BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO

MATEMÁTICAS.

Título de la Tesis:

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE CONJUNTOS EN SECUNDARIA

Tesis presentada como requisito para obtener

el Título de:

Licenciado en Matemáticas.

Presenta:

Felipe Olvera Cruz

Asesores de Tesis:

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar.
Dra. María Araceli Juárez.

Diciembre de 2013. Puebla, Puebla.

Dedicatoria

A mi madre

Por ser quien siempre confió en mi y ha estado apoyándome durante todo el camino de mi vida.

Agradecimientos

A mis padres Felipe y Aurelia, por todo el apoyo incondicional que me han brindado desde el primer momento que decidí estudiar la Licenciatura en Matemáticas, por su cariño, confianza y comprensión, gracias papá aunque ahora no estés, gracias mamá por creer en mí, por apoyarme económicamente cuando lo necesitaba y sobre todo muchas gracias por levantarme el ánimo en las ocasiones en las que sentía que no lograría la meta, todo lo que he logrado se lo debo a usted.

A mis asesores de tesis: por darme la oportunidad de trabajar con ellos, por su gran apoyo, por que he aprendido mucho de ellos, por el tiempo dedicado a este trabajo, por su grata ayuda siempre, a la Doctora Araceli por su ayuda y animo para lograr terminar la licenciatura.

A mis sinodales por sus observaciones que me hicieron ver diferentes puntos que ayudaron a mejorar el presente trabajo, gracias por su guía y sus observaciones.

ÍNDICE

Introducción……..7

Capítulo I Matemática moderna

1.1 Matemática moderna……..9
1.1.1 Matemática tradicional. ……9
1.1.2 Matemática moderna……..11
1.1.2.1 En América Latina. ……13
1.1.2.2 En México……14
1.1.3 Fracaso de las matemáticas modernas……15
1.1.3.1 Crítica de Morris Kline a la teoría de conjuntos en secundaria……16
1.1.3.2 Crítica a Morris Kline. ……16

Capítulo II Programas: antes del 93 y las competencias de hoy.

2.1 Programas: antes del 93 y las competencias de hoy. ……19
2.1.1 Antes de la reforma del 93 ……19
2.1.2 Reforma de 1993……20
2.1.3 La matemática hoy en día……20
2.1.4 La organización de los aprendizajes de la matemática en secundaria……22
2.1.5 Propósitos del estudio de las matemáticas para la educación básica ……28

Capítulo III Los libros de secundaria y los conjuntos

3.1 Los libros de secundaria y los conjuntos……29
3.2 Probabilidad y conjuntos……34
3.2.1 Los libros y la probabilidad……35

Capítulo IV Conjuntos

4.1 Conjuntos……39
4.1.1 Conjuntos finitos e infinitos……42
4.1.2 Subconjuntos……42
4.1.3 Operaciones con conjuntos……44
4.1.3.1 Unión. ……44
4.1.3.2 Intersección……45
4.1.3.3 Diferencia……47
4.1.3.4 Complemento……48
4.1.4 Conjuntos de números ……51
4.1.4.1 Conjunto de los números naturales……51
4.1.4.2 Subconjuntos importantes de los números naturales. ……51
4.1.5 La necesidad de los conjuntos al programa de SEP 2011……52
4.1.6 Distinción entre números primos y compuestos. ……53
4.1.7 Mínimo común múltiplo. ……55

4.1.8 Máximo común divisor……55
4.1.9 Números enteros……56
4.1.10 Números racionales. ……57
4.2 Relaciones y funciones……59
4.3 Probabilidad y conjuntos……60
4.3.1 El espacio muestral……61
4.3.2 Espacios finitos equiprobables……62

Conclusión……69

Bibliografía ……70

Introducción

Al trabajar con alumnos de secundaria y bachillerato observé las carencias que se presentan en cuanto a conocimientos básicos de matemáticas. Una carencia muy común es el desconocimiento de los números primos. Al preguntar la definición de número primo observé que solo un pequeño porcentaje de los alumnos la conocía, además, muy pocos de los alumnos que sabían la definición de número primo reconocían a un número primo. Ahora ¿Qué se puede hacer para que el alumno vaya reconociendo a los números primos? una idea es mencionar a varios de ellos cada vez que se usen en alguna actividad o ejercicio de matemáticas; es decir hablar de ellos como el conjunto $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31, \dots\}$. Reconocer a los números primos ayudaría al alumno a descomponer cualquier número entero como producto de potencias de primos y esto, a su vez, facilitaría el cálculo del mínimo común múltiplo, máximo común divisor, la simplificación de números racionales, y todo lo que esto conlleva. Como menciona Javier Cilleruelo (2000) *Los números primos son los objetos más relevantes de los números enteros, siendo además los responsables de las propiedades aritméticas de éstos.* De igual manera, sería conveniente resaltar la importancia de otros conjuntos de números como los múltiplos de tres, las potencias de enteros como los cuadrados, los cubos, etc. y por supuesto los racionales y los reales, para propiciar en el alumno un conocimiento global y ordenado de los números con los cuales trabaja en este nivel.

En geometría los conjuntos los podemos aplicar en las definiciones de algunos cuadriláteros, por ejemplo, un cuadrado es un elemento del conjunto de los rectángulos; en la probabilidad, los conjuntos aparecen desde el momento en que se define espacio muestral y evento.

Debido a las observaciones hechas hasta aquí es que en este trabajo de tesis nos planteamos el siguiente:

Objetivo. Motivar una reflexión acerca de la necesidad de estudiar la teoría de conjuntos a un nivel apropiado para la currícula de secundaria.

Para alcanzar dicho objetivo el contenido de esta tesis lo hemos distribuido como sigue: En el capítulo I se resume la historia del surgimiento de la matemática moderna así como la de su fracaso y mostramos que debido al "fracaso de la matemática moderna" y a que México adoptaba las reformas de fuera, el tema de conjuntos desapareció de los contenidos de secundaria. En el segundo capítulo se muestran los programas en los que aun aparecían los conjuntos como tema de secundaria y se muestra la reforma en la cual se omitieron y, por último, se enuncia el programa actual (2011) del mismo nivel. En el capítulo III se presentan ejemplos de libros de secundaria en los cuales no se define el concepto de conjunto y cómo esto genera confusión y errores en la presentación de algunos temas. En el capítulo IV se presenta una propuesta para que, de una forma sencilla, se introduzcan los conjuntos a alumnos de secundaria, así como ejemplos de aplicación para que el alumno los tenga

presentes y los vea como un tema básico de la matemática. En este capítulo aparecen unas notas, cuando dichas notas tienen la etiqueta (E) significa que es una nota solo para el lector de esta tesis y que no forma parte del desarrollo del tema de conjuntos. Los ejercicios buscan generar dudas, las cuales se aclaran después con notas, y al final se presenta la aplicación de los conjuntos a temas de los tres ejes temáticos.

Capitulo I

1.1 Matemática moderna.

1.1.1 Matemática tradicional.

La enseñanza de la matemática tradicional está basada en un proceso mecánico, es decir el alumno aprende matemáticas en base a la repetición. El profesor expone la teoría, después explica el cómo realizar un ejemplo, si los alumnos quedaron con muchas dudas acerca del procedimiento lo que hace el profesor es hacer otro ejemplo casi idéntico. En este momento ya más alumnos han captado el procedimiento, ahora algunos de ellos están ávidos de intentar por su propia cuenta un ejercicio, tal vez los que entendieron el procedimiento del primer ejemplo habrán intentado resolver por su cuenta el segundo ejemplo, aunque hubo una duda muy grande en decidir si lo intentaban solos o ponían atención y así entender mejor el procedimiento. El profesor escribe el ejercicio, y los alumnos comienzan a resolver; por desgracia el ejercicio es casi una copia de los dos ejemplos. Los alumnos que prácticamente entendieron el procedimiento desde el primer ejemplo lo empiezan a aplicar al ejercicio y donde tienen duda sobre el paso a seguir, revisan sus ejemplos y así continúan hasta terminar el ejercicio. Otro grupo de alumnos intenta resolver el ejercicio, pero tiene dudas desde el primer paso, no está seguro como empezar y tal vez revise sus ejemplos, pero como sigue con dudas, lo que hace es realizar el primer paso y pregunta al profesor "voy bien" si el profesor le contesta afirmativamente el alumno intentará el segundo paso y volverá a preguntar "voy bien" en caso de que la respuesta para alguno de los pasos sea negativa, pide el alumno le explique ese paso, y así sucesivamente, lo que se está generando es que el profesor está resolviendo el ejercicio de nuevo para ese alumno en especial, puesto que lo va guiando sobre el camino correcto de la solución, sin embargo el alumno no sabe qué está haciendo, solo es guiado por un camino donde él ni siquiera sabe por qué debe seguir ese camino, le basta que alguien le diga qué hacer y así terminar el ejercicio; aunque nunca supo siquiera reconocer los pasos del procedimiento. Vendrán más ejercicios con la misma forma, el alumno ahora pregunta menos, empieza a tener más confianza (debido al número de repeticiones) y tal vez después de repetir muchas veces el procedimiento lo llega a memorizar y el alumno comenta "ya entendí" aunque lo único que realmente debería de decir "ya memoricé el procedimiento" .

Morris Kline (1973) menciona: *El plan tradicional no presta mucha atención a la comprensión. Confía en la práctica para que los alumnos hagan el proceso rápidamente"* Por desgracia esto solo deja el aprendizaje de la matemática en memorizar procesos, que obviamente al paso de un tiempo el alumno olvidará.

Al resolver ecuaciones de segundo grado el profesor expone sobre la forma general de una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ y si estamos en nivel

secundaria, no se puede mencionar quienes podrían ser los valores de $a, b\ y\ c$, en algunos casos no se menciona que $a \neq 0$, en otras si se menciona pero no se aclara a que se debe. Generalmente se comienza definiendo los tipos de ecuaciones, y se muestran ejemplos de cómo resolverlas, por desgracia los ejemplos son tan "buenos" que las soluciones son siempre enteras, que cuando se llega a resolver una ecuación donde la solución es del tipo racional y no entera, el alumno piensa "en qué me equivoque" y ya ni hablamos de soluciones irracionales, lo curioso es que estas soluciones del tipo irracional aparecen solo cuando se aplica la fórmula general $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y el alumno no se entera que está trabajando con los números irracionales, puesto que lo que hace es usar la calculadora para dar un valor aproximado y con eso obtiene su solución.

En el caso de la resolución de problemas, por ejemplo, problemas que impliquen un sistema de ecuaciones, muchas de las veces se trabajan con ejercicios de manera agrupada en el sentido de la forma de los ejercicios (problemas de números, problemas de mezclas, problemas de palancas, problemas de geometría) es decir en cada sección el alumno no tiene que identificar el tipo de problema, los problemas ya están clasificados. "En la vida real nadie nos clasifica nuestros problemas".

Al dar las soluciones existe un muy mal hábito, (Al menos en las escuelas de Puebla) hay profesores que en nivel primaria le enseñaron al alumno que para indicar su respuesta escribiera: ($R =$) y posteriormente el resultado obtenido al problema; es preocupante que en secundaria algún otro profesor, lo siga exigiendo; el problema de escribir de esta manera la solución radica en que el alumno ya no se preocupa por la pregunta él sabe que la respuesta, por ser matemáticas es: $R = número$ sin ni siquiera revisar si su respuesta es lógicamente posible, (tal vez el resultado le de un número negativo en cierto problema donde la respuesta debiese ser un número natural).

Otra situación muy común al resolver problemas está expresada en el siguiente ejemplo:

Problema: Juan compró bolígrafos rojos por $4 cada uno y bolígrafos azules por $2.80 cada uno. Si Juan compró 24 bolígrafos con el costo total de 84 pesos, ¿cuántos bolígrafos rojos compró?

En el caso de que llegue a definir las variables x y y (tal vez sólo las piense y no las escriba), el alumno define:

$$x: bolígrafos\ rojos$$
$$y: bolígrafos\ azules$$

y escribe su sistema de ecuaciones:

$$x + y = 24$$
$$4x + 2.8y = 84$$

Aquí aparece un dilema y el alumno se pregunta "qué método para resolver el sistema uso" generalmente escogerá el que le dicte él profesor o el que mejor domine. Al momento de obtener la solución ($x = 24, y = 10$) el escribirá $R = 24\ y\ 10$.

Debiera ser claro que la definición de variables son para números no para cosas. Y debiera ser claro que siempre hay que contestar lo que se pregunta.

Morris Kline (1973) menciona: *Evidentemente, los defectos del plan tradicional son numerosos. La confianza en la memorización de desarrollos y demostraciones, el tratamiento dispar del álgebra y la geometría, los defectos lógicos secundarios, la conservación de temas anticuados, la falta de motivación o atractivo explica por qué a los jóvenes no les gusta la asignatura y, por tanto, no avanzan en ella. La aversión a las matemáticas se intensifica y las dificultades de comprensión aumentan al tener que leer libros de texto oscuros, pobremente escritos y concebidos con fines comerciales.*

1.1.2 Matemática moderna

En la década de los cincuenta del siglo XX se sabía que el nivel de los estudiantes era más bajo en matemáticas con relación a otras asignaturas. Todos estaban de acuerdo en que la enseñanza de las matemáticas era insatisfactoria. Hacia el año de 1958 en Europa, en el famoso seminario de Royamount, realizado en Francia, se congregaron prestigiosos matemáticos profesionales y representantes de 20 países europeos para escribir lo que sería el comienzo de la reforma de la enseñanza de las matemáticas en la primaria y secundaria. Hacia mediados de la década del 60, se convocaron reuniones y seminarios en los demás países europeos y en los Estados Unidos.

La modernización fue interpretada como la introducción de la "ideología Bourbaki". La escuela bourbakiana organiza las matemáticas a través de tres grandes estructuras, la algebraica, la topológica y la de orden. La deducción, el rigor, la abstracción y la axiomática son la esencia de la práctica de las matemáticas para la escuela bourbakiana.

De estos principios se derivaron orientaciones para fijar los contenidos de la reforma. Los conceptos se presentaron en una versión más abstracta. Se concedió excesiva prioridad al manejo riguroso de la notación simbólica. En lo referente a los contenidos, se privilegió la ***teoría de conjuntos***, la versión axiomatizada del álgebra y la lógica matemática. Por su parte, el objetivo de formación científica y tecnológica determinó que los contenidos de la enseñanza secundaria atendieran las necesidades de las matemáticas universitarias.

La reforma se llevo acabo para lo cual Ruiz A. (2009) considera varios factores que sintetiza de esta manera:

1. La acción de los matemáticos en las universidades

La reforma respondía esencialmente a una realidad: existía una amplia necesidad de modernizar la enseñanza de las matemáticas; y existía una gran separación entre las matemáticas universitarias y las pre-universitarias.

La modernización arrancaba entonces de la necesidad de adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales; así como también a ciertas condiciones históricas y políticas especiales.

Esta situación generó la idea entre los matemáticos de que estos tenían la misión histórica de meterse en la enseñanza pre-universitaria de las matemáticas y, peor aun, definir lo que debía ser la modernización de las mismas y el establecimiento del puente con las matemáticas universitarias.

Lo cierto del caso es que casi todas las conferencias internacionales y nacionales fueron regidas plenamente por matemáticos profesionales, muchos de un gran prestigio internacional en su campo.

Ruiz A. (2009) considera que varios asuntos se aceptaron como supuestos y que mirando retrospectivamente no se puede decir que eran ciertos:

i) No está claro que la modernización de la enseñanza de las matemáticas debería ser leída o interpretada como la introducción de las matemáticas modernas como contenido (modernizar pudo haber sido mejorar métodos, mecanismos objetivos, etc.)

ii) Tampoco está claro que las matemáticas pre-universitarias deban definirse en base a las necesidades de las matemáticas universitarias, o con base en los requerimientos de las profesiones científicas y tecnológicas de las universidades;

iii) No está claro que sean los matemáticos universitarios (por más capaces que puedan ser en su campo) los profesionales que deban definir los planes de la enseñanza de las matemáticas en la educación general básica.

2. Ideología y filosofía de las matemáticas:

El influjo teórico inmediato que dominó en los reformadores fue lo que podemos llamar la "ideología Bourbaki" en los años 30 y 40 en Nancy, Francia, se creó un grupo compuesto por notables matemáticos, motivados por el propósito siguiente: reconstruir las matemáticas sobre una amplia base general que abarcase todo lo que se había producido hasta la fecha en matemáticas.

La gran tarea organizadora, que dio decenas de volúmenes de matemáticas, se fundamentaba en las nociones de la teoría de conjuntos, de las relaciones y de las funciones. Según ellos las matemáticas se podían englobar a través de dos gigantescas estructuras: la estructura algebraica y la estructura topológica. Cada

una se dividía en sub-estructuras. Por ejemplo: la algebraica se dividía en grupos, anillos, módulos, cuerpos, etc.; la topológica en grupos, espacios compactos, espacios convexos, espacios normales, etc. Ambas estructuras se unían estrechamente a través de la estructura de espacio vectorial.

Esta organización del conocimiento matemático logró tener gran influencia en las universidades de varias partes del mundo; y con ella también muchos de sus supuestos teóricos a veces explícitos y a veces implícitos.

Uno de sus supuestos era la afirmación de que las matemáticas son un cuerpo único; de que existe un lenguaje y una lógica conceptual que puede dar cuenta de todas las partes de la matemática; que la esencia de las matemáticas está en su abstracción y en la creación o ampliación de las estructuras generales, etc.

La ideología Bourbaki encontró apoyo e influencia hasta en pensadores como Piaget, que encontró en las estructuras lo que él pensó que era la clave del desarrollo del pensamiento humano, no solo en la sociogénesis sino también en la psicogénesis.

Esta ideología fue decisiva en los reformadores de la enseñanza de las matemáticas pre-universitarias.

3. El contexto político e histórico.

Ideológicamente la reforma le debía mucho a Europa, pero en los aspectos institucionales y financieros mucho se le debe a los norteamericanos. Uno de los factores que pesó en los ritmos y en el respaldo internacional a la reforma tiene que ver con el SPUTNIK. La puesta en órbita de este satélite por los soviéticos asustó al mundo occidental. Se vio como la expresión de que los soviéticos eran superiores tecnológicamente y que si la situación seguía así, pronto conquistarían el mundo. El sistema educativo soviético fue considerado una maravilla y un peligro poderoso para la libertad y la democracia. La historia cambiaría esta percepción, pero mucho tiempo después.

Lo que entonces sucedió fue una alarma general de modernizar y mejorar la educación científica y técnica en los países de occidente; la reforma de las matemáticas no podía caer en un mejor momento.

Un respaldo institucional muy amplio y una fuerte inyección de dinero apuntalaron con fuerza la reforma matemática.

1.1.2.1 En América Latina.

Las preocupaciones de la modernización no podían dejar de afectar también a América Latina; pero la iniciativa de reforma provino de afuera. Primeramente se recibieron libros de texto del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares de los

EUA. Pero lo que sería más decisivo fue la realización de la primera conferencia Interamericana de Educación Matemática, en Bogotá Colombia en 1961. Se buscó contar con la representación de todos los países del continente para echar andar con premura la estrategia; elaborar o traducir textos, cambiar currícula, entrenar profesores, etc., al igual que se estaba haciendo en Europa.

Una segunda conferencia se realizó en Lima en 1966, para darle seguimiento a la reforma. Aquí se elaboró el temario para toda la secundaria (12 a 18 años), con el que se reformaría toda la currícula de matemáticas en América Latina; también se diseñaron los medios y programas para entrenar profesores.

1.1.2.2 En México

La implementación de la Reforma se llevó a cabo en las mismas condiciones de la región latinoamericana. Cantoral (1994) señala que también obedeció a causas externas a la propia práctica educativa e, igualmente, los cambios curriculares introducidos con el nombre de matemáticas modernas se apoyaron en argumentos matemáticos. Los problemas que trajo la premisa errónea de un currículo igual para todo el mundo y la presunción del carácter universal de la población a la que iba dirigido dieron lugar a la necesidad de crear espacios de reflexión sobre las características de las matemáticas escolares.

1.1.3 Fracaso de las matemáticas modernas

En la segunda parte de la década de los 70 la reforma de las matemáticas modernas entró en crisis. El apoyo económico que tuvieron en un principio los proyectos disminuyó considerablemente. Pero sobre todo pesó y ha pesado el rechazo de muchos de los sectores sociales involucrados: los maestros y los profesores de secundaria, los padres de familia y de los estudiantes. Los maestros quejándose de no recibir adiestramiento, ni las indicaciones, ni los instrumentos ni los materiales ni la lucidez para llevar a la práctica la reforma; los padres de familia porque la reforma les impedía actuar y poder ayudar a la formación matemática "moderna" de sus hijos; los alumnos porque las matemáticas, de partida siempre difíciles, se les aparecía de una manera tan abstracta e inaprensible que fomentaba rechazo.

Pero, además, todos sentían que las nuevas matemáticas mas bien confundían, debilitando la formación básica que la enseñanza tradicional de la matemática si proporcionaba.

El fracaso de la matemática moderna se centra en cuatro situaciones.

1. La necesidad de mejorar y modernizar la enseñanza en las matemáticas, pero esto no implicaba introducir las matemáticas modernas de las universidades a los contenidos de la matemática pre-universitaria.

2. El hecho de ser matemático profesional, no implicaba directamente que tenían las condiciones para determinar un currículo de matemáticas pre-universitarias.
3. Era incorrecto asumir un currículum para todo el mundo igual asumiendo una continuación en la educación universitaria; la mayoría de las personas no van a la universidad y mucho menos a estudiar carreras científicas y técnicas.
4. La ideología Bourbaki, como todos los supuestos filosóficos de los que se nutría, eran y son dudosamente válidos.
5. Ángel R.(1994) Agrega una quinta situación: se pensaba y todavía muchos piensan que las matemáticas son más importantes de lo que son; se piensa que el papel de las matemáticas en la ciencia y la tecnología moderna se puede transmitir mecánicamente a la educación

1.1.3.1 Crítica de Morris Kline a la teoría de conjuntos en secundaria

El nuevo tema al que se concede importancia en la "matemática moderna" es la teoría de conjuntos. No hay duda que la palabra <<conjunto>> es útil. En el sentido habitual, no técnico, significa colección, clase, grupo y cosas parecidas. Sin embargo se pide a los alumnos que estudien la unión e intersección de conjuntos, los subconjuntos, el conjunto vacío, los conjuntos infinitos, las correspondencia biunívocas entre conjuntos infinitos y otros conceptos. Todo esto es un total despilfarro de tiempo. En las teorías matemáticas muy avanzadas y complicadas, la teoría de conjuntos juega un papel, pero en las matemáticas elementales no juega ninguno. De hecho es casi seguro que la teoría de conjuntos se incluyó en las matemáticas modernas más para darles aspecto de ser complejas y avanzadas que por su utilidad sucede que es uno de los pocos temas de matemáticas avanzadas que los creadores del plan de matemática moderna podían comprender.

La teoría de conjuntos no tiene ninguna utilidad para comprender la matemática elemental o para aprender a trabajar con ella, aunque constituya el fundamento lógico de un planteamiento complejo y riguroso de las matemáticas.

De hecho la teoría de conjuntos puede causar desorientación incluso en el contexto en que se supone que es de más ayuda, es decir en el estudio de los números. Lo más que los modernos textos pueden decir acerca de la relación entre números y conjuntos es que un número es la propiedad o nombre de un conjunto. Esto, en si mismo, es tan vago que resulta inútil como definición de número. Pero la situación es peor aun. Dados dos conjuntos {1,2,3} *y* {3,4,5}*, la unión de estos conjuntos es* {1,2,3,4,5}*, el cual solo contiene cinco objetos. Pero si sumamos el número de objetos del primer conjunto al número de objetos del segundo conjunto el resultado es 6. Igualmente, la intersección de los dos conjuntos originales es el conjunto* {3}*. Pero el producto correspondiente a los dos conjuntos es 9. Luego las dos operaciones básicas entre conjuntos, unión e intersección, no se corresponden con la suma y multiplicación de los números representados por los conjuntos.*

La teoría de conjuntos arroja resultados importantes, pero incluso los modernistas reconocen que éstos caen fuera de la esfera de las matemáticas elementales.

En las matemáticas elementales la teoría de conjuntos es un formalismo hueco que obstaculiza ideas que son mucho mas fáciles de comprender intuitivamente. La justificación de su introducción es casi ridícula y supone una parodia de la pedagogía. La teoría de conjuntos no ha resultado el elixir de la pedagogía matemática.

1.1.3.2 Crítica a Morris Kline.

Ya antes hubo una critica al libro de Morris Kline por Jesús Hernández (1976) en un articulo del periódico El País quien menciona lo siguiente:

No hará falta decir que todas las críticas hechas son perfectamente razonables. Pero en algunas ocasiones las antipatías del autor le hacen ir demasiado lejos, sobre todo en lo que se refiere a la lógica, llegando a decir, por ejemplo, que «en ninguna época de la historia de las matemáticas hemos estado menos seguros de qué es el rigor», afirmación que parece difícilmente sostenible. Por otra parte, Kline insiste en la importancia de las motivaciones físicas, pero exagera al decir que «la matemática no es más que una descripción de la física».

Si bien puede no estarse totalmente de acuerdo (y aun estar en franco desacuerdo, como es nuestro caso) con algunas de las afirmaciones hechas, si los puntos de vista adoptados pueden parecer a veces demasiado unilaterales y subjetivos, sí puede pensarse de alguna de sus críticas que, aun no siendo reaccionaria a priori*, podría muy bien resultarlo* a posteriori*, es evidente que se trata de una obra importante y llena de observaciones acertadas.*

Terminemos diciendo que sería lamentable que algunas personas incapaces de comprender este libro lo utilizasen como un arma demagógica contra una reforma que, por muy desdichadamente que se haya llevado a cabo (y no hay que ir muy lejos para encontrar ejemplos), no resultaba por ello menos ineludible.

Los conjuntos son importantes y es cierto que los libros en secundaria basados en la matemática moderna no le daban la importancia que tienen, se veían como un tema independiente de los demás. Por desgracia, en la experiencia que tengo al trabajar en asesorías de chicos de secundaria me he dado cuenta de que muchos profesores, hoy en día, hacen lo mismo con los diferentes ejes, pareciese que "Análisis de la Información" no tuviese nada que ver con "Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico" y con "Manejo de la Información". Aunque el programa indica que se deben de ver los tres ejes en cada uno de los bloques estos no aparecen relacionados.

En el caso de los conjuntos se presenta la misma situación, es decir; el hecho de que los libros presentaran a los conjuntos como un tema aislado de las matemáticas

elementales, no quiere decir que así sea, y esto se mostrará en el capitulo 3 con aplicaciones de los conjuntos para visualizar de mejor forma algunos conjuntos de números como lo son los divisores de un número natural o los múltiplos de un número natural.

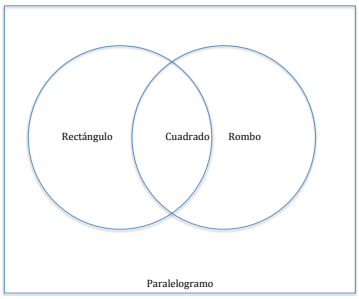
Es importante que en secundaria se recolecte en una forma ordenada lo aprendido en primaria, por ejemplo, en primaria se trabaja con los números naturales y se mencionan en los libros de esa manera "los números naturales" por qué no habríamos en secundaria de nombrarlos de esa manera, y mucho más, en primaria se trabaja con subconjuntos de los números naturales, que mejor forma que dichos números escribirlos usando la notación de conjuntos, y sobre todo a la hora de referirnos a esos conjuntos de números darles el énfasis y la importancia que tienen. Ejemplo: el conjunto de los números primos.

Es básico que un alumno de primaria identifique al menos a los primeros 5 números primos, sin embargo eso no sucede, a veces ni siquiera en secundaria los identifican, ahora bien si escribimos el conjunto $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31, \dots\}$ y cada vez que en un problema los números primos apareciesen recordar este conjunto, se tienen dos cosas; primero el alumno empieza a identificar la notación de conjuntos y segundo a identificar los elementos del conjunto de números primos.

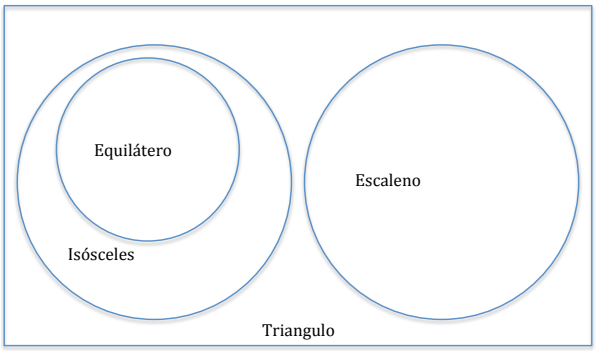
Lo mismo sucede con el conjunto de números cuadrados perfectos $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225, \dots\}$ o el de los cubos perfectos $\{1,8,27,64,125,216, \dots\}$ el alumno debiera de familiarizarse con estos números para que cuando se trabaje con la factorización pueda visualizar desde una diferencia de cuadrados o un trinomio cuadrado perfecto, pero como podría ver en esta expresión algebraica: $36x^4 - 169$ que es una diferencia de cuadrados si no ubica al 169 como un cuadrado perfecto; que mejor forma de presentar a los números cuadrados perfectos, que como un conjunto, que además éste es de suma importancia para la parte **sentido numérico y pensamiento algebraico**.

Los conjuntos ayudan al alumno a construir una visión global y ordenada de los números, al identificar a los naturales, enteros, racionales e irracionales y las relaciones entre estos conjuntos. Si a los alumnos de primero de bachillerato se les pregunta sobre ejemplos de números racionales estos no pueden responder, debido a que en secundaria conocen a las fracciones y a los enteros como números "ajenos" entre si y no como subconjuntos de los racionales.

En el eje **forma espacio y medida**, podemos apoyarnos con los diagramas de Venn para que el alumno identifique la clasificación de algunos cuadriláteros, ya que es importante que el alumno conozca que un cuadrado es un rombo y también un rectángulo, por consiguiente esta en la intersección de estos conjuntos.



Al igual se puede usar los diagramas de Venn para la clasificación de triángulos y el alumno le facilite recordar que un triángulo equilátero también es isósceles.



Ahora en **manejo de la información**, pues es tan simple como que abrir cualquier libro de Probabilidad y ver el primer tema con el que comienzan: **"Conjuntos"** así que decir que no es un tema para tomar en cuenta en la educación secundaria es muy arriesgado, lo que se tiene que hacer es ocuparse de que el alumno se vaya relacionando con los conjuntos, su notación y su utilidad; y que mas utilidad se podría mencionar que las definiciones de probabilidad estén basadas en conjuntos.

¿Podríamos trabajar en probabilidad sin usar conjuntos? si se puede porque se esta haciendo, pero tal vez el costo es muy alto en cuanto al aprendizaje pues por ejemplo se cometen errores en la notación por no usar la notación de conjuntos, se habla de propiedades de los conjuntos sin que éstas se hallan tratado y otros como se mostrará en el Capítulo 3. Además también veremos que los libros de secundaria tienen un dilema sobre como escribir o describir algunas cosas referentes a la probabilidad como lo es algo tan básico como el espacio muestral.
Así que la idea es ocupar a los conjuntos para facilitar la enseñanza aprendizaje en la matemática elemental. No de una forma tan formal como se hizo en la época de la matemática moderna.

El fracaso de la matemática moderna, ha marcado al tema de conjuntos como un contenido prohibido para enseñarse en secundaria, sin embargo mostraremos que algunos temas de la teoría de conjuntos son necesarios para evitar errores y confusiones por ejemplo en conjuntos de números y en la probabilidad

Capítulo 2

2.1 Programas: antes del 93 y las competencias de hoy.

En México en el año de 1993 hubo una nueva reforma en matemáticas, en ésta se abandona el tema de conjuntos. En 2011 se hace otra reforma, la cual está basada en competencias. Se presentan ambos programas así, como las competencias y objetivos del plan 2011 en matemáticas para secundaria realizado por SEP y también los temas antes de la reforma de 1993.

2.1.1 Antes de la reforma del 93

- Lógica y Conjuntos
- Conjuntos, Relaciones y Funciones
- Los Números Naturales
- Propiedades de la Igualdad y de la Desigualdad
- La Numeración
- Numeración Decimal
- Adición de números Naturales
- Sustracción de Números Naturales
- Multiplicación de Números Naturales
- División de Números Naturales
- Múltiplos y Divisores. Divisibilidad
- Números Racionales
- Operaciones con Números Racionales
- Fracciones Decimales
- Razones y Proporciones
- Tanto por Ciento. Interés
- Números Enteros
- Las Formas Geométricas y la Medida
- Ángulos. Círculo
- Poligonales y Perímetros
- Sistema Métrico Decimal
- Sistema Monetario de México.
    - Unidades Angulares.
    - Unidades de Tiempo.
    - Sistema Ingles de Medidas
- Números Denominados
- Construcciones Geométricas
- Congruencia y Semejanza de Figuras. Medición Indirecta de Distancias.
- Áreas y Volúmenes
- Raíz Cuadrada y Teorema de Pitágoras
- Registros Estadísticos y Probabilidad

2.1.2 Reforma de 1993

En Plan y Programas de estudio 1993 se menciona:

En los nuevos programas desaparecen los temas de lógica y conjuntos, así como el énfasis puesto por los programas anteriores en las propiedades estructurales de los diferentes dominios numéricos. También se abandona el tratamiento conjuntista de la probabilidad. Mientras que los temas de estadística se ubican dentro del contexto mas amplio de la representación y tratamiento de la información, punto que se concede gran importancia en este programa.

No se menciona las razones por las que se elimina el tema de conjuntos en secundaria, aunque las conocemos por lo expuesto en el capítulo I. Recordemos que en el capítulo anterior hablamos del fracaso de la matemática moderna, razón por la cual se abandona el tratamiento conjuntista de los números, de la probabilidad y de todo lo que "huela" a conjuntos. Sin embargo, quienes hicieron esta reforma, no se percataron de que el estudio de los conjuntos (como tema o tópico) hacía falta para facilitar el estudio de otros temas, como los que se muestran en el capítulo III. Además, veremos que los conjuntos permiten resolver algunos problemas de matemáticas de manera más fácil y ordenada.

2.1.3 La matemática hoy en día

La matemática es una de las 12 materias que se llevan en secundaria y es una de las materias que en general no les agrada a los alumnos que están cursando la secundaria y no solo eso, muchos de los estudiantes buscan estudiar a nivel licenciatura una carrera que no tenga que ver con matemáticas y en bachillerato toman el área que no contenga materias relacionadas con matemáticas.

El estudiante ha aprendido matemáticas desde primaria de forma tradicional, como se menciona en el capítulo I y la forma más común es a la que he llamado manera ejemplo ejercicio (MEE). Esta manera de "aprendizaje" se refiere a: el profesor expone la teoría de algún tema en matemáticas y cuando va a dejar un ejercicio primero resuelve un ejemplo y posteriormente el alumno resuelve un ejercicio el cual tiene solo variaciones en las cantidades expuestas, es decir, el alumno lo que hace es una copia del procedimiento hecho en el ejercicio anterior aplicado al nuevo y así obtiene el resultado esperado (siempre y cuando no haya tenido errores aritméticos o algebraicos). Y el problema continúa porque al llegar a la secundaria la MEE se mantiene y muchos estudiantes creen haber aprendido matemáticas e inclusive pueden obtener buenas calificaciones en sus exámenes, los cuales están basados en ejercicios idénticos a los expuestos en clase y después al intentar ingresar al siguiente nivel y tener que presentar un examen de admisión sus resultados son catastróficos (relacionados con su promedio de matemáticas). El alumno no está aprendiendo matemáticas solo aprende a copiar procedimientos.

Esta forma de aprendizaje hace que, al presentar su examen de admisión, el cual está basado en razonamiento matemático, el alumno no pueda responder eficientemente, porque se siente agobiado, lee la pregunta y lo que espera es que alguien le de un ejemplo resuelto y así él podrá resolver la pregunta "fácilmente" y a pesar de estas situaciones vividas en secundaria y en primaria las cosas son aun peores, ya que en preparatoria muchos profesores continúan aplicando MEE y en algunos casos el alumno exige se le enseñe de esa manera porque él piensa que de esa forma si "comprende las matemáticas".

Hoy en día las matemáticas se trabajan por competencias, por desgracia la transmisión de lo que son las competencias a los profesores se realizan con talleres en los cuales el instructor recibió un curso exprés y de esta manera es muy complicado que se transmita de manera eficiente el material a los profesores; así que las competencias que deben lograrse en matemáticas se quedan solo en la forma de evaluación, ya que ésta si se exige se lleve acabo y su desarrollo se llevará acabo de una manera más lenta.

A continuación se describen cuatro competencias, cuyo desarrollo es importante durante la Educación Básica.

Competencias Matemáticas

- *Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.*

- *Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan nexos entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.*

- *Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones*

encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

- *Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar de forma mecánica las operaciones aritméticas, sino que apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema; en la utilización del cálculo mental y la estimación; en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos; así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas.*

En la primer competencia que se enuncia menciona el resolver problemas de manera autónoma, pero con el MEE es complicado resolver problemas sin que antes se haya resuelto uno similar, es decir la resolución de problemas no es autónoma. Menciona la segunda competencia: exponer con claridad las ideas, la notación de conjuntos nos ayudaría a exponer algunas de éstas ideas de una forma mas clara. Ejemplo, los conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales) divisores de un número natural n, el espacio muestral de un experimento aleatorio. Usar los diagramas de Venn para visualizar una función donde claramente se observa el dominio y rango de una función. El producto cartesiano para que el alumno visualice una pareja ordenada y la ubique en el plano cartesiano.

2.1.4 La organización de los aprendizajes de la matemática en secundaria

La asignatura de Matemáticas se organiza para su estudio en tres niveles de desglose. El primero corresponde a los ejes, el segundo a los temas y el tercero a los contenidos. Para primaria y secundaria se consideran tres ejes, que son: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

Sentido numérico y pensamiento algebraico alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra:

- *La modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético o algebraico.*

- *La generalización de propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra.*

- *La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.*

Forma, espacio y medida integra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación secundaria:

- *La exploración de características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.*

- *La generación de condiciones para un trabajo con características deductivas.*

- *La justificación de las fórmulas que se utilizan para el cálculo geométrico.*

Manejo de la información incluye aspectos relacionados con el análisis de la información que proviene de distintas fuentes y su uso para la toma de decisiones informada, de manera que se orienta hacia:

- *La búsqueda, la organización, el análisis y la presentación de información para responder preguntas.*

- *El uso eficiente de la herramienta aritmética o algebraica que se vincula de manera directa con el manejo de la información.*

- *El conocimiento de los principios básicos de la aleatoriedad.*

De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), y varios grados o incluso niveles de escolaridad. En el caso de la educación secundaria se consideran nueve temas, y la mayoría inicia desde la educación primaria. Dichos temas son: números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Patrones y ecuaciones, Figuras y cuerpos, Medida, Proporcionalidad y funciones, nociones de probabilidad, y Análisis y representación de datos.

Los contenidos son aspectos muy concretos que se desprenden de los temas, cuyo estudio requiere de entre dos y cinco sesiones de clase. El tiempo de estudio hace referencia a la fase de reflexión, análisis, aplicación y construcción del conocimiento en cuestión, pero además hay un tiempo más largo en el que se usa este conocimiento, se relaciona con otros conocimientos y se consolida para constituirse en saber o saber hacer.

Además de los ejes, temas y contenidos, existe un elemento más que forma parte de la estructura de los programas que son los aprendizajes esperados y se enuncian en la primera columna de cada bloque temático. Estos aprendizajes señalan, de manera sintética, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben

alcanzar como resultado del estudio de varios contenidos, incluidos o no en el bloque en cuestión. Los aprendizajes esperados no se corresponden uno a uno con los contenidos del bloque debido a que estos últimos constituyen procesos de estudio que en algunos casos trascienden el bloque e incluso el grado, mientras que los aprendizajes esperados son saberes que se construyen como resultado de los procesos de estudio mencionados. Ejemplos claros son los aprendizajes esperados que se refieren al uso de los algoritmos convencionales de las operaciones, que tienen como sustrato el estudio de varios contenidos que no se reflejan como aprendizajes esperados.

Aunque no todos los contenidos se reflejan como aprendizajes esperados, es importante estudiarlos todos para garantizar que los alumnos vayan encontrando sentido a lo que aprenden y puedan emplear diferentes recursos, de lo contrario se corre el riesgo de que lleguen a utilizar técnicas sin saber por qué o para qué sirven.

En los cinco bloques que comprende cada programa, los contenidos se organizaron de tal manera que los alumnos vayan accediendo a ideas y recursos matemáticos cada vez más complejos, a la vez que puedan relacionar lo que ya saben con lo que están por aprender. Sin embargo, es probable que haya otros criterios para establecer la secuenciación y, por lo tanto, los contenidos no tienen un orden rígido.

Como se observa en las siguientes tablas, en todos los bloques se incluyen contenidos de los tres ejes, lo que tiene dos finalidades importantes; la primera es que los temas se estudien simultáneamente a lo largo del curso, evitando así que algunos sólo aparezcan al final del programa, con alta probabilidad de que no se estudien; la segunda es que pueda vincularse el estudio de temas que corresponden a diferentes ejes, para lograr que los alumnos tengan una visión global de la matemática.

Lo que se mostrará en este trabajo es una organización alterna de los temas, así como el agregado del tema de conjuntos. De ninguna manera se pretende eliminar alguno de los temas que indica la SEP.

En el programa oficial de la SEP(2011) se menciona que es posible cambiar el orden de los temas y refiere que la idea de acomodarlos así, como están en la tabla, es que no se corra el riesgo de que algún tema no se llegue a ver por falta de tiempo. Esta no será la forma en que se hará para la reorganización de los temas, en este trabajo se reorganizarán los temas de acuerdo a la necesidad, me refiero a que si un tema necesita de otro para poder desarrollarse de una mejor manera, entonces este estará colocado después del tema que necesite. A pesar de que la SEP menciona que se tiene la libertad de cambiar el orden de los temas, todos los libros escritos para secundaria basados en competencias mantienen el orden de la SEP. No creo, que el pensar en que tal vez no le de tiempo al profesor terminar el programa sea una razón para mantener el orden dado por la SEP; debe de organizarse de manera que se termine en tiempo todo el programa y la estructura de los contenidos que se planteará más adelante tiene ese fin, a pesar de que tendrá un tema más en este caso, el de conjuntos.

Puesto que solo se mostrará un programa alternativo para primero de secundaria, se muestra la organización dada por la SEP únicamente de este grado

Bloque I

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes Esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Convierte números fraccionarios a decimales y viceversa. • Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica. • Representa sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada y viceversa.	Números y sistemas de numeración • Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa. • Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. Problemas aditivos • Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones. Patrones y ecuaciones • Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras. • Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar.	Figuras y cuerpos • Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. • Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.	Proporcionalidad y funciones • Resolución de problemas de reparto proporcional. Nociones de probabilidad • Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.

Bloque II

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas utilizando el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. • Resuelve problemas geométricos que impliquen el	Números y sistemas de numeración • Formulación de los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 5. Distinción entre números primos y compuestos.	Figuras y cuerpos • Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y	Proporcionalidad y funciones • Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante”

uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos y cuadriláteros.	• Resolución de problemas que impliquen el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Problemas aditivos • Resolución de problemas aditivos en los que se combinan números fraccionarios y decimales en distintos contextos, empleando los algoritmos convencionales. Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos, utilizando los algoritmos usuales.	la bisectriz de un ángulo. Medida • Justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras.	en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios.

Bloque III

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con fracciones y números decimales. • Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales. • Resuelve problemas que implican el cálculo de cualquiera de las variables de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Explica la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.	Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. • Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. Patrones y ecuaciones • Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.	Figuras y cuerpos • Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones (medida de un lado, del ángulo interno, ángulo central). Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella. Medida • Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.	Proporcionalidad y funciones • Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas. Nociones de probabilidad • Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias. Análisis y representación de datos • Lectura y comunicación de información mediante el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa.

Bloque IV

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes Esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	*Forma, espacio y medida*	*Manejo de la información*
• Construye círculos y polígonos regulares que cumplan con ciertas	Números y sistemas de numeración • Planteamiento y resolución	Figuras y cuerpos • Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el	Proporcionalidad y funciones • Análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o

condiciones establecidas. • Lee información presentada en gráficas de barras y circulares. Utiliza estos tipos de gráficas para comunicar información.	de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.	radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas. Medida • Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo (gráfica y algebraicamente). Explicitación del número π (pi) como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.	fraccionarios. • Análisis de los efectos del factor inverso en una relación de proporcionalidad, en particular en una reproducción a escala. Nociones de probabilidad • Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos. Búsqueda de recursos para verificar los resultados. Análisis y representación de datos • Lectura de información representada en gráficas de barras y circulares, provenientes de diarios o revistas y de otras fuentes. Comunicación de información proveniente de estudios sencillos, eligiendo la representación gráfica más adecuada.

bloque V

competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes Esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	*Forma, espacio y medida*	*Manejo de la información*
Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos. Resuelve problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales. Resuelve problemas de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante", en los que la razón interna o externa es un número fraccionario.	Problemas aditivos • Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros. ProbleMas MultiPlicativos • Uso de la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas. • Resolución de problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada (diferentes métodos) y la potencia de exponente natural de números naturales y decimales. Patrones y ecuaciones • Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética	Medida • Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.	Proporcionalidad y funciones • Resolución de problemas de proporcionalidad múltiple.

Estos temas y en este orden aparecen en todos los libros de primero de secundaria basados en competencias, ahora bien, otro de los problemas con los libros de secundaria es que en algunas escuelas tienen un convenio con cierta casa editorial y eso genera que los libros sean ya determinados por el director y no por el profesor especialista en la materia, por lo que el profesor se enfrentará con el problema, de tener un libro que tal vez no lo convenza. Estos mismos directores exigen a los profesores "llenar" los libros, de esta manera, muestran al padre de familia que su

gasto no fue en vano y que en esa escuela si se trabaja ("se terminan los libros"). Estas situaciones prácticamente eliminan la posibilidad que el profesor por su propia iniciativa agregue un tema. Pero no podemos quedarnos así sin ver la forma de mejorar la educación en cada uno de los niveles, en especial en matemáticas que es una de las materias que al alumno se le dificulta en gran medida. Cabe aclarar que en las secundarias públicas los libros no se compran. Así que el profesor tiene más libertad en el uso del libro de texto.

2.1.5 Propósitos del estudio de las matemáticas para la educación básica

Estudiar la materia de matemáticas en el nivel secundaria (Programa oficial SEP 2011) nos lleva a preguntarnos las razones de llevar esta materia en este nivel. Para la SEP los propósitos son:

Mediante el estudio de las Matemáticas en la Educación Básica se pretende que los niños y adolescentes:

- *Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.*

- *Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.*

- *Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo.*

Haciendo énfasis en el segundo punto podríamos proponer formas alternativas para resolver problemas utilizando los conjuntos. En el siguiente capítulo se presentarán algunos ejemplos. Y se puede trabajar usando conjuntos con lo que es la transversalidad de las matemáticas con otras materias, en el nuevo programa no se menciona mucho sobre la transversalidad. Pero es importante ya que el alumno ve cómo la matemática es una materia que tiene relación con las demás. Se puede trabajar con Geografía (Sea A el conjunto formado por los continentes de la tierra) en Biología (sea B el conjunto formado por las partes de una célula vegetal) etc.

Capítulo III

3.1 Los libros de secundaria y los conjuntos

Los problemas siguientes nos llevan a mostrar la necesidad de agregar el tema de conjuntos en secundaria.

Los primeros ejemplos son tomados del libro del maestro (SEP 2006)
El tema se llama: Regiones y conjuntos de puntos en el plano.

Desde el nombre ya menciona la palabra conjuntos, veamos lo que menciona el libro:

El plano cartesiano se introduce de manera informal desde el primer grado, por medio de diversas actividades como son, entre otras, la representación gráfica de los datos de una tabla y las gráficas de variación proporcional entre dos cantidades. En el segundo y tercer grados se concede importancia a que los alumnos localicen en el plano cartesiano las regiones y conjuntos de puntos que satisfacen algunas condiciones algebraicas dadas. En el segundo grado se localizarán regiones y subconjuntos que satisfagan condiciones sencillas.

Menciona también subconjuntos, pero ¿cómo podemos hablar de subconjuntos? si ni siquiera se tiene el concepto de conjunto.

Algunos ejercicios que menciona son los siguientes:

Semiplanos

1. Represente en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

   $a) \ x > 3 \qquad b) \ y < -2 \qquad c) \ x < y \qquad d) \ x > 2y$

Franjas

2. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:
   $a) \ 2 < x < 5 \qquad b) -3 < y < 0$

Rectas

3. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

   $a) \ x = y \qquad b) \ y = -5 \qquad c) \ x + y = 5 \qquad d) \ y=2x$

Cuadrantes

4. Representen en el plano cartesiano todos los puntos que cumplan con las siguientes condiciones:

$a)\ xy < 0 \qquad b)\ xy > 0$

También muestra en el plano las regiones como conjuntos de puntos

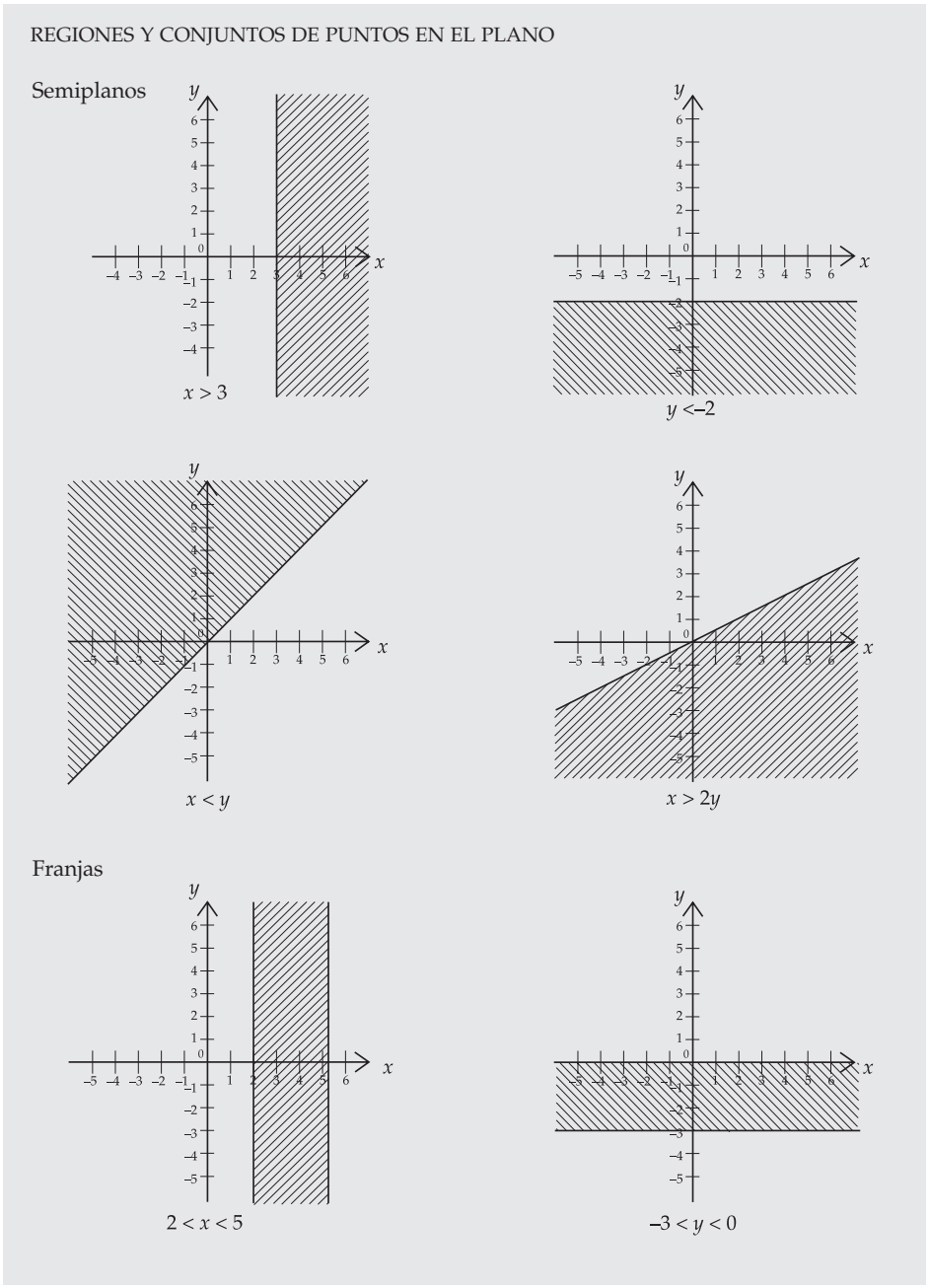


figura 3.1

Para resolver este tipo de problemas se necesita la notación de conjuntos y sabemos que la solución es un subconjunto del plano. Y aunque solo se piense en la región "dibujada" en el plano se tendría que hablar de conjuntos para que el alumno tenga más claridad sobre cómo dibujar dichas regiones.

Solución al ejercicio 1 a)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 3\}$$

En el plan 2011 ya no aparecen las regiones en el plano, no se menciona el hecho del porque se eliminan, pero tal vez una de las razones es que necesitaban de los conjuntos para definirlas. Aunque si eso fuera, los temas de probabilidad no deberían de existir en secundaria.

En Alfonso Arriaga (2007) se hace uso de los conjuntos como si el alumno ya supiera al menos una idea intuitiva de ellos. (Figura 3.2)

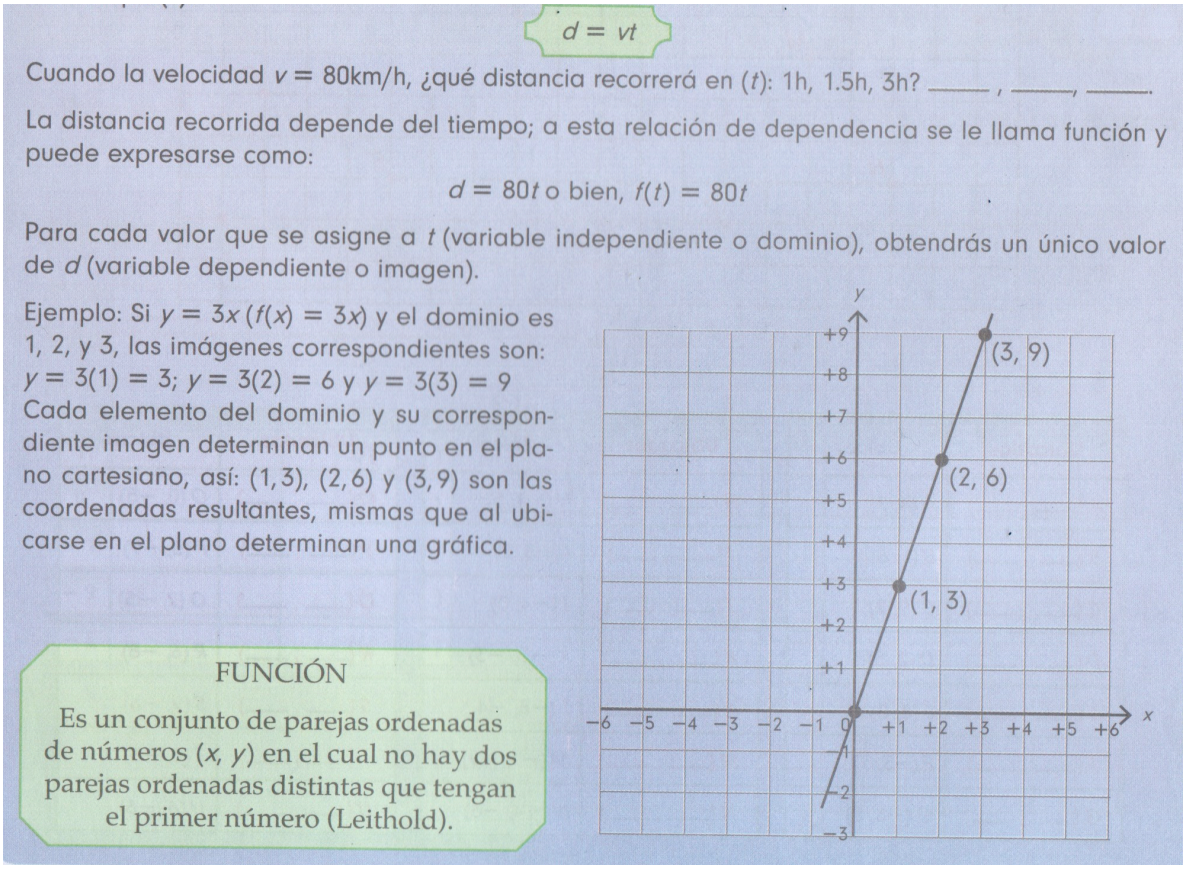
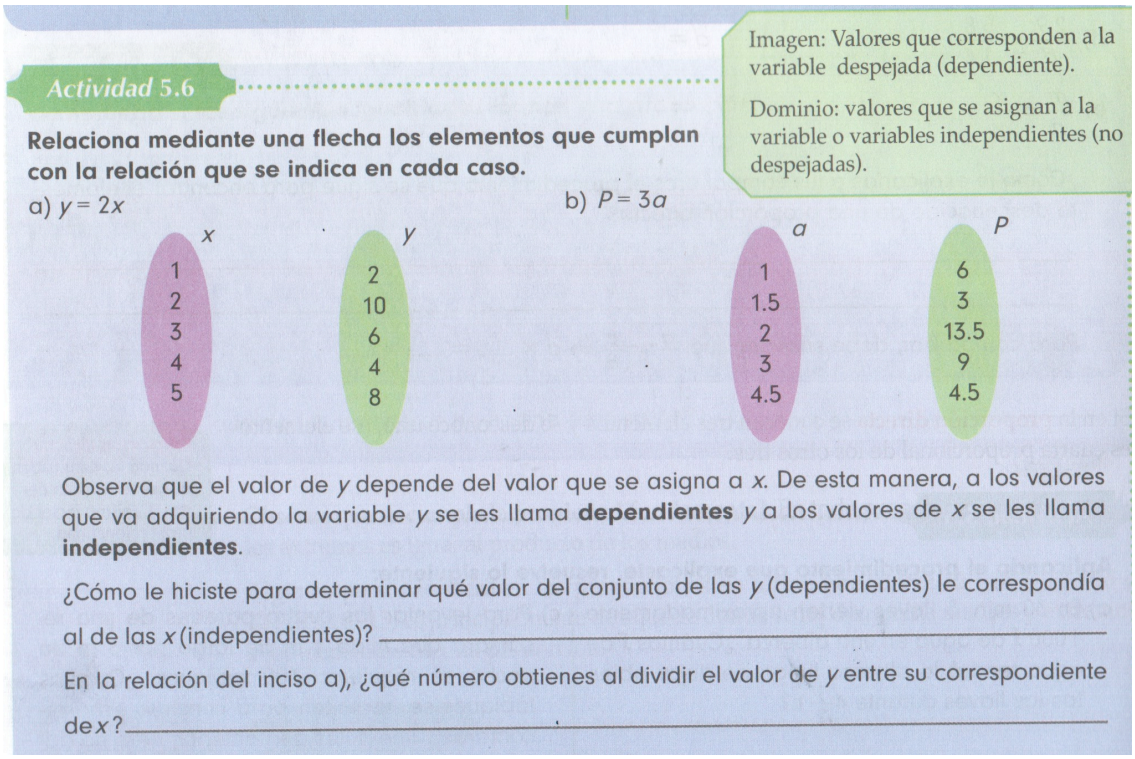


Figura 3.2

Es muy difícil que el alumno entienda esta definición puesto que no tiene claro lo que es un conjunto, además para definir dominio e imagen el uso de los diagramas de Venn y la correspondencia con flechas haría mas clara la presentación y sobre todo

hay que tomar en cuenta que es importante y necesario definir producto cartesiano en temas anteriores.

Como lo muestra la siguiente imagen tomada del mismo libro



Actividad 5.6

Relaciona mediante una flecha los elementos que cumplan con la relación que se indica en cada caso.

Imagen: Valores que corresponden a la variable despejada (dependiente).

Dominio: valores que se asignan a la variable o variables independientes (no despejadas).

a) $y = 2x$

x	y
1	2
2	10
3	6
4	4
5	8

b) $P = 3a$

a	P
1	6
1.5	3
2	13.5
3	9
4.5	4.5

Observa que el valor de *y* depende del valor que se asigna a *x*. De esta manera, a los valores que va adquiriendo la variable *y* se les llama **dependientes** *y* a los valores de *x* se les llama **independientes**.

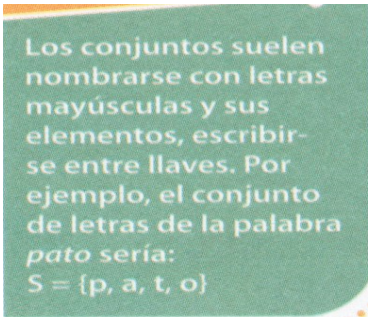
¿Cómo le hiciste para determinar qué valor del conjunto de las *y* (dependientes) le correspondía al de las *x* (independientes)? _____

En la relación del inciso a), ¿qué número obtienes al dividir el valor de *y* entre su correspondiente de *x*? _____

Figura 3.3

En la primer pregunta del ejercicio menciona el conjunto de las Y, este libro trata de facilitar el entendimiento del tema mediante este diagrama, que claramente es una función entre dos conjuntos usando diagramas de Venn.

En María Trigueros (2012) si hace mención de los conjuntos aunque solo lo hace con un ejemplo (figura siguiente)



Los conjuntos suelen nombrarse con letras mayúsculas y sus elementos, escribirse entre llaves. Por ejemplo, el conjunto de letras de la palabra *pato* sería:
S = {p, a, t, o}

Figura 3.4

Este libro aprovecha a los conjuntos y define variación directa proporcional e inversa de la siguiente manera (figura 3.5 y 3.6)

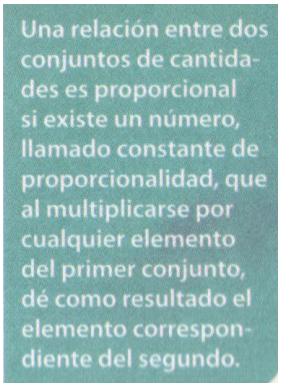


Figura 3.5

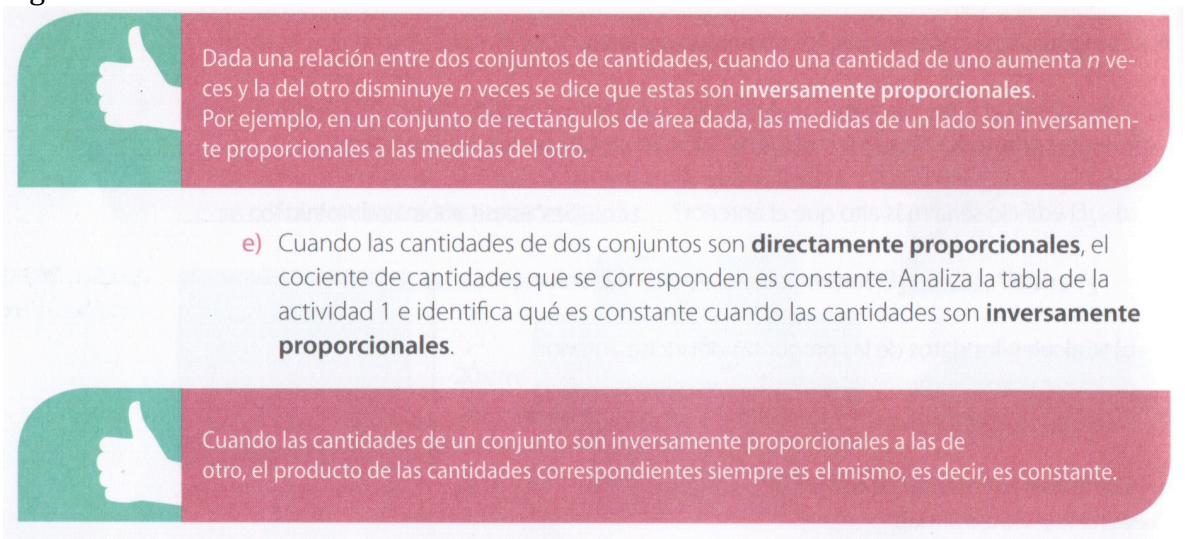


Figura 3.6

3.2 Probabilidad y conjuntos

Es muy difícil hablar de probabilidad sin mencionar conjuntos; menciona ZUWAYLIF (1977) *la probabilidad puede ser estudiada de diferentes maneras; un enfoque conveniente de ella se obtiene comenzando con una breve discusión acerca de conjuntos.*

CARMEN BATANERO (2004) menciona:
No menos fundamental es la idea debida a Kolmogorov de asignar un conjunto (el espacio muestral) de sucesos observables a cada experimento aleatorio y representar cada suceso posible como un subconjunto del espacio muestral, dando una interpretación probabilística a las operaciones con sucesos. Es decir, inventariar todos los posible sucesos elementales que podrían ocurrir al realizar un experimento aleatorio, considerarlo como un conjunto de referencia o universal y aplicar toda la potencia del

álgebra de conjuntos para poder definir los demás sucesos, a partir de los sucesos elementales.

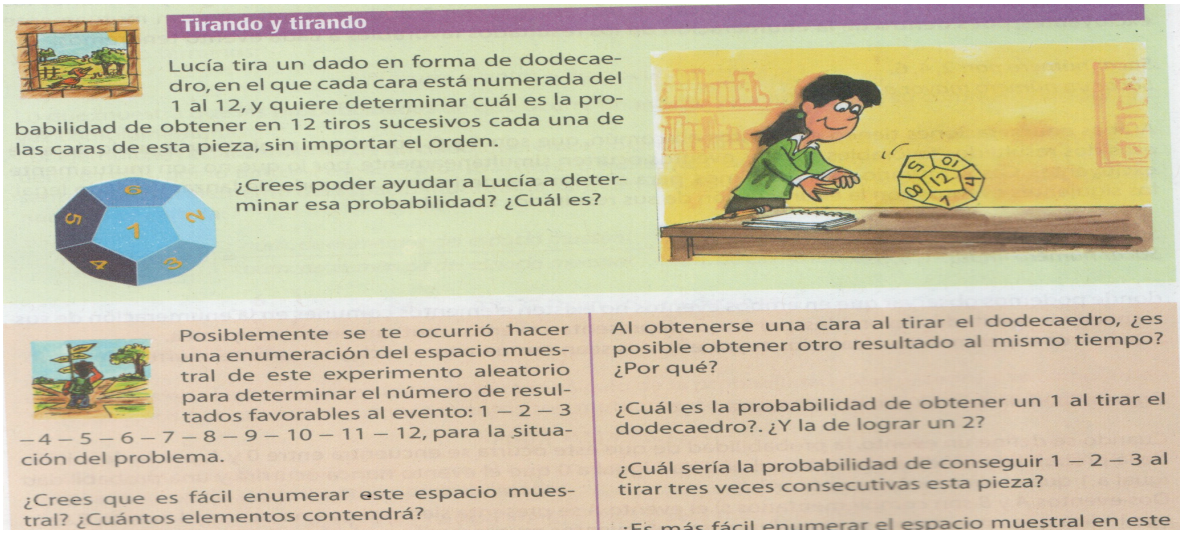
La consideración del espacio muestral permitió axiomatizar la probabilidad, como medida normada aditiva, sobre el álgebra de conjuntos, puesto que las operaciones en el álgebra de conjuntos permitían definir operaciones sobre la misma probabilidad. Puesto que todo suceso elemental forma parte del conjunto de referencia, se dota de sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral.

Por otro lado, si un subconjunto está incluido en un conjunto mayor, la probabilidad del primero es menor que la del segundo. Esta propiedad es muy intuitiva y puede presentarse a los alumnos desde la escuela primaria.

Carmen menciona que desde primaria se podría mencionar la idea de cuando un evento tiene mayor probabilidad que otro usando conjuntos, si en secundaria el alumno empieza a trabajar con conjuntos esta idea seria clara.

3.2.1 Los libros y la probabilidad

En general todos los libros de texto de secundaria de matemáticas se basan de manera "estricta" en los programas de SEP, el tema de probabilidad no podría ser una excepción y en uno si mencionan los conjuntos María Trigueros (2012), mientras algunos tratan de omitir inclusive la notación de conjuntos, generando errores en la forma de describir un espacio muestral Santiago Valiente (2012). Otros prefieren omitir ese error y usan la notación de conjuntos David B. S. (2012) sin mencionar en ningún momento que el espacio muestral es un conjunto y que los sucesos son subconjuntos del espacio muestral y en María Trigueros (2012) que si los menciona solo es una mención mediante un ejemplo.



Tirando y tirando

Lucía tira un dado en forma de dodecaedro, en el que cada cara está numerada del 1 al 12, y quiere determinar cuál es la probabilidad de obtener en 12 tiros sucesivos cada una de las caras de esta pieza, sin importar el orden.

¿Crees poder ayudar a Lucía a determinar esa probabilidad? ¿Cuál es?

Posiblemente se te ocurrió hacer una enumeración del espacio muestral de este experimento aleatorio para determinar el número de resultados favorables al evento: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12, para la situación del problema.

¿Crees que es fácil enumerar este espacio muestral? ¿Cuántos elementos contendrá?

Al obtenerse una cara al tirar el dodecaedro, ¿es posible obtener otro resultado al mismo tiempo? ¿Por qué?

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 al tirar el dodecaedro?. ¿Y la de lograr un 2?

¿Cuál sería la probabilidad de conseguir 1 – 2 – 3 al tirar tres veces consecutivas esta pieza?

¿Es más fácil enumerar el espacio muestral en este

Figura 3.7

La forma de escribir el espacio muestral en la figura 3.7 puede generar confusión ya que al usar el guión medio parece que se esta refiriendo a números negativos.

Espacios muestrales
{00, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}
- {12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36}

Figura 3.8

En la figura 3.8, el libro esta usando la notación de conjuntos para expresar su espacio muestral. Sin embargo el libro no menciona que estos sean conjuntos.

En María Trigueros (2012) el espacio muestral lo menciona explícitamente como un conjunto, pero antes define lo que es un conjunto mediante un ejemplo (figura 3.4, 3.9 y 3.10)

Figura 3.9

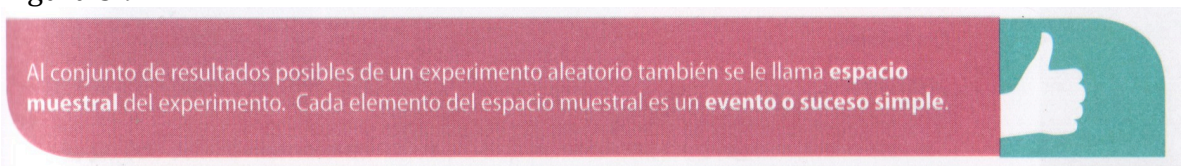
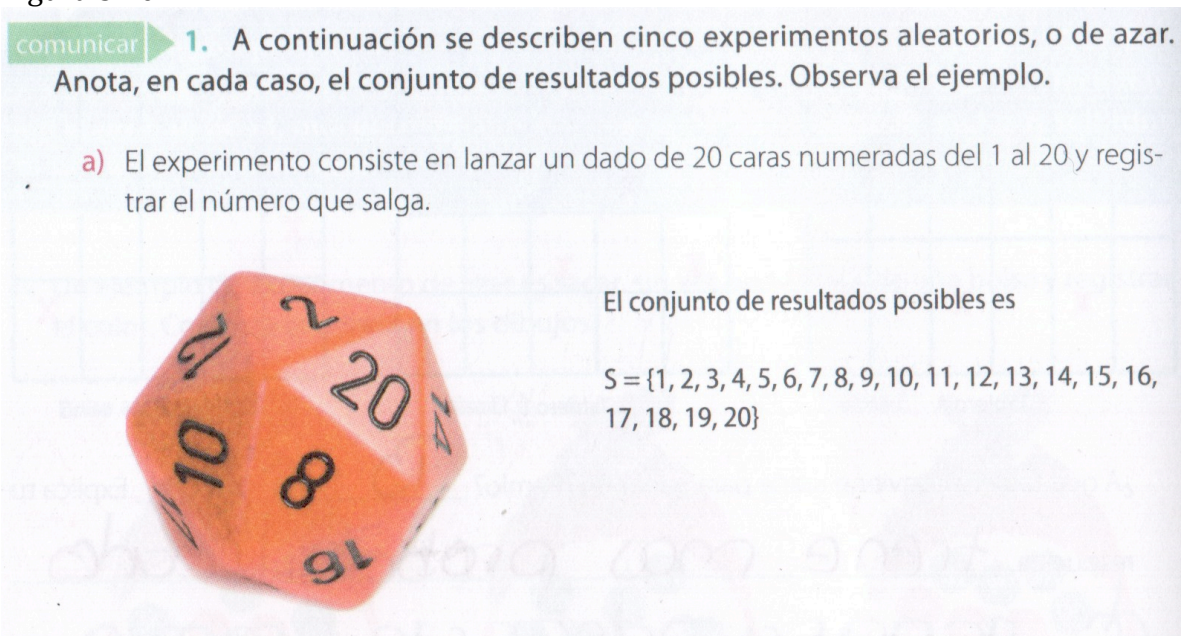
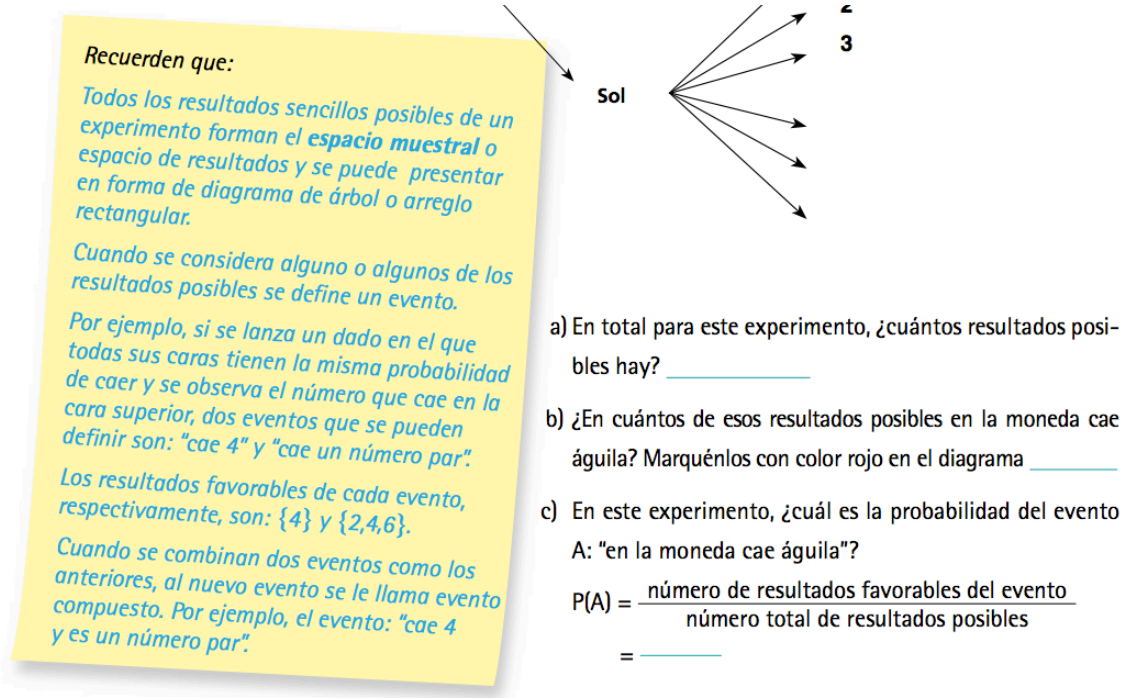


Figura 3.10



Tenemos tres libros diferentes donde se muestra que el libro que omite la notación de conjuntos para definir un espacio muestral, la notación que usa es errónea en los otros dos donde no hay confusión en el espacio muestral usan la notación de conjuntos, sin embargo solo uno menciona a los conjuntos anteriormente y éste lo hace con un ejemplo.



Recuerden que:

Todos los resultados sencillos posibles de un experimento forman el ***espacio muestral*** *o espacio de resultados y se puede presentar en forma de diagrama de árbol o arreglo rectangular.*

Cuando se considera alguno o algunos de los resultados posibles se define un evento.

Por ejemplo, si se lanza un dado en el que todas sus caras tienen la misma probabilidad de caer y se observa el número que cae en la cara superior, dos eventos que se pueden definir son: "cae 4" y "cae un número par".

Los resultados favorables de cada evento, respectivamente, son: {4} y {2,4,6}.

Cuando se combinan dos eventos como los anteriores, al nuevo evento se le llama evento compuesto. Por ejemplo, el evento: "cae 4 y es un número par".

a) En total para este experimento, ¿cuántos resultados posibles hay? _____

b) ¿En cuántos de esos resultados posibles en la moneda cae águila? Marquénlos con color rojo en el diagrama _____

c) En este experimento, ¿cuál es la probabilidad del evento A: "en la moneda cae águila"?

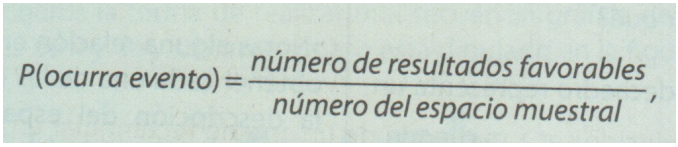
$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

$$= ____$$

Figura 3.11

Y no solo se han revisado los libros de secundarias generales, si no también los libros de telesecundaria (figura 3.11) tomada del libro Matemáticas II (2007 SEP) de telesecundaria y en ella se muestra que en estos libros utilizan la notación de conjuntos para denotar los eventos. Podríamos ya en este momento hacernos la siguiente pregunta ¿Si los conjuntos no son necesarios estudiarlos en secundaria debería de existir una notación diferente a la de conjuntos para este nivel? Creo que deberíamos ir aun más lejos y enseñar conjuntos para poder usar su notación y su álgebra.

En el libro Santiago B. (2012) y con diferencia de una pagina se muestra un error de definición (figura 3.12), y en la siguiente pagina al definir la probabilidad del complemento de un suceso no se comete (figura 3.13).



$$P(\text{ocurra evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número del espacio muestral}},$$

Figura 3.12

$$P(\text{no ocurra evento}) = \frac{\text{núm. de elementos del espacio muestral} - \text{núm. de resultados favorables}}{\text{núm. de elementos del espacio muestral}}$$

Figura 3.13

un error muy parecido lo comete el libro Alfonso A. (2007)

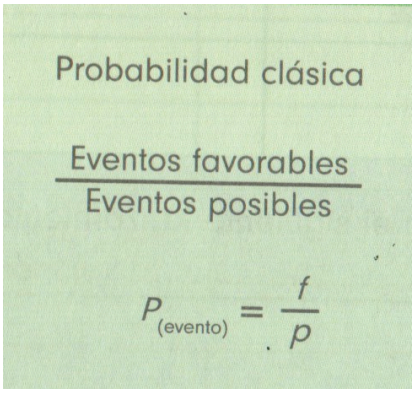


figura 3.14

Este tipo de errores se podría resolver de una forma muy simple si se usara notación de conjuntos.

El libro David B. S. (2012) prefiere usar notación de conjuntos para definir la probabilidad del complemento (figura 14)

Seguramente ya has notado que la probabilidad de que un evento ocurra, más la probabilidad de que ese mismo evento **NO** ocurra, es igual a **uno**. Por ejemplo, la probabilidad del evento M: "Salir 5 al lanzar un dado" es $\frac{1}{6}$, mientras que la probabilidad del evento N: "No salir 5 al lanzar un dado" es $\frac{5}{6}$. A estos dos eventos se les llama complementarios y la suma de sus probabilidades es uno.

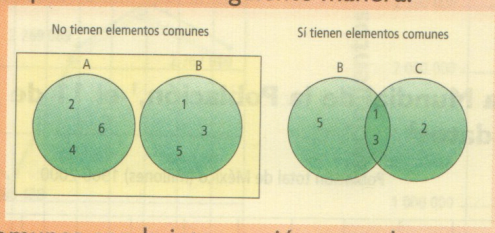
De manera abreviada la probabilidad de un evento M se expresa así: $P(M)$
La probabilidad del complemento de M se expresa así: $P(M^c)$
De manera que, en este caso, $P(M) = \frac{1}{6}$; $P(M^c) = 1 - P(M) = \frac{5}{6}$

Figura 3.15

En este libro se menciona la palabra complemento y además usa la notación de conjuntos para expresar el complemento de un evento.

No solamente el libro David B. S. (2012) usa la notación de conjuntos, también se apoya en el diagrama de Venn para definir eventos mutuamente excluyentes (figura 3.16)

Dos o más eventos que no tienen elementos comunes se llaman **mutuamente excluyentes**. Por ejemplo el evento **A** y el evento **B** no tienen elementos comunes, mientras que el evento **B** y el evento **C** sí tienen elementos comunes. Gráficamente estas relaciones se pueden representar de la siguiente manera.



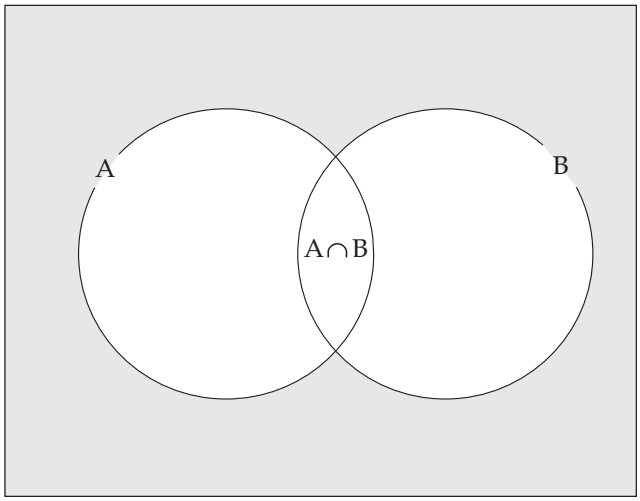
Los elementos comunes son la intersección entre los eventos. En el primer caso no hay intersección, mientras que en el segundo caso la intersección son los sucesos simples {1, 3}.

Figura 3.16

Es preferible usar la notación de conjuntos, así como diagramas de conjuntos para facilitar la exposición de los conceptos de probabilidad y sería mas fácil si usáramos toda el álgebra de conjuntos para las definiciones.

Sin embargo pareciese que mencionar los conjuntos en secundaria fuese algo prohibido, la figura 16 muestra esto.

También es conveniente que se resuelvan problemas construidos a partir del esquema siguiente (pero tampoco esta fórmula será objeto de enseñanza).



$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

Al principio los problemas deberán ser tales que los alumnos puedan resolverlos por tanteo, explorando mentalmente las relaciones entre los datos del problema o construyendo sus propias representaciones. Más adelante se les podrá proponer que utilicen diagramas de Venn o de Carroll para resolverlos.

Figura 3.17

El diagrama muestra la intersección de conjuntos y la fórmula es para calcular la cardinalidad de la unión de conjuntos, sin embargo la indicación en los paréntesis prohíben usarla, esta imagen (figura 3.17) es tomada del libro del maestro SEP (2006)

Capítulo IV

4.1 Conjuntos

La palabra conjunto en matemáticas no se define por ser un concepto bastante primitivo, pero es importante tener una idea intuitiva de conjunto para ayudarnos a trabajar con ellos. Diremos que un conjunto es una colección o reunión de "objetos". Esta definición intuitiva nos lleva a que podemos formar conjuntos de casi todo lo que nos rodea en nuestra vida diaria. Ejemplos:

a) El conjunto de amigos que tengo
b) El conjunto formado por los compañeros de mi salón de clases
c) El conjunto formado por los integrantes de mi equipo favorito de futbol
d) El conjunto de mis útiles escolares
e) El conjunto de seres vivos en el planeta tierra

En especial, en matemáticas nos interesan los conjuntos de números y el número de elementos de ciertos conjuntos. Por ejemplo, pensemos en el conjunto formado por los días de la semana, este conjunto tiene 7 "elementos".

De los ejemplos vistos arriba de pronto surge la idea de que las matemáticas aparecen en todo, ya que siempre que pueda formarse un conjunto este tendrá algo que ver con matemáticas.

Los conjuntos los denotaremos generalmente con letras mayúsculas A, B, C, D, etc. A los objetos que forman un conjunto, si los hay, les llamaremos **elementos** de dicho conjunto. Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utilizará el símbolo: " $\in$ " y para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se utilizará el símbolo: " $\notin$ ". Los conjuntos los vamos a representar de dos formas. Por **extensión** escribiendo los elementos del conjunto separados por comas y entre llaves. Ejemplo

$$A = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$$

Los conjuntos también los podemos representar por **comprensión** en este caso se enuncia una propiedad definitoria del conjunto y se escribe una "variable" generalmente x, el símbolo | (que se lee tal que) y posteriormente la propiedad definitoria del conjunto, todo siempre entre llaves. Ejemplo:

$$A = \{x \mid x \text{ es un día de la semana}\}$$

este conjunto se lee: el conjunto A formado por x ***tal que*** x *es un día de la semana*.

Ejercicio.

Escribir en la línea F si el enunciado es falso y V si el enunciado es verdadero.

Si: $A = \{puma, gato, león, tigre\}, B = \{x \mid x\ es\ un\ estado\ de\ la\ república\ mexicana\}$

1. $perro \in A$ _____
2. $puma \notin A$ _____
3. $Pachuca \in A$ _____
4. $Sinaloa \in B$ _____
5. $Monterrey \in B$ _____
6. $tigre \in B$ _____
7. $puma \notin B$ _____

Notas (E). El ejercicio por si solo invita a todos los alumnos a contestarlo, la respuesta es simple escribir F o escribir V, genera razonamiento entre qué significa que esté y que no esté un elemento en el conjunto, nos revela si el alumno identifica entre estados y ciudades (esto sería un buen ejercicio para geografía). De esta forma se relaciona a la matemática con otras materias.

Al número de elementos de un conjunto A se le llamará **cardinalidad** del conjunto A y lo vamos a denotar por $\#(A)$.

EJERCICIO.
Hallar la cardinalidad de cada conjunto.

$A = \{x \mid x\ es\ un\ día\ de\ la\ semana\}$
$B = \{x \mid x\ es\ un\ planeta\ de\ nuestro\ sistema\ solar\}$
$C = \{x \mid x\ es\ un\ estado\ de\ la\ república\ mexicana\}$
$D = \{x \mid x\ es\ una\ vocal\ del\ alfabeto\ español\}$
$E = \{x \mid x\ es\ un\ satelite\ natural\ de\ la\ tierra\}$
$F = \{x \mid x\ es\ una\ vocal\ de\ la\ palabra\ "elemento"\}$
$G = \{perro, gato, tortuga, pez\}$
$H = \{x \mid x\ \ es\ un\ dinosaurio\ vivo\}$

1. $\#(A) =$
2. $\#(B) =$
3. $\#(C) =$
4. $\#(D) =$
5. $\#(E) =$
6. $\#(F) =$
7. $\#(G) =$
8. $\#(H) =$

Notas.
1. Al conjunto que tiene solo un elemento se le llama **conjunto unitario**

2. Los elementos de un conjunto no deben de repetirse. Es decir los conjuntos: $H = \{e, e, e, o\}, F = \{e, o\}$ son iguales
3. Al conjunto que carece de elementos se le llama **Conjunto vacío** y se denota por: $\emptyset$ ó por $\{\ \}$ pero no escribir nunca ambos símbolos, es decir no escribir: $\{\emptyset\}$

Nota (E). Este ejercicio muestra que siempre relacionamos muchas cosas en nuestra vida cotidiana con las matemáticas, en especial asignamos números a conjuntos.

4.1.1 Conjuntos finitos e infinitos

Intuitivamente un conjunto es finito si el proceso de contar los elementos del conjunto termina o tiene fin. Si no, el conjunto es infinito. Ejemplo: todos los conjuntos mencionados en el ejercicio anterior son finitos.

Ejemplos de conjuntos infinitos

$$A = \{2,4,6,8,10,12, \dots\}$$

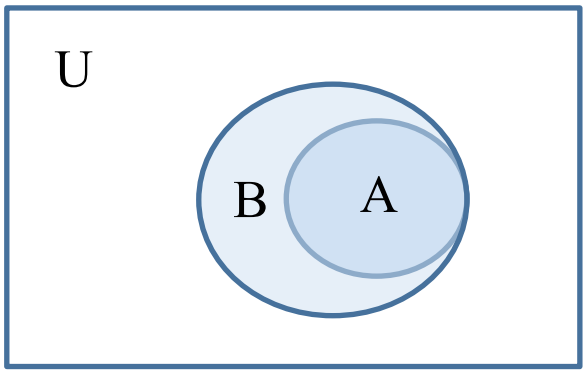
$$B = \{1,3,5,7,9,11, \dots\}$$

El conjunto A es el conjunto de los números pares positivos y el B de los números impares positivos. Los tres puntos suspensivos nos indicarán que existen más elementos, los cuales cumplen la misma propiedad que los primeros elementos, en A el de ser números pares y en B el de ser impares.

4.1.2 Subconjuntos

Definición: Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es **subconjunto** de B. Se denota $A \subseteq B$

Observación: los conjuntos se pueden representar mediante diagramas. Dichos diagramas se llaman de Venn. En estos diagramas generalmente se representa al conjunto universal con un rectángulo y dentro los conjuntos con círculos. Ejemplo para representar que A es subconjunto de B se tiene:



$A \subset B$

EJERCICIO.

Dado el conjunto
$A = \{Brasil, Uruguay, Argentina, España, Inglaterra, Alemania, Francia, Italia\}$
$B = \{x \mid x\ es\ un\ país\ americano\ campeón\ mundial\ de\ futbol\}$
$C = \{x \mid x\ es\ un\ país\ europeo\ campeón\ mundial\ de\ futbol\}$
$D = \{x \mid x\ es\ un\ país\ centroamericano\ campeon\ mundial\ de\ futbol\}$
$E = \{x \mid x\ es\ un\ país\ cuya\ capital\ es\ Paris\}$
$F = \{México, España, Brasil, Francia\}$

Escribir en la línea F en caso de ser falso el enunciado y V en caso de ser verdadero el enunciado.

1. $A \subseteq B$_____
2. $B \subseteq A$_____
3. $C \subseteq A$_____
4. $D \subseteq A$_____
5. $E \subseteq A$_____

6. $F \subseteq A$_____
7. $F \subseteq B$_____
8. $E \subseteq F$_____
9. $\{México\} \subseteq F$_____
10. $Brasil \quad \subseteq F$_____

Nota.
1. La relación $\subseteq$ solo se puede aplicar entre conjuntos
2. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto

EJERCICIO.

Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ hallar todos los subconjuntos de A

CONJUNTO UNIVERSAL.

Definición. Llamaremos **conjunto universal** al conjunto que reúna a todos los elementos de los que se esté tratando en un determinado estudio. Este conjunto se denotará por $\mathcal{U}$ y por la misma definición, todos los conjuntos de los que se hable en un determinado momento serán subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Ejemplo: para la biología el conjunto universal de interés es:

$$\mathcal{U} = \{x \mid x \; es \; un \; ser \; vivo\}$$

4.1.3 Operaciones con conjuntos

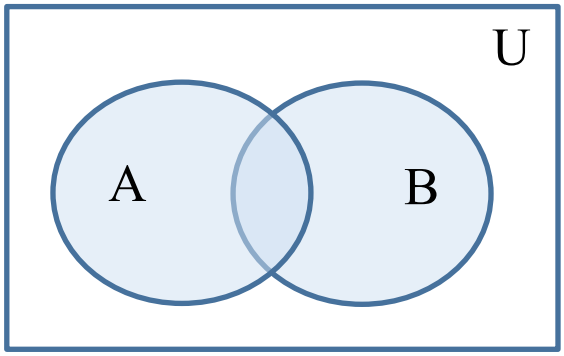
Así como en aritmética se operan números (suma, diferencia, producto, división) y el resultado es un número; los conjuntos también se pueden operar y el resultado es de nuevo un conjunto.

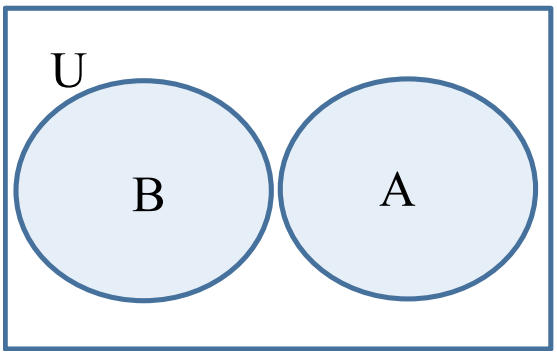
4.1.3.1 Unión.

Definición: Si A y B son subconjuntos de $\mathcal{U}$, entonces la unión de A y B es el subconjunto de $\mathcal{U}$ formado por aquellos elementos que están en A o bien están en B. Se denota por $A \cup B$. En símbolos matemáticos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

que se lee: A unión B es el conjunto formado por los x tal que x está en A o x está en B
En diagrama de Venn





Las partes sombreadas en ambos diagramas es la unión de A y B

Ejemplo de unión de conjuntos.

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$ se tiene que:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

Ejercicios

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$
Encontrar:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup C$
d) $A \cup B \cup C$
e) $B \cup A$

Observación: para cualesquiera dos conjuntos A y B se tiene que $A \cup B = B \cup A$

Nota (E) Se espera que en el ejercicio del inciso e) el alumno opere los tres conjuntos, análogamente como lo hace al sumar tres números (aplicando la propiedad asociativa).

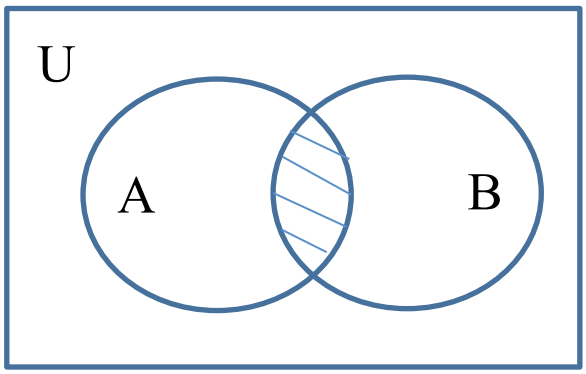
4.1.3.2 Intersección

Definición: Si A y B son subconjuntos de $\mathcal{U}$, entonces la intersección de A y B es el subconjunto de $\mathcal{U}$ formado por aquellos elementos que están en A y están en B. Se denota por: $A \cap B$. En símbolos matemáticos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

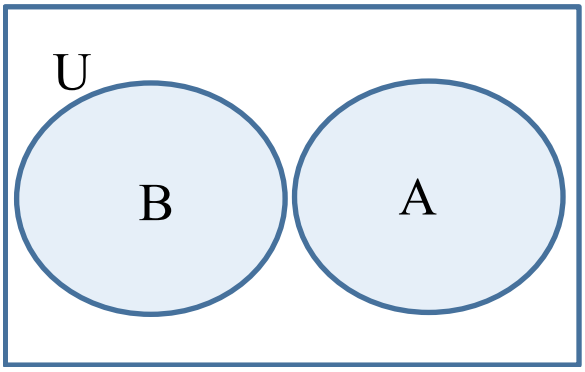
que se lee: A intersección con B es el conjunto formado por los x tal que x está en A y x está en B

En diagrama de Venn



la parte sombreada corresponde a la intersección

Nota. En el caso de que la intersección entre dos conjuntos sea el conjunto vacío ($A \cap B = \emptyset$) , se dirá que los conjuntos son **disjuntos**. Ejemplo en la siguiente figura



Los conjuntos A y B son disjuntos

Ejemplo de intersección de dos conjuntos.

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$ se tiene que:

$A \cap B = \{c, d\}$

Ejercicios

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{e, u, x, y, z\}$
Encontrar:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $B \cap C$

d) $A \cap B \cap C$
e) $B \cap A$

Observación: para cualesquiera dos conjuntos A y B se tiene que $A \cap B = B \cap A$

Nota (E) Se espera que en el ejercicio del inciso e) el alumno opere los tres conjuntos, análogamente como lo hace al multiplicar tres números.

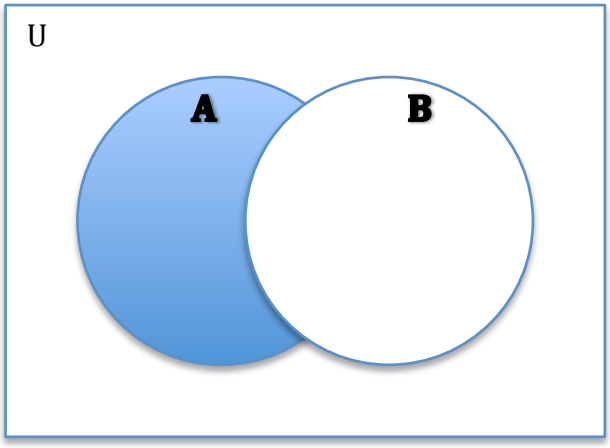
4.1.3.3 Diferencia

Definición: Si A y B son subconjuntos de $\mathcal{U}$, entonces la diferencia de A y B es el subconjunto de $\mathcal{U}$ formado por aquellos elementos que están en A pero no están en B. Se denota por: $A - B$. En símbolos matemáticos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \; y \; x \notin B\}$$

que se lee: A menos B es el conjunto formado por los x tal que x está en A y x no está en B

En diagrama de Venn



la parte sombreada corresponde a la diferencia de A y B

Ejemplo:

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$ se tiene que:

$A - B = \{a, b\}$

Ejercicios

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{e, u, x, y, z\}$

Encontrar:

a) $A - B$
b) $A - C$
c) $B - C$
d) $A - C$
e) $B - A$

Observación: se tiene Se tiene que, generalmente, $A - B \neq B - A$

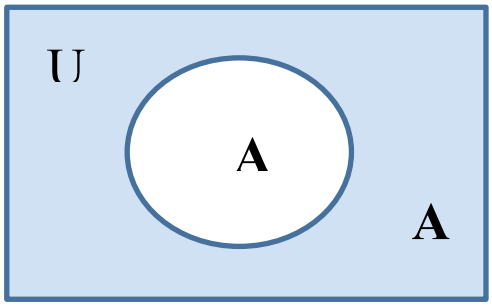
4.1.3.4 Complemento

Definición: Si A es subconjunto de $\mathcal{U}$, entonces el complemento de A es el subconjunto de $\mathcal{U}$ formado por aquellos elementos que no están en A. Se denota por A^c. En símbolos matemáticos:

$$A^c = \{x \mid x \in \mathcal{U} \; y \; x \notin A\}$$

que se lee: el complemento de A es el conjunto formado por los x tal que x está en $\mathcal{U}$ y x no está en A

En diagrama de Venn



la parte sombreada corresponde a el complemento de A

Ejemplo:

Sea $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $A = \{c, d, e, f\}$ se tiene que:

$A^c = \{a, b, g, h\}$

Ejercicios

Sean $\mathcal{U} = \{x | x \; es \; un \; planeta \; del \; sistema \; solar\}$

$A = \{x | x \; es \; un \; planeta \; exterior \; del \; sistema \; solar\}$

$B = \{x | x \; es \; un \; planeta \; interior \; del \; sistema \; solar\}$

$C = \{Mercurio, Jupiter, Tierra\}$

Encontrar:

a) A^c
b) B^c
c) C^C

Producto cartesiano.

Cuando se ordenan ciertos elementos tomándolos de dos en dos, se obtienen parejas de la forma (a, b) llamadas **parejas ordenadas.** Los términos que forman la pareja se nombran así

$$(a, b)$$

a→ primera componente
b →segunda componente

Definición 1. Dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si
$a = c$ y $b = d$

Definición 2. El producto cartesiano de los conjuntos A y B denotado por $A \times B$
Se define así: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Ejemplo.
Si A=$\{a, b\}$ y B= $\{c, d\}$, determinar $A \times B$ y $B \times A$

Solución.
$A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$
$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$

Observación. De la definición 1 se tiene que $A \times B \neq B \times A$ salvo en el caso que $A = B$

Ejercicios.
Sean los conjuntos $A = \{Pumas, América\}$, $B = \{Puebla, Chivas\}$, $C = \{gato, águila, chivo\}$
Realizar:
$A \times B =$
$A \times C =$
$B \times C =$

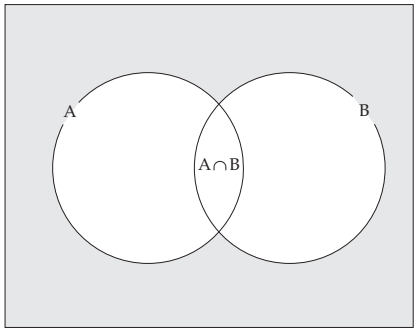
Nota. Puesto que cada elemento del conjunto A, aparece el número de veces de elementos del conjunto B en $A \times B$ se tiene que $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$.

Ejercicio. Hallar la cardinalidad de $A \times B$ si:
$A = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar}\}$
$B = \{Zeus, Hera, Poseidon, Ares, Hermes, Hefesto, Afrodita, Atenea, Apolo; Artemisa\}$

Aplicación de conjuntos

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de los conjuntos y que como se mostró en la figura 16 del capítulo anterior la fórmula no debiese de usarse. La fórmula escrita con nuestra notación es:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) \ldots (1)$$



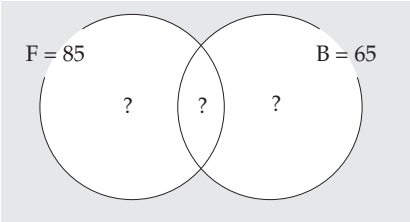
El problema que viene en el libro del maestro SEP (2006) es:
En una encuesta realizada entre los 145 alumnos de una escuela se encontró que: 85 alumnos juegan futbol 65 alumnos juegan basquetbol 50 no practican ninguno de estos deportes

¿Cuántos alumnos practican los dos deportes? ¿Cuántos practican el futbol, pero no el basquetbol? ¿Cuántos el basquetbol, pero no el futbol?

Solución

Sea F el conjunto formado por los alumnos que juegan futbol y A el conjunto formado por los alumnos que juegan Basquetbol, se tiene:

Usando el diagrama de Venn



Los que practican deporte son $145 - 50 = 95$ por lo tanto $\#(F \cup B) = 95$ y además sabemos que: $\#(F) = 85$ y $\#(B) = 65$.
Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene:

$$\#(F \cup B) = \#(F) + \#(B) - \#(F \cap B)$$

$$95 = 85 + 65 - \#(F \cap B)$$

de ahí que
Los que practican los dos deportes es:
$\#(F \cap B) = 55$
Los que practican el futbol pero no el basquetbol son:

$\#(F) - \#(F \cap B) = 85 - 55 = 30$
Los que practican el basquetbol y no el futbol son:
$\#(B) - \#(F \cap B) = 65 - 55 = 10$

Ejemplo 2
Encuentra el menor y mayor entero de cuatro cifras, terminado en 5 y múltiplo de 3

SOLUCIÓN:
Sea A el conjunto de todos los números terminados en 5 de cuatro cifras, y B el conjunto de todos los números múltiplos de 3 y de cuatro cifras. Lo que hay que encontrar es: *mínimo de* $(A \cap B)$ y máximo de $(A \cap B)$.

$$A = \{1005,1015,1025,1035 \dots 9965,9975,9985,9995\}$$

$$B = \{1002,1005,1008, \dots 9975,9978,9981,9984,9987,9990,9993,9996,9999\}$$

$$mínimo\ de\ (A \cap B) = 1005$$
$$\text{máximo de } (A \cap B) = 9975$$

4.1.4 Conjuntos de números

En matemáticas se trabajan con números y es muy importante que el alumno identifique los números como elementos de un conjunto, el primer conjunto del que hablaremos es el de los números naturales.

4.1.4.1 Conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales lo denotaremos por la letra $\mathbb{N}$ y es el conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

Representando así a los números naturales, el alumno comienza a reconocer a los elementos que forman el conjunto.

Y de "suma importancia" se tienen los siguientes subconjuntos de los números naturales.

4.1.4.2 Subconjuntos importantes de los números naturales.

$M_2 = \{2,4,6,8, \dots\}$ conjunto de los números pares

$M_3 = \{3,6,9,12, \dots\}$ conjunto de los números multiplos de 3
En general:
$M_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ conjunto de los números multiplos de n

$I = \{1,3,5,7, \dots\}$ conjunto de los números impares

$C_2 = \{1,4,9,16,25,49,64 \ldots\}$ conjunto de los números cuadrados perfectos

$C_3 = \{1,8,27,64,125 \ldots\}$ conjunto de los números cubos perfectos
y el mas importante:
$\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17 \ldots\}$ conjunto de los números primos

Los conjuntos que considero de suma importancia son aquéllos que aparecen en muchos momentos mientras se estudia matemáticas. Los números primos se mencionan en el teorema fundamental de la aritmética; los números múltiplos de n aparecen desde la primaria, nos enseñan en el nivel básico al menos los primeros 10 elementos para $n = 1$ hasta $n = 10$ (las tablas de multiplicar); el conjunto de cuadrados y cubos, nos ayudan a visualizar factorizaciones en álgebra, tales como diferencia de cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, suma y diferencia de cubos.

4.1.5 La necesidad de los conjuntos al programa de SEP 2011

Bloque 2 del programa de estudio de la SEP 2011.
Aprendizajes esperados: resuelve problemas utilizando el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.
Contenidos

- Formulación de los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 5. Distinción entre números primos y compuestos.

- Resolución de problemas que impliquen el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

Criterios de divisibilidad entre 2,3,5,6

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{N}$ se dice que a es divisible entre b si y solo si a es múltiplo de b

Divisibilidad por 2

Recordando lo visto anteriormente, sea M_2 el conjunto de los números múltiplos de 2

$$M_2 = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40, \ldots\}$$

Observando el conjunto identificamos que el digito de las unidades de cada elemento termina en: 0,2,4,6,8 de ahí que podemos conjeturar que un numero es divisible por dos si termina en 0,2,4,6,8 (en un número par)

Divisibilidad por 3

Sea M_3 el conjunto de los múltiplos de 3

$$M_3 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60,63, \dots\}$$

Analizando los elementos del conjunto tenemos que: si sumamos las cifras que componen los números tenemos:

3=3, 6=6, 9=9, 1+2=3, 1+5=6, 1+8=9 ,2+1=3, 2+4=6, 2+7=9, 3+0=3, 3+3=6 etc.

Se puede conjeturar que la suma de sus dígitos siempre me da 3,6 ó 9. Ahora tomemos 2 números de cuatro cifras y de 7 cifras que pertenezcan al conjunto; 3474, 8752741 y sumemos sus cifras:

3+4+7+4=18
8+7+5+2+7+4+1=36

los resultados obtenidos son elementos de

$M_3 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60,63, \dots\}$

Como 3,6 y 9 también son elementos de M_3 podemos conjeturar: un numero es divisible por tres si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3

Divisibilidad por 5

Sea M_5 el conjunto de los múltiplos de 5

$$M_5 = \{5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100,105, \dots\}$$

Analizando los elementos del conjunto tenemos que: todos los elementos del conjunto la cifra de sus unidades es 0 ó 5 Podemos conjeturar: un numero es divisible por cinco si la cifra de sus unidades termina en 0 ó en 5

En éstos criterios nos apoyamos de los conjuntos para visualizar las propiedades que cumplen los múltiplos de 2,3 y 5. Aunque el programa de SEP no marca el criterio de divisibilidad por 6 lo mostramos de la siguiente manera:

Criterio de divisibilidad por 6

Sea M_6 el conjunto de los múltiplos de 6

$$M_6 = \{6,12,18,24,30,36,42,, \dots\}$$

Calculemos:

$M_2 \cap M_3 = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26, \dots\} \cap \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33\}$

$M_2 \cap M_3 = \{6,12,18,24,30,36,42, , \dots\}$

es decir: $M_2 \cap M_3 = M_6$

Por lo tanto tenemos que: un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3

4.1.6 Distinción entre números primos y compuestos.

Para distinguir entre números primos y compuestos la Criba de Eratóstenes (para más información [7] página 77) es muy eficiente. Pero más eficiente es que cada vez que ocupemos los números primos el profesor escriba el conjunto, de esta manera el alumno se le irá haciendo familiar y le dará la importancia que merece este conjunto.

$$\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17 \dots\}$$

Ejercicio:

Los matemáticos han buscado, desde hace mucho tiempo, una fórmula para encontrar números primos, pero no han podido hallar una que sólo produzca primos al sustituir sucesivamente los valores 1, 2, 3,... en ella. Sustituye estos valores en las siguientes fórmulas e investiga cuál es el primer valor para el cual no se obtiene un número primo:

a) $p=n^2+n+5$

SOLUCIÓN:

Sea A el conjunto formado por la sucesión que genera la formula: $p=n^2+n+5$

Y $\mathbb{P}$ el conjunto de números primos.
Lo que se pide es el mínimo de $(A - \mathbb{P})$.

$$\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31, \dots\}$$
$$p(1) = (1)^2 + (1) + 5 = 7$$
$$p(2) = (2)^2 + (2) + 5 = 11$$
$$p(3) = (3)^2 + (3) + 5 = 17$$
$$p(4) = (4)^2 + (4) + 5 = 25$$

se observa que $p(4)$ es la solución. Ya que es el primer elemento de A que no está en $\mathbb{P}$

$$A = \{7,11,17,25, \dots\}$$

$$\text{mínimo de } (A - \mathbb{P}) = 25$$

4.1.7 Mínimo común múltiplo.

Problema:
Alicia va al club cada 2 días, Beatriz va cada 3 días, Carlos va cada 4, Daniel cada 5. Si hoy están todos en el club, ¿Dentro de cuántos días volverán a reunirse?

Solución

Tenemos que el conjunto asociado a los días próximos que irán al club Alicia, Beatriz y Carlos, respectivamente son: M_2, M_3, M_4 y el día en que vuelvan a coincidir deben ser los elementos comunes a los conjuntos:

$$M_2 = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40, \dots\}$$

$$M_3 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60,63, \dots\}$$

$$M_4 = \{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48,52,56,60,64,68,72,76,80,82, \dots\}$$

El conjunto que se obtiene es:

$$M_2 \cap M_3 \cap M_4 = \{12,24,36,48, \dots\}$$

aunque solo nos interesa el menor número de este conjunto, por lo tanto Alicia Beatriz y Carlos se volverán a ver dentro de 12 días.

Definición. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos que:
$M_n = \{n, 2n, 3n, 4n, 5n, \dots\}$ el conjunto de los múltiplos de n
$M_k = \{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \dots\}$ el conjunto de los múltiplos de k

Formemos el conjunto $M_n \cap M_k$ (nota este conjunto no es vacío porque al menos el número $m \cdot k$ está en ambos conjuntos)

Entonces el mínimo común múltiplo de n y k es el menor número que pertenece al conjunto $M_n \cap M_k$
Es decir: el mínimo común múltiplo de n y $k \in \mathbb{N}$ es el mínimo del conjunto de todos los múltiplos comunes de n y k.

4.1.8 Máximo común divisor

Problema
De todos los rectángulos cuyos lados miden un número entero de unidades y área igual a 144, ¿cuál es el que tiene menor perímetro?

Solución

Sea D_{144} el conjunto de formado por todos los divisores de 144

$$D_{144} = \{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144\}$$

Se nota que el producto dado por el ultimo y el primero, el segundo y el penúltimo y así sucesivamente nos da 144 (El 12 no tiene pareja y esto porque 144 es un cuadrado perfecto, de ahí que 144=12·12). Por lo tanto el perímetro de cada uno de los rectángulos seria:

$$P = 2(b + h)$$
$$P_1 = 2(1 + 144) = 290$$
$$P_2 = 2(2 + 72) = 148$$
$$P_3 = 2(3 + 48) = 102$$
$$P_4 = 2(4 + 36) = 80$$
$$P_5 = 2(6 + 24) = 60$$
$$P_6 = 2(8 + 18) = 52$$
$$P_7 = 2(9 + 16) = 50$$
$$P_8 = 2(12 + 12) = 48$$

De donde el menor perímetro es 48, generado por el rectángulo de base 12 y altura 12. Por lo tanto el rectángulo es un cuadrado

Definición. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos que:
D_n el conjunto de los divisores de n
D_k el conjunto de los divisores de k

Formemos el conjunto $D_n \cap D_k$ (nota este conjunto no es vacío porque al menos el número 1 está en ambos conjuntos y no es infinito porque todos los divisores de n, están entre 1 y n)

Entonces el máximo común divisor de n y k es el mayor número que pertenece al conjunto $M_n \cap M_k$

Es decir: el máximo común divisor de n y $k \in \mathbb{N}$ es el máximo del conjunto de todos los divisores comunes de n y k.

4.1.9 Números enteros

Bloque V
Sentido numérico y pensamiento algebraico
Contenidos: Resolución de problemas que implican el uso de sumas y restas de números enteros.

Al igual que al alumno desde primaria se le menciona que π es aproximadamente 3.14, o 3.1416. el crea una asociación entre el símbolo y su valor aproximado, se espera que

haga lo mismo con los conjuntos es decir tenga una relación inmediata entre números naturales y $\mathbb{N}$ así como los elementos que integran este conjunto, de igual manera lo haga con $\mathbb{Z}$ y los números enteros.

El conjunto de los números enteros se denotarán por la letra $\mathbb{Z}$ y es el conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2 -1,0,1,2,3, \ldots\}$$

Y su representación en la recta numérica.

Para representar en la recta numérica los números enteros simplemente dibujamos una recta de forma horizontal y ubicamos un punto cualquiera en ella al cual se le asigna el número cero, a partir de allí dividimos la recta con marcas a igual distancia uno de otro, tanto a la izquierda como a la derecha del cero, y asignamos los enteros positivos a la derecha del cero y los enteros negativos a la izquierda del cero nos quedaría así:

Observación. Los enteros positivos son el conjunto de los números naturales, por lo que se concluye que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

4.1.10 Números racionales.

Bloque 1

Aprendizajes esperados

- Convierte números fraccionarios a decimales y viceversa.
- Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica.

Los números racionales como tales no se mencionan en el programa de SEP, solo menciona los números fraccionarios, y esto produce que limite el ver a un número entero como un número racional $\left(5 = \frac{5}{1}\right)$.

En [16] se menciona:

Un número racional puede:

- *ser el resultado de un reparto y quedar, en consecuencia, ligado al cociente entre*

naturales;

• *ser el resultado de una medición y, por tanto, remitirnos a establecer una relación con la unidad;*

• *expresar una constante de proporcionalidad; en particular esa constante puede tener un significado preciso en función del contexto (escala, porcentaje, velocidad, densidad...);*

• *ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo;*

• *etcétera."*

En [15] se menciona:

El significado de la fracción como cociente es importante, porque permite preparar el camino para entender los números racionales como un campo de cocientes, teniendo de esta manera una construcción formal de éstos. Esta interpretación aporta una herramienta poderosa para el trabajo en otras interpretaciones de las fracciones como la recta numérica o las razones.

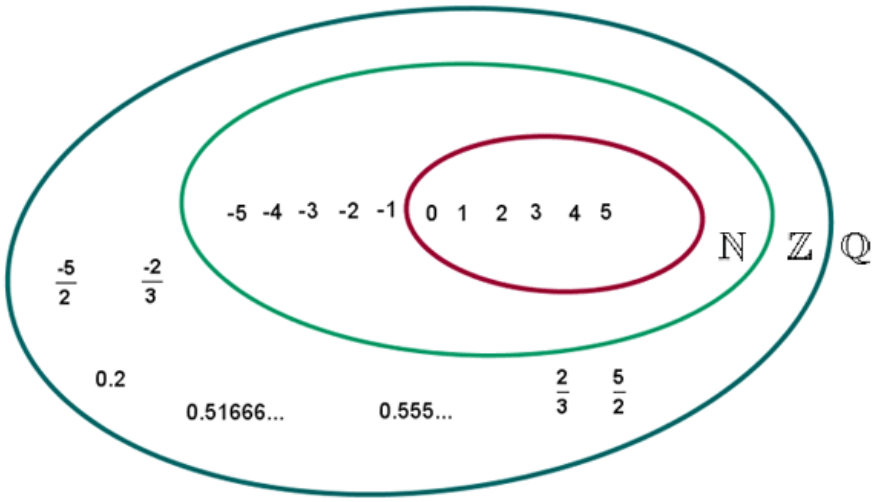
Lo anterior se menciona en un trabajo para primaria sobre las fracciones, así que en secundaria estamos en el momento preciso de hablar del conjunto de números racionales.

El conjunto de los números racionales, lo denotaremos por la letra $\mathbb{Q}$ y es el conjunto:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Observación en el caso de que q tome el valor de 1 se tienen todos los números enteros. Por lo que podemos afirmar que: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Nota. Como el conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros, tenemos que: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. En diagrama de Venn



4.2 Relaciones y funciones

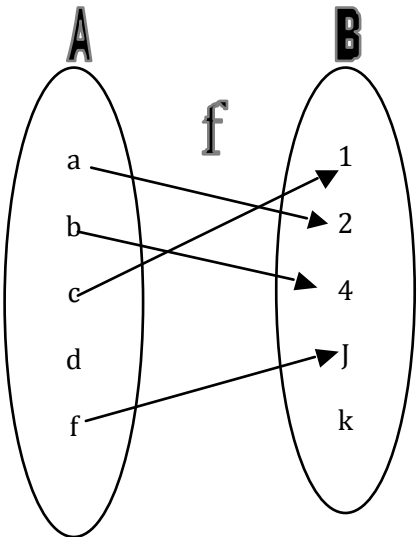
Definición. una relación $\mathcal{R}$ entre A y B es un subconjunto de A x B

Definición. Una *función* f *entre* A y B es una relación $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ la cual cumple que si $(a,b)\ y\ (a,d) \in \boldsymbol{\mathcal{R}},\ entonces\ b = d$

Nota**.** La colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento

Dominio y rango:
Definición. Si f es una función *entre* A y B, el **dominio** de f es el conjunto: $D_f = \{a \in A \mid existe\ b \in B\ y\ (a,b) \in f\}$, b se designa por $\boldsymbol{f(a)}$**.** La **imagen** de f es el conjunto: $I_f = \{b \in B \mid existe\ un\ a \in A\ y\ (a,b) \in f\}$

Ejemplo:



La función es: $f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 1), (f, j)\}$
Y se tiene que para esta función:
$D_f = \{a, b, c, f\}$ y $I_f = \{1,2,4, j\}$

4.3 Probabilidad y conjuntos

Una de las razones de más importancia para incentivar que en los programas de SEP aparezcan los conjuntos es el de su aplicación en la probabilidad.
En seguida se muestran los contenidos de probabilidad que se ven en secundaria clasificados por grado y bloques, en los cuales se hace uso de los conjuntos.

Primer grado
Bloque 1
Tema: Nociones de probabilidad
Contenido: Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.

Experimentos aleatorios.
En lugar de definir lo que es un experimento aleatorio se darán algunos ejemplos, y posteriormente analizaremos las propiedades que cumplen todos los ejemplos. Denotaremos por la letra E cualquier experimento y en general por E_n el enésimo experimento.

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
E_2: Se lanza una moneda tres veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.
E_3: Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en un periodo de 24 horas.
E_4: Se lanzan al mismo tiempo una moneda y un dado.
E_5: Se lanzan dos dados y se observan los números que caen hacia arriba.

E_6: En una bolsa hay 25 canicas; 5 blancas, 10 rojas, 4 verdes y 6 azules. Sin ver, se se saca una canica y se anota el color.

Lo que tienen en común los anteriores experimentos es:

a) Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.
b) Aunque en general no podemos indicar cuál será un resultado particular, podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
c) A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad.

4.3.1 El espacio muestral

Definición. El espacio muestral de un experimento E es el conjunto de todos los resultados posibles de E y lo denotaremos por la letra griega Ω (omega).

Ejemplos, aprovechando los experimentos aleatorios antes mencionados escribiremos su espacio muestral de cada uno de ellos respectivamente.

$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_2 = \{0,1,2,3\}$

$\Omega_3 = \{1,2,3,4,5,6, \dots n\}$ donde n es el número de artículos que se producen en una hora

$\Omega_4 = \{A1, A2, A3, A4, A5, A5, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$ donde S (sol) y A(águila)

$$\Omega_5 = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3) \dots (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3) \dots (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), \dots (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), \dots (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), \dots (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), \dots (6,6) \end{Bmatrix}$$

$\Omega_6 = \{B_1, B_2, \dots B_5, R_1, R_2, \dots R_{10}, V_1, V_2, \dots V_4, A_1, A_2, \dots A_6\}$ donde B_i, R_i, V_i, A_i corresponden a la bola de color blanca, roja, verde y azul respectivamente

Es recomendable dedicar tiempo a ejercicios de espacio muestral para que el alumno vaya asimilando no solo los casos favorables si no todos los posibles casos en un experimento. Como indica Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) *la comprensión correcta del espacio muestral es clave para ayudar al alumno a progresar en el aprendizaje de la probabilidad y se debe dedicar un tiempo suficiente a su enseñanza.*

Definición. Cualquier subconjunto de un espacio muestral Ω para un experimento en particular E se denomina evento.

Ejemplos:

A_1: El evento de que el dado mostrará un numero par

$A_1 = \{2,4,6\}$

Nota. $A_1 \subseteq \Omega_1$

A_2: El evento obtener dos caras
$A_2 = \{2\}$
Nota. $A_2 \subseteq \Omega_2$

A_3: Todos los artículos fueron no defectuosos
$A_3 = \{0\}$
Nota. $A_3 \subseteq \Omega_3$

A_4: El evento obtener un sol y un número par
$A_4 = \{S2, S4, S6\}$
Nota. $A_4 \subseteq \Omega_4$

A_5: El evento obtener un 2 al sumar las caras de los dos dados
$A_5 = \{(1,1)\}$
Nota. $A_5 \subseteq \Omega_5$

A_6: El evento obtener una bola verde
$A_6 = \{V_1, V_2, V_3 V_4\}$

4.3.2 Espacios finitos equiprobables

Al trabajar con espacios muestrales se debe tomar en cuenta si nuestro espacio muestral es finito y equiprobable. Como señala Meyer (1987) *La suposición que más comúnmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. De ninguna manera esta suposición puede darse como un hecho; debe justificarse cuidadosamente. Hay muchos experimentos para los cuales se garantiza tal suposición, pero también hay muchas situaciones experimentales en las cuales sería un error hacer tal suposición.* Por ejemplo Ω_2 visto anteriormente no es equiprobable, ya que, la probabilidad de obtener cero y tres es la misma pero son menores a obtener un dos.

Pero en el caso que estemos en un espacio finito equiprobable, podemos definir la probabilidad de un evento A $(P(A))$de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Ejemplos

1. Se lanza al aire una moneda normal (una moneda perfectamente equilibrada) tres veces, determine la probabilidad de que:
    a) Aparezcan puros soles
    b) Aparezcan dos águilas

c) Aparezcan por lo menos dos águilas.

Solución:

Para calcular las probabilidades de este problema, hay que definir el espacio muestral en cuestión.

$$\Omega = \{AAA, ASS, SAS, SSA, AAS, SAA, ASA, SSS\}$$

a) Sea $A :=$ evento de que aparezcan puros soles

$A = \{SSS\}$

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

Por ser un espacio finito equiprobable ya que cada uno de los elementos mostrados tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

b) Sea $B :=$ evento de que aparezcan dos águilas
$B = \{AAS, SAA, ASA\}$

$$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

c) Sea $C :=$ evento de que aparezcan por lo menos dos águilas
$C = \{AAS, SAA, ASA, AAA\}$

$$P(C) = \frac{\#(C)}{\#(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

2. Se lanza al aire un dado normal dos veces
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea mayor de siete?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea de cómo máximo cinco?
    d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento aparezca el número tres?

Solución:

Lo primero que hay que hacer es hallar el espacio muestral correspondiente

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Como se observa, $\#(\Omega) = 36$ cada uno de los elementos del espacio muestral tiene la misma probabilidad de ocurrir por lo que:

a) Sea $A \coloneqq$ evento de que la suma de los números que aparecen sea de por lo menos siete

$$A = \begin{Bmatrix} (1,6) \\ (2,5),(2,6) \\ (3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

b) $B \coloneqq$ evento de que la suma de los números que aparecen sea mayor de siete.

$$B = \begin{Bmatrix} (2,6) \\ (3,5),(3,6) \\ (4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

c) $C \coloneqq$ evento de que la suma de los números que aparecen sea como máximo cinco.

$$\mathrm{C} = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4) \\ (2,1),(2,2),(2,3) \\ (3,1),(3,2) \\ (4,1) \\ \\ \end{Bmatrix}$$

$$P(C) = \frac{\#(C)}{\#(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

d) $D \coloneqq$ evento de que en el primer lanzamiento aparezca el número tres.

$$D = \{(3,1)\ \ (3,2)\ \ (3,3)\ \ (3,4)\ \ (3,5)\ \ (3,6)\}$$

$$P(D) = \frac{\#(D)}{\#(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Estos 2 ejemplos nos ayudan visualizar todo el espacio muestral así como cada uno de los eventos de los cuales se quiere calcular la probabilidad, y hacemos uso de la cardinalidad de un conjunto que para estos casos solo era contar el numero de elementos de cada evento. Ahora bien, esto no es siempre viable (el hecho de describir todo el espacio muestral) así que para algunos ejercicios de cálculo de probabilidades nos preocuparemos más por la cardinalidad del espacio muestral así como la de los eventos y no, el poder describir completamente los conjuntos; en este caso se hace uso de las técnicas de conteo.

Segundo grado.
Bloque 1
Contenido: Comparación de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, usando relaciones como: "es más probable que...", "es menos probable que...".

La comparación entre dos eventos se facilita usando conjuntos. Ejemplo
El experimento consiste en lanzar un dado y observar el número que se obtiene. Tenemos que el espacio muestral esta dado por: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Sean, A y B los eventos obtener un número primo y un numero mayor a 4. Si escribimos nuestros eventos como conjuntos:

$A = \{2,3,5\}$

$B = \{5,6\}$

Se observa inmediatamente que es mas probable el evento A de ocurrir, que el evento B $(\#(A) > \#(B))$.

Otro ejemplo es cuando sabemos que un conjunto A es subconjunto de un conjunto B, se tiene que A es menos o igual probable que B. Carmen Batanero (2004) *Si un subconjunto está incluido en un conjunto mayor, la probabilidad del primero es menor que la del segundo. Esta propiedad es muy intuitiva y puede presentarse a los alumnos desde la escuela primaria, por lo que podríamos realizar actividades de comparar probabilidades, incluso sin cuantificación, tales como pedir a los niños que ordenen los sucesos "obtener un 3" y "obtener un número impar" al lanzar un dado.*

Tercer grado
Bloque 1
Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Definición: Los eventos A y B de un espacio muestral Ω son mutuamente excluyentes si no hay puntos muestrales comunes. Usando conjuntos solo hay que decir, son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$

Escala de Probabilidad.

En lugar de mencionar solo la escala de probabilidad, gracias a que el alumno ya conoce y ha trabajado con conjuntos podemos presentar los axiomas de probabilidad.

Axiomas de probabilidad.

Sea E un experimento. Sea Ω un espacio muestral asociado con E. Con cada suceso A asociamos un número real, designado por $P(A)$ y llamado la probabilidad de A. Tenemos que:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A y B son sucesos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Con los axiomas ahora nos es fácil calcular la probabilidad de un evento complementario, y lo podemos enunciar como un teorema, que además no es difícil su demostración, la cual se recomienda hacerla.

Teorema. Si A^c es un suceso complementario de A, entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Demostración

$A \cap A^c = \emptyset$ (propiedad de conjuntos número 6)
por lo tanto $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ (Axioma 3)
Además $A \cup A^c = \Omega$ (propiedad de conjuntos número 5) de ahí que:
$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$
$P(A^c) = P(\Omega) - P(A)$
$P(A^c) = 1 - P(A)$ ■ (axioma 2)

Ejemplos

1. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as o rey?

Solución:
Sea A el evento obtener un as, R el evento obtener un rey
$A = \{as\ de\ picas, as\ de\ corazones, as\ de\ diamantes, as\ de\ trébol\}$
$R = \{rey\ de\ picas, rey\ de\ corazones, rey\ de\ diamantes, rey\ de\ trébol\}$
$A \cap R = \emptyset$ (mutuamente excluyentes) y lo que nos piden es $P(A \cup R)$ en donde $\#(\Omega) = 52$ de ahí que $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ y por el axioma 3

$$P(A \cup R) = p(A) + P(R) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

2. Sea A el evento en que la suma al lanzar dos dados es mayor que 3. ¿Cuál es la probabilidad del evento A?

   Solución

   El número de resultados en A es relativamente grande, Así para determinar la $P(A)$, es más fácil encontrar $P(A^c)$, y aplicar el teorema anterior.

   $$A = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

   Como $P(A^c) = 1 - P(A)$ se tiene que: $P(A) = 1 - P(A^c)$

   $$P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$$

Eventos independientes.

A y B son eventos independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de la ocurrencia de B. Ésta es la idea intuitiva de eventos independientes, pero gracias a los conjuntos podemos dar la definición formal de independencia.

Definición. A y B son eventos independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo.

Suponga que la probabilidad del evento A "Arturo vive 20 años más" es 0.8 y la probabilidad del evento B "Brenda vive 20 años más" es 0.85. suponga que A y B son eventos independientes. Encuentre la probabilidad de que tanto como Arturo y Brenda vivan 20 años más.

Solución

Lo que hay que calcular es $P(A \cap B)$. Como A y B son eventos independientes, aplicando la definición tenemos:

$$P(A \cap B) = (0.8)(0.85) = 0.68$$

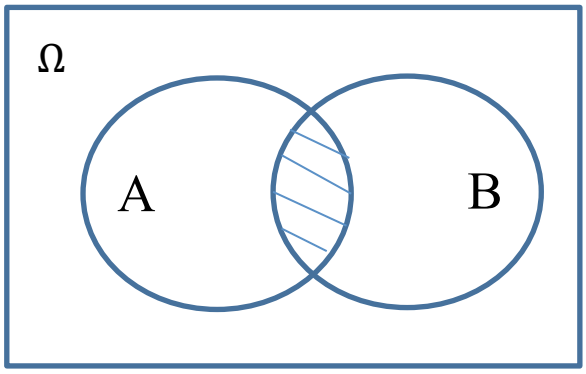
Tercer grado
Bloque II
Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

La regla de la suma la podemos enunciar como un teorema y además se puede hacer la demostración apoyándonos con los diagramas de Venn y obviamente el uso de conjuntos.

Teorema Si A y B son eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración. La idea de la demostración es descomponer $A \cup B$ y B en eventos que se excluyen mutuamente y aplicar el axioma 3 (observe la siguiente figura)



$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

aplicando el axioma 3 a ambas ecuaciones, se tiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c)$$

sustrayendo la segunda ecuación de la primera

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

de ahí que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo.
Se lanza un dado no cargado. Usted gana 50 pesos si el resultado es par o divisible por 3. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Solución.
Sean los sucesos A:= el resultado es par, B:= el resultado es divisible por 3, se tiene que:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,6\}, \quad A \cap B = \{6\}$$

Luego de acuerdo al teorema anterior, la probabilidad que nos piden es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Ésta parte de probabilidad corresponde a los 3 años de secundaria, como hemos mencionado en el capítulo III algunos libros evitan los conjuntos para todo lo que tiene que ver con probabilidad, otros ocupan solo su notación, otros mas si los mencionan pero sin hablar antes sobre ellos. Nosotros trabajamos usando los conjuntos, pero esto es viable ya que se ha trabajado antes con ellos.

Conclusión

La idea principal de esta tesis fue presentar a los conjuntos como lo que son, una parte básica en la matemática. De acuerdo a Hernández. H. (2003) *La Teoría de Conjuntos es un lenguaje. Sin ella, no sólo es imposible hacer matemáticas, sino que ni siquiera podemos decir de qué se trata ésta. Es lo mismo que intentar estudiar literatura francesa sin saber algo de francés.* Y en la educación a nivel secundaria, se propone que se trabaje de manera que el alumno los vaya asimilando con ejemplos cotidianos y sobre todo que no se dejen como un tema independiente a los demás, sino al contrario, mostrar su relación con otras áreas para que al llegar al bachillerato se facilite su aplicación en la solución de inecuaciones, definición de función, cálculo de dominios y rango de una función.

Todos los profesores de nivel secundaria que trabajan con matemáticas tendrían que manejar el tema de conjuntos, según *P. R. Halmos. (1974) "Los matemáticos están de acuerdo en que cada uno de ellos debe saber algo de Teoría de Conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decidir qué tanto es algo".*

A nivel secundaria y preparatoria, solo necesitamos la teoría intuitiva de conjuntos. *Hernández H. (2003) La Teoría Intuitiva de Conjuntos funciona bien para los primeros cursos de matemáticas (Cálculo, Álgebra, entre otros).* Podemos pensar que debiera enseñarse el tema de conjuntos hasta bachillerato como hoy se hace, (al menos en algunos bachilleratos), pero por lo expresado y visto en este trabajo, omitir los conjuntos, en lugar de facilitar el aprendizaje de ciertos temas, como la probabilidad, ocasiona confusiones y errores. Se podría argumentar que la teoría de conjuntos es demasiada abstracción para un niño de secundaria, pero si comenzáramos en este nivel con ejemplos sencillos, en el siguiente nivel de estudios se formalizaría un poco más. Como menciona Batanero (2004) *La transición de un alumno a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido estudiado en un nivel de abstracción conveniente y comprendido – dentro de su capacidad – en las etapas educativas anteriores. Es decir, es preferible que el niño comience a estudiar el tema poco a poco, aunque en un principio sólo lo comprenda de forma limitada, en lugar de esperar a que madure y se le pueda enseñar directamente en forma más abstracta*.

Bibliografía

Alfonso, A. Carlos Manuel, B, María del Carmen, C. (2009) *Matemáticas 2 Introducción a las competencias, Pearson* Educación de México, S.A de C.V.

Alfonso, A. Carlos Manuel, B, María del Carmen, C. (2007) *Matemáticas 1 Introducción a las competencias*, Pearson Educación de México, S.A de C.V.

Araceli, C. M. Rafael, D. P. Ernesto Manuel, E. A. Silvia, G. P. José G. Z. Olga Leticia L. E. Jesús R. V. (2007) *Matemáticas II Telesecundaria* Secretaría de Educación Pública

Batanero, C. (2004). *Ideas estocásticas fundamentales: ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad?* In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, S. A. Ribeiro (Orgs.)

Cantoral, R. (1994). *Los textos de cálculo: una visión de Reformas y Contrarreformas.* París: UFR des Mathématiques, Université París VII.

David, B. S. Silvia, G. P. Tatiana M. V. B. (2012) *Matemáticas I* SM.

Fadil, H. Z. (1977) *Estadística General Aplicada*, Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Irwin, R. M. John E. F. Richard J. (1998) *Probabilidad y Estadística para Ingenieros* Prentice Hall.

Javier, C. M. (2000) *La demostración elemental del teorema de los números primos* Volumen 43 revista Números

Jesús, H. (1976) critica ¿Por qué Juanito no sabe sumar. Periódico El País

Juan, A. A. Agustín, C. C. Manuel, I. C. Raúl, L. G. Armando, M. G. (2004) *Matemáticas*

elementales BUAP. Dirección de Fomento Editorial

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1999). Student's probabilistic thinking in instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 30(5), 487-519.

María, T. María Dolores, L. Mónica Inés, S. Ivonne, T. Emanuel, J. Mercedes, C. (2012) *Matemáticas I* Editorial Santillana S.A. de C.V.

Morris, K. (1973). *El fracaso de la matemática moderna ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI Editores S.A. de C.V.

Paul, L. Meyer (1987) *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* Addison-Wesley Iberoamericana.

P.R. Halmos (1974) *Naive Set Theory*. Springer-Verlog.

Programa de estudios (2011) *Guía para el maestro*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. SEP

Programa de estudios (2006) *Guía para el maestro*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. SEP

Ruiz, A. (1992). *Las matemáticas modernas en las Américas: filosofía de una Reforma.* En UNESCO. *Educación Matemática en las Américas VIII*. París: UNESCO.

Ruiz, A. (2009) *Desafíos de la educación matemática: la formación deformadores* San José de Costa Rica

Santiago, V. (2012) *Matemáticas II* Editorial Limusa. S.A. de C.V.

SEP (1993) *Plan y Programas de estudio Educación Básica.* Secundaria. SEP

Seymor L. (1964) *Teoría de Conjuntos y Temas Afines*. McGraw-Hill/Interamericana de México S.A. de C.V.