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ entonces tenemos

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = E(u_0, v_0)v_1w_1 + F(u_0, v_0)(v_2w_1 + v_1w_2) + G(u_0, v_0)v_2w_2.$$

Si θ es el ángulo entre \vec{u} y \vec{w} . Como $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}$, tenemos

$$\cos(\theta) = \frac{Ev_1w_1 + F(v_2w_1 + v_1w_2) + Gv_2w_2}{\sqrt{I_p(\vec{u})I_p(\vec{w})}}.$$

■ ÁREAS

Otra cuestión que podemos tratar con la primera forma fundamental es, el cálculo o definición de del área de una región acotada de una superficie regular S . Recordemos que un dominio regular de S , es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera es la imagen de un círculo mediante un homeomorfismo diferenciable que es regular excepto en un número finito de puntos. Una región de S no es más que la unión de un dominio con su frontera y una región de $S \subseteq \mathbb{R}^3$ está acotada si está contenida en alguna bola de \mathbb{R}^3 .

Consideraremos regiones acotadas R que estén contenidas en un entorno $x(U)$ de una parametrización $x(u, v)$ de S . En otras palabras, R es la imagen mediante x de una región acotada $Q \subseteq U$.

La función $|x_u \times x_v|$, definida en U , mide el área del paralelogramo generado por los vectores x_u y x_v . Una manera de calcular el área de $x(U)$ puede ser dividiendo el sector $x(U)$ en pequeños paralelogramos infinitesimales. Así tenemos la siguiente definición

Definición 1.22. *Sea $R \subseteq S$ una región acotada de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo*

$$\int \int_Q |x_u \wedge x_v| du dv = A(R) \text{ donde } Q = x^{-1}(R),$$

se denomina el área de R .

Además se puede demostrar que ésta integral, no depende de la parametrización x que tomemos.

Con respecto a la tesis supondremos que la superficie es por lo menos de clase \mathcal{C}^1 . Si por algún $r \geq 1$ tenemos una superficie S definida por $x(u) \in \mathcal{C}^r(D)$ donde $u = (u_1, u_2)$, y $u(\tilde{u}) \in \mathcal{C}^r(\tilde{D})$ es un difeomorfismo de un dominio \tilde{D} en D , entonces la superficie \tilde{S} definida por $x(u(\tilde{u}))$ se dice que es obtenida a partir de S por un cambio de los parámetros. Si una propiedad de S también es válido para los puntos correspondientes de todas las superficies \tilde{S} obtenidas por cambio de parámetros. Decimos que es independiente de parámetros. Que algunas propiedades de una superficie no se modifique por reparametrizaciones es muy útil, ya que podremos elegir parámetros con buenas propiedades como veremos más adelante.

Sea $U = \left(\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right)$ la matriz jacobiana para un cambio de parámetros como anteriormente vimos, y sean M y \tilde{M} las matrices jacobianas para $x(u)$

y $\mathbf{x}(u(\tilde{u}))$ respectivamente. Entonces la determinante de U es claramente no cero en el dominio \tilde{D} , y por la regla de la cadena

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k}.$$

También obtenemos una expresión para la nueva métrica \tilde{G} en términos de la anterior G como

$$\tilde{G} = \tilde{M}^T \tilde{M} = (MU)^T (MU) = U^T M^T MU = U^T GU. \quad (1.4)$$

Como $\det \tilde{G} = \det G (\det U)^2$ y $(\det U)^2 > 0$ tenemos que $\det G > 0$ si y solo si $\det \tilde{G} > 0$. Esto significa que la regularidad de una superficie no depende del cambio de parámetros. En consecuencia, si una superficie es regular para algunos parámetros será regular para los parámetros que elijamos para representar la superficie, siempre y cuando halla una transformación difeomorfa entre los parámetros.

1.5. Diferencial de una transformación diferenciable

La noción de la diferencial de una transformación diferenciable definido en una subconjunto abierto \mathbb{R}^n extendido, es en forma natural, transformaciones diferenciables definidas en superficies. Además, las propiedades clásicas del cálculo diferencial también son ciertas en esta situación.

Definición 1.23. *Sea S una superficie y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación diferenciable. Para cada punto $p \in S$ se define la diferencial de S en p y se representa por df_p*

$$df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida de la siguiente manera: Dado $v \in T_p S$, elegimos una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ y entonces tenemos que

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = (f \circ \alpha)'(0).$$

A continuación mostramos resultados importantes del análisis de varias variables cuyas demostraciones se omiten. El primero de ellos es la regla de

1.6 La transformación de Gauss y la segunda forma fundamental¹³

la cadena, tan usada en el cálculo de derivadas, y el segundo es el teorema de la función inversa.

Teorema 1.24. (Regla de la cadena.) Si S_1, S_2, S_3 son superficies regulares, $V \subseteq S_1$ abierto en S_1 , $W \subseteq S_2$ abierto en S_2 , $f : V \rightarrow S_2$ continua, $g : W \rightarrow S_3$ continua, $f(V) \subseteq W$, $p \in V$, f es diferenciable en p y g es diferenciable en $f(p)$, entonces $g \circ f : V \rightarrow S_3$ es diferenciable en p , es decir $d(g \circ f) = dg_{f(p)} \circ df_p$.

El teorema de la función inversa para superficies se expresa como sigue.

Teorema 1.25. (Teorema de la función inversa.) Si S_1 y S_2 son superficies regulares, $V \subseteq S_1$ abierto en S_1 , $f : V \rightarrow S_2$ es diferenciable en V y si $p \in V$ y df_p es isomorfismo, entonces f es difeomorfismo local en p , es decir; existen abiertos U_1 de S_1 y U_2 de S_2 tales que $p \in U_1 \subseteq V$, $f(p) \in U_2$ y $f|_{U_1}^{U_2} : U_1 \rightarrow U_2$ es difeomorfismo.

1.6. La transformación de Gauss y la segunda forma fundamental

La transformación de Gauss es una función que se define sólo para superficies orientables. Antes de definirlo propiamente, vamos a revisar el concepto de *orientabilidad* si se desea ampliar más sobre el tema y ver las demostraciones de los siguientes dos lemas, véase [[12] capítulo 3].

1.7. Orientabilidad

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. En general un **campo diferenciable de vectores** será, por definición, una transformación diferenciable $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si los valores que toma V en cada punto de la superficie pertenecen al plano tangente de S en ese punto, esto es, si $V(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$, decimos que V es un **campo tangente** a la superficie. En cambio, si éstos valores son ortogonales a la superficie en cada punto, esto es, si $V(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$, decimos que V es un campo *normal* a la superficie; Si por otra parte, $|V(p)| = 1$ en cada punto p de S , V se dice que es un *campo normal unitario* en la superficie S y lo representamos por N .

Es claro que para todo $p \in S$, existen exactamente dos vectores unitarios de \mathbb{R}^3 perpendiculares al plano tangente $T_p S$. El siguiente resultado nos dice que se puede determinar de forma continua, incluso sin problemas un vector normal unitario en cada punto, siempre y cuando nos limitemos a una parte de la superficie.

Lema 1.26. *Sea S una superficie regular y sea $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Entonces existe un campo normal unitario en el conjunto abierto $V = X(U)$.*

Parece intuitivo que un campo normal unitario a una superficie determina un lado de ella. Ahora afirmamos que una superficie conexa tiene a lo más dos lados.

Lema 1.27. *Si S es una superficie regular conexa y N_1 y N_2 son dos campos normales unitarios en S , entonces o bien $N_1 = N_2$ o $N_1 = -N_2$.*

1.7.1. Superficies orientables

Precisemos las ideas anteriores. Fijemos una parametrización $x(u, v)$ en el entorno de un punto p de una superficie regular S , determinemos una orientación del plano tangente $T_p(S)$ a saber, la orientación de la base $\{x_u, x_v\}$. Si p pertenece al entorno coordenado de otra parametrización $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$, la nueva base $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$ se expresa en términos de la primera, mediante

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\bar{u}} &= x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{x}_{\bar{v}} &= x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

donde $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ y $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ son las expresiones del cambio de coordenadas. Las bases $\{x_u, x_v\}$ y $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$ determinan, en consecuencia, la misma orientación de $T_p(S)$ si y solamente si el jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$ del cambio de coordenadas, es positivo, de aquí tenemos:

Definición 1.28. *Dar una **orientación** en una superficie es dar un conjunto de cartas locales que recubran toda la superficie y tal que las transformaciones de coordenadas, allí donde estén definidas, tengan Jacobiano positivo. Si no es posible tal elección la superficie se dice no orientable.*

Por 1.26, dado un sistema de coordenadas $\mathbf{x}(u, v)$ en p disponemos de una elección bien definida de un vector normal unitario N en p mediante

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p).$$

Tomando otro sistema de coordenadas locales $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ en p vemos que

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

donde ya sabemos $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$ es el jacobiano de cambio de coordenadas de aquí N mantendrá o cambiará su signo, dependiendo si $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$ es positivo o negativo respectivamente.

Entenderemos por un campo diferenciable de vectores normales unitarios sobre un conjunto abierto $U \subseteq S$, a una transformación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in U$ un vector normal unitario $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a S en q .

Proposición 1.29. *Una superficie S es **orientable** si y sólo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios definido en toda la superficie.*

La demostración de la proposición anterior puede verse de forma detallada en [7], pág 105.

Cada campo normal unitario en una superficie orientable S se llamará una *orientación* de S .

Entonces por el lema 1.26 se tiene que cualquier superficie es localmente orientable, y, cuando es conexa y orientable, el lema 1.27 nos afirma que existe exactamente dos orientaciones en ella. La superficie orientable S se dice que está orientada cuando se escoge una orientación precisa en ella. Por ejemplo, si nuestra superficie es una esfera unitaria centrada en el origen, su normal en p es $\pm p$, si tomamos el normal hacia fuera será con signo positivo, mientras que con signo negativo apuntaría hacia el interior de la esfera.

Sea S una superficie y N un campo normal unitario sobre S (o sobre un abierto V de S si S no es orientable). Como $|N(p)|^2 = 1$ para todo $p \in S$, si $\mathbb{S}^2(1)$ o \mathbb{S}^2 representa, la esfera unitaria centrada en el origen, entonces tenemos $N(S) \subseteq \mathbb{S}^2(1)$ y, como consecuencia, cada campo normal unitario N en S puede ser considerado como una transformación diferenciable

$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ de la superficie a la esfera $\mathbb{S}^2(1)$. La transformación que toma en cada punto de la superficie un vector unitario ortogonal a la superficie en este punto es llamado **la transformación de Gauss de S** .

Siguiendo la misma idea de curvatura de una curva plana, variando la transformación de Gauss debemos de encontrar información sobre la forma de la superficie, por esto resulta interesante calcular su diferencial. Sea $p \in S$, $v \in T_p S$ y α una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ entonces

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2(1),$$

$$dN_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t).$$

Pero nosotros sabemos que si $p \in \mathbb{S}^2$, $N(p) = \pm p$ por lo tanto podemos identificar al $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ con $T_p S$, ya que

$$T_{N(p)} \mathbb{S}^2(1) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), v \rangle = 0\} = T_p S,$$

luego podemos ver la diferencial de la transformación de Gauss como un endomorfismo del $T_p S$. Utilizando esta diferencial definimos el siguiente operador.

Definición 1.30. Sea S una superficie regular orientada por la transformación de Gauss, N . Se llama **operador forma** o endomorfismo de Weingarten en $p \in S$ a la transformación $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ definida por $A_p v = -dN_p(v)$.

Proposición 1.31. El operador forma A_p posee una propiedad muy importante y es que es un **operador autoadjunto**, es decir para todo $v, w \in T_p S$ se tiene que $\langle A_p v, w \rangle = \langle v, A_p w \rangle$

Demostración. Para demostrar este resultado es suficiente probarlo para vectores de la base del plano tangente, pues se puede extender a los demás vectores simplemente por linealidad. Sea $X(u, v)$ una parametrización y un punto $p = X(q) = X(u_0, v_0)$. Tomamos como base del $T_p S$ a $\{X_u(q), X_v(q)\}$ y calculamos la diferencial del normal aplicada a cada uno de los vectores de la base. Para ello, sea $\alpha(u) = X(u + u_0, v_0)$ que cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_u(q)$, de forma similar tomamos $\beta(v) = X(u, v + v_0)$ con $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = X_v(q)$. Luego tenemos

$$dN_p(X_u(q)) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (N \circ X)(u + u_0, v_0) = (N \circ X)_u(u_0, v_0) = N_u(u_0, v_0),$$

$$dN_p(X_v(q)) = \left. \frac{d}{dv} \right|_{v=0} (N \circ X)(u_0, v + v_0) = (N \circ X)_v(u_0, v_0) = N_v(u_0, v_0).$$

Obsérvese que $\{X_u(q), X_v(q), N(q)\}$ forman una base de \mathbb{R}^3 con $\langle X_u(q), N(q) \rangle = 0 = \langle X_v(q), N(q) \rangle$. Por tanto, derivando al lado izquierdo con respecto de v y en la derecha con respecto a u tenemos que

$$\langle X_{uv}(q), N(q) \rangle + \langle X_u(q), N(q)_v \rangle = 0,$$

$$\langle X_{vu}(q), N(q) \rangle + \langle X_v(q), N(q)_u \rangle = 0.$$

Como las segundas derivadas coinciden, esto es $X_{uv}(q) = X_{vu}(q)$ se tiene que $\langle X_u(q), N(q)_v \rangle = \langle X_v(q), N(q)_u \rangle$ lo cual termina la demostración ya que

$$\langle A_p X_u(q), X_v(q) \rangle = -\langle N_u(q), X_v(q) \rangle = \langle X_u(q), -N_v(q) \rangle = \langle X_u(q), A_p X_v(q) \rangle.$$

■

El hecho de que $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ sea una transformación autoadjunta nos permite asociar dN_p una forma cuadrática Q en $T_p S$ dada por $\langle -dN_p(v), v \rangle$.

De la misma forma que anteriormente dimos la definición de la primera forma fundamental ahora definimos la segunda pero haciendo uso del operador forma.

Definición 1.32. (Segunda forma fundamental). La forma cuadrática $II_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, es la segunda forma fundamental de S en p .

Y tenemos que los coeficientes de la segunda forma fundamental, que denotaremos por e, f, g , pueden calcularse en términos de x y de N , y sus expresiones son:

$$e = -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle;$$

$$f = -\langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle;$$

$$g = -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle.$$

Los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales nos permitirán expresar, en términos de la parametrización de una superficie, varios conceptos geométricos como el área y la curvatura.

1.8. Curvatura de una superficie.

Consideremos una superficie en \mathbb{R}^3 , suave y de dos dimensiones, que denotaremos por S . Sean p un punto en S y $N(p)$ uno de los dos vectores normales unitarios a S en p . El vector $N(p)$ es ortogonal al plano tangente a S en el punto p , que denotaremos por $T_p(S)$. Notemos que $T_p(S) \subseteq \mathbb{R}^3$. Fijemos ahora nuestra atención en un plano Π que pasa por p y que contiene a $N(p)$. El plano Π intersecta a S en una curva γ , a la que llamaremos *sección normal*. Sea $v \in T_p(S)$ el vector unitario tangente a γ en p ; decimos que v es una *dirección* de esta sección normal.

Cuando se recorre una curva con velocidad constante, la segunda derivada mide el cambio de dirección de la curva, esto es, su curvatura. Entonces el vector de curvatura en la dirección de v , que denotaremos por $\vec{\kappa}(v)$, está dado por

$$\vec{\kappa}(v) = \gamma''(t_0)$$

donde $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = v$. Notemos que $\vec{\kappa}(v)$ corresponde al vector de aceleración en p al moverse a lo largo de γ con velocidad unitaria. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual en \mathbb{R}^3 . Entonces $\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 1$ y tenemos que

$$\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle' = 2\langle \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Esto implica que el vector de curvatura $\vec{\kappa}(v)$ es perpendicular a la dirección v . No es difícil ver que $\vec{\kappa}(v)$ es paralelo al vector normal $N(p)$.

Definimos la curvatura $\kappa(v)$ de una sección normal γ en la dirección v , con respecto al normal $N(p)$, como la cantidad: $\kappa(v) = \langle \vec{\kappa}(v), N(p) \rangle$. Podemos interpretar $\kappa(v)$ como qué tanto se curva la superficie en el punto p , en la dirección de v . Observemos que:

$$\begin{aligned} \kappa : S^1 \subseteq T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle \vec{\kappa}(v), N(p) \rangle \end{aligned}$$

donde $S^1 = \{v \in T_p(S) : \|v\| = 1\}$, es una función continua. Luego, como S^1 es compacto toma sus valores máximo y mínimo. Estos valores κ_1 y κ_2 son las *curvaturas principales* de la superficie S en el punto p . Las secciones normales en las que se alcanzan κ_1 , y κ_2 se llaman *secciones principales*. Las direcciones v_1 , v_2 de estas secciones nos indican qué dirección la superficie tiene curvatura máxima y mínima. Llamamos a v_1 y v_2 *direcciones principales*. Es posible demostrar que los valores $-\kappa_1$, $-\kappa_2$ son los valores propios del

mapeo lineal $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ (la diferencial del mapeo de Gauss) y que los vectores propios correspondientes a $-k_1$, $-k_2$ son las direcciones principales v_1 , v_2 . Se sigue que, si las curvaturas principales no son iguales, v_1 y v_2 forman una base ortonormal del plano tangente $T_p S$. En este caso, las secciones principales son ortogonales. De esto tenemos la siguiente definición.

Definición 1.33. *Sea S una superficie regular orientada por la transformación de Gauss, N , y p un punto de la superficie. A los valores propios de A_p , $k_1(p)$ y $k_2(p)$, los llamamos las curvaturas principales de S en p . A los vectores propios asociados a estos valores se le llama direcciones principales.*

Ejemplo 1.34. *Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ un plano en el que a, b, c no se anula al mismo tiempo; se tiene que el vector normal a la superficie es constante y vale $N(p) = (a, b, c)$ y por tanto $A_p = -dN_p = 0$. Entonces se tiene que las curvaturas principales del plano son $k_1(p) = k_2(p) = 0$ para todos los puntos $p \in S$. Luego todos los vectores son direcciones principales.*

Una vez definidas las curvaturas principales, tiene sentido pensar en la curvatura promedio, que podemos interpretar como qué tanto se curva S en el punto p .

Como vimos, el operador forma y curvaturas principales nos dan una gran información a cerca de la geometría de la superficie. En esta parte introduciremos dos *invariantes* de una superficie las cuales son asociados a el operador forma vía álgebra lineal. Los dos invariantes más básicos del álgebra lineal asociado a una transformación lineal son la determinante y su traza. Dado que el operador forma en una punto p es una transformación lineal y autoadjunta. Por tanto si tomamos una base ortonormal, la matriz de la transformación es diagonalizable, así podemos definir dos cantidades geométricas en términos de operadores forma, determinante y traza.

Definición 1.35. *Sea S una superficie regular orientada por N . Se denomina **curvatura de Gauss** de S en $p \in S$ al valor*

$$K(p) := \det A_p = \det(dN_p)$$

o lo que es equivalente, $K(p) = k_1(p)k_2(p)$

Se denomina **curvatura media** H de S en $p \in S$ al valor con respecto al vector normal $N(p)$

$$H(p) := \text{tr} A_p = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_p),$$

o equivalentemente

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Observación 1.36. *La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie ya que al cambiar la orientación estamos cambiando N por $-N$, por lo que el signo de las curvaturas principales cambia. Este cambio de signo en ambas curvaturas no le afecta al producto, mientras que la curvatura media cambia de signo pues afecta a la suma al cambiar la orientación.*

Utilizando los coeficientes de la primera forma fundamental, y los coeficientes de la segunda forma fundamental, podemos dar una expresión distinta tanto para la curvatura de Gauss como para la curvatura media.

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.5)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \quad (1.6)$$

Introduzcamos algunas fórmulas, las cuales nos ayudarán más adelante a probar algunos resultados sobre la conexión que existe entre superficies mínimas y la teoría de variable compleja.

Ya sabemos por 1.19 que $\{x_u, x_v\}$ es una base para el plano tangente. Además como N es normal al plano tangente, $\{x_u, x_v, N\}$ es una base para \mathbb{R}^3 . Vamos a calcular las conocidas fórmulas de aceleración, que son las que expresan las aceleraciones fundamentales x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} en términos de la base $\{x_u, x_v, N\}$ (en cada punto de una superficie.) Para ello, sea una superficie parametrizada $x(u, v) \in \mathbb{R}^3$ con $F = 0$ (por simplicidad) y notemos que esto hace a $\{x_u, x_v, N\}$ una base ortogonal. Así, los coeficientes pueden ser encontrados tomando el producto punto.

Dado que $e = x_{uu} \cdot N$, $f = x_{uv} \cdot N$ y $g = x_{vv} \cdot N$, lo que necesitamos son expresiones para x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} en términos de la base $\{x_u, x_v, N\}$. Escribamos

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + eN,$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + fN,$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + gN.$$

Nuestro objetivo es encontrar los Γ 's. Estos coeficientes son los conocidos **símbolos de Cristoffel**. Usando los que conocemos del producto punto

tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 0 + 0 \\ &= \Gamma_{uu}^u E \text{ por definición de } E. \end{aligned}$$

Lo que sabemos hacer es calcular $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u$ por regla del producto punto y así vamos a obtener Γ_{uu}^u :

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \text{ así } E_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u.$$

De tal forma que

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{E_u}{2} \text{ y entonces } \Gamma_{uu}^u = \frac{E_u}{2E}.$$

Por otro lado, $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, tomando la parcial respecto a u , tenemos $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$ o $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}$. También, como $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, tomando la parcial respecto a v , tenemos $E_v = 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}$ y, consecuentemente, $\frac{E_v}{2} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v$. Además

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v &= \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= \Gamma_{uu}^v G \text{ por definición de } G. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Gamma_{uu}^v = \frac{(\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)}{G} = -\frac{E_v}{2G} \text{ y } \Gamma_{uv}^u = \frac{(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)}{E} = \frac{E_v}{2E}.$$

De igual forma, como $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$, entonces $\frac{G_u}{2} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v$. Como $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \text{ con } \Gamma_{uv}^v = \frac{\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v}{G} = \frac{G_u}{2G}, \\ \Gamma_{vv}^u &= \frac{\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u}{E} = -\frac{G_u}{2E}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$, tenemos $\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{G_v}{2}$ y $\Gamma_{vv}^v = \frac{\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v}{G} = \frac{G_v}{2G}$. Por lo tanto obtenemos las fórmulas de aceleración.

$$\mathbf{x}_{uu} = \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_v - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + eN, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G} \mathbf{x}_v + fN, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = -\frac{G_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{G_u}{2G} \mathbf{x}_v + gN, \quad (1.9)$$

$$N_u = -\frac{e}{E}x_u - \frac{f}{G}x_v, \quad (1.10)$$

$$N_v = -\frac{f}{E}x_u - \frac{g}{G}x_v. \quad (1.11)$$

La curvatura de Gauss, así como la curvatura media, se pueden calcular en términos de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales, pero salvo la curvatura media, la curvatura de Gauss la podemos obtener en términos de los coeficientes de la primera forma, es decir, en términos de la métrica solamente. Así, la curvatura de Gauss es intrínseca a la superficie. Ahora damos la fórmula para K , evitando el uso de N y mostrando que K sólo depende de E , F y G . Aunque existe una forma más general, nos restringiremos en el caso donde $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$.

Teorema 1.37. *La curvatura de Gauss sólo depende de la métrica E , $F = 0$ y G :*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

Donde, $E_v = \frac{\partial}{\partial v} E = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)$ y $G_u = \frac{\partial}{\partial u} G = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)$.

Definición 1.38. *Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Se tiene la siguiente clasificación:*

1. se dice que $p \in S$ es elíptico si $K(p) > 0$.
2. se dice que $p \in S$ es hiperbólico si $K(p) < 0$.
3. se dice que $p \in S$ es parabólico si $K(p) = 0$, pero $A_p \neq 0$.
4. se dice que $p \in S$ es plano si $A_p \equiv 0$. Decimos que una superficie es plana si todos sus puntos son planos.

Se dice que un punto $p \in S$ es umbílico si coinciden sus curvaturas principales, es decir, si $k_1(p) = k_2(p)$

En particular, una superficie S se dice **totalmente umbilical** si todos sus puntos son umbilicales. A continuación tenemos la siguiente caracterización de las superficies totalmente umbilicales en \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.39. *Una superficie S totalmente umbilical está contenida ya sea en un plano o una esfera.*

El teorema anterior está demostrado de manera detallada en [14] pág. 109, y [7] pág 147.

Otro resultado útil para nosotros será el siguiente

Teorema 1.40. *En cualquier superficie compacta $S \subseteq \mathbb{R}^3$ existe un punto p de curvatura Gaussiana positiva $K(p) > 0$.*

Este resultado se encuentra demostrado también en [[14] pág. 110].

1.8.1. Isometrías

Definición 1.41. *Sean S y \hat{S} superficies regulares en \mathbb{R}^3 .*

*Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \hat{S}$ es una **isometría** si para todo punto $p \in S$ y cualesquiera vectores tangentes $w_1, w_2 \in T_p S$ tenemos que*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d_{\varphi_p}(w_1), d_{\varphi_p}(w_2) \rangle_{\varphi_p}.$$

Si se cumple lo anterior, se dice que S y \hat{S} son isométricas.

Definición 1.42. *Una transformación $\varphi : V \rightarrow \hat{S}$ de una vecindad $V \subseteq S$ es una **isometría local** en p si existe una vecindad \hat{V} de $\varphi(p) \in \hat{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \hat{V}$ es una isometría.*

Proposición 1.43. *Consideremos dos parametrizaciones $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ y $\hat{\mathbf{x}} : U \rightarrow \hat{S}$, que determinen los mismos coeficientes de la primera forma fundamental. Es decir $E = \hat{E}$, $F = \hat{F}$ y $G = \hat{G}$. Definamos $f : \mathbf{x}(U) \rightarrow \hat{S}$ como $f = \hat{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$, entonces f así definida es una isometría local.*

La demostración de dicha proposición la podemos encontrar en [[7], pág. 220.]

Veamos unas superficies especiales, que nos serán indispensables para mencionar algunos resultados de estas, en el siguiente capítulo.

1.9. Superficies regladas y superficies de revolución.

En geometría diferencial uno se encuentra con un número de casos particulares de superficies, y entre estas se encuentran las superficies regladas y superficies de revolución, dos clases de superficies consideradas aquí; que se originan de construcciones puramente geométricas y que las necesitaremos posteriormente.

Definición 1.44. Una **superficie reglada** S en \mathbb{R}^3 es una superficie regular que admite una parametrización $x : D \rightarrow S$ de la forma

$$x(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u),$$

donde γ y β son curvas en \mathbb{R}^3 , con γ' siempre distinto de cero. Diremos que x es una parametrización local reglada. La curva γ se denomina la curva directriz o curva base de la superficie reglada, y β se denomina curva generatriz. Las rectas generatrices de la superficie reglada son las rectas $v \mapsto \gamma(u) + v\beta(u)$.

Ejemplo 1.45. Tomemos una hélice $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, bu)$ y dibujemos una línea que pase por $(0, 0, bu)$ y $(a \cos u, a \sin u, bu)$. La superficie barrida por este levantamiento, la línea de rotación es un **Helicoide**.

La línea requerida está dada por $(0, 0, bu) + v(a \cos u, a \sin u, bu)$, así una parametrización para el Helicoide está dada por

$$x(u, v) = (av \cos u, av \sin u, bu), a \in \mathbb{R}^+, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

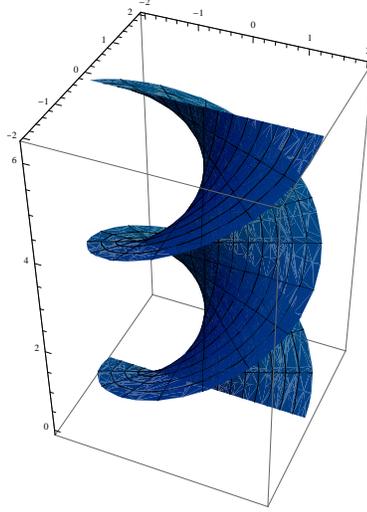


Figura 1.1: Helicoide.

Un caso especial importante es cuando las curvas generadoras son todas paralelas entre sí, la superficie reglada S generada así es llamada un **cilindro generalizado**.

Ejemplo 1.46. *Cilindro generalizado.* $x(u, v) = \gamma(u) + vq$, donde q es el vector dirección fijo.

Observación 1.47. *Por el ejemplo anterior tenemos que el cilindro puede ser parametrizado por $x(u, v) = \gamma(u) + vq$, donde γ es de velocidad unitaria, $\|q\| = 1$ y γ está contenido en un plano Π perpendicular a q . De ahí, tenemos que $x_u = \gamma' = t$, $x_v = q$, así $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$; $N = t \times q$, $x_{uu} = t' = \kappa n$, $x_{uv} = x_{vu} = 0$, así, $L = \kappa n \cdot (t \times n)$, $M = N = 0$. Ahora $t \times q$ es un vector unitario paralelo a Π y perpendicular a t , por lo tanto paralelo a n ; así $L = \pm\kappa$ y $H = \pm\kappa/2$. Así, $H = 0 \iff \kappa = 0 \iff \gamma$ es parte de una línea recta \iff el cilindro es un subconjunto abierto de un plano.*

Una **superficie de revolución** es la superficie que se obtiene al rotar una curva llamada curva generatriz, alrededor de una curva en el plano.

Definición 1.48. *Sea Π un plano, ℓ una recta contenida en Π , y C un conjunto de puntos en Π . Cuando C gira en el espacio \mathbb{R}^3 en torno a ℓ , el conjunto de puntos resultante S se denomina superficie de revolución generada por C , y C se llama curva generatriz de S . La recta ℓ es el eje de revolución de S .*

Tomemos el plano x, z como el plano de la curva y el eje z como el eje de rotación. Sea

$$x = f(v), z = g(v), a < v < b, f(v) > 0,$$

una parametrización de C y denotemos por u el ángulo de rotación al rededor del eje z . Obtenemos así una aplicación

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

del conjunto abierto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ en S .

No es difícil ver que x satisface las condiciones de parametrización en la definición de superficie regular. Como S puede recubrirse totalmente por parametrizaciones similares, se deduce que S es una superficie regular.

Ejemplo 1.49. Consideremos la catenaria $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(v) = (0, \cosh v, v)$.

Entonces $S = \{(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)/v, u \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ es una superficie en \mathbb{R}^3 a la que llamamos **catenoide**.

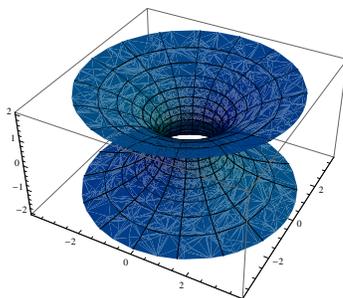


Figura 1.2: Catenoide.

Capítulo 2

Superficies Mínimas

2.1. Orígenes de las superficies mínimas

En general se admite que las investigaciones acerca de superficies mínimas dio inicio en el siglo XVIII, desde el mismo nacimiento del cálculo de variaciones emprendido por L. Euler, aunque más precisamente se inició con L. Lagrange, quien en su trabajo que apareció en 1762, desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones, un algoritmo que también es aplicable para dimensiones altas. Este trabajo despertó el interés de Euler, dando lugar a un desarrollo por parte de ambos autores, que culminó en la sistematización de las condiciones hoy llamadas de **Euler-Lagrange**. En este trabajo trató entre otras cuestiones del estudio del problema nada trivial de las superficies mínimas. La pregunta clave en este trabajo es: de todas las superficies $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con una frontera dada ¿cuál es la condición necesaria para que la superficie S tenga la menor área entre todas las superficies con la misma frontera?.

Lo que haremos en los siguientes párrafos será deducir de manera directa la ecuación diferencial que debe satisfacer cualquier superficie mínima y, lo vamos a hacer poniendo solamente el énfasis en las ideas relevantes desde el punto de vista del cálculo variacional, evitando discutir detalles adicionales. En [[13] pág 1-4] se puede encontrar más detalles de los que aquí se ofrecen.

Antes de empezar con la discusión, recordemos algunos resultados convenientes.

Localmente cualquier superficie puede describirse en la forma denominada parametrización de Monge, como la gráfica de una función $(x, y) \rightarrow$

$(x, y, f(x, y))$, tales superficies son llamadas no paramétricas. Pero posiblemente tal representación no pueda cubrir la superficie “completa”. Por ejemplo un plano puede representarse de manera completa en forma de Monge: $(x, y) \rightarrow ((x, y, f(x, y)) = z_0)$, pero una esfera como sabemos no es posible cubrirla con una sola parametrización de esta forma.

Por simplicidad, nos limitaremos a estudiar porciones de superficie que sean representables de dicha forma, lo que no constituye ninguna limitación importante, ya que como veremos la condición de superficie mínima se traduce en una ecuación diferencial que determina f localmente.

El área de una superficie que corresponde a un dominio D (abierto, no vacío y conexo) del plano de parámetros x, y es:

$$A = \int \int_D \sqrt{1 + (f)_x^2 + (f)_y^2} dx dy,$$

con la integral doble extendida al dominio D el cual tienen frontera ∂D suave.

Notese la analogía de esta expresión con la que da la longitud de una curva plana descrita en la forma $x \rightarrow (x, f(x))$, dada por $\mathcal{L} = \int \sqrt{1 + (f)_x^2} dx$.

Consideremos una curva Γ dada en espacio \mathbb{R}^3 . Esta curva se supondrá cerrada, sin autointersecciones y suficientemente regular. La proyección de Γ sobre el plano x, y es una curva plana, que llamaremos γ , que también supondremos cerrada, sin autointersecciones y suficientemente regular. La propia curva Γ puede describirse como el conjunto de puntos $(x, y, z\gamma(x, y))$ en donde se supone que $(x, y) \in \gamma$ y donde $z(x, y)$ es la función fija, definida solamente en γ y que describe la altura de la curva Γ . Denotemos D el dominio del plano cuyo borde es γ es decir γ es la frontera de D , ∂D : este dominio es homeomorfo a un disco ya que la curva γ no tiene autointersecciones.

La forma general de la descripción de Monge de una superficie que tenga a γ como borde esta dada por una función de dos variables, suficientemente regular, en la forma:

$$(x, y) \in D \rightarrow (x, y, z(x, y)), \quad \text{donde } z(x, y) = z_\gamma(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in \gamma.$$

Minimización del problema Supongamos que la función $f(x, y)$ (aun desconocida) corresponde a una superficie Σf con frontera Γ y de área mínima entre todas las que satisfagan las condiciones anteriores. Sea $g(x, y)$ una función fija, suficientemente regular, definida en el dominio D , y a la que exigimos satisfacer la condición

$$g(x, y) = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \gamma.$$

En estas condiciones, tenemos una familia de superficies, que podemos denotar mediante $\Sigma f(h, t)$ cuya descripción de Monge es:

$$(x, y) \in D \rightarrow (x, y, f(x, y) + tg(x, y)),$$

que se construyen a partir de la superficie Σf (aun desconocida), tomando como dato de deformación la función $h(x, y)$; aquí t juega el papel de un parámetro, de manera que esta familia es una familia uniparamétrica de superficies, todas las cuales tienen a la curva Γ como frontera, ya que para cualquier valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$ se verifica la condición

$$(x, y, f(x, y) + tg(x, y)) = z^t(x, y) \quad \text{donde } (x, y) \in \gamma.$$

El área de la superficie de $\Sigma f(h, t)$ está dado por :

$$A(t) = \int \int_D \sqrt{1 + (z^t)_x^2 + (z^t)_y^2} dx dy.$$

De ahí que

$$A(t) = \int \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2 + 2t(f_x g_x + f_y g_y) + t^2(g_x^2 + g_y^2)} dx dy.$$

Si la superficie Σf (descrita por $f(x, y)$) tiene realmente área mínima entre todas las superficies con el mismo borde, también debe tener área mínima entre las de la familia uniparamétrica anterior $\Sigma f(h, t)$. Esto significa que la función $A(t)$ debe tener un mínimo en $t = 0$, es decir

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Tomando la derivada bajo la integral respecto a t , que luego pasa al interior de la integral tenemos

$$A'(t) = \int \int_D \frac{f_x g_x + f_y g_y + t(g_x^2 + g_y^2)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2 + 2t(f_x g_x + f_y g_y) + t^2(g_x^2 + g_y^2)}} dx dy.$$

Evaluando en $t = 0$ la condición anterior se transforma en:

$$\int \int_D \frac{f_x g_x + f_y g_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} d_x d_y = 0.$$

Integrando por partes y recordando que $g(x, y)$ se anula en la frontera de D , tenemos

$$A'(0) = - \int \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \right\} g(x, y) d_x d_y = 0.$$

Así pues, si la superficie Σf es mínima, la condición anterior debe satisfacerse para cualquier elección de la función auxiliar g que satisfaga la condición de anulación sobre γ .

Puesto que $g(x, y)$ puede ser elegida arbitrariamente en D , se sigue que la expresión en las llaves debe desaparecer en todo D .

Obteniendo la siguiente ecuación diferencial parcial como una condición necesaria para nuestra superficie dé la solución supuesta inicialmente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Derivando la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \\ \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}^3} \{ f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2f_x f_y f_{xy} \} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esto conduce a lo que hoy se llama *ecuación de la superficie mínima*.

$$f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2f_x f_y f_{xy} = 0. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, hemos demostrado la condición necesaria para que una superficie tenga la menor área entre todas las superficies con la misma frontera

frontera, entonces Lagrange¹ encontró que la condición para que la función f fuese un mínimo del funcional área consistía en que f debía satisfacer la ecuación 2.3. A pesar de su aspecto superficialmente inocente, como ecuación diferencial es bastante complicada: es no lineal y se conocen muy pocas soluciones explícitas. La búsqueda efectiva de superficies mínimas requiere el uso de técnicas mucho más avanzadas y elaboradas. Un dominio cualquiera de un plano es evidentemente una superficie mínima, cuyo borde es una curva plana. Escogiendo adecuadamente las coordenadas, esta parte de superficie está descrita por $f(x, y) = z_0$, que satisface trivialmente la ecuación de Lagrange. Es decir, si la curva Γ es una curva plana, la superficie mínima con frontera Γ es una parte de plano. Este ejemplo es absolutamente trivial.

Pero Lagrange se interesó más en cuestiones teóricas, ya que no se preocupó en encontrar soluciones concretas no triviales de la ecuación 2.3. Fue L. Euler quien lo logró por el procedimiento de rotar la curvatura llamada *catenaria*, para así obtener una superficie mínima que llamó *alysseide*. Posteriormente J. Plateau bautizó a esta superficie con el nombre actual de *Catenoide*.

2.1.1. La ecuación de superficie mínima y curvatura media

Que una solución de la ecuación de superficie mínima deba ser una superficie cuya curvatura media se anula en todo punto, fue descubierto por **J.B.M.C. Meusnier** en 1776, un oficial del ejército Francés y quien también fue discípulo de Monge, a la edad de tan sólo 21 años presenta ante la academia de París, su obra *Mémoire sur la courbe des surface* (Memoria sobre la curvatura de la superficie) en dicho trabajo dio una interpretación geométrica para 2.2 y 2.3 donde señala que $H = 0^2$, es necesario para que el área de una superficie sea mínima, pero este hecho no es suficiente [véase [13] pág. 8.]; sin embargo, es común llamar a cualquier superficie con $H = 0$, una *superficie mínima*.

¹La ecuación 2.3 no fue explícitamente escrita por Lagrange, la derivó cinco años más tarde Borda [2]

²El término “curvatura media” fue introducido por Sophie Germain, en el sentido que $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales introducidas anteriormente por Euler, tres años después fue introducida la curvatura de Gauss K .

El trabajo en discusión, es el único dedicado por Meusnier a la Geometría Diferencial. Este artículo contiene el bien conocido Teorema de Meusnier y en este trabajo también aparte de dar la interpretación geométrica para 2.3 descubrió que la catenoide (un resultado temprano de Euler) y el helicoides, satisfacían 2.3, esto fue un logro sustancial ya que tomó 60 años para que otra superficie mínima fuera descubierta (por Scherk).

Generalmente, en la segunda mitad del siglo XVIII fue un periodo de muchos trabajos y grandiosos progresos en la teoría de superficies. Encontramos nombres por decir algunos, tales como Tinseau (superficies tangentes, 1774), Euler (geodesicas, 1732; Teorema de Euler, 1760; representaciones paramétricas de superficies especiales, 1771; aplicaciones esféricas, 1782)- cuyos resultados muestran su importancia básica mucho más tarde con Gauss, quien estableció varios conceptos como las propiedades intrínsecas de superficies, Lagrange, Lambert (cartografía, 1772) y Monge.

De lo anterior damos la siguiente definición.

Definición 2.1. (Superficie mínima). *Una superficie parametrizada regular es mínima si su curvatura promedio se anula en todas partes. Una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es mínima si cada una de sus parametrizaciones es mínima.*

Ejemplo 2.2. *Los ejemplos de superficies mínimas que podemos dar por ahora son*

1. *El plano.*
2. *El catenoide.*
3. *El helicoides.*

Que no es difícil convencerse que en realidad lo son.

2.1.2. Superficie de Scherk

Para analizar el descubrimiento de la tercera superficie mínima veamos una definición y algunos resultados.

Definición 2.3. *Sea D un abierto conexo de \mathbb{R}^2 , y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación diferenciable sobre D . Llamamos la gráfica de f al conjunto*

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\} \in \mathbb{R}^3,$$

dicha gráfica se dice **entera** si $D = \mathbb{R}^2$.

Las gráficas las podemos ver como un ejemplo de superficie, pues basta considerar el conjunto $U = D$, $V = G_f$ y la transformación $X : U \rightarrow V$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, (x, y)),$$

que es una parametrización global de la gráfica visto como una superficie regular.

Proposición 2.4. *Sea f una transformación diferenciable y su gráfica G_f . La curvatura media del gráfica de f viene dada por*

$$2H = \text{Div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right), \quad (2.4)$$

donde Div denota la divergencia en \mathbb{R}^2 y Df es el gradiente euclidiano de f .

Corolario 2.5. *Sea S una superficie mínima que viene dada como la gráfica de una transformación diferenciable f . Entonces se tiene que*

$$\text{Div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Las demostraciones de los resultados anteriores pueden verse en [9].

La gráfica más sencilla es el plano, cuya transformación diferenciable es del tipo $f(x, y) = ax + by + c$, resulta que el plano es una superficie entera. Como veremos posteriormente el teorema de Bernstein enuncia que es la única superficie entera que se puede expresar como la gráfica de una función. En este apartado vamos a construir o ver algunas gráficas mínimas que no son enteras.

Para ello vamos a buscar soluciones a la ecuación 2.3 la solución que obtendremos es la gráfica mínima no entera, la **superficie de Scherk**, determinada por una función del tipo $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$, donde, $\phi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Obsérvese que una solución de ese tipo, satisface

$$f_x(x, y) = \phi'(x) \quad f_y(x, y) = \psi'(y)$$

$$f_{xx}(x, y) = \phi''(x) \quad f_{yy}(x, y) = \psi''(y) \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

Si es mínima cumple la ecuación 2.3, es decir

$$(1 + \phi'(x)^2)\psi''(y) + (1 + \psi'(y)^2)\phi''(x) = 0.$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de variables separadas que podemos resolver. Para ello separamos variables y obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\psi''(y)}{1 + \psi'(y)^2} = -\frac{\phi''(x)}{1 + \phi'(x)^2}$$

Como x e y son variables independientes entre sí, cada lado de la igualdad es constante respecto a la variable del otro lado. Por lo tanto se tiene que

$$\frac{\psi''(y)}{1 + \psi'(y)^2} = a = -\frac{\phi''(x)}{1 + \phi'(x)^2}$$

para un $a \in \mathbb{R}$. Luego tomando $w = \phi'(x)$; y $\bar{w} = \psi'(y)$, se tiene que $\phi''(x) = \frac{dw}{dx}$ y $\psi''(y) = \frac{d\bar{w}}{dy}$. Sustituyendo en la ecuación de arriba tenemos

$$adx = -\frac{dw}{1 + w^2} \quad \text{y} \quad ady = -\frac{d\bar{w}}{1 + \bar{w}^2}$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden integrar y se obtiene que

$$ax = -\arctan(w) \quad \text{y} \quad ay = \arctan(\bar{w}),$$

despejando llegamos a

$$w = -\tan(ax) \quad \text{y} \quad \bar{w} = \tan(ay).$$

Como hemos utilizado un cambio de variable, integrando de nuevo las ecuaciones anteriores recuperamos ϕ y ψ ,

$$\phi(x) = \frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) \quad \text{y} \quad \psi(y) = -\frac{1}{a} \ln(\cos(ay)).$$

Por lo tanto, juntando ambos términos tenemos la solución que buscábamos.

$$f(x, y) = \phi(x) + \psi(y) = \frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) - \frac{1}{a} \ln(\cos(ay))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)} \right),$$

La representación anterior de f es la **primera superficie de Scherk**, pero ¿por qué no es entera esta superficie? Esta superficie no es entera pues esta función $f(x, y)$ solo está definida para los puntos (x, y) que cumplen que $\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)} > 0$. Por ejemplo, para los puntos (x, y) que cumplen que

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, \frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a} \right)$$

y

$$y \in \left(\frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, \frac{3\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a} \right)$$

la función $f(x, y)$ no está definida ya que $\cos(ax) > 0$ y $\cos(ay) < 0$.

Una explicación para graficar una parte de la superficie de Scherk, es: Para $a = 1$, tomemos $|x| < \frac{\pi}{2}$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, entonces tenemos $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ sobre x y $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ en y que forma un cuadrado. Cuando $\cos(y) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, es decir; $\cos(y) \rightarrow 0$ y como $\frac{\cos(x)}{\cos(y)} > 0$, entonces $\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow \infty$ y así $\ln \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow \infty$. Similarmente cuando $\cos(y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\ln \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow \infty$. Ahora cuando $\cos(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, es decir; $\cos(x) \rightarrow 0$ y como $\frac{\cos(x)}{\cos(y)} > 0$, entonces $\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow 0$, así $\ln \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow -\infty$ y de forma análoga cuando $\cos(y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\ln \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \rightarrow -\infty$.

Esto nos dá una explicación del porqué la superficie de Scherk está definida sobre el tablero de ajedrez de la figura 2.2(excepto en los vértices de los cuadros, donde en realidad la superficie es una recta vertical.) De acuerdo a [[14], teorema 4.4].

El descubrimiento de esta superficie fue muy peculiar, pues el catenoide y el helicoide eran las únicas superficies mínimas no triviales conocidas en 1700, y no fue sino hasta 1835 que se encontró el ejemplo anterior, que fue precisamente la superficie de Scherk, (véase 2.1,2.3³).

³Esta y las demás gráficas de este trabajo fueron realizadas en Mathematica 7.0.

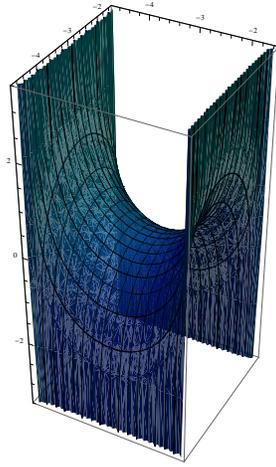


Figura 2.1: Superficie de Scherk una parte.

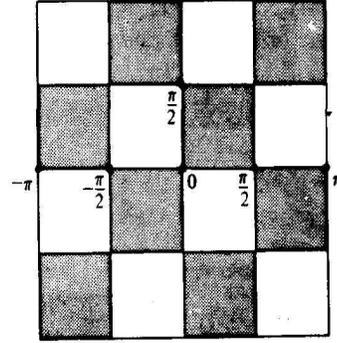


Figura 2.2: Tablero de ajedrez.

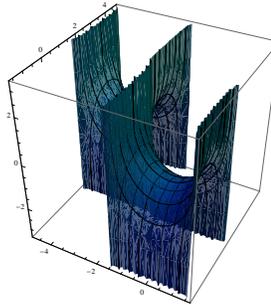


Figura 2.3: Superficie de Scherk dos partes.

Siguiendo una idea similar a la utilizada para encontrar la superficie de Scherk, podemos construir al menos otro ejemplo de gráficas mínimas no enteras. Consideremos una solución del tipo $f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ con $\phi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $\phi''(x) = 0$. Luego se tiene que $\phi'(x) = cte$ y que $\phi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}^2$. Para esta superficie vamos a suponer que $a = 1$ y $b = 0$, por tanto $\phi(x) = x$, ahora solo nos queda encontrar $\psi(y)$. Tenemos que

$$f_x(x, y) = \psi(y) \quad f_y(x, y) = x\psi'(y)$$

$$f_{xx}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = \psi''(y)x \quad y \quad f_{xy}(x, y) = \psi'(y).$$

y la ecuación diferencial 2.3, nos queda como:

$$\psi''(y) + \psi^2(y)\psi''(y) - 2\psi'^2(y)\psi(y) = 0$$

que es una ecuación de segundo orden no lineal. Haciendo algunos cálculos obtenemos que la solución es

$$\frac{\arctan(\psi)}{k_1} = y + k_2 \implies \psi(y) = \tan(cy + d) \quad \text{donde } c, d \in \mathbb{R}.$$

En nuestro caso tomamos las constantes $c = 1$ y $d = 0$. Luego la solución de la ecuación diferencial nos produce la función diferenciable la cual tiene una gráfica mínima:

$$f(x, y) = x \tan(y),$$

esta gráfica no es entera pues solo está definida en $\Omega = \{(x, y) : y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

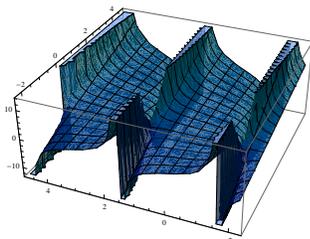


Figura 2.4: Superficie $f(x, y) = x \tan(y)$.

Veamos los siguientes teoremas que se tienen sobre minimalidad en su relación con superficies de revolución y superficies regladas.

Teorema 2.6. *Si una superficie de revolución S es mínima, entonces S está contenida en un subconjunto abierto de un plano o un catenoide.*

Para ver la demostración del teorema anterior véase [[14], pág. 114.]

Teorema 2.7. *Cualquier superficie mínima reglada S es subconjunto abierto de un plano o un helicoides.*

Demostración. Tomemos la parametrización usual

$$\mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u),$$

y simplifiquemos la parametrización. Supongamos que $\|\beta(u)\| = 1$ para todos los valores de u . Supongamos también que $\beta'(u)$ es distinto de cero (Después consideraremos el caso si $\beta'(u) = 0$ para algún valor de u). Entonces tenemos que existe único punto $\Gamma(u)$ en la el cual $\beta'(u)$ es perpendicular a la superficie, además $\Gamma' \cdot \beta' = 0$. En efecto, tenemos que $\mathbf{x}_u = \gamma' + v\beta'$, $\mathbf{x}_v = \beta$, así $\beta'(u)$ es perpendicular a la superficie $\mathbf{x}(u, v) \iff \beta' \cdot (\gamma' + v\beta') = 0$, $\beta' \cdot \beta = 0$. La segunda ecuación se sigue del echo de que $\|\beta\| = 1$, así, las dos ecuaciones se han de satisfacer $\iff v = -\frac{(\gamma' \cdot \beta')}{\|\beta'\|^2}$. Por lo tanto, $\Gamma(u) = \gamma - \frac{(\gamma' \cdot \beta')\beta}{\|\beta'\|^2}$. Usando el echo de que $\beta' \cdot \beta = 0$, $\Gamma' \cdot \beta' = \gamma' \cdot \beta' - \frac{(\gamma' \cdot \beta')\beta' \cdot \beta'}{\|\beta'\|^2} = 0$. Sea $\tilde{v} = v + \frac{(\gamma' \cdot \beta')\beta}{\|\beta'\|^2}$ y sea $\tilde{\sigma}(u, \tilde{v})$ la correspondiente reparametrización de σ . Entonces, $\tilde{\sigma}(u, \tilde{v}) = \Gamma(u) + \tilde{v}\beta(u)$. Esto significa que, cuando consideramos una superficie reglada con las oposiciones anteriores, siempre podemos asumir que $\gamma'(u) \cdot \beta'(u) = 0$. De ahí, tenemos

$$\mathbf{x}_u = \gamma' + v\beta', \mathbf{x}_v = \beta,$$

Por lo tanto $E = \|\gamma' + v\beta'\|^2$, $F = (\gamma' + v\beta') \cdot \beta = \gamma' \cdot \beta$, $G = 1$. Sea $A = (EG - F^2)^{1/2}$. Entonces, $N = A^{-1}(\gamma' + v\beta') \times \beta$. Por consiguiente, tenemos $\mathbf{x}_{uu} = \gamma'' + v\beta''$, $\mathbf{x}_{uv} = \beta'$, $\mathbf{x}_{vv} = 0$, Por lo tanto $e = A^{-1}(\gamma'' + v\beta'') \cdot ((\gamma' + v\beta') \times \beta)$, $f = A^{-1}\beta' \cdot ((\gamma' + v\beta') \times \beta) = A^{-1}\beta' \cdot (\gamma' \times \beta)$, $g = 0$. Por lo tanto, por la condición de superficie mínima

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2A^2} = 0$$

lo que nos da

$$(\gamma'' + v\beta'') \cdot (\gamma' + v\beta') \times \beta = 2(\beta \cdot \gamma')(\beta' \cdot (\gamma' \times \beta)).$$

Esta condición debe mantenerse para todos los valores (u, v) . Igualando coeficientes de las potencias de v tenemos

$$\gamma'' \cdot (\gamma' \times \beta) = 2(\beta \cdot \gamma')(\beta' \cdot (\gamma' \times \beta)), \quad (2.6)$$

$$\gamma'' \cdot (\beta' \times \beta) + \beta'' \cdot (\gamma' \times \beta) = 0, \quad (2.7)$$

$$\beta'' \cdot (\beta' \times \beta) = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 muestra que β , β' y β'' son linealmente dependientes. Como β y β' son vectores unitarios perpendiculares, existen funciones suaves $\alpha(u)$ y $\delta(u)$ tal que

$$\beta'' = \alpha\beta + \delta\beta'$$

Pero, como β es de velocidad unitaria, $\beta' \cdot \beta'' = 0$. También, derivando $\beta \cdot \beta' = 0$ tenemos $\beta \cdot \beta'' = -\beta' \cdot \beta' = -1$. Por lo tanto, $\alpha = -1$ y $\delta = 0$, así

$$\beta'' = -\beta. \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 muestra que la curvatura de la curva β es 1, y que su normal principal es $-\beta$. Por lo tanto, su binormal es $\beta' \times (-\beta)$, y como

$$\frac{d}{du}(\beta' \times \beta) = \beta'' \times \beta + \beta' \times \beta' = -\beta \times \beta = 0$$

se sigue que la torsión de β es cero. Por tanto, β parametriza a un círculo de radio 1. Por aplicación de una isometría en \mathbb{R}^3 , podemos asumir que β es el círculo de radio 1 y el centro en el origen en el plano xy , así que

$$\beta(u) = (\cos(u), \sin(u), 0).$$

Por ecuación 2.9, tenemos $\beta'' \cdot (\gamma' \times \beta) = -\beta \cdot (\gamma' \times \beta) = 0$, así por 2.7,

$$\gamma'' \cdot (\beta' \times \beta) = 0.$$

De ahí se sigue que γ'' es paralelo al el plano xy , y por tanto que

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), au + b),$$

donde f y g son funciones suaves y a y b constantes. Si $a = 0$, la superficie es un subconjunto abierto del plano $z = b$. Por otro lado la ecuación 2.6 nos da

$$g'' \cos u - f'' \sin u = 2(f' \cos u - g' \sin u). \quad (2.10)$$

Finalmente haciendo el uso de la condición de que $\gamma' \cdot \beta' = 0$, de la cual obtenemos

$$f' \sin u = g' \cos u \quad (2.11)$$

Derivando esto, obtenemos

$$f'' \sin u + f' \cos u = g'' \cos u - g' \sin u. \quad (2.12)$$

De las ecuaciones 2.12 y 2.10 obtenemos

$$f' \cos u + g' \sin u = 0$$

y usando 2.11 tenemos $f' = g' = 0$. Así, f y g son constantes. Por una traslación de la superficie podemos asumir que f , g y b son cero, así que $\gamma(u) = (0, 0, au)$ y $x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$, la cual es la parametrización del helicoido. Ahora si β' es siempre cero entonces β es un vector constante y la superficie es un cilindro generalizado. Pero en efecto, por 1.47 un cilindro generalizado es superficie mínima si y sólo si, el cilindro es un subconjunto abierto del plano. ■

2.2. Relación entre Helicoido y el Catenoide

Como se ha comentado en este capítulo, tras el plano y el catenoide las siguientes superficies mínimas que se encontraron fueron el helicoido y las superficies de Scherk, veámos que el catenoide es localmente isométrico al helicoido.

2.2.1. Isometría local entre el catenoide y el helicoido

En este apartado vamos a demostrar que el Catenoide es localmente isométrico al Helicoido Sea

$$X(u, v) = (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v)$$

y

$$Y(s, t) = (t \cos(s), t \sin(s), s),$$

parametrizaciones del catenoide \mathcal{C} y del helicoido \mathcal{H} respectivamente. Supongamos que existe una isometría local $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$. Denotemos por $\tilde{\varphi} = X^{-1} \circ \varphi \circ Y(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$. Por lo visto anteriormente la curvatura de Gauss del helicoido es $K(s, t) = \frac{-1}{(t^2+1)^2}$ y del catenoide $K(u, v) = \frac{-1}{\cosh^4 v}$. Dado que la curvatura de Gauss se conserva por isometrías locales ha de verificarse:

$$\frac{-1}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-1}{\cosh^4 v} = \frac{-1}{(1 + \sinh^2(v))}.$$

Esta igualdad sugiere (pero no demuestra) que una posible isometría local esté dada por

$$s(u, v) = u$$

$$t(u, v) = \sinh v$$

Consideremos $\tilde{\psi}(u, v) = \tilde{\varphi}^{-1}(u, v) = (u, \sinh v)$. Demostremos que dicha transformación es una isometría local. La transformación diferencial de $\tilde{\psi}$ tiene por matriz

$$D(\tilde{\psi})(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh v \end{pmatrix}$$

que es regular en todo punto. Por lo tanto $\psi = Y^{-1} \circ \tilde{\psi} \circ X$ es localmente un difeomorfismo. Por lo tanto,

$$(D\psi)(X_u) = Y_s, \quad (D\psi)(X_v) = \cosh(v)Y_t$$

Tenemos entonces que

$$\langle (D\psi)(X_u), (D\psi)(X_u) \rangle = \langle Y_s, Y_s \rangle = t^2 + 1 = \cosh^2(v) = \langle X_u, X_u \rangle,$$

$$\langle (D\psi)(X_u), (D\psi)(X_v) \rangle = \langle Y_s, \cosh(v)Y_t \rangle = 0 = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$\langle (D\psi)(X_v), (D\psi)(X_v) \rangle = \cosh^2(v) \langle Y_t, Y_t \rangle = \cosh^2(v) = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Esto demuestra por 1.43 que ψ es una isometría local.

Ilustramos dicha isometría con el siguiente dibujo:

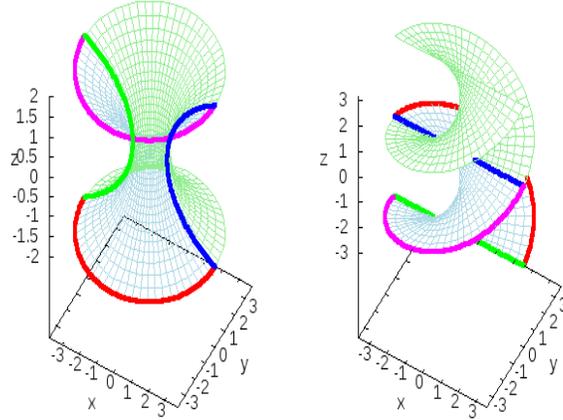


Figura 2.5: Isometría local Catenoide-Helicoide.

Observación 2.8. La figura 2.5, ilustra dos regiones particulares del Helicoide y Catenoide que corresponden bajo la deformación. Las fronteras de estas regiones incluyen una hélice y un círculo, con respecto a las parametrizaciones

$$\alpha(u) = (\sinh 1 \sin u, -\sinh 1 \cos u, u), \quad 0 \leq u < 2\pi$$

$$\gamma(u) = (\cosh 1 \cos u, \cosh 1 \sin u, 1), \quad 0 \leq u < 2\pi$$

La longitud de la hélice es

$$\int_0^{2\pi} |\alpha'(u)| du = 2\pi \sqrt{\sinh^2 1 + 1}$$

y del círculo es

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(u)| du = 2\pi \cosh 1$$

El hecho de que estas dos longitudes sean iguales es por el hecho de que la hélice se transforma isométricamente en el círculo.

2.3. Representación de Weierstrass-Enneper

La representación de Weierstrass-Enneper para superficies mínimas, dice que cualquier superficie mínima podrá ser representada por funciones holomorfas. La posibilidad de estudiar un problema desde varios ángulos diferentes puede ser una herramienta muy útil en las matemáticas, lo que hace que la representación de Weierstrass-Enneper sea un descubrimiento muy importante, antes de dar la construcción de ésta representación veamos algunos conceptos.

2.4. Funciones armónicas y coordenadas isotermas

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . El **laplaciano**, Δf de una transformación diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, (u, v) \in U.$$

Definición 2.9. Decimos que f es **armónica** en U si $\Delta f = 0$.

Definición 2.10. Dos transformaciones diferenciables $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que verifican las **ecuaciones de Cauchy- Riemann**, es decir, $f_u = g_v$ y $f_v = -g_u$, son siempre armónicas, y reciben el nombre de **armónicas conjugadas**. Se dice que dos superficies regulares mínimas son mínimas conjugadas si existe una parametrización isoterma de las mismas, de forma que sus funciones coordenadas son armónicas conjugadas dos a dos.

Al estudiar las propiedades de una superficie que son independientes de elección de los parámetros, es conveniente elegir parámetros de tal manera que las propiedades geométricas de la superficie se reflejen en el plano u, v . Por ejemplo podemos pedir que la transformación del plano u, v sobre la superficie sea conforme, de modo que los ángulos entre las curvas en la superficie sea iguales a los ángulos entre las curvas correspondientes en el plano u, v . Analíticamente, esta condición se expresa en términos de la primera forma fundamental.

Definición 2.11. Sea S una superficie regular en \mathbb{R}^3 , con parametrización $X(u, v)$, las coordenadas (u, v) sobre la superficie S son llamadas **isotermas**

(o conformes) si la métrica ds^2 en S inducida de \mathbb{R}^3 , descrita en las coordenadas (u, v) , son como sigue: $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, donde $\lambda(u, v)$ es una función suave positiva definida en todo el plano $\mathbb{R}_{(u,v)}^2$, llamado el factor conforme.

Lo anterior significa que cada punto de la gráfica S los vectores velocidad de la curva de coordenadas $u = cte$ y $v = cte$ son ortogonales y tienen la misma longitud.

En términos de la representación matricial de la primera forma fundamental, tenemos $X(u, v)$ es *isoterma* si $g_{11} = g_{22} = \lambda(u, v)$ y $g_{12} = 0$.

Las coordenadas isotermas existen en cualquier superficie regular; sin embargo, la prueba de este hecho es mucho más complicada que el caso en que la superficie sea mínima.

Teorema 2.12. *Podemos tomar una parametrización isoterma alrededor de cualquier punto de una superficie mínima $S \subseteq \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Como el resultado es local, fijemos un punto $p \in S$ y escojamos un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z tal que p es el origen, así que el plano- x, y coincide con plano tangente $T_p S$ de S en p . En este sistema de coordenadas, la superficie S en una vecindad de p se puede ver como la gráfica $x = x$, $y = y$ y $z = f(x, y)$. Usando la expresión de la curvatura media para una gráfica y como la superficie es mínima tenemos:

$$H = 0 \Rightarrow f_{xx}(1 + f_y^2) + f_{yy}(1 + f_x^2) - 2f_x f_y f_{xy} = 0. \quad (2.13)$$

Por conveniencia denotemos

$$\begin{aligned} f_x &= p & f_y &= q, \\ f_{xx} &= r & f_{yy} &= t & f_{xy} &= s. \end{aligned}$$

De ahí que 2.3 toma la forma

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

Denotemos por $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, haciendo algunos cálculos tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + q^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{W} \right) =$$

$$\frac{-p}{W}((1+q^2)r + 2pqs + (1+p^2)t) = 0.$$

De forma similar se prueba que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+p^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{W} \right) = 0.$$

Definamos dos campos vectoriales en el plano xy por

$$V = \left(\frac{1+p^2}{W}, \frac{pq}{W} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{pq}{W}, \frac{1+q^2}{W} \right),$$

aplicando el teorema de Green a cualquier curva cerrada C contenida en una región simplemente conexa \mathcal{R} , obtenemos

$$\int_C V = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{pq}{W} \right)_x - \left(\frac{1+p^2}{W} \right)_y dx dy = 0,$$

y

$$\int_C W = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1+q^2}{W} \right)_x - \left(\frac{pq}{W} \right)_y dx dy = 0,$$

Puesto que las integrales de línea son cero para toda curva cerrada en \mathcal{R} , V y W deben tener funciones potenciales (ver [11] pág 518.). Esto es existen F y G con $\text{grad}(F) = V$ y $\text{grad}(G) = W$, con respecto a las coordenadas, estas ecuaciones implican

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1+p^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{pq}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{pq}{W}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1+q^2}{W}. \quad (2.14)$$

Es decir implican la existencia de dos funciones de clase \mathcal{C}^1 , F y G en el mismo dominio que la ecuación de superficie mínima.

Definamos una transformación $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$T(x, y) = (x + F(x, y), y + G(x, y)). \quad (2.15)$$

La matriz Jacobiana de esta transformación es:

$$J(T) = \begin{pmatrix} 1 + F_x & F_y \\ G_x & 1 + G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{W} & \frac{pq}{W} \\ \frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+q^2}{W} \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $2 + \frac{2+p^2+q^2}{W} > 0$. El teorema de la función inversa dice que, cerca de $p = (0, 0)$, existe una función inversa suave $T^{-1}(u, v) = (x, y)$ con

$$\begin{aligned} J(T^{-1}) &= J(T)^{-1} = \frac{2W}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{W} & -\frac{pq}{W} \\ -\frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+p^2}{W} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} W + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & W + 1 + p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por supuesto, la matriz anterior por definición del jacobiano es

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

Usaremos los cálculos anteriores para mostrar que la siguiente parametrización (en las coordenadas u, v descritas arriba)

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$$

es isoterma. Primero calculamos

$$\mathbf{x}_u = \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} (W + 1 + q^2, -pq, p(W + 1 + q^2) + q(-pq))$$

y $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \frac{W^2}{(1+W)^2}$. De forma análoga se puede mostrar que

$$\mathbf{x}_v = \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} (-pq, W + 1 + p^2, p(-pq) + q(W + 1 + p^2))$$

y $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \frac{W^2}{(1+W)^2}$. Además también que $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$. Así uno tiene que $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$. Por lo tanto, la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es isoterma. ■

Observación 2.13. Si S tiene una parametrización isoterma, sustituyendo $E = G$ y $F = 0$ en la definición de curvatura media,

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{e + g}{2E}.$$

Lema 2.14. No existen superficies mínimas compactas.

Demostración. Por observación anterior si S es una superficie mínima entonces $H = 0$ implica que $e + g = 0$ luego $K \leq 0$. Utilizando el contra-recíproco del teorema 1.40, si $K \leq 0$ para todo $p \in S$ entonces S no es compacta. ■

Como consecuencia de esto, una propiedad de superficies mínimas es que $e = -g$. Ahora podemos hacer algunas observaciones acerca de nuestra parametrización isoterma $X(u, v)$ en relación con el operador de Laplace.

Proposición 2.15. *Sea S una superficie regular, si la parametrización $X(u, v)$ de S es isoterma, entonces $X_{uu} + X_{vv} = (2EH)N$.*

Demostración. Como X es isoterma, $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ y $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Derivando respecto de u la primera igualdad y respecto de v la segunda, obtenemos:

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle$$

y

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle,$$

de donde deducimos que $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$. Análogamente se demuestra que $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$. Lo que estamos diciendo es, que el vector $X_{uu} + X_{vv}$ es ortogonal a la base $\{X_u, X_v\}$, lo que nos asegura que se encuentra en la dirección del normal N a la superficie. Luego $X_{uu} + X_{vv} = \lambda N$. Hallemos el valor de λ , un sencillo cálculo nos permite probar que

$$\lambda = \lambda \langle N, N \rangle = \langle \lambda N, N \rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, N \rangle = e + g.$$

Por otro lado, como $E = G$ y $F = 0$, la curvatura media se reduce a una expresión mucho más sencilla

$$H = \frac{e + g}{2E},$$

en consecuencia, $\lambda = e + g = 2EH$ que es lo que deseábamos. ■

A partir de esta proposición, podemos deducir una caracterización para una superficie mínima utilizando la armonicidad de las funciones componente de su parametrización isoterma, el cual también será importante para la construcción de la representación de Weierstrass- Enneper.

Corolario 2.16. Una superficie $M : \mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$, con coordenadas isotermas es mínima si y solo si x^1, x^2 y x^3 son funciones armónicas.

Demostración. Si M es mínima, entonces $H = 0$, entonces $\Delta \mathbf{x} = (2EH)\vec{N} = 0$, entonces x^1, x^2 y x^3 son armónicas. Ahora si x^1, x^2, x^3 son armónicas, entonces $\Delta \mathbf{x} = 0$, entonces $(2EH)\vec{N} = 0$. Ahora bien, como \vec{N} es el vector unitario, entonces $\vec{N} \neq 0$ y además $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = |\mathbf{x}_u|^2 \neq 0$. Así, $H = 0$, entonces M es mínima. ■

Por lo tanto, una superficie S es mínima si, y solo si, $X_{uu} + X_{vv} = 0$, para una parametrización isoterma $X(u, v)$ de S que, sabemos, siempre existe.

2.5. Teoremas de análisis complejo

La representación de Weierstras-Enneper no sólo depende de conceptos de geometrías diferencial, sino que también tenemos que entender algunos conceptos del análisis complejo, las definiciones y proposiciones aquí dadas pueden verse de forma más detallada en [1].

Definición 2.17. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$. Una transformación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en z_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe.

Si f es diferenciable en cada punto de Ω , decimos que f es **analítica** (o *equivalentemente* holomorfa) en Ω .

Definición 2.18. Una transformación que es holomorfa en todo el plano complejo es llamada entera.

Proposición 2.19. Si una función con valores complejos $f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$ es holomorfa entonces satisface las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.16)$$

Inversamente, si $u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{C}^1$ satisfacen 2.16 en un abierto, entonces $f = u + iv$ es holomorfa.

La ecuación 2.16 la podemos escribir en una forma más resumida

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

la cual usaremos más tarde para la demostración de algunos resultados.

Teorema 2.20. (*Liouville*)⁴ *Cualquier función entera y acotada debe reducirse a una constante.*

Observación 2.21. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f = u + iv$ una función entera con parte imaginaria negativa en todo \mathbb{C} , es decir; $v < 0$, entonces $-if = -iu + v$, por tanto $-if$ tiene parte real negativa. Afirmación f es constante. En efecto, se considera la función $g(z) = e^{-if}$ además*

$$|g(z)| = e^v \leq e^0 < 1,$$

por lo tanto $g(z)$ es entera y acotada. Aplicando el teorema de Liouville se tiene que $g(z)$ es constante, es decir; $g(z) = c$ para todo z ($\log(g(z)) = -if = \log(c) = \text{cte}$). Además $0 = g'(z) = -if'(z) - ie^{-if(z)} = -f'(z)e^{-if(z)}$, lo cual implica que $f'(z) = 0$ para todo z , por lo tanto f es constante en \mathbb{C} . Así, el Teorema de Liouville nos dice de este modo que, cualquier función entera con parte imaginaria negativa es constante.

Definición 2.22. (*Funciones holomorfas en el cálculo de Wirtinger*)

Introduciendo variables complejas $z = u + iv$ donde $u, v \in \mathbb{R}$ y su conjugado $\bar{z} = u - iv$, podemos escribir $u = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $v = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Existe una definición alternativa para funciones holomorfas, basada en el llamado **Cálculo de Wirtinger**. Este cálculo considera dos operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ para funciones diferenciables $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = f(u, v)$, estas derivadas de Wirtinger son definidas como:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) - i\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + i\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right).$$

⁴Joseph Liouville matemático Francés, que anunció 2.20 en una Nota en la Comptes Rendus de l' Académie des Scienses (París, el 9 de Diciembre, 1844) [4] pág. 63.

Lo anterior es introducido ya que cuando se trata de una función compleja digamos $f(u, v)$ al pensar en un cambio de variables de (u, v) a (z, \bar{z}) , donde $z = u + iv$. Uno necesita saber cómo se transforman sus derivadas con el cambio de variable y uno encuentra que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).\end{aligned}$$

Resolviendo para $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$, encontramos las expresiones usuales para las derivadas de Wirtinger. Observe que:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0.$$

En consecuencia es fácil calcular $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$, para todo polinomio, toda función racional, es decir; de la forma $f(z) = \mathcal{P}(z)/\mathcal{Q}(z)$ donde $\mathcal{P}(z)$ y $\mathcal{Q}(z)$ son polinomios no nulos y varias funciones más de z y \bar{z} , por los que las derivadas de Wirtinger satisfacen las mismas reglas de suma, producto y regla de la cadena como las derivadas $\partial/\partial u$ y $\partial/\partial v$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(z^5 + 3z^2\bar{z}) &= 5z^4 + 6z\bar{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^5 + 3z^2\bar{z}) = 3z^2, \\ \frac{\partial}{\partial z}(\exp(z)) &= \exp(z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\exp(z)) = 0.\end{aligned}$$

La derivada de $\partial/\partial \bar{z}$, tiene la importante propiedad que si

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z, \bar{z}) = 0,$$

entonces f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y así f es holomorfa (y así analítica). Esto es sencillo para verificar pero los cálculos los haremos después ya que estos conceptos nos serán de gran utilidad en la construcción de la representación de Weierstrass-Enneper. Note que lo anterior nos dá

una buena intuición, a grandes rasgos, si f no es función de \bar{z} , entonces f es holomorfa.

En analogía funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ para $z \in \mathbb{C}$ se llaman funciones no holomorfas o (antiholomorfas).

En base a lo anterior veámos un resultado de Scherk: el cual dice que es posible encontrar una familia uniparamétrica de deformaciones isométricas, mediante superficies mínimas, del helicoido al catenoide que revisaremos a continuación.

Proposición 2.23. *Sea S, \bar{S} superficies mínimas conjugadas y x, \bar{x} sus parametrizaciones isotermas respectivamente. Entonces, la superficie parametrizada por $Z_t(u, v) = \cos(t)x(u, v) + \sin(t)\bar{x}(u, v)$ es mínima para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, todas las superficies de esta familia tienen la misma primera forma fundamental.*

Demostración. Como S, \bar{S} son superficies mínimas conjugadas, tenemos que, para las parametrizaciones x, \bar{x} , se cumple que $x_u = \bar{x}_v$ y $x_v = -\bar{x}_u$, además, las derivadas parciales de la parametrización $Z_t(u, v) = \cos(t)x(u, v) + \sin(t)\bar{x}(u, v)$ son

$$(Z_t)_u = \cos(t)x_u + \sin(t)\bar{x}_u = \cos(t)x_u - \sin(t)x_v,$$

y

$$(Z_t)_v = \cos(t)x_v + \sin(t)\bar{x}_v = \cos(t)x_v + \sin(t)x_u;$$

entonces, utilizando que x y \bar{x} son isotermas, se obtiene que los coeficientes de su primera forma fundamental son:

$$E_t = \cos^2(t)E + \sin^2(t)G = E,$$

$$G_t = \cos^2(t)G + \sin^2(t)E = E,$$

y

$$F_t = \cos(t) \sin(t)(E - G) = 0.$$

Luego todas las superficies $Z_t(u, v)$ tienen la misma primera forma fundamental por lo tanto por 1.43, todas son localmente isométricas, siendo parametrizaciones isotermas. Además, $(Z_t)_{uu} = \cos(t)x_{uu} - \sin(t)x_{uv}$ y $(Z_t)_{vv} = \cos(t)x_{vv} + \sin(t)x_{uv}$. Entonces,

$$(Z_t)_{uu} + (Z_t)_{vv} = \cos(t)(x_{uu} + x_{vv}) = 0,$$

pues S es una superficie mínima y x es isoterma. Así, hemos demostrado que Z_t es una parametrización que verifica $(Z_t)_{uu} + (Z_t)_{vv} = 0$; por lo tanto podemos concluir que la superficie parametrizada por $Z_t(u, v)$ es mínima. ■

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

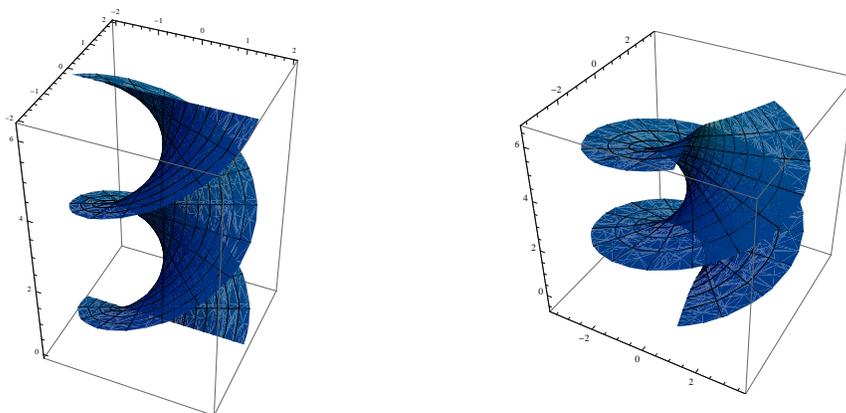
Corolario 2.24. *Dos superficies mínimas conjugadas pueden (unirse) siempre, mediante una familia uniparamétrica de superficies mínimas todas ellas localmente isométricas entre sí.*

El no es difícil ver que el helicoides y catenoide son superficies mínimas conjugadas. Por lo tanto, la familia $Z_t(u, v) = \cos(t)x(u, v) + \sin(t)\bar{x}(u, v)$ nos da la familia uniparamétrica buscada de deformaciones isométricas, mediante superficies mínimas, entre ambas superficies. En este caso

$$Z_t(u, v) = \cos t(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u) + \sin t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$$

para $0 \leq t \leq \pi/2$

Veamos una ilustración de tal deformación:



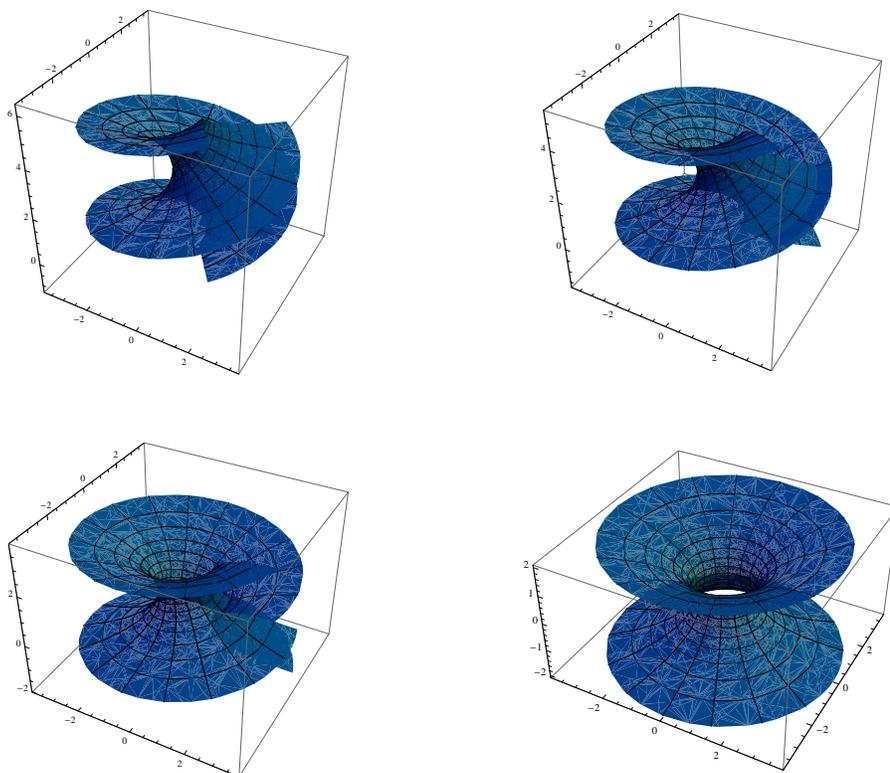


Figura 2.6: Deformación isométrica del Helicoide en el Catenoides.

2.5.1. Ceros, polos y singularidades aisladas

Definición 2.25. Un número complejo a es un cero de una función holomorfa si $f(a) = 0$.

En base a esta definición se tienen los siguientes resultados cuyas demostraciones se omiten.

Teorema 2.26. Sea f una función holomorfa en una región ⁵ Ω , si $a \in \Omega$ es una cero de f no es idénticamente nula en Ω entonces existe un entorno $U \subseteq \Omega$ de a y una función g holomorfa en U y no nula en ningún punto de U y un número natural n tal que

$$f(z) = (z - a)^n g(z), z \in U.$$

⁵A los subconjuntos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ que sean abiertos y conexos se les conoce como región.

n está determinado de manera única y se llama el **orden** del cero a .

También decimos que n es la multiplicidad del cero. Los ceros de orden 1 se dicen simples.

Una pregunta peculiar sería ¿el orden del cero puede ser infinito?, pues resulta que no.

Teorema 2.27. *Si una función holomorfa tiene un cero de orden infinito, entonces se anula en toda una vecindad del cero.*

Este resultado se sigue del teorema de Taylor para funciones holomorfas.

Proposición 2.28. *Si f es una función holomorfa en una región Ω y es no nula en Ω , entonces los ceros de f son aislados.*

Definición 2.29. *Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es una **singularidad** de f si f o bien no está definida en $z_0 = a$, o bien está definida y no es analítica en ningún entorno U de a (por ejemplo si es discontinua en a).*

Sea f holomorfa en el abierto Ω , decimos que a es una **singularidad aislada** de f si existe un entorno U de a tal que $U \setminus \{a\} \subseteq \Omega$.

En consecuencia si los ceros de una función holomorfa son aislados, los polos también.

En la situación anterior decimos que $U \setminus \{a\}$ es un entorno reducido de a . Llamamos a a una **singularidad removible** si podemos definir $f(a)$ adecuadamente de modo que $f(z)$ sea analítica en todo el disco $|z - a| < \delta$, para abundar más sobre esto, véase [1] pág. 124.

Definición 2.30. *Decimos que una singularidad aislada a de f es un **polo** de f si existe un entorno U de a tal que la función g definida en U por $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ si $z \in U$ con $z \neq a$ y $g(a) = 0$ es analítica en U . El orden del cero a de g se denomina entonces orden del polo a de f .*

Teorema 2.31. *Si f tiene un polo en $a \in \Omega$, entonces existe un entorno U de a , una función holomorfa h no nula en U y un único número natural n tal que*

$$f(z) = (z - a)^{-n}h(z).$$

El número natural n se denomina el orden del polo. Si $n = 1$ decimos que el polo es simple.

Definición 2.32. Una función compleja $g(z)$ es **meromorfa** en una región digamos Ω si es holomorfa en cualquier parte de la región excepto en singularidades aisladas y todas estas singularidades son polos.

Equivalentemente, para cualquier $a \in \Omega$ o bien existe una vecindad $|z - a| < \delta$ donde la función es analítica, o $f(z)$ es analítica en $0 < |z - a| < \delta$ y a es un polo. Lo que significa que los polos de una función meromorfa son aislados por definición.

Ejemplo 2.33. \diamond El cociente $f(z)/g(z)$ de dos funciones holomorfas no nulas es una función meromorfa en Ω . Los posibles polos aquí son los ceros de g , pero un cero común de f y g podría ser una singularidad evitable (por ejemplo $f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$).

Del mismo modo, la suma, producto y cociente de funciones meromorfas son nuevamente meromórfica.

\diamond En particular una función racional es meromorfa en el plano complejo. Además para una función racional, ∞ es o bien una singularidad evitable, o bien un polo.

2.6. Transformaciones conformes

Durante mucho años, uno de los problemas más atractivos para los geómetras estaba relacionado directamente con la Cartografía, es decir, la representación de una región R del globo terráqueo (pensado como la esfera unitaria) en una superficie plana (un mapa). En principio se buscaba una transformación $\phi : R \subseteq \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preservara distancias, es decir una isometría lo cual es crucial para la navegación marítima.

Aunque algunos historiadores de las matemáticas sostienen que Tolomeo fue el primero en concebir una representación conforme de la superficie terrestre sobre un plano, todo esto inicia más precisamente con Hipparchus (Hiparco) fundador de la Geografía y de la Astronomía, quien vivió en el siglo II a.c., tres siglos antes que Tolomeo, seguramente Tolomeo fue inspirado ampliamente con los trabajos de Hiparco y en algunos casos no se logran distinguir las aportaciones de ambos.

Del principio de los tiempos modernos alrededor de 1500. Sin pretender mencionar a todos los que han contribuido significativamente al asunto, es posible afirmar que las ideas de Nuñez, Mercator, Lambert, Euler y Lagrange

sobre navegación y, más concretamente, sobre la elaboración de mapas planos de la superficie del globo terrestre se hallan en el núcleo de nuestros conocimientos modernos acerca de las transformaciones conformes. La importancia de estas transformaciones es de preservar ángulos entre curvas y orientación, que nos será útil más adelante.

Recordemos que la transformación de Gauss de una superficie S con parametrización $x(u, v)$ es una transformación de la superficie S a $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$, la cual denotaremos por $G : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ el cual envía cada $p \in S$, al vector normal unitario N_p . En términos de la parametrización, podemos escribir $G(x(u, v)) = N(u, v)$ y, para una vecindad de S , pensar en $N(u, v)$ como una parametrización de una parte de la esfera \mathbb{S}^2 . También hay una transformación lineal inducida de planos tangentes dado, por la base $\{x_u, x_v\}$, por $G_*(x_u) = N_u$ y $G_*(x_v) = N_v$. Para entender esto, tenga en cuenta lo siguiente, Un vector tangente en S es el vector de velocidad de alguna curva en S , así que tomando N sólo a lo largo de la curva, se crea una nueva curva en la esfera \mathbb{S}^2 . El vector tangente de la nueva curva esférica es entonces, por definición, la imagen bajo G_* ver [[14] pág. 77.] de vector tangente de la curva original. Aplicando este razonamiento a las curvas paramétricas, vemos que $G_*(x_u) = N_u$ y $G_*(x_v) = N_v$.

Pero hay algo aún más especial en la transformación de Gauss de una superficie mínima. Con el fin de exponer el resultado, tenemos que recordar que una transformación lineal, en el caso en que las superficies en cuestión sean el plano euclidiano tenemos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **conforme** si, para $\rho > 0$ fijo se tiene que

$$T(x) \cdot T(y) = \rho^2 x \cdot y,$$

para todos los vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$. Si tenemos que T transforma el plano complejo en si mismo, para la conformidad de T en un punto p del plano, basta con que la derivada de T en ese punto sea diferente de cero. Veamos la siguiente

Proposición 2.34. *T es conforme si y solo si, para cada base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , $|T(v_1)| = \rho|v_1|$, $|T(v_2)| = \rho|v_2|$ y $T(v_1) \cdot T(v_2) = \rho^2 v_1 \cdot v_2$ para $\rho > 0$.*

Demostración. La transformación (\Rightarrow) se sigue de manera inmediata de la definición de que T es conforme. Para la transformación (\Leftarrow), escribamos $x = av_1 + bv_2$ y $y = cv_1 + dv_2$ con $x \cdot y = ac|v_1|^2 + (bc + ad)v_1 \cdot v_2 + bd|v_2|^2$. La linealidad de T nos da $T(x) = aT(v_1) + bT(v_2)$ y $T(y) = cT(v_1) + dT(v_2)$

con

$$\begin{aligned} T(x) \cdot T(y) &= ac|T(v_1)|^2 + (bc + ad)T(v_1) \cdot T(v_2) + bd|T(v_2)|^2 \\ &= ac\rho^2|v_1|^2 + (bc + ad)\rho^2v_1 \cdot v_2 + bd\rho^2|v_2|^2 \\ &= \rho^2x \cdot y. \end{aligned}$$

■

A las isometrías locales por definición preservan la longitud de curvas, y en analogía las transformaciones conformes se definirán aquellas que preservan los ángulos y orientación entre curvas.

Definición 2.35. Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \hat{S}$ es una **transformación conforme** si para todo $p \in S, v, w \in T_pS$ se tiene que

$$\langle d_{\varphi_p}(v_1), d_{\varphi_p}(v_2) \rangle = \rho^2(p)\langle v, w \rangle_p,$$

donde ρ^2 es una transformación diferenciable no nula sobre S ; se dice entonces que las superficies S y \hat{S} son conformes.

Cuando φ es una transformación de una superficie a otra, φ se dice *conforme* cuando la transformación inducida sobre vectores tangentes φ_* es conforme para cada punto de S . En tal caso, el factor ρ varía de un punto a otro y es, por lo tanto, una transformación de los parámetros de superficie u y v . Luego, escribimos $\rho(u, v)$ y se llama el *factor escalar*. Sin embargo, en cada plano tangente, ρ es constante.

Ejemplo 2.36. (La transformación de Gauss para el Helicoide) Consideremos el Helicoide $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Vamos a calcular $G_*(x_u) = N_u$ y $G_*(x_v) = N_v$.

En efecto, tenemos que

$$x_u = (\cos v, \sin v, 0), x_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

con $x_u \cdot x_v = 0$, $|x_u| = 1$ y $|x_v| = \sqrt{1 + u^2}$. Así, el vector normal unitario está dado por

$$N = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Tomando las derivadas parciales de N respecto de u y v , tenemos

$$N_u = \frac{(-u \sin v, u \cos v, 1)}{(1 + u^2)^{3/2}}, N_v = \frac{(\cos v, \sin v, 0)}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Además

$$|N_u| = N_u \cdot N_u = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+u^2} |x_u|,$$

y

$$|N_v| = N_v \cdot N_v = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{1+u^2} |x_v|.$$

Y, por supuesto $G_*(x_u) \cdot G_*(x_v) = N_u \cdot N_v = 0$. Lo que necesitábamos para que la transformación de Gauss sea conforme, cuyo factor escalar es $\rho(u, v) = \frac{1}{(1+u^2)}$.

El ejemplo anterior no es solamente un caso aislado, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.37. *Sea S una superficie mínima con parametrización isoterma $x(u, v)$. Entonces la transformación de Gauss de S es una transformación conforme*

Demostración. Por 2.34 lo que necesitamos probar es que $|G_*(x_u)| = \rho(u, v)|x_u|$, $|G_*(x_v)| = \rho(u, v)|x_v|$ y $G_*(x_u) \cdot G_*(x_v) = \rho^2(u, v)x_u \cdot x_v$. En efecto, como la parametrización es isoterma tenemos que $E = G$ y $F = 0$, obteniendo que $H = \frac{(e+g)}{2E}$, por otro lado

$$G_*(x_u) = N_u = -\frac{e}{E}x_u - \frac{f}{E}x_v, \quad \text{por 1.10}$$

$$G_*(x_v) = N_v = -\frac{f}{E}x_u - \frac{g}{E}x_v. \quad \text{por 1.11}$$

Usando coordenadas isotermas y tomando el producto punto tenemos:

$$|N_u|^2 = \frac{1}{E}[e^2 + f^2], \quad |N_v|^2 = \frac{1}{E}[f^2 + g^2]$$

$$N_u \cdot N_v = \frac{f}{E}[e + g]$$

Pero como S es mínima, $H = 0$, esto es, $e + g = 0$ entonces $e = -g$. Obteniendo así,

$$|N_u|^2 = \frac{1}{E}[e^2 + f^2] = |N_v|^2 \quad \text{y} \quad N_u \cdot N_v = 0.$$

Como $|\mathbf{x}_u| = \sqrt{E} = |\mathbf{x}_v|$ y $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, entonces la transformación de Gauss es conforme de acuerdo a la proposición 2.34, con factor escalar $\sqrt{e^2 + f^2}/E$

■

Ahora, veamos que el siguiente resultado muestra que la conformidad de la transformación de Gauss hace una caracterización en superficies mínimas.

Proposición 2.38. *Sea S una superficie con parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ cuya transformación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es conforme. Entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta: S es parte de la esfera \mathbb{S}^2 o bien S es una superficie mínima.*

Demostración. Como en los apartados anteriores desarrollamos fórmulas para superficies con $F = 0$, asumimos que $\mathbf{x}(u, v)$ también cumple esta propiedad. Como tenemos que la transformación de Gauss es conforme y $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, por conformidad de N tenemos que $N_u \cdot N_v = 0$. Usando las fórmulas 1.10 y 1.11 obtenemos que $f(Ge + Eg) = 0$. Por lo tanto cada $f = 0$ (en cada punto) ó $Ge + Eg = 0$ (igualmente en todas partes). Como $F = 0$, si pasa la última igualdad, lo que nos estaría diciendo es que $H = 0$ y se trataría, como ya sabemos, de una superficie mínima. Supongamos que no se cumple la segunda condición, es decir, que la superficie no es mínima y f debe ser cero. Usando éste hecho que $f = 0$ de nuevo por las fórmulas de aceleración 1.10 y 1.11 y conformidad tenemos

$$\frac{e^2}{E} = N_u \cdot N_u = \rho^2 E, \quad \frac{g^2}{G} = N_v \cdot N_v = \rho^2 G.$$

Despejando ρ^2 , tenemos que

$$\frac{e^2}{E^2} = \rho^2 = \frac{g^2}{G^2} \Rightarrow \frac{e}{E} = \pm \frac{g}{G}.$$

Supongamos que $\frac{e}{E} = -\frac{g}{G}$. Entonces $Ge = -Eg \Rightarrow Ge + Eg = 0$, lo cual muestra de nuevo que $H = 0$ y así S es una superficie mínima. Ahora supongamos que $\frac{e}{E} = \frac{g}{G}$ en todo punto de S y denotemos éste valor común por k . Como $f = 0$, otra vez por 1.10 y 1.11 nos dice que $N_u = -k\mathbf{x}_u$ y $N_v = -k\mathbf{x}_v$. Esto muestra que, en cada punto de S , los vectores tangentes \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son vectores propios del operador forma. Los valores propios asociados con los vectores propios del operador de forma son conocidos como las curvaturas principales máximas y mínimas en un punto. Por la situación

de arriba ambos valores propios son igual a k , por 1.33 todas las curvaturas principales en un punto son constantes. Por lo tanto cualquier punto en S es un punto umbilical. Pero como sabemos por 1.39 la única superficie no planar que cumple esto, es la esfera. ■

Como se tiene la existencia de coordenadas isotermas para cualquier superficie mínima regular S , es claro que S es localmente conforme a un plano, además por resultado de variable compleja toda transformación conforme preserva ángulos por ende las coordenadas isotermas también preservan ángulos, ésta es nuestra primera conexión entre geometría diferencial y análisis complejo. Ahora, si una superficie mínima puede ser representada por coordenadas isotermas, ¿podría también ser representada por una función holomorfa?

2.7. Construcción de la representación W.E.

Con la información que tenemos sobre superficies mínimas, coordenadas isotermas, funciones armónicas y funciones holomorfas así como también meromorfas, podemos construir la representación de Weierstrass- Enneper para superficies mínimas. En primer lugar sería bueno realizar un ejemplo.

Ejemplo 2.39. *Superficie de Enneper*⁶

La parametrización más común para la superficie de Enneper es

$$x(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2 \right)$$

⁶La superficie de Enneper fue descubierta en 1864 por Alfred Enneper. Ocho años después de su Doctorado, bajo la supervisión de Dirichlet en Göttingen, donde Enneper vivió toda su vida, de estudiante a profesor extraordinario.

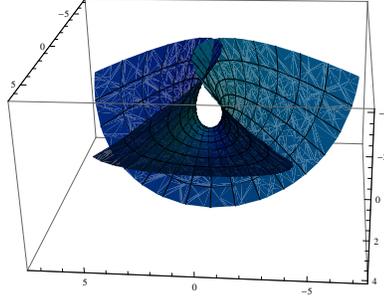


Figura 2.7: Superficie de Enneper.

Primero veamos que es una parametrización isoterma.

$$\mathbf{x}_u = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (2uv, -1 - u^2 + v^2, -2v)$$

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4)$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4)$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 2uv(1 - u^2 + v^2) - 2uv(-1 - u^2 + v^2) - 4uv = 0$$

Como $E = G$ y $F = 0$, $\mathbf{x}(u, v)$ es isoterma.

Sea $z = u + iv$ y $\phi = \mathbf{x}_u - i\mathbf{x}_v$. Entonces

$$\phi = (1 - u^2 + v^2 - i2uv, -2uv - i(-1 - u^2 + v^2), 2u + i2v)$$

$$= (1 - (u + iv)^2, i(1 + (u + iv)^2), 2(u + iv)) = (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z).$$

Note que $\phi^1(z) = 1 - z^2$, $\phi^2(z) = i(1 + z^2)$ y $\phi^3(z) = 2z$ son todas holomorfas, así la superficie de Enneper puede ser representada por funciones holomorfas.

Como vimos, la superficie de Enneper ofrece un ejemplo de como una superficie mínima puede ser representada por funciones holomorfas. Pero ahora nuestro objetivo es generalizar a todas las superficies mínimas.

2.7.1. De parametrizaciones isotermas a funciones holomorfas

Sea S una superficie mínima descrita por una parametrización isoterma $\mathbf{x}(u, v)$.

Sea $z = u + iv$, tenemos que $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$, $\bar{z} = u - iv$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})$. Note que, $z + \bar{z} = 2u$ y $z - \bar{z} = 2iv$, así

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Esto significa que $\mathbf{x}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, puede escribirse como

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})).$$

Consideraremos $x^i(z, \bar{z}) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ como una función con valores complejos la cual puede llegar a tomar valores reales y la derivada de la j -ésima componente es

$$x_z^j = \frac{\partial x^j}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u^j - ix_v^j).$$

Definamos

$$\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2, x_z^3), \quad (2.17)$$

De ahora en adelante usaremos la siguiente notación

$$(\phi)^2 = (x_z^1)^2 + (x_z^2)^2 + (x_z^3)^2,$$

y

$$|\phi|^2 = |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2;$$

donde $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$ es el módulo de z .

Entonces $(\phi^j)^2 = (x_z^j)^2 = (\frac{1}{2}(x_u^j - ix_v^j))^2 = \frac{1}{4}((x_u^j)^2 - (x_v^j)^2 - 2ix_u^j x_v^j)$, así

$$\begin{aligned} (\phi)^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 ((x_u^j)^2 - (x_v^j)^2 - 2ix_u^j x_v^j) \right) \\ &= \frac{1}{4} (|x_u|^2 - |x_v|^2 - 2ix_u \cdot x_v) \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF). \end{aligned}$$

Observación 2.40. Como x es isoterma, $(\phi)^2 = \frac{1}{4}(E - E) = 0$. Inversamente, si $(\phi)^2 = 0$ sus componentes real e imaginario deben ser cero, por lo tanto $E = G$ y $F = 0$. Entonces, si $(\phi)^2 = 0$, entonces la parametrización debe ser isoterma.

Con un análisis prácticamente análogo también podemos ver que

$$|\phi|^2 = \frac{E}{2} \neq 0. \quad (2.18)$$

Ahora veremos algunos resultados que nos llevarán a la relación de superficies mínimas con funciones holomorfas.

Lema 2.41. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta x$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} \right) + i \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - i \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + i \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \Delta x. \end{aligned}$$

■

Lema 2.42. La función f es analítica si y solo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Demostración. Sea $z = u + iv$, y denotemos a $f(u, v)$ como la función compleja $f(z) = a(z) + ib(z)$. Calculando las derivadas parciales complejas, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}(f_u + if_v) \\ &= \frac{1}{2}([a_u + ib_u] + i[a_v + ib_v]) \\ &= \frac{1}{2}([a_u - b_v] + i[a_v + b_u]).\end{aligned}$$

De aquí que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ si y sólo si $a_u - b_v = 0$ y $a_v - b_u = 0$, esto es, cuando se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Con estos resultados podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.43. *Supongamos que S es una superficie con una parametrización \mathbf{x} . Sea $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$ y suponga que $(\phi)^2 = 0$ (es decir \mathbf{x} es isoterma). Entonces M es mínima si y solo si cada ϕ^j es holomorfa.*

Demostración. Si S es mínima, entonces, por corolario 2.16, x^j es armónica para $j \in \{1, 2, 3\}$. x^j armónica implica que $\Delta \mathbf{x} = 0$ entonces $\frac{1}{4}\Delta \mathbf{x} = 0$ de ahí que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}) = 0$ por lema 2.42, entonces $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$. Por el teorema de análisis complejo, como $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}) = 0$, (ϕ^j) es holomorfa. Por otro lado si (ϕ^j) es holomorfa, entonces $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$ entonces $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}) = \frac{1}{4}\Delta \mathbf{x} = 0$ entonces $\Delta \mathbf{x} = 0$ esto implica que x^j es armónica, pero x^j es armónica implica que M es mínima. ■

Observación 2.44. *El resultado anterior dice que cualquier superficie mínima puede ser descrito en cada uno de sus puntos por una tripleta de funciones holomorfas $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ con $(\phi)^2 = 0$. Ahora, dada (ϕ) , ¿cómo es la parametrización isoterma \mathbf{x} para construir S ? El siguiente corolario del teorema 2.43 muestra que las componentes de (ϕ) se pueden integrar para obtener las componentes de \mathbf{x} .*

Corolario 2.45. $x^j(z, \bar{z}) = c_j + 2 \operatorname{Re}(\int \phi^j dz)$.

Demostración. $z = u + iv$ entonces $dz = du + idv$

$$\begin{aligned}\phi^j dz &= \frac{1}{2}(x_u^j - x_v^j)(du + idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du + ix_v^j dv) + i(x_u^j dv - x_v^j du)) \\ \phi^j d\bar{z} &= \frac{1}{2}(x_u^j + x_v^j)(du - idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du + x_v^j dv) - i(x_u^j dv - x_v^j du))\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial z} dz + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \phi^j dz + \bar{\phi}^j d\bar{z} = \frac{1}{2}(x_u^j du + x_v^j dv) + \frac{1}{2}(x_u^j du + x_v^j dv) = (x_u^j du + x_v^j dv) = 2 \operatorname{Re}(\phi^j dz)$ entonces $x^j = 2 \operatorname{Re}(\int \phi^j dz) + c_j$. ■

Ahora sabemos construir x si tenemos (ϕ) , pero

¿cómo es (ϕ) para superficies mínimas generales?

Lo que necesitamos es que cada componente de ϕ^j sea holomorfa y $(\phi)^2 = 0$.

Una bonita manera de construir (ϕ) es como sigue.

Supongamos que $\phi^1 \neq i\phi^2$. Sea $f = \phi^1 - i\phi^2$ y $g = \frac{\phi^3}{(\phi^1 - i\phi^2)}$

Como x es isoterma tenemos que

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0,$$

entonces

$$(\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) = -(\phi^3)^2. \quad (2.19)$$

Factorizando y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) &= -(\phi^3)^2 \\ (\phi^1 + i\phi^2) &= \frac{-(\phi^3)^2}{(\phi^1 - i\phi^2)} \\ \phi^1 + i\phi^2 &= -fg^2. \end{aligned}$$

Así, usando

$$f = \phi^1 - i\phi^2, g = \frac{\phi^3}{(\phi^1 - i\phi^2)} \quad \text{y} \quad fg^2 = \frac{(\phi^3)^2}{(\phi^1 - i\phi^2)}, \quad (2.20)$$

resolvemos para ϕ^1 , ϕ^2 y ϕ^3 .

$$\phi^1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \phi^2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \phi^3 = fg.$$

Note que f definida así, es analítica y g meromorfa. A demás, fg^2 es analítica ya que $fg^2 = -(\phi^1 + i\phi^2)$.

Entonces ϕ^1 , ϕ^2 y ϕ^3 son holomorfas y

$$(\phi)^2 = \frac{1}{4}f^2(1 - g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1 + g^2)^2 + f^2g^2 = 0. \quad (2.21)$$

En el caso cuando $\phi^1 = i\phi^2$, es decir, $\phi^1 - i\phi^2 = 0$, note que $0 = (\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) = -(\phi^3)^2$, ya sea f o g deben ser cero (o ambas).

Ahora, tenemos todo lo que necesitamos para entender las Representación de Weierstrass-Enneper para superficies mínimas.

La Representación de Weierstrass-Enneper para superficies mínimas

Teorema 2.46. La Representación de Weierstrass-Enneper I. Si f es holomorfa en un dominio D , g es meromorfa en D , y fg^2 es holomorfa en D , entonces una superficie mínima es definida por $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$, donde

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int f(1 - g^2)dz\right)$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int if(1 + g^2)dz\right)$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int 2fgdz\right).$$

En el ejemplo de las superficie de Enneper, necesitamos que $f = 1$ y $g = z$. Entonces $\phi = (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z) = (f(1 - g^2), if(1 + g^2), 2fg)$.

Otra, manera de escribir 2.46 es usando sólo una función holomorfa que es una composición de funciones. Si g es holomorfa con g^{-1} holomorfa, entonces sea $\tau = g$, lo cual significa que $\frac{d\tau}{dz} = \frac{dg}{dz}$, así $d\tau = dg$. Definamos $F(\tau) = f/\frac{dg}{dz} = f\frac{dz}{dg}$. Entonces $F(\tau)d\tau = f\left(\frac{dz}{dg}\right)(dg) = fdz$, sustituyendo τ por g y $F(\tau)d\tau$ por fdz en 2.46, obtenemos la siguiente versión de 2.46.

Teorema 2.47. La Representación de Weierstrass-Enneper II. Para cualquier función holomorfa $F(\tau)$, una superficie mínima es definida por $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$, donde

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int (1 - \tau^2)F(\tau)dz\right)$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int i(1 + \tau^2)F(\tau)dz\right)$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int 2\tau F(\tau) dz\right).$$

Note que

$$\phi = \left(\frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau), \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau), \tau F(\tau) \right).$$

Un buen ejemplo del uso del teorema 2.47 es el helicoides.

El helicoides

Un helicoides puede ser obtenido de $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$ donde $\tau = e^z$. Note que $\tau = e^z$, $\tau^{-1} = \operatorname{Log}(z)$, y $F(e^z) = \frac{i}{2e^{2z}}$ son todas holomorfas en el dominio de $\operatorname{Log}(z)$. Tenemos que usar $\operatorname{Log}(z)$ en lugar de $\log(z)$ porque $\operatorname{Log}(z)$ es la rama principal de log y ramas de log son holomorfas, pero \log no lo es. Ahora calculemos $x(u, v)$ como sigue:

$$\begin{aligned} x^1 &= \operatorname{Re}\left(\int (1 - \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2\tau} - \frac{i}{2}\tau\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2}(e^{-z} + e^z)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2}(e^{-(u+iv)} + e^{u+iv})\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2}(e^{-u}(\cos(-v) + i \sin(-v)) + e^u(\cos(v) + i \sin(v)))\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{2}e^{-u} \cos(-v) + \frac{1}{2}e^{-u} \sin(-v) - \frac{i}{2}e^u \cos(v) + \frac{1}{2}e^u \sin(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-u} \sin(-v) + \frac{1}{2}e^u \sin(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \operatorname{Re}\left(\int i(1 + \tau^2)\frac{i}{2\tau^2}d\tau\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2}\tau\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-z} - e^z)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-(u+iv)} - e^{u+iv})\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}(e^{-u}(\cos(-v) + i\sin(-v)) - e^u(\cos(v) + i\sin(v)))\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-u}\cos(-v) + \frac{i}{2}e^{-u}\sin(-v) - \frac{1}{2}e^u\cos(v) + \frac{i}{2}e^u\sin(v)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-u}\cos(-v) - \frac{1}{2}e^u\cos(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= \operatorname{Re}\left(\int 2\tau\left(\frac{i}{2\tau^2}\right)d\tau\right) \\
&= \operatorname{Re}(i\operatorname{Log}|\tau|) \\
&= \operatorname{Re}(i\operatorname{Log}|e^z|) \\
&= \operatorname{Re}(iz) \\
&= \operatorname{Re}(i(u + iv)) \\
&= \operatorname{Re}(iu - v) \\
&= -v
\end{aligned}$$

Así $\mathbf{x}(u, v) = (\frac{1}{2}e^{-u}\sin(-v) + \frac{1}{2}e^u\sin(v), \frac{1}{2}(e^{-u}\cos(-v) - e^u\cos(v)), -v)$ es una parametrización isoterma para el helicoido.

2.7.2. Puntos de ramificación

El teorema de Representación de Weierstrass-Enneper es importante, porque nos permite producir un ejemplo de una superficie mínima de cualquier par de funciones analíticas f y g , y por otra parte hacer gráficas de ellos siempre y cuando podamos calcular las integrales involucradas.

Definición 2.48. *La superficie mínima x tiene un punto de ramificado en z si $x_u(z) = x_v(z) = 0$ en z .*

Es decir, los puntos de ramificación son los puntos de no-regularidad en x . Pero ahora, ¿qué hacen los puntos de ramificación sobre f y g en la representación de Weierstrass-Enneper?

Primero, notemos que f es siempre analítica, pero g puede ser meromorfa. Como fg^2 es también analítica, si g tiene polos, éstos se corresponden con los ceros de f de al menos la mitad del orden de ceros de g , para que las funciones componente ϕ^i sean analíticas. Para que la tercera componente de $x(z)$ sea cero, necesitamos que f y g sea cero, y para que la primera componente sea cero, fg^2 también debe ser cero.

Por lo tanto, los puntos de ramificación de x son ceros simultáneamente de f y fg^2 .

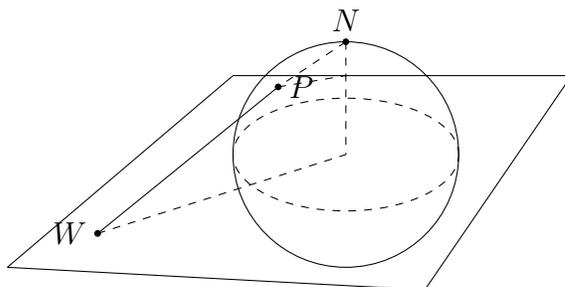
Note que podemos definir $f(z) = z^m$ para algún entero m y $g(z) = z$ en la representación de Weierstrass-Enneper y producir ejemplos de superficies mínimas con puntos de ramificación.

Los puntos de ramificación han sido importantes en casi todos los trabajos sobre superficies mínimas desde la solución del problema de Plateau. Para ver más sobre este tema véase [[8], pág. 56.] y [19].

El mapeo de Gauss de una superficie mínima tiene una descripción directa en términos de la representación Weierstrass-Enneper. Para ver esto veámos lo siguiente:

2.8. La proyección estereográfica

La proyección central desde el polo norte descrita en la siguiente figura sugiere que el plano complejo \mathbb{C} podemos pensarlo como \mathbb{S}^2 , la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 excluyendo el polo norte. De ahí que, de alguna forma, resulta natural pensar que el polo norte corresponde a un punto ideal que representa al infinito.



proyección estereográfica.

Definición 2.49. *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano extendido, denotado por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.*

Un modelo requerido muy común para incluir el punto al infinito, es la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , también conocida, como esfera de Riemann.

Para asociar cada punto en el plano con un punto en \mathbb{S}^2 usaremos ideas geométricas: Centremos a \mathbb{S}^2 en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 y consideremos el plano $z = 0$ como \mathbb{C} , ahora la línea que va de un punto $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ al polo norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ cruza \mathbb{C} en un único punto, para encontrar dicho punto vamos a parametrizar y vamos a tener que

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $[N + t(P - N)] \in \mathbb{C}$ entonces

$$[N + t(P - N)] \cdot N = 0,$$

$$1 + t(P - N) \cdot N = 0,$$

$$1 = t(1 - x_3),$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

De donde, el punto asociado a P es

$$\begin{aligned} & N + \frac{1}{1 - x_3}(P - N) \\ &= N + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \text{ ver figura anterior.} \end{aligned}$$

Así, para $w \in \mathbb{C}$ obtenemos que

$$w = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right) = \frac{x_1}{1 - x_3} + \frac{ix_2}{1 - x_3} = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

No es difícil ver que la proyección de P debe tener la dirección de (x_1, x_2) , además, por semejanza de triángulos obtenemos que

$$\frac{|w|}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3}$$

Con base a esto, definamos la función

$$\Psi : \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{como}$$

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Afirmación

Ψ definida así es una biyección entre $\mathbb{S}^2 \setminus N$ y \mathbb{C} .

Demostración.

- Ψ es inyectiva.

Para demostrarlo, observemos que, si $w = \Psi(x_1, x_2, x_3)$

$$|w|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

(ya que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$). De ahí que

$$\begin{aligned} (1 - x_3)|w|^2 &= 1 + x_3, \\ |w|^2 - x_3|w|^2 &= 1 + x_3, \\ |w|^2 &= 1 + x_3 + x_3|w|^2, \\ |w|^2 - 1 &= (1 + |w|^2)x_3, \end{aligned}$$

es decir:

$$x_3 = \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2}. \quad (2.22)$$

También, $w + \bar{w} = \frac{2x_1}{1 - x_3}$, por lo que,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(w + \bar{w})(1 - x_3)}{2} \quad \text{por } 2.22 = \frac{w + \bar{w}}{2} \left(1 - \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2} \right) \\ &= \frac{w + \bar{w}}{2} \left(\frac{2}{|w|^2 + 1} \right) = \frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}. \end{aligned}$$

De ahí que

$$x_1 = \frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}. \quad (2.23)$$

De forma análoga, $w - \bar{w} = \frac{2ix_2}{1-x_3}$, entonces

$$x_2 = \frac{w - \bar{w}}{i(|z|^2 - 1)}. \quad (2.24)$$

Por lo tanto Ψ es inyectiva, ya que w determina al punto $P = (x_1, x_2, x_3)$.

Observe que

$$\Phi(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}, \frac{w - \bar{w}}{i(|w|^2 - 1)}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right),$$

es inversa a la izquierda de Ψ .

- Ψ es sobreyectiva.

Dado $w \in \mathbb{C}$, haciendo unos cálculos, se puede ver que $\Phi(w) \in \mathbb{S}^2$. Si $\Phi(w) = \rho = (y_1, y_2, y_3)$ y $\Psi(\rho) = w'$ usando las ecuaciones 2.22, 2.23 y 2.24 tenemos

$$\begin{aligned} |w'| &= \frac{1 + y_3}{1 - y_3} = |w|, \\ \frac{2 \operatorname{Re} w'}{|w'|^2 + 1} &= y_1 = \frac{2 \operatorname{Re} w}{|w|^2 + 1}, \\ \frac{2 \operatorname{Im} w'}{i(|w'|^2 + 1)} &= y_2 = \frac{2 \operatorname{Im} w}{i(|w|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Re} w' = \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im} w' = \operatorname{Im} w, \quad \text{es decir}$$

$$w' = w$$

Por lo tanto Ψ es sobreyectiva y Φ es su inversa. ■

Así, haciendo corresponder ∞ con $(0, 0, 1)$ se obtuvo una biyección entre \mathbb{S}^2 y $\hat{\mathbb{C}}$. A tal biyección se le conoce como la **proyección estereográfica**.

Aprovechando de que ya hemos introducido la proyección estereográfica, veremos en seguida que la transformación de Gauss de una superficie mínima tiene una descripción directa en términos de la representación de

Weierstrass-Enneper I, además esto será importante más adelante cuando tratamos de entender si superficies mínimas siempre minimizan área.

Definamos una transformación

$$S_t : \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

y elijamos un punto

$$P = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \in \mathbb{S}^2 \setminus N.$$

Siguiendo la idea de la proyección estereográfica, la línea que une P y N está dada por

$$\gamma(t) = (0, 0, 1) + t(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v - 1).$$

La línea γ intersecta a \mathbb{R}^2 cuando la tercera coordenada es cero. Esto ocurre cuando $1 + t(\sin v - 1) = 0$ o $t = \frac{1}{\sin v - 1}$. Por lo tanto

$$S_t(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = \left(\frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\sin u \cos v}{1 - \sin v}, 0 \right).$$

Claramente, S_t es biyectiva, y en particular un mapeo uno a uno de $\mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$. Recordemos además que la transformación lineal inducida de vectores tangentes S_{t*} la podemos calcular simplemente tomando las derivadas parciales apropiadas de la imagen de las curvas u y v tenemos el siguiente.

Ejemplo 2.50. *Fijando v y diferenciando, obtenemos*

$$S_{t*}(x_u) = \left(\frac{-\sin u \cos v}{1 - \sin v}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \sin v}, 0 \right),$$

$$S_{t*}(x_v) = \left(\frac{\cos u}{1 - \sin v}, \frac{\sin u}{1 - \sin v}, 0 \right).$$

Tomando el producto punto en \mathbb{R}^3 , tenemos

$$S_{t*}(x_u) \cdot S_{t*}(x_u) = \frac{\cos^2 v}{(1 - \sin v)^2} = \frac{1}{(1 - \sin v)^2} x_u \cdot x_u,$$

$$S_{t*}(x_v) \cdot S_{t*}(x_v) = \frac{1}{(1 - \sin v)^2} = \frac{1}{(1 - \sin v)^2} x_v \cdot x_v,$$

$$S_{t*}(x_u) \cdot S_{t*}(x_v) = 0.$$

El factor $1/(1 - \sin v)$ muestra que la proyección estereográfica es una transformación conforme con factor escalar $1/(1 - \sin v)$

En particular la proyección estereográfica preserva los ángulos. En coordenadas cartesianas, proyección estereográfica está dada por

$$S_t(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right).$$

Como vimos, cuando introdujimos la proyección estereográfica, podemos identificar el plano real \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} y extender S_t a una transformación biyectiva $S_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$. Con estas identificaciones tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.51. *Sea S una superficie mínima con parametrización isoterma $\mathbf{x}(u, v)$ y representación de Weierstrass-Enneper (f, g) . Entonces la transformación de Gauss de S , $G : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ puede ser identificado con la función meromorfa g .*

Demostración. Recordemos que $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$ y $\bar{\phi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{z}}$ y

$$\phi^1 = \frac{1}{2}f(1-g^2), \phi^2 = \frac{i}{2}f(1+g^2), \phi^3 = fg.$$

Describiremos la transformación de Gauss en términos de ϕ^1, ϕ^2 y ϕ^3 . Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= ((\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^1, (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2, (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^3) \\ &= (x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2, x_u^3 x_v^1 - x_u^1 x_v^3, x_u^1 x_v^2 - x_u^2 x_v^1). \end{aligned}$$

Considerando la primera componente $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^1$. Tenemos

$$\begin{aligned} x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2 &= \text{Im}[(x_u^2 - ix_v^2)(x_u^3 + ix_v^3)], \\ &= \text{Im}\left[2\left(\frac{\partial x^2}{\partial z}\right) \cdot 2\frac{\partial x^3}{\partial \bar{z}}\right], \\ &= 4 \text{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^3). \end{aligned}$$

De forma similar, con la segunda componente tenemos

$$x_u^3 x_v^1 - x_u^1 x_v^3 = 4 \text{Im}(\phi^3 \bar{\phi}^1) \quad \text{y} \quad x_u^1 x_v^2 - x_u^2 x_v^1 = 4 \text{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^2)$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 4 \text{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^3, \phi^3 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2) = 2(\phi \times \bar{\phi}), \quad (2.25)$$

esto se sigue del hecho de que, $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$. Ahora, como $\mathbf{x}(u, v)$ es isoterma, $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |\mathbf{x}_u| \cdot |\mathbf{x}_v| = |\mathbf{x}_u|^2 = E = 2|\phi|^2$ por 2.18. Por lo tanto, tenemos

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{2(\phi \times \bar{\phi})}{2|\phi|^2} = \frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}.$$

Veamos ahora que, la transformación de Gauss $G : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ lo podemos dar en términos de la ϕ^i :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}(u, v)) &= S_t(N(u, v)), \\ &= S_t\left(\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}\right), \\ &= S_t\left(\frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}\right), \\ &= S_t\left(\frac{2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^3 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}\right) \text{ por 2.25,} \\ &= \left(\frac{2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3)}{|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im} \phi^1 \bar{\phi}^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(\phi^3 \bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im} \phi^1 \bar{\phi}^2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Esto se sigue del hecho de que

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-z} &= \frac{2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3)}{|\phi|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2 \operatorname{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}}, \\ &= 2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3) \cdot \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im} \phi^1 \bar{\phi}^2}, \\ &= \frac{2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3)}{|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im} \phi^1 \bar{\phi}^2}. \end{aligned}$$

Y similarmente para $y/(1-z)$. Identificando los punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x + iy \in \mathbb{C}$ podemos escribir

$$G(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3) + 2i(\phi^3 \bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im} \phi^1 \bar{\phi}^2}.$$

Ahora, denotemos por \mathfrak{N} al numerador de la fracción anterior

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= 2 \operatorname{Im}(\phi^2 \bar{\phi}^3) + 2i(\phi^3 \bar{\phi}^1), \\
&= \frac{1}{i}[\phi^2 \bar{\phi}^3 - \phi^2 \bar{\phi}^3] + \frac{1}{i}[i(\phi^3 \bar{\phi}^1 - \phi^3 \bar{\phi}^1)], \\
&= \frac{1}{i}[\phi^2 \bar{\phi}^3 - \phi^2 \bar{\phi}^3 + i\phi^3 \bar{\phi}^1 - i\phi^3 \bar{\phi}^1], \\
&= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) - \bar{\phi}^3(\phi^1 + i\phi^2).
\end{aligned}$$

Además, $0 = (\phi)^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = (\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) + (\phi^3)^2$ por 2.19, así

$$\phi^1 + i\phi^2 = \frac{-(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) - \bar{\phi}^3 \frac{-(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2}, \\
&= \frac{\phi^3[(\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) + |\phi^3|^2]}{\phi^1 - i\phi^2}, \\
&= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi^1|^2 + |\phi^2|^2 + |\phi^3|^2 + i(\bar{\phi}^2 \phi^1 - \phi^2 \bar{\phi}^1)], \\
&= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi|^2 - 2 \operatorname{Im}(\phi^1 \bar{\phi}^2)].
\end{aligned}$$

Como se observa el segundo factor de \mathfrak{N} cancela el denominador de $G(x(u, v))$ y terminamos con que

$$G(x(u, v)) = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Y por 2.20 sabemos que $g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$. ■

2.9. La representación W-E siempre da una superficie mínima

En el ejemplo 2.39 se analizó que la superficie de Enneper ofrece un ejemplo de como una superficie mínima puede ser representada por funciones holomorfas. Podríamos preguntarnos si el inverso es válido, es decir, dada ϕ , ¿se puede derivar la superficie de Enneper?

2.9 La representación W-E siempre da una superficie mínima 77

Weierstrass descubrió que si es posible obtener la superficie de Enneper dada la función ϕ .

Sabemos que $\phi = x_u - ix_v$ y $\phi^1(z) = 1 - z^2$, $\phi^2(z) = i(1 + z^2)$ y $\phi^3(z) = 2z$, nosotros queremos $x(u, v)$ en valores reales.

$\begin{aligned} \text{Sea } x^1 &= \text{Re}(\int (1 - z^2) dz) \\ &= \text{Re}(z - \frac{1}{3}z^3) \\ &= \text{Re}(u + iv - \frac{1}{3}(u + iv)^3) \\ &= u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x^2 &= \text{Re}(\int i(1 + z^2) dz) \\ &= \text{Re}(i(z + \frac{1}{3}z^3)) \\ &= \text{Re}(i(u + iv - \frac{1}{3}(u + iv)^3)) \\ &= -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x^3 &= \text{Re}(\int 2z dz) \\ &= \text{Re}(z^2) \\ &= \text{Re}((u + iv)^2) \\ &= u^2 - v^2 \end{aligned}$
---	---	---

Entonces, obtenemos que $x(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2)$, la cual es, la superficie de Enneper!

Ahora nuestra pregunta sería más general ¿El inverso del teorema de La representación de Weierstrass Enneper es válido? La respuesta es que si es válido, es decir, La representación de Weierstrass Enneper siempre da una superficie mínima.

El siguiente lema da la propiedad clave de la Representación Weierstrass-Enneper.

Lema 2.52. Para $\phi = [\frac{1}{2}f(1 - g^2), \frac{i}{2}f(1 + g^2), fg]$, las siguientes afirmaciones son ciertas.

$$(1) (\text{Re } \phi)^2 - (\text{Im } \phi)^2 = 0$$

$$(2) (\text{Re } \phi)^2 \cdot (\text{Im } \phi)^2 = 0.$$

Demostración. Primero notemos que por 2.21 $\phi^2 = 0$. Por lo tanto, obtenemos

$$0 = \text{Re } \phi^2 = (\text{Re } \phi)^2 - (\text{Im } \phi)^2,$$

pues $\text{Re}(a + ib)^2 = a^2 - b^2$. Similarmente

$$0 = \text{Im } \phi^2 = 2(\text{Re } \phi) \cdot (\text{Im } \phi),$$

ya que $\text{Im}(a + ib)^2 = 2ab$. ■

Ahora damos el resultado principal.

Teorema 2.53. Para funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ como en 2.46, la superficie $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$, es mínima, donde

$$x^1(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int f(1 - g^2)dz\right)$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int if(1 + g^2)dz\right)$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int 2fgdz\right).$$

Demostración. Para una superficie $\mathbf{x}(z)$ en \mathbb{R}^3 , la curvatura media H está dada por

$$H = P_{\perp} \frac{x_v^2 x_{uu} - 2(x_u \cdot x_v) x_{vv} + x_u^2 x_{vv}}{x_u^2 x_v^2 - (x_u \cdot x_v)^2}, \quad (2.26)$$

donde P_{\perp} denota la proyección sobre la línea normal a la superficie y los sub-índices u, v como ya sabemos denotan la diferenciación parcial con respecto a las partes real e imaginaria de z .

Denotemos por Φ cada integral de ϕ entonces, haciendo cálculos tenemos que

$$x_u = \operatorname{Re}[\Phi_u] = \operatorname{Re}\left[\frac{d\Phi}{dz} \frac{\partial z}{\partial u}\right] = \operatorname{Re} \phi, \quad (2.27)$$

como $z = u + iv$ así $\frac{\partial z}{\partial u} = 1$. Similarmente

$$x_v = \operatorname{Re}[\Phi_v] = \operatorname{Re}\left[\frac{d\Phi}{dz} \frac{\partial z}{\partial v}\right] = \operatorname{Re}(i\phi) = -\operatorname{Im}\phi, \quad (2.28)$$

ya que $\operatorname{Re}[i(a + ib)] = -b$. Por 2.52 (2), tenemos

$$x_u \cdot x_v = 0, \quad (2.29)$$

como

$$x_u^2 = \operatorname{Re}(\phi)^2, \quad (2.30)$$

y

$$x_v^2 = \operatorname{Im}(\phi)^2, \quad (2.31)$$

por 2.52 (1), tenemos que

$$x_u^2 = x_v^2. \quad (2.32)$$

Además, como

$$x_{uu} = \frac{dx_u}{du} = \frac{dx_u}{dz} \frac{\partial z}{\partial u} = \operatorname{Re}(\phi') \quad (2.33)$$

y

$$x_{vv} = \frac{dx_v}{dv} = \frac{dx_v}{dz} \frac{\partial z}{\partial v} = -\operatorname{Re}(\phi'), \quad (2.34)$$

por lo tanto,

$$x_{vv} + x_{uu} = 0. \quad (2.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.29, 2.32 y 2.35) en la formula 2.26 obtenemos que $H = 0$, por tanto, por definición la superficie mínima $x(z, \bar{z})$ es mínima.

■

Observación 2.54. *En realidad se puede admitir que $g(z)$ tenga polos, siempre y cuando fg^2 sea analítica.*

2.10. Superficie mínima no minimiza área

El valor real de la representación Weierstrass-Enneper es que uno puede analizar muchos aspectos de superficies mínimas directamente de las funciones (f, g) y $F(\tau)$. Esto aplicado inclusive a superficies cuyas integrales de la representación Weierstrass-Enneper no puedan ser explícitamente calculables. Como por ejemplo, podremos calcular la curvatura de Gauss K de una superficie mínima en términos de $F(\tau)$. Notemos que por el teorema 1.40, dada en parámetros isotermos

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{E} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} \ln E + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln E \right) \\ &= -\frac{1}{2E} \Delta(\ln E), \end{aligned}$$

donde, recordemos que Δ es el operador de Laplace. Además, por 2.18 tenemos que $E = 2|\phi|^2$, también

$$\phi = \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau), \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau), \tau F(\tau).$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} E &= \left[\left| \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau) \right|^2 + \left| \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau) \right|^2 + \left| \tau F(\tau) \right|^2 \right] \\ &= |F|^2[u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 1 + 2u^2 + 2v^2] \\ &= \frac{1}{2}|F|^2[|\tau^2 - 1|^2 + |1 + \tau^2|^2 + 4|\tau|^2]. \end{aligned}$$

Ahora, $\tau^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$, así $|\tau^2 - 1| = |u^2 - v^2 + 2iuv - 1| = (u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2$. Similarmente $|1 + \tau^2| = (u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2$ y $4|\tau|^2 = 4(u^2 + v^2)$. De ahí que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}|F|^2[2(u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 1 + 8u^2v^2) + 4u^2 + 4v^2] \\ &= |F|^2[u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 1 + 2u^2 + 2v^2] \\ &= |F|^2[u^2 + v^2 + 1]^2. \end{aligned}$$

Ahora $\ln E = \ln |F|^2 + 2 \ln(u^2 + v^2 + 1)$ derivando es fácil ver que

$$\Delta(2 \ln(u^2 + v^2 + 1)) = \frac{8}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

Calculemos ahora $\Delta(\ln |F|^2)$

$$\Delta(\ln |F|^2) = \Delta(\log F \bar{F}) = \Delta(\log F + \log \bar{F}).$$

Previamente por 2.42, vimos que $\Delta = \frac{4\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}$. Además, como F es holomorfa, \bar{F} no lo es, así $\frac{\partial\bar{F}}{\partial z} = 0$ y, consecuentemente, $\frac{\partial\log\bar{F}}{\partial z} = 0$. Nos quedamos con $\Delta(\log F) = \frac{4\partial^2(\log F)}{\partial\bar{z}\partial z} = \frac{4\partial(F'/F)}{\partial\bar{z}} = 0$, ya que F, F' y, por tanto $\frac{F'}{F}$ son holomorfas. En consecuencia, $\Delta(\ln |F|^2) = 0$ y $\Delta(\ln E) = \frac{8}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$. Con todo lo anterior damos la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.55. *La curvatura de Gauss de la superficie mínima determinada por la representación Weierstrass-Enneper II es*

$$K = \frac{-4}{|F|^2(u^2 + v^2 + 1)^4}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2E}\Delta(\ln E) \\ &= \frac{-8}{2|F|^2(u^2 + v^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-4}{|F|^2(u^2 + v^2 + 1)^4}. \end{aligned}$$

En esta parte se dan ideas generales de lo ya conocido, de que una superficie mínima no siempre minimiza el área, y damos unos ejemplos de este hecho. Con el fin de entender lo que realmente está sucediendo, daremos un método general para analizar esto. Nuestra versión fue tomada de [[14], pág. 242.]

Empecemos con una superficie mínima $S : \mathbf{x}(u, v)$ en la cual se considera una curva de Jordan (es decir; curva cerrada simple) y tomemos una familia de superficies $\mathbf{y}^t = \mathbf{x}(u, v) + tV(u, v)$, donde $V(u, v) = \rho N(u, v)$ es un campo vectorial normal en S de longitud variante $\rho(u, v)$ que es una función de clase \mathcal{C}^2 con $\rho(C) = 0$. Calculando $\mathbf{y}_u^t = \mathbf{x}_u + t(\rho_u N + \rho N_u)$, $\mathbf{y}_v^t = \mathbf{x}_v + t(\rho_v N + \rho N_v)$. y $\mathbf{y}_u^t \times \mathbf{y}_v^t = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v + t[\mathbf{x}_u \times V_v + v_u \times x_v] + t^2 V_u \times V_v$.

Usando los conocimientos a cerca de superficies mínimas que tenemos hasta ahora los cálculos hechos en [14] se simplifican. En particular, podemos tomar una parametrización isoterma $\mathbf{x}(u, v)$. Por lo tanto, $E = G$, $F = 0$, $e = -g$ por 2.13, $K = -(e^2 + f^2/E^2)$, $|N_u| = |N_v| = \sqrt{e^2 + f^2}/\sqrt{E}$ y $N_u \cdot N_u = (e^2 + f^2)/E = N_v \cdot N_v$ esto es por 1.10 y 1.11 de esto tenemos que. Los coeficientes de la primera forma fundamental de \mathbf{y}^t es

$$E^t = \langle \mathbf{y}_u^t, \mathbf{y}_u^t \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + 2t(\rho_u \langle N, \mathbf{x}_u \rangle + \rho \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle) + t^2(\rho_u^2 \langle N, N \rangle) + \rho \langle N_u, N_u \rangle \quad (2.36)$$

$$E^t = E + 2t(-\rho e) + t^2(\rho_u^2 - \rho EK), \quad (2.37)$$

ya que $N_u \cdot N_u = (e^2 + f^2)/E$ y $K = -(e^2 + f^2/E^2)$.

De forma similar

$$G^t = E + 2t(\rho e) + t^2(\rho_v^2 - \rho EK) \quad (2.38)$$

$$F^t = t(-2\rho f) + t^2(\rho_u \rho_v) \quad (2.39)$$

Así, el determinante de la primera forma fundamental de \mathbf{y}^t es

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= E^2 + t^2(E(\rho_u^2 + \rho_v^2) - 4\rho^2 e^2 - 4\rho^2 f^2 - 2E^2 K) + O(t^3) \\ &= E^2 + t^2(E(\rho_u^2 + \rho_v^2)) + 2\rho^2 E^2 K + O(t^3). \end{aligned}$$

Donde $O(t^3)$ denota los términos que involucran potencias de t mayores o iguales que tres.

El área de y^t es

$$A(t) = \int \int \sqrt{E^2 + t^2(E(\rho_u^2 + \rho_v^2)) + 2\rho^2 E^2 K} + O(t^3) dudv.$$

Supongamos ahora que el integrando tiene el desarrollo en serie de Taylor $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ alrededor del cero. Tomando la raíz e igualando los coeficientes, tenemos

$$a_0 = E, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}(\rho_u^2 + \rho_v^2 + 2\rho^2 EK)$$

Por lo tanto, obtenemos

$$A(0) = \text{area}(x(\mathcal{R})). \quad (2.40)$$

Donde \mathcal{R} es una región del *plano* $-(u, v)$.

$$A'(0) = 0, \quad (2.41)$$

ya que estamos suponiendo que S es mínima.

$$A''(0) = \int \int_{\mathcal{R}} (\rho_u^2 + \rho_v^2 + 2\rho^2 EK) dudv \quad (2.42)$$

Además, supongamos que las coordenadas isotérmicas provienen de una representación de Weierstrass-Enneper II. Previamente calculamos que

$$K = \frac{-4}{|F|^2(u^2 + v^2 + 1)^4} \text{ y } E = |F|^2[u^2 + v^2 + 1]^2.$$

Sustituyendo esto en $A''(0)$, obtenemos

$$A''(0) = \int \int_{\mathcal{R}} \frac{-8\rho^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} + \rho_u^2 + \rho_v^2 dudv.$$

Note que la expresión de $A''(0)$ no depende de la representación de Weierstrass-Enneper. Solamente depende de la región \mathcal{R} y la elección de la función ρ en la región. Por lo tanto, si encontramos una función ρ con $\rho(C) = 0$ definida en \mathcal{R} tal que $A''(0) < 0$, entonces la superficie mínima S no puede tener área mínima entre las superficies delimitadas por C . Esto no lleva al siguiente teorema.

Teorema 2.56. (*Schwarz*) Sea S una superficie mínima delimitada por una curva C . Si el disco cerrado $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ está contenido en el interior de \mathcal{R} , entonces existe la función ρ para la cual $A''(0) < 0$. Por lo tanto, S no tiene área mínima entre las superficies delimitadas por C .

Una vez más, el punto clave aquí es que la representación de Weierstrass-Enneper no es sólo un montón de fórmulas, sino una representación de la superficie mínima que nos ofrece información geométrica de la superficie directamente. Describiendo S en términos de la representación de Weierstrass-Enneper II, identificamos los parámetros u y v con la parte real e imaginaria de la variable compleja τ . Por supuesto, τ se identifica con la función g de la representación de Weierstrass-Enneper I la cual, a su vez vimos en 2.51 es la transformación de Gauss seguido por la proyección estereográfica. Por lo tanto, como la proyección del polo norte proyecta el hemisferio inferior de \mathbb{S}^2 en el disco D , \mathcal{R} contiene D en su interior precisamente cuando la imagen de la transformación de Gauss de S contiene el hemisferio inferior de \mathbb{S}^2 en su interior. Por supuesto no hay nada especial a cerca de la proyección estereográfica de el polo norte, ya que se puede hacer desde cualquier punto de la esfera, así, tenemos la siguiente versión geométrica del teorema de Schwarz.

Teorema 2.57. Sea S una superficie mínima delimitada por una curva C . Si la imagen de la transformación de Gauss de S contiene un hemisferio de \mathbb{S}^2 en su interior, entonces S no tiene área mínima entre las superficies delimitadas por C .

Para ver la demostración del teorema 2.56 véase [[14], pág. 246.]

Pasemos a dar al menos un ejemplo de lo discutido anteriormente.

Ejemplo 2.58. La *superficie de Enneper* $x(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2)$, no tiene auto-intersecciones para $u^2 + v^3 < 3$ y su mapeo de Gauss restringido a $u^2 + v^3 < 3$ cubre más que un hemisferio de \mathbb{S}^2 [ver [14] pág. 248], por el teorema anterior, inferimos que la superficie de Enneper no minimiza área entre todas las superficies delimitadas por C dadas mediante la aplicación de la parametrización x al círculo $u^2 + v^2 = R^2$, donde $1 < R < \sqrt{3}$. Por supuesto por el teorema de Douglas-Radó que se verá en el último capítulo existe una superficie con menor área (por lo tanto mínima) delimitada por C . Por lo tanto existen dos superficies mínimas delimitadas por C . De ahí que la cuestión de unicidad al problema de Plateau es delicado.

Capítulo 3

Teorema de Bernstein

3.1. Introducción

Durante el transcurso del siglo XX, dos grandes ejes han desempeñado un papel fundamental en la evolución de la teoría de superficies mínimas. El primero, el trabajo que se hizo en el problema de Plateau, que culminó en 1936 cuando Jesse Duglas dá la solución a dicho problema.

El segundo fue que entre 1910 y 1916 apareció la obra de S. Bernstein (1880-1968), como parte de un enfoque totalmente novedoso utilizando ecuaciones diferenciales parciales, que dió lugar al famoso Teorema de Bernstein.

Se plantea la siguiente pregunta natural :¿existe una función $z = f(x, y)$ que satisfaga la ecuación de superficie mínima 2.3 y esté definida en todo el plano \mathbb{R}^2 ? Obviamente, cualquier función lineal (específicamente le plano) es solución a esta ecuación. ¿Existen otras soluciones no triviales? Este es llamado el *Problema de Bernstein*. Resulta que en \mathbb{R}^3 no existen otras gráficas completas, es decir, definidas en todo el plano que sean superficies mínimas, de ahí que la única solución a la ecuación de superficie mínima sobre todo el plano es la solución trivial: una función lineal, esto dio a toda la teoría una nueva dirección.

La historia posterior a estos dos problemas nos proveen de una gran visión de tal forma que, un solo resultado puede tener una poderosa influencia sobre el curso futuro de las matemáticas.

En el caso de teorema de Bernstein que se discutirá en éste capítulo las dos direcciones obvias para la generalización era hacia una clase más amplia de ecuaciones, y para dimensiones superiores. Ambas tardaron tiempo ya que la

prueba original de Bernstein no se prestaba fácilmente para generalizaciones de cualquier tipo.

3.2. Preliminares

Definición 3.1. Sea $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ y D un dominio en el plano x_1, x_2 , entonces la superficies S definida por

$$x_k = f_k(x_1, x_2) \quad , \quad 3 \leq k \leq n$$

para $(x_1, x_2) \in D$ y f_k transformación diferenciable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es una forma no-paramétrica.

Notemos que si el dominio cambia, si es por ejemplo el plano (x_i, x_j) donde $i \neq j$ y $i, j \neq 1, 2$ siempre podemos cambiar el nombre de ellos para obtener de cualquier modos $i = 1$ y $j = 2$.

Proposición 3.2. Sea S una superficie definida por $\mathbf{x}(u) \in \mathcal{C}^r$ y sea S regular en un punto a . Entonces existe una vecindad Ω con $a \in \Omega$ tal que la superficie Σ obtenida mediante la restricción $\mathbf{x}(u)$ a Ω tiene una reparametrización $\tilde{\Sigma}$ en forma no-paramétrica.

Demostración. Como S es regular existen índices i, j tal que

$$\det \left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right) \neq 0, \text{ utilizando el teorema de la función inversa obtenemos}$$

que, existe una vecindad Ω con $a \in \Omega$, donde el mapeo $(u_1, u_2) \mapsto (x_i, x_j)$ es un difeomorfismo.

Como $\mathbf{x}(u) \in \mathcal{C}^r$, tenemos que el mapeo inverso $(x_i, x_j) \mapsto (u_1, u_2)$ es \mathcal{C}^r , y por lo tanto lo mismo vale para la composición $(x_i, x_j) \mapsto (u_1, u_2) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Cambiando el nombre de los índices si es necesario, esto define nuestra superficie en forma no-paramétrica ■

Lema 3.3. Sea S una superficie definida por una parametrización isoterma $\mathbf{x}(u)$, y sea \tilde{S} una reparametrización de S definida por un difeomorfismo $u(\tilde{u})$ con matriz U . Entonces \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 son parámetros isotermos si y solo si la transformación U es conforme o anticonforme.

La demostración del lema anterior puede encontrarse en [[15] pág 33].

Lema 3.4. Sea $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 en un dominio convexo D , y supongamos que la Matriz hessiana $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ evaluada en cualquier punto es definida positiva. Defina una transformación $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\phi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial E}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$. Sean a y b dos puntos distinto de D ; entonces

$$(b - a) \cdot (\phi(b) - \phi(a)) > 0.$$

Demostración. Sea $G(t) = E(tb + (1 - t)a) = E(tb_1 + (1 - t)a_1, tb_2 + (1 - t)a_2)$ para $t \in [0, 1]$. Entonces

$$G'(t) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i}(tb + (1 - t)a) \right) (b_i - a_i),$$

y

$$G''(t) = \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(tb + (1 - t)a) \right) (b_i - a_i)(b_j - a_j).$$

Pero esto es justamente la forma cuadrática de $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ evaluado en el punto $tb + (1 - t)a$, aplicado al vector no cero $b - a$. Como la matriz hessiana es definida positiva, $G''(t) > 0$ para $t \in [0, 1]$. Así $G'(1) > G'(0)$, pero

$$G'(0) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i}(a) \right) (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^2 \phi(a)_i (b_i - a_i),$$

$$G'(1) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i}(b) \right) (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^2 \phi(b)_i (b_i - a_i),$$

lo que implica que $\sum_{i=1}^2 \phi(b)_i (b_i - a_i) > \sum_{i=1}^2 \phi(a)_i (b_i - a_i)$, con lo cual tenemos que

$$(\phi(b) - \phi(a)) \cdot (b - a) > 0. \quad \blacksquare$$

Lema 3.5. Bajo las mismas hipótesis del lema 3.4. Definamos una transformación $\xi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\xi_i(x_1, x_2) = x_i + \phi_i(x_1, x_2)$. Entonces para puntos distintos $a, b \in D$, tenemos

$$(\xi(b) - \xi(a)) \cdot (b - a) > |(b - a)|^2, \quad y \quad |\xi(b) - \xi(a)| > |b - a|.$$

Demostración. Como $\xi(b) - \xi(a) = (b - a) + (\phi(b) - \phi(a))$, tenemos que $(\xi(b) - \xi(a)) \cdot (b - a) = |b - a|^2 + (\phi(b) - \phi(a)) \cdot (b - a) > |b - a|^2$. Por lema 3.4, $|b - a|^2 < |\xi(b) - \xi(a)| \cdot |b - a| \leq |\xi(b) - \xi(a)| |b - a|$, ésta última desigualdad es debida a Cauchy-Schwarz; así $|\xi(b) - \xi(a)| > |b - a|$. ■

Lema 3.6. *Bajo las mismas hipótesis del lema 3.5. Si D es el disco $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, entonces la transformación ξ es un difeomorfismo de D en el dominio Δ el cual incluye un disco de radio R alrededor de $\xi(0)$.*

Demostración. Tenemos que la transformación ξ es continuamente diferenciable ya que $E \in \mathcal{C}^2$. Además como el Hessiano H de E es definido positivo, así E es convexo y

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} & 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = 1 + \Delta E + \det(H) > 0.$$

Por lo tanto la transformación es inyectiva en todo D que está en el mismo dominio Δ , y la inversa también es continuamente diferenciable, por lo tanto es difeomorfismo. Ahora, necesitamos mostrar que todo ξ tal que $|\xi - \xi(0)| < R$ está en Δ . Supongamos que Δ no es todo el plano \mathbb{R}^2 ya que si lo fuera sería trivialmente cierto lo que queremos probar.

Sea $\mu = \min_{\xi \in \Delta^c} \{d(\xi, \xi(0))\}$, es decir; el punto fuera de Δ el cual minimiza la distancia a $\xi(0)$.

También sea $\{\mu_k\} \subseteq \Delta$ una sucesión de puntos tal que $\mu_k \rightarrow \mu$ cuando $k \rightarrow \infty$, sea y_k sus correspondientes puntos en D , así $\xi(y_k) = \mu_k$. Si $\{y_k\}$ tiene un punto límite en D , entonces la imagen del punto límite sería μ ya que ξ es continua. Pero $\mu \notin \Delta$ lo cual es una contradicción, así que debemos tener que $y \in D^c$, es decir; que $|y_k| \geq R$. Pero entonces

$$|\mu - \xi(0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k - \xi(0)| > \lim_{k \rightarrow \infty} |y_k - 0| = |y| \geq R.$$

Esto significa que no existen puntos fuera de Δ a una distancia más cerca de $\xi(0)$ que de R , lo que se quería probar. ■

Lema 3.7. *Sea $f(x_1, x_2)$ una solución a la ecuación no paramétrica a la ecuación de superficie mínima en el disco de radio R alrededor del origen. Entonces la transformación ξ definido anteriormente es un difeomorfismo en un dominio Δ el cual incluye un disco de radio R alrededor de $\xi(0)$.*

Demostración. Se sigue de 2.14 que existe una función E que satisface $\frac{\partial E}{\partial x_1} = F$ y $\frac{\partial E}{\partial x_2} = G$, por la misma razón que existen F y G . Entonces $E \in \mathcal{C}^2$, y $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{1+p^2}{W} > 0$, y $\det \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(F,G)}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$. Podemos ver que la transformación ξ es el mismo definido en 3.5, así que por lema 3.6, tenemos que ξ es un difeomorfismo en un dominio Δ el cual incluye un disco de radio R alrededor de $\xi(0)$. ■

3.3. Teorema de Bernstein

Este primer lema asumirá que estamos en \mathbb{R}^3 , mientras que el segundo no hace ninguna restricción en la dimensión.

Lema 3.8. *Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 . Entonces la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ definida en forma no paramétrica por $x_3 = f(x_1, x_2)$ se encuentra en un plano si y sólo si existe una transformación lineal no singular $x : U \rightarrow D$ del mismo dominio U tal que u_1, u_2 son parámetros isotermos en S .*

Demostración. Supongamos que tenemos tal transformación, es decir tales parámetros u_1, u_2 existen. Sea $\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$, para $1 \leq k \leq 3$, notemos que ϕ_1 y ϕ_2 son constantes ya que x_1 y x_2 son lineales en u_1, u_2 . Como estamos suponiendo que u_1, u_2 son isotermas si y solo si $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\zeta) = 0$ para todo ζ , así ϕ_3 también es constante (ya que lo anterior nos diría que ϕ_3^2 es constante, lo que obliga a un máximo de dos valores, y como ϕ_3 debe ser continua, también debe ser constante). Esto significa que x_3 tiene gradiente constante con respecto a u_1 y u_2 y de nuevo por la linealidad de la transformación, también es constante con respecto a x_1 y x_2 . Esto significa que debemos tener $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$; pero esta es la ecuación de un plano.

Por otro lado, si $f(x_1, x_2)$ es un plano, entonces $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$ para algunas constantes A, B y C . Entonces la transformación $x(u_1, u_2) = (\lambda Au_1 + Bu_2, \lambda Bu_1 - Au_2)$ con $\lambda^2 = \frac{1}{1+A^2+B^2}$, es isoterma. Para ello, veamos que:

$$\phi_1 = \lambda A - iB, \phi_2 = \lambda B + iA, \phi_1^2 = \lambda^2 A^2 - B^2 - 2\lambda ABi, \phi_2^2 = \lambda^2 B^2 - A^2 + 2\lambda ABi. x_3 = Ax_1 + Bx_2 + C = A(\lambda Au_1 + Bu_2) + B(\lambda Bu_1 - Au_2) + C, \text{ así } \phi_3 = \lambda(A^2 + B^2) \text{ y } \phi^2 = \lambda^2(A^2 + B^2)^2.$$

$$\text{Entonces } \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \lambda^2(A^2 + B^2) - (A^2 + B^2) + \lambda^2(A^2 + B^2)^2 = (A^2 + B^2)(\lambda^2 - 1 + \lambda^2(A^2 + B^2)) = (A^2 + B^2)(\lambda^2(1 + A^2 + B^2) - 1) =$$

$(A^2 + B^2)(1 - 1) = 0$, así la transformación $x(u_1, u_2)$ es isoterma. \blacksquare

Teorema 3.9. *Sea $f(x_1, x_2)$ una solución a la ecuación de superficie mínima en todo el plano x_1, x_2 . Entonces, existe una transformación lineal no singular*

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = au_1 + bu_2 \quad \text{con } b > 0, \quad (3.1)$$

tal que u_1, u_2 son parámetros isotermos en todo el u -plano para la superficie mínima definida por $x_k = f_k(x_1, x_2)$, ($3 \leq k \leq n$).

Demostración. Por lema 3.7, la transformación ξ es un difeomorfismo de todo el plano x_1, x_2 en todo el plano ξ_1, ξ_2 . Sabemos además de acuerdo a 2.14 y 2.15, que definiendo

$$\xi_1 = x_1 + F(x, x_2) \quad \text{y} \quad \xi_2 = x_2 + G(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

Encontramos que el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 2 + \frac{2 + p^2 + q^2}{W} \geq 2 > 0.$$

Así que la transformación 3.2 tiene una inversa local $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (x_1, x_2)$, y estableciendo $x_k = f_k(x_1, x_2)$ para $k = 3, \dots, n$ parámetros ξ_1, ξ_2 . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} &= \frac{W + 1 + q^2}{JW}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= -\frac{pq}{JW}, \\ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} &= \frac{W + 1 + q^2}{JW} p_k - \frac{pq}{W} q_k, & k &= 3, \dots, n; \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} &= -\frac{pq}{JW}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= \frac{W + 1 + p^2}{JW}, \\ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} &= \frac{W + 1 + p^2}{JW} q_k - \frac{pq}{W} p_k, & k &= 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Se sigue que con respecto a los parámetros ξ_1, ξ_2 , tenemos

$$g_{11} = g_{22} = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right|^2 = \frac{W}{J} = \frac{W^2}{2 + 2W + p^2 + q^2}$$

y

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = 0.$$

Por lo tanto ξ_1, ξ_2 son coordenadas isotermas en S . Lo que queremos es mostrar que $u_1 + iu_2$ es una transformación conforme a $\xi_1 + i\xi_2$ y entonces por 3.3 tendríamos que u_1, u_2 son coordenadas isotermas.

Como ξ_1, ξ_2 son isotermas tenemos por los resultados 2.16 y 2.46 que ϕ_k son analíticas y como $\phi_1 \neq 0$ tenemos que $\frac{\phi_2}{\phi_1}$, es analítica. Por lo tanto

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) = \frac{1}{|\phi_2|^2} \operatorname{Im}(\bar{\phi}_1, \phi_2) = -\frac{1}{|\phi_2|^2} \det\left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}\right) < 0$$

Así, $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ es una función analítica con parte imaginaria negativa, por 2.21 dicha función es constante. Entonces $\phi_2 = c\phi_1$ para algún número complejo $c = a - ib$ con $b > 0$, es decir;

$$\frac{\partial(x_2)}{\partial(\xi_1)} + i\frac{\partial(x_2)}{\partial(\xi_2)} = a\left(\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_1)} - i\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_2)}\right) - b\left(\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_2)} + i\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_1)}\right),$$

después de ver la parte real e imaginaria tenemos

$$\frac{\partial(x_2)}{\partial(\xi_1)} = a\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_1)} - b\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_2)}, \quad \frac{\partial(x_2)}{\partial(\xi_2)} = b\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_1)} + a\frac{\partial(x_1)}{\partial(\xi_2)}.$$

Transformando esto por 3.1, tendremos

$$\frac{\partial(u_1)}{\partial(\xi_1)} = \frac{\partial(u_2)}{\partial(\xi_2)}, \quad \frac{\partial(u_2)}{\partial(\xi_1)} = -\frac{\partial(u_1)}{\partial(\xi_2)},$$

las cuales son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Sabemos que le mapeo es de clase \mathcal{C}^1 , lo cual implica que $u_1 + iu_2$ es una función compleja de $\xi_1 + i\xi_2$ y como cualquier función analítica es conforme, por 3.3 tenemos que u_1, u_2 son parámetros isotermos ■

3.4. Consecuencias del teorema de Bernstein

La prueba alternativa del teorema de Bernstein se realiza mediante el uso del teorema de *Jörger*, que establece que las únicas soluciones a algunas ecuaciones diferenciales especiales son polinomios de segundo grado. Podemos encontrar dicha prueba en [4] Cap 2.

Ahora que hemos demostrado el teorema de Bernstein nos gustaría saber en qué puede ser usado. Probaremos algunos corolarios que en realidad se

siguen de 3.9, los primeros dos son válidos para cualquier n y el tercero, que describe todas las soluciones posibles a la ecuación de superficie mínima definida en todo el plano, para el caso $n = 4$. Todos ellos se pueden encontrar en [15] pág 38.

Corolario 3.10. *Una solución acotada a la ecuación de la superficie mínima 2.3 en todo el plano debe ser constante.*

Demostración. Lo que sabemos es que ϕ_k es analítica $\Leftrightarrow x_k$ es armónica en u_1, u_2 . Así que, x_k es una función armónica acotada definida en todo el plano y por teorema de Liouville debe ser constante. ■

Corolario 3.11. *Suponga que f es una solución a la ecuación de superficie mínima 2.3 en todo el plano x_1, x_2 y \tilde{S} la superficie $x_k = \tilde{f}_k(u_1, u_2)$ obtenido haciendo referencia a S en las coordenadas isothermas 3.1. Entonces*

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial u_1} - \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial u_2} \text{ para } k = 3, \dots, n \quad (3.3)$$

son analíticas en todo el plano complejo de $u_1 + iu_2$ y

$$\sum_{k=3}^n \tilde{\phi}_k \equiv -1 - c^2, \quad \text{donde } c = a - ib. \quad (3.4)$$

Inversamente, suponga que $c = a - ib$ es cualquier número complejo con $b > 0$, y que tenemos funciones enteras ϕ_3, \dots, ϕ_n de $u_1 + iu_2$ que satisfacen 3.3. Entonces podemos definir funciones armónicas $\tilde{f}_k(u_1, u_2)$ de 3.4 y usando la sustitución 3.1, dará una solución a la ecuación de la superficie mínima definida en todo el plano.

Demostración. \Rightarrow Lo que tenemos es que las funciones ϕ_k son analíticas en todo el plano y que $\sum_{k=1}^n \phi_k^2 = 0$. La transformación 3.1, nos da

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = 1, \tilde{\phi}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = a - ib, \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2 = 0 - 1^2 - (a - ib)^2 = -1 - c^2 \quad (3.6)$$

\Leftarrow Si definimos $\tilde{\phi}_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$ para $k = 1, 2$, donde $x_1 = u_1$ y $x_2 = au_1 + bu_2$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\phi}_k^2 = 1 + (a - ib)^2 - 1 - c^2 = 0 \quad (3.7)$$

y

$$\sum_{k=1}^n |\tilde{\phi}_k|^2 \geq 1 + \sum_{k=2}^n |\tilde{\phi}_k|^2 \geq 1 > 0. \quad (3.8)$$

Pero definiendo $x_k = \operatorname{Re} \int \phi_k(\zeta) d\zeta$ para $k = 3, \dots, n$ y usando la ecuación 3.1 tenemos que esta x_k define una superficie mínima para todo el plano. ■

Corolario 3.12. *Cualquier solución $f = (f_3, f_4)$ a la ecuación de superficie mínima para todo el plano- x_1, x_2 cuando $n = 4$ puede ser descrito en una de las dos formas siguientes.*

i) Una función entera $g(z) = f_3 \pm f_4$, donde $z = x_1 + ix_2$.

ii) Funciones $f_k = \operatorname{Re} \int \tilde{\phi}_k(w) dw$ donde $k = 3, 4$, obtenido a partir de una transformación arbitraria de la forma 3.1, y $d = 1 + (a - ib)^2$ tal que

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{1}{2} (e^{H(w)} - de^{-H(w)}), \quad \tilde{\phi}_4 = \frac{i}{2} (e^{H(w)} - de^{-H(w)}), \quad (3.9)$$

donde $H(w)$ es una función entera arbitraria.

Demostración. Para cada solución global f_3, f_4 de la ecuación de superficie mínima 2.3 por 3.9 existe una transformación $x_1 = u_1, x_2 = au_1 + bu_2$ con $b > 0$ en parámetros isotermas, y por 3.11 existen funciones enteras $\tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4$ tal que $\tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\phi}_4^2 = -d$ donde $d = 1 + c^2$. Esto da dos casos correspondientes a las dos posibles descripciones de la solución.

Caso 1: $c = \pm i$.

Entonces $\tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\phi}_4^2 = 0$, así $\tilde{\phi}_4 = \pm i\tilde{\phi}_3$. Lo cual nos dice que $f_3 + if_4$ es una función analítica de z o \bar{z} donde $z = x_1 + ix_2$.

Caso 2: $c \neq \pm i$.

Factorizando esto, nos dará $(\tilde{\phi}_3 + i\tilde{\phi}_4)(\tilde{\phi}_3 - i\tilde{\phi}_4) = -d$, donde $d \neq 0$. Dado que ninguno de los factores puede ser cero y cualesquiera son enteras, tenemos que $\tilde{\phi}_3 - i\tilde{\phi}_4 = e^{H(w)}$ y $\tilde{\phi}_3 + i\tilde{\phi}_4 = -de^{-H(w)}$ para alguna función entera $H(w)$ la nos garantiza las fórmulas deseadas. ■

Nota: La parte *i*) del corolario anterior nos dice que la gráfica de cualquier curva analítica compleja vista como superficie en el espacio real euclidiano es siempre una superficie mínima.

Capítulo 4

El problema de Plateau

4.1. Nota Histórica

La edad de oro clásica de las superficies mínimas fue aproximadamente la segunda mitad del siglo XIX, donde sucedieron nuevos descubrimientos y publicaciones. Entre 1842 y 1843 E. Catalan probó que el helicoide es la única superficie mínima reglada, aparte del plano. Alrededor de 1850, el físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau¹ quien en su tratado *Statique experimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Plateau describe una multitud de experimentos relacionados con el fenómeno de capilaridad (que es una propiedad de los líquidos que depende de su *tensión superficial*² la cual, a su vez, depende de la cohesión del líquido y que le confiere la capacidad de subir o bajar por un tubo capilar). Entre otras cosas Plateau señaló que al introducir un marco de alambre delgado, cualquiera que sea su forma geométrica en una disolución jabonosa y luego con habilidad de sacarlo, se forma siempre al menos una película de jabón. Por otra parte los objetos matemáticos que modelan las películas de jabón son superficies bidimensionales en \mathbb{R}^3 . Para cada superficies, la teoría fenomenológica de capilaridad concede una energía potencial que es proporcional al área de la superficie. Por lo tanto las películas de jabón en equilibrio corresponden a las superficies de área mínima.

La cuestión matemática que anteriormente hemos discutido, de una su-

¹Plateau, nació en Brussels Bélgica el 14 de octubre de 1801, para más información véase [17] en tal referencia se hace un tributo a J. Douglas y T. Radó.

²La tensión superficial de los líquidos es la tendencia que tienen sus moléculas a juntarse.

perficie de menor área con frontera prefijada fue denominado, el “**problema de Plateau**” por el gran matemático Lebesgue en su conocido trabajo *Intégrale, longueur, aire* (Integral, longitud, área, 1902). En términos generales, podemos plantear el Problema de Plateau como sigue: *probar que para cada curva cerrada $C \subseteq \mathbb{R}^3$ existe una superficie S con área mínima y cuya frontera es C* . Este planteamiento de Plateau ha sido una de las semillas con más frutos en el desarrollo de esta teoría.

Pensando sobre los experimentos de Plateau, suena lógico la existencia de una superficie S con área mínima y cuya frontera es C . Sin embargo, como R. Courant ha remarcado [Véase [3]], *la evidencia empírica nunca puede establecer la existencia matemática, tampoco la demanda de la existencia matemática puede ser destituida por el físico como un rigor inútil. Solo una prueba de existencia matemática puede asegurar que la descripción matemática de un fenómeno físico es significativo*.

El problema de Plateau fue un gran desafío para los matemáticos, y su solución resultó ser una tarea nada fácil. Durante el siglo XIX, dicho problema fue resuelto para muchos contornos especiales, curiosamente contornos similares a los considerados por Plateau en sus experimentos, a saber contornos poligonales, líneas o rayos que se extienden hasta el infinito y círculos. Estas soluciones se obtuvieron mediante la búsqueda de la pareja de funciones holomorfas (que, nos referiremos como el factor conforme f y el mapeo de Gauss g) requerida en la llamada representación Weierstrass-Enneper de una superficie mínima. La primera prueba de existencia general para el problema de Plateau no paramétrico fue dada por Haar en 1927 con importantes aportaciones de **Tibor Radó** acerca de la regularidad y minimalidad de la solución. La contribución de Haar y Radó supuso un gran avance; por primera vez el programa elaborado por Hilbert en sus problemas 19 y 20 fue llevado a cabo usando técnicas de cálculo de variaciones aplicadas a ecuaciones de Euler no lineales. Garnier publicó una primera solución al problema de Plateau con un contorno general. Aunque no fue hasta 1928 cuando el joven matemático norteamericano **Jesse Douglas** dio solución al Problema de Plateau en el caso en que C es una curva simple rectificable de Jordan (es decir; una curva sin intersecciones, cerrada y con longitud finita) y la superficie S tiene el tipo topológico del disco D^2 . Sin embargo, su demostración resultó estar incompleta, y hasta 1931 su artículo aún no había sido publicado. En 1930, de manera independiente, el matemático húngaro Tibor Radó

publicó una solución al Problema de Plateau. En las décadas siguientes Jesse Douglas también resuelve una serie de otros problemas que surgieron en la teoría de las superficies mínimas. En particular, la poderosa técnica matemática que desarrolló le permitió probar la existencia de superficies mínimas de alto género que abarcan uno o un número finito de curvas de nivel. Su trabajo fue reconocido en 1936 con la Medalla Fields la más alta distinción en Matemáticas [ver [10]].

4.2. Ideas sobre la prueba del problema de Plateau

Como ya hemos introducido la teoría necesaria de superficies mínimas, podremos al menos *bosquejar* la idea de cómo se solucionó el problema de Plateau.

Problema 4.1. *(de Plateau) Dada una curva de Jordan Γ , encontrar una superficie mínima cuya frontera sea Γ , preferentemente un mínimo de área absoluto entre las superficies cuya frontera también es Γ , y preferible que no tenga puntos ramificados.*

Como se comentó antes la solución a dicho problema general fue obtenida por J. Douglas [6] y simultáneamente por T. Radó [16]. Una simplificación considerable de sus métodos fue encontrada por R. Courant e independientemente por L. Tonelli.

La idea básica de la solución al problema de Plateau, es en encontrar una superficie que minimice la integral de Dirichlet en la clase S de superficies armónicas cuya frontera es la curva de Jordan Γ dada. Sin embargo hay muchos detalles, lo que haremos será dar una idea de como empezar abordarlo para desentrañar su solución.

La integral de Dirichlet está definida como sigue

Definición 4.2. *Para una función $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la integral de Dirichlet es*

$$E(f) = \int \int_{D^2} f_u^2 + f_v^2 dudv.$$

Donde D^2 no es más que el disco unitario, además, la integral de Dirichlet puede ser considerado para una superficie, así como para una función escalar.

Definición 4.3. *La integral de Dirichlet está dada por*

$$E(\mathbf{x}) = \int \int_{D^2} x_u^2 + x_v^2 dudv.$$

El plan es:

Sea d el ínfimo de los valores de $E(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en S , y entonces, sea \mathbf{x}_n una sucesión de superficies en S con $E(\mathbf{x}_n)$ monótona decreciente a d . Si podemos hacer que S sea un espacio compacto, entonces podemos pasar a un subsucesión convergente, que converge a una superficie \mathbf{x} . Si podemos mostrar que E es continua, o inclusive semicontinua, se puede concluir que $E(\mathbf{x}) = d$, así \mathbf{x} es un mínimo absoluto de la integral de Dirichlet. Entonces, en particular, es un punto crítico de E , esto es en los parámetros isotermos. Y recordemos que ser armónica e isoterma, implica minimalidad.

Con respecto al plan se tienen algunas dificultades que se logran resolver con los siguientes ingredientes

1. Restringe a curvas rectificables, y se demostrar que en ese caso, existe una superficie armónica con integral de Dirichlet finita, ya que no era obvio que existiera una superficie cuya frontera fuera Γ y tuviera integral de Dirichlet finita.
2. La clave de compacidad es el lema de Courant-Lebesgue, que básicamente dice que los valores frontera de las funciones S con integral de Dirichlet acotados por M con equicontinuos.

La discusión de todo esto la podemos encontrar en [[3], pág, 95-122]

Conclusiones

Con esta breve incursión en la historia de las superficies mínimas queremos poner de manifiesto que estamos ante un tema de investigación con una larga tradición, en el que han efectuado aportaciones significativas algunos de los más grandes matemáticos de los últimos tres siglos. A pesar de esto, las superficies mínimas siguen siendo una fuente continua de nuevos desafíos y resultados que las mantienen en la primera línea dentro de la investigación actual en Geometría Diferencial.

Finalmente, la teoría de las superficies mínimas como hemos visto se ha desarrollado intensamente, y cabe señalar que este tema no sólo es interesante desde un punto de vista matemático; también juegan un papel importante en Física, Química, Biología e Ingeniería. Por poner algunos ejemplos, las superficies mínimas han sido usadas para modelar las interfases en ciertas microemulsiones de copolímeros, membranas en células vivas, han servido de modelo en la construcción de diversos tipos de cubiertas de grandes espacios (estadio olímpico de Munich) y han permitido resolver afirmativamente la conjetura de la masa positiva en la teoría de la relatividad general.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1997, 3rd Edition.
- [2] Borda, J. C., *Eclaircissement sur les méthodes de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété du maximum ou du minimum*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, pages 551-565, 1770. Presented in 1767.
- [3] Courant, R., *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*. Interscience, 1950, reimpressed by Springer-Verlag (1977).
- [4] Chipot, M., *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*. Volume IV. Elsevier B.V., 2007.
- [5] Coolidge, J. L., *A history of geometrical methods*. Oxford University Press, 1940.
- [6] Douglas, J. 1931a *Solution of the Problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society 32.1, 263-321.
- [7] Do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, (1976).
- [8] Fang, Y. *Lectures on minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . Centre for Mathematics and its Applications Australian National University, 1996.
- [9] García-Martínez, S. C., *The classical Bernstein theorem and some results for surfaces of constant mean curvature in Euclidean space*. (Español) Mat. Enseñ. Univ. (N. S.), 18, (2010), 51-74.
- [10] Gray, J. and Micallef, M., (2008). *The work of Jesse Douglas on Minimal Surfaces*. Bulletin of the American Mathematical Society, 45(2), pp. 293-302.

-
- [11] Marsden, J. and Tromba, A., *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley, 1988, 3^{ra} Edición.
 - [12] Montiel, S. and Ros, A., *Curves and Surfaces*. Amer. Math. Soc, 2009, 2nd Edition.
 - [13] Nitsche, J., *Lectures on Minimal Surfaces*. Vol. 1, Cambridge U. Press, 1989.
 - [14] Oprea, J., *Differential Geometry and Its Applications*. Prentice Hall, 1997.
 - [15] Osserman, R., *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, 1986.
 - [16] Radó, T., *On the Problem of Plateau*. Springer-Verlag, Berlin (1933)[Reprint 1971].
 - [17] Rassias, T., *The Problem of Plateau*. World Scientific Publishing, 1992.
 - [18] Spivak, M., *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.
 - [19] Tromba A., *A Theory of Branched Minimal Surfaces*. Springer (2012).

Índice alfabético

- Analítica, 48
- Armónica, 43
- Armónicas conjugadas, 43
- Atlas, 3
- Bernstein, 85
- Campo tangente, 13
- Catenoide, 26
- Cauchy-Riemann, 48
- Cilindro generalizado, 25
- Continua, 2
- Cristoffel, 20
- Curva diferenciable, 4
- Curva plana, 4
- Curva regular, 5
- Curvatura Gaussiana, 19
- Curvatura media, 19
- Curvaturas principales, 18
- Difeomorfias, 5
- Difeomorfismo, 3
- Difeomorfismo local, 6
- Diferenciable, 2
- Direcciones principales, 18
- Euler-Lagrange, 27
- Forma fundamental, 7
- Gráfica entera, 33
- Helicoide, 24
- Homeomorfismo, 2
- Isometría, 23
- Isometría local, 23
- Isotermas, 43
- Jörgen, 91
- Jesse Douglas, 96
- Laplaciano, 43
- Liouville, 49
- Matriz Jacobiana, 3
- Meromorfa, 55
- Meusnier, 31
- Operador autoadjunto, 16
- Operador forma, 16
- Orientable, 15
- Orientación, 15
- Plano tangente, 6
- Plateau, 96
- Polo, 54
- Proyección estereográfica, 72
- Reparametrización, 6
- Scherk, 33
- Secciones principales, 18
- Segunda forma, 17
- Singularidad, 54
- Singularidad aislada, 54

Singularidad removible, 54

Superficie mínima, 32

Superficie parametrizada, 4

Superficie reglada, 24

Superficie regular, 3

Tibor Radó, 96

Totalmente umbilical, 22

Transformación conforme, 57

Transformación Gauss, 16

Vector tangente , 5

Weierstrass-Enneper, 66

Wirtinger, 49