



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**Topología Digital y Análisis de Imágenes
Binarias**

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
FERNANDO COCOLETZI ADAME

ASESOR DE TESIS:
DR. JOSÉ JUAN ANGOA AMADOR

PUEBLA, PUEBLA.

FEBRERO, 2019.

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

El *yo* quién escribe estas palabras es un poco distinto al *yo* que escribió el resto del documento que sostienen entre sus manos; pero, por primera vez en no sé cuánto tiempo, el otro se ha hecho a un lado voluntariamente para dejarme escribir algunas palabras para ustedes a nombre de ambos.

En cuanto a él (es incorrecto hablar primero de uno mismo), seguramente saben que padece de una cierta condición que le obliga a prestar atención a una única cosa a la vez. Perfectamente ciego más allá de la realidad inmediata, se molesta si se le habla mientras opera, es inflexible, rígido y animal; pero también es quien a lo largo de estos años procuró no dejar ir cabos sueltos y en ese afán se quejó incansablemente hasta que logró convencerme de dejar de estudiar Física y cambiar a Matemáticas, dónde se sintió más satisfecho y no ha vuelto a reclamar desde ese entonces con tanta voluntad.

A ustedes, *papá y mamá*, José Rodolfo y María Gloria, él les agradece muchísimo el haber siempre sido el impulso en sus empresas y el consuelo en el dolor que siempre le han causado sus propias insuficiencias. Les agradece apoyarlo en todos los cambios que realizó desde cuando dejó la Música hasta la fecha. Gracias a su apoyo, el alma de este otro yo ha sido muy feliz sometiéndonos a jornadas de estudio motivadas más veces por sus gustos que por las responsabilidades propias de la escuela. Espero no equivocarme al elegir las siguientes palabras para ustedes: sépanlo, en este camino *ambos yoes hemos sido muy felices*.

Respecto a mí, les agradezco con él, porque somos lo mismo; pero también sé que no siempre actuamos como decimos y que hemos sido muchas veces muy malagradecidos. Les ofrezco una disculpa muy sincera y mi voluntad de trabajar por ser un hijo más digno.

Hermano, Rodo, si el otro y yo coincidimos en algo desde el inicio es que te vimos como lo máximo entre lo máximo, y siempre quisimos ser

cómo tú. Pero sabes bien que somos muy diferentes. Incapaz de aceptar que el mundo no es en blanco y negro ni de dos dimensiones yo le malaconsejé al otro alejarse de ti. ¡Cuánta arrogancia estupidez y mal agradecimiento! Todo mundo debe saber (con el perdón de mis padres, a quienes debo la vida –la cuál es todo sin serlo–) que *todas* las virtudes que pueda yo tener, las aprendí o las cultivé imitándote a ti, viéndote a ti y queriendo ser cómo tú. También muchas de las vivencias que más huella me dejaron las viví contigo: la mayor ira de mi vida (que ahora es un chiste) la recuerdo de cuándo le tomaste el gusto a meterme un calcetín en la boca, la mayor tristeza de cuándo descubrí la malevolencia en mí mismo de niño al pisar tu tamborcito y ver que era capaz de hacer daño a propósito, y la mayor alegría cuando me llevaste a jugar a las maquinitas de la 10 por primera vez. Lamento no haber querido aprender también de nuestros errores, así como haber tomado distancia; pero vamos, el tiempo ha transcurrido y estoy aprendiendo a valorar nuevamente lo mucho que tienes para enseñarme y, espero que no me engañe la vanidad al pensar que algo he de haber contribuido también para ti. Creo que en este punto no hacen falta muchas palabras: perdón y gracias.

Aún me faltan muchas personas más a las cuáles agradecerles el bien que su existencia, presencia y acción me han influido. El otro yo me dice que les estoy haciendo pesada la lectura; pero le respondo que seguramente comprenderán que le haya dedicado un poco de espacio adicional a mi familia nuclear.

Mi *tía Carmen* es tan cercana, que ya que he tenido el poco tacto de no incluirla en la familia nuclear, es la primera a quién también ambos yo es queremos agradecerle. Aquel porque le abrió muchas puertas al hacer todo lo que estuvo en sus manos para que no llegara a la universidad sin saber Inglés y sin conocer lugares diferentes que le permitieran tener una óptica diferente de la vida; y yo porque siempre estuvo dispuesta a dar un consejo (se lo pidiera o no, para eso es la familia, para decir las cosas como son, la bebas o la derrames).

Amigos... son tantos aquellos quienes han hecho tanto bien a ambos yo es, que cualquier lista que pueda poner, de ninguna manera será exhaustiva; pero me atreveré a sugerir un ensayo. Una disculpa.

Alejandro, Augusto y Juan Carlos, ustedes desde la prepa me hicieron el obsequio de sentir y saber que podía ser aceptado y querido por gente fuera de mi familia de una manera que iba más allá de rutina de la convivencia en la escuela, acompañado tal vez de un tubo de ensayo,

de una invitación a la Parrila Suiza o una invitación a la dulcería de su madre a regañadientes. Me hicieron sentir acompañado y comprendido en un tiempo en el que tuve francas dudas sobre si era capaz de hacer amigos. Aunque no nos vemos muy frecuentemente, cada que nos hemos encontrado, se ha reforzado en mi mente la idea de que hay amistad fuera de la rutina, y a pesar de la falta de frecuencia. Gracias por tanto. El otro yo se regocija de tener amigos tan competentes en sus áreas de conocimiento.

Belén, has sido un motor de cambio en mi vida desde que te conocí. Cierta dibujo tuyo, que aún conservo, fue el motivo por el cuál el otro yo decidió cederme un poco el paso, motivado por el cariño y por la duda razonable de que tal vez una actitud diferente nos vendría mejor. Creo que sin saberlo continuaste el largo proceso, que tal vez aún no termina, de mi domesticación. Pensar en ti me alienta a ser una mejor persona en todos los sentidos. ¡Y el otro es muy feliz en las largas conversaciones contigo! Gracias por todo.

Bruno y Enrique, juntos transitamos casi toda la licenciatura. Su amistad está entre lo mejor que me dejó la Universidad. Pasamos bachés, huecos, cráteres y salimos de muchos de ellos juntos. Como dice Gibrán: más que ser amigos que matan el tiempo juntos, compartimos muchas de las horas más vivas. Me faltan palabras para agradecerles todo lo que hicieron por ambos yoes.

Manuel, eres la persona más extraordinariamente inteligente y capaz que conozco. Convivir contigo ha sido un gusto y todo un privilegio. Ambos yoes pasaron muchos de los momentos más felices contigo. Sé que te irá bien en la nueva etapa que comienzas yendo lejos a perseguir un nuevo objetivo. Mil gracias.

Anayansi, compartimos una responsabilidad que no supimos manejar. Asumo por completo la interminable sucesión de fracasos que marcaron nuestro fatal tránsito por el Consejo de Unidad de la facultad. Pero a nivel personal, nada de eso me importa (aunque suene mal) comparado con la joya que ha sido tener tu amistad. Nunca había conocido a una persona tan claramente balanceada como lo eres ¡Qué impacto! Junto con *Estela*, quien creo que al igual que mis yoes está un poco más habitada por los demonios, me han dado muchos consejos que (me arriesgo a decirlo) sólo pudieron haber venido de una perspectiva más femenina. Gracias a ambas por ser mis amigas. Son las mejores. Siempre es un placer ganarles en el Taboo y el Just Dance.

Mario Alexis, de ti creo que ha venido la lección más importante en

la vida reciente. Tu fortaleza y generosidad son dignas de admiración. Gracias.

La palapa: Anthony, Diana, Eldon, Isaac, Jair, Lupita, Marco y Renel. A pesar de estar tentado, siento que a ustedes no los podía separar del mismo grupo. Agradezco su compañía y amistad a pesar de mis largas ausencias y tonterías, los momentos de diversión y las muchas veces que tendieron una mano en los momentos que más me hicieron falta.

La segunda palapa: Anahí, Alan, Alberto y Francisco. Gracias por la compañía, los buenos momentos, las largas y lindas pláticas, los momentos importantes de los cuáles me han hecho parte y todo el cariño que me han dado a pesar de conocernos por un tiempo tan relativamente corto.

Alexis, amigo. Varias veces has hecho una de las cosas más difíciles de la vida, verme, tenderme una mano y salvarme de mí mismo. Tus palabras de aliento y tu voluntad de no dejar que el otro yo nos tiranizara nuevamente, nos salvaron del borde de la demencia, incluso en la forma de una breve visita en la biblioteca, llevarme de paseo o a pastar. Gracias por tanto.

A todos los maestros, de quienes provino todo el escaso conocimiento de Matemáticas que los yoes pudieran tener les agradecemos de todo corazón.

Para el *Maestro Juan Angoa Amador* y la *Maestra María de Jesús López Toriz* está apartado el más profundo de los cariños, de los respetos y los agradecimientos. Maestro, fue gracias a la inspiración de su curso de Diferencial que sobrevino la decisión de cambiar de carrera y el descubrimiento de las matemáticas. Todo su apoyo es evidente por dónde se le vea. El que estuviera dispuesto a realizar un seminario a pesar de no estar matriculado en sus cursos y dar seguimiento tal que culminó en un pequeño capítulo en el libro de Matemáticas y sus Aplicaciones que edita la facultad es muestra de lo que usted ha representado en la formación de generaciones. Hicimos un par de trabajos más, me facilitó muchos textos y finalmente accedió generosamente a dirigir el presente trabajo a pesar de que el no ser especialistas en las aplicaciones de imágenes digitales supondría un esfuerzo adicional de consideración. Su generosidad y pasión por el conocimiento es una fuente de inspiración para todos.

Maestra Mari, siempre estuvo al pendiente del cambio de carrera, dándome ánimos para no hacer caso de las torturas burocráticas que

representó el proceso, apoyando con becas, platicando, escuchando y ofreciéndose a apoyar para resolver dudas. Viendo la convivencia entre ustedes y con los grupos de trabajo que formaron con otros profesores y alumnos, el modo de vida del matemático se ve atractivo y deseable.

A los Maestros *Carlos Guillén* y *Agustín Contreras* les agradezco en primer lugar (junto con la Maestra Mari) que aceptaran ser jurados para mi trabajo final, a pesar de ciertas prisas; así como que hayan leído y sugerido modificaciones que mejoraron la calidad de este trabajo. Por supuesto que cualquier error u omisión es por completo responsabilidad mía. Pero más que eso, agradezco las conversaciones que tuvieron personalmente conmigo, siempre llenas de pasión por la profesión; pero de ninguna manera limitadas a ella. Escucharlos siempre ha sido un placer.

Al Maestro *Carlos Alberto López* le agradezco las expresiones de (me atrevo a decirlo) amistad que siempre ha tenido. Sólo me impartió un curso en los primeros semestres; pero la comunicación ha sido más o menos ininterrumpida desde entonces, con franqueza, cordialidad y alegría. Muchas gracias por todo.

Los Maestros *Lucía Cervantes* y *Julio Poisot*, desde perspectivas diferentes y por separado, siempre se preocuparon porque tuviera herramientas humanas más allá de la habilidad matemática; e hicieron todo lo posible por facilitarme cursos, información en varios formatos y lo que más valoro, me ofrecieron conversación instructiva, comprensión y convivencia enriquecedora. Gracias al contacto con ustedes se aceleraron muchos cambios y los múltiples yoos ya tienen un lenguaje y un espacio donde a veces discuten, a veces conversan, y poco a poco entiendo (entiendo yo, la suma de los otros) que esas multiplicidades que habitan en mí –más simbólicas que materiales– son manifestaciones de la posibilidad de hablar, actuar y sentir desde diferentes ópticas y con diferentes herramientas.

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

Agradecimientos	III
Índice de figuras	XI
Índice de algoritmos	1
1. Introducción	1
1.1. Dirección del trabajo	1
I Orígenes de la topología digital	3
2. Definiciones básicas	5
2.1. Adyacencia y conexidad	5
2.1.1. Conexidad en \mathbb{Z}^2 y en \mathbb{R}^2	9
2.2. Arcos simples y curvas cerradas simples	10
2.2.1. Arcos simples	10
2.2.2. Curvas cerradas simples	14
3. El teorema de la curva de Jordan	17
3.1. Resultados preliminares.	18
3.2. Elementos eliminables	21
3.2.1. Vuelta al teorema de la curva de Jordan	23
4. Funciones «continuas»	27
4.1. Definiciones básicas	27
4.2. Funciones escalares	30
4.3. Funciones continuas e inyectivas	34
II Sistematización	41
5. Introducción	43

5.1. Espacios topológicos finitos	44
5.1.1. Propiedades de Separación	46
5.1.2. Bases	47
5.1.3. Preórdenes	48
5.1.4. Conexidad y conexidad por caminos	51
6. La 4-conexidad y la 8-conexidad desde el punto de vista topológico	55
7. Espacios topológicos ordenados y conexos	63
7.1. Órdenes y cots	66
7.2. Propiedades generales	68
7.3. Arcos y caminos	73
8. El plano digital	77
8.1. El teorema de la curva cots de Jordan	79
9. Notas breves sobre imágenes digitales	87
9.1. Operaciones sobre imágenes	89
Appendices	93
A. Algunas observaciones sobre 4-curvas y 8-curvas	95
A.1. Paridad	96
A.2. Análogos discretos	98

Índice de figuras

2.1. Identificación de píxeles con puntos a través de su esquina inferior izquierda.	6
2.2. En gris claro se muestran los 4-vecinos y 8-vecinos del píxel coloreado con gris más oscuro.	6
2.3. Ejemplo de un 4-camino	7
2.4. Dos puntos 8-conectables en S	7
2.5. En gris claro se muestra $N_4(0, 0)$	9
2.6. Ejemplo de un 4-arco	10
2.7. Posibilidades locales para un elemento x de un 4-arco, tal que no es extremo. El sombreado ligero indica que tal píxel puede o no ser parte de él.	13
2.8. Posibilidades locales para un elemento x de un 8-arco, tal que no es extremo.	13
2.9. Posibilidades locales para un elemento x de un 4-arco o de un 8-arco, que es extremo. El sombreado ligero indica que tal píxel puede o no ser parte de él.	13
2.10. Las «autointersecciones» no están permitidas en las curvas cerradas simples.	14
2.11. Las 4-curvas cerradas simples efectivamente son «cerradas». En este caso $1 \equiv 10 + 1 \pmod{10}$	15
2.12. Sucesión doblemente infinita.	15
3.1. Corrida en $H(y_{q-1}) \cup H(y_q)$ cuando x_k y x_{k+r+1} están ambos por arriba de $H(y_{q-1})$	20
3.2. Corrida en $H(y_{q-1}) \cup H(y_q)$ cuando x_k está arriba de $H(y_{q-1})$ y x_{k+r+1} está abajo de $H(y_q)$	20
3.3. Debido a los incisos 1 y 2 debe haber 4-vecinos de x tanto en S como su complemento. Podemos agotar todos los casos viendo las posibilidades cuando 1,2 o 3 4-vecinos de x están en S	26

4.1.	Ambas posibilidades para Q y $f(Q)$. En la imagen de la izquierda ya hemos alcanzado el borde; mientras que en la de la derecha podemos aún alcanzar a cualquiera de ambos bordes.	33
4.2.	Cuando se alcanza alguno de los bordes podemos continuar hasta alcanzar una esquina y, por tanto, una contradicción.	33
4.3.	Caso 1	36
4.4.	Caso 2	36
4.5.	Caso 3	37
4.6.	Caso 4	37
4.7.	Caso 5	37
4.8.	Caso 6	38
4.9.	Q es adyacente a un punto «interior» de un lado de este cuadrado	38
4.10.	Q es adyacente a un extremo de un lado	38
4.11.	Q es un 8-vecino de un extremo del cuadrado	39
4.12.	Q es adyacente al lado este por el interior	39
4.13.	Q es vecino de la esquina noreste	40
4.14.	Q es diagonalmente adyacente al pixel más al noreste	40
6.1.	Situación de $N_8(A)$ en la prueba de la Proposición 6.0.2	57
6.2.	Representación de las 4 posibles topologías	61
9.1.	Esquema de funcionamiento de la cámara. El rectángulo grande representa a la escena real a capturar, mientras que el mediano la superficie de captura de la cámara. El cuadro pequeño representa la apertura por la cuál la luz entra a la cámara.	88
9.2.	Las direcciones de crecimiento de los índices no son las mismas que las de los ejes de coordenadas usuales.	89
A.1.	$N_8(0, 0)$ es una 4-curva cerrada que no es 8-curva cerrada.	95
A.2.	$N_8(0, 0)$ sin las esquinas.	96
A.3.	8-curva de 7 pixeles.	96
A.4.	Ejemplo que evidencia que λ_i no es la mejor propuesta de derivada.	100

Capítulo 1

Introducción

1.1. Dirección del trabajo

A partir de la década de los 1970, matemáticos involucrados con el procesamiento de imágenes se interesaron por proporcionar fundamentos teóricos para algunos algoritmos de uso común para el seguimiento de contornos, conteo de componentes conexas y otras operaciones en imágenes monocromáticas, con la intención de hacerlos eficientes y garantizar que efectivamente eran funcionales en todos los casos.

En dicha época las limitaciones de los equipos computacionales eran bastas, y los algoritmos debían comprometerse a las restricciones sobre procesamiento y uso de memoria. Con el paso del tiempo el paradigma ha ido cambiando hacia una cierta optimalidad en los procesos más que a la estricta administración de los recursos debido a la creciente capacidad de procesamiento y almacenamiento de los equipos; sin embargo, la teoría que se generó se vio altamente influenciada por las condiciones de las aplicaciones en aquellos tiempos.

Un par de ejemplos de problemas importantes en el área de análisis de imágenes digitales son el conteo de componentes «conexas» y el seguimiento de contornos de objetos representados en una imagen: generalmente se trata de pasos de preprocesamiento para otros fines, como el reconocimiento de objetos, escritura y demás. Un vistazo a la naturaleza de estos problemas revela que consisten en un cierto sentido en descubrir propiedades «topológicas» en los objetos representados en las imágenes binarias. Por ello a la disciplina matemática concerniente al estudio de estas propiedades se le conoció como **Topología digital**.

Este trabajo constará de dos partes: en la primera comenzaremos siguiendo algunos de los artículos publicados por los pioneros en el desarrollo de la Topología digital y, a través de algunas definiciones elementales postularemos teoremas análogos a la topología del plano euclidiano usual (como el teorema de la curva de Jordan). También se estudiará brevemente una noción de funciones «continuas» entre «espacios digitales» cuya definición es elemental.

De este estudio saltará a la vista de que a pesar de que se intentó capturar propiedades topológicas de las imágenes no se hace ninguna referencia a alguna topología que dé sustento a los conceptos.

Una segunda parte del trabajo se enfocará en un esfuerzo de sistematización topológica para las nociones tratadas en la primera parte. Esta sistematización tiene sus orígenes en el final de la década de los 80. El último capítulo de esta parte incluirá un comentario final respecto a las imágenes digitales y su representación.

Es importante aclarar que salvo el contenido elemental del apéndice A y algunas modificaciones sencillas realizadas a las pruebas de algunos teoremas de la parte 1, el material que aquí se estudia no es original. Se ha intentado, en la primera parte, colocar las referencias en cada resultado y aclarar en qué aspectos se han realizado cambios; mientras que en la segunda, sólo se ha indicado al inicio de los capítulos y secciones la fuente de los resultados, debido a que se ha seguido de forma más cercana el desarrollo encontrado en los artículos originales de la teoría.

Dado lo anterior, resumimos el objetivo de este trabajo en lo siguiente: hacer una revisión histórica de una de las bases matemáticas del análisis de imágenes digitales, de tal manera que pueda servir de punto de partida para un estudio consecuente del análisis de imágenes o de la teoría matemática en sí misma.

Parte I

Orígenes de la topología digital

Capítulo 2

Definiciones básicas

En el artículo «Connectivity in Digital Pictures» [1] publicado en 1970, Azriel Rosenfeld proporcionó una respuesta teórica al problema de garantizar que algunos algoritmos de uso común, para el seguimiento de contornos y conteo de componentes conexas en imágenes monocromáticas, efectivamente eran funcionales en todos los casos.

Como base para el modelo, se consideran subconjuntos del plano discreto $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y se define una relación de conexidad. Esta noción da paso a otras como la conexidad simple, camino, arco, curva cerrada simple, eliminabilidad, entre otras. Es debido a la naturaleza de estos conceptos que se llama a esta teoría «Topología Digital». Más aún, puede advertirse el paralelismo entre esta teoría y la topología del espacio Euclidiano.

En este capítulo seguiremos una presentación semejante a la dada por Rosenfeld en los artículos [1], [2], [3] y [4].

2.1. Adyacencia y conexidad

Definición 2.1.1 Dado un punto $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, denotaremos por $N_4(i, j)$ al conjunto

$$\{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$$

y diremos que cada punto de $N_4(i, j)$ es **4-adyacente** a (i, j) o un **4-vecino** de (i, j) .

Denotaremos por $N_8(i, j)$ al conjunto

$$N_4(i, j) \cup \{(i-1, j-1), (i+1, j-1), (i-1, j+1), (i+1, j+1)\}$$

y diremos que cada punto de $N_8(i, j)$ es **8-adyacente** a (i, j) o un **8-vecino** de (i, j) .

Notemos que existe una biyección muy simple entre los conjuntos de parejas de números enteros (\mathbb{Z}^2) y el de cuadrados de área uno con vértices con coordenadas enteras ($V = \{[n, n+1] \times [m, m+1] : n, m \in \mathbb{Z}\}$) que asigna a cada cuadrado su esquina inferior izquierda.

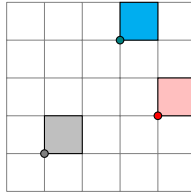


Figura 2.1: Identificación de pixeles con puntos a través de su esquina inferior izquierda.

Esta identificación nos permitirá visualizar los conceptos en términos de cuadrados pues reflejan con mayor claridad la situación de los pixeles en una imagen digital; pero tratarlos como parejas de números enteros, los cuáles son más simples de manipular.

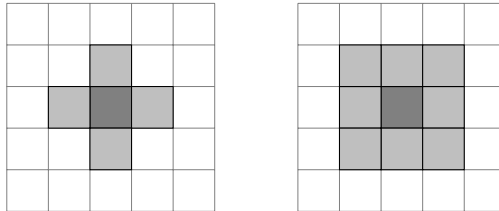


Figura 2.2: En gris claro se muestran los 4-vecinos y 8-vecinos del pixel coloreado con gris más oscuro.

Nótese que $N_4(i, j)$ está conformado por los puntos inmediatamente arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda de (i, j) , mientras que $N_8(i, j)$ está conformado por estos, más los puntos inmediatamente en diagonal a (i, j) .

Los 4-vecinos y 8-vecinos de un punto pueden describirse en términos de la «métrica del taxista» y la «métrica del supremo»:

$$N_4(i, j) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |i - a| + |j - b| = 1\}$$

$$N_8(i, j) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : \max\{|i - a|, |j - b|\} = 1\};$$

sin embargo estas métricas inducen en \mathbb{Z}^2 la topología discreta y por ello no son útiles para definir mediante ellas conexidad ni ninguna otra propiedad topológica, ya que tales propiedades se trivializan.

De aquí en adelante emplearemos la letra n para designar uno de los dos números 4 u 8. Si n ya denota a alguno de ellos, el otro se denotará por \bar{n} .

Ambas nociones de adyacencia se extienden naturalmente a conjuntos: los subconjuntos S y T de \mathbb{Z}^2 son n -**adyacentes** si existen $s \in S$ y $t \in T$ tales que s es n -adyacente a t (con $n = 4$ o $n = 8$). Asimismo las nociones de n -conexidad se definen de la siguiente manera:

1. Un n -**camino con extremos** x e y en \mathbb{Z}^2 es una sucesión finita de puntos x_1, x_2, \dots, x_m donde $x_1 = x$, $x_m = y$ y, para cada índice r con $1 \leq r < m$ $x_{r+1} \in N_n(x_r)$.

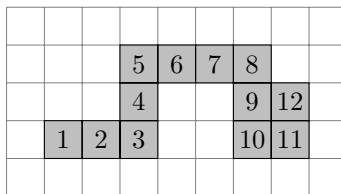


Figura 2.3: Ejemplo de un 4-camino

2. Dos puntos $x, y \in S$ son n -**conectables en** S si existe un n -camino de puntos en S con extremos x e y .

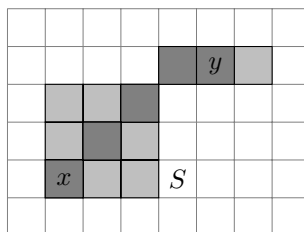


Figura 2.4: Dos puntos 8-conectables en S

3. Ser « n -conectables en S » es una relación de equivalencia en S y sus clases de equivalencia se llaman n -**componentes** de S .

4. Cuando el número de n -componentes de S es finito, lo llamaremos la n -**conexidad** de S y definimos que S es n -**conexo** si su n -conexidad es 1. También diremos que sus puntos son n -**conectables**.

Lema 2.1.1 Las diferentes n -componentes de un conjunto S no son n -adyacentes entre sí.

Demostración:

Si dos componentes T y R de S fuesen n -adyacentes, entonces existirían $t \in T$ y $r \in R$ con r y t n -adyacentes, por lo cuál, ambos puntos pertenecerían a una misma componente. \square

Lema 2.1.2 Sea $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ un n -camino. Si A, B son subconjuntos disjuntos y no vacíos de C y cuya unión es C , entonces A y B son n -adyacentes.

Demostración:

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $x_1 \in A$. Sea x_r el elemento en B de menor índice. Tendremos que $x_{r-1} \in A$, $x_r \in B$ y $x_r \in N_n(x_{r-1})$. Se sigue que A es adyacente a B . \square

Lema 2.1.3 Si A y B no son n -adyacentes con $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, X e Y no son n -adyacentes.

Demostración:

Obsérvese que si X e Y son n -adyacentes, $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$, entonces A y B son n -adyacentes. \square

Teorema 2.1.1 (Rosenfeld [4]) Un subconjunto S de \mathbb{Z}^2 es n -conexo si y sólo si no puede escribirse como la unión disjunta de subconjuntos propios no n -adyacentes.

Demostración:

(Suficiencia) Sea S un conjunto n -conexo y supongamos que $S = A \cup B$ con $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y sin ser A y B n -adyacentes. Sean $a \in A$ y $b \in B$.

Por n -conexidad existiría un n -camino $\{a, x_2, \dots, b\}$ en S . Los conjuntos $A \cap \{a, x_2, \dots, b\}$ y $B \cap \{a, x_2, \dots, b\}$ no serían n -adyacentes por ser subconjuntos de A y B (ver Lema 2.1.3); pero serían n -adyacentes en vista del Lema 2.1.2. Esta contradicción conduce a asegurar que S no puede escribirse como la unión disjunta de subconjuntos propios no n -adyacentes.

(Necesidad) Sea S no n -conexo. Entonces tiene más de una n -componente. Si tomamos una componente, por un lado, y la unión de las restantes,

por otro, en vista del Lema 2.1.1 ellas no son n -adyacentes, son disjuntas, no vacías y su unión es S . \square

2.1.1. Conexidad en \mathbb{Z}^2 y en \mathbb{R}^2

En completa analogía con el plano Euclidiano esperamos que algunas características de este tengan una contraparte en el plano digital. Considérese por ejemplo al conjunto $N_4(0, 0)$.

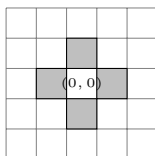


Figura 2.5: En gris claro se muestra $N_4(0, 0)$.

Si se considera la 4-conexidad, $N_4(0, 0)$ es un conjunto «totalmente 4-disconexo» en el sentido de que sus 4-componentes conexas se reducen a puntos. Pero a su vez $\{(0, 0)\}$ es una 4-componente de $\mathbb{Z} \setminus N_4(0, 0)$, así que estamos frente a un conjunto totalmente 4-disconexo que genera una 4-disconexión en su complemento.

Si análogamente juzgamos al mismo conjunto bajo la 8-conexidad, $N_4(0, 0)$ es conexo y, en realidad, un «análogo digital» de una curva cerrada simple; pero $\mathbb{Z} \setminus N_4(0, 0)$ es 8-conexo, así que estamos frente a una 8-curva cerrada simple que no separa al plano.

Una solución a este conflicto fue dada por Duda, Hart y Munson (ver [1]): si S se considera bajo la 4-conexidad, su complemento debe considerarse bajo la 8-conexidad y viceversa.

Nos referimos como el **orden de 4-conexidad** de S como la 8-conexidad de su complemento y su **orden de 8-conexidad** como la 4-conexidad de su complemento.

Asimismo, diremos que S es **simplemente n -conexo** si es n -conexo y su orden de n -conexidad es 1.

Proposición 2.1.1 (Rosenfeld[1]) Si S es finito, entonces tiene n -orden de conexidad.

Demostración:

Como S es finito, está contenido en algún «rectángulo» acotado (de la forma $[a, b] \cap \mathbb{Z} \times [c, d] \cap \mathbb{Z}$). El complemento de dicho rectángulo es n -conexo. A lo más hay tantas componentes del complemento de S como puntos del mismo dentro de dicho rectángulo, es decir, una cantidad finita. \square

2.2. Arcos simples y curvas cerradas simples

En los artículos [1] y [2], Rosenfeld elabora sobre los análogos digitales de los arcos simples y curvas cerradas simples. Estos se definen como sucesiones finitas de puntos digitales que no se mantienen en un mismo punto, no regresan por puntos ya recorridos y no «llenan el espacio»; teniendo como una única diferencia entre ellos si regresan al punto donde comenzaron o no.

Nótese que, por razones de cardinalidad, es imposible –aún si se definiera un sistema de conjuntos abiertos en el espacio \mathbb{Z}^2 que diera sustento topológico a las nociones que hemos presentado– definir a los arcos como subespacios de \mathbb{Z}^2 homeomorfos al intervalo compacto $[0, 1]$ con la topología usual ya que el espacio \mathbb{Z}^2 es numerable, mientras que el intervalo $[0, 1]$ no lo es.

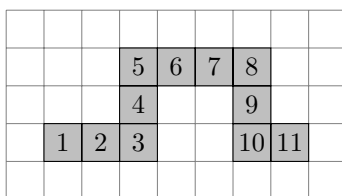


Figura 2.6: Ejemplo de un 4-arco

2.2.1. Arcos simples

Definición 2.2.1 *Un n -arco simple es una sucesión finita de puntos x_1, \dots, x_m tales que para cualesquiera índices r, s con $1 \leq r, s \leq m$:*

- a) $x_r = x_s$ si y sólo si $r = s$,
- b) $x_r \in N_n(x_s)$ si y sólo si $r = s \pm 1$.

A los puntos x_1 y x_m se les llama **extremos** del n -arco simple.

De esta definición se desprende que todo n -arco simple es un n -camino. La afirmación recíproca no es verdadera; sin embargo mostraremos el Teorema 2.2.1 usando una observación sencilla:

Observación 2.2.1 *Si en un n -camino x_1, \dots, x_m el elemento x_i es tal que $1 < i < m$ y únicamente tiene un n -vecino en el n -camino, entonces $x_{i-1} = x_{i+1}$*

En efecto, sea p el único n -vecino de x_i que es miembro del n -camino. Por la definición de n -camino tendremos que $x_{i-1} = p$ y $x_{i+1} = p$.

Teorema 2.2.1 *Todo n -camino con extremos x e y contiene a un n -arco con extremos x e y .*

Demostración:

Generaremos al n -arco simple «eliminando» elementos del n -camino. Sea $x = x_1, x_2, \dots, x_m = y$ un n -camino con extremos x e y . Suponiendo que x_1 tiene más de un n -vecino perteneciente al n -camino, tomaremos a x_k aquel vecino de x_1 con el índice mayor y formaremos el camino $x_1, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$. Dicho de otra manera: eliminaremos del camino original a todos los puntos que siguen a x_1 hasta (y exceptuando) al su vecino de mayor índice.

En orden sucesivo tomaremos (si existen y no los eliminamos previamente) a x_2, \dots, x_{m-1} y en caso de que x_i tenga más de dos n -vecinos, seleccionaremos a su vecino con índice más grande x_k y formaremos el camino $x_1, \dots, x_i, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$. Este proceso termina gracias a la finitud del n -camino. Reindicemos al camino como y_1, \dots, y_l .

En el caso en que $x_1 \neq x_m$ tenemos que ninguno de los y_i puede aparecer repetido, pues si $y_i = y_j$ con $i < j$, entonces y_i tendría por vecino de mayor índice a y_{j+1} cuando $j < l$, o bien y_{i-1} tendría como vecino de mayor índice a y_j . Nótese que, en vista de que $x_1 \neq x_m$ estos son los únicos casos posibles.

Para todos los puntos intermedios y_2, \dots, y_{l-1} (si existen), notemos que únicamente tienen dos n -vecinos: y_i tiene al n -vecino y_{i+1} y a ningún vecino de índice mayor, así como al vecino y_{i-1} y a ningún vecino de índice menor, para no contradecir que el vecino de mayor índice de cualquier y_s es y_{s+1} .

Análogamente y_1 sólo tiene como vecino a y_2 y y_l a y_{l+1} . Concluimos que y_1, \dots, y_l es un n -arco simple. \square

La demostración del Teorema 2.2.1 puede modificarse para proveer justificación de un algoritmo que permita encontrar un arco que conecta a x e y dado un camino que lo hace (ver el Algoritmo 2.2.1).

Nuestro siguiente paso es dar una caracterización de un n -arco simple a través de las propiedades locales de sus puntos. En [2], Rosenfeld la demostró asumiendo que el conjunto S es finito; sin embargo, es muy sencillo hacerlo sin esa presuposición.

Teorema 2.2.2 *Un conjunto S es un n -arco simple (con $|S| \geq 2$) si y sólo si:*

- a) S es n -conexo.
- b) $|N_n(x) \cap S| = 2$ para todos los puntos $x \in S$ exceptuando a dos.
- c) $|N_n(x) \cap S| = 1$ para esos dos puntos excepcionales.

Algoritmo 2.1 Obtención de un arco a partir de un camino

Entrada: Un n -camino $C = \{x = x_1, x_2, \dots, x_k = y\}$.

Salida: Un n -arco contenido en dicho camino que conecta a x con y .

- 1: $l \leftarrow 1$
 - 2: **mientras** no hayamos seleccionado a y **hacer**
 - 3: seleccionar el elemento x_l
 - 4: **si** alguno de sus n -vecinos es elemento del n -camino y tiene índice mayor a $l + 1$ **entonces**
 - 5: elegir el de mayor índice, x_r
 - 6: eliminar de C a x_{l+1}, \dots, x_{r-1}
 - 7: $l \leftarrow l + 1$
 - 8: **si no**
 - 9: $l \leftarrow l + 1$
 - 10: **fin si**
 - 11: **fin mientras**
-

Demostración:

(Suficiencia) Si $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ es un n -arco simple con $m > 2$, entonces $|N_n(x_1) \cap S| = |N_n(x_m) \cap S| = 1$, mientras que si $1 < k < m$, $N_n(x_k) \cap S = \{x_{k-1}, x_k\}$. Además todo n -arco simple es un n -camino, así que en vista de la Observación 2.1.2 y el Teorema 2.1.1, es n -conexo.

(Necesidad) Sea S un conjunto que satisface las condiciones a), b) y c) del enunciado del teorema. Llamemos x_1 a alguno de los puntos excepcionales tales que $|N_n(x_1)| = 1$ e y al otro. Dado que S es n -conexo, podemos hallar un n -camino en S con extremos x_1 e y y en virtud del Teorema 2.2.1, en particular un n -arco en S con extremos x_1 e y . Proponemos que S es exactamente ese n -arco.

Suponiendo que no lo es, habría algún punto x de S que no pertenecería al n -arco; pero al ser S n -conexo habría un n -arco que conectaría a x_1 con x y que en particular no contendría a y (ver la Observación 2.2.1). Denotemos por $x_1 = y_1, \dots, y_t = x$ a tal n -arco. Como $|N_n(x_1) \cap S| = 1$, $y_2 = x_2$, pues ambos serían n -vecinos de x_1 en S ; análogamente, como x_3 e y_3 serían n -vecinos de y_2 diferentes de x_1 y al ser que x_2 sólo tiene dos n -vecinos en S $y_3 = x_3$. Procediendo análogamente veríamos que forzosamente x sería un elemento del n -arco propuesto, o bien y sería un elemento del n -arco que conecta a x y x_1 , siendo ambos casos imposibles. \square

Los siguientes resultados indican que cada punto intermedio del arco simple genera una *disconexión local del espacio*; pero que el arco mismo no desconecta al espacio.

Proposición 2.2.1 (Rosenfeld [2]) Si S es un n -arco simple y $x \in S$ no

es un extremo de S . $N_8(x) \setminus S$ tiene exactamente dos \bar{n} -componentes; mientras que si x es un extremo $N_8(x) \setminus S$ es \bar{n} -conexo.

Demostración:

Si $n = 4$, las opciones para $N_8(x)$ cuando $x \in S$ no es un extremo son (salvo simetrías):

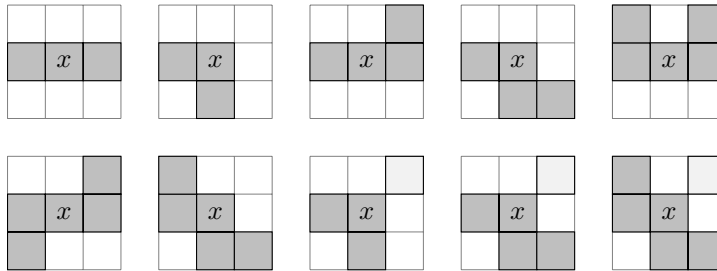


Figura 2.7: Posibilidades locales para un elemento x de un 4-arco, tal que no es extremo. El sombreado ligero indica que tal pixel puede o no ser parte de él.

Por otro lado, si $n = 8$, las opciones son:

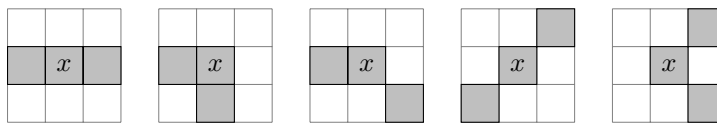


Figura 2.8: Posibilidades locales para un elemento x de un 8-arco, tal que no es extremo.

En todos los casos se genera una desconexión como se requiere.

Por otro lado, cuando se trata de un extremo, los casos son:



Figura 2.9: Posibilidades locales para un elemento x de un 4-arco o de un 8-arco, que es extremo. El sombreado ligero indica que tal pixel puede o no ser parte de él.

□

Teorema 2.2.3 *Un n -arco simple es simplemente n -conexo. (Rosenfeld [2])*

Demostración:

Procediendo por inducción sobre el número de elementos del n -arco simple: si únicamente tiene un punto, el resultado es claro. Supóngase que los n -arcos simples de longitud m son simplemente conexos. Sea S un n -arco simple de longitud $m + 1$. S es n -conexo en vista del Teorema 2.2.2, así que basta ver que su orden de \bar{n} -conexidad es 1. Claramente $\hat{S} = \{x_1, \dots, x_m\}$ es un n -arco. Por hipótesis inductiva, cualesquiera dos puntos $y, z \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$ son \bar{n} -conectables en $(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \cup \{x_{m+1}\}$. Cualquier ocurrencia de x_{m+1} en un tal \bar{n} -camino $\dots, y_k, x_{m+1}, y_{k+2}, \dots$ puede evitarse pues $y_k, y_{k+2} \in N_{\bar{n}}(x_{m+1}) \setminus S$ con x_{m+1} extremo de S . Por la Proposición 2.2.1 este es \bar{n} -conexo, de donde podemos sustituir a x_{m+1} por un \bar{n} -camino que no contiene a x_{m+1} y sólo tomando puntos del complemento de S . □

2.2.2. Curvas cerradas simples

Definición 2.2.2 *Una n -curva cerrada simple es una sucesión finita de puntos x_1, \dots, x_m tal que $m > 4$ y para cualesquiera índices r, s con $1 \leq r, s \leq m$:*

- a) $x_r = x_s$ si y sólo si $r = s$
- b) $x_r \in N_n(x_s)$ si y sólo si $r \equiv s \pm 1 \pmod{m}$.

El significado intuitivo de cada punto de la definición en el caso de 4-curvas cerradas simples se indica en las figuras 2.10 y 2.11.

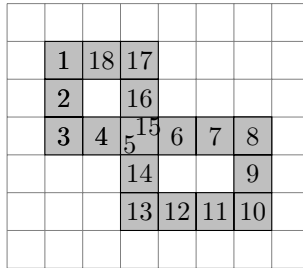


Figura 2.10: Las «autointersecciones» no están permitidas en las curvas cerradas simples.

Proposición 2.2.2 (Rosenfeld [2]) *Eliminar cualquier punto de una n -curva cerrada simple la convierte en un n -arco simple.*

	3	4	5	6	
	2			7	
	1	10	9	8	

Figura 2.11: Las 4-curvas cerradas simples efectivamente son «cerradas». En este caso $1 \equiv 10 + 1 \pmod{10}$.

Demostración:

Si x_i se elimina siendo uno de los puntos x_2, \dots, x_{m-1} , renombrando $y_1 = x_{i+1}, \dots, y_{m-i} = x_m, y_{m-i+1} = x_1, \dots, y_{m-1} = x_{i-1}$. Si se elimina x_1 , renombramos $y_i = x_{i+1}$, mientras que si se elimina x_m , hacemos $y_i = m_i$.

En cualquier caso y_1, \dots, y_{m-1} satisface la definición de n -arco simple. \square

Teorema 2.2.4 (Rosenfeld [2]) *Un conjunto finito S es una n -curva cerrada simple si y sólo si:*

- a) $|S| > 4$,
- b) S es n -conexo,
- c) $|N_n(x) \cap S| = 2$ para todos los puntos en S .

Demostración:

La demostración es análoga a la de la Proposición 2.2.2. \square

A diferencia del Teorema 2.2.2, en este caso no podemos relajar la condición de finitud sobre S , pues bien podemos tener una «sucesión doblemente infinita» como $\mathbb{Z} \times \{0\}$ que satisface los puntos a,b y c de 2.2.4; pero no es una curva cerrada simple.

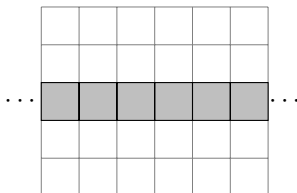


Figura 2.12: Sucesión doblemente infinita.

Todos los resultados previos se han podido escribir indistintamente para 4-conexidad y 8-conexidad. En el siguiente capítulo un buen número de nuestros resultados estarán dados en términos de la 4-conexidad para conjuntos y 8 conexidad para sus complementos. Para mayor información sobre diferencias entre 4-curvas y 8-curvas, por favor refiérase al Apéndice A.

Capítulo 3

El teorema de la curva de Jordan

A partir de ahora trabajaremos únicamente con 4-conexidad para los arcos y curvas y 8-conexidad para sus complementos, con la finalidad de no hacer el texto demasiado extenso.

Los esfuerzos de esta sección están encaminados a probar un análogo digital del Teorema de la Curva de Jordan. Se hace de manera semejante al tratamiento de polígonos en el plano Euclidiano: para un punto en el complemento de la curva, se define cuándo el rayo que emana de ese punto hacia la derecha corta a la curva; aquellos puntos cuyo número de cruces sea par (con el 0 incluido) yacen en el *exterior* de la curva, mientras que si es impar yacen en el *interior*. El siguiente paso es demostrar que tanto el interior como el exterior son no vacíos: en el caso del exterior, esto es muy sencillo pues la curva es acotada, en particular por la derecha. Para el interior, la idea consiste en notar que una esquina superior derecha de la curva (un punto cuyos vecinos inferior e izquierdo yacen en la curva y no hay más puntos de la curva a su derecha) no puede tener a su 8-vecino del suroeste en la misma curva y, por construcción, este debe yacer en el interior. Posteriormente se explica por qué todo 8-camino con un extremo en el interior y otro en el exterior de la curva debe forzosamente cortarla, para terminar concluyendo con la ayuda de otras proposiciones de carácter local, el análogo digital del Teorema de la curva de Jordan. Finalmente haremos uso del teorema analizando la noción de «eliminabilidad» de puntos.

3.1. Resultados preliminares.

Denotaremos por S a una 4-curva cerrada simple.

Sea $x = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$. Denotaremos por $H(x)$ al **rayo horizontal que emana a la derecha de x** , es decir

$$\{(a + k, b) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Agrupemos a los elementos de $H(x) \cap S$ (si existen) por su consecutividad en H : $a + k_1 + 1 \leq \dots \leq a + k_1 + r_1 < a + k_2 + 1 \leq \dots \leq a + k_2 + r_2 < \dots$ donde $0 < k_1 + 1 \leq k_1 + r_1 < a + k_2 + 1 \leq a + k_2 + r_2 < \dots$.

Llamaremos «corrida» a cada familia maximal de elementos sucesivos $(a + k_1 + 1, b), \dots, (a + k_1 + r_1, b)$, es decir: una familia de elementos sucesivos en la curva cerrada simple y cuyos elementos yacen en el mismo rayo horizontal, tal que tanto el antecesor del primer elemento, como el sucesor del último ya no pertenecen a este rayo.

Dado que los elementos de cada corrida son sucesivamente 4-vecinos por definición, por la condición de vecindad de la definición de 4-curva cerrada simple, deben ser sucesivos en S si éste se considera cíclicamente: es decir, consideramos al último elemento como sucesivo del primero. Más aún, tenemos la facilidad de reindizar a la curva para que cualquiera de los elementos de S corresponda con x_1 , cualquiera de sus vecinos con x_2 y así sucesivamente.

Reindicemos a S de tal modo que sea $x_{k+1} = (a + k + 1, b), \dots, x_{k+r} = (a + k + r, b)$ una de dichas corridas. Por maximalidad x_k y x_{k+r+1} no se encuentran en la misma fila b (es decir, su segunda coordenada no puede ser b) y por 4-conexidad, están o arriba o abajo de la fila b . Si ocurre que ambos estén del mismo lado diremos que $H(x)$ **toca a S en la corrida**, si están de lados contrarios diremos que $H(x)$ **crusa a S en dicha corrida**.

Definición 3.1.1 Sean S una 4-curva cerrada simple y $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$. Si el número de corridas en que $H(x)$ crusa a S es impar diremos que x es un punto **en el interior** de S . De otra forma diremos que x es un punto **en el exterior** de S .

Lema 3.1.1 Ningún 4-arco simple ni ninguna 4-curva cerrada simple contienen un cuadrado de 2×2 .

Demostración:

Supongamos que una 4-curva cerrada simple S , contiene un cuadrado 2×2 : $\{(x, y), (x - 1, y), (x - 1, y - 1), (x, y - 1)\}$. Si se ve ordena-

de cíclicamente, los elementos consecutivos son 4-adyacentes, de modo que en la sucesión S tendremos, sin pérdida de generalidad que $x_h = (x, y), x_{h+1} = (x-1, y), x_{h+2} = (x-1, y-1), x_{h+3} = (x, y-1)$ y como (x, y) y $(x, y-1)$ son 4-vecinos, tendremos de la definición de 4-curva cerrada simple que $h \equiv h+3 \pmod{m}$ con $m \geq 5$, es decir que $0 \equiv 3 \pmod{m}$ con $m \geq 5$, lo cuál es imposible.

La demostración de que un 4-arco simple no contiene un cuadrado 2×2 es análoga. \square

Proposición 3.1.1 (Rosenfeld [1]) Tanto el interior como el exterior de cualquier 4-curva cerrada simple son no vacíos.

Demostración:

Sea S una 4-curva cerrada simple. Evidentemente si x está a la derecha de cualquier elemento de S , $H(x)$ no interseca a S y así, x está en el exterior de S .

Para ver que el interior es no vacío, llámese (u, v) al punto más hacia arriba de entre todos los puntos que están más a la derecha de S . Por el Teorema 2.2.4 este punto tiene 2 4-vecinos y, por cómo se eligió a este punto, estos deben ser $(u-1, v)$ y $(u, v-1)$. Proponemos que $(u-1, v-1)$ no pertenece a la curva, pues de otro modo se tendría que S contiene un cuadrado de 2×2 , lo cuál contravendría al Lema 3.1.1. Así $(u-1, v-1) \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$ y $H(u-1, v-1) \cap S = \{(u, v-1)\}$, de modo que $(u-1, v-1)$ está en el interior. \square En la prueba de la Proposición 3.1.2 emplearemos

una generalización de concepto de «corrida» para intersecar a dos rayos horizontales adyacentes, la idea es demostrar que si una corrida interseca a uno de los rayos en un número par de veces, también para el otro, pues en «el medio» no pueden producirse más cruces sino solo toques (se sugiere ver la discusión previa a la Definición 3.1.1 para la definición de cruce y toque).

Proposición 3.1.2 (Rosenfeld [1]) Sean x un punto en el interior e y un punto en el exterior de una 4-curva cerrada simple S . Cualquier 8-camino de x a y interseca a S .

Demostración:

Sea y_1, \dots, y_m un 8-camino con $y_1 = x$, $y_m = y$ y supongamos que para todo índice k , $y_k \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$.

Dado que y_1 está en el interior e y_m está en el exterior de S , debe existir un índice q con $1 < q \leq m$ tal que y_{q-1} está en el interior de S e y_q está en el exterior de S .

Nótese que si y_{q-1} e y_q fueran vecinos horizontales, el número de corridas de S que intersecan a $H(y_{q-1})$ y $H(y_q)$ sería el mismo. Luego ambos

estarían en el interior o ambos en el exterior de S .

Ahora demostraremos que tampoco es posible que y_{q-1} e y_q sean vecinos verticales o diagonales.

Sea $R = \{x_{k+1}, \dots, x_{k+r}\}$ una corrida de elementos de S que interseca a $H(y_{q-1}) \cup H(y_q)$, de este modo tanto x_k como x_{k+r+1} están ya sea por arriba o por abajo de ambas H . Si ocurre que ambos puntos yacen por arriba de ambas H (sin pérdida de generalidad, en adelante asumiremos que $H(y_{q-1})$ está por arriba de $H(y_q)$) y que todos los puntos de la corrida están en $H(y_{q-1})$, entonces $H(y_{q-1})$ sólo toca a S en R y $H(y_q)$ ni si quiera lo hace siendo que en ambos casos el número de cruces de la corrida es un número par (en particular 0); si por otro lado, alguno de los x_i está en $H(y_q)$ sea x_s el primero y x_t el último de ellos: ocurrirá que $H(y_{q-1})$ cruza a R en $\{x_{k+2}, \dots, x_{s-1}\}$ y $\{x_{t+1}, \dots, x_{k+r}\}$ y $H(y_q)$ no lo cruza. En cualquier caso, ambos números de cruces de $H(y_q)$ y $H(y_{q-1})$ son pares (ver la figura 3.1).

Razonando análogamente en el caso cuando uno de entre x_k y x_{k+r+1} está arriba y otro abajo llegaremos a que el número de cruces de $H(y_q)$ y $H(y_{q-1})$ a S es para ambos igual a 1 (ver la figura 3.2), de donde ambos están en el exterior de S o en el interior de S .

De esta contradicción deducimos que algún punto del 8-camino debe pertenecer a S . □

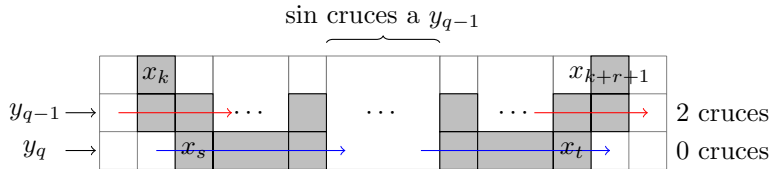


Figura 3.1: Corrida en $H(y_{q-1}) \cup H(y_q)$ cuando x_k y x_{k+r+1} están ambos por arriba de $H(y_{q-1})$.

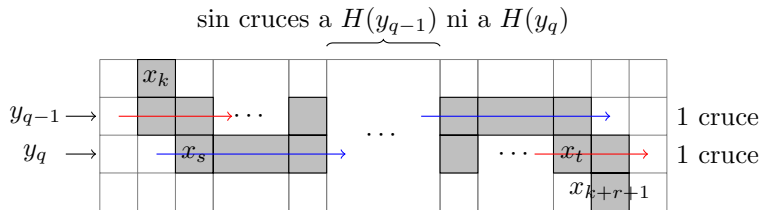


Figura 3.2: Corrida en $H(y_{q-1}) \cup H(y_q)$ cuando x_k está arriba de $H(y_{q-1})$ y x_{k+r+1} está abajo de $H(y_q)$.

Llegados a este punto falta demostrar que cuando S es una 4-curva

cerrada simple $\mathbb{Z} \setminus S$ tiene exactamente dos componentes y que todo punto de S es adyacente a ambas; sin embargo vamos a posponer estos resultados a la siguiente sección dónde su utilidad se pondrá de manifiesto.

3.2. Elementos eliminables

En los artículos [1] y [2], Rosenfeld caracteriza y analiza la existencia de algún punto en una imagen digital cuya remoción no «modifica la topología de la imagen», entendiéndose por esto que el número de componentes de la imagen y su complemento permanece invariante tras la eliminación de dicho punto. La restricción de este lenguaje al caso finito es evidente si se piensa en subconjuntos generales de \mathbb{Z}^2 tales que tanto ellos mismos como sus complementos posean una cantidad numerable de componentes. En el artículo «Adjacency in Digital Pictures» [3], Rosenfeld hizo una observación simple; pero que será nuestro punto de partida para una formulación un poco más general de sus resultados respecto a la posibilidad de eliminar elementos de un conjunto y «preservar la topología» del conjunto en un cierto sentido, a saber:

Proposición 3.2.1 (Rosenfeld [3]). Sean $T \subseteq S \subseteq \mathbb{Z}^2$. Cada n -componente de T está contenida en una única n -componente de S .

Demostración:

Si dos puntos son n -conectables por un n -camino en T , entonces son n -conectables por un n -camino en S . Luego la n -componente de un elemento x de T es subconjunto de la n -componente de x en S . Además, dado que las n -componentes de S forman una partición de S , dicha n -componente es única. \square

Este hecho nos coloca en posición de definir una función f del conjunto de las n -componentes de T al conjunto de las componentes de S . En adelante denotaremos al conjunto de n -componentes del conjunto S mediante $\mathcal{C}_n(S)$

Proposición 3.2.2 Sean $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ y $x \in S$. La función $f_x : \mathcal{C}_4(S \setminus \{x\}) \rightarrow \mathcal{C}_4(S)$ que a cada 4-componente de $S \setminus \{x\}$ le asigna la única 4-componente de S que la contiene es:

1. *Injectiva si y sólo si los puntos de $N_4(x) \cap S$ son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$,*
2. *Suprayectiva si y sólo si $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$.*

Demostración:

1. (Suficiencia) Supongamos que dos puntos de $N_4(x) \cap S$ no son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$. Entonces hay al menos dos componentes en $\mathcal{C}_4(S \setminus \{x\})$ a los que corresponde una única 4-componente en $\mathcal{C}_4(S)$ bajo f_x (justamente la de x).
(Necesidad) Supongamos que los puntos de $N_4(x) \cap S$ son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$. Sean C_1, C_2 dos 4-componentes diferentes en $\mathcal{C}_4(S \setminus \{x\})$ y x_1, x_2 dos puntos, uno en cada una. Si ocurriera que $f_x(C_1) = f_x(C_2)$, entonces el 4-camino en S que conecta a x_1 y a x_2 debe pasar forzosamente por x ; es decir, tener la forma $\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots$; pero como $x_{i-1}, x_{i+1} \in N_4(x) \cap S$ es 4-conectable en $S \setminus \{x\}$ cada ocurrencia de x en el 4-camino puede ser sustituido por un 4-camino en $S \setminus \{x\}$, lo cuál es una contradicción.
2. (Suficiencia) Supongamos que a cada componente de S contiene al menos una componente de $S \setminus \{x\}$. Entonces la 4-componente C de x contiene alguna 4-componente de $S \setminus \{x\}$, C' . Nótese que esta componente debe ser 4-adyacente a x , puesto que si no ocurriera así $C' = C$. Esta última afirmación es cierta puesto que dos puntos 4-conectables en C siguen siéndolo tras eliminar a x pues su 4-camino no puede contener a x al no ser 4-adyacente y así $C \subseteq C'$. Como C' es 4-adyacente a x , entonces $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$.
(Necesidad) Si ocurriera que $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$, entonces $\{x\}$ es una 4-componente de S y claramente ninguna de las 4-componentes de $S \setminus \{x\}$ está contenida en $\{x\}$.

Habiendo demostrado ambas equivalencias, el resultado queda establecido. \square

En completa analogía con la Proposición 3.1.2, para el caso de 8-conexidad, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.2.3 Sean $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ y $x \in S$. La función $\bar{f}_x : \mathcal{C}_8(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \rightarrow \mathcal{C}_8(\mathbb{Z}^2 \setminus (S \setminus \{x\}))$ que a cada 8-componente del complemento de S le asigna la única 8-componente del complemento de $S \setminus \{x\}$ que la contiene es:

1. *inyectiva si y sólo si los puntos de $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ son 8-conectables en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$,*
2. *suprayectiva si y sólo si $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S) \neq \emptyset$.*

Demostración:

La prueba es análoga a la de la Proposición 3.2.2. \square Estos resultados están dirigidos a realizar un «conteo» muy particular de las

componentes de cada conjunto y sus complementos. Los puntos de interés son aquellos que preservan tanto las componentes de cada conjunto y su complemento, es decir tales que tanto f_x como \bar{f}_x son biyectivas. De las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.2 es claro el Corolario siguiente:

Corolario 3.2.1 Sean $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ y $x \in S$. Las funciones f_x y \bar{f}_x son biyectivas si y sólo si

1. $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$
2. $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S) \neq \emptyset$
3. Los puntos de $N_4(x) \cap S$ son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$
4. Los puntos de $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ son 8-conectables en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$.

La condición 1 puede interpretarse como que x no es un «punto aislado» de S , mientras que la condición 2 como que x no es un «punto en el interior» de S . Las dos condiciones restantes tienen que ver con la conexidad de los puntos en la vecindad de x dentro de sus respectivos conjuntos con sus respectivas conexidades. Es notable que Rosenfeld lograra en [1] reducir ambas condiciones a una sola relativa únicamente a los 8-vecinos de x aún con el lenguaje finitista de número de componentes. La ventaja de esto es clara: en lugar de cuestionarnos sobre si dos puntos en la vecindad de x son conectables por algún camino dentro del conjunto completo, sólo tenemos que restringir la atención en la 8-vecindad de x .

Intuitivamente, se trata de considerar que si dos puntos de $N_4(x) \cap S$ son conectables en $S \setminus \{x\}$; pero no en $N_8(x) \cap S$, el camino entre ambos agregándole a x formará una 4-curva cerrada simple que «encerrará» a algún punto de $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$, por lo cuál este no sería 8-conexo en el complemento de S . En el apartado siguiente haremos una modificación a la prueba original de Rosenfeld ([1]) para apegarnos a esta intuición. Emplearemos resultados que él mismo demostró para lograr este cometido y para evitar la excesiva enumeración de casos; pero también modificaremos las pruebas de estos resultados.

3.2.1. Vuelta al teorema de la curva de Jordan

Proposición 3.2.4 Sean S una 4-curva cerrada simple y $x \in S$. $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ tiene dos 8-componentes, una de ellas yace en el interior de S y la otra en el exterior.

Demostración:

Sean e un punto en el exterior de S e i un punto en el interior. Dado que no son 8-conectables en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$ (Proposición 3.1.2) tenemos garantizada la existencia de dos 8-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus S$. Sea $s \in S$. Según la Proposición 2.2.2 $S \setminus \{s\}$ es un 4-arco y así $\mathbb{Z}^2 \setminus (S \setminus \{s\})$ es 8-conexo. Tomemos un 8-arco que conecte a e con i . Este tendrá la forma $A = \{e, \dots, e', s, i', \dots, i\}$, pues debe contener a s al no ser e e i 8-conectables en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$. Dado que A es un arco, s no aparece entre e y e' ; ni tampoco entre i e i' , de modo que tenemos arcos en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$ que conectan a e , e' y a i , i' . De esto se sigue que e' yace en el exterior de S e i' en el interior (nuevamente por la Proposición 3.1.2).

Finalmente notemos que s tiene únicamente dos 4-vecinos en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$, de modo que todo arco que conecte a i con algún punto arbitrario P en el exterior de S debe tener la forma $i, \dots, i', s, e', \dots, P$. De modo que concatenando los caminos de e a e' y de e' a P garantizamos que el exterior de S es 8-conexo y, análogamente, podemos garantizar que el interior de S es 8-conexo \square

Dado que en la demostración de la Proposición 3.2.4 s fue un punto arbitrario en S , tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2 Cada punto de una 4-curva cerrada simple es 4-adyacente a las dos 8-componentes de su complemento.

Proposición 3.2.5 Sea x_0 un elemento de S tal que $N_4(x_0)$ está contenido en una 4-componente de $S \setminus \{x_0\}$. De todos los 4-caminos en $S \setminus \{x_0\}$ entre dos elementos de $N_4(x_0) \cap S$ que pertenecen a diferentes 4-componentes de $N_8(x_0) \cap S$, sea x_1, \dots, x_n aquel que es lo más corto posible.

El conjunto $\{x_0, \dots, x_n\}$ es una 4-curva cerrada simple y su interior contiene a un elemento de $(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \cap N_8(x_0)$, así como su interior también contiene a otro de estos elementos.

Demostración:

Primero nótese que siempre que $N_4(x_0) \cap S$ tenga más de una 4-componente en $N_8(x_0) \cap S$ un tal camino existe debido al buen orden de \mathbb{N} . Nótese que, salvo x_1 y x_n ningún elemento del 4-camino es 4-vecino de x_0 , puesto que si x_i fuera un 4-vecino de x_0 , x_1, \dots, x_i y x_i, \dots, x_n serían ambos caminos más cortos y x_i no puede estar simultáneamente en la misma componente que x_1 y x_n .

Debido a que x_1 y x_n no yacen en la misma 4-componente de $N_8(x_0)$, para conectarlos se requiere de al menos 5 puntos más. Podemos concluir que x_0, x_1, \dots, x_n es una 4-curva cerrada simple pues, por minimalidad, x_1, \dots, x_n es un 4-arco y agregar a x_0 no propicia «adyacencia adicional» más que para x_1 y x_n , siendo $C = \{x_0, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de

más de 4 puntos, tal que es 4-conexo y cada punto tiene exactamente dos 4-vecinos en dicho conjunto (Teorema 2.2.4).

Dado que x_1, x_n no son 4-conectables en $N_8(x_0) \cap S$ tenemos que $N_8(x_0) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ tiene al menos dos 8-componentes debido a que $N_8(x_0)$ es una 4-curva cerrada simple y ninguno de los arcos que conectan a x_1 y a x_n están completamente contenidos en S . Según la Proposición 3.2.4 $N_8(x_0) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus C)$ tiene dos 8-componentes, un de ellas en el interior y la otra en el exterior de C . Debido a que $C \subseteq S$, las 8-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus S$ están contenidas en las 8-componentes de $\mathbb{Z}^2 \setminus C$. Podemos asegurar que ambas componentes mencionadas de $N_8(x_0) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ no yacen en la misma componente de $N_8(x_0) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus C)$, debido a que para conectarlos en $N_8(x_0)$ debemos emplear a x_1 o a x_n . De este modo garantizamos que algún punto de $N_8(x_0) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ yace en el interior de C . \square Con ello podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 Sean $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ y $x \in S$. Las funciones f_x y \bar{f}_x son ambas biyecciones si y sólo si:

1. $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$,
2. $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S) \neq \emptyset$,
3. $N_4(x) \cap S$ es 4-conexo en $N_8(x) \cap S$.

Demostración:

Ya hemos demostrado que f_x y \bar{f}_x son ambas biyecciones si y sólo si

- a) $N_4(x) \cap S \neq \emptyset$,
- b) $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S) \neq \emptyset$,
- c) Los puntos de $N_4(x) \cap S$ son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$;
- d) Los puntos de $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ son 8-conectables en $\mathbb{Z} \setminus S$.

Luego, únicamente hay que demostrar que el punto 3 del enunciado de este teorema es equivalente a c) y d) anteriores (asumiendo 1 y 2).

(3 \Rightarrow c, d) Si $N_4(x) \cap S$ es 4-conexo en $N_8(x) \cap S$, lo es en $S \setminus \{x\}$, así que ya hemos probado c). Para probar d) hay que ver que cuando $N_4(x) \cap S$ es 4-conexo en $N_8(x) \cap S$, $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ es 8-conexo en $\mathbb{Z} \setminus S$, lo cual puede hacerse mediante exploración de casos, pues salvo simetrías, cuando 1, 2 y 3 ocurren, la situación de $N_8(x)$ es alguna de las que se muestran en la figura 3.2.1.

(c, d \Rightarrow 3) Supongamos que los puntos de $N_4(x) \cap S$ son 4-conectables en $S \setminus \{x\}$; pero no lo son en $N_8(x) \cap S$. Tendremos que $N_8(x) \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ consta de al menos dos puntos que no son 8-conectables entre sí en dicho

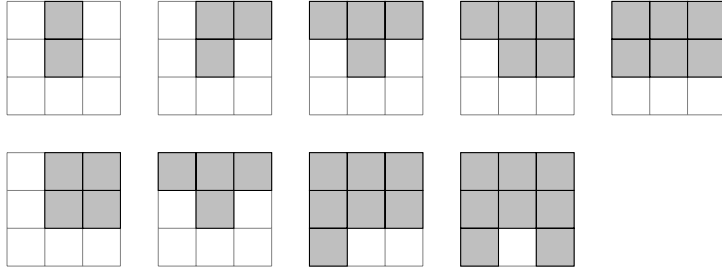


Figura 3.3: Debido a los incisos 1 y 2 debe haber 4-vecinos de x tanto en S como su complemento. Podemos agotar todos los casos viendo las posibilidades cuando 1,2 o 3 4-vecinos de x están en S .

conjunto.

Respaldándonos en la Proposición 3.2.5 tenemos que un camino minimal entre elementos de $N_4(x)$ que pertenecen a diferentes 4-componentes de $N_8(x) \cap S$, junto con x formarán una 4-curva cerrada simple, C tal que tanto en su interior como en su exterior hay elementos de $(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \cap N_8(x)$. El inciso d) indica que los puntos de $N_8 \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus S)$ son 8-conectables en $\mathbb{Z}^2 \setminus S$, de modo que, al tener C un elemento de $(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \cap N_8(x)$ en su interior, este debe contenerlo a todo. Sin embargo, por el mismo argumento, $(\mathbb{Z}^2 \setminus S) \cap N_8(x)$ debe estar completamente contenido en el exterior de la curva. De esta contradicción concluimos que los puntos de $N_4(x) \cap S$ deben ser 4-conectables en $N_8(x) \cap S$. \square

Definición 3.2.1 Sean $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ y $x_0 \in \mathbb{Z}^2$. Si las funciones f_{x_0} y \bar{f}_{x_0} son ambas biyecciones diremos que x_0 es un elemento 4-eliminable de S .

Capítulo 4

Funciones «continuas»

En el artículo «‘Continuous’ functions on digital pictures» de 1986 [5], Azriel Rosenfeld presentó una noción de función continua para espacios digitales. Estas funciones corresponden, en el caso plano e inyectivo, a operaciones geométricas bien conocidas y, en general poseen propiedades más débiles que las de sus contrapartes continuas. Nos apegaremos a la presentación encontrada ahí. En el apéndice A se presentan resultados muy sencillos respecto a la interacción entre caminos en el plano digital y un cierto tipo de funciones ‘continuas’ definidas en él.

4.1. Definiciones básicas

En el artículo [5], Rosenfeld redefinió para estos objetivos a una **imagen digital k -dimensional** (con $k \in \mathbb{N}$) como el conjunto

$$I_k = \{(p_1, \dots, p_k) \mid 0 \leq p_i \leq n, p_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k\}.$$

También podemos pensar en colecciones de puntos que no contengan al origen $(0, \dots, 0)$ o incluso conjuntos más generales. Consideremos a una métrica d_k en I_k tal que para dos puntos distintos $P, Q \in I_k$, siempre es mayor o igual a 1 y es exactamente igual a 1 sólo para parejas de puntos que tienen todas sus coordenadas iguales excepto una, la cuál difiera en exactamente una unidad. Esta métrica bien puede ser la «métrica del taxista». La definición de continuidad será un análogo de la definición usual de continuidad cambiando la condición de ser positivo por ser mayor o igual que 1.

En cada uno de estos espacios I_k podemos definir un tipo especial de conectividad: los puntos P y Q están conectados si y sólo si $d_k(P, Q) =$

1. Con esta noción podemos definir caminos y conexidad de la misma manera que lo hicimos en el capítulo 2.

Lema 4.1.1 (Rosenfeld [5]). Los conjuntos I_k son conexos.

Demostración:

Sean $P, Q \in I_k$ diferentes. Para fijar ideas, sean $P = (p_1, \dots, p_k)$, $Q = (q_1, \dots, q_k)$ con $p_1 < q_1$. Consideremos al camino $(p_1, p_2, \dots, p_k), (p_1 + 1, p_2, \dots, p_k), \dots, (q_1, p_2, \dots, p_k)$. En este camino hemos logrado conectar P con un punto que tiene todas sus coordenadas iguales a las de P excepto la primera, que es igual a la de Q . Continuando de esta manera podemos ir conectando a P con puntos cuyas primera y segunda coordenada sean iguales a las de Q y, así sucesivamente, finalmente conectarlo con Q . \square

Definición 4.1.1 Sea f una función de I_k en I_s . Llamaremos a f **continua** en un punto P si y sólo si

$$\forall \varepsilon \geq 1 : \exists \delta \geq 1 : [d_k(P, Q) \leq \delta \Rightarrow d_s(f(P), f(Q)) \leq \varepsilon].$$

Comenzaremos dando una caracterización de las funciones continuas en un punto: f será continua en el punto P si y sólo si, envía a los vecinos de P (definidos en este caso como aquellos puntos Q tales que $d_k(P, Q) = 1$) en los vecinos de $f(P)$ (los cuáles son los puntos Q tales que $d_s(f(P), Q) = 1$).

Teorema 4.1.1 (Rosenfeld [5]). La función $f : I_r \rightarrow I_s$ es continua en P si y sólo si para cualquier punto Q

$$d_r(P, Q) \leq 1 \Rightarrow d_s(f(P), f(Q)) \leq 1.$$

Demostración:

(Suficiencia) Si f es continua, sea $\varepsilon = 1$. Luego existe $\delta \geq 1$ tal que si $d_k(P, Q) \leq \delta$ entonces $d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$ y, en particular esto último es cierto para $\delta = 1$. Dicho de otra manera, si $d_k(P, Q) \leq 1$, entonces $d_k(P, Q) \leq \delta$ y así $d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$.

(Necesidad) Si, por otro lado, $d_r(P, Q) \leq 1 \Rightarrow d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$, tendremos que para cualquier $\varepsilon \geq 1$:

$$d_r(P, Q) \leq 1 \Rightarrow d_s(f(P), f(Q)) \leq 1 \leq \varepsilon$$

Al probar ambas implicaciones, hemos demostrado el resultado. \square

Otra manera de interpretar a este teorema se logra notando que hemos eliminado la variabilidad de δ en función del punto P , de modo que una función continua en cada punto de su dominio sera «uniformemente continua» en él.

Proposición 4.1.1 (Rosenfeld [5]). Sea $f : I_r \rightarrow I_s$ una función.

1. Si f es constante, es continua.
2. Si toma exactamente dos valores, es continua si y sólo si los dos valores son vecinos

Demostración:

Demostraremos independientemente ambos resultados:

1. Si f es constante, entonces $d_s(f(P), f(Q)) = 0 \leq 1$, así que es continua.
2. Si f toma dos valores vecinos $d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$, pues $f(P)$ y $f(Q)$ son siempre iguales o vecinos. Supongamos ahora que f es continua y toma dos valores que no son vecinos entre sí $f(P)$ y $f(Q)$. Dado que los I_k son conexos, sea $x_1 = P, \dots, x_m = Q$ un camino que los conecta. Sea x_k el último elemento tal que todos los previos y él mismo tiene como imagen a $f(P)$, luego $f(x_{k+1})$ es vecino de $f(P)$, de donde f tomaría al menos 3 valores diferentes.

La proposición queda demostrada. □

Pronto comienza a verse que las funciones continuas en este nuevo sentido no preservan las propiedades de las funciones continuas clásicas, pues pronto ceden ante la exigencia de ser cerradas bajo operaciones puntuales: por ejemplo, tomemos la función f que asigne a cada entero su residuo al dividir entre 2: esta función es continua debido a que únicamente toma dos valores, los cuáles son vecinos (Proposición 4.1.1). Luego $f + f$ tomará los valores 0 en los pares y 2 en los impares y, debido a la Proposición 4.1.1, sabemos que esta no es continua. Sin embargo estas funciones continuas son cerradas bajo composición.

Teorema 4.1.2 (Rosenfeld [5]). Sean $f : I_r \rightarrow I_s$ y $g : I_s \rightarrow I_t$ funciones continuas en P y $f(P)$, respectivamente. La función $g \circ f : I_r \rightarrow I_t$ es continua en P .

Demostración:

Debido a que f es continua en P : $d_r(P, Q) \leq 1 \Rightarrow d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$ y, dado que g es continua en $f(P)$, $d_s(f(P), Q) \leq 1 \Rightarrow d_t(g \circ f(P), g(Q)) \leq 1$. Combinando ambas implicaciones tenemos que $d_r(P, Q) \leq 1 \Rightarrow d_s(g \circ f(P), g \circ f(Q)) \leq 1$. □

Teorema 4.1.3 (Rosenfeld [5]). Si $f : I_r \rightarrow I_s$ es una función, entonces f es continua si y sólo si manda conjuntos conexos en conjuntos conexos.

Demostración:

(Suficiencia) Si f es continua y $S \subseteq I_r$ es conexo, dados $f(P), f(Q) \in f(S)$, podemos tomar un camino $P_1 = P, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = Q$ que los conecta en S , luego $d_r(P_i, P_{i+1}) = 1$, de modo que $d_s(f(P_i), f(P_{i+1})) \leq 1$. Eliminando a los puntos j tales que $d_s(f(P_j), f(P_{j+1})) = 0$, tenemos un camino en $f(S)$ que conecta a $f(P)$ y a $f(Q)$. Luego $f(S)$ es conexo.

(Necesidad) Si f manda conexos en conexos, dados $P, Q \in I_r$ con $d_r(P, Q) = 1$, $\{f(P), f(Q)\}$ consta de un único punto o de dos puntos vecinos. En cualquier caso $d_s(f(P), f(Q)) \leq 1$. \square

4.2. Funciones escalares

En el caso de \mathbb{Z} , podemos considerar que la noción de conexidad tratada es «heredada» por la 4-conexidad u 8-conexidad de \mathbb{Z}^2 . Si identificamos, para cada entero b_0 , a \mathbb{Z} con $\{(a, b_0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, los vecinos de un punto $k \in \mathbb{Z}$ están dados por la intersección $N_4(k, b_0) \cap \{(a, b_0) \in \mathbb{Z}^2\}$ (la cuál a su vez es igual a $N_8(k, b_0) \cap \{(a, b_0) \in \mathbb{Z}^2\}$).

En este contexto tenemos un único tipo de conexidad y un único tipo de caminos. Abusaremos un poco de la notación y a veces encajaremos a \mathbb{Z} en \mathbb{Z}^2 . Nuevamente, siguiendo a Rosenfeld:

Lema 4.2.1 (Rosenfeld [5]). Si x_1, \dots, x_m es un camino en \mathbb{Z} , entonces $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un intervalo discreto, es decir un conjunto de la forma

$$[a, b] \cap \mathbb{Z} \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z}, a < b.$$

Demostración:

Sean $a = \min\{x_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$ y $b = \max\{x_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Dado que x_1, \dots, x_m es un camino en \mathbb{Z} , el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$ es 4-conexo en \mathbb{Z}^2 (empleando la identificación indicada al inicio de la sección, considerando iguales, por ejemplo, a $\{x_1, \dots, x_m\}$ con $\{x_1, \dots, x_m\} \times \{0\}$), de modo que por el Teorema 2.2.1, dicho camino contiene a un 4-arco.

Notemos que este 4-arco está contenido en \mathbb{Z} , contenido en $\{x_1, \dots, x_m\}$, comienza en $a = \min\{x_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$ y termina en $b = \max\{x_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Etiquetemos a los puntos de dicho arco mediante y_1, \dots, y_s .

Tendremos entonces que $y_2 = y_1 + 1$ o bien $y_2 = y_1 - 1$; pero como $y_2 = x_r$ para alguna r , entonces debe ocurrir que $y_2 = y_1 + 1$. Luego el camino x_1, \dots, x_m contiene a $y_2 = a + 1$.

Considerando que en los 4-arcos nunca se repite algún punto con dos índices diferentes tendremos que $y_t = y_1 + (t - 1)$, de modo que terminamos cubriendo a todos los enteros entre a y b . \square

Emplearemos este resultado para probar un análogo al teorema de los valores intermedios para funciones continuas en un conexo. Una versión de este teorema –en la recta real– puede enunciarse de la siguiente manera: si $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema 4.2.1 (Rosenfeld [5]). *Sea $f : I_r \rightarrow I_1$ una función continua. Entonces f tiene la propiedad de los valores intermedios, es decir: si $f(P) = a$, $f(Q) = b$ y $a < c < b$, entonces existe $R \in I_r$ tal que $f(R) = c$.*

Demostración:

Sean f una función continua y S un camino en I_r que contenga a P y a Q como extremos. Luego $f(S)$ es un intervalo discreto que contiene a $f(P) = a$ y a $f(Q) = b$. Como consecuencia del Lema 4.2.1 $f(S)$ contiene a c , así que debe existir R tal que $f(R) = c$. \square Otra propiedad de

las funciones continuas que es de mucho interés es la propiedad de los puntos fijos. En este caso, dicha propiedad no es válida. Como ejemplo puede pensarse en la función que asigna a cada entero k , el 1 si es par o el 0 si es impar. Esta función es continua; pero no tiene ningún punto fijo.

A pesar de que no tenemos la propiedad del punto fijo, tenemos versiones débiles de ella. La primera se da en el caso de una variable:

Teorema 4.2.2 (Rosenfeld [5]). *Sean $I = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ un intervalo discreto con más de un punto y f una función continua de I en I . Existe un número $c \in I$ tal que $|f(c) - c| \leq 1$.*

Demostración:

Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$ terminamos. De otra manera $f(a) > a$ y $f(b) < b$.

Tenemos que $f(t) - t$ es negativa en $t = b$ y positiva en $t = a$. Ahora veremos que en algún momento debe ocurrir que $f(t) - t$ tome el valor 1, -1 o 0.

Sean t y $t + 1$ dos puntos consecutivos en I . Por continuidad $f(t + 1)$ es vecino de $f(t)$ o igual a él, así que es igual a $f(t) + 1$, $f(t) - 1$ o $f(t)$, de tal modo que $f(t + 1) - (t + 1)$ debe ser igual a $f(t) - t - 2$ o $f(t) - t - 1$

o $f(t) - t$.

Luego $f(t+1) - (t+1)$ guarda una relación con $f(t) - t$ pues respecto a este último valor decrece en -2 , en -1 o no cambia. Como comenzamos con $f(t) - t$ positiva en $t = a$ y termina negativa en $t = b$, decrementando en pasos de tamaño, a lo más, 2, en algún momento $f(t) - t$ debe yacer en $\{-1, 0, 1\}$. \square

En el caso de dos dimensiones tenemos un resultado un poco más débil:

Teorema 4.2.3 (Rosenfeld [5]). *Sea I una imagen digital en \mathbb{Z}^2 , y sea f una función continua de I en I . Existe un punto $P \in I$ tal que $f(P) = P$ o $f(P)$ es 8-vecino de P .*

Demostración:

Sean P y $f(P)$ cuya distancia es menor o igual que la distancia entre cualquier otro par $(Q, f(Q))$ (con $Q \in I$) –consideraremos, para fijar ideas, a la métrica del taxista–. Supongamos que $f(P)$ no es 8-vecino de P . Rotulemos $P = (u, v)$, $f(P) = (u + i, v + j)$. Se sugiere al lector prestar atención a las figuras 4.1 y 4.2.

(Caso 1): ambas coordenadas de P y $f(P)$ son diferentes.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que $i > 1$ y que $j \geq 1$.

(Paso 1) Tomemos $Q = (u + 1, v)$. Por la minimalidad de la distancia de P a $f(P)$, $f(Q)$ deberá ser $(u + i + 1, v)$ o bien $(u + i, v + j + 1)$. En el primer caso las diferencias de las coordenadas son las mismas, mientras que en el segundo una de ellas ha aumentado en 1 mientras que la otra ha decrecido en 1. Entonces aún tenemos una diferencia mayor a 1 y la otra mayor o igual a 1. De esta manera volvemos a tener las mismas condiciones iniciales; pero en un punto que se encuentra más arriba o más a la derecha que P . Inductivamente podemos continuar «empujando» a $f(P)$ hasta que llegue a algún borde de I . Ver figura 4.1.

(Paso 2) Asumamos ahora que hemos llegado a un momento en que $f(P)$ alcanzó al borde superior de I . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que nos encontramos en la situación de que $i > 1$ y $j \geq 1$. Sea $Q = (u + 1, v)$; luego $f(Q)$ debe ser $(u + i + 1, v + j)$, de manera que podemos proseguir de esta manera hasta llevar a $f(Q)$ a la esquina superior derecha de I manteniendo las diferencias en las coordenadas iguales –para ello recursivamente sustituiremos a $P = (u, v)$ por el anterior Q y tomaremos como nuevo Q a $(u + 1, v)$ –. Debido a que $i > 1$, al finalizar

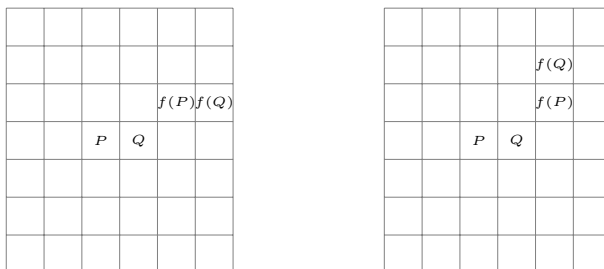


Figura 4.1: Ambas posibilidades para Q y $f(Q)$. En la imagen de la izquierda ya hemos alcanzado el borde; mientras que en la de la derecha podemos aún alcanzar a cualquiera de ambos bordes.

este proceso aún podremos elegir al punto $Q = (u + 1, v)$; pero debido a que $f(P)$ ya se encuentra en la esquina superior derecha no queda ningún vecino suyo al que podamos asignar $f(Q)$ sin contravenir la minimalidad de la distancia de P a $f(P)$. Véase la figura 4.2

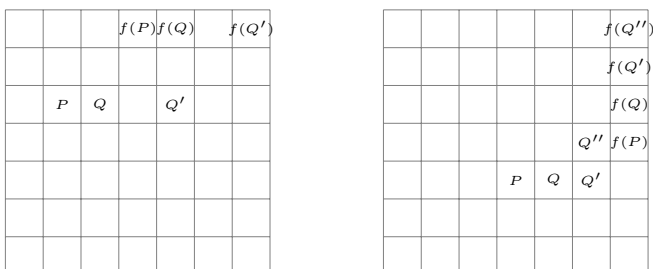


Figura 4.2: Cuando se alcanza alguno de los bordes podemos continuar hasta alcanzar una esquina y, por tanto, una contradicción.

Si, por otro lado, asumiéramos que $f(P)$ alcanzó el borde derecho de I , al tomar a $Q = (u+1, v)$, entonces $f(Q)$ debe ser igual a $(u+i, v+j+1)$, de modo que mientras podamos seguir tomando puntos a la derecha de P podremos mover a $f(P)$ hacia arriba (en un proceso de reemplazo semejante al descrito en el párrafo anterior), decrementando la distancia horizontal mientras aumentamos la vertical. Si $f(P)$ alcanza la esquina superior derecha mientras la distancia horizontal aún es mayor o igual a 1 tendremos una contradicción semejante a la vista en el párrafo anterior. De otra manera, cuando es igual a 1 tomamos $Q = (u, v + 1)$ y continuamos «moviendo» a P hacia arriba hasta que finalmente alcance a la esquina superior derecha. Ver figura 4.2.

(Caso 2): P y $f(P)$ tienen una coordenada igual y la otra diferente (diferencia mayor o igual a 2).

Sin pérdida de generalidad asumiremos que $i = 0$, de modo que $P = (u, v)$ y $f(P) = (u, v + j)$. Al tomar $Q = (u, v + 1)$ $f(Q)$ podrá tomar como valores $(u, v + j + 1)$, $(u + 1, v + j)$ o $(u - 1, v + j)$.

En el primer caso en el proceso de «movimiento de P » habremos movido a P hacia arriba, mientras que en el segundo y tercero a posiciones ya previstas en el Caso 1; sin embargo, debido nuevamente a que I es acotado, el proceso de enviar a P hacia arriba en algún momento debe detenerse (a lo más llegando al borde superior) y nuevamente terminamos en un escenario previsto por el Caso 1. \square

4.3. Funciones continuas e inyectivas

Las funciones continuas e inyectivas de la recta discreta \mathbb{Z} en sí misma y del plano discreto \mathbb{Z}^2 en sí mismo resultan ser transformaciones geométricas usuales. Este apartado está dedicado a realizar una caracterización de las funciones continuas e inyectivas en ambos casos tal cómo lo realizó Rosenfeld en [5]

Realizaremos primero la caracterización de las funciones continuas e inyectivas de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} .

Teorema 4.3.1 (Rosenfeld en [5]) *Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función continua e inyectiva: existe un entero k tal que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $f(i) = k + i$ o bien $f(i) = k - i$.*

Demostración:

Si $f(0) = k$, por continuidad $f(1)$ únicamente podría tomar como valor a $k + 1$ o a $k - 1$. Si $f(1) = k + 1$, por ser f una función continua e inyectiva $f(-1) = k - 1$. Luego tendremos que la restricción de f al intervalo $[-1, 1]$ tiene la forma $f(i) = k + i$.

Supongamos que en el intervalo $[-n, n]$, f toma la forma $f(i) = k + i$. Luego $f(n + 1)$ únicamente puede tomar el valor $k + n + 1$ pues $k + n - 1$ ya fue tomado por $f(n - 1)$ y $k + n$ por $f(n)$. Análogamente tendríamos que $f(-n - 1) = k + (-n - 1)$. Luego debe ocurrir que para todo $n \in \mathbb{Z}$ $f(n) = k + n$. Análogamente, en el caso en el cuál $f(1) = k - 1$ tendremos que $f(i) = k - i$ \square

Notemos ahora que debido a la propiedad de las funciones continuas de enviar vecinos en vecinos, es imposible la existencia de funciones continuas e inyectivas de \mathbb{Z}^2 en \mathbb{Z} debido a que los puntos del primer espacio

tienen 4 vecinos, mientras que los del segundo tienen únicamente dos, de modo que es imposible enviar a los 4 vecinos de un punto en 4 vecinos diferentes en la imagen. Es posible, sin embargo, definir funciones continuas e inyectivas de \mathbb{Z} a \mathbb{Z}^2 . Si empezamos observando la imagen de 0 y de ahí la de los enteros sucesivos, tendremos que estamos seleccionando sucesivamente a vecinos del primer pixel elegido sin repetir ninguno. Entonces podemos pensar que estas funciones definen «sucesiones doblemente infinitas» de pixeles.

Finalmente haremos una caracterización de las funciones continuas e inyectivas de \mathbb{Z}^2 en \mathbb{Z}^2 .

Teorema 4.3.2 (Rosenfeld en [5]) *Sea $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ una función continua e inyectiva. Entonces f es:*

1. *una traslación,*
2. *una traslación compuesta con una reflexión vertical, horizontal o diagonal,*
3. *una traslación compuesta con una rotación por $\pi/2$, $-\pi/2$ o π radianes.*

Demostración:

Para un punto $P = (u, v)$, nos referiremos a sus vecinos de la siguiente manera:

1. $N = (u, v + 1)$ es el vecino norte,
2. $S = (u, v - 1)$ es el vecino sur,
3. $E = (u + 1, v)$ es el vecino este y,
4. $W = (u - 1, v)$ es el vecino oeste.

Análogamente, para un punto P' denotaremos a sus vecinos mediante N' , S' , E' y W' , respectivamente.

Dado que f es una función continua, manda a los vecinos de P : N , S , E y W a los de $f(P) = P'$: N' , S' , E' y W' en algún orden. La siguiente observación será de utilidad a lo largo de toda la prueba: no todos los órdenes están permitidos, pues N y E tienen un vecino común distinto de P , de modo que $f(N)$ y $f(E)$ no pueden ser «opuestos» como N' y S' o E' y W' , pues ellos no tienen más que un único vecino en común P' . De esto se sigue que si tomamos sucesivamente a los vecinos de P : N , E , S , W , entonces las imágenes correspondientes $f(N)$, $f(E)$, $f(S)$, $f(W)$ corresponden a una permutación de los vecinos N' , E' , S' , W' ,

de tal manera que su consecutividad en esta lista se preserva (es decir que si dos de estos vecinos son 8-vecinos, sus imágenes también). Para la lectura de la prueba se recomienda ver paralelamente a las figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

(Caso 1): Si $f(N) = N'$ y $f(E) = E'$ entonces tendremos que S y E son 8 vecinos y, en vista de la observación anterior, también deben serlo $f(E) = E'$ y $f(S)$. Por inyectividad $f(S) = S'$. Luego $f(W) = W$.

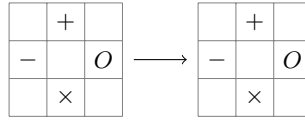


Figura 4.3: Caso 1

(Caso 2): Si $f(N) = N'$ y $f(E) = W'$, por un argumento similar al previo $f(S) = S'$ y $f(W) = E'$. En este caso, localmente los vecinos de P se han enviado a sus imágenes en un espejo vertical. Una conclusión análoga puede obtenerse en cualquier otro caso en que un vecino de P se envíe al correspondiente de P' (en este caso N se envió a N') y alguno de sus vecinos diagonales que también sea vecino de P se envíe al opuesto (en este caso E se envió a W').

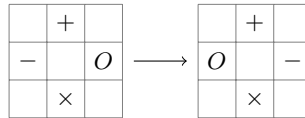


Figura 4.4: Caso 2

(Caso 3): Si $f(N) = E'$ y $f(E) = N'$, nuevamente, en vista de la primera observación $f(S)$ deberá ser un 8-vecino de $f(E) = N'$ y, por inyectividad, este 8-vecino debe ser W' . Dado esto, debe ocurrir que $f(W) = S'$. En este caso se ha enviado a los vecinos de P en sus espejos diagonales respecto a P' . Obtendremos una conclusión análoga siempre que se «intercambie» a cualesquiera dos vecinos de P al aplicar f (en este caso $f(N) = E'$ y $f(E) = N'$).

(Caso 4) : Si $f(N) = E'$ y $f(E) = S'$, como antes, vemos que el valor de $f(S)$ debe ser forzosamente W' y, con ello $f(W) = N'$. Puede notarse que, en esta caso se han «rotado» a los vecinos de $f(P)$ por $\pi/2$ radianes

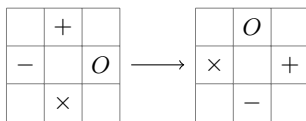


Figura 4.5: Caso 3

en sentido dextrógiro.

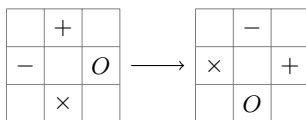


Figura 4.6: Caso 4

(Caso 5): Si $f(N) = W'$ y $f(E) = N'$, de manera completamente análoga a la del Caso 4, tendremos una rotación de $\pi/2$ radianes en sentido levógiro.

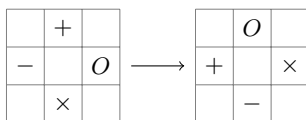


Figura 4.7: Caso 5

(Caso 6): Finalmente supongamos que $f(N) = S'$, $f(E) = W'$. Debido a la primera observación tendremos que $f(S) = N'$ y $f(W) = E'$, lo cuál corresponde a una rotación de π radianes.

Una vez que hemos cubierto todas las posibilidades para la vecindad de un punto arbitrario P , queda demostrar que si alguno de los casos anteriores es válido para un punto, entonces es válido para todos los puntos.

(Escenario 1): Supongamos que todos los vecinos de P se envían a sus correspondientes respecto a P' —es decir $f(N) = N'$, $f(E) = E'$, $f(S) = S'$ y $f(W) = W'$ —. Se sigue que los 8-vecinos de P se enviarán a los 8-vecinos correspondientes de P' , debido nuevamente a la primera observación respecto a los vecinos comunes. Luego hemos visto que para un cuadrado de 3×3 los vecinos de P se envían a los correspondientes de P' (resultando en una traslación). Supongamos ahora que hemos demostrado que la función f coincide con una traslación en un cuadrado

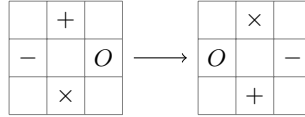
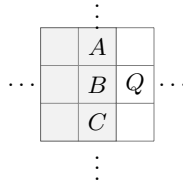


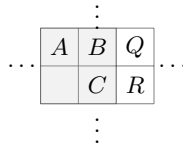
Figura 4.8: Caso 6

de $(2n + 1) \times (2n + 1)$, donde $k \geq 1$.

Sea Q un punto adyacente a un punto «interior» de un lado de este cuadrado. Para fijar ideas trabajaremos con el lado «este» del cuadrado. Nos referiremos a la figura 4.9. Debido a que 3 de los vecinos de B son enviados «en sus correspondientes», también Q debe ser enviado en el vecino este de $f(B) = B'$.

Figura 4.9: Q es adyacente a un punto «interior» de un lado de este cuadrado

De manera semejante, sea Q adyacente a un extremo de un lado. Para fijar ideas trabajaremos con el extremo superior del lado este del cuadrado. Nos referiremos a la figura 4.10. R deberá enviarse en «el vecino correspondiente» de C debido a que satisface las condiciones del caso analizado previamente. Luego Q debe enviarse en un vecino común de $f(B)$ y $f(R)$, y esto coincide con la posición relativa de Q respecto a B y R .

Figura 4.10: Q es adyacente a un extremo de un lado

Finalmente sea Q un 8-vecino de un extremo del cuadrado (el único que no satisface las condiciones del caso anterior), por ejemplo a la

esquina noreste (ver figura 4.11).

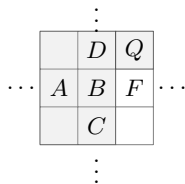


Figura 4.11: Q es un 8-vecino de un extremo del cuadrado

Como ya se mostró D y E se envían en los vecinos correspondientes de B y Q debe enviarse a un vecino común de $f(D)$ y $f(E)$, así que también se envía en el vecino correspondiente de B .

Hemos mostrado, entonces, que en un cuadrado de tamaño $(2n + 3) \times (2n + 3)$ todos los vecinos se envían en sus correspondientes y, por inducción en k , debe ser así en todos los puntos.

(Escenario 2) Ahora considérese un caso que involucre una reflexión alrededor de un eje vertical u horizontal. En el caso vertical $f(N) = N'$, $f(S) = S'$, $f(E) = W'$ y $f(W) = E'$. En este caso los vecinos diagonales de P deben reflejarse respecto a P' (noreste cambia a noroeste y sureste a suroeste) de modo que el cuadrado de 3×3 completo se refleja. Supongamos ahora que hemos establecido que todos los puntos de un cuadrado de tamaño $(2k + 1) \times (2k + 1)$ se reflejan verticalmente. Por argumentos similares a los dados en el caso (1) podemos extenderlo a un cuadrado de tamaño $(2k + 3) \times (2k + 3)$. Si Q es adyacente al lado este por el interior (ver figura 4.12)

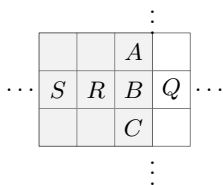
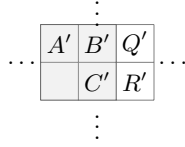
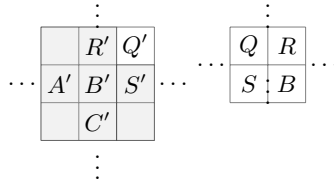


Figura 4.12: Q es adyacente al lado este por el interior

B era el vecino izquierdo de R , mientras que S el derecho, luego R ra el vecino derecho de B , y como A , C , permanecen fijos, Q debió ser el vecino izquierdo.

Cuando se trata de un punto vecino del lado norte, por ejemplo (ver figura 4.13):

Figura 4.13: Q es vecino de la esquina noresteFigura 4.14: Q es diagonalmente adyacente al pixel más al noreste

B era el vecino norte de C y R el izquierdo, luego Q' es imagen del vecino común Q de B y R , es decir el vecino noroeste de C .

Finalmente, si es diagonalmente adyacente al pixel más al noreste (ver figura 4.14):

Tenemos que R' y S' ya son puntos en los cuáles se cumple la propiedad en vista de los resultados anteriores, luego tenemos que R y S eran vecinos comunes a B , R era el vecino norte de B y B el vecino oeste de S . Luego Q era el otro vecino común de B y S , es decir, el vecino noroeste de B , el cuál tras aplicar f es el vecino noreste. Entendemos, entonces, que hemos intercambiado este con oeste al aplicar la función.

(Otros escenarios) Los argumentos son similares en los casos que involucran una reflexión alrededor de una diagonal, rotación por $\pm\pi/2$ radianes o rotación por π radianes. La estrategia nuevamente consiste en observar que éstas transformaciones son válidas para un cuadrado de 3×3 centrado en P , y luego extender a cuadrados más grandes.

En el caso (1), evidentemente se trata de una traslación: si $P = (i, j)$ y $P' = (i+r, j+s)$, entonces para cualquier punto $Q = (u, v)$, tendremos $Q' = (u+r, v+s)$. De manera semejante, en el caso (2) se trata de una traslación combinada con una reflexión horizontal o vertical (en realidad la prueba del caso 2 muestra que si P es enviado a P' y Q es cualquier punto, la posición relativa de Q' a P' es el reflejo vertical de la posición de Q respecto a P). Análogamente se tendrían los demás casos. \square

Parte II

Sistematización

Capítulo 5

Introducción

En 1990, en el artículo «Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets» [7], Khalimsky, Kopperman y Meyer replantearon la problemática del análisis de gráficos por computadora considerando lo siguiente:

1. Las pantallas de computadora pueden ser modeladas como un arreglo rectangular finito de puntos de una retícula discreta.
2. Las versiones del teorema de la curva de Jordan para el plano digital existentes hasta entonces (a la primera de las cuáles hemos dedicado la parte 1 de este trabajo) empleaban técnicas más cercanas a la teoría de grafos que a la topología.

De esta forma, inauguraron una nueva perspectiva para resolver los problemas del análisis de imágenes con las herramientas existentes en la topología.

Es importante aclarar que el problema de la existencia de una topología en \mathbb{Z}^2 donde los conjuntos fuesen conexos si y sólo si fuesen 4-conexos y de otra donde los conexos fuesen exactamente los conjuntos 8-conexos, ya había sido planteado anteriormente. Al respecto de la primera Rosenfeld escribió (refiriéndose a \mathbb{Z} mediante I):

Es de interés definir una topología en $I \times I$ en la cuál la noción de conexidad se reduzca al concepto de 4-conexidad[...]. Evidentemente esta no puede ser la topología discreta en $I \times I$ debido a que bajo esa topología cualquier subconjunto de S es abierto de modo que ninguna componente conexa contiene más que un único punto. Suponga, sin embargo que definimos una topología (algo artificial) en $I \times I$ como sigue: Sea $U_{(i,j)} = \{(i,j)\}$ si $i + j$ es impar; $U_{(i,j)}$ consista de (i,j) junto con sus cuatro vecinos si $i + j$ es par.

(Rosenfeld, 1973, [2] p 82)

Antes de continuar con la discusión de la situación topológica de las nociones de conexidad definidas en la Parte 1, haremos una presentación de los espacios topológicos finitos, dentro de la cuál recordaremos las nociones básicas concernientes a los espacios topológicos en general. Ya con ellas, volveremos a esta discusión en el próximo capítulo para posteriormente continuar desarrollando la teoría.

5.1. Espacios topológicos finitos

En esta sección estableceremos algunas propiedades básicas de los espacios topológicos finitos. Seguiremos las presentaciones de J. P. May en una serie de notas no publicadas sobre espacios topológicos finitos [10], el libro clásico de topología de Munkres [9] y el libro de Topología y Geometría de Bredon [11]. Cabe destacar que todos los resultados presentados son clásicos dentro de las teorías correspondientes. Comenzaremos recordando la definición de espacio topológico.

Definición 5.1.1 Un **espacio topológico** es un conjunto X , junto con una colección de subconjuntos de X , llamados conjuntos **abiertos** (o simplemente abiertos en X) tales que:

- *La intersección de cualquier familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
- *la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
- *El conjunto vacío y X son ambos conjuntos abiertos.*

Llamamos **conjunto cerrado** (o simplemente cerrado) a un subconjunto de X , C , cuyo complemento $X \setminus C$ es abierto.

Resulta de la Definición 5.1.1 que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada y que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. Es común llamar a X **espacio topológico** y a la colección de sus subconjuntos que satisface las condiciones de la Definición 5.1.1, **topología** sobre X .

Sustentados en la definición y en la observación del párrafo previo definimos lo siguiente.

Definición 5.1.2 Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Definimos al **interior** de A como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A . Lo denotamos mediante $\text{int}(A)$.

Definimos a la **cerradura** de A como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A . La denotamos mediante $\text{cl}(A)$.

Dados un espacio topológico y uno de sus subconjuntos podemos generar una subestructura dotando a dicho subconjunto de una topología.

Definición 5.1.3 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. La **topología de subespacio** de A está conformada por las intersecciones de los abiertos de X con A

Con respecto al interior y a la clausura en los subespacios topológicos tenemos los siguientes resultados, los cuáles enunciamos sin demostración, puesto son elementales y pueden encontrarse en cualquier libro de topología como el de Munkres [9].

Proposición 5.1.1 Sean X un espacio topológico e Y un subespacio. Si $A \subseteq Y$ entonces la clausura de A en Y corresponde con la clausura de A en X intersectada con Y . Asimismo el interior de A en Y corresponde con el interior de A en X intersectado con Y .

Entre los ejemplos prototípicos de espacio topológico se encuentran la recta, el plano y el espacio tridimensional \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , en donde los conjuntos abiertos se definen en términos de discos abiertos determinados por la distancia euclidiana usual. Sin embargo los espacios topológicos son más generales ya que no siempre es posible dotar a un espacio topológico de una métrica de modo que los abiertos surjan del mismo proceso de tomar discos alrededor de cada elemento. No provereemos de una demostración de este hecho debido a que no es el objetivo de este trabajo abundar sobre las condiciones de metrizabilidad de un espacio topológico.

Ya que hemos definido nuestros objetos de estudio, nos referiremos al tipo de funciones que los relacionan y que dotan de dinamismo a la teoría.

Definición 5.1.4 Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es una **función continua** si $f^{-1}(U)$ es un abierto en X siempre que U sea un abierto en Y .

En el caso en que f sea una biyección y tanto f como f^{-1} sean ambas funciones continuas, decimos que X e Y son **homeomorfos**, y tanto f como f^{-1} se llaman **homeomorfismos**. Consideramos iguales a espacios topológicos homeomorfos.

Nuestro interés principal está enfocado en los **espacios topológicos finitos**, los cuáles son aquellos en donde el conjunto X es finito, siguiendo la notación de la Definición 5.1.1.

Un ejemplo de espacio topológico finito es el **espacio de Sierpinsky**: considérese al conjunto $S = \{0, 1\}$ junto con la siguiente familia de subconjuntos $U = \{\emptyset, S, \{0\}\}$. De acuerdo con lo convenido en la definición 5.1.4 llamamos espacio de Sierpinsky a cualquier espacio homeomorfo al descrito anteriormente.

5.1.1. Propiedades de Separación

Las propiedades de los espacios topológicos son muy generales, de modo que resulta natural interesarse en espacios topológicos que satisfagan algunas propiedades adicionales, por ejemplo las llamadas **propiedades de separación**.

Definición 5.1.5 Sea X un espacio topológico.

1. X es un espacio de **tipo** T_0 si para cualesquiera dos puntos diferentes de X , hay un conjunto abierto que contiene a uno de ellos sin contener al otro.
2. X es un espacio de **tipo** T_1 si para cualesquiera dos puntos diferentes x e y de X hay un conjunto abierto en X que contiene a x sin contener a y y otro conjunto abierto que contiene a y , sin contener a x .
3. X es un espacio de **tipo** T_2 si para cualesquiera dos puntos diferentes x e y de X , existen conjuntos abiertos U y V tales que $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ e $y \in V$.

Es claro de las definiciones que cuando un espacio es de tipo T_2 , es de tipo T_1 , y si es de tipo T_1 , entonces es de tipo T_0 .

Los espacios topológicos finitos no pueden tener propiedades de separación muy fuertes sin trivializarse. Los dos siguientes resultados están enfocados en precisar esta afirmación.

Lema 5.1.1 Sea X un espacio topológico. El espacio X es de tipo T_1 si y sólo si sus subconjuntos singulares son cerrados.

Proposición 5.1.2 Todos los subconjuntos de un espacio topológico finito de tipo T_1 son abiertos.

Demostración:

Sea A un subconjunto arbitrario de un espacio finito de tipo T_1 , X . Tenemos que $X \setminus A$ es un conjunto finito, y por tanto, la unión finita de conjuntos singulares. De acuerdo con el Lema 5.1.1 estos singulares son cerrados, así que $X \setminus A$ es cerrado y así A es abierto. \square

Definición 5.1.6 Sea X un conjunto. Decimos que X es un **espacio discreto** si se le considera con la topología en que todos sus subconjuntos son abiertos.

Podemos volver a enunciar, entonces a la Proposición 5.1.2 diciendo que los espacios topológicos finitos de tipo T_1 son discretos. Estos espacios no resultan de mucho interés. En particular, cualquier función que emana de un espacio discreto D a otro cualquiera X es continua.

5.1.2. Bases

Debido a que las operaciones entre conjuntos abiertos que generan nuevos conjuntos abiertos son la unión arbitraria y la intersección finita, es natural preguntarse acerca de la posibilidad de generar todos los conjuntos abiertos de un espacio topológico a partir únicamente de algunos y de estas operaciones básicas. La siguiente definición orienta el estudio en ese sentido.

Definición 5.1.7 Sea X un espacio topológico. Si B es una colección de subconjuntos de X , llamamos a B una **base** para la topología de X si los conjuntos abiertos en X son exactamente las uniones de elementos de B .

Una colección S de subconjuntos de X es llamada **subbase** para la topología de X si el conjunto B de intersecciones finitas de elementos de S es una base para la topología de X .

Nótese que cualquier espacio topológico posee una base, a saber toda la topología. Además cualquier familia de subconjuntos de X es subbase de alguna topología.

Daremos ahora una caracterización de cuándo una familia de conjuntos abiertos es base para una topología.

Lema 5.1.2 *Sea X un espacio topológico. Una familia \mathfrak{U} de conjuntos abiertos en X es base para la topología de X si y sólo si para cualquier conjunto abierto U y cualquier elemento $x \in U$ existe algún elemento $E \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in E \subseteq U$.*

En el caso de los espacios topológicos finitos tenemos bases obtenidas de una manera muy directa. Dado un punto en un espacio consideremos a la intersección de todos los abiertos que lo contienen. Al tratarse de una cantidad finita de ellos, como resultado tendremos un conjunto abierto mínimo respecto a la contención y a otros abiertos que contengan a dicho punto.

Definición 5.1.8 *Sea X un espacio finito. Al conjunto N_x que es la intersección de todos los abiertos que contienen a un punto $x \in X$ lo llamamos la **vecindad mínima** de x .*

Lema 5.1.3 *Sea X un espacio topológico finito. El conjunto de abiertos N_y con $y \in X$ es una base para la topología de X . Esta colección es una base mínima en el sentido de que está contenida en cualquier otra base para X .*

Demostración:

El primer hecho es consecuencia de la caracterización dada en 5.1.2: dado un punto x y un abierto que lo contenga U , tenemos que $x \in N_x \subseteq U$.

Consideremos una base arbitraria \mathfrak{C} . Dado $x \in X$, tendremos que existe algún elemento $C \in \mathfrak{C}$ tal que $x \in C \subseteq N_x$ y, en consecuencia $C = N_x$. Luego \mathfrak{C} contiene a cada vecindad mínima N_x . \square

5.1.3. Preórdenes

Comenzaremos recordando dos definiciones básicas acerca de conjuntos ordenados.

Definición 5.1.9 *Un **conjunto preordenado** es un conjunto P dotado de una relación binaria \leq que es transitiva y reflexiva. Esto es:*

1. Para cualesquiera $x, y, z \in P$ si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
2. Para cualquier $x \in P$ tenemos que $x \leq x$.

A la relación \leq se le conoce como **preorden** en X .

Definición 5.1.10 *Un **conjunto parcialmente ordenado** es un conjunto P dotado de una relación binaria \leq que es transitiva, reflexiva y antisimétrica. Esto es:*

1. Para cualesquiera $x, y, z \in P$ si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
2. Para cualquier $x \in P$ tenemos que $x \leq x$.
3. Para cualesquiera $x, y \in P$ si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

Veremos que los espacios topológicos finitos y los conjuntos preordenados finitos son en realidad los mismos objetos; pero considerados desde dos puntos de vista diferentes.

Definición 5.1.11 Sea X un espacio topológico finito. Definimos la relación \leq en X de la siguiente manera:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \in N_y.$$

Proposición 5.1.3 Sean X un espacio topológico finito y $x, y \in X$.

1. $x \in N_y$ si y sólo si $N_x \subseteq N_y$.
2. La relación \leq es un preorden en el conjunto de abiertos de un espacio topológico X .
3. La relación \leq es un orden parcial si y sólo si la topología correspondiente es de tipo T_0 .

Demostración:

1. Si $x \in N_y$ entonces N_y es un abierto que contiene a x , de modo que $N_x \subseteq N_y$. Por otro lado, si $N_x \subseteq N_y$, dado que $x \in N_x$, entonces $x \in N_y$.
2. Dado que $x \leq y$ si y sólo si $x \in N_y$, y esto ocurre exactamente cuando $N_x \subseteq N_y$ según el primer inciso de esta proposición, las propiedades de transitividad y simetría son inmediatas.
3. La relación \leq es antisimétrica si y sólo si $N_x \subseteq N_y$ y $N_y \subseteq N_x$ implican que $x = y$, es decir: $N_x = N_y$ implica que $x = y$. Recordando que un espacio es de tipo T_0 cuando dados dos puntos diferentes hay un abierto que contiene a uno sin contener al otro, vemos que esto se traduce al contexto de los espacios finitos a que las vecindades mínimas de dos puntos diferentes no coincidan.

Con ello termina la prueba □

Introduciremos una nueva notación: dado un conjunto preordenado P , denotaremos mediante $\downarrow p$ al conjunto $\{q \in X : q \leq p\}$ para $p \in P$. A los conjuntos de la forma anterior los llamamos **cerrados inferiormente**.

Proposición 5.1.4 Sea X un conjunto preordenado finito. La familia de conjuntos $\downarrow x$ donde $x \in X$ es base de una topología en X .

Demostración:

Tenemos que para cualquier $x \in X$, $x \in \downarrow x$. Además, si $z \in \downarrow x_1 \cap \downarrow x_2$, entonces, por transitividad $z \in \downarrow z \subseteq \downarrow x_1 \cap \downarrow x_2$. \square

Proposición 5.1.5 Sea X un espacio topológico con topología τ . Sea \leq el preorden inducido en X por τ y sea τ' la topología generada en X por los conjuntos cerrados inferiormente bajo \leq . Podemos concluir que $\tau = \tau'$.

Demostración:

Dado $x \in X$ llamemos N_x y N'_x a los abiertos mínimos alrededor de x en τ y τ' , respectivamente. Se tiene que $y \in N_x$ si y sólo si $y \leq x$ si y sólo si $y \in N'_x$. \square

Proposición 5.1.6 Sea P un conjunto preordenado con preorden \leq . Sea τ la topología generada por los conjuntos cerrados inferiormente bajo \leq y sea \leq' el preorden inducido en P por la topología τ mediante $x \leq y \Leftrightarrow x \in N_y$. Podemos concluir que $\leq = \leq'$.

Demostración:

Tenemos que $x \leq y$ si y sólo si $x \in \downarrow y$ si y sólo si $x \in N_y$ si y sólo si $x \leq' y$. \square Como consecuencia de ambos resultados tenemos:

Corolario 5.1.1 Para un conjunto finito X , las topologías en X están en correspondencia biyectiva con los preórdenes en X .

Ya tenemos una identificación entre espacios topológicos finitos y preórdenes finitos. Ahora daremos una identificación entre funciones continuas y su equivalente en preórdenes.

Definición 5.1.12 Sean P y Q conjuntos preordenados. Una función $f : P \rightarrow Q$ se llama **monótona** si y sólo si para $x, y \in P$ si $x \leq y$ (con el orden de P) entonces $f(x) \leq f(y)$ (con el orden de Q).

Proposición 5.1.7 Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos finitos es continua si y sólo si al considerar a X y a Y como conjuntos preordenados, f es monótona.

Demostración:

(Suficiencia) Supongamos que f es continua y que $x \leq y$. Sea $N_{f(y)}$ la vecindad mínima de $f(y)$ en Y . Por continuidad $f^{-1}(N_{f(y)})$ es un abierto en X e $y \in f^{-1}(N_{f(y)})$. Así que $x \leq y$ y $N_y \subseteq f^{-1}(N_{f(y)})$ y $x \in N_y \subseteq f^{-1}(N_{f(y)})$. Tendremos que $f(x) \in N_{f(y)}$, es decir que $f(x) \leq f(y)$.

(Necesidad) Supongamos ahora que f preserva el orden. Veamos que f es continua: sea $x \in f^{-1}(N_y)$ y sea $x' \leq x$. Luego $f(x') \leq f(x) \leq y$ y así $x' \in f^{-1}(N_y)$. Luego $f^{-1}(N_y)$ es un conjunto cerrado inferiormente y, por tanto, abierto. \square

5.1.4. Conexidad y conexidad por caminos

Recordemos las definiciones usuales relacionadas con la conexidad en espacios topológicos.

Definición 5.1.13 Un espacio topológico X es **conexo** si no es la unión ajena de dos conjuntos abiertos no vacíos. En el caso en que X no sea conexo se le llama **disconexo** y de los dos conjuntos abiertos cuya unión ajena es X se dice que forman una **disconexión** de X .

Lema 5.1.4 Un espacio topológico X es conexo si y sólo si sus únicos subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son \emptyset y X .

Demostración:

Si X fuese conexo y tuviese algún conjunto A abierto y cerrado simultáneamente que no es X ni \emptyset , entonces A y $X \setminus A$ serían dos abiertos no vacíos cuya intersección sería vacía y su unión sería X , concluyéndose que X no sería conexo.

Por otro lado, si X no fuera conexo, dos conjuntos que formasen una desconexión de X serían abiertos y cerrados simultáneamente sin ser el vacío ni X . \square

Definición 5.1.14 Sea X un espacio topológico. Definimos una relación \sim en X de la siguiente manera:

$x \sim y$ si x e y son elementos de algún mismo subespacio conexo de X .

Una clase de equivalencia bajo \sim se llama **componente** de X .

En primer lugar debemos asegurarnos de que \sim es efectivamente una relación de equivalencia.

Lema 5.1.5 Sea X un espacio topológico. Si A, B son subconjuntos conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

Demostración:

Supongamos que $A \cup B$ no es conexo y que C, D forman una separación de $A \cup B$. Dado que A y B son ambos conexos y al ser $A = (C \cap A) \cup (D \cap A)$, entonces $C \cap A = \emptyset$ o bien $D \cap A = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad

asumamos que $C \cap A = \emptyset$. Luego tendremos que $A \subseteq D$. No puede ocurrir que $B \subseteq D$ puesto que $A \cup B \subseteq D$. De modo que $B \cap D \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$. Luego B no sería conexo. \square

Proposición 5.1.8 La relación \sim es una relación de equivalencia.

Demostración:

Claramente los conjuntos singulares $\{x\}$ son conexos, así que $x \sim x$. También, debido a que «ser elementos de un mismo conjunto» es una relación simétrica, $x \sim y$ implica que $y \sim x$. Finalmente si $x \sim y$ e $y \sim z$, consideremos a C_x y C_z dos subespacios conexos de X tales que $x, y \in C_x$ y $z, y \in C_z$. Debido a que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, se sigue del Lema 5.1.5 que $C_x \cup C_z$ es conexo y así $x \sim z$. \square

Observación 5.1.1 Cualquier subespacio conexo de X está contenido en alguna componente.

A partir de aquí únicamente enunciaremos las definiciones y resultados más relevantes, pues las pruebas son semejantes a las dadas hasta ahora y el objetivo de este capítulo es aterrizar en los espacios topológicos finitos.

Lema 5.1.6 Sea X un espacio topológico. Las componentes de X son conexas y X es la unión disjunta de sus componentes.

Lema 5.1.7 Sean X e Y dos espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y X es conexo, entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Y .

Definición 5.1.15 Sea $I = [0, 1]$ con la topología de subespacio de \mathbb{R} . Una función continua $p : I \rightarrow X$ se llama **camino** de $p(0)$ a $p(1)$ (en X).

Definición 5.1.16 Un espacio topológico X es **conexo a través de caminos** si para cualesquiera dos de sus puntos x, y existe un camino de x a y .

Definición 5.1.17 Sea X un espacio topológico. Definimos una relación de equivalencia \simeq en X de la siguiente manera:

$$x \simeq y \text{ si y sólo si hay un camino de } x \text{ a } y.$$

Una clase de equivalencia bajo \simeq se llama **componente por caminos** de X .

Usando propiedades de funciones continuas y conexidad se puede mostrar el siguiente Lema:

Lema 5.1.8 *Sea X un espacio topológico.*

$$x \simeq y \Rightarrow x \sim y.$$

Ahora volvemos al estudio del caso particular de los espacios finitos.

Lema 5.1.9 *Sea X un espacio topológico finito. Cada N_x es conexo. Si X es conexo, $x, y \in X$, entonces existe una sucesión finita de puntos z_i con $1 \leq i \leq s$ tales que $z_1 = x$, $z_s = y$ y $z_i \leq z_{i+1}$ o $z_{i+1} \leq z_i$ para $i < s$.*

Demostración:

Supongamos que A, B forman una separación de un conjunto N_x . Si $x \in A$, como A es abierto $N_x \subseteq A$, lo cuál es un sinsentido tras asumir que A, B forman una separación de N_x . Para justificar esta última afirmación notemos que $A \cup B = N_x$, de modo que $A \subseteq N_x$ y en consecuencia tendríamos que $A = N_x$; además, por definición de separación, A y B son ajenos, lo cuál resultaría en que $B = \emptyset$.

Por otro lado fijemos a x y consideremos al conjunto A de puntos y tales que están conectadas a x a través de alguna sucesión de puntos z_i . Podemos demostrar que A es un conjunto abierto debido a que si $z \leq z'$ entonces $N_z \subseteq N_{z'}$. También tenemos que A es cerrado, puesto que si y no está conectado con x , tampoco ninguno de los puntos de N_y , así que el complemento de A es abierto. Dado que X es conexo, se sigue que $A = X$. \square

Lema 5.1.10 *Sean X un espacio topológico finito, $x, y \in X$. Si $x \leq y$, entonces hay un camino p que conecta a x y a y .*

Demostración:

Definamos $p(t) = x$ si $0 \leq t < 1$ y $p(1) = y$. Demostraremos que la función p es continua: sea V un abierto en X . Si $x \in V$ e $y \notin V$, entonces $p^{-1}(V) = [0, 1)$, el cuál es abierto en $[0, 1]$. Si tanto x como y son elementos de V , entonces $p^{-1}(V) = [0, 1]$. Finalmente, notemos que es imposible que $y \in V$ y $x \notin V$, pues al ser V abierto $x \in V_y \subseteq V$ debido a que $x \leq y$.

Entonces en cualquier caso $f^{-1}(V)$ es un abierto en $[0, 1]$ \square

Finalmente probaremos una propiedad importante de los espacios topológicos finitos.

Proposición 5.1.9 *Un espacio topológico finito es conexo si y sólo si es conexo a través de caminos.*

Demostración:

Sabemos que un espacio conexo a través de caminos es conexo debido al Lema 5.1.8. Para el converso, tomemos un espacio conexo y cualquier pareja de puntos. Tomemos una sucesión de puntos como en el Lema 5.1.9. Generando los caminos entre elementos sucesivos como en el Lema 5.1.10 y concatenándolos llegamos a que el espacio es conexo por caminos. \square

Capítulo 6

La 4-conexidad y la 8-conexidad desde el punto de vista topológico

Retomaremos aquí la discusión respecto a la posibilidad de dotar de un sustento topológico a las nociones de conexidad discutidas en la Parte 1. Para ello recordemos que dada una pareja $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, denotamos $U_{(i,j)} = \{(i, j)\}$ si $i + j$ es impar; mientras que $U_{(i,j)}$ consiste de (i, j) junto con sus cuatro 4-vecinos si $i + j$ es par.

Lema 6.0.1 Si $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ la suma de las coordenadas de cualquiera de sus 4-vecinos tiene paridad contraria a la de $i + j$. La suma de las coordenadas de cualquiera de sus 8-vecinos que no son sus 4-vecinos tiene la misma paridad que $i + j$

Demostración:

Es claro pues los 4-vecinos de (i, j) difieren en una unidad en una de sus coordenadas respecto a (i, j) ; mientras que los 8-vecinos que no son 4-vecinos difieren en una unidad en ambas componentes. \square

Proposición 6.0.1 (Rosenfeld [2]) $\bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \{U_{(i,j)}\}$ es una base para una topología en \mathbb{Z}^2 , y un conjunto $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ es conexo en ella si y sólo si es 4-conexo.

Demostración:

Cada elemento (i, j) de \mathbb{Z}^2 es miembro del conjunto correspondiente $U_{(i,j)}$.

Sean dos elementos de esta familia $U_{(i,j)}$ y $U_{(m,n)}$. Si (i, j) , (m, n) , no

son 8-vecinos, entonces no tienen 4-vecinos en común y, dado que en cualquier caso $U_{(i,j)} \subseteq \{(i,j)\} \cup N_4(i,j)$, ocurriría que $U_{(i,j)}$ y $U_{(m,n)}$ tendrían intersección vacía.

Si son 4-vecinos, en vista del Lema 6.0.1, sin pérdida de generalidad la suma $i + j$ será par y $m + n$ impar. Luego $U_{(m,n)} = \{(m,n)\}$ y $(m,n) \in N_4(i,j) \subseteq U_{(i,j)}$, de modo que la intersección es $U_{(m,n)}$, un elemento de la familia.

Finalmente, si son 8-vecinos; pero no 4-vecinos $i + j$ y $m + n$ tienen la misma paridad. Si ambos son impares, entonces $U_{(i,j)}$ y $U_{(m,n)}$ son singulares distintos y, por tanto disjuntos; mientras que si ambos son pares, su intersección consta de dos puntos, ambos con suma de componentes impar, y por tanto, para cada punto x en la intersección de $U_{(i,j)} \cap U_{(m,n)}$ hay un abierto $\{x\}$ tal que $x \in \{x\} \subseteq U_{(i,j)} \cap U_{(m,n)}$. Así, tenemos que efectivamente tenemos una base para una topología.

Sea C un conjunto 4-conexo. Supongamos que hay dos abiertos A y B en la topología indicada anteriormente y que generan una disconexión de C . Sean $a \in A \cap C$ y $b \in B \cap C$. Existe un 4-camino $a = a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m = b$ en C que conecta a a con b . Sea k tal que $a_k \in A$ y $a_{k+1} \in B$. Debido a que a_k y a_{k+1} son 4-vecinos, la suma de las coordenadas de alguno de ellos será par, de modo que sus 4-vecinos deben pertenecer al mismo abierto, lo cuál es imposible. De esta contradicción concluimos que C es conexo

Ahora sea C un conjunto conexo. Demostraremos que cada 4-componente de C es un abierto relativo en C , resultando en que únicamente hay una única 4-componente de C . Sea C_x una 4 componente de C que contiene al punto x . Sea $y \in C_x$. Tendremos que $U_y \cap C \subseteq C_x$ debido a que si $z \in U_y \cap C$, z es adyacente a y o y mismo, siendo en cualquiera de los casos 4-conectable con x . Luego C_x es un abierto relativo en C . Al ser las componentes disjuntas, de haber más componentes C no sería conexo. \square El problema de encontrar una topología en la cuál

los conjuntos conexos fuesen los 8-conexos encontró solución negativa en el artículo «Connectivity and consecutivity in Digital Pictures »[8] de Jean-Marc Chassery. La estrategia de su demostración consistió en observar cómo sería la herencia de una topología en que los conexos fuesen exactamente los 8-conexos a la 8-vecindad de un punto, para luego observar causas por las cuáles esta topología no podría ser extendida más allá de dicha vecindad a conjuntos mayores.

Probaremos ahora que no hay ninguna topología en subconjuntos finitos S de \mathbb{Z}^2 en donde la conexidad sea lo mismo que la 8-conexidad.

Estableceremos algunas notas partiendo del supuesto de que existiese

una tal topología en S .

1. Existen vecindades mínimas.
2. $\{P, Q\}$ es conexo cuando $P \neq Q \Leftrightarrow P \in N_Q$ o $Q \in N_P \Leftrightarrow Q \in cl(P)$ o $P \in cl(Q)$.

De acuerdo con ambos puntos, si S tuviese una topología en que coincidieran ambas nociones de conexidad, tendríamos que $\{P, Q\}$ es 8-conexo si y sólo si $\{P, Q\}$ es conexo si y sólo si $N_P \subseteq N_Q$ o bien $N_Q \subseteq N_P$. Esta observación será fundamental a lo largo de la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 6.0.2 Sean A un punto en \mathbb{Z}^2 y $T = N_8(A)$. Existen 4 topologías para T en las cuales la noción de conexidad y de 8-conexidad coinciden.

Demostración:

Etiquetemos a los puntos de T mediante $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ dispuestos tal como se muestra en la figura 6.1.

G	F	E
x	x	x
H	A	D
x	x	x
I	B	C
x	x	x

Figura 6.1: Situación de $N_8(A)$ en la prueba de la Proposición 6.0.2

Supongamos la existencia de una tal topología: caracterizaremos los conjuntos N_P con $P \in T$.

De acuerdo con el hecho de que $\{P, Q\}$ no es 8-conexo siempre que $P \notin N_Q$ y $Q \notin N_P$ tendremos (por favor no pierda de vista la figura 6.1) que:

$$\{E, F, G\} \subseteq (T \setminus N_C) \cap (T \setminus N_B) \cap (T \setminus N_I), \quad (6.1)$$

$$\{C, D, E\} \subseteq (T \setminus N_G) \cap (T \setminus N_H) \cap (T \setminus N_I), \quad (6.2)$$

$$\{I, B, C\} \subseteq (T \setminus N_E) \cap (T \setminus N_F) \cap (T \setminus N_G), \quad (6.3)$$

$$\{G, H, I\} \subseteq (T \setminus N_C) \cap (T \setminus N_D \cap (T \setminus N_E)), \quad (6.4)$$

Dado que $\{D, F\}$ es 8-conexo, tenemos (a raíz nuevamente de que $\{P, Q\}$ es 8-conexo si y sólo si $N_P \subseteq N_Q$ o bien $N_Q \subseteq N_P$):

$$N_D \subseteq N_F \text{ o bien } N_F \subseteq N_D.$$

Supongamos ahora que $N_D \subseteq N_F$ y luego caracterizaremos las diferentes topologías τ a través de las vecindades mínimas N_P para $P \in \tau$.

La contención 6.3 implica que $B \notin N_F$, además hemos asumido que $N_D \subseteq N_F$, así que $B \notin N_D$. Al ocurrir que $\{B, D\}$ es 8-conexo, entonces $D \in N_B$, $N_D \subseteq N_B$ y $B \notin N_D$.

La contención 6.2 implica que $D \notin N_H$. Al ocurrir que $N_D \subseteq N_F$ siendo $\{H, F\}$ 8-conexo, entonces $N_H \subseteq N_F$ y $F \notin N_H$.

Nuevamente emplearemos que $B \notin N_F$ y que recientemente demostramos que $N_H \subseteq N_F$. Tendremos que $B \notin N_H$, siendo $\{B, H\}$ 8-conexo. Luego $N_H \subseteq N_B$.

Finalmente, notemos que por la relación 6.2 $D \notin N_G$, además recientemente demostramos que $D \in N_F$, de modo que $N_F \not\subseteq N_G$, siendo $\{F, G\}$ 8-conexo, de modo que $N_G \subseteq N_F$.

Por simetría (razonando que E es simétrico a G), tenemos que $N_E \subseteq N_F$ y $F \notin N_E$. De manera semejante, eligiendo a B como centro de un nuevo cuadrado T tenemos que $N_I \subseteq N_B$, $B \notin N_I$, $N_C \subseteq N_B$ y $B \notin N_C$.

Por argumentos completamente análogos podemos concluir que $N_H \subseteq N_G$, $G \notin N_H$, $N_D \subseteq N_E$, $E \notin N_D$, $N_H \subseteq N_I$, $I \notin N_H$, $N_D \subseteq N_C$ y $C \notin N_D$.

De esta manera, hemos casi logrado caracterizar por completo a los abiertos mínimos excepto que no hemos determinado si A pertenece o no a cada abierto, ni la vecindad mínima de A .

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} \{D\} \subseteq N_D & \{H, I\} \subseteq N_I \\ \{H\} \subseteq N_H & \{H, G\} \subseteq N_G \\ \{D, E\} \subseteq N_E & \{D, C\} \subseteq N_C \\ \{H, G, D, E, F\} \subseteq N_F & \{H, I, O, C, B\} \subseteq N_B \end{array}$$

Remarcamos nuevamente que la única restricción para que las contenciones anteriores seas igualdades es la no pertenencia de A en los

conjuntos de la izquierda.

Consideraremos ahora dos casos posibles: $A \in N_H$ o $A \notin N_H$.

1. Si $A \in N_H$, tendremos entonces que $A \in N_D$, pues de otra manera $N_H = \{H, A\}$ y $N_D = \{D\}$ constituirían una partición del conjunto $\{H, A, D\}$ el cuál es 8-conexo y, por tanto, conexo. Entonces tenemos que $N_H = \{H, A\}$ y $N_D = \{D, A\}$. Recordemos que ya hemos probado que $N_D \subseteq N_B$, $N_H \subseteq N_F$, así que $A \in N_B$ y $A \in N_H$. Por otro lado, $D \in N_C$, $D \in N_E$ y $H \in N_G$, de modo que $N_D \subseteq N_C$, N_E y $N_H \subseteq N_G$; de modo que tenemos garantizado que $A \in N_P$ para cada $P \in T$.
2. Si $A \notin N_H$, tendremos entonces que $A \notin N_D$, pues de otra manera $N_H = \{H\}$ y $N_D = \{A, D\}$ constituirían una partición del conjunto $\{H, A, D\}$. Entonces tendremos que $A \notin N_P$ para cualquier $P \in T$, por ejemplo: $A \notin N_E$ puesto que de otra forma $N_E = \{E, D, A\}$ y $N_H = \{h\}$ formarían una desconexión de $\{E, D, A, H\}$, el cuál es 8-conexo. Por otro lado, para cualquier punto $P \in T$, distinto de A , $\{P, A\}$ es 8-conexo, de modo que tendremos que $N_P \subseteq N_A$, es decir que $N_A = T$.

Podemos resumir, entonces, los razonamientos anteriores en que hemos demostrado la existencia de 4 topologías en T para las cuáles la noción de 8-conexidad y de conexidad son la misma. Estas topologías quedan definidas, de acuerdo con los siguientes criterios:

$N_D \subseteq N_F,$	$A \in N_H$	Topología τ_1
$N_D \subseteq N_F,$	$A \notin N_H$	Topología τ_2
$N_F \subseteq N_D,$	$A \in N_H$	Topología τ_3
$N_F \subseteq N_D,$	$A \notin N_H$	Topología τ_4

Así queda probada la Proposición 6.0.2. □

En el artículo [8], las topologías se ilustran según las figuras 6.2. Finalmente llegamos al resultado principal de este capítulo.

Teorema 6.0.1 *No existe ninguna topología τ en \mathbb{Z}^2 para la cuál la 8-conexidad y la conexidad coincidan.*

Demostración:

Supongamos que una tal topología existe. Entonces la topología restringida a $N_8(A)$ (la cuál denotaremos mediante τ_A) debe reducirse a τ_1 ,

τ_2 , τ_3 o τ_4 siguiendo la notación establecida en la prueba de la proposición 6.0.2.

Exploremos los casos, mantendremos el etiquetado de la imagen 6.1. Se sugiere, asimismo prestar atención a la imagen (meter imagen) para tener presentes las relaciones entre los abiertos básicos de las cuatro topologías indicadas en la Proposición 6.0.2.

1. Supóngase que $\tau_A = \tau_1$, entonces existe un abierto $O \in \tau_A$ tal que $A \in O$ y $D \notin O$, y también existe un conjunto abierto O' que satisface $D \in O'$ y $B \notin O'$. Entonces la topología τ_A restringida a $N_8(B)$ debe ser τ_1 o τ_3 (ver la figura 6.2); sin embargo, en ambos casos $\{B\}$ es abierto, lo cuál contradice el que $\{A, B\}$ sea conexo.
2. Supongamos que $\tau_A = \tau_2$. Entonces hay un conjunto abierto $O \in \tau_A$ tal que $N_B = O \cap N_8(A)$ con $B \in O$ y $A \notin O$ (téngase en mente que N_B es la vecindad mínima de B en $N_8(A)$). Entonces tenemos que $B \in O \cap N_8(B)$ y $A \notin O \cap N_8(B)$. Ahora enfoquémonos en $N_8(B)$: del hecho anterior tenemos que la topología τ_A restringida a $N_8(B)$ debe ser τ_1 o bien τ_3 (topologías en que el vecino superior al punto central no es parte de su vecindad mínima). Luego tenemos que existe un abierto O' de τ tal que $B \in O'$ e $I \notin O'$. Se sigue que $O \cap O'$ es un abierto en \mathbb{Z}^2 que contiene a B sin contener a I . De este modo N_B que es la intersección de todos los conjuntos abiertos en τ_A que contienen a B , no puede contener a I , lo cuál no corresponde con la definición de τ_2 .
3. Los casos 3 y 4 son análogos, nuevamente por simetría.

De estas contradicciones concluimos que la topología τ_A no se reduciría a alguna de las 4 enlistadas en la Proposición 6.0.2. Podemos concluir que la topología τ_A no existe. \square

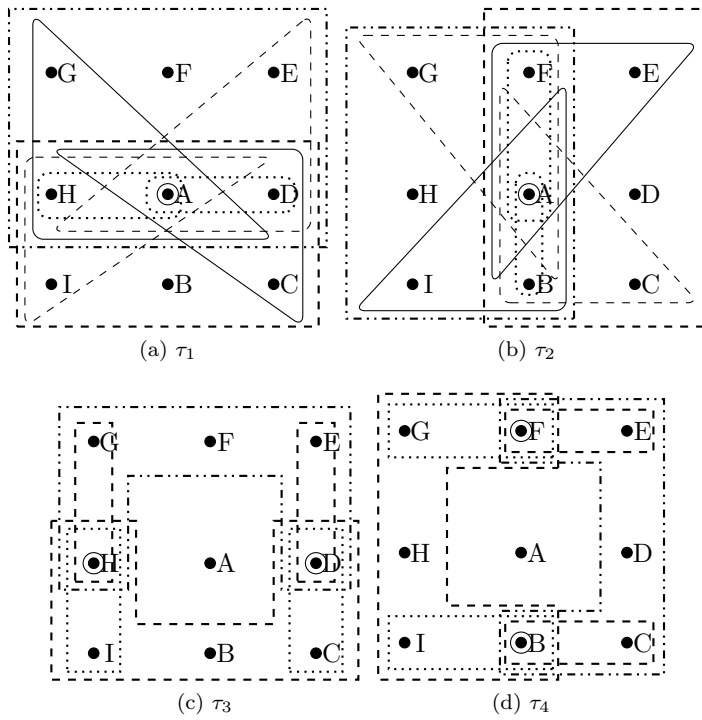


Figura 6.2: Representación de las 4 posibles topologías

Capítulo 7

Espacios topológicos ordenados y conexos

Dedicaremos este capítulo al tratamiento de la noción fundamental de espacio topológico ordenado y conexo (cots), y a partir de ella generaremos la teoría correspondiente al plano digital desde el punto de vista topológico en el capítulo siguiente.

A lo largo de este capítulo y los restantes seguiremos muy de cerca la presentación de [7] y, en general, no modificaremos ninguna de las pruebas encontradas en el artículo.

Comenzaremos esta sección enunciando una definición topológica en general y luego algunos lemas correspondientes a los espacios topológicos conexos en general. Para tener la construcción lógica completa incluiremos las pruebas; sin embargo se trata de resultados o problemas propuestos en el texto de Topología de Munkres [9]. Los últimos dos resultados se extrajeron de [7].

Definición 7.0.1 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto límite** de A si para cualquier conjunto abierto U con $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto de puntos límite de un conjunto A se le llama el **conjunto derivado** de A y se denota por A' .

Un resultado estándar indica que para cualquier conjunto A , $cl(A) = A \cup A'$. Para mayor información al respecto, se recomienda revisar el párrafo 17 del Capítulo 2 de [9].

Lema 7.0.1 Sea X un espacio topológico. Si Y es un subespacio de X , una separación de Y es una pareja de conjuntos no vacíos disjuntos A y B tales que su unión es Y , ninguno de los cuáles contiene un punto límite del otro.

Demostración:

Supongamos que A y B forman una separación de Y . Entonces A es abierto y cerrado simultáneamente en Y . La clausura de A en Y es $cl_Y(A) = cl(A) \cap Y$. Debido a que A es cerrado en Y , tenemos que $A = cl(A) \cap Y$; es decir que $cl(A) \cap B = \emptyset$. Luego B no contiene puntos límite de A y, análogamente A no contiene puntos límite de B .

Supongamos ahora que A y B son subconjuntos de Y no vacíos, disjuntos, cuya unión es Y y tales que $cl(A) \cap B = cl(B) \cap A = \emptyset$. Concluimos entonces que $A = cl(A) \cap Y$ y $B = cl(B) \cap Y$. Entonces ambos, conjuntos son cerrados y al ser complementarios, ambos son abiertos y forman una separación de Y . \square

Lema 7.0.2 Sea X un espacio topológico.

1. Si Y es un subespacio conexo de X , X mismo es conexo y A, B forman una disconexión de $X \setminus Y$, entonces $Y \cup A$ es conexo. Particularmente si A es cerrabierto (abierto y cerrado simultáneamente) en $X \setminus \{x\}$, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.
2. Si X es no vacío y tiene al menos n -componentes, entonces puede ser expresado como la unión disjunta de n -conjuntos cerrabiertos (abiertos y cerrados simultáneamente) no vacíos.

Demostración:

Sea X un espacio topológico.

1. Supongamos que $Y \cup A$ no es conexo y tiene una separación C, D . Tenemos que $cl(A) \subseteq X \setminus B$, $cl(B) \subseteq X \setminus A$, $cl(C) \subseteq X \setminus D$ y $cl(D) \subseteq X \setminus C$, en vista del Lema 7.0.1. Además $Y \cup A \cup B = C \cup D \cup B = X$. Dado que Y es conexo podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $Y \subseteq C$, ya que de otra forma $Y \cap C$ e $Y \cap D$ formarían una separación de Y . Tienen lugar las siguientes relaciones:

$$D = (C \cup D) \setminus C \subseteq (Y \cup A) \setminus Y \subseteq A$$

$$cl(D) \subseteq cl(A) \subseteq X \setminus B.$$

Luego podemos calcular que

$$\begin{aligned} cl(B \cup D) &= cl(B) \cup cl(D) \subseteq (X \setminus A) \cup (X \setminus D) \\ &= (B \cup Y) \cup (B \cup C) \subseteq B \cup D \end{aligned}$$

$cl(D) \subseteq (X \setminus B) \cap (X \setminus C) = D$. Así concluimos que $B \cup C$ y D son conjuntos cerrados en X , de modo que son simultáneamente abiertos y forman una separación de X .

Así queda demostrado el Lema. \square

El siguiente lema tiene un carácter técnico; pero será muy útil en el desarrollo subsecuente.

Lema 7.0.3 *Sea X un espacio topológico conexo.*

1. Sean x y w dos elementos diferentes de X y suponga que A y B son cerrados en $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{w\}$ respectivamente. Si $w \in A$ y $x \notin B$, entonces $B \subseteq A$. Conversamente, si B es un subconjunto no vacío de A , entonces $x \notin B$ y $w \in A$.
2. Si P , Q y R son subconjuntos de X disjuntos, no vacíos, cerrados y cuya unión es $X \setminus \{x\}$, entonces, para cada $p \in P$, $Q \cup R$ yace en una componente de $X \setminus \{p\}$.

Demostración:

1. Supongamos $x \neq w$, $x \in A$ y que $x \notin B$.

Por el Lema 7.0.2, en su primer inciso, tenemos que $B \cup \{w\}$ es conexo (debido a que un cerrado y su complemento forman una separación del espacio). A es un cerrado y $w \in (B \cup \{w\}) \cap A$. Luego $B \cup \{w\} \subseteq A$ y $B \subseteq A$.

Supongamos ahora que $\emptyset \neq B \subseteq A$. Luego $B \subseteq A \subseteq X \setminus \{x\}$, y así $x \notin B$. Además $B \cup \{w\}$ es conexo y $B \neq \emptyset$, entonces $B \cap A \neq \emptyset$ con A cerrado, de modo que $B \cup \{w\} \subseteq A$ y $w \in A$.

2. Q y R son cerrados (abiertos y cerrados simultáneamente) en $X \setminus \{x\}$, así que su unión $Q \cup R$ también lo es. Entonces P , $Q \cup R$ son ambos cerrados en $X \setminus \{x\}$, y su unión es justamente $X \setminus \{x\}$ (por hipótesis). Podemos concluir, por el inciso 1 del Lema 7.0.2 que $Q \cup R \cup \{x\}$ es un conjunto conexo, el cual yace en una única componente de $X \setminus \{p\}$, y $Q \cup R$ yace en una única componente de $X \setminus \{p\}$.

Así queda demostrado el Lema. \square

La siguiente definición es central para el resto del trabajo.

Definición 7.0.2 *Un espacio topológico ordenado y conexo (cots por sus iniciales en inglés) es un espacio topológico X que satisface la siguiente propiedad: si $Y \subseteq X$ consta exactamente de 3 elementos, existe $y \in Y$ tal que Y interseca a dos componentes de $X \setminus \{y\}$.*

La Definición 7.0.2 puede interpretarse de la siguiente manera: en un cots, dados cualesquiera tres puntos, uno de ellos «separa» a los otros dos. Ahora nos referiremos a un concepto importante en general; pero particularmente útil aterrizado en el contexto de los espacios topológicos ordenados y conexos.

Definición 7.0.3 Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ se llama **punto de corte** si $X \setminus \{x\}$ tiene dos componentes; se llama **extremo** si $X \setminus \{x\}$ tiene una única componente.

Las componentes de $X \setminus \{x\}$ se llaman **partes** de $X \setminus \{x\}$.

Proposición 7.0.1 Sea X un cots. Entonces X tiene a lo más dos extremos; y cualquier otro punto es un punto de corte.

Demostración:

Supongamos X posee tres puntos que son extremos. Al tratarse de un cots, por definición uno de ellos es tal que los otros dos yacen en componentes diferentes de su complemento, lo cual contradice que se trate de un extremo.

Ahora sea un punto que no es un extremo. Si suponemos que $X \setminus \{x\}$ tiene tres o más componentes, el segundo inciso del Lema 7.0.2 garantiza que podemos expresar a $X \setminus \{x\}$ como la unión disjunta de tres conjuntos cerrados no vacíos A , B y C . Tomemos $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$. Sin pérdida de generalidad supongamos que b es tal que a y c pertenecen a dos componentes diferentes de $X \setminus \{b\}$. El Lema 7.0.3 garantiza que $A \cup B$ yace en una misma componente de $X \setminus \{b\}$, lo cual es una contradicción. \square

7.1. Órdenes y cots

La propiedad de un cots de que dados tres puntos cualesquiera, uno de ellos separa a los otros dos (Proposición 7.0.1) sugiere que puede definirse una «orientación» («izquierda» y «derecha») en él. Ahora vamos a establecer una relación entre la existencia de una topología cots y un *orden lineal* en un conjunto.

Definición 7.1.1 Sea P un conjunto parcialmente ordenado, con orden $<$. Diremos que P está **ordenado linealmente** y que $<$ es un **orden lineal** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in P$ ocurre una y sólo una de las siguientes opciones:

1. $x < y$,
2. $y < x$,
3. $x = y$.

Asimismo, dado un punto $p \in P$ donde P está ordenado linealmente denotaremos $U(p) = \{q \in P \mid p < q\}$ y $L(p) = \{q \in P \mid q < p\}$.

Teorema 7.1.1 *Sea X un cots. Entonces existe un orden lineal en X tal que para cada $x \in X$: $L(x)$ y $U(x)$ son las partes de $X \setminus \{x\}$. Si $<$ es un orden con tales propiedades, entonces existe únicamente otro orden que también las posee: el orden inverso $<^{-1}$.*

Si X es un espacio topológico conexo y $<$ es un orden total tal que $U(x)$ y $L(x)$ son las partes de $X \setminus \{x\}$ para cada $x \in X$, entonces X es un cots.

Demostración:

Sea X un cots. Cundo X tiene menos de tres puntos el asunto no es interesante debido a que la propiedad de los cots respecto a los subconjuntos de 3 puntos se cumple por vacuidad. Asumamos, entonces que X tiene al menos 3 puntos. Sea x un punto de corte de X . Llamemos a alguna de las partes de $X \setminus \{x\}$ L_x y a a otra U_x . Para cualquier otro punto $y \in X$ definiremos a los conjuntos L_y y U_y de la siguiente manera: si $y \notin L_x$, L_y será la parte de $X \setminus \{y\}$ que contiene a x ; mientras que si $y \in L_x$, entonces L_y será aquella que no contiene a x .

En el primer caso, como consecuencia del Lema 7.0.3 ocurrirá, por definición que $y \notin L_x \Rightarrow x \in L_y \Rightarrow L_x \subseteq L_y$; mientras que en el segundo $y \in L_x \Rightarrow x \notin L_y \Rightarrow L_y \subseteq L_x$. Debido a que estos casos son exhaustivos y mutuamente excluyentes podemos concluir que $x \in L_y \Leftrightarrow L_x \subseteq L_y$ y que $y \in L_x \Leftrightarrow L_y \subseteq L_x$.

De esta forma procedemos a definir, en general, que dados $y, z \in X$, $y < z$ si y sólo si $L_y \subseteq L_z$ y $z \neq y$. Nótese que debido a que el orden es definido por contenciones de conjuntos, la relación $<$ es inmediatamente un orden parcial.

Con la finalidad de demostrar la linealidad del orden hay que demostrar que para cualesquiera $y, z \in X$, L_y y L_z están relacionados por contención.

Si x, y, z no fuesen todos distintos (recuérdese que x fue seleccionado al principio de entre los puntos de corte de X), entonces la relación por contención es clara, pues fue la primera que identificamos; de modo que ahora agotaremos los casos que corresponden a la situación en que los tres puntos son distintos.

- $z \in L_x$ e $y \notin L_x$. Tendremos que $L_z \subseteq L_x$ y que $L_x \subseteq L_y$, de modo que $L_z \subseteq L_y$. El caso en que $y \in L_x$ y $z \notin L_x$ es análogo.
- $y, z \in L_x$. Si ocurriera que ($z \in L_y$ e $y \notin L_z$) o bien ($z \notin L_y$ e $y \in L_z$) tendríamos por el Lema 2.3 que $L_z \subseteq L_y$ o bien $L_y \subseteq L_z$, respectivamente. Luego hay que analizar únicamente los dos subcasos restantes: ($z \in L_y$ e $y \in L_z$) y ($z \notin L_y$ e $y \notin L_z$) .
 - En el primer caso, como $z \in L_y$ e $y \in L_z$, tendremos que

$z \notin U_y$ y que $y \in L_z$, de modo que ocurrirá que $U_y \subseteq L_z$ y $L_z \subseteq L_x$. Además $L_y \subseteq L_z$. Tendremos aquí que $X \setminus \{y\} = U_y \cup L_y \subseteq L_x \subseteq X \setminus \{x\}$, lo cuál no es posible pues $x \neq y$.

- El segundo caso arrojará que como $z \in U_y$, $y \in U_z$ y $y, z \in L_x$ ocurrirá que $z, x \in U_y$, $y, x \in U_z$ e $y, z \in L_x$, lo cuál contradice la definición de cots.
- El caso $y, z \in L_x$ es completamente análogo al previo pues es equivalente a que $y, z \in U_x$.

Con ello queda demostrado que el orden es lineal. Ahora vamos a demostrar que únicamente hay dos órdenes posibles para dicho cots.

Denotemos por $<$ al orden cuya existencia recién demostramos y recordemos que x fue un punto que usamos para definir el orden. Al haber elegido a x , cualquier otro orden $<'$ que cumpla con las condiciones del teorema tendrá conjuntos $U'(x) = \{z \in X \mid x <' z\}$ y $L'(x) = \{z \in X \mid z <' x\}$ con la siguiente dicotomía $U'(x) = U_x$ o bien $U'(x) = L_x$. Demostraremos que el orden queda completamente determinado por esta elección inicial de $U'(x)$.

- Supongamos que $U'(x) = U_x$. Luego $y \in U_x$ implica que $y \in U'(x)$ y así $x \in L'(y)$. Las contenciones que se derivan de esto son $U'(y) \subseteq U_x$ y $L_x \subseteq L'(y)$. $L'(y)$ únicamente puede ser uno de entre dos conjuntos L_y o U_y ; sin embargo, no puede ocurrir que $L'(y) = U_y$ puesto que de ser así $L_x \subseteq U_y$ y $L_y \subseteq U_x$ siendo imposibles estas condiciones. De este modo $L_y = L'(y)$ y $U_y = U'(y)$. Tenemos entonces que para $y \in X$, $U_y = U'(y)$, lo cuál garantiza que $< = <'$.
- En el segundo caso, un razonamiento similar nos permite concluir que $<' = <^{-1}$.

Finalmente demostraremos el converso: Sea X un conjunto linealmente ordenado con un orden $<$ tal que $U(x)$ y $L(x)$ son las dos partes de $X \setminus \{x\}$, cualquiera que sea x . Sean x, y, z todos diferentes. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y < z$. Luego $(X \setminus \{y\}) \cap U(y) = \{z\}$ y $(X \setminus \{y\}) \cap L(y) = \{x\}$, de modo que X es un cots. \square

7.2. Propiedades generales

El lema siguiente describe características importantes de los cots. Quizá la propiedad más notable se resume en lo siguiente: cada singular es abierto o cerrado, y las partes de su complemento son cerrados o abiertos, contrariamente a los singulares.

Lema 7.2.1 Sea X un cots.

1. Si A y B forman una separación de $X \setminus \{x\}$, entonces $cl(A) \subseteq A \cup \{x\}$ y $\{x\}$ es abierto o cerrado. Más aún, A es abierto si y sólo si $\{x\}$ es cerrado y A es cerrado si y sólo si $\{x\}$ es abierto. Luego cada punto de corte es abierto o cerrado.
2. Si $x \in X$ tiene puntos mayores a él; pero no un sucesor inmediato (es decir, un punto y mínimo tal que $x < y$) entonces $\{x\}$ es cerrado.
3. Asuma que X tiene al menos tres puntos. Si x e y son consecutivos (es decir, uno es el sucesor inmediato del otro), los siguientes son equivalentes:
 - a) $\{x\}$ es cerrado,
 - b) $y \notin cl\{x\}$,
 - c) $\{y\}$ es abierto,
 - d) $x \in cl\{y\}$.

Si X tiene al menos 3 puntos, entonces cada punto de X es cerrado o abierto; pero no ambos.

4. Puntos diferentes x e y son consecutivos si y sólo si $\{x, y\}$ es conexo.

Demostración:

1. En general, para un espacio conexo y finito X , si $X \setminus \{x\}$ es disconexo, entonces $\{x\}$ es abierto o cerrado. Para demostrar la afirmación previa, supongamos que $\{x\}$ no es abierto y sean A, B una separación de $X \setminus \{x\}$. Notemos ahora que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que A interseca a la vecindad mínima de x , de modo que existirá $y \in A$ tal que y pertenece a la vecindad mínima de x , y asimismo x pertenece a la clausura de y , por lo cuál x pertenece a la clausura de A . Por tanto $cl_X(A) = A \cup \{x\}$. No puede ocurrir que $cl_X(B) = B$ debido a que X es conexo y entonces ambas clausuras formarían una disconexión, de modo que $cl_X(B) = B \cup \{x\}$. Al ser A y B ajenos $cl_X(A) \cap cl_X(B) = \{x\}$, de modo que $\{x\}$ es cerrado.

Continuemos notando que $cl(A) \subseteq X \setminus B$, puesto que de otro modo A y B no formarían una disconexión de $X \setminus \{x\}$ (ver Lema 7.0.1). Luego $cl(A) \subseteq A \cup \{x\}$, y análogamente $cl(B) \subseteq B \cup \{x\}$. Vamos

ahora a notar que $x \in cl(A) \Leftrightarrow x \in cl(B)$: si ocurriese que $x \in cl(A) \setminus cl(B)$, entonces $A \cup \{x\} = cl(A)$ y $B = cl(B)$, de modo que $A \cup \{x\}$ y B formarían una disconexión de X , y análogamente incurriríamos en una contradicción si $x \in cl(B) \setminus cl(A)$.

Estamos entonces frente a dos casos posibles:

- a) Si $x \in cl(A)$, entonces $x \in cl(B)$ y $\{x\} = cl(A) \cap cl(B)$, de modo que $\{x\}$ es cerrado y $A = X \setminus cl(B)$ es un abierto.
- b) Si $x \notin cl(A)$, entonces $x \notin cl(B)$, entonces $A = cl(A)$ es un conjunto cerrado, mientras que $\{x\} = X \setminus (cl(A) \cup cl(B))$ es un abierto.

Como estos casos son exhaustivos concluimos que $\{x\}$ es abierto o cerrado.

2. En vista del inciso previo, basta demostrar que $U(x)$ es un conjunto abierto. Para esto tomemos $y \in U(x)$. Como x no tiene sucesor inmediato, existe algún otro elemento z tal que $x < z < y$. Proponemos que $X \setminus cl(L(z))$ es un abierto que contiene a y tal que $X \setminus cl(L(z)) \subseteq U(y)$. El hecho de que $X \setminus cl(L(z))$ es abierto es evidente, y para las otras dos afirmaciones únicamente hay que notar que $cl(L(z))$ puede ser $L(z)$ o bien $L(z) \cup \{x\}$.
3. Procederemos a probar las equivalencias:

- $i) \Rightarrow ii)$ Si $\{x\}$ es cerrado, es claro que $y \notin cl\{x\}$.
- $ii) \Rightarrow iii)$ Supongamos que $y \notin cl\{x\}$ (asumiremos que $y < x$). De este modo $U(y) = U(x) \cup \{x\}$. Vamos a demostrar que $U(y)$ es un conjunto cerrado. $cl(U(y)) = cl(U(x) \cup \{x\}) \subseteq (U(x) \cup \{x\}) \cup cl\{x\}$. Pudiese parecer que hemos presupuesto que x es un punto de corte; sin embargo hay que tener en mente que x no es mínimo y que aún cuando fuese el máximo la relación continúa siendo válida pues $U(x) = \emptyset$. Luego tenemos que $cl(U(y)) \subseteq U(y) \cup cl\{x\}$. Como $y \notin cl\{x\}$, entonces $y \notin cl(U(y))$ y así $U(y) = cl(U(y))$.
- $iii) \Rightarrow iv)$ Supongamos que $\{y\}$ es un conjunto abierto (nuevamente asumiremos que $y < x$). Luego $U(y)$ es un conjunto cerrado: tenemos cubierto el caso en que y es punto de corte; nótese el punto y no es un máximo, y aún si fuese un mínimo, entonces $U(y)$ sería el complemento de un abierto, en cuyo caso, aún así podemos asegurar que es cerrado. Consecuentemente $L(x) = L(y) \cup \{y\}$ no puede ser un conjunto cerrado puesto que X es conexo.

Cuando x es un punto de corte, sabemos que $cl(L(x)) = L(x) \cup \{x\}$. Por otro lado, cuando x es un máximo $L(x) \subsetneq$

$cl(L(x)) \subseteq X$ y $L(x)$, X difieren únicamente en un punto, de modo que $cl(L(x)) = X$. En cualquiera de ambos casos $x \in cl(L(x)) = cl(L(y) \cup \{y\}) \subseteq L(y) \cup \{y\} \cup cl\{y\}$ y de este modo $x \in cl\{y\}$.

iv) \Rightarrow i) Supongamos ahora que $x \in cl\{y\}$ (asumiremos nuevamente que $y < x$). Luego $x \in cl(L(x))$ y así $L(x)$ no es un conjunto cerrado. Cuando x es un punto de corte esto implica que $L(x)$ es un conjunto abierto y que $\{x\}$ es cerrado. Hay que revisar qué ocurre cuando x es un máximo. Como $x \in cl\{y\}$, $\{y\}$ no es cerrado y es un punto de corte, de modo que es abierto y, así $U(y) = \{x\}$ es cerrado.

4. Supongamos que X tiene al menos 3 puntos. Si x e y son consecutivos, entonces uno de ellos es abierto, así que asumamos que $\{y\}$ es abierto. Luego $x \in cl\{y\}$ y así $\{y\} \subseteq \{x, y\} \subseteq cl\{y\}$. Se sigue que $\{x, y\}$ es conexo pues yace entre un conexo y su clausura. Para el converso: si x e y no son consecutivos, entonces hay un punto intermedio que los separa y $\{x, y\}$ no puede ser conexo.

De esta manera hemos establecido el resultado. \square

Definición 7.2.1 *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **de tipo** $T_{1/2}$ si cada singular es abierto o cerrado.*

Como una primera observación notemos que todo espacio de tipo T_1 es de tipo $T_{1/2}$ y cada espacio de tipo $T_{1/2}$ es de tipo T_0 .

Proposición 7.2.1 *Un cots con al menos tres puntos es de tipo $T_{1/2}$. Un cots con al menos tres puntos es de tipo T_1 si y sólo si no contiene parejas de puntos adyacentes; dicho espacio es infinito y de tipo T_2 ; además la topología de cots es más fina que la topología usual de intervalos.*

Demostración:

1. Sea X un cots con al menos tres puntos. Si $x \in X$ es primer elemento, entonces puede o no tener un sucesor inmediato. Si tiene sucesor inmediato, este es un punto de corte y es abierto o cerrado y como consecuencia $\{x\}$ es cerrado o abierto. Si no tiene sucesor inmediato, entonces por el inciso *b* del tercer punto del Lema 7.2.1 $\{x\}$ es cerrado. Para puntos de corte, la situación ya está analizada; mientras que para un máximo basta considerar el orden dual y el argumento previo.

2. Supongamos que el espacio no tiene parejas de puntos adyacentes. Entonces ningún punto tiene sucesores inmediatos en ninguno de los dos órdenes, de modo que todos los singulares son cerrados. El conjunto será infinito debido a que entre cualesquiera dos puntos podemos hallar un tercero. Consideremos ahora que dados $x < y$, tomando z con $x < z < y$ tendremos que $x \in L_z$ e $y \in U_z$ con L_z y U_z abiertos ajenos: tenemos así que X es de tipo T_2 . Finalmente, sea (x, y) un intervalo abierto básico de la topología del orden de X . Tendremos así que $(x, y) = U_x \cap L_y$, siendo ambos abiertos. Luego la topología de cots es más fina que la del orden.

De esta manera queda demostrado el resultado □

Ya que hemos visto algunas de las propiedades más relevantes de un cots, nos enfocaremos en un tipo muy particular de cots: a saber aquellos que tienen extremos. Esto es debido a que definiremos el plano digital, en el próximo capítulo como el producto cartesiano de dos cots con extremos.

- Lema 7.2.2** 1. Si un espacio conexo X tiene dos puntos distinguidos e y f tales que para cualesquiera otros puntos z los dos están en diferentes componentes de $X \setminus \{z\}$, entonces X es un cots con e y f como extremos.
2. Cualquier subconjunto compacto de un cots tiene un primer y un último elemento.

Demostración:

1. Primero vamos a demostrar que para $z \in X \setminus \{e, f\}$, $X \setminus \{z\}$ tiene a lo más dos componentes. Si tuviese más, habría tres cerrabiertos A, B, C disjuntos y cuya unión es $X \setminus \{z\}$ y alguna de ellas, digamos A no contiene ni a e ni a f . Si $t \in A$, entonces e, f yacen en la misma componente de $X \setminus \{t\}$, lo cuál es imposible, de acuerdo con las hipótesis.

Vamos a introducir nueva notación: para $w \in X \setminus \{e, f\}$ denotamos L_w como la componente de $X \setminus \{w\}$ que contiene a e y a U_w aquella que contiene a f .

Luego $X \setminus \{e\}$ es un conjunto conexo, pues si $w \in X \setminus \{e\}$, $U_w \cup \{w\}$ es conexo y todos ellos no contienen a f , de modo que

$$X \setminus \{e\} = \bigcup_{w \neq e} U_w \cup \{w\}$$

es un conjunto conexo. Análogamente $X \setminus \{f\}$ es un conjunto conexo.

Ahora mostraremos que para puntos diferentes $x, y \in X$ se tiene que $x \in U_y$ si y sólo si $y \in L_x$. Supongamos que $y \in U_x$ y que $x \in U_y$. Luego tendremos que $L_y \subseteq U_x$; sin embargo $e \in L_y \setminus U_x$ a menos que $y = e$ y en este caso $y \in U_x$, es decir que $e \in U_x$, lo cuál es imposible. Una contradicción análoga se muestra al suponer que $x \in L_y$ e $y \in L_x$.

Finalmente, tomemos una terna $Y = \{x, y, z\}$ y asúmase que ni x ni z separan a los otros dos puntos diferentes a ellos. Asumiremos que $x, y \in L_z$. Por la última anotación debemos tener entonces que $z \in U_x$, luego $y \in U_x$, pues x no separa a Y . Análogamente $z \in U_y$ y $x \in L_y$, de modo que y separa a Y y X es un cots.

2. Por la dualidad del ordenamiento, basta mostrar que si Y es un subconjunto de un cots sin primer elemento, entonces $\{int(U_y) \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y sin subcubierta finita. Debido a que $x \notin U_x$ y que $int(U_x) \subseteq U_x$, ningún subconjunto de un cots es cubierto por ningún U_x , ni por ninguna unión finita de ellos puesto que forman una cadena. Por otro lado se trata de una cubierta cuando Y no tiene un primer elemento puesto que $y \in int(U_x)$ cuando $x < y$ si x no tiene sucesor o cuando el sucesor de x es menor que y si lo tiene.

De esta manera queda demostrado el resultado □

7.3. Arcos y caminos

Definición 7.3.1 Si Y es un espacio topológico, un **camino cots** (o un **arco cots**) en Y es la imagen continua (u homeomorfa) de algún cots en Y . Decimos que Y es **conexo a través de caminos cots** (a través de **arcos cots**) si cualesquiera dos puntos en Y están conectados por un camino (arco) cots.

Definimos al **conjunto de adyacencia** de un punto $x \in Y$ de la siguiente forma $A(x) = \{y \in X \mid x \neq y, \{x, y\} \text{ es conexo}\}$.

Teorema 7.3.1 Sea Y un espacio topológico.

1. $\{x, y\} \subseteq Y$ es conexo si y sólo si $x \in cl\{y\}$ o bien $y \in cl\{x\}$. También tenemos que $x \in cl\{y\}$ es equivalente a que $y \in N_x$ siempre que esta exista. Así, si Y es finito $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup N_x$ para cualquier $x \in Y$. Más generalmente, en cualquier espacio topológico $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup (\cap\{M \mid M \text{ es una vecindad de } x\})$.
2. Un conjunto C es mínimo entre aquellos conexos que contienen a x e y (respecto a la contención) si y sólo si C es un arco cots con extremos x e y .

3. Si Y es finito, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) Y es conexo a través de arcos cots,
- b) Y es conexo a través de caminos cots,
- c) Y es conexo.

Así, si A y B son subconjuntos de Y no vacíos, finitos y conexos, entonces $A \cup B$ es conexo si y sólo si para algunos $a \in A$ y $b \in B$, $\{a, b\}$ es conexo.

4. Si Y es finito y $x \in Y$, entonces cualquier arco cots que contiene a x interseca a $A(x)$. Más aún, si Y es conexo, cada componente de $Y \setminus \{x\}$ interseca a $A(x)$. Así, si $|A(x)| = 1$ e Y es un cots, entonces x es un extremo.
5. Supongamos que Y es finito, conexo y contiene a los puntos distintos x e y . Entonces Y es un cots con extremos x e y si y sólo si $|A(x)| = |A(y)| = 1$ y para cualquier punto $w \in Y \setminus \{x, y\}$: $|A(w)| = 2$.

Demostración:

1. $\{x, y\}$ es conexo cuando se le dota con la topología $\{\emptyset, \{x, y\}\}$, $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ o $\{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}$. En el primer caso $x \in cl\{y\}$, $y \in cl\{x\}$, en el segundo $y \in cl\{x\}$ y en el tercero $x \in cl\{x\}$. La última topología posible para $\{x, y\}$ es la discreta; sin embargo en esta topología la clausura de cada punto es él mismo. Ahora veamos que $A(x) \cup \{x\} = \{y \in Y \mid \{x, y\} \text{ es conexo}\} = \{y \in Y \mid x \in cl\{y\} \text{ o } y \in cl\{x\}\} = cl\{x\} \cup \{y \in Y \mid x \in cl\{y\}\}$. Como $x \in cl\{y\}$ puede reescribirse como «cualquier vecindad de x contiene a y », $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup \bigcap \{M \mid M \text{ es vecindad de } x\}$. Cuando la vecindad mínima de x existe, entonces $A(x) \cup \{x\} = cl\{x\} \cup N_x$.

2. Para mostrar que un tal C es un arco, hay que notar que, en primer lugar, x e y son dos puntos tales que al remover cualquier otro punto $x \in C$, x e y quedan en componentes diferentes de $C \setminus \{w\}$, pues de otra forma, si estuvieran en la misma, ella sería un conjunto conexo menor que contendría a x y a y . Luego tenemos un cots con x e y como extremos en vista del Lema 7.2.2.

Para ver que en un cots, si $x < y$, el único arco que los contiene es $[x, y]$, simplemente hay que notar que si $z \in [x, y] \setminus C$, entonces $z \neq x$, $z \neq y$ dado que asumimos que $x, y \in C$. Además $U(z) \cap C$, $L(z) \cap C$ formarían una desconexión de C . Luego $[x, y] \subseteq C$.

Finalmente notemos que $U(x) \cup \{x\}$ es conexo y, por ende es un cots. Con el mismo orden; pero en $U(x) \cup \{x\}$, $L(y) \cup \{y\}$ es un conjunto conexo, de modo que $[x, y]$ es un cots.

3. Recordemos que un espacio topológico finito es conexo si y sólo si es conexo a través de caminos, de modo que si A y B son no vacíos y conexos $A \cup B$ será conexo siempre que existan dos puntos $a \in A$, $b \in B$ tales que $\{a, b\}$ es conexo.

$i) \Rightarrow ii)$ Todo arco cots es un camino cots. Luego un conjunto conexo por arcos cots, es conexo por caminos cots.

$ii) \Rightarrow iii)$ Supongamos que Y no es conexo; pero sí es conexo por caminos. Sean U, V dos conjuntos disjuntos no vacíos de Y que no tienen puntos límite el uno del otro y tomemos un camino que una $u \in U$ y $v \in V$ como extremos, C ; pero esto es imposible pues C es la imagen continua de un cots, el cuál es conexo.

$iii) \Rightarrow i)$ Supongamos que Y es conexo. Al ser finito se sigue que el conjunto de todos los subconjuntos que contienen a alguna pareja de puntos particular tiene únicamente elementos de cardinalidad finita, de modo que podemos elegir alguno de cardinalidad mínima y así, tenemos un arco cots en vista del inciso b).

Para demostrar la última afirmación notemos que si $A, B, A \cup B$ son no vacíos y conexos, $A \cup B$ es conexo por arcos cots y tomando alguno que una un punto de A con un punto de B , el último punto del arco cots en ser elemento de A y el siguiente (el cuál ya es un elemento de B) son la pareja deseada, mientras que si A y B son conexos y hay $a \in A, b \in B$ con $\{a, b\}$ conexo, entonces cualesquiera parejas de puntos en A o en B pueden unirse y únicamente hay que verificar al intentar conectar un punto de A con un punto de B , y eso lo logramos conectando el punto en A con a , el punto en B con b y concatenando los arcos.

4. Tomemos $y \in Y \setminus \{x\}$ y lo conectamos por un arco a x . Dado que x es extremo de A , $A \setminus \{x\}$ es conexo y por ende yace en la misma componente de $Y \setminus \{x\}$ que y . El último punto del camino es consecutivo con x y, por ende, es un elemento de $A(x)$. Para la última afirmación nótese que si x no es un extremo, $Y \setminus \{x\}$ tiene dos componentes, y así $|A(x)| = 2$.

5. Asíumase que Y es un cots, luego $A(x)$ es el conjunto de puntos consecutivos con x , de modo que $|A(z)| = 2$ para los puntos de corte z y $|A(x)| = |A(y)| = 1$ para los extremos.

Conversamente, si Y es conexo, hay un arco en Y de x a y al cuál denotaremos por A . Supongamos que $w \in Y \setminus A$ y sea B un arco cots de x a w , cuyo último punto en A es r . Si s es el sucesor de r en B y t es el sucesor de r en A , entonces t, r son diferentes puntos de $A(r)$, $x \neq r$ pues $|A(x)| = 1$, de modo que r tiene un predecesor en A , distinto de s y t , y $|A(r)| \geq 3$, lo cuál es una contradicción.

De esta manera queda demostrado el resultado. □

Capítulo 8

El plano digital

Este último capítulo del ámbito teórico y matemático estará dedicado a definir y probar algunos resultados al respecto del plano digital desde el punto de vista topológico. En el siguiente haremos una breve digresión acerca de la relación de los conceptos de la topología digital con el análisis de imágenes. Comenzaremos dando la definición de plano digital y estableciendo algunos lemas preliminares.

Definición 8.0.1 Un **plano digital** es el producto cartesiano de dos cots finitos X e Y con $|X|, |Y| \geq 3$. Un punto $(x, y) \in X \times Y$ se llama **puro** si tanto $\{x\}$ como $\{y\}$ son ambos abiertos o ambos cerrados en sus conjuntos respectivos. En caso contrario se llamará **mixto**.

*El punto (x, y) es un **punto del borde** si x o y son extremos del cots correspondiente; mientras que lo llamaremos **esquina** si ambos son extremos.*

Denotaremos por $BD(X \times Y)$ al conjunto de puntos del borde y por $AD(X \times Y)$ al conjunto de puntos del borde a excepción de las esquinas mixtas que $BD(X \times Y)$ pueda poseer.

Debido al carácter de la definición de plano digital, debemos prestar atención a la **topología producto**. Este es un objeto de estudio en sí mismo, así que con la finalidad de no extender innecesariamente este trabajo señalaremos que en el caso del producto de dos espacios X e Y , la topología producto para $X \times Y$ tiene como subbase a todos los posibles productos de conjuntos $U \times V$ con U abierto en X y V abierto en Y .

Lema 8.0.1 Sean X, Y dos espacios topológicos finitos:

1. $N_{(x,y)} = N_x \times N_y$
2. $cl(x, y) = cl\{x\} \times cl\{y\}$

Demostración:

1. En la topología producto son abiertos $N_x \times Y$, $X \times N_y$ y por tanto su intersección $(N_x \times Y) \cap (X \times N_y) = N_x \times N_y$ también lo es. Luego $N_x \times N_y$ es un abierto que contiene a $N_{(x,y)}$ y así $N_{(x,y)} \subseteq N_x \times N_y$. Por otro lado, si $(a, b) \in N_x \times N_y$, entonces $a \in N_x$, $b \in N_y$ y dado un abierto básico $(x, y) \in U \times V$, $a \in U$, $b \in V$ y así $(a, b) \in N_{(x,y)}$.
2. $cl\{x\} \times cl\{y\}$ es un cerrado en $X \times Y$ que contiene a (x, y) , y así $cl(x, y) \subseteq cl\{x\} \times cl\{y\}$.
Ahora sean $(a, b) \in cl\{x\} \times cl\{y\}$ y $U \times V$ un abierto básico alrededor de (a, b) . Luego U es un abierto alrededor de a y así $x \in U$. También $y \in V$, luego $(x, y) \in U \times V$ y así $(a, b) \in cl(x, y)$.

□

Vamos a fijar uno de los órdenes para cada uno de los cots que dan pie a un plano digital. Al tratarse de cots finitos, si existen puntos mayores a algún punto x ; este último tiene un sucesor inmediato, al cuál denotaremos por x^+ . Análogamente, podemos hablar de un antecesor inmediato de un punto x , al cuál denotaremos por x^- . Comenzaremos caracterizando a los conjuntos de adyacencia en estos términos.

Lema 8.0.2 *Si (x, y) es un punto puro de un plano digital y no pertenece al borde, entonces*

$$A(x, y) = \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \setminus \{(x, y)\}.$$

Si (x, y) es mixto y no pertenece al borde, entonces

$$A(x, y) = [(\{x^-, x, x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-, y, y^+\})] \setminus \{(x, y)\}.$$

Si (x, y) es del borde, su conjunto de adyacencia es la porción de conjunto correspondiente (entre los dos descritos anteriormente) que yace en $X \times Y$

Demostración:

1. Sea (x, y) puro:

- Si $\{x\}$, $\{y\}$ son abiertos, entonces

$$\begin{aligned} A(x, y) \cup \{(x, y)\} &= N_{(x,y)} \cup cl(x, y) \\ &= \{x\} \times \{y\} \cup \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \\ &= \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \end{aligned}$$

- Si $\{x\}$, $\{y\}$ son cerrados, entonces

$$\begin{aligned} A(x, y) \cup \{(x, y)\} &= N_{(x,y)} \cup cl(x, y) \\ &= \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \cup \{x\} \times \{y\} \\ &= \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\} \end{aligned}$$

2. Sea (x, y) mixto. Luego:

- Si $\{x\}$ es abierto y $\{y\}$ es cerrado

$$\begin{aligned} A(x, y) \cup \{(x, y)\} &= N_{(x,y)} \cup cl(x, y) \\ &= N_x \times N_y \cup cl\{x\} \times cl\{y\} \\ &= \{x\} \times \{y^-, y, y^+\} \cup \{x^-, x, x^+\} \times \{y\} \end{aligned}$$

- Análogamente tenemos el resultado cuando $\{x\}$ es cerrado y $\{y\}$ abierto.

□

8.1. El teorema de la curva cots de Jordan

Comenzamos, como de costumbre, presentando la definición de curva cots de Jordan para luego probar algunos resultados básicos respecto a ellos.

Definición 8.1.1 Una **curva cots de Jordan** es un conjunto conexo J con $|J| \geq 4$ y tal que $J \setminus \{j\}$ es un arco cots para cualquier $j \in J$.

El primer resultado está enfocado en demostrar que J genera disconexiones locales del espacio.

Lema 8.1.1 Cualquier subconjunto propio y conexo de una curva cots de Jordan es un arco cots. Si J es un conjunto finito, entonces J es una curva cots de Jordan si y sólo si J es conexo, tiene al menos 4 puntos y

$|A(j) \cap J| = 2$ para cualquier $j \in J$; en este caso estos dos puntos son los extremos del arco $J \setminus \{j\}$ y, por tanto, el conjunto formado por ellos es disconexo. Así, si J está en un plano digital y no interseca a la frontera, entonces $A(j) \setminus J$ tiene exactamente dos componentes.

Demostración:

Un subconjunto propio y conexo de una curva cots de Jordan es un subconjunto conexo de una curva de cots de jordan salvo un punto: es decir, de un arco cots. Al ser un subconjunto conexo de un cots, se trata de un cots.

La segunda afirmación sigue del último inciso del Teorema 7.3.1, puesto que si $A(j) = \{e, f\}$, entonces en $J \setminus \{j\}$, e y f tienen sólo un único elemento en su conjunto de adyacencia, mientras que todos los demás tienen dos. Los puntos en $A(j) \cap J$ son disconexos puesto que son los extremos de un arco no degenerado.

Finalmente veremos que $A(j) \setminus J$ tiene exactamente dos componentes: sea $A(j) \setminus J = A(j) \setminus \{p, q\}$; entonces $A(j) \setminus \{p\}$ es un arco cots del cuál q no es un extremo, de modo que q separa a $A(j) \setminus \{p\}$ en dos componentes.

□

Los ejemplos más sencillos de curvas cots de Jordan son los conjuntos de adyacencia de los puntos, así cómo el borde ajustado del plano. Justamente el motivo por el cuál prestamos atención al borde ajustado en lugar del borde es porque se trata de una curva cots de Jordan.

Lema 8.1.2 En el plano digital $X \times Y$, $AD(X \times Y)$ es una curva cots de Jordan, y también lo es $A(r)$ para cualquier punto r que no sea del borde de $X \times Y$. Si r es un punto de la frontera, entonces $A(r)$ es un arco cots.

Demostración:

Simplemente se trata de aplicaciones del resultado del lema 8.1.1. En el caso de los conjuntos $A(r)$ hay que prestar atención al lema 8.0.2, mientras que en el caso de $AD(X \times Y)$ hay que tomar en cuenta que en los puntos mixtos, si se trata de esquinas, dos de sus vecinos son adyacentes entre sí, de modo que tendrían, cada uno, tres vecinos, en lugar de dos, así que al removerlos todos los puntos tienen dos vecinos.

□

Lema 8.1.3 Si J es una curva cots de Jordan y $\{e, f\} \subseteq J$ no es conexo, entonces hay exactamente dos arcos $A, B \subseteq J$ con extremos e y f . Más aún $A \cap B = \{e, f\}$, $A \cup B = J$ y si $e, f \in K \subseteq J$, entonces e y f están en la misma componente de K si y sólo si $A \subseteq K$ o $B \subseteq K$

Demostración:

Dado que J es conexo y $\{e, f\}$ no lo es, podemos elegir $a \in J \setminus \{e, f\}$ y asumir, sin pérdida de generalidad, que $e < f$ en el cots $J \setminus \{a\}$. Dado que el cots $[e, f]$ es conexo, podemos elegir $b \in [e, f] \setminus \{e, f\}$. Ahora consideremos al conjunto $\{a, b, f\}$ en el cots $J \setminus \{e\}$: dado que $e < b < f$ en $J \setminus \{a\}$, e y f yacen en diferentes componentes de $(J \setminus \{a\}) \setminus \{b\}$, a las cuáles denotaremos por E y F respectivamente. Debido a que en un cots hay a lo más dos extremos y todos los demás puntos son de corte, E y F son las únicas dos componentes de $(J \setminus \{a\}) \setminus \{b\}$. Esto, junto con que $\{b\}$ y $J \setminus \{a\}$ son conexos garantiza que E y F lo separan.

Luego, por el primer inciso del Lema 7.0.3 $F \cup \{b\}$ es un subconjunto conexo de $(J \setminus \{e\}) \setminus \{a\}$, de modo que f y b están en la misma componente de $(J \setminus \{e\}) \setminus \{a\}$, y análogamente, f y a están en la misma componente de $(J \setminus \{e\}) \setminus \{b\}$. Luego tendremos que a y b están en distintas componentes de $(J \setminus \{e\}) \setminus \{f\} = J \setminus \{e, f\}$, así que este conjunto tiene dos componentes A' y B' con $a \in A'$, $b \in B'$, de modo que $\emptyset = A' \cap B'$ y $J \setminus \{e, f\} = A' \cup B'$.

Ahora notemos que $A' \cup \{e\}$ y $A' \cup \{f\}$ son conexos: esto es consecuencia de que, por el primer inciso del Lema 7.0.3 $A' \cup \{f\}$ y $B' \cup \{f\}$ son conexos en $(J \setminus \{e\}) \setminus \{f\}$ que es igual a $(J \setminus \{f\}) \setminus \{e\}$, así que aplicando nuevamente el primer inciso del Lema 7.0.3, $A' \cup \{e\}$ y $B' \cup \{f\}$ son conexos.

Debido a que $A' \neq \emptyset$, $A = A' \cup \{e, f\}$ es conexo, y análogamente para B' . Ahora tenemos que $\{e, f\} = A \cap B$ y $J = A \cup B$. Más aún, B es un subconjunto conexo del cots $J \setminus \{a\}$, de modo que es un arco, y análogamente para A .

Ahora supongamos que $P \subseteq J$ es un arco con extremos e y f . Luego $P \setminus \{e, f\} \subseteq J \setminus \{e, f\}$ es conexo, de modo que, como A' y B' son las componentes de $J \setminus \{e, f\}$, tenemos que $P \setminus \{e, f\} \subseteq A'$ o bien $P \setminus \{e, f\} \subseteq B'$, lo cuál resulta en que $P \subseteq A$ o $P \subseteq B$. Más aún, A y B son arcos con extremos e y f , de modo que son mínimos entre los conjuntos conexos que contienen a e y a f , de modo que $P = A$ o $P = B$. Se sigue que A y B son los únicos arcos con extremos e y f contenidos en J .

Finalmente, si e y f están en la misma componente Q de algún $K \subseteq J$ entonces algún subconjunto mínimo de Q conexo que continúe conteniendo a e y a f debe ser A o B , es decir $A \subseteq Q$ o bien $B \subseteq Q$. \square

Lema 8.1.4 *Supóngase que J es una curva de Jordan en el plano digital $X \times Y$, que Q es una componente de $X \times Y \setminus J$ ajena a $AD(X \times Y)$, y $P = J \cup Q$. Si C es un arco en P , entonces cada componente de $P \setminus C$ tiene intersección no vacía con J . El caso especial $J = AD(X \times Y)$ muestra que $(X \times Y) \setminus C$ tiene, a lo más, tantas componentes como $AD(X \times Y) \setminus C$.*

Demostración:

Procederemos por inducción sobre $|C|$. Sea C un arco de longitud mínima para el cuál nuestra afirmación no es verdadera, y supongamos que la componente de p en $P \setminus C$ es disjunta con J . Si f es un extremo de C , entonces $C' = C \setminus \{f\}$ es un arco más corto, de modo que la componente de p en $P \setminus C'$ interseca a J .

Dado que los conjuntos conexos son conexos a través de arcos cots, hay un arco $D \subseteq P \setminus C'$ que conecta a p con algún $j \in J$. Si $f \notin D$ entonces $D \subseteq P \setminus C$, de modo que D conecta a p con J dentro de $P \setminus C$, lo cuál contradice nuestra elección de C . Entonces tenemos que f es un punto de D y lo denotaremos mediante d . Luego d^- y d^+ (en caso de que existan) son elementos de $A(f)$. $P \cap A(d)$ es un subconjunto conexo de la curva cots de Jordan o el arco cots $A(d)$, de modo que se trata de una curva cots de Jordan o un arco cots. $C \cap A(d) \subseteq P \cap A(f)$ contiene a lo más un punto, de modo que d^- yace en una componente L de $(P \cap A(d)) \setminus C$. Estas componentes intersecan a J . Si $f \in J$, entonces podemos asumir que d es un extremo de D (pues de otra manera podríamos reemplazar D por el arco cots $[p, d]$, el cuál conecta a p con J en $P \setminus C'$). Entonces $d^- \in [p, d^-] \cap L$; ambos de los conjuntos intersecados son conexos, de modo que $[p, d^-] \cap L$ es un subconjunto conexo de $P \setminus C$ que contiene a p y que no es disjunta a J , lo cuál demuestra que la componente de p en $P \setminus C$ interseca a J , lo cuál es una contradicción. Si por otro lado, $f \notin J$, entonces $A(f) \subseteq P$ (de otra manera $A(f)$ debe intersecar a otra componente Q' de $P \setminus J$, digamos en g ; pero $\{f, g\}$ sería un arco en $Q \cup Q'$ de Q a Q' , lo cuál es una contradicción con el hecho de que ambas son las componentes de $Q \cup Q'$). Nuevamente $A(f) \setminus C = L$ es conexo, $d^- \in [p, d^-] \cap L$, y entonces $d^+ \in [d^+, j] \cap L$, de modo que $[p, d^-] \cup L$, $[p, d^-] \cup L \cup [d^+, j]$ son conexos, lo cuál es una contradicción. \square

Lema 8.1.5 Sean C y D arcos cots en $X \times Y$. Si D interseca a más de una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$, entonces D interseca a C . Entonces cada componente de $X \times Y \setminus C$ interseca $AD(X \times Y) \setminus C$ en un conjunto conexo, de modo que $X \times Y \setminus C$ tiene a lo más tantas componentes como $AD(X \times Y) \setminus C$.

Demostración:

Supongamos que nuestra afirmación es falsa y que X, Y, C, D conforman un contraejemplo minimal. Se sigue de la minimalidad que C y D intersecan a $AD(X \times Y)$ justamente en sus extremos. Si $|X| = |Y| = 3$, el resultado es fácil de verificar, así que asumiremos que $|Y| > 3$. Sea y el punto inicial de Y , $Y^* = Y \setminus \{y\}$, y considérese $X, Y^*, C^* = C \cap (X \times Y^*)$, $D^* = D \cap (X \times Y^*)$, el cuál no es un contraejemplo debido a que asumimos minimalidad. Dado que los únicos extremos de C y D pueden estar en $X \times \{y\}$, C^* y D^* son arcos. Sean c, c' y d, d' los extremos de C y

D y sean c^* , $c^{*'}$ y d^* y $d^{*'}$ los extremos de C^* , D^* , respectivamente y etiquetados de tal manera que los conjuntos $\{c, c^*\}$, $\{c', c^{*'}\}$, $\{d, d^*\}$ y $\{d', d^{*'}\}$ sean conexos.

Por hipótesis D interseca más de una componente de $AD(X \times Y) \setminus C$; si podemos demostrar que D^* interseca a más de una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C^*$, entonces C^* debe intersecar a D^* , de modo que C debe intersecar a D , lo cuál sería una contradicción. Si asumimos que D^* yace en una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C^*$, hay un camino cots Q^* en $AD(X \times Y^*) \setminus C^*$ que conecta a d^* y $d^{*'}$. Deseamos reemplazar este camino cots Q^* por otro Q en $AD(X \times Y) \setminus C$ que conecte a d y d' para obtener una contradicción.

Existen cuatro casos dependiendo de cuál entre d o d' yace en $X \times \{y\}$. Daremos los detalles para el caso en que $D \in X \times \{y\}$ y $d' \notin X \times \{y\}$, pues los otros casos son semejantes. Si $d^* = (u, y^+)$, entonces $d = (v, y)$, donde $v \in \{u^-, u, u^+\}$. Tendremos ahora que $Q^* \supseteq \{(x, y^+) \mid x \leq u\}$ o bien $Q^* \supseteq \{(x, y^+) \mid x \geq u\}$. Para fijar ideas, asumiremos la primera opción. Podemos construir a Q a partir de Q' de la siguiente manera, donde e representa al elemento mínimo de X :

$$Q = (Q^* \setminus \{(x, y^+) \mid e < x \leq u\}) \cup \{(x, y) \mid x \leq v\}.$$

Q es un camino cots en $AD(X \times Y)$ que conecta a d con d' , de modo que resta demostrar que $Q \cap C$ es vacío. Supóngase que $p \in Q \cup C$. Debido a que $Q^* \cap C$ es vacío, $P = (z, y)$, donde $z < v$. Si q es el punto en C adyacente a p , entonces $q = (w, y^+)$, donde $w \in \{z^-, z, z^+\}$. Demostrar que $q \in Q^*$ completaría la prueba (pues contradiría la vacuidad de $Q^* \cap C$); pero esto sólo requiere demostrar que $w \leq u$.

Si $v \in \{u^-, u\}$, entonces $z < u$ y $w \leq z^+ \leq u$.

Si, por otro lado, $v = u^+$, nótese que d es puro (pues $d = (u^+, y)$ está conectado a $d^* = (u, y^+)$). Hay dos posibilidades: si $z < u$, entonces $w \leq z^+ \leq u$. Si $z = u$, entonces $p = (u, y)$ es mixto, de modo que $q = d^*$ y $w = u$. \square

Teorema 8.1.1 *Si C es un arco cots en un plano digital $X \times Y$, entonces $AD(X \times Y) \setminus C$ y $X \times Y \setminus C$ tienen el mismo número de componentes, las cuáles están en correspondencia por inclusión.*

Demostración:

Consideremos a la función Ψ del conjunto de componentes de $AD(X \times Y) \setminus C$ a aquellas en $X \times Y \setminus C$ definida de la siguiente manera: $\Psi(W)$ es la componente de W en $X \times Y \setminus C$. Los dos lemas anteriores demuestran, el primero que es suprayectiva y el segundo que es inyectiva. \square

Finalmente llegamos al resultado final:

Teorema 8.1.2 *Si J es una curva cots de Jordan en un plano digital $X \times Y$ y J no interseca al borde, entonces $X \times Y \setminus J$ tiene exactamente*

dos componentes. La componente que interseca al borde se llama exterior, y la otra interior.

Demostración:

Dada una curva de Jordan J , nuestra primera tarea es encontrar un punto «en el interior». Para hallarlo, nos movemos desde el borde «hacia arriba» hasta llegar a J . Para lograrlo, en Y fijemos uno de los órdenes naturales, y sea $v = \min\{y \mid (x, y) \in J\}$.

El punto deseado en el interior tendrá la forma (w, v^+) , donde $(w, v) \in J$. Sea $Y^* = Y \setminus L(v)$. Hay dos casos:

1. Si hay un punto mixto en J cuya coordenada en Y sea v , entonces sea (w, v) tal punto, y sea $C = J \setminus \{(w, v)\}$. Dado que un arco no puede girar en un punto mixto, se sigue que $(w^-, v), (w^+, v) \in J$, $C \subseteq J$ y C es un arco con extremos (w^-, v) y (w^+, v) .
2. Si el inciso 1 no es verdadero, entonces sea (w, v) un punto puro en J . Note que los puntos mixtos $(w^-, v), (w^+, v) \notin J$, de modo que por la minimalidad de v y el hecho de que $|A((w, v)) \cap J| = 2$ tenemos que $(w^-, v^+), (w^+, v^+) \in J$. Por otro lado $(J \setminus \{(w, v)\}) \cup \{(w^-, v), (w^+, v)\}$ es conexo, así que podemos tomar C un arco con extremos (w^-, v) y (w^+, v) .

De este modo, en cualquier caso, C es un arco de (w^-, v) a (w^+, v) en $X \times Y^*$, y (w, v) es un punto aislado de $AD(X \times Y^*) \setminus C$ y por tanto forma una componente de este conjunto. Así, ningún punto de $AD(X \times Y^*) \setminus C \setminus \{(w, v)\}$ puede conectarse a (w, v) a través de un arco en $X \times Y^* \setminus C$ y por tanto ninguno de esos puntos puede ser conectado a (w, v) a través de un tal arco.

Para mostrar que ningún punto de $AD(X \times Y^*) \setminus C \setminus \{(w, v)\}$ puede ser conectado a (w, v) a través de un arco en $X \times Y^* \setminus J$ (es decir, reemplazar a C por J en el análisis anterior), ahora consideraremos los dos mismos casos que en el párrafo anterior. En el primer caso, la conclusión es clara puesto que $J \supseteq C$. En el segundo, si hubiere un tal arco en $X \times Y^* \setminus J$, entonces tendría que pasar a través de uno de los puntos en $C \setminus J = \{(w^-, v), (w^+, v)\}$. Para mostrar que esto no es posible, basta observar que, en $X \times Y^*$, $A(w^-, v) = \{(w^-, v), (w, v), (w^+, v^+)\}$, donde los últimos dos puntos están en J y el primero en J o en $AD(X \times Y^*) \setminus C \setminus \{(w, v)\}$; y de manera semejante para (w^+, v) . De modo que $X \times Y^* \setminus J$ tiene a lo menos dos componentes.

Para mostrar que $X \times Y \setminus J$ tiene al menos dos componentes, asumiremos que hay un arco en $X \times Y \setminus J$ de un punto en $X \times (Y \setminus Y^*)$ a (w, v^*) . Este debe intersecar a $X \times \{v\} \setminus J$; pero esto conduce a una contradicción como sigue: un subarco de este arco yace en $X \times Y^* \setminus J$ y conecta puntos los cuáles hemos ya demostrado que yacen en componentes diferentes de

$X \setminus Y^* \setminus J$ (dicho subarco puede obtenerse eliminando a los punto de $X \times (Y \setminus Y^*)$).

Resta demostrar que $X \times Y \setminus J$ tiene a lo más dos componentes. Elijase cualquier punto $j \in J$; entonces $X \times Y \setminus (J \setminus \{j\})$ es conexo, de modo que $A(j) \setminus J$ debe intersecar a cada componente de $X \times Y \setminus J$. Dado que $A(j) \setminus J$ tiene sólo dos componentes, entonces $X \times Y \setminus J$ tiene a lo más dos componentes. \square

Capítulo 9

Notas breves sobre imágenes digitales

Entenderemos a las imágenes como representaciones planas de porciones del mundo real, generadas mediante la captura de información óptica relevante a través de algún dispositivo. El ejemplo prototípico lo proporcionan las imágenes captadas mediante cámaras digitales. Estas últimas tienen un mecanismo de funcionamiento semejante al de sus predecesores más primitivos en el siguiente sentido: la luz reflejada o emitida por objetos ubicados en una región —conocida como «campo de visión» de la cámara— pasa a través de un orificio y se proyecta sobre una superficie plana dotada de la capacidad de tomar registro de alguna característica de la luz que incide sobre ella (por ejemplo su intensidad).

Este proceso de captura de imágenes se realiza dentro de las siguientes limitantes:

1. Modelemos el registro de la luz en la superficie de proyección cómo la determinación de una función continua de una región plana a los números reales. En la práctica no es posible determinar el valor de la función en los infinitos puntos que componen al dominio.
2. Aún dónde efectivamente se toma un registro de la intensidad de la luz, este no se realiza con un grado infinito de precisión.

Así que al realizar la captura de una imagen nos vemos forzados a tomar un enfoque de corte estadístico, pues tomamos una muestra de la intensidad promedio de la luz en algunas pequeñas regiones (en el caso digital son celdas microscópicas conocidas como *pixeles*) y reconstruimos un modelo discreto de la función original. Aquí indicaremos sucintamente que en las cámaras modernas el tamaño de la muestra, determinado

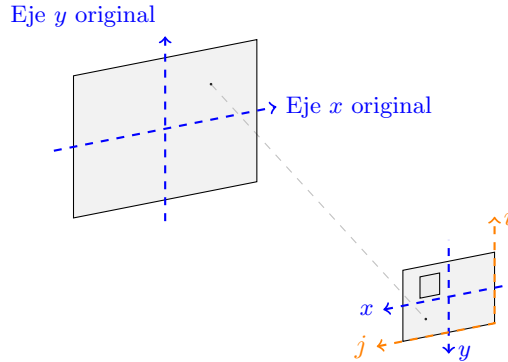


Figura 9.1: Esquema de funcionamiento de la cámara. El rectángulo grande representa a la escena real a capturar, mientras que el mediano la superficie de captura de la cámara. El cuadro pequeño representa la apertura por la cuál la luz entra a la cámara.

en buena medida por la densidad de píxeles por unidad de área, es grande dada la enorme fidelidad con que las imágenes digitales modernas representan escenas reales.

Las cámaras digitales almacenan el resultado de su operación en forma *discreta*, *cuantizada* y susceptible de ser interpretada por procesadores de información basados en variaciones discretas de voltaje.

Restrinjamos nuestra atención a imágenes en las cuáles únicamente se toma una medida de la intensidad de la luz en una escena. Una manera simple de registrar dicha información en cada píxel es mediante un entero entre 0 y 255, codificando por 0 al color negro y por 255 al color blanco—adelante se verá que nos enfocaremos en una codificación aún menos sofisticada—. En representación binaria son necesarios y suficientes 8 dígitos para escribir a cualquiera de estos números. En el ámbito computacional a cada uno de estos dígitos binarios se le conoce como *bit*—acrónimo del inglés *binary digit*—, y 8 de estos bits conforman una nueva unidad conocida como *byte*. Es decir, el almacenamiento de la información de cada píxel para una imagen en «escala de grises» requiere de 1 byte.

Agrupemos ahora a nuestras observaciones de la luz en un *arreglo* de m filas por n columnas, al cuál comenzaremos a indizar a partir del 0—es decir que los índices de filas se encuentran en un rango de 0 a $m - 1$, mientras que los de las columnas en un rango de 0 a $n - 1$ —si-

guiendo convenciones de lenguajes de programación como *C* o *Python*. Este arreglo codifica nuestro modelo discreto y puede visualizarse de la manera siguiente: el pixel con índices $[0, 0]$ se ubicará en la esquina superior izquierda; variando el primer índice se hace referencia a las filas de la matriz, cada vez más «hacia abajo» conforme mayor es el índice; mientras que variando el segundo se hace referencia a las columnas de la matriz, cada vez más «hacia la derecha» conforme mayor es el índice. Esta asignación indica que el pixel de la esquina inferior derecha de la imagen tiene índices $[m - 1, n - 1]$. Reemplazando la notación usual de matrices, al elemento de la matriz A representado por A_{ij} se le denota por $A[i, j]$

Es necesario un cierto cuidado en el orden de los índices, pues colocando un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro de la imagen y con ejes en los sentidos usuales, el desplazamiento sobre el eje horizontal lo determina el segundo índice de la matriz y el desplazamiento sobre el eje vertical es controlado por el primer índice de la matriz.

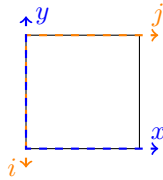


Figura 9.2: Las direcciones de crecimiento de los índices no son las mismas que las de los ejes de coordenadas usuales.

9.1. Operaciones sobre imágenes

Generalmente al tratar con imágenes, el interés se enfoca en las propiedades de objetos particulares representados en ellas, más que en las imágenes como un todo. Dichas propiedades se «calculan» realizando alguna operación sobre el arreglo que la contiene. Podemos *grosso modo* clasificar el tipo de operaciones dependiendo del alcance necesario para calcularlas [6].

Por ejemplo, es posible realizar un tratamiento sobre una imagen en «escala de grises» para convertirla en una «a blanco y negro» mediante el siguiente procedimiento: definimos un *conjunto umbral*, tal que si un pixel almacena un número contenido en tal conjunto, se le asigna el

1 y si no el 0. El conjunto umbral y estas asignaciones no son de ninguna manera fijos, por ejemplo, la asignación de 1 y 0 para el umbral $C = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 120\}$ puede corresponder a que queremos emular una «función característica» para un objeto oscuro sobre un fondo blanco. El conjunto de umbralización puede elegirse tras hacer varias pruebas y ver cuál es más conveniente, pues depende de las propiedades de reflexión de los objetos ubicados en el campo de visión de la cámara. La función correspondiente a esta asignación requiere como variable un pixel a la vez y por esto es de carácter *puntual*. Este ejemplo es importante y es para el cuál la teoría desarrollada previamente encuentra uso: imágenes que únicamente requieren de un bit por pixel para su almacenamiento.

Otro tipo de operación surge al analizar qué proceso debe seguirse si queremos comprobar que un cierto pixel de un objeto sea parte de su contorno. Requerimos conocer si alguno de sus vecinos es un pixel que no es parte del objeto: en este sentido el seguimiento de bordes es una operación *local*.

Finalmente encontramos a las operaciones *globales*. Para proporcionar ejemplos útiles simplifiquemos la situación asumiendo que nuestras imágenes únicamente registran un objeto a la vez. Una medida del *tamaño* del objeto puede ser dado por algún análogo del área que ocupa en la imagen A donde aparece, como puede ser

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} A[i, j],$$

así cómo una medida de la posición del objeto puede ser dado por algún análogo del centro de masa del objeto, como puede ser

$$\begin{aligned} \bar{j} &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} j \cdot A[i, j]}{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} A[i, j]} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot A[i, j]}{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} A[i, j]}. \end{aligned}$$

Ambas medidas pueden ser pensadas como los momentos de orden 0 y orden 1 para la distribución del objeto en la imagen y para su cálculo debemos conocer todos los valores de la matriz simultáneamente.

Siguiendo estas ideas podríamos identificar una medida de la orientación de un objeto, calculando el segundo momento de su distribución respecto a una recta general y elegir como eje aquel que minimice esta cantidad,

es decir, la de menor «varianza» o menor «inercia».

Las operaciones de tipo puntual pueden ser implementadas de forma paralela, entendiéndose por esto que diferentes dispositivos de procesamiento pueden operar sobre diferentes regiones disjuntas de la imagen sin interferir el uno con el otro en su correcto funcionamiento. Por ejemplo, cuatro procesadores podrían procesar cada uno una cuarta parte de la imagen y al final alguno de ellos podría condensar el trabajo conjunto. Análogamente, es posible convencerse de que las operaciones globales señaladas pueden realizarse en paralelo, al tratarse de sumas y promedios de valores de una matriz.

Sin embargo, la operación de «seguimiento de contorno» es más delicada, pues para cualquier propuesta de algoritmo para realizarlo debemos estar seguros de que:

1. el algoritmo efectivamente rinde cuentas de todos los píxeles que conformen aquello que definamos como contorno y
2. el algoritmo eventualmente terminará de realizar la búsqueda.

Mayores exigencias sobre los algoritmos nos obligarán a descartar procedimientos tales como el que se refiere el algoritmo 9.1. En la descripción de este algoritmo hemos empleado *pseudocódigo*, que es un método compacto y en un lenguaje cercano al natural en el que se describen estructuras de control (como **para . . . hacer, si . . . entonces**) y operaciones, funciones y asignaciones (por ejemplo: asignar el valor 1 a $B[i, j]$ se denota mediante $B[i, j] \leftarrow 1$), que describen un procedimiento.

Este algoritmo presenta varias características desfavorables. La primera es que se requiere del mismo espacio de almacenamiento para registrar el contorno que para la imagen original, a pesar de que en muchos casos el contorno está compuesto de una cantidad significativamente menor de píxeles. En segundo lugar el contorno viene dado «en desorden», entendiéndose por esto que no está definida de antemano una manera en la cuál se puede «recorrer» completamente el contorno visitando una única vez a todos los píxeles consecutivamente. En tercer lugar, se requiere visitar absolutamente todos los puntos de la imagen para verificar si se trata de puntos del contorno. Otras objeciones más específicas frente a la implementación de este procedimiento pueden surgir de las necesidades de alguna aplicación particular.

La teoría estudiada en este trabajo constituye una base teórica que permite analizar algunos de los algoritmos para operaciones sobre imágenes.

Algoritmo 9.1 Registro inconveniente de contornos

Entrada: Arreglo A correspondiente a una imagen binaria que muestra un único objeto y cuyos pixeles están indicados con 1.

Salida: Arreglo B correspondiente a una imagen binaria del mismo tamaño que A cuyos pixeles satisfacen $B[i, j] = 1$ si y sólo si $A[i, j]$ es un punto del contorno del objeto representado en A .

```
1: Iniciar todas las componentes de  $B$  como 0.  
2: para  $i = 0, 1, \dots, m - 1$  hacer  
3:   para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  hacer  
4:     si  $A[i, j] = 1$  entonces  
5:       si algún pixel vecino de  $A[i, j]$  almacena un 0 entonces  
6:          $B[i, j] \leftarrow 1$   
7:       fin si  
8:     fin si  
9:   fin para  
10: fin para
```

Appendices

Apéndice A

Algunas observaciones sobre 4-curvas y 8-curvas

Ya se hizo la observación de que todo 4-camino es un 8-camino debido a que cualesquiera dos pixeles que sean 4-vecinos son, automáticamente, 8-vecinos.

El primer hecho que destacaremos es que una 4-curva cerrada no es nunca una 8-curva cerrada (por cerrado entenderemos que su último pixel es vecino del primero).

Como ejemplo considérese al conjunto $N_8(0,0)$ indexado de la siguiente forma:

$$x_1 = (-1, -1), x_2 = (0, -1), x_3 = (1, -1), x_4 = (1, 0),$$

$$x_5 = (1, 1), x_6 = (0, 1), x_7 = (-1, 1), x_8 = (-1, 0)$$

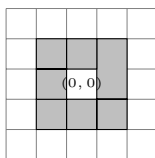
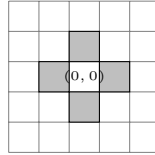


Figura A.1: $N_8(0,0)$ es una 4-curva cerrada que no es 8-curva cerrada.

tenemos entonces que x_2 es un 4-vecino de x_1 y de x_3 ; sin embargo también es un 8-vecino de x_7 y de x_4 , de modo que tenemos un punto con más de 2 8-vecinos, haciendo imposible que $N_8(0,0)$ sea una 8-curva cerrada simple.

A primera vista parece que el problema yace en las «esquinas» de las

Figura A.2: $N_8(0,0)$ sin las esquinas.

4-curvas, pues representan «adyacencia adicional». Así que aunque las 4-curvas no son 8-curvas cerradas, siempre contienen alguna.

Otra característica importante de las 4-curvas radica en su cardinalidad puesto que en todos los casos se trata de un número par, mientras que no hay restricciones de paridad en el caso de las 8-curvas.

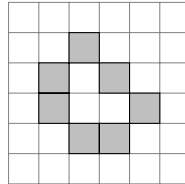


Figura A.3: 8-curva de 7 píxeles.

Esta propiedad de paridad para las 4-curvas es fácilmente observable en la sub-clase de los «rectángulos», pues en ellos, dada la simetría su cardinalidad puede obtenerse como 2 veces el número de píxeles en su ancho más 2 veces el número de píxeles en su altura, menos 4.

Este apéndice está dedicado a la demostración de estas y otras pocas propiedades elementales.

A.1. Paridad

Comenzaremos adoptando una notación diferente a la que se ha empleado tradicionalmente en los artículos sobre topología del plano digital identificando a \mathbb{Z}^2 con $\mathbb{Z}[i]$, los enteros Gaussianos. También adoptaremos una notación diferente para los n -caminos: cuando $n = 4$, los n -vecinos de x_j únicamente pueden ser $x_j - 1$, $x_j + 1$, $x_j - i$, $x_j + i$, mientras que cuando $n = 8$ a estas posibilidades se añaden $x_j + (1 + i)$, $x_j + (1 - i)$, $x_j + (-1 + i)$, $x_j + (-1 - i)$; así que dado un n -camino x_1, \dots, x_m lo reescribiremos mediante $x_1 : \lambda_1 : \dots : \lambda_{m-1}$ donde $\lambda_i = x_{i+1} - x_i$ para $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Es claro que esta transformación es invertible, de modo que no hemos perdido ningún tipo de información acerca del camino;

pero sí hemos limitado el rango de valores que toman los elementos que describen el camino a partir del segundo. Podemos pensar que cada λ determina un único movimiento con el cuál llegar de un pixel al siguiente en el camino.

Lema A.1.1 *Sea $x_1 : \lambda_1 : \dots : \lambda_{m-1}$ un n -camino. La distancia del taxista de x_1 a x_m es*

$$|\Re \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| + |\Im \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i|$$

Demostración:

Es consecuencia directa de que

$$x_m = x_1 + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$$

□

Lema A.1.2 *Sea $x_1 : \lambda_1 : \dots : \lambda_{m-1}$ una 4-curva cerrada.*

$$\left| \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \right| = 1.$$

Demostración:

Tenemos que al ser 4-vecinos x_1 y x_m , entonces la distancia del taxista entre ellos es 1, luego

$$|\Re \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| + |\Im \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 1,$$

de modo que $|\Re \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 1$ y $|\Im \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 0$ o bien $|\Re \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 0$ y $|\Im \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 1$. Así tendremos que $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$ es real o imaginario puro

y de norma 1, luego $\left| \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \right| = 1$. □

Teorema A.1.1 *Sea $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ una 4-curva cerrada simple. $|C| = m$ es un número par.*

Demostración:

Espresemos a la 4-curva cerrada simple mediante $x_1 : \lambda_1 : \cdots : \lambda_{m-1}$.

Luego tenemos que $|\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i| = 1$, y así $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$ es real o imaginario puro $(1, -1, i, -i)$.

Para fijar ideas asumiremos que es imaginario puro, pues el caso real es completamente análogo.

Dado que cada uno de los λ_i es $1, -1, i$ o $-i$, entonces la suma de los que son reales es 0, luego hay tantos λ iguales a 1 como iguales a -1 , así que la cantidad de λ reales es par. Los restantes son imaginarios puros y su suma es i o $-i$. Alguno de ellos debe tener el valor de esta suma, mientras que la suma de todos los demás debe ser 0 de modo que ahora tenemos una cantidad impar de λ imaginarios puros. Se sigue de esto que $m - 1$ es un número impar y, por ende m es par. \square

A.2. Análogos discretos

Una vez que hemos introducido la notación compleja para demostrar una de nuestras afirmaciones tomaremos un breve espacio para mostrar algunas analogías entre nuestra teoría y los aspectos básicos del análisis complejo y la teoría de curvas en el plano.

Si consideramos la reescritura de un n -camino mediante $x_1 : \lambda_1 : \cdots : \lambda_{m-1}$ como la indicación de una condición inicial y una sucesión de direcciones de movimiento, el hecho de que podamos reconstruir al camino original a partir de su codificación puede pensarse como un análogo discreto del *Teorema Fundamental de Curvas*, el cuál indica que dados un punto, un sistema de coordenadas fijo y funciones de curvatura y torsión se especifica a una curva de manera única. En nuestro caso, dado que restringimos nuestra atención a un plano, la torsión debería ser, naturalmente, 0.

Con la finalidad de hacer crecer estas ideas hacia una noción de derivada discreta, en primer lugar acordaremos usar congruencias módulo m para los índices de los n -caminos de longitud m , es decir, haremos $x_m = x_0$ y $x_{m+1} = x_1$. De esta manera podremos definir $\lambda_i = x_{i+1} - x_i$ para todo i de 1 a m . Como consecuencia del lema A.1.1 tendremos:

Lema A.2.1 Sea x_1, \dots, x_m un n -camino. Este es cerrado si y sólo si

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

x_i	0	1	2	3	$3+i$	$3+2i$	$3+3i$
λ_i	1	1	1	i	i	i	i
$x_i \cdot \lambda_i$	0	1	2	$3i$	$-1+3i$	$-2+3i$	$-3+3i$

Cuadro A.1: La suma de los productos es $-4i$, no 0.

$3+4i$	$2+4i$	$1+4i$	$1+3i$	$1+2i$	$2i$	i
-1	-1	$-i$	$-i$	-1	$-i$	$-i$
$-4-4i$	$-2-4i$	$4-i$	$3-i$	$-1-2i$	2	1

Cuadro A.2: *Continuación...*

Este resultado puede pensarse intuitivamente como que una curva es cerrada si el total de su variación es cero. Sin embargo, esta noción resulta insuficiente para hablar de algún análogo de una derivada de una trayectoria discreta en el plano complejo, pues una de las características más importantes de éste último es que se cumple el *Teorema de Cauchy* para curvas cerradas en campos diferenciables. Una versión débil de este teorema es: si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada rectificable, entonces

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Con la finalidad de obtener una relación parecida a esta en el caso discreto, la forma más inmediata es considerar a la suma

$$\sum_{i=1}^m f(x_i) x'_i = 0$$

donde f sea una función «entera» y x'_i nuestra propuesta de derivada discreta.

Entre la clase de las funciones «enteras» en este sentido discreto esperamos encontrar a la función identidad, así que en primer lugar debemos buscar una propuesta de x'_i que satisfaga

$$\sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i = 0.$$

Nuestra λ_i no cumple esta propiedad, por ejemplo, considérese la curva dada por los elementos marcados en la tabla A.2 y que se muestra en la figura A.2.

No es muy difícil llegar a la conclusión de que $x_{i+1} - x_{i-1}$ es una propuesta que supera a la previa

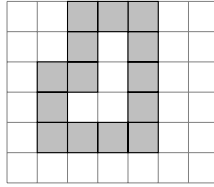


Figura A.4: Ejemplo que evidencia que λ_i no es la mejor propuesta de derivada.

Proposición A.2.1 Sea x_1, \dots, x_m una n -curva cerrada. Denotemos $x'_i = x_{i+1} - x_{i-1}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i = 0.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m x_i \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m x_i \cdot x_{i+1} - x_{i-1} \cdot x_i \end{aligned}$$

entonces se trata de una suma de tipo telescópico:

$$\sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i = x_m \cdot x_{m+1} - x_0 \cdot x_1 = 0$$

□

En la sección correspondiente a la noción de funciones continuas se vio que las únicas funciones continuas e inyectivas en el plano digital son composiciones de traslaciones, rotaciones por múltiplos enteros de $\pi/2$ y reflexiones.

En la teoría de variable compleja sabemos que estas funciones son diferenciables exceptuando a las reflexiones. En nuestro caso es fácil demostrar que la relación del teorema A.2.1 se preserva para otras funciones:

Teorema A.2.1 Sea x_1, \dots, x_m un n -camino cerrado. Si f es una constante o bien composición de traslaciones rotaciones por múltiplos enteros de $\pi/2$, entonces

$$\sum_{i=1}^m f(x_i) x'_i = 0.$$

Demostración:

Si f es una constante c

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m c \cdot x'_i \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= c \cdot \sum_{i=1}^m x'_i \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= c \cdot \sum_{i=1}^m x_{i+1} - x_{i-1} = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, si f es una traslación existe un entero gaussiano r tal que $f(x) = x + r$, de esta manera

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m (x_i + r)x'_i \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i + r \cdot \sum_{i=1}^m x'_i\end{aligned}$$

y cada uno de estos sumandos es 0.

En el caso en que f sea una rotación hay un entero tal que $f(x) = e^{\frac{ki\pi}{2}} \cdot x$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= \sum_{i=1}^m (e^{\frac{ki\pi}{2}} \cdot x)x'_i \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) \cdot x'_i &= e^{\frac{ki\pi}{2}} \cdot \sum_{i=1}^m x_i \cdot x'_i = 0\end{aligned}$$

□

Las reflexiones son diferenciables en el sentido real; pero no en el sentido complejo. Una medida de esta diferencia se obtiene mediante las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Una posible propuesta para la «derivada compleja discreta» puede darse en términos de «derivadas direccionales». Denotemos:

$$\begin{aligned}\partial_1 f(z) &= \frac{f(z+1) - f(z-1)}{2} \\ \partial_2 f(z) &= \frac{f(z+i) - f(z-i)}{2}.\end{aligned}$$

Usaremos una expresión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para definir las funciones diferenciables.

Definición A.2.1 Una función $f : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ se llamará entera discreta si es continua en $\mathbb{Z}[i]$ y se satisface en cada punto la relación

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = 0.$$

Es una cuestión muy sencilla el probar que entre las funciones inyectivas de $\mathbb{Z}[i]$ en sí mismo, estas relaciones se satisfacen cuando se trata de rotaciones y traslaciones; pero no cuando se trata de reflexiones.

Proposición A.2.2 Las reflexiones y rotaciones por múltiplos enteros de $\pi/2$ son enteras discretas; pero no lo es la conjugación.

Demostración:

Todas las funciones indicadas con continuas, de modo que únicamente resta ver si se cumplen o no las «ecuaciones de Cauchy-Riemann». Comenzaremos por la función identidad:

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{z + 1 - (z - 1) + i(z + i - (z - i))}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{2 + i(2i)}{2} = 0$$

En el caso de la conjugación $f(z) = \bar{z}$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{z + 1 - z - 1}{2} + i \frac{z + i - z - i}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{\bar{z} + 1 - \bar{z} + 1 + i(z - i - \bar{z} - i)}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{2 + i(-2i)}{2} = 2.$$

Por otro lado, cuando se trata de una rotación por $\pi/2$ tendremos que

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{-y + i(x + 1) - [-y + i(x - 1)] + i[-(y + 1) + ix] - i[-(y - 1) + ix]}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{-y + ix + i + y - ix + i - iy - i - x + iy - i + x}{2} = 0.$$

Cuando se trata de una rotación de π $f(z) = -z$ y las derivadas direccionales son, simplemente, los opuestos de las derivadas direccionales de la identidad, así que las ecuaciones se satisfacen de inmediato.

Cuando se trata de una rotación de $-\pi/2$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{y - i(x + 1) - [y - i(x - 1)] + i[(y + 1) - ix] - [(y - 1) - ix]}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{y - ix - i - y + ix - i + iy + i + x - iy + i - x}{2}.$$

Cuando se trata de una traslación $f(z) = z + r$ para alguna r y

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{z + 1 + r - (z - 1 + r) + i[(z + i + r) - (-i + r)]}{2}$$

$$\partial_1 f(z) + i\partial_2 f(z) = \frac{2 + i(2i)}{2} = 0.$$

□

Vale la pena notar que en este caso discreto también tiene sentido hablar del *índice* de una curva cerrada C con respecto a un punto que no pertenece a dicha curva. Para definirlo emplearemos conceptos similares a los usados en la demostración del teorema de la curva de Jordan: dado un pixel $z \in \mathbb{Z}[i]$ que no pertenece a C , consideraremos a los conjuntos

$$H(z) = \{z + k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$V(z) = \{z + i \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Consideraremos los cruces de C con $H(z)$ y $V(z)$ de la siguiente manera:

1. Si en la corrida $\{x_{r+1}, \dots, x_{r+k-1}\}$ de C con $H(z)$ ocurre que $x_r = x_{r+1} - i$ y $x_{r+k} = x_{r+k-1} + i$, entonces se dirá que el cruce horizontal es positivo, mientras que si $x_r = x_{r+1} + i$ y $x_{r+k} = x_{r+k-1} - i$ se dirá que el cruce horizontal es negativo.
2. Si en la corrida $\{x_{r+1}, \dots, x_{r+k-1}\}$ de C con $H(z)$ ocurre que $x_r = x_{r+1} + 1$ y $x_{r+k} = x_{r+k-1} - 1$, entonces se dirá que el cruce vertical es positivo, mientras que si $x_r = x_{r+1} - 1$ y $x_{r+k} = x_{r+k-1} + 1$ se dirá que el cruce vertical es negativo.

Entonces definimos el índice horizontal $I(C, z, H)$ como la suma de tantos 1 como cruces horizontales positivos más tantos -1 como cruces horizontales negativos. Asimismo definimos el índice vertical $I(C, z, V)$ como la suma de tantos 1 como cruces verticales positivos más tantos -1 como cruces verticales negativos.

Todas estas indicaciones presentan dos inconvenientes fundamentales puesto que dos de las características más importantes del análisis complejo están ausentes.

1. La regla de la cadena.
2. La fórmula integral de Cauchy.

Para finalizar de redondear estas ideas podrían seguirse las siguientes rutas:

1. Demostrar que los índices horizontal y vertical coinciden, así como encontrar una suma que involucre a los píxeles que conforman el camino y al punto en cuestión y que dé como resultado el índice.
2. Demostrar que toda curva cerrada simple en el plano puede «deformarse» a un rectángulo a través de una función «continua».

Bibliografía

- [1] ROSENFELD, A, *Connectivity in Digital Pictures*, Journal of the Association for Computing Machinery, 17, pp. 146–160, 1970.
- [2] ROSENFELD, A, *Arcs and Curves in Digital Pictures*, Journal of the Association for Computing Machinery, 20, pp. 81–87, 1973.
- [3] ROSENFELD, A, *Adjacency in Digital Pictures*, Information and control, 26, pp. 24–33 1974.
- [4] KONG, T., ROSENFELD, A, *Digital Topology: Introduction and survey*, Computer graphics, graphics and image processing, 48, pp. 357–393, 1989.
- [5] ROSENFELD, A, ‘*Continuous*’ functions on Digital Pictures, Pattern Recognition Letters 4, pp. 177–184, 1986.
- [6] JAIN, R., KASTURI, R., SCHUNK B, *Machine Vision*, Mc. Graw Hill, pp. 1–72, 1995 E.E.U.U.
- [7] KHALIMSKY, E., KOPPERMAN, MEYER, P., *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its applications 36, pp. 1–17, 1990.
- [8] CHASSERY, J., *Connectivity and consecutivity in Digital Pictures*, Computer graphics and image processing 9, pp. 294–300, 1990.
- [9] MUNKRES J., *Topology*, Pearson Education, pp. 148–152, 2000.
- [10] MAY, J.P., *Finite Topological Spaces*, Notas no publicadas. Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf>
- [11] BREDON, G., *Topology and Geometry*, Springer Verlag, pp 3–18, 1993.