



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

SINGULARIDADES CASI HOMOGÉNEAS
POLARES

Tesis para obtener el título de:
Licenciado en Matemáticas

Presenta:
Faustino Agustín Romano Velázquez

Directores de tesis:
Dr. José Luis Cisneros Molina
Dr. Fernando Macías Romero

Mayo 2011

Agradecimientos

A mi mamá Socorro, quiero agradecerte por todo lo que me has dado y enseñado, me has hecho ser una mejor persona, a crecer y dar cada día lo mejor de mi. Quiero que sepas que sin ti este trabajo no existiría.

Para mi hermana Guadalupe: muchas gracias por tenerme paciencia, por estar juntos y por los buenos momentos que hemos tenido. En esta nueva etapa que comienzas se que lograrás salir adelante y que cumplirás todos tus sueños.

A mi novia Tere, por aguantarme en mis momentos de estrés y caos, por hacerme la persona má feliz y por poder compartir esta etapa de mi vida a tu lado. Gracias mi amor.

Al Dr. José Luis Cisneros Molina por el apoyo, la confianza que me tuviste desde el inicio y los ánimos para la maestría.

Al Dr. Fernando Macías Romero y a mis sinodales: Dr. José Seade Kuri, Dra. Haydée Aguilar Cabrera , Dr. Agustín Contreras Carreto y al M.C. Manuel Ibarra Contreras por todas sus observaciones y consejos para escribir esta obra.

Por último al CONACyT por el apoyo para la realización de mi tesis a través del proyecto CONACyT J-049048-F “Topologa de Singularidades” y a todos mis amigos y profesores, a los cuales no puedo nombrar a todos pero que siempre estuvieron a mi lado.

Gracias a todos por todo.

Agustín.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Funciones diferenciables	1
1.2. Variedades diferenciables	3
1.3. Transversalidad	9
1.4. Haces vectoriales	11
1.5. Grupos de Lie, acciones de grupo y flujos	14
1.6. Haces fibrados	18
1.7. Nociones básicas de geometría algebraica	22
1.7.1. Lema de Selección de Curva	24
2. Polinomios casi-homogéneos	29
2.1. Polinomios de Brieskorn-Pham	29
2.2. Fibraciones	34
2.2.1. Fibración en el tubo	35
2.2.2. Fibración global	36
2.2.3. Fibración en la esfera	37
2.3. Polinomios casi-homogéneos	39
3. Fibración de Milnor compleja	43
3.1. Estructura cónica	43
3.2. Fibración de Milnor, caso complejo	44
3.3. Fibración de Milnor-Lê	59
3.3.1. Estratificaciones	59
3.3.2. Teorema de fibration de Milnor-Lê	60
3.4. Fibración de Milnor real	62

4. Polinomios casi-homogéneos polares	65
4.1. Polinomios casi-homogéneos polares	65
4.2. Fibraciones	68
4.2.1. Identidades de Euler	69
4.2.2. Fibraciones	71
4.3. Teorema del join	74
4.3.1. El join de espacios topológicos	75
4.3.2. Teorema del join	76
5. Fibración de Milnor, caso real	91
5.1. Teorema de fibración	91
Bibliografía	103
Índice alfabético	107

Introducción

Brauner [3] fue el primero en estudiar la topología de una curva C en \mathbb{C}^2 en una pequeña bola \mathbb{B}^4 centrada en un punto singular aislado de C , analizando la intersección $K = C \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$, con \mathbb{S}_ϵ^3 centrada en el punto singular.

La intersección K es un nudo en \mathbb{S}_ϵ^3 y la pareja $(\mathbb{S}_\epsilon^3, K)$ determina la topología local de la curva cerca del punto singular, de hecho, la pareja $(\mathbb{B}_\epsilon^4, \mathbb{B}_\epsilon^4 \cap C)$ es difeomorfa al cono sobre $(\mathbb{S}_\epsilon^3, K)$.

Por otra parte Pham [22] motivado por las aplicaciones a la teoría elemental de partículas, estudió la topología de las variedades complejas definidas por

$$z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n} = 1, \quad n > 0, \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad a_j \geq 2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Posteriormente Brieskorn [4] estudió la topología de las variedades complejas definidas por

$$z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n} = 0, \quad n > 0, \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad a_j \geq 2, \quad j = 1, \dots, n,$$

cerca del punto singular, obteniendo de esta forma resultados análogos a los de Brauner, pero en dimensiones más altas. De esta manera los polinomios de la forma

$$z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}, \quad n > 0, \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad a_j \geq 2, \quad j = 1, \dots, n,$$

son conocidos ahora como polinomios de Brieskorn-Pham.

Tiempo después de la publicación de los resultados de Pham [22], Milnor [18, Teo. 2.10] demostró que si $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces en una vecindad de un punto crítico aislado de f se tiene una estructura cónica; es decir, se tiene un homeomorfismo entre $f^{-1}(0) \cap \mathbb{B}_\epsilon^{2n}$ y el cono sobre $f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ con ϵ suficientemente pequeño. Al conjunto $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ lo denominaremos aureola.

En la misma obra Milnor da un teorema de fibración para funciones holomorfas, el cual es sumamente importante para la teoría de singularidades. El teorema de Milnor dice que si $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con punto crítico en el

origen de \mathbb{C}^n , entonces se tiene el siguiente haz fibrado:

$$\phi := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

con ϵ suficientemente pequeño.

Más adelante Milnor considera los conjuntos $N(\epsilon, \delta) = \mathbb{B}_\epsilon^{2n} \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1)$, llamados tubos de Milnor, y al tomar

$$f : N(\epsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{S}_\delta^1 \tag{1}$$

construye un campo vectorial con el cual demuestra que la fibra de la fibrición sobre la esfera y la fibra sobre los tubos de Milnor de (1) son difeomorfas pero no prueba que la restricción de f al tubo es una fibrición, posteriormente Lê Dũng Tráng logra probar esta afirmación [11].

Milnor da también un teorema de fibrición real bajo la hipótesis de que la función analítica $f : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ tenga punto crítico aislado. Un problema con este teorema es que no nos permite conocer la forma de la proyección del haz fibrado y al ser la hipótesis muy restrictiva, en el sentido de que es difícil encontrar ejemplos no triviales, Milnor pregunta

¿Para qué dimensiones $m \geq k \geq 2$ existen ejemplos no triviales?

El primer ejemplo explícito para $k = 2$ fue construido por A'Campo [1], posteriormente otros ejemplos fueron encontrados por Seade [27, 28] y Ruas, Seade y Verjovsky [29] construyeron una familia de polinomios que cumplen con la condición de Milnor; entre otros. Un ejemplo son los denominados polinomios torcidos de Brieskorn-Pham, los cuales veremos más adelante.

Una pregunta natural que surge es

¿Para qué tipo de funciones reales analíticas $f : (\mathbb{R}^{m+k}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$ podemos tener una fibrición de Milnor bajo una hipótesis más débil?

Los primeros en dar una respuesta fueron Pichon y Seade [23] los cuales construyeron una fibrición de Milnor para funciones reales analíticas de la forma $f\bar{g}$ donde $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas, tales que $f\bar{g}$ tiene valor crítico aislado en $0 \in \mathbb{C}$.

Tiempo después Cisneros Molina, Seade y Snoussi introducen en los artículos [7], [9], [8] y [10] el concepto de d -regularidad, el cual involucra a la familia de variedades

$$X_\ell = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid f(\mathbf{x}) \in \ell \}$$

con ℓ una recta que pasa por el origen de \mathbb{R}^k y $f: (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$.

A la familia $\{X_\ell\}$ la llamaremos el pincel canónico de f . La propiedad de ser d -regular significa que existe $\epsilon > 0$ tal que toda esfera con radio menor o igual que ϵ y centrada en el origen, interseca transversalmente a $X_\ell \setminus f^{-1}(\mathbf{0})$ siempre que esta intersección sea no vacía.

Con esta propiedad se prueba que es posible “inflar” la fibrición de Milnor sobre el tubo a una fibrición sobre la esfera con proyección $\frac{f}{\|f\|}$.

En esta tesis revisaremos esta serie de preguntas y ejemplos que han surgido en este tema, comenzando con los ejemplos más sencillos para luego dar sus generalizaciones y resultados que abarcan más casos.

En el Capítulo 1 se dan los prerrequisitos para poder enunciar y probar los resultados de los capítulos posteriores. En este capítulo se dan nociones de topología diferencial, haces fibrados y algunos conceptos básicos de geometría algebraica.

Posteriormente en el Capítulo 2 estudiaremos los polinomios de Brieskorn-Pham, daremos sus propiedades básicas y probaremos la existencia de tres fibriciones asociadas a esta familia de funciones. En la última sección de este capítulo se dan los polinomios casi-homogéneos como una generalización de los polinomios de Brieskorn-Pham, los cuales tienen propiedades similares y también poseen las mismas fibriciones asociadas.

En el Capítulo 3 comenzaremos dando los resultados de Milnor y probaremos el teorema de fibrición de Milnor en el caso complejo, junto con una versión generalizada de este teorema. Más adelante daremos el concepto de estratificación para poder probar el teorema de fibrición de Milnor-Lê y finalizamos el capítulo probando el teorema de fibrición real de Milnor y daremos una serie de observaciones acerca de este teorema.

En el Capítulo 4 responderemos a la pregunta con los polinomios casi-homogéneos polares, los cuales son una generalización de los polinomios casi-homogéneos, además daremos algunas de sus propiedades básicas y probaremos la existencia de fibriciones asociadas a esta familia de polinomios. En este capítulo también daremos el concepto del join de espacios topológicos y probaremos un teorema de join relacionado con los polinomios casi-homogéneos polares.

Finalmente, en el Capítulo 5 introduciremos el concepto de funciones d -regulares, daremos algunos ejemplos y caracterizaciones de esta propiedad y probaremos una versión del teorema de fibrición de Milnor para este tipo de funciones.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es introducir todos los conceptos y herramientas que más adelante usaremos. Los conceptos se dan de la manera más natural posible, de forma que la lectura sea fácil de seguir. A continuación aclararemos la notación que usaremos a lo largo de la obra.

Denotaremos por $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó \mathbb{R} . Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces para simplificar notación escribiremos $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ y $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. Igualmente entenderemos por $\mathbf{0}$ al origen en \mathbb{C}^n y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sea $z_j = x_j + iy_j$, entonces podemos considerar que el espacio \mathbb{C}^n es equivalente al espacio vectorial real de dimensión $2n$ con coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$.

En el caso de que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, entonces a los elementos de $\mathbb{F}^n = \mathbb{R}^n$ los denotaremos por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Finalmente entenderemos por mcm al mínimo común múltiplo y por mcd al máximo común divisor.

1.1. Funciones diferenciables

Comenzaremos haciendo un breve repaso del cálculo vectorial, revisando algunos conceptos básicos que más adelante trataremos de extender a otras áreas.

Sea $n \in \mathbb{N}$, siempre que se escriba \mathbb{R}^n se hablará del espacio euclidiano de dimensión n .

Definición 1.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, la función $f: X \rightarrow Y$ es **diferenciable** si para cualquier \mathbf{x} en X , existe W abierto en \mathbb{R}^n tal que $\mathbf{x} \in W$ y existe una función $F: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ para la cual todas sus derivadas parciales existen, son continuas y $f = F|_{W \cap X}$.

Definición 1.2. Una **curva diferenciable** es una función $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que todas sus funciones coordenadas son derivables en el intervalo abierto I .

Con estas definiciones, podemos definir a la diferencial de una función como sigue

Definición 1.3. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow Y$ y $\mathbf{x} \in X$. La **diferencial** de f en \mathbf{x} es una transformación lineal

$$Df_{\mathbf{x}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que para $v \in \mathbb{R}^n$, $Df_{\mathbf{x}}(v) = (f \circ \alpha)'(0)$, donde α es una curva diferenciable con $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha'(0) = v$.

La diferencial, como se definió anteriormente, cumple las propiedades siguientes:

1. Regla de la cadena: Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son funciones diferenciables con $\mathbf{x} \in X$ y $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, entonces

$$D(g \circ f)_{\mathbf{x}} = Dg_{\mathbf{y}} \circ Df_{\mathbf{x}}.$$

2. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $I: U \rightarrow U$ es la identidad, entonces para $\mathbf{x} \in U$, $DI_{\mathbf{x}}$ es la identidad.
3. Si $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, $i: U \rightarrow V$ es la inclusión y $\mathbf{x} \in U$, entonces $Di_{\mathbf{x}}$ es nuevamente la identidad.
4. Si $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función lineal y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $DL_{\mathbf{x}} = L$.

Definición 1.4. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow Y$, diremos que f es un **difeomorfismo** si f es una biyección, donde f y f^{-1} son ambas diferenciables.

Definición 1.5. Una función $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un **difeomorfismo local** en algún $\mathbf{x} \in X$, si f es un difeomorfismo entre alguna vecindad U de \mathbf{x} y una vecindad V de $f(\mathbf{x})$.

Proposición 1.6. Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo con U y V abiertos, entonces, para cualquier $\mathbf{x} \in U$, $Df_{\mathbf{x}}$ es no singular y $m = n$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{x} \in U$, recordemos que $Df_{\mathbf{x}}$ es una función lineal entre \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m .

Dado que $f \circ f^{-1}$ es la identidad en U , entonces $Df_{f(\mathbf{x})}^{-1} \circ Df_{\mathbf{x}}$ es la identidad en \mathbb{R}^n y por lo tanto $Df_{\mathbf{x}}$ es inyectiva.

Ahora al considerar que $f^{-1} \circ f$ es la identidad en V , entonces $Df_{\mathbf{x}} \circ Df_{f(\mathbf{x})}^{-1}$ es la identidad en \mathbb{R}^m y por lo tanto $Df_{\mathbf{x}}$ es sobreyectiva.

Dado que $Df_{\mathbf{x}}$ es una función lineal, se sigue que $Df_{\mathbf{x}}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m y $m = n$. \square

A continuación enunciaremos el teorema de la función inversa, el cual será usado en varias pruebas más adelante.

Teorema 1.7 (de la función inversa). *Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con U abierto y $\mathbf{x} \in U$. Si $Df_{\mathbf{x}}$ es no singular, entonces f es un difeomorfismo local en \mathbf{x} .*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [2, Teo. 13.6].

1.2. Variedades diferenciables

Un hecho conocido es que en topología general, entre otras cosas, se estudian las propiedades que se preservan bajo funciones continuas. En topología diferencial se impone una condición más fuerte.

A continuación definiremos los objetos que estudia la topología diferencial y trataremos de generalizar los conceptos de la sección anterior.

Definición 1.8. Un subconjunto M de \mathbb{R}^n es una **variedad diferenciable** de dimensión m , con $m \leq n$; si existe una familia $\{(U_{\alpha}, h_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que cumple las siguientes condiciones:

1. La familia $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de M .
2. Cada h_{α} es un difeomorfismo entre el abierto U_{α} y algún abierto U'_{α} de \mathbb{R}^m .

Cada elemento (U_{α}, h_{α}) es una **carta** y la colección $\{(U_{\alpha}, h_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un **atlas** para M . Por otra parte la pareja $(U'_{\alpha}, h_{\alpha}^{-1})$ es una **parametrización local**. Finalmente para $x \in U_{\alpha}$, U'_{α} es llamada **vecindad de coordenadas** de x .

De manera natural tenemos el siguiente concepto.

Definición 1.9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Diremos que un subconjunto N de M es una **subvariedad** diferenciable de dimensión n , si es una variedad de dimensión n con la topología inducida por la topología de M . Al número $m - n$ le llamaremos la **codimensión** de N en M .

Una manera de ver a las variedades diferenciables es como una generalización de una superficie suave de \mathbb{R}^3 , esto permite dar una idea visual de estos objetos: un espacio que localmente es difeomorfo a algún \mathbb{R}^n o dicho de otra forma, un espacio que no tiene “picos”.

Ejemplo 1.10. Sean $\mathbb{S}^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \}$ y

$$\begin{aligned} \pi_{\pm} : \mathbb{S}^n \setminus \{p_{\pm}\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{\pm 1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{\pm 1 - x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

las proyecciones estereográficas desde los polos $p_{\pm} = (0, 0, \dots, \pm 1)$. Entonces $\{(\mathbb{S}^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$ es un atlas para \mathbb{S}^n y π_{\pm} son difeomorfismos. Por lo tanto \mathbb{S}^n es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.11. Un conjunto U abierto de \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable donde su atlas consta unicamente de la carta (U, I_U) , con I_U la identidad en U .

Aunque los ejemplos más usuales de variedades diferenciables aparecen en la geometría, se encuentran otros ejemplos en otras áreas de la matemática, como en sistemas dinámicos, álgebra y también en física.

Observación 1.12. En la Definición 1.8, no se pide que los conjuntos U_{α} sean ajenos, por lo que es posible hablar de la función $h_{\alpha\beta} = h_{\beta} \circ h_{\alpha}^{-1}$ definida en $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$. A esta función se le conoce como la **función de transición**.

Definición 1.13. Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente, $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable y $(U, h), (V, g)$ cartas de M y N respectivamente, tales que $x \in U$ y $f(x) \in V$.

La función $f^{hg} = g \circ f \circ h^{-1}$ es la **función f vista en las coordenadas locales de $(U, h), (V, g)$** para M y N . Generalmente se abusará de la notación y se escribirá $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ en vez de $f^{hg}(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Ahora nos interesa poder hablar del espacio tangente a una variedad diferenciable en un punto dado y también quisiéramos poder hablar de la diferencial entre dos variedades diferenciables, así que usaremos los conceptos trabajados en \mathbb{R}^n para poder extenderlos a esta área, tratando de preservar la mayor cantidad de propiedades.

El concepto de espacio tangente puede ser construido de varias formas equivalentes como se puede apreciar en [5, Cap. 2], pero a lo largo de esta obra usaremos un enfoque más geométrico, lo cual facilita la interpretación de los resultados.

Definición 1.14. Sean M una variedad diferenciable de dimensión m y $x \in M$, el **espacio tangente** a M en x , denotado por $T_x M$ es

$$T_x M = \{ \alpha'(0) \mid \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = x, \text{ y } \alpha \text{ curva diferenciable} \}.$$

Observación 1.15. Dada una función $f: M \rightarrow N$ diferenciable, con M y N variedades diferenciables, podemos definir para $x \in M$ la diferencial de f en x , denotada por Df_x , análogamente a la Definición 1.3 y obteniendo una aplicación lineal

$$Df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N.$$

En las siguientes pruebas, es importante recalcar el hecho de que trabajaremos sobre espacios vectoriales.

Proposición 1.16. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m en \mathbb{R}^n . Si $x \in M$, entonces $T_x M$ es un espacio vectorial de dimensión m .*

DEMOSTRACIÓN. Dado un punto x en M y v un vector en $T_x M$, existe una curva diferenciable α tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$.

Sea (U, h) una carta de M en x tal que $h(x) = \mathbf{0}$. Como h es diferenciable tenemos que $\beta = h \circ \alpha$ es una curva diferenciable en $h(U)$, con $\beta(0) = \mathbf{0}$ y $\beta'(0) = Dh_x(v)$, donde éste último pertenece a \mathbb{R}^m .

Ahora, dado que para cualquier $w \in \mathbb{R}^m$, existe una curva diferenciable γ en $h(U)$ tal que pasa por $\mathbf{0}$ y el vector velocidad de γ en $\mathbf{0}$ es w y como $h^{-1} \circ \gamma$ es una curva diferenciable en M , entonces $Dh_{\mathbf{0}}^{-1}(w) \in T_x M$.

De esta manera tenemos una biyección entre $T_x M$ y \mathbb{R}^m . Usando esta biyección podemos dar a $T_x M$ una estructura de espacio vectorial heredada de la estructura de espacio vectorial de \mathbb{R}^m .

Esta estructura de espacio vectorial en $T_x M$ hace que Dh_x sea un isomorfismo lineal y de esta manera $\dim T_x M = m$. \square

Definición 1.17. Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable, entre dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente.

Sea $m < n$, si para $x \in M$ la función Df_x es inyectiva, decimos que f es una **inmersión** en x .

Sea $n < m$, si para $x \in M$ la función Df_x es sobreyectiva, decimos que f es una **submersión** en x .

De esta manera llegamos a lo que serán los primeros teoremas importantes acerca del comportamiento de las variedades diferenciables, al menos de forma local. Un comentario importante es que el concepto dominante de la teoría local es el de espacio tangente en un punto.

Teorema 1.18 (de la inmersión local). *Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable con M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $m < n$ y f es una inmersión para algún $x \in M$ y si $y = f(x)$, entonces existen coordenadas locales alrededor de x y y tales que $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \end{array}$$

con $\phi(x) = \mathbf{0}$ y $\psi(y) = \mathbf{0}$, donde (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas alrededor de x en M y de $h(x)$ en N respectivamente, y con $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Como Df_x es inyectiva y ϕ, ψ son ambos difeomorfismos, entonces $Dg_{\mathbf{0}}$ es inyectiva y mediante cambios de base podemos suponer que tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m .

Ahora podemos definir $G: U' \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $G(x, z) = g(x) + (0, z)$, entonces se tiene que $DG_{\mathbf{0}} = I_n$, donde I_n es la identidad de orden n .

Por el Teorema 1.7, G es un difeomorfismo local en $\mathbf{0}$. Sea $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inmersión canónica dada por $h(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, entonces $G \circ h = g$.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \\ & \searrow h & \downarrow G \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Como ψ y G son difeomorfismos locales, entonces $G^{-1} \circ \psi$ es un difeomorfismo local en y .

Podemos usar a $G^{-1} \circ \psi$ como una carta local de N alrededor de y . \square

Teorema 1.19 (de la submersión local). *Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable con M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $n < m$ y f es una submersión para algún $x \in M$ y si $y = f(x)$, entonces existen coordenadas locales alrededor de x y y tales que $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \end{array}$$

con $\phi(x) = \mathbf{0}$ y $\psi(y) = \mathbf{0}$, donde (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas alrededor de x en M y $f(x)$ en N respectivamente, y con $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Como Df_x es sobreyectiva y ϕ, ψ son ambos difeomorfismos, entonces $Dg_{\mathbf{0}}$ es sobreyectiva y mediante cambios de base podemos suponer que tiene como matriz

$$\left(I_n \mid 0 \right),$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n .

Ahora podemos definir $G: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $G(a) = (g(a), a_{n+1}, \dots, a_m)$ si $a = (a_1, \dots, a_m)$ y por lo tanto se tiene que $DG_{\mathbf{0}} = I_m$, donde I_m es la identidad de orden m .

Por el Teorema 1.7 tenemos que G es un difeomorfismo local en $\mathbf{0}$. Sea $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la submersión canónica dada por $h(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $h \circ G = g$.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \\ \downarrow G & \nearrow h & \\ \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

Como ϕ y G son difeomorfismos locales, entonces $G \circ \phi$ es un difeomorfismo local en x .

Podemos usar a $\phi^{-1} \circ G^{-1}$ como una parametrización local de M alrededor de x . □

Un hecho importante es que los Teoremas de la inmersión local y submersión local junto con el Teorema de la función inversa, dominan la geometría elemental de las aplicaciones diferenciables.

A continuación definiremos los conceptos de valor y punto regular.

Definición 1.20. Sean M y N variedades diferenciables y $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable, diremos que un punto $p \in M$ es un **punto regular** de f , si Df_p es sobreyectiva y un punto $q \in N$ es un **valor regular** de f , si todo punto de $f^{-1}(q)$ es regular.

Es importante recalcar el hecho de que los puntos regulares forman parte del dominio, mientras que el conjunto de los valores regulares es un subconjunto del contradominio.

Otro hecho importante es que si $q \in N$ es tal que $f^{-1}(q) = \emptyset$, entonces de manera trivial se cumple que q es un valor regular.

Con todo esto podemos enunciar y probar uno de los teoremas más importantes, el cual usaremos varias veces a lo largo de la obra.

Teorema 1.21 (de la preimagen). *Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente y sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable. Si q es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad diferenciable de M con dimensión igual a $m - n$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in f^{-1}(q)$. Como q es un valor regular de f , se tiene que Df_p es sobreyectiva, así por el Teorema 1.19, existen cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ tales que $\phi(p) = \mathbf{0}, \psi(q) = \mathbf{0}$ y $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

Ahora sea $z \in U \cap f^{-1}(q)$, tenemos que $f(z) = q$ es equivalente a $\phi(z) = (0, 0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_m)$, por lo tanto $f^{-1}(q) \cap U = \phi^{-1}(\{\mathbf{0}\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$.

Denotaremos por $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ a la proyección sobre las últimas $m - n$ coordenadas y definimos $\Phi = h \circ \phi|_{f^{-1}(q) \cap U}$.

Sea $j: \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \{\mathbf{0}\}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^n$ la inyección natural y de esta forma tenemos que $\Phi^{-1} = \phi^{-1} \circ j$.

$$\begin{array}{ccc}
 U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
 U' & & V' \\
 \uparrow j & \left(\right) & \downarrow h \\
 \mathbb{R}^{m-n} & &
 \end{array}$$

□

Para terminar esta sección, tenemos algunas definiciones que nos permitirán hablar del comportamiento de ciertas funciones diferenciables.

Definición 1.22. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, diremos que f es un **encaje** si $f(M) \subset N$ es una subvariedad diferenciable y $f: M \rightarrow f(M)$ es un difeomorfismo.

Definición 1.23. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, diremos que f es una **función propia** si la preimagen de cualquier subconjunto compacto de N , es un subconjunto compacto de M .

A continuación enunciaremos dos proposiciones que usaremos más adelante, las pruebas de estos resultados pueden encontrarse en [5, Teo. 5.7] y [13, Cap. 1 Sec. 3].

Proposición 1.24. *Sean M, N variedades diferenciables y $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si f es una inmersión inyectiva y también es una aplicación propia, entonces f es un encaje.*

Como una consecuencia se puede obtener la siguiente afirmación.

Proposición 1.25. *Sean M, N variedades diferenciables, $f: M \rightarrow N$ una inmersión inyectiva y $f: M \rightarrow f(M)$ un homeomorfismo, donde $f(M) \subset N$ tiene la topología inducida como subespacio; entonces f es un encaje.*

1.3. Transversalidad

Antes de comenzar con las nociones básicas acerca de la transversalidad, enunciaremos y probaremos un lema que nos será útil más adelante.

Lema 1.26. *Sea N una subvariedad diferenciable de M de codimensión k . Si $x \in N$, entonces existen funciones g_1, g_2, \dots, g_k definidas en un abierto U de M tal que $x \in U$ y $U \cap N$ es el conjunto donde las funciones se hacen cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $i: N \rightarrow M$ la inclusión canónica.

Si $x \in N$, entonces i es diferenciable en x y además $Di_x = i$, por lo que Di_x es inyectiva. Así por el Teorema 1.18, existen coordenadas locales alrededor de x e $i(x) = x$ tales que $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

De esta manera sólo bastará tomar como U al abierto dado por las coordenadas locales alrededor de x y por $g_l = p_l(i(x_1, \dots, x_n))$, donde p_l es la proyección sobre la l -ésima coordenada con $l \in \{n+1, \dots, m\}$. \square

Definición 1.27. Sean M y N variedades diferenciables, $Z \subset N$ subvariedad diferenciable de N y $f: M \rightarrow N$ diferenciable. Diremos que f es **transversal** a Z si:

$$Df_x(T_x M) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} N, \quad \text{para toda } x \in f^{-1}(Z). \quad (1.1)$$

Si f es transversal a Z lo denotaremos por $f \pitchfork Z$.

El concepto de transversalidad es sumamente importante en topología diferencial y existe toda una teoría desarrollada que gira en torno de este concepto. Nosotros sólo probaremos el siguiente resultado, el cual usaremos muchas veces a lo largo de esta obra.

Teorema 1.28. Sean M y N variedades diferenciables y $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable. Si Z es una subvariedad diferenciable de N de codimensión k y f es transversal a Z , entonces $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad diferenciable de M de codimensión k .

DEMOSTRACIÓN. El hecho de probar que $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad diferenciable, es un problema local; esto es, deseamos ver que para cualquier $x \in f^{-1}(Z)$, existe un abierto W en M con $x \in W$ y tal que $W \cap f^{-1}(Z)$ es una variedad diferenciable.

De esta manera, sea $x \in f^{-1}(Z)$ y denotemos por $y = f(x)$. Por el Lema 1.26, existe un abierto V en N con $y \in V$ y tal que $V \cap Z$ es el conjunto donde se hacen cero g_1, \dots, g_k . Así, cerca de x , $f^{-1}(Z)$ es el conjunto donde se hacen cero las funciones $g_1 \circ f, \dots, g_k \circ f$.

Definimos a g como la submersión (g_1, \dots, g_k) , definida en V . Luego podemos considerar a $W = f^{-1}(V)$ y a $g \circ f: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ y de esta manera tenemos que

$$D(g \circ f)_x = Dg_y \circ Df_x. \quad (1.2)$$

Ahora deseamos probar que $\mathbf{0}$ es un valor regular de $g \circ f$, para poder usar los resultados obtenidos hasta ahora.

Notemos que $D(g \circ f)_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva si y sólo si Dg_y lleva la imagen de Df_x de manera sobreyectiva. Pero Dg_y es una transformación lineal con kernel $T_y Z$.

De esta manera sólo nos interesa probar que $Dg_y: Df_x(T_x M) + T_y Z \rightarrow \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva.

Finalmente por hipótesis tenemos que $Df_x(T_x M) + T_{f(x)} Z = T_y N$ y dado que $Dg_y: T_y N \rightarrow \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva, concluimos que $\mathbf{0}$ es un valor regular y por el Teorema 1.21, $(g \circ f)^{-1}(\mathbf{0})$ es una subvariedad de la codimensión deseada. \square

Una de las situaciones más importantes que surgen con el concepto de transversalidad, es la noción de transversalidad entre dos subvariedades diferenciables.

Definición 1.29. Sea L una variedad diferenciable y N y M subvariedades diferenciables de L . Diremos que N es **transversal** a M cuando la inclusión $i: N \rightarrow L$ sea transversal a M , cuando esto suceda lo denotaremos por $N \bar{\cap} M$.

A raíz de esta definición, tenemos un corolario muy importante, el cual usaremos varias veces a lo largo de la obra.

Corolario 1.30. Sean L una variedad diferenciable y N y M subvariedades diferenciables de L de dimensión l, n, m respectivamente. Si N es transversal a M , entonces la intersección es una variedad diferenciable. Además la codimensión de la intersección $N \cap M$ será la suma de las codimensiones de N y M .

DEMOSTRACIÓN. Dado que N es transversal a M , tenemos que la inclusión $i: N \rightarrow L$ es transversal a M . De esta manera por el Teorema 1.28, tenemos que $i^{-1}(M) = M \cap N$ es una subvariedad de N .

Ahora, si denotamos por s a la codimensión de $M \cap N$ con respecto a N , por t a la dimensión de $M \cap N$ y a r a la codimensión de N con respecto a L , entonces por el Teorema 1.28 tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} s + t &= n \\ r + n &= l \text{ por que } N \pitchfork M, \end{aligned}$$

$$(s + t) + r = l$$

De ahí que la codimensión de $M \cap N$ sea la suma de las codimensiones.

□

1.4. Haces vectoriales

Mediante la construcción del espacio tangente se asocia a cada punto de una variedad un espacio vectorial. En general, en topología diferencial y en topología sucede a menudo que se asocia un espacio vectorial a cada punto de una variedad o de un espacio topológico, de tal modo que no se tiene un único espacio vectorial, sino todo un haz de espacios vectoriales.

Una de las razones para trabajar con los haces vectoriales, es la necesidad de poder definir la diferencial de una función entre variedades diferenciables global, ya que hasta ahora, como podemos ver en 1.3; se definió de manera puntual.

Definición 1.31. Un **haz vectorial** diferencial de rango n sobre una variedad diferenciable M , es una terna (E, π, M) donde:

1. M lo llamaremos el **espacio base**,
2. E es una variedad diferenciable a la cual llamaremos el **espacio total**,
3. $\pi: E \rightarrow M$, llamada la **proyección** del haz vectorial, es una aplicación diferenciable sobreyectiva.

4. Cada $E_x = \pi^{-1}(x)$ es llamada la **fibra** sobre x y está provista de una estructura de espacio vectorial real n -dimensional, de forma que se cumple el **Axioma de trivialidad local**: Cada punto de M tiene un entorno U para el que existe un difeomorfismo

$$f: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & \nearrow p_1 & \\ U & & \end{array} \quad (1.3)$$

con $p_1: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ la proyección en la primera coordenada.

De esta forma para cada $x \in U$

$$f_x = f|_{E_x}: E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Usualmente en lugar de (E, π, M) se escribirá abreviadamente E .

Definición 1.32. Un par (f, U) como en el axioma de trivialidad local se llama **carta de haz**. Un haz vectorial sobre M se llama **trivial** si posee una carta de haz (f, M) .

Un ejemplo importante de un haz trivial asociado a una variedad diferenciable es el siguiente.

Ejemplo 1.33. Sea M una variedad diferenciable y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi: M \times \mathbb{R}^n &\rightarrow M \\ (x, \mathbf{y}) &\rightarrow x \end{aligned}$$

De esta manera tenemos un haz vectorial, al cual denominaremos como **haz producto**.

Definición 1.34. Sean E y E' haces vectoriales sobre M . Una aplicación continua $\phi: E \rightarrow E'$ se llama **homomorfismo de haces vectoriales** si el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

es conmutativo y cada $\phi_x: E_x \rightarrow E'_x$ es lineal.

Podemos restringir nuestra atención a subconjuntos del espacio base y del espacio total, de esta forma obtenemos los siguientes conceptos.

Definición 1.35. Sea E un haz vectorial de rango n sobre M y sea $E' \subset E$ un subconjunto, de forma que alrededor de cada punto de M existe una carta (f, U) con $f(\pi^{-1}(U) \cap E') = U \times \mathbb{R}^k \subset U \times \mathbb{R}^n$.

Entonces $(E', \pi|_{E'}, M)$ es de forma canónica un haz vectorial sobre M y se denomina **subhaz** de rango k de E .

Definición 1.36. Por **sección** de un haz vectorial (E, π, M) se entiende una aplicación diferenciable $\sigma: M \rightarrow E$ tal que para todo $x \in M$, $\sigma(x) \in E_x$, es decir, $\pi \circ \sigma = Id_M$. Cada haz vectorial tiene, por ejemplo, una **sección cero**

$$M \rightarrow E$$

$$x \rightarrow \mathbf{0} \in E_x.$$

Uno de los ejemplos más significativos de haces vectoriales es el haz tangente de una variedad diferenciable, el cual nos permitirá resolver el problema de poder definir la diferencial de una función de manera global.

Definición 1.37. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Definimos el **haz tangente** de M , denotado por TM , como

$$TM = \{ (x, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid v \in T_x M \},$$

donde $T_x M$ es el espacio tangente a M en x .

Definición 1.38. Sea M una variedad diferenciable. Se entiende por **campo vectorial** en M a una sección del haz tangente.

Una vez que hemos visto el haz tangente TM de una variedad diferenciable M , también podemos definir el haz normal de M como sigue.

Definición 1.39. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Definimos el **haz normal** de M , denotado por NM , como

$$NM = \{ (x, v) \in M \times \mathbb{R}^m \mid v \in N_x M \},$$

donde $N_x M$ es el complemento ortogonal de $T_x M$ en \mathbb{R}^m .

Definición 1.40. Si E y E' son haces vectoriales sobre M y M' respectivamente, y si $f: M \rightarrow M'$ es diferenciable, entonces una aplicación diferenciable $\phi: E \rightarrow E'$ se llama un **morfismo de haces vectoriales** sobre f , si ϕ aplica cada fibra E_x linealmente sobre la fibra $E'_{f(x)}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Una vez que tenemos los conceptos necesarios podemos atacar al problema inicial de la siguiente forma.

Definición 1.41. Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable, $x \in M$ y consideremos la diferencial de f en x ,

$$D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

con esto definimos la **diferencial de f** como el morfismo de haces

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

dado por $Df(x, v) = (f(x), Df_x(v))$.

1.5. Grupos de Lie, acciones de grupo y flujos

Los grupos de Lie y las acciones de grupos juegan un papel fundamental en los haces fibrados. Primero estudiaremos cómo se relacionan con las variedades diferenciables antes de pasar con los haces fibrados.

Definición 1.42. Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable, la cual posee una estructura de grupo y donde las operaciones de grupo

1.

$$*: G \times G \rightarrow G,$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$$

2.

$$\begin{aligned} &^{-1}: G \rightarrow G, \\ &g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son diferenciables.

A continuación tenemos los siguientes ejemplos de grupos de Lie tomados de [19, Cap. 5 Sec. 6].

Ejemplo 1.43. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ es un grupo de Lie con respecto a la multiplicación.

Ejemplo 1.44. Sea \mathbb{S}^1 la circunferencia unitaria en el plano complejo, esto es

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Las operaciones de grupo definidas por $e^{i\theta} * e^{i\phi} = e^{i\lambda}$ con $\lambda \equiv \theta + \phi \pmod{2\pi}$ y $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\lambda}$ con $-\lambda \equiv \theta \pmod{2\pi}$ son ambas diferenciables. De esta manera \mathbb{S}^1 es un grupo de Lie.

Definición 1.45. Sean G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Una **acción** de G en M es una aplicación diferenciable $\sigma: G \times M \rightarrow M$ la cual satisface

1. $\sigma(e, x) = x$ para cualquier $x \in M$ y con $e \in G$ el elemento neutro de G .
2. $\sigma(g_1, \sigma(g_2, x)) = \sigma(g_1 * g_2, x)$ para $g_1, g_2 \in G$ y $x \in M$.

Como vimos en la sección anterior, dada una variedad diferenciable M , es posible ver a un campo vectorial X como una sección del haz tangente. Lo que ahora nos interesa es el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciables que se generan a partir de ese proceso, para esto necesitaremos de los siguientes conceptos.

Definición 1.46. Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable

$$\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

es llamada **flujo** en M , si para toda $x \in M$ y $t, s \in \mathbb{R}$ tenemos que

1. $\Phi(0, x) = x$
2. $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$,

es decir, Φ es un flujo si es una acción de \mathbb{R} en M , donde \mathbb{R} lo consideramos como un grupo aditivo.

Ahora podemos ver a un flujo Φ de dos maneras.

Subgrupos a un parámetro

Si definimos

$$\begin{aligned}\Phi_t: M &\rightarrow M \\ \Phi_t(x) &= \Phi(t, x)\end{aligned}$$

entonces Φ puede verse como una familia de aplicaciones $M \rightarrow M$ parametrizadas por \mathbb{R} . Entonces desde este punto de vista 1 y 2 se traducen en

1. $\Phi_0 = I_M$, con I_M la identidad en M
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

Estas dos condiciones vistas así son equivalentes a tener un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}(M) \\ t &\mapsto \Phi_t\end{aligned}$$

donde $\text{Diff}(M)$ es el conjunto de todos los difeomorfismos de M a sí mismo. Por esta razón, los flujos también son llamados **subgrupos de difeomorfismos a un parámetro**.

Líneas de flujo

Podemos considerar a un flujo $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como una familia de curvas $\mathbb{R} \rightarrow M$ parametrizadas por M . De forma que tenemos de manera natural el siguiente concepto.

Definición 1.47. Si $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ es un flujo y $x \in M$, entonces la curva

$$\begin{aligned}\alpha_x: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi(t, x)\end{aligned}$$

es llamada **la línea de flujo** o **curva integral** de x . La imagen $\alpha_x(\mathbb{R})$ es llamada la **órbita** de x .

Definición 1.48. Si Φ es un flujo en M , entonces el campo vectorial

$$\begin{aligned}v: M &\rightarrow TM \\ x &\mapsto \alpha'_x(0)\end{aligned}$$

es llamado el **campo de velocidades** del flujo.

Un ejemplo de estos conceptos es el siguiente.

Ejemplo 1.49. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos el flujo dado por

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).\end{aligned}$$

De esta forma para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ obtenemos las siguientes líneas de flujo

$$\begin{aligned}\alpha_x: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).\end{aligned}$$

De esta forma el campo de velocidades del flujo está determinado por

$$\begin{aligned}v: \mathbb{R}^2 &\rightarrow T\mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-y, x).\end{aligned}$$

Es importante notar que la órbita de algún $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una circunferencia centrada en el origen, que se recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj y si $(x, y) = \mathbf{0}$, entonces el flujo se mantiene constante en el origen.

Definición 1.50. Sea M una variedad diferenciable, un **flujo local** Φ en M es una aplicación diferenciable $\Phi: A \rightarrow M$ de un subconjunto abierto $A \subset \mathbb{R} \times M$ que contiene a $\{0\} \times M$, en M , tal que para cada $x \in M$ la intersección $A \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ es conexa y tal que

1. $\Phi(0, x) = x$
2. $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$

para toda $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in M$, para los cuales ambos miembros estén definidos.

De esta manera tenemos el siguiente teorema, el cual puede ser visto con mayor detalle en [24, Teo. 1.51].

Teorema 1.51. *Todo campo vectorial es el campo de velocidades de exactamente un flujo local.*

Una forma muy útil de construir campos vectoriales en una variedad diferenciable es construyendo campos vectoriales en cada vecindad de coordenadas y después pegándolos mediante las cartas para formar un campo vectorial sobre toda la variedad, para lograr esto necesitamos introducir un nuevo concepto que será muy útil más adelante.

Definición 1.52. Sea M una variedad diferenciable. Una familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de funciones diferenciables

$$\tau_\alpha: M \rightarrow [0, 1]$$

se llama **partición de la unidad** si cada punto de M tiene un entorno en el que un número finito de τ_α son distintas de cero y para todo $x \in M$ se cumple

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \tau_\alpha(x) = 1.$$

Definición 1.53. Una partición de la unidad se dice **subordinada** a una cubierta de M si para todo α el **soporte** de τ_α (esto es, $\text{Sop } \tau_\alpha = \{x \in M \mid \tau_\alpha(x) \neq 0\}$) está contenido en uno de los conjuntos de la cubierta.

Proposición 1.54 ([5, Teo. 7.3]). *Por cada cubierta abierta de una variedad diferenciable existe una partición subordinada de la unidad.*

1.6. Haces fibrados

Los haces vectoriales constituyen una herramienta muy útil en la descripción de un gran número de objetos y de varios fenómenos en física, pero ellos sólo forman parte de una familia más grande que es la que nos interesa estudiar, los haces fibrados.

Definición 1.55. Un **haz fibrado** (E, π, M, F) consiste de los siguientes elementos:

1. E, M y F son variedades diferenciables llamadas **espacio total**, **espacio base** y **fibra**, respectivamente.
2. $\pi: E \rightarrow M$ es una submersión sobreyectiva llamada la **proyección del haz**. La imagen inversa $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$ se le llamará la **fibra en p** .
3. Una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M con difeomorfismos $\phi_i: U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. La función ϕ_i es llamada **trivialización local**.

Ejemplo 1.56. El haz producto dado en el Ejemplo 1.33 es un ejemplo de un haz fibrado.

Ejemplo 1.57. Identificamos \mathbb{R}^4 con \mathbb{C}^2 y \mathbb{R}^3 con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (z_0 = x_1 + ix_2, z_1 = x_3 + ix_4), \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (z = x_1 + ix_2, x_3) \text{ con } x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^3 &= \{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \}, \\ \mathbb{S}^2 &= \{ (z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1 \}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (z_0, z_1) &\mapsto (2z_0\bar{z}_1, |z_0|^2 - |z_1|^2).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}2z_0\bar{z}_1 \cdot 2\bar{z}_0z_1 + (|z_0|^2 - |z_1|^2)^2 \\ = 4|z_0|^2|z_1|^2 + |z_0|^4 - 2|z_0|^2|z_1|^2 + |z_1|^4 \\ = (|z_0|^2 + |z_1|^2)^2 = 1,\end{aligned}$$

por lo que la función π está bien definida.

Si suponemos que existen dos puntos $(z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}^2$ tales que $\pi(z_0, z_1) = \pi(w_0, w_1)$ y todos distintos de cero, entonces por una parte tenemos que

$$z_0 = \lambda_0 w_0 \quad \text{y} \quad z_1 = \lambda_1 w_1,$$

para algunos $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ y por otra parte

$$\begin{aligned}z_0\bar{z}_1 &= w_0\bar{w}_1 \\ \lambda_0 w_0 \overline{\lambda_1 w_1} &= w_0\bar{w}_1 \\ \lambda_0 \bar{\lambda}_1 &= 1 \\ \lambda_0 &= \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|^2}.\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}|w_0|^2 - |w_1|^2 &= |z_0|^2 - |z_1|^2 \\ |w_0|^2 - |w_1|^2 &= |\lambda_0 w_0|^2 - |\lambda_1 w_1|^2 \\ |w_0|^2 - |w_1|^2 &= \left| \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|^2} \right|^2 |w_0|^2 - |\lambda_1|^2 |w_1|^2 \\ |w_0|^2 - |w_1|^2 &= |w_0|^2 - |\lambda_1|^2 |w_1|^2 \\ |w_1|^2 &= |\lambda_1|^2 |w_1|^2 \\ 1 &= |\lambda_1|^2,\end{aligned}$$

así $\lambda_0 = \lambda_1$ y $|\lambda_1|^2 = 1$.

Por lo tanto si, $\pi(z_0, z_1) = \pi(w_0, w_1)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tal que $w_0 = \lambda z_0$ y $w_1 = \lambda z_1$. De manera inmediata, se puede ver que el recíproco también se cumple.

Se sigue que para cualquier punto $(z, x) \in \mathbb{S}^2$ su imagen inversa $\pi^{-1}(z, x)$ es una copia de \mathbb{S}^1 . Así la esfera \mathbb{S}^3 se puede ver como una unión disjunta de fibras circulares.

Lo que hemos probado es que la función dada por (1.4) es en realidad un haz fibrado, el cual es conocido como el **haz de Hopf**.

Definición 1.58. Si (E, π, M, F) es un haz fibrado y M_0 una subvariedad de M , entonces $(\pi^{-1}(M_0), \pi|_{\pi^{-1}(M_0)}, M_0, F)$ es un haz fibrado sobre M_0 que se designa por E_{M_0} y se denomina **restricción** de E sobre M_0 .

Observación 1.59. Notemos que ϕ_i es un isomorfismo de haces entre el haz restricción $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ y el haz trivial $U_i \times F \rightarrow U_i$.

También se pueden inducir nuevos haces fibrados a partir de uno dado. Por ejemplo: dado E un haz fibrado sobre N y una función diferenciable $f: M \rightarrow N$,

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow \pi & \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Se construye el haz inducido f^*E sobre M asociando a cada $x \in M$ la fibra $E_{f(x)}$. Este proceso puede describirse así:

Definición 1.60. Sea (E, π, N, F) un haz fibrado sobre N y $f: M \rightarrow N$ diferenciable. Podemos definir un haz fibrado $(f^*E, f^*\pi, M, F)$ que se llama **haz fibrado inducido** por f tal que $f^*E = \{(x, e) \mid \pi(e) = f(x)\} \subset M \times E$. Este espacio se llama también **producto fibrado** de f y π .

Definición 1.61. Si E y E' son haces fibrados sobre M y M' respectivamente, y si $f: M \rightarrow M'$ es diferenciable, entonces una aplicación diferenciable $\phi: E \rightarrow E'$ se llama un **morfismo de haces fibrados** sobre f , si ϕ aplica cada fibra E_x de manera sobreyectiva, a la fibra $E'_{f(x)}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Definición 1.62. Si E y E' son haces fibrados sobre M y M' respectivamente, diremos que estos haces son **isomorfos** si existe un difeomorfismo $f: M \rightarrow M'$ y un morfismo de haces fibrados ϕ , donde ϕ es un difeomorfismo.

A continuación probaremos el teorema de fibración de Ehresmann, el cual usaremos más adelante.

Teorema 1.63. Sean M y N variedades diferenciables de dimensión $n + k$ y n respectivamente. Si $f: M \rightarrow N$ es una submersión propia, entonces f es un haz fibrado.

DEMOSTRACIÓN. Como f es una submersión, por el Teorema 1.21, para toda $p \in N$ tenemos que $f^{-1}(p)$ es una subvariedad diferenciable de M .

Tenemos que demostrar que si $p \in N$ y $F = f^{-1}(p)$ es la fibra de p , entonces existe una vecindad U de p en N y un difeomorfismo

$$\phi: U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & f^{-1}(U) \\ \downarrow p_1 & \nearrow f|_{f^{-1}(U)} & \\ U & & \end{array}$$

La afirmación es local relativa a N , por lo que podemos reemplazar a M , N y f por $f^{-1}(U)$, U y $f|_{f^{-1}(U)}$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad supongamos que $p = \mathbf{0}$ y $U = \mathbb{B}^n$, un disco abierto en \mathbb{R}^n centrado en el origen. En este caso tenemos los campos vectoriales básicos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y deseamos levantarlos a M obteniendo campos vectoriales v_1, \dots, v_n en M tales que para todo $x \in M$

$$Df_x(v_i(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

Para esto sea $x \in M$ y por el Teorema 1.19 existe una carta V_α de x tal que esta dada por

$$f(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Definimos $\bar{v}_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{n+k}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, por la misma definición de este campo vectorial se sigue que $Df_x(\bar{v}_{i,\alpha}(x_1, \dots, x_{n+k})) = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

De esta manera podemos cubrir a $f^{-1}(U)$ con estas cartas y luego escogeremos una partición de la unidad subordinada a esta cubierta, de esta manera podemos pegar

todos los campos vectoriales para obtener campos $v_i, i \in \{1, \dots, n\}$ que satisfacen (1.5).

Por el Teorema 1.51, los campos vectoriales v_i determinan flujos Φ^i en $f^{-1}(U)$. Así, definimos

$$\begin{aligned} \phi: U \times F &\rightarrow f^{-1}(U) \\ (u, x) &\mapsto \Phi_{u_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{u_n}^n(x). \end{aligned}$$

para $x \in F$ y $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{B}^n$.

Ahora notemos que dado que los flujos quedan determinados por (1.5), entonces tenemos que

$$f \circ \Phi_{u_i}^i(x) = f \circ \Phi_0^i(x) + u_i e_i$$

donde $e_i \in \mathbb{B}^n$ es el i -ésimo vector unitario.

Por lo tanto tenemos que

$$u = \pi_1(u, x) = f \circ \phi(u, x).$$

Finalmente tenemos que los flujos siempre existen dado que el conjunto

$$f^{-1}\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq k\}$$

es compacto, debido a que f es una función propia.

La inversa queda determinada por

$$\phi^{-1}: f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

definiendo $f(y) = u$ y

$$\phi^{-1}(y) = (u, \Phi_{-u_n}^n \circ \dots \circ \Phi_{-u_1}^1(y)).$$

□

1.7. Nociones básicas de geometría algebraica

La geometría algebraica constituye un campo altamente desarrollado, en el cual es necesario conocer varios conceptos de topología y de álgebra conmutativa para poder comprender las primeras definiciones. En esta sección nos restringiremos a definir exclusivamente lo que será necesario más adelante y se especificará donde se podrán encontrar las pruebas de los teoremas que se enuncien, ya que dichas pruebas no se relacionan con este trabajo.

Definición 1.64. Un subconjunto $V \subset \mathbb{F}^n$ es un **conjunto algebraico** si V es el cero común de alguna colección de funciones polinomiales de \mathbb{F}^n .

Definición 1.65. Un subconjunto $V \subset \mathbb{F}^n$ es una **hipersuperficie** si V es el conjunto donde se hace cero una función polinomial de \mathbb{F}^n .

El anillo de todas las funciones polinomiales de \mathbb{F}^n a \mathbb{F} lo denotaremos por $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Así mismo expresaremos por $I(V)$ al ideal consistente de todos los polinomios que se anulan en V .

A continuación enunciaremos el teorema de la base de Hilbert, cuya prueba se puede ver en [12].

Teorema 1.66 (Base de Hilbert). *Si $I \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal, entonces I es finitamente generado.*

De esta manera, tenemos que cualquier conjunto algebraico puede ser generado por una cantidad finita de ecuaciones polinomiales.

Una consecuencia importante del teorema de Hilbert, es la condición de la cadena descendente.

Corolario 1.67. *Toda cadena anidada de conjuntos algebraicos $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ debe terminar o estabilizarse ($V_i = V_{i+1} = \dots$) después de un número finito de pasos.*

Definición 1.68. Diremos que un conjunto algebraico V es **irreducible o variedad** si no puede ser expresado por la unión de dos conjuntos algebraicos propios.

De manera inmediata tenemos que V es irreducible si y sólo si $I(V)$ es un ideal primo.

Definición 1.69. Si V es un conjunto algebraico irreducible, entonces el grado de trascendencia del campo de funciones cociente $\frac{f}{g}$ con f y g en el dominio entero

$$\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

es llamado la **dimension** de V sobre \mathbb{F} .

Un resultado importante, que puede ser consultado en [16, p. 29] es el siguiente

Proposición 1.70. *Si W es una subvariedad propia de V , entonces la dimensión de W es menor que la de V .*

Consideremos un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{F}^n$ no vacío. Sabemos que existen una cantidad finita de polinomios $\{f_1, \dots, f_k\}$ que generan al ideal $I(V)$ y para cada $\mathbf{x} \in V$, consideremos la $k \times n$ matriz de derivadas parciales evaluadas en \mathbf{x} . Sea ρ el rango más grande que la matriz alcanza en V .

Definición 1.71. Un punto $\mathbf{x} \in V$ es llamado **simple** si la matriz de derivadas parciales tiene rango ρ en \mathbf{x} , en otro caso diremos que \mathbf{x} es un punto **singular**.

Denotaremos por $\Sigma(V)$ como el conjunto (posiblemente vacío) de puntos singulares de V .

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [18, Cap. 2].

Teorema 1.72 (Whitney). *Sea $V \subset \mathbb{F}^n$ un conjunto algebraico, entonces el conjunto $V \setminus \Sigma(V)$ es una variedad diferenciable (real o compleja, según sea el caso) no vacía de dimensión $n - \rho$ sobre \mathbb{F} .*

A continuación consideremos el conjunto $M_1 = V - \Sigma(V)$, con $V \subset \mathbb{F}^n$ un conjunto algebraico y g un polinomio sobre \mathbb{F}^n .

Proposición 1.73. *El conjunto de puntos críticos de la restricción $g|_{M_1} : M_1 \rightarrow \mathbb{F}$ es igual a $M_1 \cap W$, donde*

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \leq \rho \right\}$$

y f_1, \dots, f_k son los generadores de $I(V)$.

Corolario 1.74. *Si f es una función polinomial definida en M_1 , entonces f tiene a lo más una cantidad finita de valores críticos.*

1.7.1. Lema de Selección de Curva

En esta sección enunciaremos y probaremos un lema que utilizaremos varias veces más adelante.

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto real algebraico y sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto definido por una cantidad finita de desigualdades polinomiales, esto es

$$U = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) > 0, i \in \{1, \dots, l\} \}.$$

Lema 1.75 (Selección de curva). *Si $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V}$, entonces existe una curva real analítica*

$$p: [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

con $p(0) = \mathbf{0}$ y $p(t) \in U \cap V$ para $0 < t < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la dimensión de V es mayor o igual que 2. Debeamos construir un subconjunto propio $V_1 \subset V$ tal que $\mathbf{0} \in \overline{V_1 \cap U}$, iterando esta construcción obtendremos una cadena anidada de subconjuntos algebraicos propios, la cual sabemos por el Corolario 1.67 deberá estabilizarse y afirmamos que el último subconjunto algebraico V_q tendrá dimensión igual o menor que 1 y $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V_q}$.

Supongamos que V es irreducible, en caso de que V sea la unión de dos conjuntos algebraicos propios, tomaremos a V_1 como uno de ellos. De igual forma asumiremos que existe algún $\eta > 0$ tal que $\mathbb{B}_\eta^n \cap U \cap \Sigma(V) = \emptyset$, en caso contrario escogeremos $V_1 = \Sigma(V)$.

Sea $\{f_1, \dots, f_k\}$ el conjunto generador del ideal de V y nos auxiliaremos de las funciones:

$$r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \text{ y } g(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) \cdot g_2(\mathbf{x}) \cdot \dots \cdot g_l(\mathbf{x}).$$

A continuación consideraremos el siguiente conjunto

$$V' = \{ \mathbf{x} \in V \mid \text{rango}\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dg_{\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\} \leq \rho + 1 \}.$$

donde ρ es como en la Definición 1.71.

De esta forma nos interesa probar

Lema 1.76. $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V'}$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V}$ entonces para algún ϵ suficientemente pequeño, $\mathbb{S}_\epsilon \cap U \cap V \neq \emptyset$

Ahora como V es cerrado y $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$ es cerrado y acotado, entonces tenemos que $V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$ es cerrado y acotado, por lo tanto compacto. De esta manera podemos definir el siguiente conjunto no vacío

$$W = \{ \mathbf{x} \in V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i \in \{1, \dots, l\} \}.$$

Claramente no es vacío dado que $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \cap U \cap V \subset W$. Ahora dado que W es también cerrado y por lo tanto compacto, la función g se debe maximizar en algún elemento de este conjunto, denotemos por \mathbf{x}' a este elemento y claramente $\mathbf{x}' \in U$.

Ahora sólo nos interesa probar que $\mathbf{x}' \in V'$.

Tenemos por la Proposición 1.73 y por el hecho que $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \cap U$ no contiene puntos singulares, para algún ϵ suficientemente pequeño; que el conjunto $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \cap U \cap V$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - \rho - 1$ y que

$$\text{rango}\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\} = \rho + 1.$$

Finalmente tenemos que el conjunto de los puntos críticos de $g|_{U \cap V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{n-1}}$ son aquellos puntos de $U \cap V \cap \mathbb{S}_\epsilon$ que también están en V' . Ahora como g alcanza su máximo en \mathbf{x}' , entonces éste tiene que ser un punto crítico y por lo tanto $\mathbf{x}' \in V'$. \square

Podemos llevar a cabo la misma construcción usando la función

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i g(x_1, \dots, x_m)$$

en lugar de la función g .

De igual forma podemos considerar al conjunto

$$V'_i = \{ \mathbf{x} \in V \mid \text{rango}\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, D(x_i g)_{\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\} \leq \rho + 1 \}.$$

Un argumento similar al anterior prueba que $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V'_i}$.

De esta manera obtenemos una cadena anidada de conjuntos algebraicos, la cual se estabilizará.

Proposición 1.77. *Si $V = V' = V'_1 = \dots = V'_m$, entonces la dimensión de V es 1.*

DEMOSTRACIÓN. Por la prueba del Lema 1.76, sabemos que podemos tomar $\mathbf{x}' \in U \cap V'$ tal que

$$\text{rango}\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\} = \rho + 1.$$

Si $V = V'$, entonces $\mathbf{x}' \in V'$ y como

$$V' = \{ \mathbf{x} \in V \mid \text{rango}\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dg_{\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\} \leq \rho + 1 \}.$$

entonces $Dg_{\mathbf{x}}$ pertenece al espacio lineal generado por $\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\}$.

De igual forma dado que $V = V'_i$, tenemos que $D(x_i g)_{\mathbf{x}}$ pertenece al mismo espacio vectorial. Ahora dado que $D(x_i g) = (Dx_i)g + x_i(Dg)$ y que $g(\mathbf{x}') \neq 0$, se sigue que $\frac{D(x_i g) - x_i(Dg)}{g(\mathbf{x}')} = Dx_i$, así Dx_i pertenece al espacio lineal generado por $\{Df_{1\mathbf{x}}, \dots, Df_{k\mathbf{x}}, Dr_{\mathbf{x}}\}$.

Como Dx_1, \dots, Dx_m forman una base para todo el espacio vectorial, no queda más que $\rho + 1 = m$, de ahí se sigue que la dimensión de V debe ser igual a 1. \square

A continuación usaremos la siguiente caracterización de las variedades diferenciables de dimensión 1.

Lema 1.78 (Ver [18, Lema 3.3]). *Sea x_0 un punto no aislado de una variedad V real (compleja) de dimensión 1. Entonces existe una vecindad de x_0 en V que es la unión finita de rayos, los cuales sólo se intersectan en x_0 . Cada rayo es homeomorfo a un intervalo abierto de números reales (o a un disco abierto de números complejos), vía el homeomorfismo $x = p(t)$, dado por la serie de potencias*

$$p(t) = x^0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$

la cual converge para $|t| < \epsilon$.

De esta manera estamos listos para finalizar la prueba del lema de selección de curva. Por el trabajo previo podemos suponer que V tiene dimensión 1 y por el Lema 1.78, uno de los rayos contenido en V que pasa a través del origen, debe contener puntos de U arbitrariamente cercanos a $\mathbf{0}$. Sea

$$x = p(t), |t| < \epsilon$$

la parametrización analítica de ese rayo.

Ahora por continuidad, tenemos que cada $g_i(p(t)) > 0$ para $0 < t < \epsilon'$ o $g_i(p(t)) \leq 0$ para $0 < t < \epsilon'$. Así la mitad del rayo $p(0, \epsilon')$ está totalmente contenido en U o es ajeno a U , lo mismo sucede con la otra mitad del rayo $p(-\epsilon', 0)$.

Finalmente, como hemos supuesto que $p(-\epsilon, \epsilon)$ contiene puntos de U arbitrariamente cercanos al origen, entonces alguna de esas mitades de rayo está totalmente contenida en U , para algún $0 < \epsilon' < \epsilon$. Así sólo bastará tomar a la mitad del rayo contenida en U como la curva deseada. \square

Como una aplicación del Lema de Selección de Curva tenemos el siguiente lema, el cual usaremos más adelante.

Lema 1.79. *Si $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ son dos funciones polinomiales las cuales se anulan en \mathbf{x}_0 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier \mathbf{x} en la vecindad $\overline{\mathbb{B}}_\epsilon^m$ de \mathbf{x}_0 , las diferenciales $Df(\mathbf{x})$, $Dg(\mathbf{x})$ no apuntan en direcciones opuestas.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos los siguientes conjuntos

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) < 0 \right\},$$

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \text{rango}\{Df(\mathbf{x}), Dg(\mathbf{x})\} \leq 1 \right\}.$$

De esta forma $U \cap V$ es el conjunto de todos los \mathbf{x} tales que $Df(\mathbf{x})$ y $Dg(\mathbf{x})$ apuntan en direcciones opuestas.

Si $U \cap V$ contiene puntos arbitrariamente cercanos a \mathbf{x}_0 y como V es un conjunto algebraico, entonces tenemos por el Lema 1.75 que existe una curva real analítica

$$p(t) = \mathbf{x}, \quad 0 \leq t < \epsilon,$$

con $p(0) = \mathbf{x}_0$.

Dado que para cualquier $\mathbf{x} \in U$ se tiene que $f(\mathbf{x}) > 0$ y $g(\mathbf{x}) > 0$, entonces si f se hiciera cero en \mathbf{x} entonces $Df(\mathbf{x})$ también sería cero, por lo que \mathbf{x} no puede estar en U . Por lo que

$$f(p(t)) > 0 \quad \text{para } t > 0,$$

y dado que $f \circ p$ es una función real analítica entonces $\frac{df(p(t))}{dt} > 0$ para valores de t suficientemente pequeños. Análogamente $\frac{dg(p(t))}{dt} > 0$ para valores de t suficientemente pequeños.

Ahora tenemos que

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{dp_i}{dt}, \quad \frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \frac{dp_i}{dt},$$

donde el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$ es un múltiplo negativo del vector $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m} \right)$ para toda $t > 0$. Esto quiere decir que $\frac{df(p(t))}{dt}$ y $\frac{dg(p(t))}{dt}$ tienen signos opuestos, lo cual es una contradicción.

Así no queda más que \mathbf{x}_0 no sea un punto límite de $U \cap V$ y así existe $\epsilon' > 0$ tal que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}_{\epsilon'} \subset \mathbb{R}^n \setminus (U \cap V)$. \square

Capítulo 2

Polinomios casi-homogéneos

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de los polinomios de Brieskorn-Pham, probaremos la existencia de algunas fibraciones asociadas a la singularidad y finalmente mencionaremos como se generalizan estos resultados para polinomios casi-homogéneos.

2.1. Polinomios de Brieskorn-Pham

Sea $f = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ un polinomio de Brieskorn-Pham, entonces f es una función diferenciable y su gradiente es

$$\nabla f(\mathbf{z}) = (a_1 z_1^{a_1-1}, \dots, a_n z_n^{a_n-1})$$

De esta manera $\nabla f(\mathbf{z}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, entonces el origen es el único punto crítico de f . Ahora por el Teorema 1.21 para todo $z \in \mathbb{C}^*$, $V_z = f^{-1}(z)$ es una variedad diferenciable. Además $V = f^{-1}(0)$ es una hipersuperficie con una singularidad aislada en $\mathbf{0}$.

Nos interesa conocer la estructura de V y de los V_z , para lo cual será necesario definir una acción para poder facilitar el desarrollo de las pruebas.

Proposición 2.1. *Sea $d = \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ y $p_i = \frac{d}{a_i}$, la siguiente función*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \lambda \bullet (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} z_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

es una acción.

DEMOSTRACIÓN. Sean $1 \in \mathbb{C}^*$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, de esta manera

$$1 \bullet (z_1, \dots, z_n) = (1^{p_1} z_1, \dots, 1^{p_n} z_n) = (z_1, \dots, z_n).$$

Ahora sean $\lambda, \tau \in \mathbb{C}^*$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, así

$$\begin{aligned} \lambda \bullet (\tau \bullet (z_1, \dots, z_n)) &= \lambda \bullet (\tau^{p_1} z_1, \dots, \tau^{p_n} z_n) \\ &= (\lambda^{p_1} \tau^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} \tau^{p_n} z_n) \\ &= ((\lambda\tau)^{p_1} z_1, \dots, (\lambda\tau)^{p_n} z_n) \\ &= (\lambda\tau) \bullet (z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

□

Notemos que tenemos la siguiente igualdad funcional

$$\begin{aligned} f(\lambda \bullet (z_1, \dots, z_n)) &= f(\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} z_n) \\ &= (\lambda^{p_1} z_1)^{a_1} + \dots + (\lambda^{p_n} z_n)^{a_n} \\ &= \lambda^d z_1^{a_1} + \dots + \lambda^d z_n^{a_n} \\ &= \lambda^d f(\mathbf{z}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Podemos obtener un flujo real determinado por la restricción de la acción definida en la Proposición 2.1 a los números reales positivos, \mathbb{R}^+ . Además para $t \in \mathbb{R}^+$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $t \bullet \mathbf{z} = (t^{p_1} z_1, \dots, t^{p_n} z_n)$ y como cada $p_i \in \mathbb{N}$, entonces cuando t tienda a 0, $t \bullet \mathbf{z}$ tiende a $\mathbf{0}$. De esta manera las orbitas de este flujo son arcos los cuales se acercan a $\mathbf{0}$ tanto como deseemos.

A continuación enunciaremos y probaremos dos lemas que serán necesarios más adelante.

Lema 2.2. *Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Entonces la función*

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|t \bullet \mathbf{z}\| \end{aligned}$$

es creciente.

DEMOSTRACIÓN. Por comodidad probaremos que la función

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|t \bullet \mathbf{z}\|^2 \end{aligned}$$

es creciente, de esta manera se seguirá de inmediato que g es creciente.

Derivando h con respecto a t , tenemos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= (\|(t^{p_1} z_1, \dots, t^{p_n} z_n)\|^2)' \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t^{2p_i} |z_i|^2 \right)' \\ &= \left(\sum_{i=1}^n 2p_i t^{2p_i-1} |z_i|^2 \right). \end{aligned}$$

Ahora, dado que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$

$$2p_i t^{2p_i-1} |z_i|^2 \geq 0,$$

si suponemos que existe un $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $h'(t_0) = 0$, entonces tendríamos que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$

$$2p_i t^{2p_i-1} |z_i|^2 = 0,$$

lo cual implicaría que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

De esta manera, para $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ no queda más que $h'(t) > 0$, por lo que $h(t)$ es creciente y así $g(t)$ también lo será. \square

Lema 2.3. *Si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces la función*

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{z}}: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto t \bullet \mathbf{z} \end{aligned}$$

es una inmersión inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero que $\alpha_{\mathbf{z}}$ es una inmersión, para lo cual consideremos la derivada de $\alpha_{\mathbf{z}}$

$$\alpha'_{\mathbf{z}}(t) = (p_1 t^{p_1-1} z_1, \dots, p_n t^{p_n-1} z_n).$$

Si $\alpha'_{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0}$, entonces tenemos que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. De esta manera, para $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha'_{\mathbf{z}}(t) \neq \mathbf{0}$ y así $\alpha_{\mathbf{z}}$ es una inmersión.

A continuación veremos que $\alpha_{\mathbf{z}}$ es inyectiva, para lo cual sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{z}}(t_0) &= \alpha_{\mathbf{z}}(t_1) \\ (t_0^{p_1} z_1, \dots, t_0^{p_n} z_n) &= (t_1^{p_1} z_1, \dots, t_1^{p_n} z_n). \end{aligned}$$

Así tenemos que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$

$$t_0^{p_i} z_i = t_1^{p_i} z_i$$

lo cual implica que para toda $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(t_0^{p_i} - t_1^{p_i}) z_i = 0$$

y como al menos existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z_j \neq 0$, entonces

$$(t_0^{p_j} - t_1^{p_j}) = 0$$

lo cual quiere decir que $t_0 = t_1$. Así $\alpha_{\mathbf{z}}$ es inyectiva.

De esta manera $\alpha_{\mathbf{z}}$ es una inmersión inyectiva. \square

Proposición 2.4. *Si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, entonces $\{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\} \bar{\cap} \mathbb{S}_\epsilon$.*

Tenemos que por el Lema 2.3 y por el Teorema 1.25, el conjunto $\{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ es una subvariedad diferenciable de \mathbb{C}^n .

Si pensamos un poco en la geometría del problema vemos que por el Lema 2.2, tenemos que h es una función estrictamente creciente, por lo que conforme t crece, entonces los rayos se alejan del origen de \mathbb{C}^n y de esta manera tendríamos que $\{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\} \bar{\cap} \mathbb{S}_\epsilon$.

A continuación damos una prueba formal de esta proposición.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{z} \in \{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\} \cap \mathbb{S}_\epsilon$. Supongamos que no son transversales, entonces por las dimensiones tenemos que $T_{\mathbf{z}}R \subset T_{\mathbf{z}}\mathbb{S}_\epsilon$, donde $R = \{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\}$. Entonces tenemos los siguientes casos

1. Existe una vecindad U de \mathbf{z} en \mathbb{S}_ϵ tal que un segmento de la curva R está contenido en este abierto. Entonces la norma de la curva deja de ser estrictamente creciente, pues existe un conjunto en el que es constante pero esto contradice el Lema 2.2.
2. La órbita es creciente hasta el punto \mathbf{z} y luego empieza a decrecer, una vez más esto contradice el Lema 2.2.

De cualquier forma obtenemos una contradicción y así $\{t \bullet \mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}^+\} \bar{\cap} \mathbb{S}_\epsilon$. \square

Ahora quisiéramos conocer un poco la forma de V , así que tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.5. Si $z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces $\lambda \bullet z \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Por (2.2) tenemos que $f(\lambda \bullet z) = \lambda^d f(z)$. Como $z \in V$ se tiene que $f(z) = 0$, por lo tanto $\lambda^d f(z) = 0$. Así $\lambda \bullet z \in V$. \square

De esta última propiedad se sigue que V es la unión de órbitas. Estas propiedades tienen varias consecuencias importantes, entre las primeras tenemos que:

Proposición 2.6. La variedad V interseca transversalmente a $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ y si denotamos por $K_\epsilon = V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$, entonces K_ϵ como subvariedad de $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ tiene codimensión real 2.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.5 tenemos que V es unión de órbitas y por la Proposición 2.4 cada una de esas órbitas es transversal a $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$, de esta manera $V \pitchfork \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Como la codimensión real de $V \setminus \{0\}$ es 2, se sigue que la codimensión de K_ϵ como subvariedad de la esfera es 2. \square

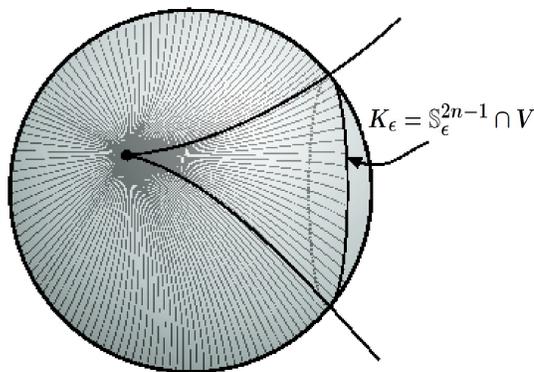


Figura 2.1: Estructura cónica.

Hasta ahora la aureola K_ϵ de la singularidad queda determinada por la esfera de radio ϵ , pero mostraremos que en realidad es independiente del tamaño de la esfera.

Proposición 2.7. Existe un difeomorfismo entre las parejas $(\mathbb{S}_1^{2n-1}, K_1)$ y $(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}, K_\epsilon)$.

DEMOSTRACIÓN. Definimos la siguiente función

$$\phi_\epsilon: \mathbb{S}_1^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$$

tal que si $z \in \mathbb{S}_1^{2n-1}$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $t \bullet z \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$, entonces $\phi_\epsilon(z) = t \bullet z$.

Por la Proposición 2.4, ϕ_ϵ está bien definida.

Dado que V es unión de orbitas por la Proposición 2.5, entonces ϕ_ϵ lleva a $K_1 = \mathbb{S}_1^{2n-1} \cap V$ de manera difeomorfa al conjunto $K_\epsilon = \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap V$.

De esta manera obtenemos un difeomorfismo entre las parejas deseadas. \square

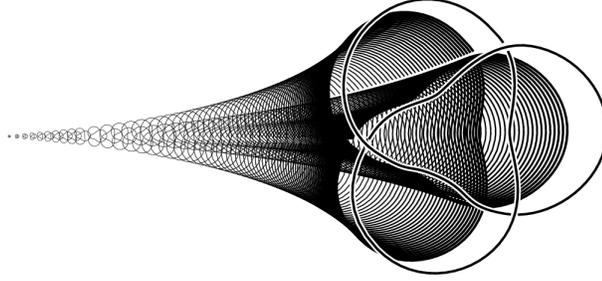


Figura 2.2: Ejemplo de la Proposición 2.7 para la curva $\{x^2 = y^3\}$.

Por la proposición anterior podemos denotar a K_ϵ por K para todo ϵ suficientemente pequeño, sin pérdida de generalidad; lo cual motiva el siguiente concepto.

Definición 2.8. Sea ϵ suficientemente pequeño. A la intersección $V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ le llamaremos la **aureola** del conjunto algebraico V y denotaremos esta intersección por K .

Por lo anterior tenemos que K es un invariante asociado a la singularidad.

Con todas estas propiedades ya estamos en condiciones de probar la existencia de tres fibraciones.

2.2. Fibraciones

En esta sección veremos unas propiedades de los polinomios de Brieskorn-Pham que serán necesarias más adelante, posteriormente probaremos la existencia de tres fibraciones asociadas a estos polinomios y al final mostraremos la equivalencia entre dos de ellas.

Análogamente a la prueba de la Proposición 2.4, podemos restringir la acción a la circunferencia unitaria y de esta manera obtenemos la siguiente igualdad

$$f(e^{i\theta} \bullet \mathbf{z}) = e^{id\theta} f(\mathbf{z}). \quad (2.3)$$

Así si tomamos $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, consideramos $w = f(\mathbf{z})$ y si lo multiplicamos por algún $e^{i\theta}$, entonces, por la anterior igualdad; se lleva la fibra $f^{-1}(w)$ sobre la fibra de $e^{i\theta}w$ y de esta manera obtenemos que las fibras sobre el círculo son difeomorfas. Otra propiedad importante y que usaremos más adelante es la siguiente.

Proposición 2.9. *Si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus V$, entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, el argumento de $f(t \bullet \mathbf{z})$ es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus V$ y $t \in \mathbb{R}^+$, nos interesa probar que

$$\frac{f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|} = \frac{f(t \bullet \mathbf{z})}{\|f(t \bullet \mathbf{z})\|}.$$

Como $f(t \bullet \mathbf{z}) = t^d f(\mathbf{z})$ y $t \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\|f(t \bullet \mathbf{z})\| = \|t^d f(\mathbf{z})\| = t^d \|f(\mathbf{z})\|.$$

De esta manera tenemos que

$$\frac{f(t \bullet \mathbf{z})}{\|f(t \bullet \mathbf{z})\|} = \frac{t^d f(\mathbf{z})}{t^d \|f(\mathbf{z})\|} = \frac{f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|}.$$

□

2.2.1. Fibración en el tubo

Antes de comenzar es necesario dar el concepto de los tubos de Milnor.

Definición 2.10. Sea $0 < \delta \ll \epsilon$. Denominaremos como **tubo de Milnor** a la variedad diferenciable $f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ y lo denotaremos por $N(\epsilon, \delta)$.

Por la ecuación tenemos que 0 es el único valor crítico de f , por lo que si $z \neq 0$, entonces $f^{-1}(z)$ es una variedad diferenciable. Por otro lado por la igualdad (2.3), para alguna constante $\delta > 0$ las variedades $f^{-1}(z)$ son difeomorfas, con $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = \delta$.

De esta manera podemos probar que la restricción

$$f: f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1) \rightarrow \mathbb{S}_\delta^1$$

es un haz fibrado.

Sea U un abierto de \mathbb{S}_δ^1 y $z_0 \in \mathbb{S}_\delta^1$ fijo, de forma que $f^{-1}(z_0)$ será la fibra.

Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned}\phi: U \times f^{-1}(z_0) &\rightarrow f^{-1}(U) \\ (z, \mathbf{w}) &\mapsto e^{\frac{i\theta \mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{w} \text{ donde } e^{i\theta \mathbf{z}} z_0 = z.\end{aligned}$$

Esta función ϕ , así como es descrita es diferenciable. Por otro lado, definimos la función

$$\begin{aligned}\phi^{-1}: f^{-1}(U) &\rightarrow U \times f^{-1}(z_0) \\ \mathbf{z} &\mapsto (f(\mathbf{z}), e^{\frac{-i\theta \mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{z}) \text{ donde } z_0 = e^{-i\theta \mathbf{z}} f(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que si $(z, \mathbf{w}) \in U \times f^{-1}(z_0)$, entonces

$$\phi^{-1}(\phi(z, \mathbf{w})) = \phi^{-1}(e^{\frac{i\theta \mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{w}) = (z, \mathbf{w}).$$

Además si $\mathbf{z} \in f^{-1}(U)$, entonces

$$\phi(\phi^{-1}(\mathbf{z})) = \phi(f(\mathbf{z}), e^{\frac{-i\theta \mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{z}) = \mathbf{z}.$$

Así hemos probado que se cumple el axioma de trivialidad local y por lo tanto tenemos un haz fibrado.

2.2.2. Fibración global

Ahora consideremos $f: \mathbb{C}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{C}^*$. Al igual que en la sección anterior nos interesa ver que esta aplicación es un haz fibrado.

Para esto sean $U = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ y $W = \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$ dos abiertos de \mathbb{C}^* tales que su unión cubre todo el espacio.

Sea $f^{-1}(1)$ la fibra y probaremos que existe un difeomorfismo entre $U \times f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(U)$.

Si $\mathbf{z} \in f^{-1}(U)$, entonces $f(\mathbf{z}) \in U$ y si lo consideramos en coordenadas polares, tenemos que $f(\mathbf{z}) = te^{i\theta}$ (notemos que $t \neq 0$ ya que de lo contrario $f(\mathbf{z}) = 0$, lo cual es una contradicción).

De esta manera definimos la siguiente función diferenciable

$$\begin{aligned}\phi: f^{-1}(U) &\rightarrow U \times f^{-1}(1) \\ \mathbf{z} &\mapsto (f(\mathbf{z}), \left(\frac{e^{-i\theta}}{t}\right)^{\frac{1}{d}} \bullet \mathbf{z})\end{aligned}$$

Ahora si $(z, \mathbf{w}) \in U \times f^{-1}(1)$, entonces definimos la siguiente función

$$\begin{aligned}\phi^{-1}: U \times f^{-1}(1) &\rightarrow f^{-1}(U) \\ (z, \mathbf{w}) &\mapsto z^{\frac{1}{d}} \bullet \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Se sigue fácilmente que ϕ y ϕ^{-1} son inversas y por lo tanto, tenemos el difeomorfismo deseado.

Para el caso de W las pruebas son exactamente las mismas, de esta manera hemos probado que se cumple el axioma de trivialidad local y de esta forma obtenemos una fibración.

2.2.3. Fibración en la esfera

Antes de comenzar enunciaremos y probaremos el siguiente lema.

Lema 2.11. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ y $e^{i\theta} \in \mathbb{S}_1^1$, entonces $\|e^{i\theta} \bullet \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ y $e^{i\theta} \in \mathbb{S}_1^1$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}\|e^{i\theta} \bullet \mathbf{z}\| &= \sum_{i=1}^n e^{i\theta} z_i \overline{e^{i\theta} z_i} \\ &= \sum_{i=1}^n e^{i\theta} e^{-i\theta} z_i \overline{z_i} \\ &= \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i} \\ &= \|\mathbf{z}\|\end{aligned}$$

□

Si consideramos la función

$$\Phi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_1^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}_1^1,$$

nos interesa ver que es un haz fibrado.

Para esto primero probaremos que Φ es una submersión, para lo cual notemos que si $\mathbf{z} \in (\mathbb{S}_1^{2n-1} \setminus K)$, entonces tenemos que $e^{i\theta} \bullet \mathbf{z} \in (\mathbb{S}_1^{2n-1} \setminus K)$.

Ahora consideremos la curva $p(t) = e^{it} \bullet \mathbf{z}$, así tenemos que:

$$\frac{d\Phi(p(t))}{dt} = \frac{d\left(\frac{e^{it}f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|}\right)}{dt} = ie^{it}\Phi(\mathbf{z}) \neq 0$$

Así Φ es una submersión.

Sean $z_0 \in \mathbb{S}_1^1$ y U un abierto en \mathbb{S}_1^1 tal que $z_0 \in U$, consideraremos a $\Phi^{-1}(z_0)$ como la fibra.

Si $\mathbf{z} \in \Phi^{-1}(U)$ y $e^{i\theta\mathbf{z}} \in \mathbb{S}_1^1$ tal que $e^{i\theta\mathbf{z}}\Phi(\mathbf{z}) = z_0$. Entonces por el Lema 2.11 $\Phi(e^{i\frac{\theta\mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{z}) = z_0$, por lo tanto podemos definir la función

$$\begin{aligned} \phi: \Phi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \Phi^{-1}(z_0) \\ \mathbf{z} &\mapsto (\Phi(\mathbf{z}), e^{i\frac{\theta\mathbf{z}}{d}} \bullet \mathbf{z}) \end{aligned}$$

la cual es diferenciable.

Por otra parte si $(z, \mathbf{w}) \in U \times \Phi^{-1}(z_0)$, entonces $\Phi(\mathbf{w}) = z_0$ y por lo tanto existe $e^{i\theta\mathbf{w}} \in \mathbb{S}_1^1$ tal que $\Phi(e^{i\theta\mathbf{w}} \bullet \mathbf{w}) = z$. Así podemos definir la función

$$\begin{aligned} \phi^{-1}: U \times \Phi^{-1}(z_0) &\rightarrow \Phi^{-1}(U) \\ (z, \mathbf{w}) &\mapsto e^{i\theta\mathbf{w}} \bullet \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Así obtenemos el difeomorfismo deseado y por lo tanto se cumple el axioma de trivialidad local.

Para finalizar esta sección probamos que la fibración del tubo y la fibración en la esfera son equivalentes.

Proposición 2.12. *La fibración $f: f^{-1}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ es equivalente a la fibración en la esfera $\phi = \frac{f}{|f|}: (\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^1$.*

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia queda determinada por el siguiente difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_\epsilon: f^{-1}(\mathbb{S}^1) &\rightarrow (\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon) \\ \mathbf{z} &\mapsto t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z} \end{aligned}$$

donde $t(\mathbf{z})$ es el único número positivo tal que $t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Proponemos como su inversa a la función

$$\psi_\epsilon^{-1}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{|f(\mathbf{z})|} \right)^{\frac{1}{d}} \bullet \mathbf{z}.$$

Para ver que esta ultima función es efectivamente su inversa, sea $\mathbf{z} \in f^{-1}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1})$ y notemos que

$$\psi_\epsilon^{-1} \circ \psi_\epsilon(\mathbf{z}) = \psi_\epsilon^{-1}(t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{t(\mathbf{z})^d |f(\mathbf{z})|} \right)^{\frac{1}{d}} \bullet t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

Por otra parte si tomamos $\mathbf{z} \in (\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon)$, tenemos que

$$\psi_\epsilon \circ \psi_\epsilon^{-1}(\mathbf{z}) = \psi_\epsilon \left(\left(\frac{1}{|f(\mathbf{z})|} \right)^{\frac{1}{d}} \bullet \mathbf{z} \right) = |f(\mathbf{z})|^{\frac{1}{d}} \bullet \left(\frac{1}{|f(\mathbf{z})|} \right)^{\frac{1}{d}} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

Así efectivamente ambas funciones son inversas una de la otra y por tanto las fibraciones son equivalentes. \square

2.3. Polinomios casi-homogéneos

A continuación definiremos una familia de funciones polinomiales, la cual generaliza a los polinomios de Brieskorn-Pham y que posee propiedades similares.

Definición 2.13. Sean p_1, \dots, p_n, d enteros positivos con $\text{mcd}(p_1, \dots, p_n) = 1$. Una función analítica $f(z_1, \dots, z_n)$ será llamada **casi-homogénea** de tipo $(p_1, \dots, p_n; d)$ si f satisface la identidad funcional

$$f(\lambda^{p_1} z_1, \dots, \lambda^{p_n} z_n) = \lambda^d f(\mathbf{z}) \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}^*. \quad (2.4)$$

Si consideramos la serie de Taylor $f(\mathbf{z}) = \sum_v b_v \mathbf{z}^v$, entonces la condición (2.4) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i = d \quad \text{para } v = (v_1, \dots, v_n), b_v \neq 0. \quad (2.5)$$

Como cada p_1, \dots, p_n, d son enteros positivos, entonces la ecuación anterior para los enteros positivos v_1, \dots, v_n tiene sólo un número finito de soluciones, así una función casi-homogénea es una función polinomial.

Podemos hacer uso de una acción como la de la Proposición 2.1 para obtener la siguiente igualdad funcional

$$f(\lambda \bullet \mathbf{z}) = \lambda^d f(\mathbf{z}). \quad (2.6)$$

De manera inmediata tenemos que los polinomios de Brieskorn-Pham son ejemplos de polinomios casi-homogéneos, otros ejemplos de esta familia de polinomios son los siguientes.

Ejemplo 2.14. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z_0, z_1, z_2) &\mapsto z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_1 z_2^{a_2} \quad \text{con } a_i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Queremos encontrar los valores que permiten que se de la identidad funcional (2.6). Si denotamos por (x_0, x_1, x_2) a estos valores, entonces tenemos que cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}x_0 a_0 &= x_1 a_1, \\x_0 a_0 &= x_1 + x_2 a_2, \\x_1 a_1 &= x_1 + x_2 a_2,\end{aligned}$$

de forma que tenemos un sistema de ecuaciones diofánticas.

Con un poco de manipulación algebraica tenemos que

$$\begin{aligned}x_0 &= a_1, \\x_1 &= a_0, \\x_2 a_2 &= a_0(a_1 - 1).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Para que las soluciones sean enteras basta multiplicar cada una de las ecuaciones dadas en (2.7) por a_2 , así tenemos que

$$\begin{aligned}x_0 &= a_2 a_1, \\x_1 &= a_2 a_0, \\x_2 &= a_0(a_1 - 1).\end{aligned}$$

Para asegurar que los pesos son primos relativos, sea $m = \text{mcd}(x_0, x_1, x_2)$, entonces basta tomar las siguientes soluciones

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{a_2 a_1}{m}, \\x_1 &= \frac{a_2 a_0}{m}, \\x_2 &= \frac{a_0(a_1 - 1)}{m}.\end{aligned}$$

De forma que la función $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_1 z_2^{a_2}$ es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(\frac{a_1 a_2}{m}, \frac{a_0 a_2}{m}, \frac{a_0(a_1-1)}{m}, \frac{a_1 a_2 a_0}{m})$.

En los siguientes ejemplos omitiremos los sistemas de ecuaciones que nos permiten encontrar el valor que necesita la acción dado que es análogo al ejemplo anterior.

Ejemplo 2.15. Algunos ejemplos son

1. La función $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} z_2 + z_2^{a_2} z_1$ es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(\frac{a_2 a_1 - 1}{m}, \frac{(a_2 - 1)a_0}{m}, \frac{(a_1 - 1)a_0}{m}, \frac{a_0(a_2 a_1 - 1)}{m})$, con $m = \text{mcd}(a_2 a_1 - 1, (a_2 - 1)a_0, (a_1 - 1)a_0)$.
2. La función $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} z_0 + z_2^{a_2} z_1$ es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(\frac{a_1 a_2}{m}, \frac{(a_0 - 1)a_2}{m}, \frac{a_0(a_1 - 1) + 1}{m}, \frac{a_1 a_2 a_0}{m})$, donde $m = \text{mcd}(a_1 a_2, (a_0 - 1)a_2, a_0(a_1 - 1) + 1)$.
3. La función $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^{a_0} z_1 + z_1^{a_1} z_2 + z_2^{a_2} z_0$ es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(\frac{1 + a_2(a_1 - 1)}{m}, \frac{1 + a_0(a_2 - 1)}{m}, \frac{1 + a_1(a_0 - 1)}{m}, \frac{a_0 a_1 a_2 + 1}{m})$, con $m = \text{mcd}(1 + a_2(a_1 - 1), 1 + a_0(a_2 - 1), 1 + a_1(a_0 - 1))$.
En este ejemplo es importante notar que si $m|(1 + a_2(a_1 - 1))$, entonces $m|a_0(1 + a_2(a_1 - 1))$ y como $m|(1 + a_0(a_2 - 1))$, entonces $m|(a_0(1 + a_2(a_1 - 1)) + (1 + a_0(a_2 - 1)))$ o bien que $m|(a_0 a_1 a_2 + 1)$, lo cual quiere decir que $\frac{a_0 a_1 a_2 + 1}{m} \in \mathbb{N}$.
4. La función $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^{a_0} + z_1 z_2$ es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(2, a_0, a_0, 2a_0)$ (ó $(1, \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2}, a_0)$ si a_0 es par).

En todos estos ejemplos $a_i \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1, 2\}$.

De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.16. *Si f es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(p_1, \dots, p_n; d)$, entonces*

1. (Identidad de Euler). *Tenemos la siguiente igualdad*

$$df(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n a_i z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}. \quad (2.8)$$

2. *Si $d \neq 0$, entonces el único posible valor crítico de f es 0.*
3. *Si $d \neq 0$, entonces $f: \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ es un haz fibrado.*
4. *Para cualquier $\epsilon > 0$, existe una fibración sobre la esfera dada por $\frac{f}{|f|}: \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$ y una fibración sobre el tubo $f: f^{-1}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ y ambas son equivalentes.*
5. *Supongamos que el origen es una singularidad aislada, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, la esfera $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ y la hipersuperficie $f^{-1}(0)$ se intersectan transversalmente.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Si consideremos la identidad funcional (2.6), tenemos que su derivada parcial respecto a λ es

$$d\lambda^{d-1}f(\mathbf{z}) = \nabla f(\lambda \bullet \mathbf{z}) \cdot (p_1\lambda^{p_1-1}z_1, \dots, p_n\lambda^{p_n-1}z_n).$$

Ahora tomando a $\lambda = 1$, tenemos que

$$df(\mathbf{z}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (p_1z_1, \dots, p_nz_n).$$

Lo cual implica que

$$df(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^n p_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}). \quad (2.9)$$

(2) Por la identidad de Euler (2.8) tenemos que si $z \in \mathbb{C}$ es un valor crítico, entonces para cualquier $\mathbf{z} \in f^{-1}(z)$, $f(\mathbf{z}) = 0$. Así 0 es el único valor crítico de f .

Las pruebas de (3)–(5) son análogas a las pruebas de los polinomios de Brieskorn-Pham. \square

Observación 2.17.

Como en esta familia de polinomios no se tiene punto crítico aislado entonces no es posible garantizar que la aureola K es una variedad diferenciable.

Por último es importante mencionar que los polinomios casi-homogéneos tienen los mismos teoremas de fibraciones que los polinomios de Brieskorn-Pham, las pruebas son similares y por eso se omiten en esta obra.

Capítulo 3

Fibración de Milnor compleja

En el capítulo anterior vimos cómo los polinomios casi-homogéneos son una familia que incluye a los polinomios de Brieskorn-Pham como ejemplo y que también tienen asociados tres fibraciones. En este capítulo daremos una generalización del teorema de fibración sobre la esfera para cualquier función $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, a este teorema se le conoce como el teorema de fibración de Milnor.

Posteriormente probaremos que para este tipo de funciones las fibras sobre la esfera y sobre el tubo son difeomorfas, para finalizar se probará que existe una fibración sobre el tubo conocida como la fibración de Milnor-Lê.

Para finalizar daremos una versión del teorema de fibración de Milnor real, esta versión será muy restrictiva y probaremos que la función proyección no coincidirá necesariamente con la del teorema de fibración de Milnor compleja.

3.1. Estructura cónica

En el capítulo anterior en el estudio de los polinomios de Brieskorn-Pham y de los polinomios casi homogéneos, las Proposiciones 2.6 y 2.7 nos permitieron llegar a resultados importantes, en esta sección daremos una generalización de estos resultados para conjuntos algebraicos en general y que usaremos más adelante.

Consideremos un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{F}^n$ y \mathbf{x}_0 un punto simple de V o un punto aislado del conjunto de puntos singulares $\Sigma(V)$.

Proposición 3.1. *Toda esfera suficientemente pequeña \mathbb{S}_ϵ centrada en \mathbf{x}_0 interseca a V en una variedad diferenciable (posiblemente vacía).*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos por ahora el caso real y nos auxiliaremos en la fun-

ción

$$r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2.$$

Por el Corolario 1.74 podemos tomar algún $\epsilon^2 \in \mathbb{R}$ tal que sea menor que cualquier valor crítico de la función $r(\mathbf{x})|_{V \setminus \Sigma(V)}$, de esta manera ϵ^2 será un valor regular y por lo tanto su imagen inversa

$$r^{-1}(\epsilon^2) \cap (V \setminus \Sigma(V)) = \mathbb{S}_\epsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$$

será una variedad diferenciable K_ϵ .

Ahora si ϵ es lo suficientemente pequeño, entonces \mathbb{S}_ϵ^n no interseca a $\Sigma(V)$ por lo que $K_\epsilon = \mathbb{S}_\epsilon^n \cap V$.

El caso complejo se sigue del hecho de que cualquier conjunto algebraico en \mathbb{C}^n se puede considerar como un conjunto algebraico en \mathbb{R}^{2n} . \square

Observación 3.2. En la proposición anterior el número ϵ es arbitrario por lo que una pregunta natural es ¿Si $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq \epsilon$ entonces cómo son K_{ϵ_1} y K_{ϵ_2} ?

La siguiente proposición responde esta pregunta.

Teorema 3.3. *Para algún ϵ suficientemente pequeño, el conjunto $V \cap \mathbb{B}_\epsilon$ es homeomorfo al cono sobre $K_\epsilon = V \cap \mathbb{S}_\epsilon$.*

Si bien su prueba no es complicada, es un poco extensa por lo que se recomienda consultar [18, Teo. 2.10] para revisarla.

De esta manera obtenemos que si $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq \epsilon$, entonces las aureolas K_{ϵ_1} y K_{ϵ_2} serán difeomorfas lo cual concuerda con el caso de los polinomios casi-homogéneos.

3.2. Fibración de Milnor, caso complejo

A lo largo de esta sección denotaremos al gradiente de una función analítica $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\nabla f = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}} \right).$$

Escogemos esta definición para que la derivada direccional de f a lo largo de la curva $\mathbf{z} = p(t)$ tenga la forma

$$\frac{df(p(t))}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \nabla f(p(t)) \right\rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto hermitiano.

Además es importante notar que el espacio vectorial hermitiano \mathbb{C}^n se puede considerar como un espacio euclidiano de dimensión $2n$ con un producto interior definido por

$$\Re \langle a, b \rangle = \Re \langle b, a \rangle .$$

Denotaremos por $f: (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una función holomorfa con $\mathbf{0}$ un punto crítico, $V = f^{-1}(0)$ y $K = V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$.

De esta manera podemos definir la siguiente función

$$\Phi = \frac{f}{\|f\|}: \mathbb{C}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Proposición 3.4. *Existe una vecindad W alrededor de $\mathbf{0}$ tal que la función Φ es una submersión.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es una función holomorfa, entonces por el Teorema de Bertini-Sard [30] existe una vecindad U de 0 tal que para cualquier $z \in U \setminus \{0\}$, z es un valor regular.

Denotaremos por $W = f^{-1}(U)$ y de esta forma tenemos que $f: W \setminus V \rightarrow U \setminus \{0\}$ es una submersión.

Ahora usaremos la función auxiliar

$$g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z \mapsto \frac{z}{|z|}.$$

Esta función es una submersión y por lo tanto tenemos que $g \circ f$ es una submersión, pero esta composición es en realidad Φ . \square

A partir de ahora consideraremos a la función f restringida al conjunto W , donde W es como en la proposición anterior.

Sea $\theta \in [0, \pi)$, denotaremos por $X_\theta = f^{-1}(L_\theta)$, donde $L_\theta = \{te^{i\theta} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ahora si consideramos a L_θ^\perp como el complemento ortogonal de L_θ y a la función $\pi_\theta: \mathbb{C} \rightarrow L_\theta^\perp$ como la proyección ortogonal sobre L_θ^\perp , entonces tenemos que $X_\theta = (\pi_\theta \circ f)^{-1}(0)$. Así tenemos toda una familia de hipersuperficies parametrizadas por $[0, \pi)$. De manera inmediata tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 3.5.

$$W = \bigcup X_\theta \quad y \quad V = \bigcap X_\theta = X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2}$$

con $\theta_1 \neq \theta_2$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que $\bigcup X_\theta \subset W$ y $V \subset \bigcap X_\theta$.

Ahora sea $\mathbf{z} \in W$ y sea $\Phi(\mathbf{z}) = e^{i\theta_1}$, por lo que $\mathbf{z} \in X_{\theta_1}$. Por otra parte si $\mathbf{z} \in \bigcap X_\theta$, entonces $f(\mathbf{z}) \in \bigcap L_\theta$, de esta manera no queda más que $f(\mathbf{z}) = 0$ y por lo tanto $\mathbf{z} \in V$.

La otra igualdad también se prueba de manera similar. \square

Dado que podemos dividir a la recta L_θ en tres conjuntos

$$L_\theta = L_\theta^- \cup \{0\} \cup L_\theta^+$$

donde

$$L_\theta^\pm = \{te^{i\theta} \mid t \in \mathbb{R}^\pm\},$$

entonces podemos considerar a la hipersuperficie X_θ como unión de tres partes ajenas

$$X_\theta = E_\theta^- \cup V \cup E_\theta^+,$$

con

$$E_\theta^\pm = f^{-1}(L_\theta^\pm), \text{ donde } E_\theta^\pm \text{ son variedades diferenciables de codimensión 1.}$$

Con todo esto podemos definir uno de los conceptos más importantes de este capítulo.

Definición 3.6. Llamaremos el **pincel canónico de f** a la familia $\{X_\theta \mid \theta \in [0, \pi)\}$.

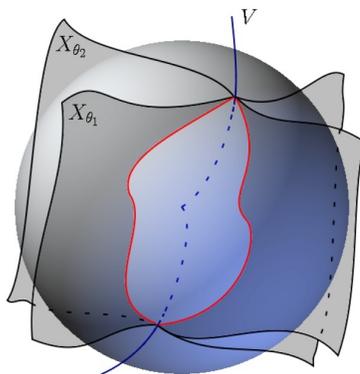


Figura 3.1: Pincel canónico.

A partir de ahora sea $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_\epsilon^{2n} \subset W$.

Consideremos ahora la restricción de Φ a $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$ con $\epsilon > 0$, sea

$$\phi = \Phi|_{\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

entonces nos interesa saber si existe algún $\epsilon_0 > 0$, de tal manera que para cualquier $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, la función ϕ no tenga puntos críticos.

Esta pregunta está íntimamente ligada con el hecho de que las variedades E_θ^\pm sean transversales a las esferas $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ como veremos a continuación.

Proposición 3.7. *Sean $\epsilon > 0$ y supongamos que $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$ es un punto crítico de ϕ , entonces E_θ^\pm y $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ no son transversales.*

DEMOSTRACIÓN. Si denotamos por $y = \phi(\mathbf{z}_0)$ y dado que

$$D\phi_{\mathbf{z}_0} = D\Phi_{\mathbf{z}_0}|_{T_{\mathbf{z}_0}\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K} : T_{\mathbf{z}_0}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K) \rightarrow T_y\mathbb{S}^1,$$

entonces, como \mathbf{z}_0 es un punto crítico tenemos que

$$D\phi_{\mathbf{z}_0} = 0,$$

lo cual quiere decir que $T_{\mathbf{z}_0}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K) \subset \ker D\Phi_{\mathbf{z}_0}$ y dado que las dimensiones son las mismas concluimos que

$$T_{\mathbf{z}_0}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K) = \ker D\Phi_{\mathbf{z}_0}. \quad (3.1)$$

Por otra parte, dado que la función Φ es constante en $E_{\theta_1}^\pm$, con $y = te^{i\theta_1}$ y $t \in \mathbb{R}^\pm$; entonces

$$\ker D\Phi_{\mathbf{z}_0} = T_{\mathbf{z}_0}E_{\theta_1}^\pm. \quad (3.2)$$

Usando las ecuaciones (3.1) y (3.2), tenemos que

$$T_{\mathbf{z}_0}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K) = T_{\mathbf{z}_0}E_{\theta_1}^\pm$$

De ahí que se sigue que E_θ^\pm y $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ no son transversales. \square

Observación 3.8. Es importante notar que si $\mathbf{z} \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$, $\Phi(\mathbf{z}) = e^{i\theta}$ y M es una subvariedad de \mathbb{C}^n con $\mathbf{z} \in M$, entonces basta que exista un vector $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{z}}M$ tal que $\mathbf{w} \notin T_{\mathbf{z}}E_\theta^\pm$ para que M sea transversal a E_θ^\pm , esto por que el espacio vectorial $T_{\mathbf{z}}E_\theta^\pm$ tiene dimensión $2n - 1$.

De esta manera podemos ver como la transversalidad juega un papel importante para la función ϕ .

Podemos refinar el argumento que nos permitió llegar a la ecuación (3.2), para dar el siguiente resultado.

Proposición 3.9. *El vector $i\nabla \log f$ es normal a $T_z E_\theta^\pm$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\frac{f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|} = e^{i\Theta(\mathbf{z})}$, entonces

$$\begin{aligned} \log f(\mathbf{z}) - \log \|f(\mathbf{z})\| &= i\Theta(\mathbf{z}), \\ -i \log f(\mathbf{z}) + i \log \|f(\mathbf{z})\| &= \Theta(\mathbf{z}), \\ \Re(-i \log f(\mathbf{z})) &= \Theta(\mathbf{z}), \text{ donde } \Re \text{ denota la parte real.} \end{aligned}$$

Ahora tomando la diferencial de la ecuación $\Re(-i \log f(\mathbf{z})) = \Theta(\mathbf{z})$, a lo largo de la curva $\mathbf{z} = p(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(p(t))}{dt} &= \Re\left(\frac{d(-i \log f)}{dt}(t)\right) \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \nabla(-i \log f(p(t))) \right\rangle \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i\nabla \log f(p(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Así la derivada direccional de $\Theta(\mathbf{z})$, en la dirección $\mathbf{v} = \frac{dp}{dt}$, es

$$\Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle.$$

Sea $\mathbf{z} \in E_{\theta_1}^\pm$ y como la función Φ es constante en $E_{\theta_1}^\pm$, entonces para cualquier $\mathbf{v} \in T_z E_{\theta_1}^\pm$

$$D\Theta_z(\mathbf{v}) = \Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 0.$$

De esta manera tenemos que el vector $i\nabla \log f$ es normal a $T_z E_\theta^\pm$. \square

Usando estas ideas podemos finalmente dar el siguiente resultado.

Proposición 3.10. *Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$, los vectores $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ y \mathbf{z} son linealmente independientes sobre \mathbb{R} si y sólo si $E_\theta^\pm \bar{\cap} \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la suficiencia, si $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$ con $0 < \epsilon$ y si suponemos que los vectores $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ y \mathbf{z} son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , entonces existe un vector \mathbf{v} tal que

$$\Re \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle = 0 \text{ y } \Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 1.$$

De esa manera $\mathbf{v} \in T_z \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ y $\mathbf{v} \notin T_z E_{\theta_1}^\pm$, luego por la Observación 3.8 tenemos que $E_\theta^\pm \bar{\cap} \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Ahora probaremos la necesidad.

Para esto usaremos la contrarrecíproca, esto es, queremos probar que si existe $0 < \epsilon$ tal que para $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$, los vectores $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ y \mathbf{z} son linealmente dependientes sobre \mathbb{R} , entonces E_θ^\pm no es transversal a $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Si el vector $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ es igual a un múltiplo real de \mathbf{z} , es decir normal a la esfera $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$, entonces

$$\Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 0$$

para cada vector \mathbf{v} tangente a $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ en \mathbf{z} .

Así \mathbf{z} es crítico de ϕ y por la Proposición 3.7, concluimos que no son transversales. \square

De esta forma se puede revisar fácilmente que hemos probado la siguiente afirmación (ver [18, Lema 4.1]).

Lema 3.11. *Los puntos críticos de la función $\phi: \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}_1^1$, son aquellos puntos $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$ tales que el vector $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ es un múltiplo real del vector \mathbf{z} .*

Queremos probar que la función

$$\phi: \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}_1^1$$

no tiene puntos críticos para algún ϵ suficientemente pequeño.

Observación 3.12. Por regla de la cadena tenemos que

$$\nabla \log f(\mathbf{z}) = \frac{\nabla f(\mathbf{z})}{f(\mathbf{z})}$$

Primero probaremos un lema que será necesario más adelante.

Lema 3.13. *Sea $\rho: [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$ una curva real analítica con $\rho(0) = \mathbf{0}$, tal que $f(\rho(t)) \neq 0$ para $t > 0$ y el vector $\nabla \log f(\rho(t))$ es un múltiplo $\lambda(t)\rho(t)$, con $\lambda(t) \in \mathbb{C}$. Entonces el argumento de $\lambda(t)$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow 0$.*

Es decir, tenemos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{\|\lambda(t)\|} = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las expansiones de las series de Taylor alrededor del 0:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= at^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + a_2 t^{\alpha+2} + \dots, \\ f(\rho(t)) &= bt^\beta + b_1 t^{\beta+1} + b_2 t^{\beta+2} + \dots, \\ \nabla f(\rho(t)) &= ct^\gamma + c_1 t^{\gamma+1} + c_2 t^{\gamma+2} + \dots, \end{aligned}$$

donde los coeficientes a, b, c son distintos del cero y dado que $\rho(0) = \mathbf{0}$ y $f(\rho(0)) = 0$, tenemos que $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$.

Estas series son convergentes para algún $|t| < \epsilon'$.

Para toda $t > 0$, tenemos que

$$\nabla \log f(\rho(t)) = \lambda(t)\rho(t),$$

por otro lado, de la Observación 3.12 tenemos que

$$\nabla f(\rho(t)) = \nabla \log f(\rho(t)) \overline{f(\rho(t))},$$

entonces

$$\nabla f(\rho(t)) = \lambda(t)\rho(t) \overline{f(\rho(t))},$$

y usando las series de Taylor anteriores

$$(ct^\gamma + \dots) = \lambda(t)(a\bar{b}t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

De esta manera tenemos que $\lambda(t)$ es el cociente entre dos funciones reales analíticas, es decir

$$\lambda(t) = \frac{ct^\gamma + \dots}{(a\bar{b}t^{\alpha+\beta} + \dots)},$$

por lo que $\lambda(t)$ tiene una expansión como una serie de Laurent de la forma

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots).$$

Ahora si sustituimos esta expansión en la identidad

$$\frac{df}{dt} = \left\langle \frac{d\rho}{dt}, \nabla f \right\rangle$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (\beta b t^{\beta-1} + \dots) &= \langle \alpha a t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a \bar{b} t^\gamma + \dots \rangle, \\ &= \alpha \|a\|^2 \bar{\lambda}_0 b t^{\alpha-1+\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes principales tenemos que

$$\beta = \alpha \|a\|^2 \bar{\lambda}_0$$

por lo que λ_0 es un real positivo.

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{\|\lambda(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)}{\|\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)}{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} \|(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)}{\|(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)\|} = 1. \end{aligned}$$

□

Para poder probar que la función ϕ no tiene puntos críticos para algún ϵ suficientemente pequeño, usaremos el siguiente lema

Lema 3.14. *Si f es una función holomorfa que se anula en el origen, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus V$, con $\|\mathbf{z}\| \leq \epsilon_0$; los vectores \mathbf{z} y $\nabla \log f(\mathbf{z})$ son linealmente independientes sobre \mathbb{C} o*

$$\nabla \log f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z},$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y su argumento tiene valor absoluto menor que $\frac{\pi}{4}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen puntos $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus V$ arbitrariamente cercanos al origen con

$$\nabla \log f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

donde el valor absoluto del argumento de λ es estrictamente mayor que $\frac{\pi}{4}$. Es decir, suponemos que λ está en la mitad del plano

$$\Re((1+i)\lambda) < 0,$$

o en la mitad del plano

$$\Re((1-i)\lambda) < 0.$$

Queremos expresar estas condiciones en términos de igualdades y desigualdades polinomiales, para poder usar el Lema de selección de curva.

Sea $W' = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \nabla f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\lambda, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$.

De esta manera, si $\mathbf{z} \in W'$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} = z_j \lambda \text{ y } \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} = z_k \lambda,$$

multiplicando la primera igualdad por z_k y la segunda por z_j , tenemos que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} z_k = z_j \lambda z_k = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} z_j,$$

lo cual implica que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} z_k = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} z_j.$$

Ahora si por el contrario, para algún \mathbf{z} se cumplen las igualdades

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} z_k = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} z_j,$$

entonces, si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ de inmediato $\mathbf{z} \in W'$. Supongamos que $z_j \neq 0$, así queremos resolver la ecuación

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} = z_j \lambda,$$

lo cual dice que

$$\lambda = \frac{\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}}{z_j},$$

notemos que

$$z_k \lambda = z_k \frac{\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}}{z_j} = \frac{\overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} z_j}{z_j} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}},$$

de ahí que $\mathbf{z} \in W'$.

Si consideramos a $z_j = x_j + iy_j$ y tomando las partes reales e imaginarias, obtenemos una colección de ecuaciones polinomiales en las variables x_j y y_j . Esto quiere decir que W' es un conjunto algebraico.

Por la Observación 3.12 tenemos que $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^n \setminus V) \cap W'$ si y sólo si,

$$\frac{\nabla f(\mathbf{z})}{f(\mathbf{z})} = \lambda \mathbf{z},$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

De esta manera si a la igualdad anterior la multiplicamos por $\overline{f(\mathbf{z})}$ y tomamos el producto interior con $\overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z}$, tenemos que

$$\langle \nabla f(\mathbf{z}), \overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z} \rangle = \lambda \|\overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z}\|^2.$$

Sea

$$\lambda'(\mathbf{z}) = \langle \nabla f(\mathbf{z}), \overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z} \rangle,$$

entonces

$$\arg \lambda' = \arg \langle \nabla f(\mathbf{z}), \overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z} \rangle = \arg \lambda \|\overline{f(\mathbf{z})}\mathbf{z}\|^2 = \arg \lambda.$$

Nuevamente podemos considerar a $z_j = x_j + iy_j$, para obtener que λ' es una función (compleja) polinomial en variables x_j y y_j .

Ahora definimos los siguientes conjuntos

$$U_+ = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \Re((1+i)\lambda'(\mathbf{z})) < 0 \}, \quad (3.3)$$

$$U_- = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \Re((1-i)\lambda'(\mathbf{z})) < 0 \}.$$

Además por hipótesis $\mathbf{0} \in \overline{W' \cap (U_+ \cup U_-)}$. De esta manera, por el Lema 1.75, debe existir una curva real analítica

$$\rho: [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

con $\rho(0) = \mathbf{0}$ y con

$$\rho(t) \in W' \cap U_+$$

para $t > 0$ ó

$$\rho(t) \in W' \cap U_-$$

para $t > 0$. En ambos casos tenemos que para $t > 0$

$$\nabla \log f(\rho(t)) = \lambda(t)\rho(t)$$

con $|\arg \lambda(t)| > \frac{\pi}{4}$; lo cual contradice el Lema 3.13.

Esta contradicción aun no basta para terminar la prueba del lema, ya que puede suceder que $\mathbf{0} \in \overline{W' \setminus (V \cap W')}$ y si $\mathbf{z} \in \overline{W' \setminus (V \cap W')}$, entonces

$$\lambda'(\mathbf{z}) = 0 \text{ ó } |\arg \lambda'(\mathbf{z})| = \frac{\pi}{4}.$$

En cualquiera de ambos casos se sigue el mismo argumento pero en lugar de la ecuación (3.3), usaremos la siguiente igualdad

$$\Re((1+i)\lambda'(\mathbf{z}))\Re((1-i)\lambda'(\mathbf{z})) = 0$$

junto con la desigualdad polinomial,

$$\|f(\mathbf{z})\| > 0.$$

De esta manera obtendremos otra curva $\rho(t)$ la cual contradice el Lema 3.13. \square

Tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.15. *Para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus V$ suficientemente cerca del origen, los vectores \mathbf{z} e $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} .*

Ahora haciendo uso del Lema 3.11 y del Corolario anterior, tenemos el siguiente resultado

Corolario 3.16. *Si $\epsilon \leq \epsilon_0$, entonces la función*

$$\phi: \mathbb{S}_\epsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$$

no tiene ningún punto crítico.

Observación 3.17. Con los resultados anteriores lo que sucede en realidad es que si $\epsilon \leq \epsilon_0$, entonces $E_\theta^\pm \cap \mathbb{S}_\epsilon$, para toda $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ahora usando el Teorema de la preimagen 1.21, tenemos que para cualquier $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, su imagen inversa

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset \mathbb{S}_\epsilon \setminus K$$

es una variedad diferenciable de dimensión $2m - 2$.

Notemos que $F_\theta = \Phi^{-1}(e^{i\theta}) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Para poder garantizar que ϕ es la función proyección de una fibración localmente trivial, necesitaremos conocer el comportamiento de $\phi(\mathbf{z})$, cuando \mathbf{z} tiende al conjunto K , donde ϕ no está definida.

Para esto necesitamos construir un campo vectorial sobre $\mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$, con $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, tangente a todas las esferas \mathbb{S}_ϵ y donde las curvas integrales deberán ser transversales a las variedades E_θ^\pm .

Antes de continuar haremos unas cuentas que serán necesarias más adelante. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|} &= e^{i\Theta(\mathbf{z})}, \\ \log f(\mathbf{z}) - \log \|f(\mathbf{z})\| &= i\Theta(\mathbf{z}), \\ \log \|f(\mathbf{z})\| &= \Re \log f(\mathbf{z}), \\ \log \|f(\mathbf{z})\| &= \Re \log f(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Ahora tomando la diferencial de la ecuación $\log \|f(\mathbf{z})\| = \Re \log f(\mathbf{z})$, a lo largo de la curva $\mathbf{z} = p(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d \log \|f(p(t))\|}{dt} &= \Re \left(\frac{d \log f(p(t))}{dt} \right) \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, \nabla \log f(p(t)) \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así la derivada direccional de $\log \|f(\mathbf{z})\|$, en la dirección $\mathbf{v} = \frac{dp}{dt}$, es

$$\Re \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(p(t)) \rangle .$$

Sea $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ y sea $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$, entonces

1. el vector \mathbf{z} es normal a la esfera $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$,
2. el vector $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ es normal a $T_{\mathbf{z}}E_\theta^\pm$, con $\mathbf{z} \in E_\theta^\pm$,
3. por la ecuación (3.4) y por un argumento similar al de la Proposición 3.9, el vector $\nabla \log f(\mathbf{z})$ es normal al tubo de Milnor $N(\epsilon, \delta)$.

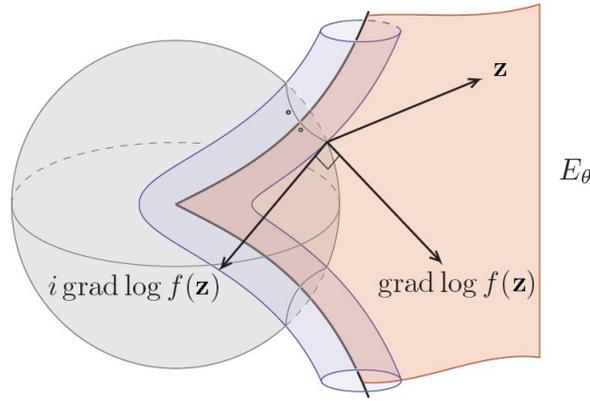


Figura 3.2: Los vectores \mathbf{z} , $i\nabla \log f(\mathbf{z})$, $\nabla \log f(\mathbf{z})$.

Como consecuencia inmediata de esto tenemos que E_θ^\pm siempre es transversal a los tubos de Milnor ya que los espacios normales no son colineales, pues son ortogonales.

De esta manera continuando con las ideas de Milnor (ver [18, Lema 4.6]) tenemos la siguiente afirmación.

Lema 3.18. *Si $\epsilon \leq \epsilon_0$, entonces existe un campo vectorial suave $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ sobre $\mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$ tal que, para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$, el producto interno*

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}), i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle$$

es diferente de cero y el valor absoluto de su argumento es menor que $\frac{\pi}{4}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon \leq \epsilon_0$ y notemos que es suficiente construir el campo vectorial deseado en una vecindad de un punto $\mathbf{z} \in \mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$, ya que usando una partición de la unidad podemos obtener un campo vectorial global $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ conservando las propiedades del campo vectorial local.

1. Si los vectores \mathbf{z} y $\nabla \log f(\mathbf{z})$ son linealmente independientes sobre \mathbb{C} , entonces \mathbf{z} no pertenece a la línea compleja generada por $\nabla \log f(\mathbf{z})$ y también serán linealmente independientes sobre \mathbb{R} y así tenemos que $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ es transversal a $N(\epsilon, \|f(\mathbf{z})\|)$, donde $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Ahora tenemos que $T_{\mathbf{z}}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap N(\epsilon, \|f(\mathbf{z})\|)) \neq T_{\mathbf{z}}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap E_\theta^\pm)$ ya que en caso contrario \mathbf{z} también es ortogonal a $i\nabla \log f(\mathbf{z})$ lo cual contradice el hecho de que \mathbf{z} no está en la línea compleja generada por $\nabla \log f(\mathbf{z})$, así basta tomar $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{z}}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap N(\epsilon, \|f(\mathbf{z})\|))$ tal que $\mathbf{v} \notin T_{\mathbf{z}}(\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap E_\theta^\pm)$.

De forma que

$$\Re \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 0 \text{ y } \Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle \neq 0.$$

Por lo tanto si $\Im \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 0$, entonces $\langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = 0$ lo cual no puede ser, por lo que $\Im \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle \neq 0$ y así al multiplicarlo por $-i$ obtenemos que

$$\Re \langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle \neq 0.$$

Por último notemos que si $\Im \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle \neq 0$, entonces

$$\Re \langle \mathbf{v}, \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = D \log \|f(\mathbf{z})\|(\mathbf{v}) = 0$$

y por lo tanto la función $\|f(\mathbf{z})\|$ es constante y distinta de cero, así la curva integral no tiende a K

2. Si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\nabla \log f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z}$, entonces basta considerar $\mathbf{v} = i\mathbf{z}$ para obtener

$$\Re \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle = 0$$

y por el Lema 3.14, el valor absoluto del argumento del número

$$\langle \mathbf{v}, i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{z}\|^2$$

es menor que $\frac{\pi}{4}$.

En cualquier caso siempre es posible construir un vector tangente $\mathbf{v}(\mathbf{z})$, el cual asigna el vector construido \mathbf{v} al vector \mathbf{z} . La condición

$$\|\arg \langle \mathbf{v}(\mathbf{z}), i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle\| < \frac{\pi}{4}$$

se mantendrá en alguna vecindad de \mathbf{z} . Ahora usando una partición de la unidad, obtendremos un campo vectorial global $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ que posee la misma propiedad. \square

Notemos que la desigualdad

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}), i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle \neq 0$$

implica que $\mathbf{v} \notin T_{\mathbf{z}}E_{\theta}^{\pm}$ y por la Observación 3.8, este campo vectorial cumple que sus líneas integrales son transversales a E_{θ}^{\pm} .

Ahora normalizando obtenemos

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{z})}{\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}), i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle}.$$

Así obtenemos un campo vectorial diferenciable \mathbf{w} sobre $\mathbb{S}_{\epsilon} \setminus K$, el cual satisface dos condiciones

1. La parte real del número

$$\langle \mathbf{w}(\mathbf{z}), i\nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle$$

siempre es igual a 1,

2. La parte imaginaria correspondiente al número anterior siempre satisface

$$\|\Re \langle \mathbf{w}(\mathbf{z}), \nabla \log f(\mathbf{z}) \rangle\| < 1.$$

Ahora consideremos las trayectorias de la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{z})$.

Lema 3.19. *Si $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{B}_{\epsilon}^{2n} \setminus V$, entonces existe una única trayectoria suave*

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_{\epsilon} \setminus K$$

la cual satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{dt} = w(\rho(t))$$

con condición inicial $\rho(0) = \mathbf{z}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente existe una solución $\mathbf{z} = \rho(t)$ al menos de manera local y se puede extender a algún intervalo I maximal de números reales. El problema está en el hecho de que $\mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$ no es compacto y no se puede garantizar que $\rho(t)$ no tienda a V , cuando t tiende a algún límite finito t_0 . De esta manera buscamos garantizar que $f(\rho(t))$ no tiende a cero o

$$\Re \log f(\rho(t)) \rightarrow -\infty, \text{ cuando } t \rightarrow t_0.$$

Para ahorrar notación denotaremos por $g(t) = \log \|f(\rho(t))\|$ y por las cuentas previas tenemos que $|\frac{dg}{dt}| < 1$.

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$|g(t) - g(0)| = \left| \int_0^t \frac{dg}{dt} dt \right| \leq \int_0^t \left| \frac{dg}{dt} \right| dt < \int_0^t 1 dt = t.$$

Por lo tanto $|g(t) - g(0)| < t$ y así $g(t)$ no puede tender a menos infinito dado que está acotado. \square

Ahora si consideramos $\phi(\mathbf{z}) = e^{i\Theta(\mathbf{z})}$, tenemos que

$$\frac{d\Theta(\rho(t))}{dt} = \Re \left\langle \frac{d\rho}{dt}, i\nabla \log f \right\rangle = 1,$$

por lo que

$$\Theta(\rho(t)) = t + c, \text{ donde } c \text{ es constante.} \quad (3.5)$$

En otras palabras la trayectoria $\rho(t)$ se proyecta bajo ϕ a una trayectoria alrededor del círculo unitario en sentido positivo y con un vector de velocidad unitario.

El punto $\rho(t)$ es una función diferenciable con respecto a t y al problema de valor inicial

$$\mathbf{z}_0 = \rho(0).$$

Expresaremos esta dependencia por

$$\rho(t) = h_t(\mathbf{z}_0).$$

De esta manera cada h_t es un difeomorfismo de $\mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ a él mismo y manda cada fibra $E_\theta = \Phi_1^{-1}(e^{i\theta})$ sobre la fibra $E_{\theta+t}$. Ahora no tenemos dificultad en probar el teorema de fibración.

Teorema 3.20 (Teorema de la Fibración). *Si $\epsilon \leq \epsilon_0$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo de haces fibrados*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}^1 \\ & \searrow \Psi & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}\mathbb{P} \end{array}$$

donde $\Psi = (\Re f : \Im f)$, $\Phi = \frac{f}{\|f\|}$, π es el cubriente natural.

DEMOSTRACIÓN. Por una parte tenemos que Φ es un levantamiento de Ψ del cubriente \mathbb{S}^1 de $\mathbb{R}\mathbb{P}$, de forma que el diagrama conmutativo es inmediato.

Ahora sean $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y U una vecindad pequeña de $e^{i\theta}$. Así la función

$$(e^{i(t+\theta)}, \mathbf{z}) \mapsto h_t(\mathbf{z}),$$

con $|t| < c$ (donde c es como en (3.5)) y $\mathbf{z} \in E_\theta^\pm$, manda el producto $U \times E_\theta^\pm$ difeomorficamente sobre $\Phi^{-1}(U)$, lo que nos da las trivializaciones locales. \square

De esta forma obtenemos como consecuencia el teorema de fibración clásico.

Teorema 3.21 (Teorema de Fibración de Milnor). *Si $\epsilon \leq \epsilon_0$, entonces el espacio $\mathbb{S}_\epsilon \setminus K$ es un haz fibrado sobre \mathbb{S}^1 , cuya función proyección es $\phi = \frac{f}{\|f\|}$.*

3.3. Fibración de Milnor-Lê

3.3.1. Estratificaciones

Antes de comenzar a estudiar el Teorema de Milnor en el caso real, es necesario introducir el concepto de estratificación el cual usaremos más adelante. Recordemos que \mathbb{F} denota a los números reales o complejos.

Definición 3.22. Una **estratificación** de un subconjunto X de \mathbb{F}^n es una partición localmente finita $\{S_\alpha\}$ de X , donde cada S_α (llamado **estrato**) es una subvariedad diferenciable y conexa de \mathbb{F}^n los cuales satisfacen la **Condición de Frontera** esto es, si S_α y S_β son estratos con $S_\alpha \cap \overline{S_\beta} \neq \emptyset$, entonces $S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$.

Ahora consideremos una terna (y, S_α, S_β) con S_α y S_β estratos de X y $y \in S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$.

Definición 3.23. Diremos que la terna (y, S_α, S_β) es **Whitney regular** si satisface la condición (b) de Whitney; esto es,

1. dada una sucesión $\{x_n\} \subset S_\beta$ convergente a y en \mathbb{F}^n tal que la sucesión de los espacios tangentes $T_{x_n}S_\beta$ converge a un subespacio $T \subset \mathbb{F}^n$ y
2. una sucesión $\{y_n\} \subset S_\alpha$ convergente a y en \mathbb{F}^n tal que la sucesión de líneas (secantes) $l_{x_i y_i}$ de x_i a y_i converge a una línea l ,

entonces tenemos que $l \subset T$.

Observación 3.24. En la definición anterior cuando hablamos de la convergencia de los espacios tangentes o de las secantes, nos referimos a la convergencia de los trasladados al origen de esos espacios, de esta forma se vuelven puntos de una Grassmaniana.

Es importante mencionar que también existe una condición (a) de Whitney, en la cual se pedirá en el primer punto de la Definición 3.23 que el espacio tangente a y en S_α esté contenido en T . Se puede revisar que la condición (b) implica la condición (a).

Definición 3.25. La estratificación $\{S_\alpha\}$ de X es **Whitney regular** (también llamada una **estratificación de Whitney**) si cada terna (y, S_α, S_β) es Whitney regular.

La existencia de estratificaciones Whitney regulares para cualquier variedad analítica real o compleja fue probada por Hironaka en [14].

Definición 3.26. Sea $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y $V = f^{-1}(0)$. Sea $\{S_\alpha\}$ una estratificación de Whitney de \mathbb{C}^n adaptada a V , es decir, V es unión de estratos y $\mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ es el estrato de mayor dimensión. Consideremos $y \in V$ y sea S_α el estrato de y , esto es $y \in S_\alpha$. Sea $\{x_i\} \subset \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ una sucesión de puntos que converge a y y $F_i = f^{-1}(f(x_i))$ tal que $T_{x_i}F_i \rightarrow T$, para algún subespacio $T \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que f satisface **la condición a_f de Thom** si $T_y S_\alpha \subset T$.

Observación 3.27. Si f satisface la condición a_f de Thom, entonces por la Proposición 3.1 tenemos que las fibras de f cercanas a V son transversales a la esfera \mathbb{S}_ϵ .

3.3.2. Teorema de fibration de Milnor-Lê

Una vez dadas las definiciones anteriores es posible enunciar y probar el siguiente teorema.

Teorema 3.28 (Teorema de fibración de Milnor-Lê). *Sea $0 < \delta \ll \epsilon \leq \epsilon_0$ y el tubo de Milnor $N(\epsilon, \delta)$, entonces la restricción*

$$f: N(\epsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{S}_\delta$$

es un haz fibrado.

La prueba cuando f tiene un punto crítico aislado fue hecha por Milnor en [18, Cap. 6], usando el hecho de que las fibras de $N(\epsilon, \delta)$ son transversales a la esfera \mathbb{S}_ϵ y una versión del Teorema de Ehresmann con frontera. En el caso general fue probado por Lê en [11] usando un teorema de Hironaka [15] el cual asegura que toda función holomorfa $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ satisface la condición a_f de Thom y por lo tanto las fibras en $N(\epsilon, \delta)$ son transversales a la esfera \mathbb{S}_ϵ .

Para ver la equivalencia entre el teorema de fibración de Milnor y el de Milnor-Lê necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.29. *Sea $\{S_\alpha\}$ una estratificación de Whitney de \mathbb{C}^n adaptada a V y para cada $\theta \in [0, \pi)$ equipamos a X_θ con la estratificación $\{X_\theta \cap S_\alpha\}$, entonces para toda bola suficientemente pequeña \mathbb{B}_ϵ^{2n} centrada en el origen, existe un campo vectorial estratificado $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ sobre $\mathbb{B}_\epsilon^{2n} \setminus V$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ es radial; es decir, es transversal a todas las esferas en \mathbb{B}_ϵ centradas en el origen,
2. $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ es tangente a todos los estratos de $X_\theta \setminus V$,
3. $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ es transversal a todos los tubos $f^{-1}(\mathbb{S}_\delta)$.

Una prueba de este lema se puede encontrar en [8].

Sea ϕ la restricción de Φ a $\mathbb{S}_\epsilon \setminus V$, notemos que esta fibración es precisamente la fibración clásica de Milnor, entonces el flujo asociado al campo vectorial del lema anterior, define un homeomorfismo entre la fibra de $f^{-1}(e^{i\theta}) \cap \mathbb{B}_\epsilon^{2n}$ y la porción de la fibra $\phi^{-1}(e^{i\theta})$ dada por la desigualdad $\|f(\mathbf{z})\| \geq \delta$.

Para terminar de ver la equivalencia necesitamos probar que la fibración definida por ϕ en $\mathbb{S}_\epsilon \setminus V$ es equivalente a la restricción de ϕ a los puntos de la esfera que satisfacen que $\|f(\mathbf{z})\| > \delta$. La prueba se puede encontrar en [8] y un esbozo ésta es el siguiente: Sea $T(\epsilon, \delta) = \mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{B}_\delta^{2n} \setminus \{0\})$, como f satisface la condición a_f de Thom, entonces la restricción de f a $T(\epsilon, \delta)$ es una submersión en cada estrato, así podemos levantar un campo radial $u(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ sobre $\mathbb{B}_\delta^{2n} \setminus \{0\}$ a un campo vectorial sobre $T(\epsilon, \delta)$ cuyo flujo preserva las fibras de ϕ y es transversal a la intersección de \mathbb{S}_ϵ con todos los tubos de Milnor $\phi^{-1}(\mathbb{S}_{\delta'})$ para toda $0 < \delta' \leq \delta$. Así obtenemos la equivalencia entre las dos fibraciones.

3.4. Fibración de Milnor real

En la sección anterior revisamos el teorema de fibración de Milnor para el caso complejo y a continuación daremos una versión de este resultado para el caso real.

Sea $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función polinomial que lleva el origen en el origen, con $m \geq k$ y que satisface la siguiente condición

Hipótesis 3.30 (Condición de Milnor). Existe una vecindad U del origen de \mathbb{R}^m tal que la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ tiene rango k para cualquier $x \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$, esto es, el origen de \mathbb{R}^m es un punto crítico aislado.

Al igual que antes podemos definir al conjunto algebraico V como sigue

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid f_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \{1, \dots, k\} \}.$$

Tenemos que V es una variedad diferenciable de dimensión $m - k$ en la vecindad $U \cap V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Además por el Corolario 3.1, para ϵ suficientemente pequeño, la intersección $K = V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - k - 1$.

Supongamos que $k \geq 2$, de esta forma tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.31. *El complemento de una vecindad tubular abierta de K en $\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$ es el espacio total de un haz fibrado sobre la esfera \mathbb{S}^{k-1} , cada fibra F es una variedad diferenciable compacta de dimensión $m - k$ acotada por una copia de K .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función

$$f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}} : \mathbb{S}_\epsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Sea $\mathbf{x} \in f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}}^{-1}(\mathbf{0})$, queremos ver que \mathbf{x} es un punto regular de $f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}}$. Tenemos que la diferencial de la restricción de f a $\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$ en \mathbf{x} es

$$D(f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}})_{\mathbf{x}} = (Df_{\mathbf{x}})|_{T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}} : T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\epsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Como $f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}}^{-1}(\mathbf{0}) = V \cap \mathbb{S}_\epsilon^{m-1} = K$ y dado que $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$ son transversales, entonces K es una subvariedad de $\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$. Así

$$\ker D(f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}})_{\mathbf{x}} = T_{\mathbf{x}}K.$$

Dado que $\dim \mathbb{S}_\epsilon^{m-1} = m - 1$ y $\dim K = m - (k + 1)$, entonces al ser $D(f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}})_{\mathbf{x}}$ una transformación lineal, se tiene que la imagen es de dimensión $m - 1 - (m - k - 1) = k$ por lo tanto \mathbf{x} es un punto regular.

De esta manera existe una bola cerrada $\overline{\mathbb{B}}_\eta^k$, el cual consiste exclusivamente de valores regulares.

Si consideramos al conjunto $T = f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}}^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\eta^k)$, entonces por ser $f|_{\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}}$ una función continua tenemos que T es cerrado y como $T \subset \mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$, entonces T es un conjunto compacto.

Ahora podemos recrear los mismos pasos que en el Teorema 1.63 y concluir que T es fibrado sobre $\overline{\mathbb{B}}_\eta^k$ con fibra K . Ahora dado que el espacio base $\overline{\mathbb{B}}_\eta^k$ es contraíble, tenemos que T es difeomorfo al producto $K \times \overline{\mathbb{B}}_\eta^k$. Nos referiremos por T como una vecindad tubular de K en $\mathbb{S}_\epsilon^{m-1}$.

Finalmente si consideramos al conjunto $E = \overline{\mathbb{B}}_\epsilon^m \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^{k-1})$, tenemos que E es una variedad diferenciable con $\partial E = \partial T$. Un argumento parecido al del Teorema 1.63, muestra que

$$f|_E: E \rightarrow \mathbb{S}_\eta^{k-1}$$

es también la función proyección de un haz fibrado. Una fibra típica

$$F_{\mathbf{y}} = \overline{\mathbb{B}}_\epsilon^m \cap f^{-1}(\mathbf{y}),$$

es una variedad diferenciable compacta, acotada por el conjunto

$$\partial F_{\mathbf{y}} = \mathbb{S}_\epsilon^{m-1} \cap f^{-1}(\mathbf{y})$$

la cual es difeomorfa a K , dado que es una fibra de la fibración $T \rightarrow \overline{\mathbb{B}}_\eta^k$. Para finalizar la prueba de este teorema será necesario el siguiente lema. \square

Lema 3.32. *El espacio total $E = \overline{\mathbb{B}}_\epsilon^m \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^{k-1})$ es difeomorfo al complemento $(\mathbb{S}_\epsilon^{m-1} \setminus \text{int } T)$ de una vecindad tubular T .*

DEMOSTRACIÓN. En otras palabras lo que deseamos probar es que E es difeomorfo a la variedad

$$E' = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{S}_\epsilon^{m-1} \mid \|f(\mathbf{x})\| \geq \eta \}.$$

Ahora dado que los campos vectoriales

$$\nabla \|f(\mathbf{x})\|^2 \tag{3.6}$$

$$2\mathbf{x} = \nabla \|\mathbf{x}\|^2 \tag{3.7}$$

no se anulan en $\overline{\mathbb{B}}_\epsilon^m \setminus V$ y no apuntan en direcciones opuestas por el Lema 1.79, entonces el campo vectorial $v(\mathbf{x}) = \nabla \|f(\mathbf{x})\|^2 + 2\mathbf{x}$ satisface que los productos internos $\langle v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle$ y $\langle v(\mathbf{x}), \nabla \|f(\mathbf{x})\|^2 \rangle$ son ambos positivos.

Dado que los campos vectoriales de (3.6) son transversales a los tubos de Milnor y a las esferas, entonces al considerar la curva integral del campo vectorial $v(\mathbf{x})$ tenemos que lleva E difeomorficamente sobre E' . \square

Llamemos $\rho: E \rightarrow E'$ el difeomorfismo dado por el Lema 3.32, entonces la composición

$$f|_E \circ \rho^{-1}: S_\epsilon^{m-1} \setminus T \rightarrow S_\eta^{k-1}$$

es el haz fibrado mencionado en el Teorema 3.31.

Observación 3.33. Es importante mencionar que a pesar de que se tiene una fibración como en el caso complejo, no es posible conocer la forma de la función proyección, de hecho en general no es cierto que la proyección del haz fibrado sea $\frac{f}{\|f\|}$ como en el caso complejo. Milnor en su libro [18], menciona que la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, x^2 + y(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

es tal que $\frac{f}{\|f\|}$ no puede ser la proyección de un haz fibrado. En el Capítulo 5 veremos la razón de esto.

Capítulo 4

Polinomios casi-homogéneos polares

El propósito de este capítulo es definir los polinomios casi-homogéneos polares, que son funciones reales analíticas que generalizan a los polinomios casi-homogéneos. Probaremos que un polinomio f de este tipo tiene valor crítico aislado en el origen y posee una fibración de Milnor con proyección $\frac{f}{|f|}$.

4.1. Polinomios casi-homogéneos polares

Empezaremos este capítulo definiendo una acción, la cual usaremos más adelante.

Lema 4.1. Sean p_j, u_j enteros positivos con $j = 1, \dots, n$ tales que

$$\text{mcd}(p_1, \dots, p_n) = 1 \text{ y } \text{mcd}(u_1, \dots, u_n) = 1.$$

Si $t\lambda \in \mathbb{C}^*$, con $t \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{S}_1^1$; entonces la función

$$\begin{aligned} \bullet: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (t\lambda, \mathbf{z}) &\mapsto (t^{p_1} \lambda^{u_1} z_1, \dots, t^{p_n} \lambda^{u_n} z_n). \end{aligned}$$

es una acción.

DEMOSTRACIÓN. Sea $1e^{i0}$ la unidad en su forma polar y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Así

$$\begin{aligned} 1e^{i0} \bullet \mathbf{z} &= (1^{p_1} e^{i0u_1} z_1, \dots, 1^{p_n} e^{i0u_n} z_n). \\ &= (z_1, \dots, z_n) \\ &= \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Ahora sea $t_1\lambda_1, t_2\lambda_2 \in \mathbb{S}_1^1$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Así

$$\begin{aligned}
 t_1\lambda_1 \bullet (t_2\lambda_2 \bullet \mathbf{z}) &= t_1\lambda_1 \bullet (t_2^{p_1}\lambda_2^{u_1}z_1, \dots, t_2^{p_n}\lambda_2^{u_n}z_n) \\
 &= (t_1^{p_1}\lambda_1^{u_1}t_2^{p_1}\lambda_2^{u_1}z_1, \dots, t_1^{p_n}\lambda_1^{u_n}t_2^{p_n}\lambda_2^{u_n}z_n) \\
 &= ((t_1t_2)^{p_1}(\lambda_1\lambda_2)^{u_1}z_1, \dots, (t_1t_2)^{p_n}(\lambda_1\lambda_2)^{u_n}z_n) \\
 &= t_1t_2\lambda_1\lambda_2 \bullet \mathbf{z} \\
 &= t_1\lambda_1t_2\lambda_2 \bullet \mathbf{z}.
 \end{aligned}$$

Así \bullet es una acción. □

Definición 4.2. A una acción como la del lema anterior se le llama una \mathbb{C}^* -acción polar sobre \mathbb{C}^n con pesos radiales (p_1, \dots, p_n) y con pesos polares (u_1, \dots, u_n) .

Observación 4.3. Se puede ver que una \mathbb{C}^* -acción polar, es en realidad una combinación de dos acciones, una acción de \mathbb{R}^+ determinada por los pesos radiales y una acción de \mathbb{S}^1 determinada por los pesos polares.

Definición 4.4. Sea $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio en las n variables (z_1, \dots, z_n) y sean a, b enteros positivos.

Diremos que f es un **polinomio casi-homogéneo polar** con pesos radiales $(p_1, \dots, p_n; a)$ y pesos polares $(u_1, \dots, u_n; b)$, si se cumple la siguiente identidad funcional:

$$f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) = t^a \lambda^b f(\mathbf{z}). \quad (4.1)$$

Donde \bullet es una \mathbb{C}^* -acción polar.

Corolario 4.5. Si f es un polinomio casi-homogéneo polar, entonces $f(\mathbf{0}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\lim_{t \rightarrow 0} t\lambda \bullet \mathbf{z} = \mathbf{0}$ y por ser f continua se tiene que

$$f(\mathbf{0}) = f(\lim_{t \rightarrow 0} t\lambda \bullet \mathbf{z}) = \lim_{t \rightarrow 0} t^a \lambda^b f(\mathbf{z}) = 0 \quad (4.2)$$

□

Ejemplo 4.6. Los polinomios casi-homogéneos y en particular los polinomios de Brieskorn-Pham son ejemplos de polinomios casi-homogéneos polares.

Ejemplo 4.7. Sea $f(\mathbf{z}) = v_1 z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n z_n^{a_n} \bar{z}_n$, con cada $a_j \geq 2$ y $v_j \in \mathbb{C}^*$ para $j = 1, \dots, n$.

Sean $a = \text{mcm}(a_1 + 1, \dots, a_n + 1)$, $b = \text{mcm}(a_1 - 1, \dots, a_n - 1)$, $p_j = \frac{a}{a_j + 1}$, $u_j = \frac{b}{a_j - 1}$ y $t\lambda \in \mathbb{C}^*$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) &= f(t^{p_1} \lambda^{u_1} z_1, \dots, t^{p_n} \lambda^{u_n} z_n) \\
&= v_1 t^{p_1 a_1} \lambda^{u_1 a_1} z_1^{a_1} t^{p_1} \lambda^{-u_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n t^{p_n a_n} \lambda^{u_n a_n} z_n^{a_n} t^{p_n} \lambda^{-u_n} \bar{z}_n \\
&= v_1 t^{p_1 a_1 + p_1} \lambda^{u_1 a_1 - u_1} z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n t^{p_n a_n + p_n} \lambda^{u_n a_n - u_n} z_n^{a_n} \bar{z}_n \\
&= v_1 t^{p_1(a_1 + 1)} \lambda^{u_1(a_1 - 1)} z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n t^{p_n(a_n + 1)} \lambda^{u_n(a_n - 1)} z_n^{a_n} \bar{z}_n \\
&= v_1 t^a \lambda^b z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n t^a \lambda^b z_n^{a_n} \bar{z}_n \\
&= t^a \lambda^b (v_1 z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \dots + v_n z_n^{a_n} \bar{z}_n) \\
&= t^a \lambda^b f(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Así f es un polinomio casi-homogéneo polar.

En general un polinomio en \mathbb{C}^n de la forma

$$f(\mathbf{z}) = v_1 z_1^{a_1} \overline{z_{\sigma(1)}} + \dots + v_n z_n^{a_n} \overline{z_{\sigma(n)}},$$

es llamado un **polinomio de Brieskorn-Pham torcido** de clase $\{a_1, \dots, a_n; \sigma\}$, donde σ es una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

En [29] se puede ver una prueba de que este tipo de polinomios son polinomios casi-homogéneos polares.

Ejemplo 4.8. Sean $f(\mathbf{z}) = \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n (z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n})$, con $a_j \geq 1$; $b_j = \prod_{i=1, i \neq j}^n a_i$, $m = \text{mcd}(b_1, \dots, b_n)$ y $p_j = u_j = \frac{b_j}{m}$ para $j = 1, \dots, n$.

Igualmente definimos

$$a = \frac{a_1 \cdots a_n + \sum_{j=1}^n b_j}{m} \quad \text{y} \quad b = \frac{a_1 \cdots a_n - \sum_{j=1}^n b_j}{m}.$$

Así para $t\lambda \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) &= f(t^{p_1} \lambda^{u_1} z_1, \dots, t^{p_n} \lambda^{u_n} z_n) \\
&= t^{p_1} \lambda^{-u_1} \bar{z}_1 \cdots t^{p_n} \lambda^{-u_n} \bar{z}_n (t^{p_1 a_1} \lambda^{u_1 a_1} z_1^{a_1} + \dots + t^{p_n a_n} \lambda^{u_n a_n} z_n^{a_n}) \\
&= t^{p_1 + \dots + p_n} \lambda^{-(u_1 + \dots + u_n)} (\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n) (t^{\frac{a_1 \cdots a_n}{m}} \lambda^{\frac{a_1 \cdots a_n}{m}} z_1^{a_1} + \dots + t^{\frac{a_1 \cdots a_n}{m}} \lambda^{\frac{a_1 \cdots a_n}{m}} z_n^{a_n}) \\
&= t^{\frac{a_1 \cdots a_n + \sum_{j=1}^n b_j}{m}} \lambda^{\frac{a_1 \cdots a_n - \sum_{j=1}^n b_j}{m}} (\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n) (z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}) \\
&= t^a \lambda^b (\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n) (z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}) \\
&= t^a \lambda^b f(\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Así f es un polinomio casi-homogéneo polar.

Ejemplo 4.9. Sean $f_1(z_1, \dots, z_n)$ y $f_2(z_{n+1}, \dots, z_m)$ polinomios casi-homogéneos polares, con pesos radiales $(p_1, \dots, p_n; a_1)$ y $(p_{n+1}, \dots, p_m; a_2)$ respectivamente, y con pesos polares $(u_1, \dots, u_n; b_1)$ y $(u_{n+1}, \dots, u_m; b_2)$ respectivamente. Sean:

$$r = \text{mcd}(a_1, a_2), \quad a'_1 = \frac{a_1}{r}, \quad a'_2 = \frac{a_2}{r},$$

$$s = \text{mcd}(b_1, b_2), \quad b'_1 = \frac{b_1}{s}, \quad b'_2 = \frac{b_2}{s}.$$

Definimos la \mathbb{C}^* -acción polar

$$\bullet: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(t\lambda, \mathbf{z}) \mapsto (t^{p_1 a'_2} \lambda^{u_1 b'_2} z_1, \dots, t^{p_n a'_2} \lambda^{u_n b'_2} z_n, t^{p_{n+1} a'_1} \lambda^{u_{n+1} b'_1} z_{n+1}, \dots, t^{p_m a'_1} \lambda^{u_m b'_1} z_m).$$

Entonces para $t\lambda \in \mathbb{C}^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(t\lambda \bullet (z_1, \dots, z_m)) &= (f_1 + f_2)(t^{p_1 a'_2} \lambda^{u_1 b'_2} z_1, \dots, t^{p_m a'_1} \lambda^{u_m b'_1} z_m) \\ &= f_1(t^{p_1 a'_2} \lambda^{u_1 b'_2} z_1, \dots, t^{p_n a'_2} \lambda^{u_n b'_2} z_n) + f_2(t^{p_{n+1} a'_1} \lambda^{u_{n+1} b'_1} z_{n+1}, \dots, t^{p_m a'_1} \lambda^{u_m b'_1} z_m) \\ &= f_1(t^{a'_2} \lambda^{b'_2} \bullet (z_1, \dots, z_n)) + f_2(t^{a'_1} \lambda^{b'_1} \bullet (z_{n+1}, \dots, z_m)) \\ &= t^{\frac{a_1 a_2}{r}} \lambda^{\frac{b_1 b_2}{s}} f_1(z_1, \dots, z_n) + t^{\frac{a_1 a_2}{r}} \lambda^{\frac{b_1 b_2}{s}} f_2(z_{n+1}, \dots, z_m) \\ &= t^{\text{mcm}(a_1, a_2)} \lambda^{\text{mcm}(b_1, b_2)} (f_1 + f_2)(z_1, \dots, z_m) \end{aligned}$$

Así $(f_1 + f_2)$ es un polinomio casi-homogéneo polar.

4.2. Fibraciones

Un polinomio casi-homogéneo polar f es una función analítica real y para estudiar sus puntos críticos, vamos a considerar a f definida como $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + ih(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{donde } \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}. \quad (4.3)$$

con $g, h: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones reales analíticas.

Se tiene que dada una función analítica $k: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos las siguientes igualdades que relacionan a k en las variables \mathbf{x}, \mathbf{y} y a k en variables $\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}$:

$$\frac{\partial k}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} - i \frac{\partial k}{\partial y_j} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial k}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} + i \frac{\partial k}{\partial y_j} \right). \quad (4.4)$$

De esta manera tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial y_j} + i \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial y_j} \right) \right) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial y_j} + i \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial y_j} \right) \right). \quad (4.5)$$

4.2.1. Identidades de Euler

Sea $f(\mathbf{z})$ un polinomio casi-homogéneo polar, con pesos radiales $(p_1, \dots, p_n; a)$ y con pesos polares $(u_1, \dots, u_n; b)$. Si consideramos la identidad funcional (4.1), tenemos que sus derivadas parciales respecto a t y λ son

$$\begin{aligned} at^{a-1}\lambda^b f(\mathbf{z}) &= \nabla f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) \cdot (p_1 t^{p_1-1} \lambda^{u_1} z_1, \dots, p_n t^{p_n-1} \lambda^{u_n} z_n), \\ bt^a \lambda^{b-1} f(\mathbf{z}) &= \nabla f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) \cdot (u_1 t^{p_1} \lambda^{u_1-1} z_1, \dots, u_n t^{p_n} \lambda^{u_n-1} z_n). \end{aligned}$$

Ahora tomando a $t = 1$ y $\lambda = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} af(\mathbf{z}) &= \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (p_1 z_1, \dots, p_n z_n), \\ bf(\mathbf{z}) &= \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (u_1 z_1, \dots, u_n z_n). \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$af(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^n p_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}), \quad (4.6)$$

$$bf(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^n u_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}). \quad (4.7)$$

A estas dos últimas ecuaciones les denominaremos **Ecuaciones de Euler**. Ahora tomando derivadas parciales con respecto a z_j en la identidad funcional (4.1), obtenemos

$$t^a \lambda^b \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = \nabla f(t\lambda \bullet \mathbf{z}) \cdot (0, \dots, t^{p_j} \lambda^{u_j}, 0, \dots, 0),$$

De ahí que

$$t^a \lambda^b \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(t\lambda \bullet \mathbf{z}) t^{p_j} \lambda^{u_j},$$

lo cual implica

$$t^{a-p_j} \lambda^{b-u_j} \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(t\lambda \bullet \mathbf{z}).$$

Lo cual quiere decir que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ son polinomios casi-homogéneos polares.

Si consideramos sólo la \mathbb{R}^+ -acción sobre \mathbb{C}^n y sustituyendo (4.3) en la identidad funcional (4.1), obtenemos

$$g(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^a g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ y } h(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^a h(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.8)$$

de esta manera g y h son polinomios reales casi-homogéneos. De igual forma, calculamos sus derivadas parciales con respecto a x_j y y_j , las cuales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^{a-p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \frac{\partial g}{\partial y_j}(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^{a-p_j} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^{a-p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \frac{\partial h}{\partial y_j}(t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = t^{a-p_j} \frac{\partial h}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.10)$$

Así las derivadas parciales también son polinomios reales casi-homogéneos.

Dado que $\lim_{t \rightarrow 0} t \bullet (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ y que todas las derivadas parciales son continuas, entonces por (4.9) y por (4.10) se tiene que todas las derivadas parciales se anulan en $\mathbf{0}$. Ahora como las parciales se hacen cero, por (4.4) y por (4.5), se tiene que $\mathbf{0}$ es un punto crítico y por lo tanto 0 es un valor crítico.

Observación 4.10. Notemos que f como función analítica real tiene dos tipos de puntos críticos: puntos $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tales que $\text{rango}_{\mathbb{R}} df_{\mathbf{z}} = 0$ y puntos $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tales que $\text{rango}_{\mathbb{R}} df_{\mathbf{z}} = 1$. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ un punto con $\text{rango}_{\mathbb{R}} df_{\mathbf{z}} = 0$, de esta forma todas las derivadas parciales de (4.9) y (4.10) se anulan, así por (4.4) y (4.5), las parciales $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ también se anulan y por las identidades de Euler, (4.6) y (4.7); tenemos que $f(\mathbf{z}) = 0$.

Nos interesa probar que los polinomios casi-homogéneos polares tienen valor crítico aislado, para lo cual basta probar que el 0 único valor crítico.

Proposición 4.11. *Si $f(\mathbf{z})$ es un polinomio casi-homogéneo polar, entonces 0 es el único valor crítico.*

DEMOSTRACIÓN. Usando coordenadas polares (r, θ) en \mathbb{C} , tenemos que f es de la forma

$$f(\mathbf{z}) = (|f(\mathbf{z})|, \arg f(\mathbf{z})).$$

Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tal que $f(\mathbf{z}) = w \neq 0$ y consideremos $\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_\phi \in T_{\mathbf{z}}\mathbb{C}^n$, los vectores tangentes de las órbitas \mathbb{R}^+ y \mathbb{S}_1^1 del vector \mathbf{z} , esto es

$$\mathbf{v}_t = \frac{d}{dt}(t \bullet \mathbf{z})|_{t=1} = \left(\frac{d}{dt}(t^{p_1} z_1)|_{t=1}, \dots, \frac{d}{dt}(t^{p_n} z_n)|_{t=1} \right) = (p_1 z_1, \dots, p_n z_n).$$

$$\mathbf{v}_\phi = \frac{d}{d\phi}(e^{i\phi} \bullet \mathbf{z})|_{\phi=0} = \left(\frac{d}{d\phi}(e^{i\phi u_1} z_1)|_{\phi=0}, \dots, \frac{d}{d\phi}(e^{i\phi u_n} z_n)|_{\phi=0} \right) = (iu_1 z_1, \dots, iu_n z_n).$$

Ahora consideremos la diferencial de f y usando la identidad funcional (4.1), obtenemos

$$df_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}_t) = \frac{d}{dt}f(t \bullet \mathbf{z})|_{t=1} = \frac{d}{dt}(t^a |f(\mathbf{z})|, \arg f(\mathbf{z}))|_{t=1} = (a|w|, 0).$$

$$df_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}_\phi) = \frac{d}{d\phi}f(e^{i\phi} \bullet \mathbf{z})|_{\phi=0} = \frac{d}{d\phi}(|f(\mathbf{z})|, b\phi + \arg f(\mathbf{z}))|_{\phi=0} = (0, b).$$

De esta manera si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ con $f(\mathbf{z}) \neq 0$, entonces \mathbf{z} es un punto regular y así se tiene que 0 es el único valor crítico. \square

4.2.2. Fibraciones

En el Capítulo 2 mostramos la existencia de fibraciones asociadas a los polinomios casi-homogéneos, en esta sección se generalizan estos resultados para los polinomios casi-homogéneos polares.

Definamos $V = f^{-1}(0)$, por la Proposición 4.11 tenemos que $f: \mathbb{C}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una submersión. A continuación veremos que esta restricción es en realidad un haz fibrado.

Proposición 4.12. *La restricción $f: \mathbb{C}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{C}^*$ es un haz fibrado.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos una cubierta abierta para \mathbb{C}^* dada por los siguientes conjuntos:

$$U_0 = \{\rho \in \mathbb{C}^* \mid \arg \rho \neq \pi\} \text{ y } U_1 = \{\rho \in \mathbb{C}^* \mid \arg \rho \neq 0\}.$$

Consideremos al abierto U_0 y tomemos a $f^{-1}(1)$ como la fibra, así nos interesa dar un homeomorfismo entre $f^{-1}(1) \times U_0$ y $f^{-1}(U_0)$.

Para esto definamos la siguiente función

$$\begin{aligned} \phi_0: f^{-1}(1) \times U_0 &\rightarrow f^{-1}(U_0) \\ (\mathbf{z}, t\lambda) &\mapsto t^{\frac{1}{a}} \lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Por la identidad funcional (4.1), tenemos que

$$f(t^{\frac{1}{a}} \lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z}) = t\lambda f(\mathbf{z})$$

y como $\mathbf{z} \in f^{-1}(1)$, se tiene que

$$t\lambda f(\mathbf{z}) = t\lambda.$$

De esta manera $t^{\frac{1}{a}}\lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z} \in f^{-1}(U_0)$ y así la función está bien definida.

La diferenciabilidad de ϕ_0 es inmediata, sólo basta ver que posee una inversa, para lo cual proponemos la siguiente función

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1}: f^{-1}(U_0) &\rightarrow f^{-1}(1) \times U_0 \\ \mathbf{z} &\mapsto (t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet \mathbf{z}, t\lambda) \end{aligned}$$

donde $f(\mathbf{z}) = t\lambda$.

Notemos que si $f(\mathbf{z}) = t\lambda$, entonces $f(t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet \mathbf{z}) = t^{-1}\lambda^{-1}f(\mathbf{z}) = 1$, así $t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet \mathbf{z} \in f^{-1}(1)$ y por lo tanto la función ϕ_0^{-1} está bien definida.

Sea $(\mathbf{z}, t\lambda) \in f^{-1}(1) \times U_0$, por lo tanto tenemos que

$$\phi_0^{-1} \circ \phi_0(\mathbf{z}, t\lambda) = \phi_0^{-1}(t^{\frac{1}{a}}\lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z}) = (t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet (t^{\frac{1}{a}}\lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z}), t\lambda f(\mathbf{z})) = (\mathbf{z}, t\lambda).$$

Si $\mathbf{z} \in f^{-1}(U_0)$, entonces

$$\phi_0 \circ \phi_0^{-1}(\mathbf{z}) = \phi_0(t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet \mathbf{z}, t\lambda) = (t^{\frac{1}{a}}\lambda^{\frac{1}{b}} \bullet t^{\frac{-1}{a}}\lambda^{\frac{-1}{b}} \bullet \mathbf{z}) = \mathbf{z}.$$

De esta manera ϕ_0 y ϕ_0^{-1} son inversas una de la otra y por lo tanto tenemos un difeomorfismo.

Para el abierto U_1 , consideramos también a $f^{-1}(1)$ como la fibra y consideramos la función

$$\begin{aligned} \phi_1: f^{-1}(1) \times U_1 &\rightarrow f^{-1}(U_1) \\ (\mathbf{z}, t\lambda) &\mapsto t^{\frac{1}{a}}\lambda^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{z}. \end{aligned}$$

De forma análoga, se prueba que ϕ_1 es un difeomorfismo y de esta manera tenemos un haz fibrado. \square

Ahora consideremos $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, la esfera con centro en $\mathbf{0}$ y radio $\epsilon > 0$ y definamos $K_\epsilon = \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \cap V$. A continuación veremos que también tenemos la fibración de Milnor sobre $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K$.

Proposición 4.13. *La función*

$$\phi = \frac{f}{\|f\|}: \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}_1,$$

es un haz fibrado, para cualquier $\epsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN. En la Proposición 2.4 se probó que para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ con $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, la órbita de la \mathbb{R}^+ acción es transversal a cualquier esfera alrededor del $\mathbf{0}$.

Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus V$, entonces tenemos que $e^{i\theta} \bullet \mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus V$. Ahora consideremos la curva $p(t) = e^{i\frac{t}{b}} \bullet \mathbf{z}$, así tenemos que

$$\frac{d\phi(p(t))}{dt} = \frac{d\left(\frac{e^{it}f(\mathbf{z})}{\|f(\mathbf{z})\|}\right)}{dt} = ie^{it}\phi(\mathbf{z}) \neq 0$$

así ϕ es una submersión.

Finalmente para probar que es un haz fibrado, tomemos algún $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y sea $U_\delta = \{e^{i(t+\theta)} \mid |t| \leq \delta\}$ para algún $\delta > 0$ y consideremos la función

$$\begin{aligned} \omega: U_\delta \times \phi^{-1}(e^{i\theta}) &\rightarrow \phi^{-1}(U_\delta) \\ (e^{i(t+\delta)}, \mathbf{z}) &\mapsto e^{i\frac{t}{b}} \bullet \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Notemos que $\phi(e^{i\frac{t}{b}} \bullet \mathbf{z}) = e^{it}\phi(\mathbf{z}) = e^{i(t+\theta)} \in U_\delta$, así tenemos que la función ω está bien definida.

Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} \omega^{-1}: \phi^{-1}(U_\delta) &\rightarrow U_\delta \times \phi^{-1}(e^{i\theta}) \\ \mathbf{z} &\mapsto (\phi(\mathbf{z}), e^{i\frac{-t}{b}} \bullet \mathbf{z}) \end{aligned}$$

donde $\phi(\mathbf{z}) = e^{i(t+\theta)}$.

Dado que $\phi(e^{i\frac{-t}{b}} \bullet \mathbf{z}) = e^{-it}e^{i(t+\theta)} = e^{i\theta}$, tenemos que ω^{-1} está bien definida.

Ahora sea $(e^{i(t+\theta)}, \mathbf{z}) \in U_\delta \times \phi^{-1}(e^{i\theta})$, entonces

$$\omega^{-1} \circ \omega(e^{i(t+\theta)}, \mathbf{z}) = \omega^{-1}(e^{i\frac{t}{b}} \bullet \mathbf{z}) = (e^{it}\phi(\mathbf{z}), e^{i\frac{-t}{b}} \bullet e^{i\frac{t}{b}} \bullet \mathbf{z}) = (e^{i(t+\theta)}, \mathbf{z}).$$

De igual forma si tomamos $\mathbf{z} \in \phi^{-1}(U_\delta)$ tenemos que:

$$\omega \circ \omega^{-1}(\mathbf{z}) = \omega(e^{i(t+\delta)}, e^{i\frac{-t}{b}} \bullet \mathbf{z}) = e^{i\frac{t}{b}} \bullet e^{i\frac{-t}{b}} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

Así ω y ω^{-1} son inversas una de la otra y obtenemos un haz fibrado. \square

Si denominamos por $f_{\mathbb{S}^1}: f^{-1}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ la restricción de la fibración $f: \mathbb{C}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{C}^*$ de la Proposición 4.12 al tubo de Milnor, entonces tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.14. *La fibración $f_{\mathbb{S}^1}: f^{-1}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ es equivalente a la fibración de Milnor $\phi: \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$.*

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia queda determinada por el siguiente difeomorfismo

$$\begin{aligned}\psi_\epsilon: f^{-1}(\mathbb{S}^1) &\rightarrow \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \\ \mathbf{z} &\mapsto t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z}\end{aligned}$$

donde $t(\mathbf{z})$ es el único número positivo tal que $t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Proponemos como su inversa a la función

$$\psi_\epsilon^{-1}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{\|f(\mathbf{z})\|} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z}.$$

Para ver que esta última función es efectivamente su inversa, sea $\mathbf{z} \in f^{-1}(\mathbb{S}^1)$ y notemos que

$$\psi_\epsilon^{-1} \circ \psi_\epsilon(\mathbf{z}) = \psi_\epsilon^{-1}(t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{t(\mathbf{z})^a \|f(\mathbf{z})\|} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet t(\mathbf{z}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

Por otra parte si tomamos $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon$, tenemos que

$$\psi_\epsilon \circ \psi_\epsilon^{-1}(\mathbf{z}) = \psi_\epsilon \left(\left(\frac{1}{\|f(\mathbf{z})\|} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z} \right) = \|f(\mathbf{z})\|^{\frac{1}{a}} \bullet \left(\frac{1}{\|f(\mathbf{z})\|} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

Así efectivamente ambas funciones son inversas una de la otra y por tanto obtenemos el difeomorfismo necesitado. \square

4.3. Teorema del join

En el estudio de la topología de la fibra en la fibración de Milnor, un resultado importante ha sido el teorema del join. Una versión de este teorema probada por Sebastiani y Thom [25] nos dice que si $g: (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ y $h: (\mathbb{C}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ son funciones holomorfas con singularidad aislada en el origen y si consideramos a la función $f(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w})$, entonces existe una equivalencia homotópica entre la fibra de la fibración de Milnor de f y el join de las fibras de la fibración de Milnor de h y g .

Oka [20] probó un resultado análogo cuando g y h son polinomios casi-homogéneos, no necesariamente con punto crítico aislado y Sakamoto probó el resultado general cuando g y h son funciones holomorfas con singularidades arbitrarias.

El propósito de esta sección será generalizar el teorema del join de Oka para polinomios casi-homogéneos polares.

4.3.1. El join de espacios topológicos

Dado un espacio topológico X , entonces el cono de X es la unión de todos los segmentos de línea que conectan los puntos de X con un vértice externo. De igual forma la suspensión de X es la unión de todos los segmentos de línea que conectan los puntos de X con dos vértices externos. Podemos generalizar este proceso para dos subespacios topológicos arbitrarios X y Y de algún \mathbb{R}^n , de esta forma obtenemos un espacio $X * Y$ que consiste de todos los segmentos de línea que unen un punto de X con un punto de Y y al cual llamaremos el join de X y Y . Más formalmente, tenemos el siguiente concepto.

Definición 4.15. Sean X y Y dos espacios topológicos e $I = [0, 1]$. Definimos el **join** de X y Y , denotado por $X * Y$ al siguiente conjunto

$$X * Y = X \times Y \times I / \sim$$

donde \sim es la siguiente relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) &\sim (\mathbf{x}', \mathbf{y}, 0) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{w}, 1) &\sim (\mathbf{z}, \mathbf{w}', 1). \end{aligned}$$

La topología de este conjunto será la topología cociente.

Notemos que en realidad estamos identificando el subespacio $X \times Y \times \{0\}$ con X y al subespacio $X \times Y \times \{1\}$ con Y .

Ejemplo 4.16. Sean $X = Y = I = [0, 1]$ con la topología usual. De esta manera tenemos que el espacio $X \times Y \times I$ es un cubo unitario y así el join $X * Y$ de X y Y es un tetraedro.

Ejemplo 4.17. Sean X y Y espacios topológicos. Entonces tenemos que

1. Si $Y = \{y\}$, entonces $X * Y$ coincide con el cono de X .
2. Si $Y = \{y_1, y_2\}$, entonces $X * Y$ coincide con la suspensión de X .

Otra manera de describir a $X * Y$ es a través de combinaciones lineales $t_1x + t_2y$ con $0 \leq t_1 \leq 1$, $0 \leq t_2 \leq 1$ y $t_1 + t_2 = 1$, esto debido a que $0x + 1y = y$ y $1x + 0y = x$ corresponden a las identificaciones del join de los espacios. De esta manera el join de n espacios topológicos X_n se construye como el espacio de combinaciones lineales $t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ con $0 \leq t_i \leq 1$ y $t_1 + \dots + t_n = 1$.

4.3.2. Teorema del join

A lo largo de esta sección escribiremos $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m$.

Teorema 4.18. Sean $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $h: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ polinomios casi homogéneos polares. Consideremos el polinomio sobre $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ definido por

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w}),$$

el cual es también un polinomio casi-homogéneo polar. Definimos

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \\ Y &= g^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^n, \\ Z &= h^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^m. \end{aligned}$$

Entonces existe una equivalencia homotópica $\alpha: X \rightarrow Y * Z$.

Notemos que por el Ejemplo 4.9 tenemos que $f(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ es un polinomio casi-homogéneo polar, de forma que solo resta probar la equivalencia homotópica.

La prueba de este teorema la dividiremos en varios lemas y primero construiremos un espacio en el que nos auxiliaremos más adelante.

Supongamos que g tiene pesos radiales $(p_1, \dots, p_n; a)$ y pesos polares $(u_1, \dots, u_n; c)$, mientras que h tiene pesos radiales $(q_1, \dots, q_m; b)$ y pesos polares $(v_1, \dots, v_m; d)$.

Lema 4.19. Definimos en X la siguiente relación: diremos que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in X$ son equivalentes (lo denotaremos por $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}', \mathbf{w}')$) si y sólo si se cumple que:

1. $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ y $h(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w}') = 0$.
2. $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ y $g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}') = 0$.
3. $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ donde $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$.

Entonces la relación anterior es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X$, entonces si

1. $g(\mathbf{z}) = 0$, entonces $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.
2. $g(\mathbf{z}) = 1$, dado que $g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w}) = 1$, entonces $h(\mathbf{w}) = 0$, por lo que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.

3. $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$, entonces es inmediato que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.

Ahora sean $(\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in X$ y supongamos que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}', \mathbf{w}')$, de forma inmediata tenemos que $(\mathbf{z}', \mathbf{w}') \sim (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.

Por último si $(\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}'), (\mathbf{z}'', \mathbf{w}'') \in X$ tal que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ y $(\mathbf{z}', \mathbf{w}') \sim (\mathbf{z}'', \mathbf{w}'')$.

Supongamos que $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ y $h(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w}') = 0$, de esta forma no queda más que $g(\mathbf{z}') = 1$, así tenemos que

1. Si $\mathbf{z}' = \mathbf{z}''$ y $h(\mathbf{w}') = h(\mathbf{w}'') = 0$, entonces se tiene que $\mathbf{z} = \mathbf{z}''$ y $h(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w}'') = 0$, por lo tanto $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}'', \mathbf{w}'')$.
2. No puede ser $\mathbf{w}' = \mathbf{w}''$ y $g(\mathbf{z}') = g(\mathbf{z}'') = 0$, por que $g(\mathbf{z}') = 1$.
3. El último caso tampoco puede ocurrir por la misma situación que el caso anterior.

En el caso de que $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ y $g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}') = 0$, la prueba es igual a la anterior y por lo tanto se tiene que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}', \mathbf{w}')$.

Finalmente supongamos que $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ donde $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$. De esta forma $h(\mathbf{w}') \neq 0, 1$, por lo que si $(\mathbf{z}', \mathbf{w}') \sim (\mathbf{z}'', \mathbf{w}'')$, no queda más que $\mathbf{z}' = \mathbf{z}''$ y $\mathbf{w}' = \mathbf{w}''$ con $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$. De esta manera tenemos que $\mathbf{z} = \mathbf{z}''$ y $\mathbf{w} = \mathbf{w}''$ con $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$, por lo tanto $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{z}'', \mathbf{w}'')$.

Así la relación anterior, es una relación de equivalencia. \square

A continuación, definimos el siguiente espacio topológico \tilde{X} :

1. Como conjunto, \tilde{X} es el conjunto de clases de equivalencia de X dado por la relación de equivalencia 4.19.
2. La topología de \tilde{X} es la más débil que hace que las siguientes funciones sean continuas:

$$\phi_Y : X \setminus \{ (\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in X \mid \mathbf{w} = \mathbf{w}' \text{ y } g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}') = 0 \} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus g^{-1}(0),$$

$$\phi_Y([\mathbf{z}, \mathbf{w}]) = \phi_Y([\mathbf{z}, *]) = \mathbf{z},$$

$$\phi_Z : X \setminus \{ (\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in X \mid \mathbf{z} = \mathbf{z}' \text{ y } h(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w}') = 0 \} \rightarrow \mathbb{C}^m \setminus h^{-1}(0),$$

$$\phi_Z([\mathbf{z}, \mathbf{w}]) = \phi_Z([*, \mathbf{w}]) = \mathbf{w}.$$

Esta topología es estrictamente más débil que la topología cociente de \tilde{X} .

Veamos que \tilde{X} tiene el mismo tipo de homotopía que X .

Sea ϵ un número positivo suficientemente pequeño y sea

$$N_{1,\epsilon} = \{ (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X \mid \|h(\mathbf{w})\| \leq \epsilon \}, \epsilon > 0,$$

$$N_{2,\epsilon} = \{ (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X \mid \|g(\mathbf{z})\| \leq \epsilon \}, \epsilon > 0.$$

Notemos que estos dos conjuntos son ajenos, ya que si suponemos que existe un punto $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in N_{1,\epsilon} \cap N_{2,\epsilon}$, entonces tendríamos que $1 = g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{z}) \leq \|g(\mathbf{z})\| + \|h(\mathbf{w})\| \leq 2\epsilon$, pero esto es para cualquier ϵ suficientemente pequeño, lo cual es imposible.

Ahora sea $\rho(t)$ una función real sobre \mathbb{R} , que satisface

1. $\rho(t)$ es monótona decreciente en el intervalo $(\epsilon, 2\epsilon)$ y
2. $\rho^{-1}(1) = (-\infty, \epsilon]$, $\rho^{-1}(0) = [2\epsilon, \infty)$.

A continuación definimos la siguiente homotopía de la identidad de X

$$H : X \times I \rightarrow X, \text{ con } H(*, t) = H_t(*),$$

como sigue:

1. Para puntos en $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X \setminus (N_{1,2\epsilon} \cup N_{2,2\epsilon})$, definimos $H_t(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.
2. Para puntos en $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in N_{1,2\epsilon}$, definimos $H_t(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t))$ donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \left(\frac{r_t}{r_0} \right)^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta_t}{c}} \bullet \mathbf{z} \\ \mathbf{w}(t) &= (1 - t\rho(\|h(\mathbf{w})\|))^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{w}, \\ \text{con} \\ r_t &= \|1 - h(\mathbf{w}(t))\|, \\ \theta_t &= \arg \left(\frac{1 - h(\mathbf{w}(t))}{1 - h(\mathbf{w})} \right). \end{aligned}$$

3. Para puntos en $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in N_{2,2\epsilon}$, definimos $H_t(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t))$ donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= (1 - t\rho(\|g(\mathbf{z})\|))^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z}, \\ \mathbf{w}(t) &= \left(\frac{s_t}{s_0}\right)^{\frac{1}{b}} e^{i\frac{\lambda_t}{d}} \bullet \mathbf{w} \\ \text{con} \\ s_t &= \|1 - g(\mathbf{z}(t))\|, \\ \lambda_t &= \arg\left(\frac{1 - g(\mathbf{z}(t))}{1 - h(\mathbf{z})}\right).\end{aligned}$$

Ahora como los conjuntos $N_{1,2\epsilon}$, $N_{2,2\epsilon}$ son ajenos, la continuidad de H restringida a los puntos 2 y 3 es inmediata. Ahora H restringida a los puntos 2 y 3, se puede extender a la cerradura de esos conjuntos de manera única a una función continua, digamos \hat{H} y consideremos $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \partial(N_{1,2\epsilon} \cup N_{2,2\epsilon})$.

Por una parte $H(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ y por el otro lado, podemos considerar una sucesión de puntos $\{(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j) \mid j \in \mathbb{N}\} \subset N_{1,2\epsilon} \cup N_{2,2\epsilon}$ tal que $(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j) \rightarrow (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ y de esta manera tenemos que:

$$H(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j) \rightarrow \hat{H}(\mathbf{z}, \mathbf{w}).$$

Ahora como $\|h(\mathbf{w})\| \geq 2\epsilon$, $\|g(\mathbf{z})\| \geq 2\epsilon$ y suponiendo que podamos extraer una subsucesión contenida en $N_{1,2\epsilon}$, tenemos que $\|h(\mathbf{w}_j)\| \rightarrow \|h(\mathbf{w})\|$ por lo que $\rho(\|h(\mathbf{w}_j)\|) \rightarrow \rho(\|h(\mathbf{w})\|) = 0$. De esta manera $\mathbf{w}_j(t) \rightarrow \mathbf{w}$ e igualmente se sigue que $\mathbf{z}_j(t) \rightarrow \mathbf{z}$, por lo que

$$H(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j) \rightarrow (\mathbf{z}, \mathbf{w}).$$

En el caso de que la subsucesión esté contenida en $N_{2,2\epsilon}$, el argumento es similar.

Así $\hat{H}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, por lo tanto $H|_{X \setminus (N_{1,2\epsilon} \cup N_{2,2\epsilon})}$ y \hat{H} coinciden en su intersección y al ser ambas continuas, al unir los dominios sigue siendo una función continua la cual es precisamente H .

Lema 4.20. *La homotopía H permanece en $X = f^{-1}(1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X$, así tenemos los siguientes casos:

1. Sea $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in X \setminus (N_{1,\epsilon} \cup N_{2,\epsilon})$, así $H_t(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$.
2. Sea $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in N_{1,2\epsilon}$, si definimos $A_t = (1 - t\rho(\|h(\mathbf{w})\|))$, $B_t = \frac{r_t}{r_0}$ y $C_t = e^{i\theta_t}$, tenemos que

$$B_t C_t = \left(\frac{r_t}{r_0}\right) e^{i\theta} = \left(\frac{\|1 - h(\mathbf{w}(t))\|}{\|1 - h(\mathbf{w})\|}\right) e^{i \arg\left(\frac{1 - h(\mathbf{w}(t))}{1 - h(\mathbf{w})}\right)} = \frac{1 - h(\mathbf{w}(t))}{1 - h(\mathbf{w})}.$$

Ahora dado que g y h son polinomios casi homogéneos polares, tenemos que

$$g(\mathbf{z}(t)) = g(B_t^{\frac{p_1}{a}} C_t^{\frac{u_1}{c}} z_1, \dots, B_t^{\frac{p_n}{a}} C_t^{\frac{u_n}{c}} z_n) = B_t C_t g(\mathbf{z})$$

$$h(\mathbf{w}(t)) = h(A_t^{\frac{q_1}{b}} w_1, \dots, A_t^{\frac{q_m}{b}} w_m) = A_t h(\mathbf{w}).$$

Así

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) &= B_t C_t g(\mathbf{z}) + A_t h(\mathbf{w}), \\ &= \frac{1 - h(\mathbf{w}(t))}{1 - h(\mathbf{w})} g(\mathbf{z}) + A_t h(\mathbf{w}) \\ &= 1 - A_t h(\mathbf{w}) + A_t h(\mathbf{w}), \text{ ya que } g(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{w}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Sea $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in N_{2,2\epsilon}$, si definimos $D_t = (1 - t\rho(\|g(\mathbf{z})\|))$, $E_t = \frac{s_t}{s_0}$ y $F_t = e^{i\lambda t}$, tenemos que:

$$E_t F_t = \left(\frac{s_t}{s_0}\right) e^{i\lambda} = \left(\frac{\|1 - g(\mathbf{z}(t))\|}{\|1 - g(\mathbf{z})\|}\right) e^{i \arg\left(\frac{1 - g(\mathbf{z}(t))}{1 - g(\mathbf{z})}\right)} = \frac{1 - g(\mathbf{z}(t))}{1 - g(\mathbf{z})}.$$

Ahora dado que g y h son polinomios casi homogéneos polares, tenemos que

$$g(\mathbf{z}(t)) = g(D_t^{\frac{p_1}{a}} z_1, \dots, D_t^{\frac{p_n}{a}} z_n) = D_t g(\mathbf{z}).$$

$$h(\mathbf{w}(t)) = h(E_t^{\frac{q_1}{b}} F_t^{\frac{v_1}{d}} w_1, \dots, E_t^{\frac{q_m}{b}} F_t^{\frac{v_m}{d}} w_m) = E_t F_t h(\mathbf{w})$$

Así

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) &= D_t g(\mathbf{z}) + E_t F_t h(\mathbf{w}), \\ &= D_t g(\mathbf{z}) + \frac{1 - g(\mathbf{z}(t))}{1 - g(\mathbf{z})} h(\mathbf{w}) \\ &= D_t g(\mathbf{z}) + 1 - D_t g(\mathbf{z}), \text{ ya que } h(\mathbf{w}) = 1 - g(\mathbf{z}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Veamos que X tiene el mismo tipo de homotopía que \tilde{X} , para lo cual primero definamos $\bar{H}_1: \tilde{X} \rightarrow X$ de acuerdo al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_1} & X \\ \downarrow \pi & \nearrow \bar{H}_1 & \\ \tilde{X} & & \end{array} \quad (4.11)$$

donde π es la proyección natural, la cual es continua ya que la topología de \tilde{X} es más débil que la topología cociente. Ahora veamos que esta función está bien definida.

Para esto sean $(\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in X$ tales que

$$[(\mathbf{z}, \mathbf{w})] = [(\mathbf{z}', \mathbf{w}')]]$$

1. Si los puntos son de la forma 1 de la relación de equivalencia 4.19, tenemos que

$$H_1(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{z}, 0) \text{ y}$$

$$H_1(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = (\mathbf{z}', 0).$$

Por lo tanto $\bar{H}_1(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \bar{H}_1(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$.

2. Si los puntos son de la forma 2 de la relación de equivalencia 4.19, tenemos que

$$H_1(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (0, \mathbf{w}) \text{ y}$$

$$H_1(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = (0, \mathbf{w}').$$

Por lo tanto $\bar{H}_1(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \bar{H}_1(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$.

3. El otro caso es inmediato.

Así \bar{H}_1 está bien definida.

Lema 4.21. *La función \bar{H}_1 es continua.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]$, con $l \in \mathbb{N}$ una sucesión de puntos en \tilde{X} la cual converge a $[\mathbf{z}^*, \mathbf{w}^*]$ en \tilde{X} . De esta manera existe un entero N tal que para cualquier $l \geq N$,

$[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l] \in \pi(N_{2,\epsilon})$, ya que las proyecciones son abiertas. Así por la definición de H , tenemos que $H_1(\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l) = (0, \tilde{\mathbf{w}}^l)$ para $l \geq N$, donde:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}}^l &= \left(\frac{1}{r^l}\right)^{\frac{1}{b}} e^{i\frac{\theta^l}{a}} \bullet \mathbf{w}^l \\ r^l &= \|1 - g(\mathbf{z}^l)\| \rightarrow 1, \\ \theta^l &= -\arg(1 - g(\mathbf{z}^l)) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{\mathbf{w}}^l \rightarrow \mathbf{w}$, esto es $\overline{H}_1([\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]) \rightarrow [*, \mathbf{w}]$.

2. Sea $[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]$, una sucesión de puntos en \tilde{X} la cual converge a $[\mathbf{z}, *]$ en \tilde{X} . De esta manera existe un entero N tal que para cualquier $l \geq N$, $[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l] \in \pi(N_{1,\epsilon})$, ya que las proyecciones son abiertas. Así por la definición de H , tenemos que $H_1(\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l) = (\tilde{\mathbf{z}}^l, 0)$ para $l \geq N$, donde:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{z}}^l &= \left(\frac{1}{s^l}\right)^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\lambda^l}{c}} \bullet \mathbf{z}^l, \\ s^l &= \|1 - h(\mathbf{w}^l)\| \rightarrow 1, \\ \lambda^l &= -\arg(1 - h(\mathbf{w}^l)) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{\mathbf{z}}^l \rightarrow \mathbf{z}$, esto es $\overline{H}_1([\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]) \rightarrow [\mathbf{z}, *]$.

3. La continuidad en otros puntos es inmediata. □

Ahora definiremos la función \tilde{H} , de acuerdo al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & X \\ \downarrow \pi \times Id & & \downarrow \pi \\ \tilde{X} \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & \tilde{X} \end{array} \quad (4.12)$$

Lema 4.22. *La función \tilde{H} es continua.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de la continuidad de \tilde{H} es similar a la anterior, para esto, veamos la continuidad en los puntos de la forma $[*, \mathbf{w}]$. Sea $[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l] \rightarrow [*, \mathbf{w}]$ y

$t^l \rightarrow t$. De esta manera $\tilde{H}_t([\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]) = [\mathbf{z}^l(t^l), \mathbf{w}^l(t^l)]$. Por lo que existe un entero N tal que, para cualquier $l \geq N$, $[\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l] \in \phi(N_{2,\epsilon})$. De esta manera para $l \geq N$

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^l(t^l) &= (1 - t^l \rho(\|g(\mathbf{z}^l)\|))^{1/a} \bullet \mathbf{z}^l, \\ &= (1 - t^l)^{1/a} \bullet \mathbf{z}^l, \\ \mathbf{w}^l(t^l) &= \left\| \frac{1 - g(\mathbf{z}^l(t^l))}{1 - g(\mathbf{z}^l)} \right\|^{1/b} e^{i\theta^l/a} \bullet \mathbf{w}^l,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}1 - g(\mathbf{z}^l(t^l)) &= 1 - (1 - t^l)g(\mathbf{z}^l) \rightarrow 1 \\ \theta^l &= \arg\left(\frac{1 - g(\mathbf{z}^l(t^l))}{1 - g(\mathbf{z}^l)}\right) \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Por lo que $\mathbf{w}^l(t^l) \rightarrow \mathbf{w}$, esto implica que $\tilde{H}_t([\mathbf{z}^l, \mathbf{w}^l]) \rightarrow [*, \mathbf{w}]$.

La continuidad en otros puntos es similar. □

De esta manera tenemos que $H_1 = \overline{H}_1 \circ \pi$, por lo que $\overline{H}_1 \circ \pi$ es homotópico a Id_x . Además tenemos que $\tilde{H}(*, 0) = Id_{\tilde{X}}$ y $\pi \circ \overline{H}_1 = \tilde{H}(*, 1)$ es homotópico a $Id_{\tilde{X}}$. Por lo que X tiene el mismo tipo de homotopía que \tilde{X} .

Así que basta probar que \tilde{X} tiene el mismo tipo de homotopía que $Y * Z$. Esta prueba se dividirá en 3 pasos.

Paso 1 Consideremos el conjunto $R\tilde{X} = \{[\mathbf{z}, \mathbf{w}] \in \tilde{X} \mid g(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}\}$.

Lema 4.23. *Existe una equivalencia homotópica entre \tilde{X} y $R\tilde{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F la función definida como sigue

a) Para puntos $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tales que $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$, definimos:

$$F([\mathbf{z}, \mathbf{w}], t) = [\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)],$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \left(\frac{r_t}{r_0} \right)^{\frac{1}{a}} e^{i \frac{\alpha_t}{c}} \bullet \mathbf{z}, \\ \mathbf{w}(t) &= \left(\frac{s_t}{s_0} \right)^{\frac{1}{b}} e^{i \frac{\beta_t}{d}} \bullet \mathbf{w}, \\ r_t &= \left\| \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2} \right\| \\ \alpha_t &= \arg \left(\frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2g(\mathbf{z})} \right) \\ s_t &= \left\| \frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2} \right\| \\ \beta_t &= \arg \left(\frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2h(\mathbf{w})} \right). \end{aligned}$$

b) Para puntos $[\mathbf{z}, *]$ o $[*, \mathbf{w}]$, definimos

$$F([\mathbf{z}, *]) = [\mathbf{z}, *] \text{ y } F([*, \mathbf{w}]) = [*, \mathbf{w}]$$

Dado que para cualquier $[\mathbf{z}, \mathbf{w}] \in \tilde{X}$,

$$\mathbf{z}(1) = \left\| \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})}}{2g(\mathbf{z})} \right\|^{\frac{1}{a}} e^{i \arg \left(\frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})}}{2g(\mathbf{z})} \right) \frac{1}{c}} \bullet \mathbf{z}.$$

Entonces tenemos que

$$g(\mathbf{z}(1)) = \left(\frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})}}{2g(\mathbf{z})} \right) g(\mathbf{z}) = \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Si $g(\mathbf{z}) = 0, 1$, se sigue de inmediato que $g(\mathbf{z}(t)) \in \mathbb{R}$, así F está bien definida y al ser producto y composición de funciones continuas, F es continua.

Y como $F([\mathbf{z}, \mathbf{w}], 0) = Id_{\tilde{X}}$, entonces F es en realidad una homotopía entre \tilde{X} y $R\tilde{X}$. \square

Proposición 4.24. *La homotopía F deja fijo a $R\tilde{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para puntos tales que $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$, tenemos por la definición de F que:

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{z}(t)) &= g\left(\left(\frac{r_t}{r_0}\right)^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\alpha t}{c}} \bullet \mathbf{z}\right) = \frac{r_t}{r_0} e^{i\alpha t} g(\mathbf{z}) \\
&= \left\| \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})} \right\| e^{i \arg\left(\frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2g(\mathbf{z})}\right)} g(\mathbf{z}) \\
&= \left\| \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2g(\mathbf{z})} \right\| e^{i \arg\left(\frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2g(\mathbf{z})}\right)} g(\mathbf{z}) \\
&= \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2g(\mathbf{z})} g(\mathbf{z}) \\
&= \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})})}{2}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{w}(t)) &= h\left(\left(\frac{s_t}{s_0}\right)^{\frac{1}{b}} e^{i\frac{\beta t}{d}} \bullet \mathbf{w}\right) = \frac{s_t}{s_0} e^{i\beta t} h(\mathbf{w}) \\
&= \left\| \frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})} \right\| e^{i \arg\left(\frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2h(\mathbf{w})}\right)} h(\mathbf{z}) \\
&= \left\| \frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2h(\mathbf{w})} \right\| e^{i \arg\left(\frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2h(\mathbf{w})}\right)} h(\mathbf{w}) \\
&= \frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2h(\mathbf{w})} h(\mathbf{w}) \\
&= \frac{h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2}
\end{aligned}$$

De esta manera se sigue que:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) &= g(\mathbf{z}(t)) + h(\mathbf{w}(t)) \\
&= \frac{g(\mathbf{z}) + \overline{g(\mathbf{z})} + h(\mathbf{w}) + \overline{h(\mathbf{w})} + (1-t)(g(\mathbf{z}) - \overline{g(\mathbf{z})} + h(\mathbf{w}) - \overline{h(\mathbf{w})})}{2}
\end{aligned}$$

y como tenemos que $f(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w}) = 1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) &= \frac{1 + \overline{g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w})} + (1-t)(1 - \overline{g(\mathbf{z}) + h(\mathbf{w})})}{2} \\ &= \frac{2 + (1-t)(0)}{2} = 1 \end{aligned}$$

De esta manera F deja fijo a $R\tilde{X}$. □

Paso 2 Definamos el siguiente conjunto

$$R_+\tilde{X} = \{[\mathbf{z}, \mathbf{w}] \in R\tilde{X} \mid g(\mathbf{z}) \geq 0 \text{ y } h(\mathbf{w}) \geq 0\}.$$

Lema 4.25. $R\tilde{X}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $R_+\tilde{X}$.

DEMOSTRACIÓN. De forma similar a la prueba anterior, definamos la siguiente homotopía $G: R\tilde{X} \rightarrow R_+\tilde{X}$.

a) Para puntos $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tales que $g(\mathbf{z}) \leq 0$, definimos G como

$$G([\mathbf{z}, \mathbf{w}], t) = [\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)],$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= (1-t)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z}, \\ \mathbf{w}(t) &= \left(\frac{1-g(\mathbf{z}(t))}{1-g(\mathbf{z})} \right)^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{w}. \end{aligned}$$

b) Para puntos $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tales que $h(\mathbf{w}) \leq 0$, definimos G como

$$G([\mathbf{z}, \mathbf{w}], t) = [\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)],$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \left(\frac{1-h(\mathbf{w}(t))}{1-h(\mathbf{w})} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z}, \\ \mathbf{w}(t) &= (1-t)^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{w}. \end{aligned}$$

c) Para otros puntos, tomemos a G como la identidad.

La continuidad de G se sigue por la misma razón que en los casos anteriores, así G es una homotopía. □

Lema 4.26. *La homotopía G permanece dentro de $R\tilde{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de G , tenemos que

a) Para puntos $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tales que $g(\mathbf{z}) \leq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}(t)) &= (1-t)g(\mathbf{z}), \\ h(\mathbf{w}(t)) &= \frac{1-g(\mathbf{z}(t))}{1-g(\mathbf{z})}h(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

por lo que

$$f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) = (1-t)g(\mathbf{z}) + \frac{1-g(\mathbf{z}(t))}{1-g(\mathbf{z})}(1-g(\mathbf{z})) = 1$$

b) Para puntos $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tales que $h(\mathbf{w}) \leq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}(t)) &= \frac{1-h(\mathbf{w}(t))}{1-h(\mathbf{w})}g(\mathbf{z}), \\ h(\mathbf{w}(t)) &= (1-t)h(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

por lo que

$$f(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) = \frac{1-h(\mathbf{w}(t))}{1-h(\mathbf{w})}(1-h(\mathbf{w})) + (1-t)h(\mathbf{w}) = 1$$

Así G permanece dentro de $R\tilde{X}$. □

Paso 3 Finalmente tenemos la siguiente proposición

Proposición 4.27. *$R_+\tilde{X}$ es homeomorfo a $Y * Z$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos el homeomorfismo $\phi: R_+\tilde{X} \rightarrow Y * Z$ y su inversa ψ , de la siguiente manera

a) $\phi([\ast, \mathbf{w}]) = [\ast, \mathbf{w}, 0]$

b) $\phi([\mathbf{z}, \ast]) = [\mathbf{z}, \ast, 1]$

c) Para un punto $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tal que $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$, definimos

$$\phi([\mathbf{z}, \mathbf{w}]) = [\mathbf{z}', \mathbf{w}', t]$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \left(\frac{1}{g(\mathbf{z})} \right)^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z}, \\ \mathbf{w}' &= \left(\frac{1}{h(\mathbf{w})} \right)^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{w}, \\ t &= g(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Definimos $\psi: Y * Z \rightarrow R_+ \tilde{X}$ como

- a) $\psi([\ast, \mathbf{w}, 0]) = [\ast, \mathbf{w}]$,
- b) $\psi([\mathbf{z}, \ast, 1]) = [\mathbf{z}, \ast]$,
- c) Para un punto $[\mathbf{z}, \mathbf{w}, t]$ con $t \neq 0, 1$ definimos

$$\psi([\mathbf{z}, \mathbf{w}, t]) = [\mathbf{z}', \mathbf{w}']$$

donde

$$\mathbf{z}' = t^{\frac{1}{a}} \bullet \mathbf{z} \text{ y } \mathbf{w}' = (1 - t)^{\frac{1}{b}} \bullet \mathbf{w}$$

La continuidad de ϕ, ψ se sigue de inmediato debido a que es producto de funciones continuas y por que la acción es también continua.

Por el otro lado, notemos que:

- a) $\psi(\phi([\ast, \mathbf{w}])) = \psi([\ast, \mathbf{w}, 0]) = [\ast, \mathbf{w}]$.
- b) $\psi(\phi([\mathbf{z}, \ast])) = \psi([\mathbf{z}, \ast, 1]) = [\mathbf{z}, \ast]$.
- c) Para un punto $[\mathbf{z}, \mathbf{w}]$ tal que $g(\mathbf{z}) \neq 0, 1$,

$$\begin{aligned} \psi(\phi([\mathbf{z}, \mathbf{w}])) &= \psi\left([\frac{1}{g(\mathbf{z})^{\frac{1}{a}}} \bullet \mathbf{z}, \frac{1}{h(\mathbf{w})^{\frac{1}{b}}} \bullet \mathbf{w}, g(\mathbf{z})]\right) \\ &= [g(\mathbf{z})^{\frac{1}{a}} \frac{1}{g(\mathbf{z})^{\frac{1}{a}}} \bullet \mathbf{z}, h(\mathbf{w})^{\frac{1}{b}} \frac{1}{h(\mathbf{w})^{\frac{1}{b}}} \bullet \mathbf{w}] \\ &= [\mathbf{z}, \mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Así ϕ, ψ son inversas una de la otra y por lo tanto obtenemos el homeomorfismo deseado \square

Ahora combinando el Lema 4.19, con los pasos anteriores tenemos la homotopía

$$\alpha = \phi \circ G_1 \circ F_1 \circ \pi : X \rightarrow Y * Z$$

con lo que hemos probado el Teorema 4.18.

Como aplicación del Teorema 4.18 recobramos el resultado clásico de Pham.

Corolario 4.28 (Pham [22]). Sean $f(\mathbf{z}) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n}$, con $1 \leq a_i \in \mathbb{N}$ y $X = f^{-1}(1)$. Entonces X tiene el mismo tipo de homotopía que $J = G_{a_1} * G_{a_2} * \dots * G_{a_n}$, donde $G_{a_i} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid z^{a_i} = 1\}$. Además J tiene el mismo tipo de homotopía que el bouquet de esferas $\bigvee S^{n-1}$ de dimensión $n-1$ y el número de esferas es $(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1)$.

Capítulo 5

Fibración de Milnor, caso real

En este capítulo daremos una versión generalizada del teorema de fibración real de Milnor (Teorema 3.31), tomando como base algunos de los resultados que obtuvimos en el Capítulo 3 y así definiremos una propiedad denominada d -regularidad, la cual asegurará que la proyección de la fibración de Milnor esté dada por $\frac{f}{\|f\|}$.

Otro resultado que mostraremos es que estas funciones tienen fibración de Milnor con proyección $\frac{f}{\|f\|}$ aún en el caso en que sólo tienen valor crítico aislado, así debilitamos la Hipótesis 3.30.

5.1. Teorema de fibración

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ un polinomio con $n \geq p$ y tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y con valor crítico aislado en el origen de \mathbb{R}^p y tal que es localmente sobre, es decir, la imagen de f contiene una vecindad abierta de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$.

Al igual que antes, podemos definir un conjunto algebraico V como sigue

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}) = 0, i \in \{1, \dots, p\} \}.$$

De forma análoga al caso complejo tenemos los siguientes resultados.

Para $l \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{p-1}$ consideremos la recta $\ell_l \subset \mathbb{R}^p$ que pasa por el origen y que corresponde a l , de esta manera tenemos el conjunto.

$$X_l = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \in \ell_l \}. \tag{5.1}$$

Sean ℓ_l^\perp el hiperplano ortogonal a ℓ_l , π_l la proyección ortogonal dada por $\pi_l: \mathbb{R}^p \rightarrow \ell_l^\perp$ y la composición $h_l = \pi_l \circ f$, entonces X_l es el conjunto donde se anula la función analítica h_l . Así $\{X_l\}$ es una familia de variedades reales analíticas parametrizadas por $\mathbb{R}\mathbb{P}^{p-1}$. De esta forma tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.

$$\mathbb{R}^n = \bigcup X_l \quad y \quad V = \bigcap X_l = X_{l_1} \cap X_{l_2}$$

con $l_1 \neq l_2$.

La prueba es idéntica al caso complejo.

Dado que podemos dividir a la línea l_l en tres conjuntos

$$l_l = l_l^- \cup \{\mathbf{0}\} \cup l_l^+$$

donde l_l^\pm son las dos mitades de la recta l_l , entonces podemos considerar a la hipersuperficie X_l como la unión de tres partes ajenas

$$X_l = E_l^- \cup V \cup E_l^+,$$

con

$$E_l^\pm = f^{-1}(l_l^\pm).$$

Usando estos conceptos tenemos la siguiente definición.

Definición 5.2. Llamaremos el **pincel canónico de f** a la familia $\{X_l \mid l \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{p-1}\}$.

Con esto podemos dar uno de los conceptos más importantes y el cual nos permitirá generalizar algunos resultados.

Definición 5.3. Diremos que la función f es **d-regular** en el origen si existen una métrica ρ inducida por alguna forma cuadrática positiva y algún $\epsilon > 0$ tales que toda esfera dada por la métrica ρ con radio menor o igual que ϵ y centrada en el origen, interseca transversalmente a $X_l \setminus V$ siempre que esta intersección sea no vacía.

Ejemplo 5.4.

1. Por la Observación 3.17, toda función holomorfa $f: (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es d -regular en $\mathbf{0}$ con la métrica usual.
2. Supongamos que $f: (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ es un polinomio real homogéneo con valor crítico aislado en $\mathbf{0}$, esto es si f_1, f_2, \dots, f_p son las componentes de f , entonces cada f_i es un polinomio real homogéneo, además tenemos una acción multiplicativa \bullet de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sobre \mathbb{R}^n tal que $f(t\bullet(x_1, \dots, x_n)) = t^m f(x_1, \dots, x_n)$ para todo $t \in \mathbb{R}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y algún $m \in \mathbb{N}$. De esta manera las órbitas de esta acción serán tangentes a cada X_l y transversales a todas las esferas centradas en el origen, así f es d -regular.

3. Los polinomios casi-homogéneos polares son funciones d -regulares para la métrica usual dado que las \mathbb{R}^+ órbitas son tangentes a cada X_l y transversales a las esferas.

Observación 5.5. No se conoce ningún ejemplo de alguna función analítica real f que sea d -regular para alguna métrica pero que no lo sea con respecto a alguna otra métrica.

Ahora consideremos las funciones $\Phi: \mathbb{B}_\epsilon^n \setminus V \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ y $\mathfrak{F}: \mathbb{B}_\epsilon^n \setminus V \rightarrow \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ dadas por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})\|} \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|\Phi(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Definición 5.6. A la función \mathfrak{F} dada por (5.2), la llamaremos la **esferificación** de f .

De esta manera tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 5.7. Sea $f: (\mathbb{B}_\epsilon^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ una función analítica con valor crítico aislado en el origen y si denotamos por $V = f^{-1}(\mathbf{0})$ y $K_\eta = V \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. La función f es d -regular en el origen.
2. La restricción de \mathfrak{F} a las esferas \mathbb{S}_η^{n-1} con $0 < \eta < \epsilon$, es una submersión.
3. La esfera \mathfrak{F} es una submersión en cada $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\epsilon^n \setminus V$.
4. La función $\phi = \frac{f}{\|f\|}: \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es una submersión para cada esfera \mathbb{S}_η^{n-1} con $0 < \eta < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. (1) \Rightarrow (2) Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ y $f(\mathbf{x}) \in \ell_l$, de forma que $\mathbf{x} \in X_l$. Por hipótesis $X_l \setminus V$ es transversal a la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$ y dado que $X_l \setminus V = E_l^+ \cup E_l^-$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbf{x} \in E_l^+$, así por el Teorema 1.28 tenemos que $E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$ es una subvariedad de la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$ de dimensión $n - p$.

Ahora notemos que si $\mathbf{y} \in E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$, entonces por estar en E_l^+ se tiene que $f(\mathbf{y}) \in \ell_l$ y por estar en $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$, tenemos que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, así $\mathfrak{F}(\mathbf{x}) = \mathfrak{F}(\mathbf{y})$.

Luego si $\mathbf{y} \in \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x}))$ y $f(\mathbf{y}) \notin \ell_l$, entonces tendríamos que $\mathfrak{F}(\mathbf{y}) \neq \mathfrak{F}(\mathbf{x})$ lo cual no puede ser, así que $f(\mathbf{y}) \in \ell_l$. Ahora dado que $\|\mathbf{y}\| \frac{f(\mathbf{y})}{\|f(\mathbf{y})\|} = \|\mathbf{x}\| \frac{f(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})\|}$, entonces no queda más que $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$ y así $\mathbf{y} \in E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$.

De esta manera tenemos que $E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$ coincide con la fibra $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x}))$.

Así tenemos que

$$T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1} \cong T_{\mathbf{x}}(E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}) \oplus N_{\mathbf{x}}(E_l^+ \cap \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1})$$

y por las cuentas anteriores

$$T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1} \cong T_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x}))) \oplus N_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x}))),$$

donde $N_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x})))$ es el normal al espacio en \mathbf{x} en $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$, el cual tiene dimensión $p - 1$. Ahora dado que $T_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x}))) = \ker D\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}$, entonces $D\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}$ manda al espacio vectorial $N_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathbf{x})))$ isomórficamente al espacio $T_{\mathfrak{F}(\mathbf{x})}(\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{p-1})$. Así la restricción $\mathfrak{F}_{\|\mathbf{x}\|}: \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1} \setminus V \rightarrow \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{p-1}$ es una submersión en \mathbf{x} .

(2) \Leftrightarrow (3) Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ y sea $v \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{B}_\epsilon$ tal que v es transversal a la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}$. Dado que \mathfrak{F} manda el conjunto $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1} \setminus V$ a la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{p-1}$ y como la fibra de \mathfrak{F} está contenida en $\mathbb{S}_{\mathbf{x}}^{n-1}$, entonces $D\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}(v)$ es un vector no cero en $T_{F(\mathbf{x})}\mathbb{R}^p$ transversal a la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{p-1}$. Así tenemos que $\mathfrak{F}: \mathbb{B}_\epsilon \setminus V \rightarrow \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una submersión en \mathbf{x} si y sólo si $\mathfrak{F}_{\|\mathbf{x}\|}: \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1} \setminus V \rightarrow \mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{p-1}$ es una submersión en \mathbf{x} .

(2) \Rightarrow (4) Notemos que

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})\|} = \frac{\mathfrak{F}(\mathbf{x})}{\|\mathfrak{F}(\mathbf{x})\|}.$$

De esta manera $\phi: \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es la restricción de la función Φ a $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta$. Luego dado que $\phi = \frac{\tilde{\mathfrak{F}}_\eta}{\|\tilde{\mathfrak{F}}_\eta\|}$ se puede ver como la composición de $\mathfrak{F}_\eta: \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus V \rightarrow \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ con la proyección radial de la esfera \mathbb{S}_η^{p-1} a la esfera unitaria, entonces si \mathfrak{F}_η es una submersión, entonces ϕ también es una submersión.

(4) \Rightarrow (1) La función $\Phi: \mathbb{B}_\epsilon \setminus V \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es una submersión dado que es la composición de f con la proyección radial de $\mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ sobre el círculo unitario y se ha considerado que f tiene valor crítico aislado en el origen.

La función $\phi: \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es la restricción de Φ a $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta$ y supongamos que $f(\mathbf{x}) \in \ell_l$, como $\Phi^{-1}(f(\mathbf{x})) = E_l^+$ ó $\Phi^{-1}(f(\mathbf{x})) = E_l^-$, según en qué mitad de $\ell_l \setminus \{\mathbf{0}\}$ esté ubicado $f(\mathbf{x})$, entonces E_l^\pm es una subvariedad diferenciable de codimensión $p - 1$. Por hipótesis tenemos que ϕ es una submersión en \mathbf{x} , por lo que el espacio tangente $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\eta^{n-1}$ de \mathbb{S}_η^{n-1} en \mathbf{x} intersecta al kernel de la diferencial $D\Phi_{\mathbf{x}}$ en un subespacio de dimensión a lo más $n - p$. Ahora, dado que $\ker D\Phi_{\mathbf{x}} = T_{\mathbf{x}}E_l^\pm$ y como

$$\begin{aligned} \dim(T_{\mathbf{x}}E_l^\pm + T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\eta^{n-1}) &= \dim T_{\mathbf{x}}E_l^\pm + \dim T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\eta^{n-1} - \dim(T_{\mathbf{x}}E_l^\pm \cap T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}_\eta^{n-1}) \\ &\geq (n - p + 1) + (n - 1) - (n - p) = n, \end{aligned}$$

entonces E_l^\pm es transversal a la esfera \mathbb{S}_η^{n-1} para cualquier $\eta < \epsilon$, esto es, f es d -regular. \square

Como una aplicación de la Proposición 5.7 veamos que el ejemplo de Milnor mencionado en la Observación 3.33 no tiene como proyección del haz a la aplicación $\frac{f}{\|f\|}$.

Recordemos que el ejemplo de Milnor está dado por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, x^2 + y(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

Basta ver que f no es d -regular para garantizar que no tiene como proyección a la función $\frac{f}{\|f\|}$, es decir, debemos mostrar que no existe ϵ para la cual las variedades E_l^\pm sean transversales a las esferas de radio menor o igual a ϵ , para esto basta ver que existen puntos tan cercanos al origen como queramos tales que el vector normal a E_l^\pm es colineal al vector posición (x, y) .

Para facilitar la notación denotemos por

$$f_1(x, y) = x, \quad f_2(x, y) = x^2 + y(x^2 + y^2),$$

y por

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)). \quad (5.3)$$

Notemos que

$$\nabla f_1(x, y) = (1, 0), \quad \nabla f_2(x, y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2), \quad (5.4)$$

por lo que la diferencial de f está dada por

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x + 2xy & x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

de esta manera el único punto crítico es el $\mathbf{0}$ y así f satisface la Hipotesis de Milnor 3.30 y por el Teorema 3.31 tiene fibración en la esfera.

Ahora veamos que la proyección no es $\frac{f}{\|f\|}$.

Sea $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ y consideremos la subvariedad E_l tal que $(x_1, y_1) \in E_l$. Para poder encontrar el vector normal a E_l en (x_1, y_1) notemos que

$$E_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x_1, y_1)f_2(x, y) = f_2(x_1, y_1)f_1(x, y) \}.$$

De esta forma si consideramos la función

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f_1(x_1, y_1)f_2(x, y) - f_2(x_1, y_1)f_1(x, y), \end{aligned}$$

entonces E_l es una curva de nivel de la función g y de esta manera tenemos que el vector normal a E_l en (x_1, y_1) es

$$\nabla g(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1) \nabla f_2(x_1, y_1) - f_2(x_1, y_1) \nabla f_1(x_1, y_1).$$

Antes de continuar realizaremos algunos cálculos

$$\begin{aligned} (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1)(x, y) &= x(2x + 2xy, x^2 + 3y^2) - (x^2 + y(x^2 + y^2))(1, 0) \\ &= (2x^2 + 2x^2y, x^3 + 3y^2) - (x^2 + x^2y + y^3, 0) \\ &= (x^2 + x^2y - y^3, x^3 + 3xy^2) \end{aligned}$$

Ahora nos interesa que $f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1$ y (x, y) sean linealmente dependientes para que los E_l y las esferas no sean transversales, es decir, f no es d -regular para lo cual necesitamos ver para que puntos (x, y) la matriz

$$\begin{pmatrix} x^2 + x^2y - y^3 & x^3 + 3xy^2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

tiene determinante cero.

De esta forma

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x^2 + x^2y - y^3 & x^3 + 3xy^2 \\ x & y \end{vmatrix} &= y(x^2 + x^2y - y^3) - x(x^3 + 3xy^2) \\ &= -x^4 + x^2y - 2x^2y^2 - y^4. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid -x^4 + x^2y - 2x^2y^2 - y^4 = 0 \}.$$

Si $w = x^2$, entonces

$$-w^2 + w(y - 2y^2) - y^4 = 0,$$

y resolviendo la cuadrática por la fórmula general tenemos que

$$\begin{aligned} w &= \frac{(2y^2 - y) \pm \sqrt{(y - 2y^2)^2 - 4(-1)(-y^4)}}{-2} \\ &= \frac{(2y^2 - y) \pm y\sqrt{1 - 4y}}{-2} \\ &= \frac{y((2y - 1) \mp \sqrt{1 - 4y})}{2}. \end{aligned}$$

Como queremos que las soluciones sean reales bastará que

$$\frac{1}{4} > y.$$

Por lo tanto para valores de y cercanos a cero, x es un valor real cercano a cero y así $\mathbf{0} \in \bar{N}$. De esta forma existen valores tan próximos al origen como queramos tales que los vectores $f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1$ y (x, y) son linealmente dependientes, por lo tanto f no es d -regular y por la Proposición 5.7 $\frac{f}{\|f\|}$ no es submersión y por lo tanto no puede ser la proyección de un haz fibrado.

A partir de ahora consideremos $f: (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, \mathbf{0})$ una función analítica con valor crítico aislado en el origen. Sea ρ una métrica en \mathbb{R}^n y \mathbb{B}_ϵ una bola abierta suficientemente pequeña alrededor del origen de \mathbb{R}^n con respecto a la métrica ρ tal que existe una estratificación de Whitney de \mathbb{B}_ϵ adaptada a V de forma que cada estrato $\{S_\alpha\}$ en V es transversal a cada esfera en \mathbb{B}_ϵ centrada en el origen. De esta forma tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.8. *Sean $\bar{\mathbb{B}}_\eta$ la bola cerrada de radio $\eta < \epsilon$ alrededor del origen de \mathbb{R}^n , $\mathbb{B}_\delta \subset \mathbb{R}^p$ el disco cerrado de radio δ alrededor del origen de \mathbb{R}^p para $\eta \geq \delta > 0$ y $N(\eta, \delta) = \bar{\mathbb{B}}_\eta \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^{p-1})$. Si $V = f^{-1}(\mathbf{0})$ tiene dimensión mayor que cero y f tiene la propiedad a_f de Thom, entonces*

$$f: N(\eta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}_\delta^{p-1}$$

es un haz localmente trivial.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el tubo de Milnor $N(\eta, \delta)$. Como $\{S_\alpha\}$ satisface la propiedad a_f de Thom y como la dimensión de V es mayor que cero, entonces si δ es suficientemente pequeño se tiene que todas las fibras de f son transversales a $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$. Ahora por el primer Lema de isotopía de Thom-Mather [30] y el hecho de que las fibras con frontera son transversales como en [11], obtenemos que la restricción de f a $N(\eta, \delta)$ es un haz localmente trivial. \square

Si ahora la función f es d -regular, obtenemos el siguiente lema.

Lema 5.9. *La función f es d -regular si y sólo si existe un campo vectorial diferenciable $\tilde{\omega}$ sobre $\mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ que cumple las siguientes propiedades*

1. $\tilde{\omega}$ es radial, esto es, es transversal a todas las esferas en \mathbb{B}_ϵ centradas en el origen,
2. $\tilde{\omega}$ es tangente a cada $X_l \setminus V$, siempre que sea no vacío,

3. $\tilde{\omega}$ es transversal a todos los tubos $f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^{p-1})$.

DEMOSTRACIÓN. Si f es d -regular, entonces por la Proposición 5.7 la esferificación $\mathfrak{F}: \mathbb{B}_\epsilon \setminus V \rightarrow \mathbb{B}_\epsilon \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una submersión. Ahora sea u el campo vectorial radial en \mathbb{R}^p dado por $u(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ y usando a f y a \mathfrak{F} podemos levantar dos campos vectoriales diferenciables ω_f y $\omega_{\mathfrak{F}}$ sobre $\mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ tenemos que

$$Df_{\mathbf{x}}(\omega_f(\mathbf{x})) = u(f(\mathbf{x})) \quad \text{y} \quad D\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}(\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})) = u(\mathfrak{F}(\mathbf{x})).$$

El flujo local asociado a ω_f es transversal a todos los tubos de Milnor $f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^{p-1})$, mientras que el flujo asociado a $\omega_{\mathfrak{F}}$ es transversal a todas las esferas en \mathbb{B}_ϵ centradas en el origen. Ambas curvas integrales están contenidas en $X_l \setminus V$.

Afirmamos que los vectores $\omega_f(\mathbf{x})$ y $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ no apuntan en direcciones opuestas, con $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus V$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Supongamos que para $\mathbf{x} \in X_l \setminus V$, los vectores $\omega_f(\mathbf{x})$ y $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ apuntan en direcciones opuestas. Dado que $\omega_f(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}X_l$, entonces existe una curva $\beta: (-\delta, \delta) \rightarrow X_l$ tal que $\beta(0) = \mathbf{x}$ y $\beta'(0) = \omega_f(\mathbf{x})$, luego dado que $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ apunta en la dirección opuesta que el vector $\omega_f(\mathbf{x})$, entonces es el vector de velocidad de una curva $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X_l$ de forma que $\gamma(t) = \beta(-rt)$ con $r > 0$, esto es $\gamma(0) = \mathbf{x}$ y $\gamma'(0) = \omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$. Tenemos que $\omega_f(\mathbf{x})$ es transversal a la esfera $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$, dado que es colineal a $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ y por la definición de $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ es transversal a $\mathbb{S}_{\|\mathbf{x}\|}^{n-1}$, entonces $\|\beta(t)\|$ es una función estrictamente monótona (posiblemente en un subintervalo más pequeño que $(-\delta, \delta)$). Sin pérdida de generalidad supongamos que es una función estrictamente creciente, esto implica que $\|\gamma(t)\|$ es una función estrictamente decreciente y por la definición de \mathfrak{F} tenemos que la función $\|\mathfrak{F}(\gamma(t))\|$ es también una función estrictamente decreciente. Dado que la imagen de la curva $\mathfrak{F}(\gamma(t))$ está contenida en ℓ_l , tenemos que $D\mathfrak{F}_{\mathbf{x}}(\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x}))$ es un vector radial que apunta en la dirección del origen. Esto es una contradicción dado que por definición, $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathbf{x})$ apunta en dirección contraria al origen.

De esta forma ambos vectores no apuntan en direcciones contrarias. De esta manera como el vector ω_f satisface las propiedades (2) y (3) y como el vector $\omega_{\mathfrak{F}}$ cumple las propiedades (1) y (2), entonces sumando ambos vectores obtenemos un campo vectorial $\tilde{\omega}$ sobre \mathbb{B}_ϵ que satisface las tres propiedades deseadas.

El recíproco es inmediato por las propiedades (1) y (2). \square

De esta manera combinando la Proposición 5.8 y el Lema 5.9 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.10 (Teorema de Fibración). *Supongamos que V es un punto ó $\dim V > 0$ y que f tiene la propiedad a_f de Thom en el origen. De esta forma los siguientes resultados son equivalentes*

1. La función f es d -regular en el origen.
2. Sea $K_\eta = V \cap \mathbb{S}_\eta^{n-1}$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo de haces fibrados sobre $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta$ para cada esfera \mathbb{S}_η^{n-1} centrada en el origen de radio $\eta < \epsilon$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{S}^{p-1} \\ & \searrow \Psi & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}\mathbb{P}^{p-1} \end{array}$$

donde $\Psi = (f_1 : \dots : f_p)$ y $\phi = \frac{f}{\|f\|}$ es la fibración de Milnor de la función f .

3. Para cada esfera \mathbb{S}_η^{n-1} de radio $\eta < \epsilon$ centrada en el origen, tenemos que la restricción \mathfrak{F}

$$\mathfrak{F}_\eta : \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus V \rightarrow \mathbb{S}_\eta^{p-1},$$

es un haz fibrado y coincide con la fibración de Milnor ϕ multiplicada por una constante.

DEMOSTRACIÓN. En el caso de que V es un punto, entonces la aureola K_η de f es vacía para toda $\eta > \epsilon$. De esta forma las funciones ϕ, ψ y \mathfrak{F}_η están definidas en toda la esfera \mathbb{S}_η^{n-1} la cual es compacta, así tenemos que por la Proposición 5.7 y el Teorema 1.63 tenemos que estas funciones son haces fibrados localmente triviales si y sólo si la función f es d -regular.

Supongamos ahora que $\dim V > 0$, veremos primero que (1) \Rightarrow (2). Como f tiene la propiedad a_f de Thom en el origen, entonces por la Proposición 5.8 tenemos que

$$f : N(\eta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}_\delta^{p-1}$$

es un haz fibrado. Ahora si componemos con la proyección de \mathbb{S}_δ^{p-1} sobre el círculo unitario \mathbb{S}^{p-1} , obtenemos un haz fibrado equivalente $\tilde{\phi}$ el cual es precisamente la restricción de $\Phi = \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{B}_\epsilon \setminus V \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ al conjunto $N(\eta, \delta)$:

$$\tilde{\phi} = \frac{f}{\|f\|} : N(\eta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}.$$

Afirmamos que si f es d -regular, entonces este haz fibrado es equivalente a

$$\phi = \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}.$$

La prueba de esta equivalencia es esencialmente la misma que la del Lema 11.3 de [18] pero controlando la forma en que “inflamos” el tubo a la esfera como en la

prueba del Lema 5.10 de [18]. Usaremos el Lema 5.9 y sea $\mathring{\mathbb{B}}_\delta$ y el disco abierto de radio δ centrado en el origen de \mathbb{R}^p y definamos

$$T(\eta, \delta) = \mathbb{S}_\eta^{n-1} \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_\delta).$$

El flujo asociado al campo vectorial $\tilde{\omega}$ del Lema 5.9 define en el sentido usual un difeomorfismo τ entre $N(\eta, \delta)$ y $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus T(\eta, \delta)$, para un punto $\mathbf{x} \in N(\eta, \delta)$ la curva integral de $\tilde{\omega}$ que pasa por \mathbf{x} intersecta a \mathbb{S}_η^{n-1} en algún punto $\hat{\mathbf{x}}$. Este punto existe y es único debido a que $\tilde{\omega}$ satisface las condiciones (1) y (3) del Lema 5.9, de esta forma definamos $\tau(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$. Ahora por la condición (2) del Lema 5.9 tenemos que las soluciones de $\tilde{\omega}$ están contenidas en algún E_l^\pm y así $\phi(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}) =: \phi(\hat{\mathbf{x}})$. Por lo que el difeomorfismo $\psi: N(\eta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus T(\eta, \delta)$ genera una equivalencia de los haces fibrados

$$\begin{array}{ccc} N(\eta, \delta) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus T(\eta, \delta) \\ & \searrow \tilde{\phi} & \downarrow \phi \\ & & \mathbb{S}^{p-1} \end{array}$$

Para completar la prueba necesitamos mostrar que la fibración dada por ϕ sobre $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus T(\eta, \delta)$ puede ser extendida a una fibración sobre $\mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta$ con la proyección ϕ . Para esto sea $T(\eta, \delta) = \mathbb{S}_\eta^{n-1} \cap f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_\delta)$. Como f tiene un valor crítico aislado en el origen y como satisface la propiedad a_f de Thom, entonces la restricción de f a $T(\eta, \delta) \setminus K_\eta$ es una submersión en cada punto. Así podemos levantar el campo vectorial radial $u(z) = z$ sobre $\mathbb{B}_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ a un campo vectorial diferenciable sobre $T(\eta, \delta) \setminus K_\eta$, el cual preserva las fibras de ϕ y es transversal a la intersección de \mathbb{S}_η^{n-1} con todos los tubos de Milnor $f^{-1}(\mathring{\mathbb{S}}_{\delta'}^{p-1})$ para $0 < \delta' \leq \delta$. Por lo que $\phi: \mathbb{S}_\eta^{n-1} \setminus K_\eta \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ es una fibración.

Si Ψ es la función del punto (2), entonces tenemos que $\Psi = \pi \circ \phi$ y π es una función cubriente, entonces Ψ es también un haz fibrado.

Ahora probaremos que (2) \Rightarrow (3). Notemos que $\mathfrak{F}_\eta: \mathbb{S}_\eta \setminus V \rightarrow \mathbb{S}_\eta^{p-1}$ es la composición de $\phi = \frac{\mathfrak{F}}{\|\mathfrak{F}\|}$ con la proyección radial de la esfera \mathbb{S}^{p-1} sobre la esfera \mathbb{S}_η^{p-1} . Por hipótesis la función ϕ es un haz fibrado y así \mathfrak{F}_η es también un haz fibrado siendo la composición de un haz fibrado con un difeomorfismo.

Finalmente por la Proposición 5.7 se tiene que (3) implica (1). \square

Para finalizar la obra es importante mencionar que tal y como se ve en las pruebas anteriores, la propiedad a_f de Thom es una condición suficiente para que exista fibración en el tubo, así que de manera natural surge el siguiente problema

Problema 5.11. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dicha fibración exista?

Aún no se conoce una respuesta a este problema y se planea trabajar en encontrar dicha respuesta como proyecto de maestra.

Bibliografía

- [1] A'Campo, Norbert , *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76 = Indag. Math., vol. 35, páginas 113-118, 1973.
- [2] Apostol, Tom Mike, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1957.
- [3] Brauner, Karl , *Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. II: Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen. III: Klassifikation der Singularitäten algebroider Kurven. IV: Die Verzweigungsgruppen*. Abhandlungen Hamburg, vol. 6, 1-55, 1928.
- [4] Brieskorn, Egbert , *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Invent. Math., vol. 2, páginas 1-14, 1966.
- [5] Brocker, Theodor, *Introducción a la topología diferencial*, Editorial AC, 1973.
- [6] Cisneros Molina, José Luis, *Join Theorem for Polar Weighted Homogeneous Singularities*, vol. 475 de *Contemporary Mathematics*, páginas 43-59, American Mathematical Society, 2008.
- [7] Cisneros Molina, José Luis; Seade, José; Snoussi, Jawad, *Milnor fibrations for real and complex singularities*.
- [8] Cisneros Molina, José Luis; Seade, José; Snoussi, Jawad, *Refinements of Milnor's fibration theorem for complex singularities*, *Advances in Mathematics* 222, páginas 937-970, 2009.
- [9] Cisneros Molina, José Luis; Seade, José; Snoussi, Jawad, *Milnor Fibrations and d-regularity for real analytic singularities*, vol. 21 número 4 de *International Journal of Mathematics*, páginas 419-434, World Scientific Publishing Company, 2010.

- [10] Cisneros Molina, José Luis; Seade, José; Snoussi, Jawad, *The concept of d-regularity for analytic map germs*, Preprint.
- [11] D. T. Lê, *Some remarks on relative monodromy*, in *Real and Complex Singularities*, Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., eds. P. Holm et al., Oslo, páginas 397-403, 1976.
- [12] Fulton, William, *Curvas Algebraicas*, Editorial Reverte, 1969.
- [13] Guillemin, Victor y Pollack, Alan, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [14] Hironaka, Heisuke, *Subanalytic sets*, en *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in Honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo*, páginas 453-493, 1973.
- [15] Hironaka, Heisuke, *Stratification and flatness*, en *Ninth Nordic Summer School/NACF Sympos. Math., Oslo, 1976*, páginas 199-265, 1977.
- [16] Lang, Serge, *Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley, 1972.
- [17] Milnor, John, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University, 1988.
- [18] Milnor, John, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University, 1969.
- [19] Nakahara, Mikio, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing, 2003.
- [20] Oka, Mutsuo, *On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials*, *Topology*, vol. 12, páginas 19-32, 1973.
- [21] Oka, Mutsuo, *Non-Degenerate Complete Intersection Singularity*, *Actualités Mathématiques*, Hermann Pans, 1997.
- [22] Pham, Frédéric, *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales*, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 93, páginas 333-367, 1965.
- [23] Pichon, Anne; Seade, José, *Fibred Multilinks and singularities $f\bar{g}$* , *Math. Ann.*, vol. 342, páginas 487-514, 2008.
- [24] Sánchez Morgado, Héctor; Palmas Velasco, Oscar Alfredo; *Gemoetría riemanniana*, Las prensas de ciencias, 2007.

- [25] Sebastiani, M.; Thom, R., *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math., vol. 13, páginas 90-96, 1971.
- [26] Seade, José, *On Milnor's fibration Theorem for real and complex singularities, Singularities in Geometry and Topology, Proceedings of the Trieste Singularity Summer School and Workshop*, World Scientific, páginas 127-158, 2006.
- [27] Seade, José, *Fibred links and a construction of real singularities via complex geometry*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), vol. 27(2), páginas 199-215, 1996.
- [28] Seade, José, *Open book decompositions associated to holomorphic vector fields*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), vol. 3(2), páginas 323-335, 1997.
- [29] Soares Ruas, Maria Aparecida; Seade, Jose; Verjovsky, Alberto, *On Real Singularities with a Milnor Fibration*, Trends in Singularities, páginas 191-213, Birkhauser, 2002
- [30] Verdier, Jean Louis, *Stratifications de Whitney et thórème de BertiniSard*, Invent. Math., vol. 36, páginas 295-312, 1976.

Índice alfabético

- Acción
 - de un grupo, 15
 - polar, 66
- Aplicación
- diferenciable, 14
- Atlas, 3
- Aureola, 34
- Axioma de trivialidad local, 11
- Campo
 - de velocidades, 16
 - vectorial, 13
 - de funciones racionales, 23
- Carta, 3
- Carta vectorial, 12
- Condición (b) de Whitney, 59
- Conjunto algebraico, 23
- Conjunto algebraico irreducible, 23
- Curva
 - diferenciable, 2
 - integral, 16
- Difeomorfismo, 2
- Difeomorfismo local, 2
- Diferencial, 2, 14
- Encaje, 8
- Esferificación, 93
- Fibrado inducido, 20
- Flujo, 15
- Flujo local, 17
- Función
 - de transición, 4
 - d-regular, 92
 - diferenciable, 1
 - propia, 8
 - vista en las coordenadas locales, 4
- Grupo de Lie, 14
- Haz
 - fibrado, 18
 - vectorial, 11
 - normal, 13
 - tangente, 13
 - fibrado inducido, 20
- Hipersuperficie, 23
- Homomorfismo de haces vectoriales, 12
- Inmersión, 5
- Isomorfismo de haces fibrados, 21
- Línea de flujo, 16
- Morfismo de haces fibrados, 20
- Órbita, 16
- Partición de la unidad, 18
- Partición de la unidad subordinada, 18
- Pincel canónico de f , 46, 92
- Plano tangente
 - de un conjunto abierto, 5
 - de una variedad diferenciable, 5
- Polinomio
 - de Brieskorn-Pham, v
 - casi homogéneo, 39
 - casi homogéneo polar, 66
- Punto
 - regular, 7

- simple, 24
- singular, 24
- Restricción, 20
- Sección, 13
- Sección cero, 13
- Soporte, 18
- Subhaz, 13
- Subgrupos de difeomorfismo a un parámetro, 16
- Submersión, 5
- Subvariedad diferenciable, 3
- Teorema
 - de la inmersión local, 6
 - de la submersión local, 6
 - de la función inversa, 3
- Transversal, 9
- Tubo de Milnor, 35
- Valor regular, 7
- Variedad diferenciable, 3
- Vecindad de coordenadas, 3
- Whitney regular, 60