



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Piñatas en Geometría Hiperbólica

TESIS

Presentada para obtener el título de:
Licenciada en matemáticas

PRESENTA:

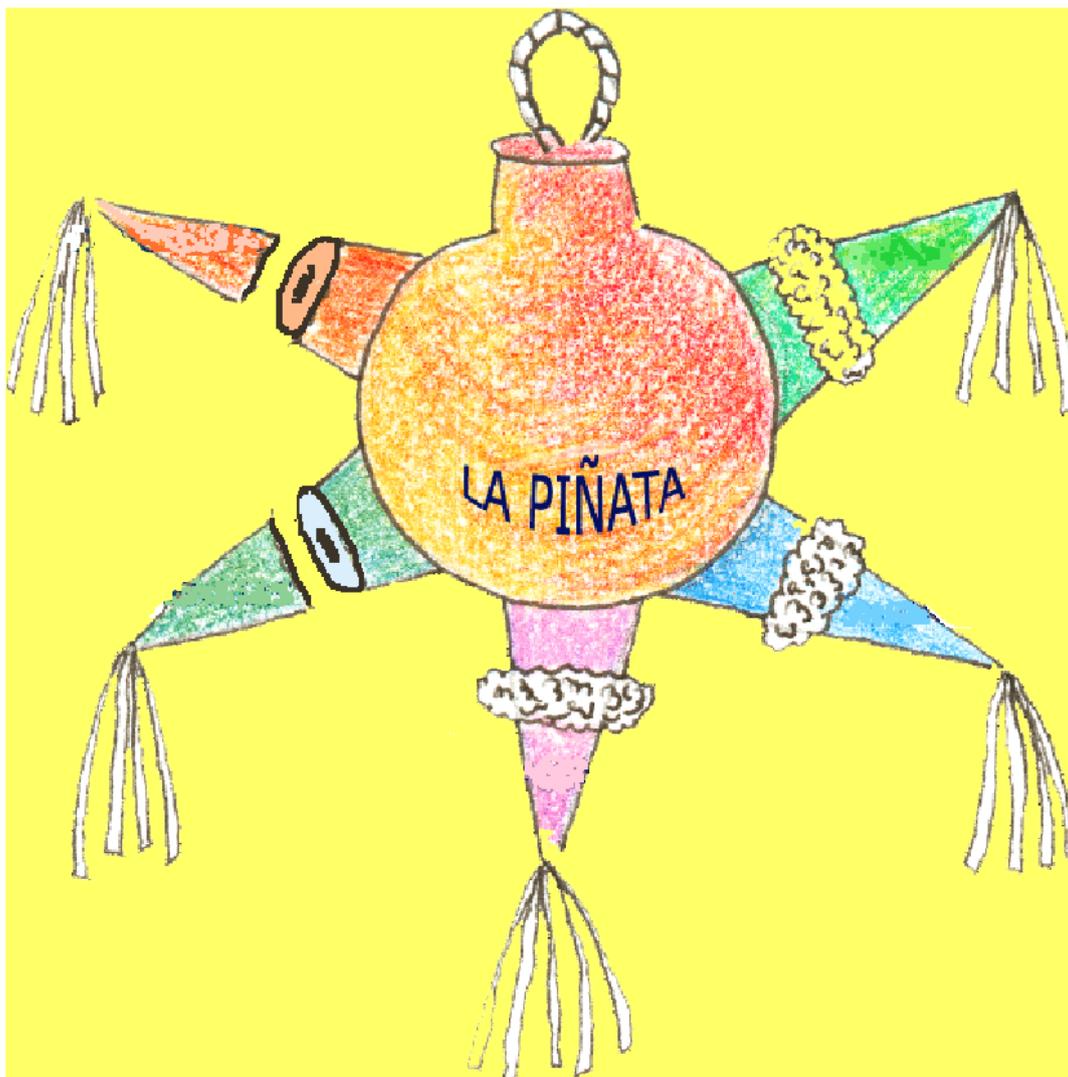
Estela Lara González

Directores:

Dr. José Luis Cisneros Molina
Dra. Patricia Domínguez Soto

PUEBLA, PUE.

SEPTIEMBRE 2018



"Mathematics is not about numbers, equations, computations, or algorithms: it is about understanding."

William P. Thurston.

"I have discovered things so wonderful that I was astounded... Out of nothing I have created a strange new world."

János Bolyai

Agradecimientos

La realización de una tesis no sólo es el producto del esfuerzo del tesista, sino también de la ayuda de todos y cada una de las personas en el aspecto profesional y personal.

A mi mamá Yolanda, quiero agradecerte por tu apoyo absoluto en cada una de mis decisiones, siempre me inspiras a esforzarme por cada una de mis metas. Gracias por enseñarme a disfrutar la vida.

A mi papá Jacob y mis hermanos David y Cristina, les agradezco su comprensión y los momentos inolvidables que compartimos. Gracias por contar con su compañía.

Al Dr. José Luis Cisneros Molina, por la paciencia, la confianza, el apoyo y los ánimos. Gracias a su guía y a todo el tiempo dedicado a la realización de este trabajo el resultado fue excelente.

A la Dra. Patricia Domínguez Soto por brindarme su apoyo de manera natural y por sus observaciones.

A mis sinodales: Dr. Ángel Cano Cordero, Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas, Dr. Raúl Escobedo Conde por tomarse el tiempo para leer esta obra. Además, agradezco sus valiosas observaciones.

A mis amigos que conocí en la facultad, Marco, Abraham, Brenda, Nohemi, Dayana, Ruth, Alberto, Oscar, gracias por los momentos maravillosos que compartimos y por escucharme.

A mis amigos que conocí en la UCIM, Vanesa, Agustín, Marcos V., Daniela, Jerónimo, Edgar, Porfirio, Sergio, al equipo de Básquet UCIM y una lista interminable de personas, gracias por recibirme con los brazos abiertos y por hacer mi estancia agradable en la Unidad.

Por último al CONACyT por el apoyo para la realización de mi tesis a través los proyectos con claves 253506 Singularidades y 3 variedades” y 255633 a cargo del grupo de trabajo del Dr. Peter Makienko.

Gracias por todo.

Estela.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Grupos	1
1.2. Grupos de matrices	4
1.2.1. Transformaciones lineales y grupos de matrices	4
1.2.2. Orientación	4
1.2.3. Producto interior y producto hermitiano	6
1.2.4. Grupo general lineal	8
1.2.5. Grupo ortogonal	9
1.2.6. Grupo unitario	11
1.3. Espacios métricos	12
1.4. Topología	16
1.4.1. Espacios topológicos	16
1.4.2. Topología cociente	19
1.4.3. Conexidad	21
1.4.4. Compacidad	21
1.4.5. Topologías en el conjunto de aplicaciones continuas	23
1.5. Grupos topológicos	24
1.5.1. Grupos de matrices como grupos topológicos	27
1.5.2. Subgrupos discretos de \mathbb{R}^n e $I(\mathbb{R}^n)$	29
1.6. Acciones de grupos	32
1.6.1. Acciones de grupos en conjuntos	32
1.6.2. Acciones continuas	35
1.6.3. El espacio de órbitas	38
1.7. Algunas nociones sobre topología algebraica	39
1.7.1. Grupo fundamental	40
1.7.2. Espacios cubrientes	42
1.8. Variedades	48
1.8.1. Espacio tangente	49
1.8.2. Orientación	51
1.8.3. Métrica Riemanniana	52
1.8.4. Variedades Riemannianas y acciones	54
1.8.5. Variedades con frontera	56
1.8.6. Superficies cerradas y la característica de Euler	56
1.9. La esfera de Riemann	57
1.10. Transformaciones de Möbius	60
1.10.1. Transitividad y razón cruzada	63
1.10.2. Clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$	64
1.10.3. Clasificación geométrica de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$	67

2. Espacio hiperbólico y sus isometrías	69
2.1. Geometría Euclidiana y el quinto postulado	69
2.2. Modelos del espacio hiperbólico	70
2.2.1. Modelo de la bola unitaria	70
2.2.2. Isometrías del modelo de la bola unitaria	71
2.2.3. Modelo del semiespacio superior	72
2.2.4. Equivalencia de los modelos	74
2.2.5. Isometrías del modelo del semiespacio superior	75
2.2.6. $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ visto como grupo topológico	79
2.2.7. Clasificación de isometrías de \mathcal{H}^3	79
2.3. Conjuntos convexos	81
2.4. Variedades hiperbólicas	83
2.5. 3-variedades obtenidas pegando poliedros	84
2.5.1. Completez de 3-variedades hiperbólicas	86
3. Grupos discretos y su geometría	89
3.1. Subgrupos de $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ con acción cubriente	89
3.2. Grupos discretos elementales	92
3.2.1. Grupos elementales elípticos	93
3.2.2. Grupos elementales parabólicos	94
3.2.3. Grupos elementales hiperbólicos	96
3.3. Dominios fundamentales	99
3.3.1. Volumen de una región fundamental	102
3.3.2. Poliedro fundamental convexo	103
3.3.3. Apareamiento de lados	104
4. Geometría de 3-variedades hiperbólicas	107
4.1. Conjunto límite	107
4.1.1. Conjunto ordinario	110
4.2. Puntos límite	111
4.2.1. Punto límite cónico	111
4.2.2. Punto límite cúspide	113
4.3. Horocúspides	117
4.4. Grupos kleinianos geoméricamente finitos	118
4.4.1. Poliedro convexo geoméricamente finito	119
4.4.2. El núcleo convexo	120
4.4.3. Grupos geoméricamente finitos	120
4.5. Variedades geoméricamente finitas	122
4.6. El teorema de la piñata	123

Índice de figuras

1.	3-variedad hiperbólica completa, orientada de volumen finito	IX
2.	El cilindro	X
3.	El toro	X
4.	Poliedro en el semiespacio superior con un vértice en ∞	XII
5.	Acción de $Stab(\infty)$ en \mathcal{H}^3	XII
1.1.	Puntos que se relacionan con $(1, 1)$	20
1.2.	Identificación de aristas del cuadrado C	20
1.3.	Espacio cociente: toro	20
1.4.	Homotopía de caminos	40
1.5.	Una aplicación cubriente vista localmente	43
1.6.	La aplicación cubriente de S^1	44
1.7.	Triangulación de S^2	57
1.8.	Proyección estereográfica	58
2.1.	Quinto postulado	69
2.2.	Postulado de las paralelas	70
2.3.	Líneas paralelas en geometría hiperbólica	70
2.4.	Líneas en geometría esférica	70
2.5.	Planos hiperbólicos en la bola unitaria	71
2.6.	Horofera Σ en \mathbb{B}^3 basada en b	71
2.7.	Planos hiperbólicos en \mathbb{U}^3	74
2.8.	Link de un horopunto	83
2.9.	$L(v)$ polígono euclidiano	84
2.10.	Apareamiento de lados	87
2.11.	Enlace Whitehead	88
2.12.	Octaedro ideal regular	88
3.1.	Región para el grupo de traslaciones	100
3.2.	Cuadrado C' con sólo un representante	101
3.3.	El semiespacio superior $H_g(a)$	101
3.4.	Regiones fundamentales con el mismo volumen	103
4.1.	r -Vecindad de un punto cónico en la bola unitaria \mathcal{H}^3	112
4.2.	Teorema de la piñata	124

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar la geometría global de las 3-variedades hiperbólicas conexas, completas, orientadas de volumen finito. Dicha geometría se enuncia en el siguiente teorema, el cual dice que este tipo de variedades se parecen a una piñata, ver la figura 1, por lo que lo llamaremos el Teorema de la Piñata:

Teorema (Teorema de la Piñata). *Sea M una 3-variedad hiperbólica completa, conexas, orientable y de volumen finito. Entonces existe una 3-variedad compacta con frontera M_0 en M tal que $M - M_0$ es una unión finita de cúspides propias con cerraduras disjuntas. Además, cada cúspide de M es difeomorfa a $T^2 \times (0, \infty)$, donde T^2 denota el 2-toro.*

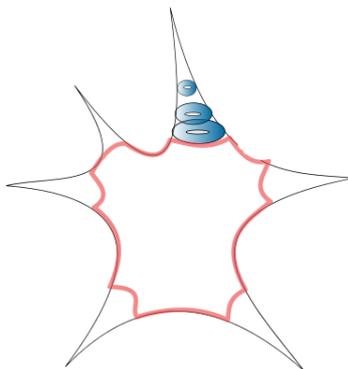


Figura 1: 3-variedad hiperbólica completa, orientada de volumen finito

Las cúspides mencionadas en el teorema corresponden a las puntas de la piñata. A continuación describiremos que es una 3-variedad y como podemos obtenerlas.

Una variedad diferenciable de dimensión n es un espacio topológico M localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , donde en la intersección no vacía de dos abiertos de M podemos usar el cálculo diferencial. Para abreviar, a una variedad diferenciable de dimensión n la llamaremos simplemente una n -variedad. Las variedades con las que estamos más familiarizados son las 2-variedades, es decir, superficies.

Consideremos a \mathbb{R}^n con la distancia Euclidiana usual. Las isometrías de \mathbb{R}^n , es decir, las transformaciones de \mathbb{R}^n en si mismo que preservan la distancia, forman un grupo bajo la composición. Veamos como podemos construir n -variedades mediante subgrupos de isometrías de \mathbb{R}^n , para ello, daremos dos ejemplos con superficies.

Sea G el subgrupo de isometrías de \mathbb{R}^2 generado por la traslación por 1 horizontalmente, notemos que dado un punto x en el interior de una tira vertical de ancho 1 y una vecindad abierta V de x tal que está contenida en la tira, entonces los trasladados de V por elementos de $G - \{Id\}$ son disjuntos, ver la figura 2. Por otro lado, al tomar un punto x en una de las líneas verticales que son frontera de la tira vertical de ancho 1, tenemos que uno de sus trasladados está en la otra línea vertical frontera de la tira. Por lo tanto, para obtener el espacio cociente de \mathbb{R}^2 bajo la acción de G , vemos que podemos identificar todas las tiras verticales con la tira amarilla de la figura 2 y entonces sólo basta identificar las líneas

verticales que son frontera de la tira amarilla y obtenemos una superficie, llamada cilindro.

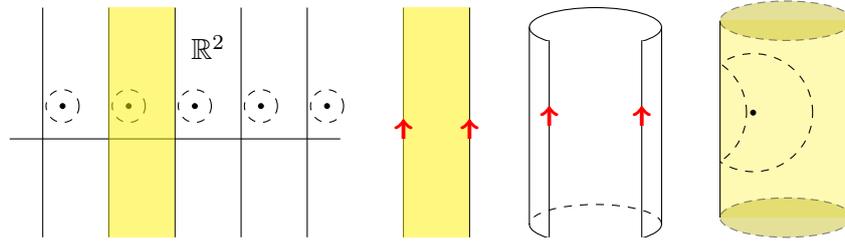


Figura 2: El cilindro

Ahora, supongamos que G es generado por traslaciones por 1 vertical y horizontalmente. Consideramos un cuadrado C de 1×1 , un punto x en el interior de C y una vecindad abierta V de x tal que esta contenida en C . Note que los trasladados de V por elementos de $G - \{Id\}$ son disjuntos. Si tomamos a un punto x en uno de los lados de C , podemos ver que uno de sus trasladados está en el lado opuesto de C . Nuevamente, para obtener el espacio cociente de \mathbb{R}^2 mediante la acción de G , por las observaciones anteriores, podemos identificar a todos los cuadrados con el cuadrado amarillo y basta identificar los lados opuestos del cuadrado amarillo C , obteniendo una superficie llamada un toro, ver la figura 3.

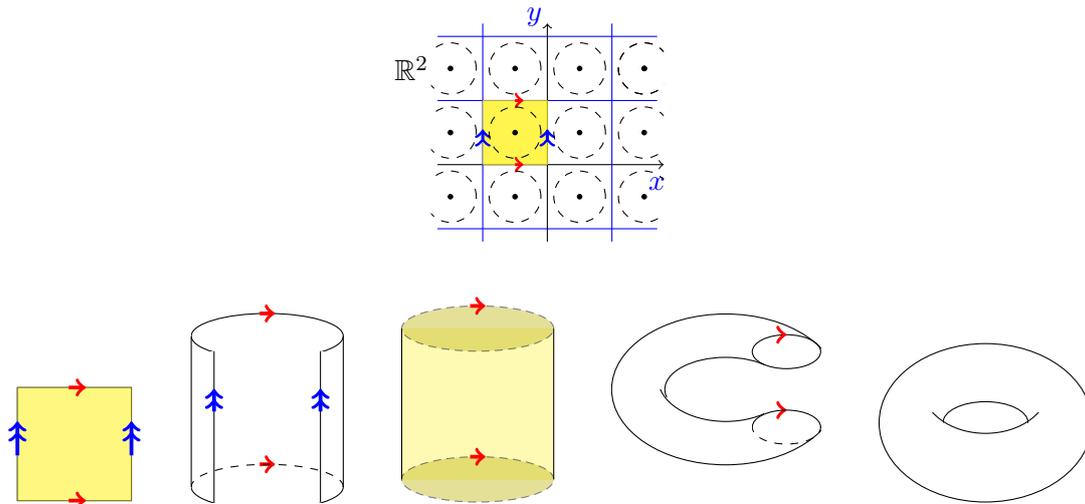


Figura 3: El toro

En general, sea G un grupo de isometrías de \mathbb{R}^n tal que para toda $x \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad V de x tal que $V \cap gV = \emptyset$ para todo $g \in G - \{Id\}$, en este caso decimos que la acción de G en \mathbb{R}^n es una acción cubriente. Entonces el cociente $M = \mathbb{R}^n/G$ de \mathbb{R}^n bajo la acción cubriente de G es una n -variedad. Sea $p: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ la aplicación cociente, cada punto \bar{x} en M corresponde a la órbita de la acción de G de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $p(x) = \bar{x}$ y tenemos que $\bar{V} = p(V)$ es una vecindad de \bar{x} la cual corresponde a la vecindad V de x y todos sus trasladados gV para toda $g \in G$. Como V es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n podemos restringir a él la distancia Euclidiana y medir la distancia $d(x_1, x_2)$ entre dos puntos x_1 y x_2 de V , como G es un subgrupo de isometrías, tenemos que en gV , la distancia $d(gx_1, gx_2)$ entre gx_1 y gx_2 es la misma que la distancia entre x_1 y x_2 , para toda $g \in G$. Por lo tanto, si $\bar{x}_1 = p(x_1)$ y $\bar{x}_2 = p(x_2)$, tenemos una distancia bien definida en \bar{V} mediante $d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(x_1, x_2)$, es decir, en \bar{V} tenemos la distancia Euclidiana y la proyección p es una isometría local. Esto nos da una distancia en todo M y como \mathbb{R}^n es un espacio métrico completo y p es una isometría local, entonces M es también un espacio métrico completo,

es decir, es una n -variedad completa (Teorema 1.8.38). Por esto las n -variedades obtenidas de esta manera son llamadas n -variedades Euclidianas.

También en general, como en el caso de los ejemplos anteriores, existe un poliedro P en \mathbb{R}^n llamado poliedro fundamental convexo de la acción de G , en el cual cada punto de su interior es el único punto de su órbita y los puntos en los lados del poliedro tienen otro punto en su órbita en algún otro lado de P , por lo tanto, para obtener la variedad cociente $M = \mathbb{R}^n/G$ basta identificar los lados del poliedro P como lo indica la acción de G .

Si reemplazamos el quinto postulado de Euclides por el postulado: “dada una recta y un punto fuera de ella, existe un número infinito de paralelas a la recta dada que pasan por el punto” obtenemos la geometría hiperbólica. Denotaremos por \mathcal{H}^n al espacio hiperbólico de dimensión n , el cual es una n -variedad completa con la distancia hiperbólica. Podemos obtener n -variedades a partir de \mathcal{H}^n con el método descrito anteriormente: mediante la acción cubriente de un grupo de isometrías G de \mathcal{H}^n (de hecho esto es cierto para cualquier n -variedad Riemanniana (Teorema 1.8.41)). Como la proyección cociente $p: \mathcal{H}^n \rightarrow M = \mathcal{H}^n/G$ resulta ser una isometría local, las n -variedades así obtenidas son llamadas n -variedades hiperbólicas. Además, también existe un poliedro hiperbólico fundamental convexo P de la acción de G y M se puede obtener identificando los lados de P mediante la acción de G . Se define el volumen de M como el volumen del poliedro fundamental convexo P .

Thurston, a mediados de los 1970's, inició la revolución en el estudio de las variedades de dimensión 3 al demostrar que los interiores de “la mayoría” de las variedades compactas de dimensión 3 tienen estructura hiperbólica, [13]. Después de esta afirmación topólogos y geómetras comenzaron a explorar las variedades hiperbólicas.

Como estamos interesados en 3-variedades hiperbólicas, consideraremos dos modelos de \mathcal{H}^3 : el modelo de la bola unitaria, que consiste de los puntos del interior de la bola unitaria en \mathbb{R}^3 y donde las rectas hiperbólicas son arcos de circunferencia que son ortogonales a la esfera unitaria; y el modelo del semiespacio superior, que consiste de los puntos (x, y, z) en \mathbb{R}^3 con tercera coordenada z positiva, en este modelo, las rectas hiperbólicas son arcos de circunferencia ortogonales al plano $z = 0$ o rectas verticales ortogonales al plano $z = 0$.

Ya que hemos descrito a \mathcal{H}^3 veamos al grupo de isometrías $I(\mathcal{H}^3)$. Los elementos de $I(\mathcal{H}^3)$ están clasificados según el número de puntos que fijan: los elementos elípticos fija al menos un punto en el interior de la bola unitaria, los elementos parabólicos fijan sólo un punto en la esfera unitaria y los elementos hiperbólicos fijan sólo dos puntos en la esfera unitaria. Para construir 3-variedades hiperbólicas necesitamos subgrupos de $I(\mathcal{H}^3)$ cuya acción en \mathcal{H}^3 sea una acción cubriente, el lema 3.1.1, la proposición 3.1.2 y el teorema 3.1.3 demuestran que dichos subgrupos son los subgrupos de $I(\mathcal{H}^3)$ discretos y libres de torsión. Los grupos discretos de $I(\mathcal{H}^3)$ son llamados grupos Kleinianos.

Sea Γ un grupo Kleiniano libre de torsión de isometrías que preservan la orientación de \mathcal{H}^3 , entonces tenemos que $M = \mathcal{H}^3/\Gamma$ es una 3-variedad hiperbólica conexa, completa y orientada. Ahora agreguemos la hipótesis de que M tiene volumen finito. Tenemos que existe un poliedro hiperbólico fundamental convexo P de la acción de Γ y M se obtiene de P identificando sus lados mediante la acción de Γ . El poliedro P tiene un número finito de vértices ideales, es decir, tiene un número finito de vértices que están en la esfera unitaria (Teorema 4.4.5) y dichos vértices ideales corresponden a puntos fijos de elementos parabólicos de Γ .

Sea c un vértice ideal del poliedro fundamental convexo P . Para analizar como se ve M en una vecindad de $p(c)$ usaremos el modelo del semiespacio superior. Conjugando al subgrupo Γ en $I(\mathcal{H}^3)$ podemos suponer que el punto c es el punto al infinito ∞ , entonces P tiene como vértice ideal a ∞ y las aristas de P que inciden en ∞ serán rectas verticales, ver la figura 4.

En este caso ∞ es un punto que es fijado por elementos parabólicos de Γ los cuales

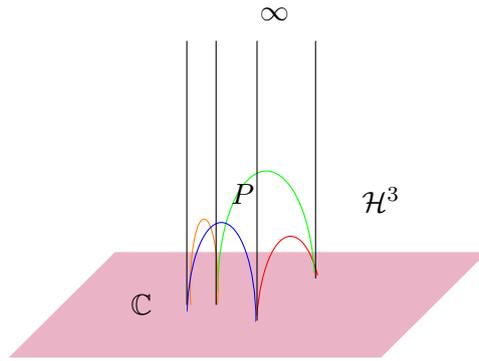


Figura 4: Poliedro en el semiespacio superior con un vértice en ∞ .

corresponden a traslaciones horizontales y de hecho, el subgrupo $Stab(\infty)$ de Γ que fija a ∞ (el estabilizador de ∞) es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y está generado por dos traslaciones horizontalmente linealmente independientes (Proposición 4.2.11). Notemos que la acción de $Stab(\infty)$ deja invariantes a los planos horizontales y como la acción de Γ es una acción cubriente, ésta se restringe a una acción cubriente de $Stab(\infty)$ en cada plano. Por lo tanto, el cociente de cada uno de dichos planos mediante esta acción nos da un toro como en el segundo ejemplo de superficie Euclidiana visto anteriormente, ver figura 5. Por lo tanto, el cociente de una vecindad del vértice ideal ∞ en P mediante la acción de $Stab(\infty)$ será difeomorfo a $T^2 \times (0, \infty)$, con T^2 un toro, lo cual corresponde a las cúspides mencionadas en el Teorema de la Piñata. Como hay un número finito de vértices ideales de P , obtenemos un número finito de cúspides de M y el complemento de dichas cúspides en M es la variedad M_0 , la cual es una 3-variedad compacta cuya frontera es la unión disjunta de un número finito de toros.

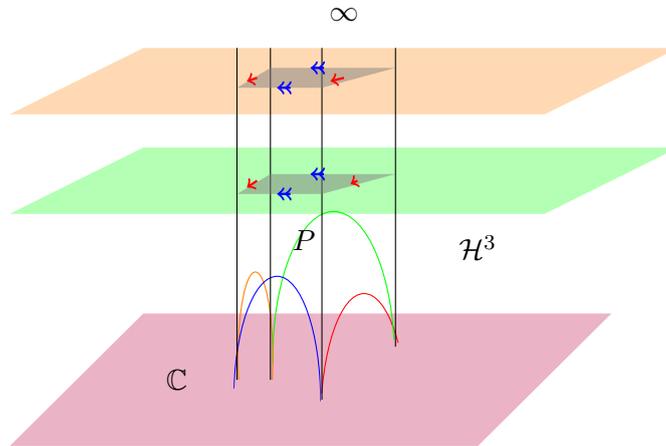


Figura 5: Acción de $Stab(\infty)$ en \mathcal{H}^3

En el capítulo 1 se abordarán los prerrequisitos necesarios, iniciando con teoría de grupos, donde nos centraremos en grupos de matrices invertibles. Estudiaremos espacios métricos y topología. Luego, se analizarán grupos que además tienen estructura de espacio topológico, posteriormente describiremos la acción de estos grupos en espacios topológicos. Veremos dos herramientas de topología algebraica: el grupo fundamental y los espacios cubrientes. Luego, se analizarán a grandes rasgos las variedades Riemannianas. Además, introduciremos un invariante topológico: la característica de Euler. Para finalizar el capítulo 1, estudiaremos el conjunto de los números complejos con un punto al infinito y los automorfismos de este conjunto.

En el capítulo 2, describimos el espacio hiperbólico de dimensión 3 a través de los modelos de la bola unitaria y el modelo del semiespacio superior. Luego, introduciremos las 3-variedades hiperbólicas. Posteriormente, se establecerá la notación y conceptos para describir poliedros en \mathcal{H}^3 , veremos que cuando pegamos poliedros convexos obtenemos 3-variedades hiperbólicas, en este caso, mencionaremos la condición necesaria para tener una 3-variedad hiperbólica completa.

En el capítulo 3, analizaremos los subgrupos de isometrías de \mathcal{H}^3 con acción cubriente en \mathcal{H}^3 y clasificaremos a los subgrupos de isometrías de \mathcal{H}^3 de acuerdo a los puntos fijos que posee el subgrupo. Por otro lado, describiremos el poliedro de Dirichlet y el volumen de las variedades hiperbólicas.

En el capítulo 4 analizaremos dos conjuntos: el conjunto límite y el conjunto ordinario de subgrupos de isometrías de \mathcal{H}^3 . Nos enfocaremos en los puntos fijos de elementos parabólicos e hiperbólicos de subgrupos de isometrías y las regiones asociadas a estos puntos. Introduciremos la propiedad de ser geoméricamente finito para poliedros, grupos y variedades. Finalizamos con la demostración del Teorema de la piñata.

Capítulo 1

Preliminares

“It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. When I have clarified and exhausted a subject, then I turn away from it, in order to go into darkness again.” Carl Friedrich Gauss

En este capítulo introducimos los prerequisites para abordar el Teorema de la piñata. En cada sección se comentarán libros de apoyo.

1.1. Grupos

En esta primera sección nos interesa las propiedades de grupos. De modo que revisaremos las definiciones y resultados necesarios, para mayor profundidad ver [17].

Definición 1.1.1. Un **grupo** consiste de un conjunto no vacío G y una función $\mu: G \times G \rightarrow G$, donde denotaremos a $\mu(a, b)$ simplemente por ab , tal que se cumplen las siguientes condiciones para todo $a, b, c \in G$:

1. $a(bc) = (ab)c$, esta propiedad se llama **ley asociativa**.
2. Existe un único elemento $e \in G$ tal que $ae = ea = a$. El elemento e se llama el **neutro** de G .
3. Para cada $a \in G$ existe $d \in G$ tal que $ad = da = e$, el elemento d se llama el **inverso** de a en G y se denota por a^{-1} .

De manera inmediata lo siguiente es pensar en ejemplos, a continuación mencionamos algunos.

Ejemplo 1.1.2. Sea $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ y el producto usual, el elemento neutro es 1 y dado que $a > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$. Entonces \mathbb{R}^+ es un grupo.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\mathbb{C} - \{0\}$ el conjunto de los números complejos distintos de cero bajo el producto usual de \mathbb{C} , definido por:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El elemento neutro es $1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ y para todo $a + bi \in \mathbb{C} - \{0\}$, su inverso es

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Por lo tanto, $\mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo.

Ejemplo 1.1.4. Sea \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros y la suma usual denotada por $+$, observemos que \mathbb{Z} bajo la suma tiene por elemento neutro a 0 y para cada $a \in \mathbb{Z}$ su inverso es $-a$, por lo tanto, \mathbb{Z} es un grupo.

Ejemplo 1.1.5. Consideremos \mathbb{Z} y el producto usual, observemos que \mathbb{Z} no es un grupo porque para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a^{-1} = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$.

A continuación definiremos una función entre grupos.

Definición 1.1.6. Sean G, H grupos y $f: G \rightarrow H$ una función. Diremos que f es un **homomorfismo de grupos** si para todo $a, b \in G$ se cumple:

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Ejemplo 1.1.7. Consideremos los grupos: $\mathbb{C} - \{0\}$ del ejemplo 1.1.3 y \mathbb{R}^+ del ejemplo 1.1.2. Sea

$$f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ a \mapsto |a|, \quad \text{donde } | \cdot | \text{ es el módulo de complejos.}$$

Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, tenemos:

$$f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = f(z_1) f(z_2).$$

Por lo tanto, f es un homomorfismo de grupos.

Definición 1.1.8. Sean G, H grupos y $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo, f es un **isomorfismo** si f es una función biyectiva. Además, diremos que G y H son **isomorfos** y lo denotaremos por $G \cong H$.

Una manera de estudiar un conjunto es a partir de sus subconjuntos, así también los grupos.

Definición 1.1.9. Sean G un grupo y H un subconjunto de G . Decimos que H es un **subgrupo** de G si y sólo si para todo $a, b \in H$, $ab \in H$ y para todo $a \in H$, $a^{-1} \in H$. Lo denotaremos por $H \leq G$.

Ejemplo 1.1.10. Sea $m\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros múltiplos de $m \in \mathbb{Z}$, notemos que $m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$, con \mathbb{Z} el grupo del ejemplo 1.1.4.

Definición 1.1.11. Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos, definimos:

$$\text{Ker}(f) = \{a \in G : f(a) = e_H\},$$

donde e_H es el elemento neutro de H . Y también tenemos:

$$\text{Im}(f) = \{h \in H : h = f(a) \text{ para algún } a \in G\}.$$

Observación 1.1.12. $\text{Ker}(f) \leq G$ e $\text{Im}(f) \leq H$.

Definición 1.1.13. Sea G un grupo y $a \in G$, el **subgrupo cíclico generado por a** es el conjunto de todas las potencias de a , lo denotaremos por $\langle a \rangle$.

Definición 1.1.14. Sea G un grupo, decimos que G es un grupo **cíclico** si existe $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$, es decir, G consiste de todas las potencias de a .

Definición 1.1.15. Sean G un grupo y $a \in G$, el **orden** de a es el número de elementos de $\langle a \rangle$.

Definición 1.1.16. Sea G un grupo, diremos que G es **libre de torsión** si no tiene elementos $a \in G - \{e\}$ de orden finito.

Definición 1.1.17. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $t \in G$, entonces una **clase lateral izquierda** de H en G es el subconjunto de G :

$$tH = \{th \mid h \in H\},$$

de manera análoga, una **clase lateral derecha** de H en G es:

$$Ht = \{ht \mid h \in H\}.$$

A t se le llama un **representante** de tH (Ht).

Lema 1.1.18. Sea G un grupo, $H \leq G$ y $a, b \in G$, entonces $aH = bH$ si y sólo si $b^{-1}a \in H$.

Demostración. \Rightarrow Dado que $a = ae \in aH = bH$ entonces existe $h \in H$ tal que $a = bh$, entonces $b^{-1}a = h$.

\Leftarrow Veamos que $aH = bH$. Dado que $b^{-1}a \in H$, entonces existe $h' \in H$ tal que $b^{-1}a = h'$, tenemos que $a = bh'$. Veamos por contenciones que $aH = bH$. Si $x \in aH$ entonces $x = ah$ para algún $h \in H$, por lo tanto, $x = bh'h \in bH$. Análogamente, si $y \in bH$ entonces $y = bh$ para algún $h \in H$, por consiguiente, $y = a(h')^{-1}h \in aH$. Por lo tanto, $aH = bH$. \square

Definición 1.1.19. Sean G un grupo y $H \leq G$, el **índice** de H en G es el número de clases laterales izquierdas de H en G , denotado por $[G : H]$.

Definición 1.1.20. Sea G un grupo, el **orden** de G es el número de elementos de G , es denotado por $|G|$.

Ahora, introduciremos la noción de subgrupos normales.

Definición 1.1.21. Sea G un grupo y $K \leq G$, diremos que K es un **subgrupo normal** si $aKa^{-1} = K$ para toda $a \in G$, lo denotaremos por $K \triangleleft G$.

Definición 1.1.22. Sean G un grupo y $b \in G$. El **conjugado** de b en G es un elemento de la forma aba^{-1} para algún $a \in G$.

Definición 1.1.23. Sea G un grupo y $K, H \leq G$, K es **conjugado** de H si existe $a \in G$ tal que $K = a^{-1}Ha$.

Teorema 1.1.24 ([17, Teo. 2.21]). Sea G un grupo, si $N \triangleleft G$, entonces las clases laterales izquierdas de N en G forman un grupo de orden $[G : N]$.

Definición 1.1.25. Sean G un grupo y $N \triangleleft G$. El grupo formado en el teorema 1.1.24 se llama el **grupo cociente**, lo denotaremos por G/N .

El siguiente teorema describe la relación entre homomorfismos de grupos, subgrupos normales y grupos cociente.

Teorema 1.1.26 (Primer Teorema de Isomorfismos, [17, Teo. 2.24]). Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos con núcleo K . Entonces K es un subgrupo normal de G y $G/K \cong \text{Im}(f)$.

De manera similar que en conjuntos tenemos la propiedad de complemento.

Definición 1.1.27. Sean G un grupo y $K \leq G$ (no necesariamente normal). Entonces un subgrupo $H \leq G$ es un **complemento de K** si $K \cap H = e$ y $KH = G$.

Definición 1.1.28. Sean G un grupo, $K \triangleleft G$ y $H \triangleleft G$, diremos que G es el **producto directo** de K y H si $K \cap H = e$ y $KH = G$.

Definición 1.1.29. Sea G un grupo y $K, H \leq G$. Decimos que G es un **producto semidirecto** de K por H , si $K \triangleleft G$ y K tiene un complemento $H_1 \cong H$, lo denotaremos por $G = K \rtimes H$.

Teorema 1.1.30 ([17, Lem. 7.20]). *Sea G un grupo, si K es un subgrupo normal de G , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es un producto semidirecto de K por G/K .
2. Sea $v: G \rightarrow G/K$ el homomorfismo cociente, existe un homomorfismo $s: G/K \rightarrow G$ tal que $vs = Id_{G/K}$.

1.2. Grupos de matrices

A continuación combinaremos propiedades de espacios vectoriales y grupos de matrices. Para la revisión de algunos de estos temas, véase [6].

1.2.1. Transformaciones lineales y grupos de matrices

Daremos una identificación entre matrices y transformaciones lineales. Además, introduciremos el concepto de base de un espacio vectorial.

En esta subsección consideraremos $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ un campo.

Definición 1.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , una **base** para V es un conjunto linealmente independiente de vectores en V que generan a V .

El conjunto de todas las matrices $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} lo denotaremos por $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

Observación 1.2.2. Recordemos, para cada transformación lineal $T: V \rightarrow V$, escogiendo una base de V podemos identificar a $v \in V$ con un elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ y podemos asociarle a T una matriz A tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Recíprocamente, dada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ obtenemos una transformación lineal $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dada por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Observación 1.2.3. Tenemos que $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y \mathbb{F}^{n^2} son espacios vectoriales isomorfos, ya que dada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ le corresponde $\mathbf{v}_A \in \mathbb{F}^{n^2}$ de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{v}_A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}).$$

1.2.2. Orientación

De manera natural introduciremos la noción de orientación de un espacio vectorial, para lo cual haremos uso de las nociones de base, matriz de transición, determinante y una relación de equivalencia en el conjunto de bases del espacio vectorial. Para mayor profundidad en el tema ver [7, Cap. 3].

Definición 1.2.4. Sean V un espacio vectorial de dimensión n con bases ordenadas β y β' dadas por $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ y $\beta' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$. Sea A la matriz $n \times n$ tal que $Ab_i = b'_i$. La matriz A se llama la **matriz de transición** de β a β' .

Haciendo un abuso de notación, más adelante denotaremos por $A\beta = \beta'$.

Observación 1.2.5. Sean β y β' dos bases de un espacio vectorial V , si A es la matriz de transición de β a β' , entonces A^{-1} es la matriz de transición de β' a β .

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre los reales. Consideremos el conjunto de todas las bases del espacio vectorial V . Sean $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dos bases arbitrarias del espacio vectorial V y $A = (a_{ij})$ la matriz de transición tal que:

$$A\beta = \beta', \quad w_i = \sum_{k=1}^n v_k a_{ki}.$$

Observación 1.2.6. Por la definición de matriz de transición 1.2.4 es invertible, entonces cualquier matriz de transición tiene $\det(A) > 0$ o $\det(A) < 0$.

Definimos una relación \sim en el conjunto de todas las bases de V de la siguiente manera: sean β y β' dos bases de V , $\beta \sim \beta'$ si A es la matriz de transición de β a β' y $\det(A) > 0$.

Proposición 1.2.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre los reales, \sim es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de V .

Demostración. Sea β una base de V , dado que la matriz de transición de β a β es la matriz identidad I , entonces $\det(I) = 1 > 0$, por lo tanto, \sim es reflexiva.

Supongamos que $\beta \sim \beta'$, dada A la matriz de transición de β a β' tal que $\beta' = A\beta$. Por la observación 1.2.5 $\beta = A^{-1}\beta'$, además, dado que $\det(A) > 0$ entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} > 0$. Por lo tanto, $\beta' \sim \beta$.

Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ bases de V un espacio vectorial, supongamos que $\beta_1 \sim \beta_2$ y $\beta_2 \sim \beta_3$. Existen A_{12}, A_{23} y A_{13} las matrices de transición de las bases respectivas tales que

$$\beta_2 = A_{12}\beta_1 \quad \beta_3 = A_{23}\beta_2 \quad \beta_3 = A_{13}\beta_1,$$

entonces $\beta_3 = A_{23}\beta_2 = A_{23}(A_{12}\beta_1)$, tenemos que $A_{13} = A_{23}A_{12}$, dado que $\beta_1 \sim \beta_2$ y $\beta_2 \sim \beta_3$ tenemos que:

$$\det(A_{13}) = \det(A_{12}A_{23}) = \det(A_{12})\det(A_{23}) > 0.$$

Por lo tanto, $\beta_1 \sim \beta_3$. Por lo tanto, \sim es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las bases. \square

Proposición 1.2.8. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los reales, β_1 y β_2 dos bases en V relacionadas y sea β_3 otra base en V , entonces β_3 se relaciona con β_1 o β_2 .

Demostración. La prueba equivale a probar lo siguiente: si $\beta_1 \approx \beta_2$ entonces $\beta_3 \sim \beta_1$ o $\beta_3 \sim \beta_2$.

Sea A_{12} la matriz de transición de β_1 a β_2 , dado que $\beta_1 \approx \beta_2$, entonces $\det(A_{12}) < 0$. Sean A_{31} y A_{32} matrices de transición de las respectivas bases tales que

$$\beta_1 = A_{31}\beta_3, \quad \beta_2 = A_{32}\beta_3, \quad \beta_2 = A_{12}\beta_1$$

además, dado que $A_{32}^{-1}\beta_2 = A_{32}^{-1}A_{32}\beta_3 = \beta_3$, entonces

$$\begin{aligned} \beta_3 &= A_{32}^{-1}\beta_2 \\ &= A_{32}^{-1}A_{12}\beta_1, \quad A_{13} = A_{32}^{-1}A_{12}. \end{aligned}$$

Entonces $\det(A_{13}) = \det(A_{32}^{-1})\det(A_{12})$. Dado que $\det(A_{12}) < 0$, tenemos dos casos:

1. Si $\det(A_{13}) > 0$ entonces $\beta_1 \sim \beta_3$, es decir, $\beta_3 \sim \beta_1$.

2. Sí $\det(A_{13}) < 0$, entonces $\det(A_{32}^{-1}) > 0$, es decir, $\beta_3 \sim \beta_2$.

□

En conclusión, hay dos clases de equivalencia de bases con respecto a la relación de equivalencia.

Definición 1.2.9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los reales. Una **orientación** de V es una elección de una de estas clases de equivalencia de bases. Para indicar una orientación en un espacio vectorial generalmente daremos una base representante de dicha clase de equivalencia.

Observación 1.2.10. La orientación de un espacio vectorial V sobre los complejos está bien definida, ya que un espacio vectorial complejo se puede ver como un espacio vectorial real.

Sea T una transformación lineal invertible sobre un espacio vectorial V de dimensión finita sobre \mathbb{R} , por la observación 1.2.2 sabemos que T se identifica con una matriz B , sí $\det(B) > 0$, entonces bajo la acción de T en β una base arbitraria real tenemos β' otra base real tal que la matriz de transición de β a β' tiene determinante positivo, es decir, las bases tienen la misma orientación, por otro lado, si $\det(B) < 0$ las bases β y β' no se relacionan. Así que podemos definir lo siguiente:

Definición 1.2.11. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} con una orientación y $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal invertible. Diremos que T **preserva la orientación** de V si la matriz B asociada a T satisface que $\det(B) > 0$. En caso contrario, diremos que T **invierte la orientación** si $\det(B) < 0$.

1.2.3. Producto interior y producto hermitiano

En esta sección introduciremos la noción de producto interior en un espacio vectorial, con la cual podemos medir distancias y ángulos. Para poder considerar los casos real y complejo simultáneamente enunciamos la siguiente definición.

Definición 1.2.12. Sea $x \in \mathbb{F}$, el **conjugado** de x , denotado por \bar{x} , se define por:

$$\bar{x} = \begin{cases} x & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \quad \text{o} \\ \bar{x} & \text{es el conjugado complejo si } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Definición 1.2.13. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , un **producto interior** en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores $x, y \in V$ un escalar en \mathbb{F} , denotado por $\langle x, y \rangle$. El producto interior en V satisface las siguientes condiciones para toda $x, y, z \in V$ y toda $c \in \mathbb{F}$:

1. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$.
2. $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$.
3. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$, donde la barra indica conjugación sobre \mathbb{F} .
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.

Sí $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama **producto hermitiano**, sí $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lo llamaremos simplemente **producto interior**. El siguiente es un ejemplo donde énfatizamos el caso real y complejo.

Ejemplo 1.2.14. Sea $V = \mathbb{F}^n$, para $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ definimos:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Este es un producto interior llamado **producto interior(hermitiano) usual**.

De manera análoga, pensemos en matrices y consideremos la siguiente definición.

Definición 1.2.15. Sea A una matriz $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} . La matriz **transpuesta conjugada** A^* de A es una matriz $m \times n$ que cumple lo siguiente

$$(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}.$$

Observación 1.2.16. Si la matriz A tiene entradas reales, entonces A^* es simplemente la transpuesta de A .

Ejemplo 1.2.17. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 3 + 4i \\ 3 - i & 1 + 2i \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} -3i & 3 + i \\ 3 - 4i & 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2.18. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, definimos la **traza** de A por:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definimos un producto interior en $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ haciendo uso de la matriz conjugada y la traza:

Definición 1.2.19. En $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ tenemos un producto interior definido de la siguiente manera, dadas $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$

$$\langle A, B \rangle = tr(B^* A).$$

Hay una correspondencia entre el producto interior entre elementos de $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ y elementos de \mathbb{F}^{n^2} .

Lema 1.2.20. *El producto interior en $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ corresponde con el producto interior (hermitiano) de \mathbb{F}^{n^2} .*

Demostración. Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, por la identificación de la observación 1.2.3 A se identifica con $\mathbf{v}_A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n^2}$ y B se identifica con $\mathbf{v}_B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n^2}$. Observar que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B \rangle &= \sum_{k=1}^n a_{1k} \bar{b}_{k1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \bar{b}_{k2} + \dots + \sum_{k=1}^n a_{nk} \bar{b}_{kn} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{b}_{ki}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la definición 1.2.15 $(B^*) = (b_{ij}^*) = (\overline{b_{ji}})$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr}(B^* A) \\ &= \sum_{i=1}^n (B^* A)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{b_{ki}} a_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} \overline{b_{ki}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto interior en $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ corresponde con el producto interior (hermitiano) de \mathbb{F}^{n^2} . \square

Definición 1.2.21. Sea V un espacio vectorial con producto interior, para cada $x \in V$ definimos la **norma** de x por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Ejemplo 1.2.22. Sea $V = \mathbb{F}^n$ con el producto interior usual dado en el ejemplo 1.2.14, entonces:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

es la **longitud euclidiana**. Si $n = 1$, entonces $\|x_1\| = |x_1|$ es el **valor absoluto**.

Ejemplo 1.2.23. Sea $V = M_{n \times n}(\mathbb{F})$ con el producto interior dado en la definición 1.2.19, tenemos que la norma de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ es

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}.$$

1.2.4. Grupo general lineal

A continuación describiremos el grupo de matrices invertibles y algunos de sus subgrupos.

Observación 1.2.24. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, A es invertible si y sólo si el determinante de A es distinto de cero.

Observación 1.2.25. Sean A y B matrices invertibles de $M_{n \times n}(\mathbb{F})$, entonces AB es invertible, ya que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y por la observación 1.2.24 tenemos que $\det(AB) \neq 0$, es decir, AB es invertible.

Por la observación 1.2.25, el conjunto de todas las matrices invertibles de $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ forman un grupo bajo la multiplicación de matrices. Este grupo se llama el **grupo general lineal** y es denotado por $GL(n, \mathbb{F})$.

Observación 1.2.26. Sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que es un isomorfismo, es decir, T es invertible. Por la observación 1.2.2, a T le corresponde una matriz invertible, es decir, un elemento de $GL(n, \mathbb{F})$.

Por la definición 1.2.21 y el ejemplo 1.2.14, la norma de $A \in GL(n, \mathbb{F})$ se define por:

$$\|A\|_{\mathbb{F}} = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} \overline{a_{ki}}}. \quad (1.2.1)$$

Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces algunos subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$ son los siguientes:

1. El conjunto de todas las matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ con determinante igual a 1, se llama el **grupo especial lineal**, denotado por $SL(n, \mathbb{C})$.
2. El conjunto de todas las matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ con entradas reales, se llama el **grupo general lineal** y es denotado por $GL(n, \mathbb{R})$.
3. El conjunto de todas las matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ con entradas reales y determinante igual a 1, se llama el **grupo especial lineal** y es denotado por $SL(n, \mathbb{R})$. Este es el grupo de automorfismos de \mathbb{R}^n que preservan la orientación.

Sea $I \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ la matriz identidad, consideremos los siguientes grupos.

Definición 1.2.27. El **grupo proyectivo lineal** es el grupo cociente $GL(n, \mathbb{C})/K$, donde K es el subgrupo normal $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$, denotado por $PGL(n, \mathbb{C})$.

Definición 1.2.28. El **grupo proyectivo especial lineal** es el grupo cociente $SL(n, \mathbb{C})/\pm I$, denotado por $PSL(n, \mathbb{C})$.

1.2.5. Grupo ortogonal

Ahora, estudiaremos el grupo de transformaciones lineales que preservan el producto interior en \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.29. Sean $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ el producto interior de \mathbb{R}^n , decimos que T es una **transformación ortogonal** si y sólo si:

$$\langle T(x), T(y) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 1.2.30. Sea A una matriz real $n \times n$, diremos que A es una **matriz ortogonal** si y sólo si la transformación lineal asociada $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $A(x) = Ax$ es ortogonal.

Tenemos lo siguiente:

Teorema 1.2.31 ([16, Teo. 1.3.3]). *Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$, diremos que A es una matriz ortogonal si y sólo si A satisface lo siguiente:*

$$A^t A = I,$$

donde A^t es la matriz transpuesta e I es la matriz identidad.

El conjunto de todas las matrices ortogonales de $GL(n, \mathbb{R})$ bajo la multiplicación de matrices forman un subgrupo, llamado el **grupo ortogonal**, denotado por $O(n)$.

Observación 1.2.32. $O(n) \leq GL(n, \mathbb{R})$.

Sea $A \in O(n)$, por la observación 1.2.24 tenemos que $\det(A) \neq 0$, así que:

$$\det(A^t A) = \det(A)^2, \quad \text{además} \quad \det(I) = 1,$$

entonces $\det(A) = \pm 1$.

Sea $A \in O(n)$, si $\det(A) = 1$, entonces diremos que A es una **rotación**. El conjunto de todas las rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal**, denotado por $SO(n)$. Tenemos que $SO(n)$ es un subgrupo de índice 2 de $O(n)$.

Además, por el ejemplo 1.2.23, para toda $A \in O(n)$, se cumple:

$$\|A\|_{\mathbb{R}} = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \sqrt{n}. \quad (1.2.2)$$

Definición 1.2.33. Una base de \mathbb{R}^n es **ortonormal** si sólo si $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) para toda i, j .

Ejemplo 1.2.34. Sea e_i el vector en \mathbb{R}^n cuya coordenadas son todas cero excepto la i -ésima, la cual es 1. Entonces $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n , esta base se llama la **base estándar** de \mathbb{R}^n .

El siguiente teorema caracteriza a las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.2.35. Sean $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función y la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es una transformación ortogonal.
2. T es una transformación lineal y $\{T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n , tenemos que:

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

Entonces $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es una base ortonormal.

Veamos que $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es linealmente independiente, supongamos que:

$$\sum_{i=1}^n c_i T(e_i) = 0.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i T(e_i), T(e_j) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n \langle c_i T(e_i), T(e_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \langle T(e_i), T(e_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= c_j \end{aligned}$$

para cada j , por lo tanto, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es linealmente independiente.

Veamos que T es lineal, sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces existen escalares $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(x) = \sum_{i=1}^n c_i T(e_i).$$

Dado que $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es una base ortonormal, tenemos que

$$c_j = \langle T(x), T(e_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_j,$$

donde x_j es la j -ésima coordenada, entonces

$$T \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i).$$

Por lo tanto, T es lineal.

2. \Rightarrow 1. Veamos que T es ortogonal, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ donde x_i y y_i son las i -ésimas coordenadas. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle T(x), T(y) \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), T\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{i=1}^n y_i T(e_i) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es ortogonal. □

1.2.6. Grupo unitario

De manera análoga al grupo ortogonal, estudiaremos el grupo de transformaciones lineales que preservan el producto hermitiano en \mathbb{C}^n de $GL(n, \mathbb{C})$.

Definición 1.2.36. Sean $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ el producto hermitiano de \mathbb{C}^n , decimos que T es una **transformación unitaria** si y sólo si:

$$\langle T(x), T(y) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Es decir, T preserva el producto hermitiano.

Definición 1.2.37. Sea A una matriz compleja $n \times n$, diremos que A es una **matriz unitaria** si y sólo si la transformación lineal asociada $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, definida por $A(x) = Ax$ es unitaria.

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.2.38 ([16, Teo. 5.1.2]). *Sea $A \in GL(n, \mathbb{C})$, decimos que A es una matriz unitaria si y sólo si cumple lo siguiente: $A^*A = I$, donde A^* es la matriz conjugada transpuesta e I es la matriz identidad.*

El conjunto de todas las matrices unitarias de $GL(n, \mathbb{C})$ bajo el producto de matrices forman un subgrupo, llamado **grupo unitario** y denotado por $U(n)$. Además $U(n) \leq GL(n, \mathbb{C})$

Observación 1.2.39. Sea $A \in U(n)$, si A es real entonces $A \in O(n)$.

Por el ejemplo 1.2.23 para toda $A \in U(n)$, tenemos que:

$$\|A\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\text{tr}(I)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}. \quad (1.2.3)$$

El conjunto de todas las matrices $A \in U(n)$ con determinante igual a 1 forman un grupo, llamado el **grupo especial unitario**, denotado por $SU(n)$.

1.3. Espacios métricos

Con la idea de generalizar el análisis de \mathbb{R}^n y la distancia euclidiana, ahora, estudiaremos conjuntos dotados con una “distancia”, esta estructura tiene bastantes aplicaciones. A continuación revisaremos algunas nociones y resultados sobre espacios métricos.

Definición 1.3.1. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función, diremos que d es una **métrica** sobre X , si para cada $x, y, z \in X$, d satisface lo siguiente:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$, esta desigualdad se llama **la desigualdad del triángulo**.

Sí d es una métrica sobre X , entonces diremos que (X, d) es un **espacio métrico**.

Ahora, enlistaremos varios ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1.3.2. Sea X un conjunto, definimos $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

observar que d es una métrica, d se llama la **métrica discreta**.

Definición 1.3.3. La **métrica** sobre un espacio vectorial V con un producto interior, la denotaremos por d_V , se define por:

$$d_V(x, y) = \|x - y\|,$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma inducida por el producto interior, tal como en la definición 1.2.21.

Ejemplo 1.3.4. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.3.5. Dado que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, tenemos que $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{R}^2})$ es un espacio métrico. En general, tenemos que $(\mathbb{C}^n, d_{\mathbb{R}^{2n}})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.3.6. Por la definición 1.3.3 y por la ecuación (1.2.2) $(O(n), d_{O(n)})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.3.7. De forma análoga, por la definición 1.3.3 y por ecuación (1.2.3) $(U(n), d_{U(n)})$ es un espacio métrico.

De manera intuitiva, dados dos objetos geométricos planos decimos que son iguales si son del mismo tamaño y forma, es decir, si existe una biyección entre ellos que preserva distancias.

Definición 1.3.8. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es una **isometría** si y sólo si

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

para toda $x, y \in X$.

Ejemplo 1.3.9. Sea $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación antipodal de \mathbb{R}^n , definida por $\alpha(x) = -x$, α es una isometría.

Ejemplo 1.3.10. Sea $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función dada por $g(x) = x + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^n$, tenemos que g es una isometría. La función g se llama una **traslación**.

Los elementos de $O(n)$ se relacionan con la noción de isometría a través del siguiente corolario.

Corolario 1.3.11. *Cualquier transformación ortogonal es una isometría bajo la métrica euclidiana.*

Demostración. Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación ortogonal, tenemos que

$$\|T(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \langle T(x), T(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Así que $\|T(x) - T(y)\|_{\mathbb{R}^n} = \|T(x - y)\|_{\mathbb{R}^n} = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$, entonces T preserva distancias.

Por el teorema 1.2.35, T es biyectiva, por lo tanto, T es una isometría euclidiana. \square

Teorema 1.3.12. *Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función f es una isometría.*
2. *La función f preserva distancias.*
3. *La función f es de la forma $f(x) = a + Ax$, donde $A \in O(n)$ y $a = f(0)$.*

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Por la definición de isometría.

2. \Rightarrow **3.** Dado que f preserva distancias, entonces $A = f - f(0)$ también preserva distancias y $A(0) = 0$. Dado que

$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} = \|A(x) - A(0)\|_{\mathbb{R}^n} = \|x - 0\|_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_{\mathbb{R}^n},$$

entonces, A preserva la distancia euclidiana, por consiguiente

$$\begin{aligned} 2\langle Ax, Ay \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|Ay\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|Ax - Ay\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|y\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &= 2\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto A es ortogonal, despejando $A = f - f(0)$ tenemos que $f(x) = f(0) + Ax$, por lo tanto, se cumple el inciso 3.

3. \Rightarrow **1.** Si f es de la forma $f(x) = a + Ax$, donde A es una matriz ortogonal y $a = f(0)$. Por la observación 1.2.3 A se identifica con una transformación ortogonal T . Tenemos f es la composición de una transformación ortogonal seguida de una traslación, donde T es una isometría por el corolario 1.3.11 y por el ejemplo 1.3.10 concluimos que f es una isometría. \square

Definición 1.3.13. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, diremos que X y Y son **isométricos** si existe una isometría biyectiva entre ellos.

Al conjunto de isometrías del espacio X en sí mismo lo denotaremos por $I(X)$, además, $I(X)$ es un grupo bajo la composición.

Definición 1.3.14. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función, f es una **isometría local** si y sólo si para cada punto $x \in X$, existe un $r > 0$ tal que f manda la bola $B_{d_X}(x, r)$ isométricamente en $B_{d_Y}(f(x), r)$.

Definición 1.3.15. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios métricos y una función $f: X \rightarrow Y$, diremos que f es una **similitud** de X a Y si y sólo si f es biyectiva y existe $k \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$d_Y(f(x), f(y)) = kd_X(x, y) \quad \text{para toda } x, y \in X$$

Ejemplo 1.3.16. Consideremos $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, $k > 0$ y la función $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $f_k(x) = kx$, tenemos que $d_{\mathbb{R}^n}(f_k(x), f_k(y)) = kd_{\mathbb{R}^n}(x, y)$. Por lo tanto, f_k es una similitud.

Sea (X, d) un espacio métrico, el conjunto de similitudes de X en X bajo la composición forma un grupo llamado el **grupo de similitudes** de X , denotado por $S(X)$. Notar que el grupo de isometrías $I(X)$ es un subgrupo de $S(X)$.

El siguiente teorema se sigue del teorema 1.3.12.

Teorema 1.3.17 ([16, Teo. 1.3.5]). *Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. La función f es una similitud.
2. La función f es de la forma $f(x) = a + kAx$, donde $A \in O(n)$, $k \in \mathbb{R}^+$ y $a = f(0)$.

En un espacio métrico, se puede imitar las definiciones de conjunto abierto, cerrado, convergencia de una sucesión y función continua como en \mathbb{R}^n .

Definición 1.3.18. Sea (X, d) un espacio métrico, una **bola abierta** $B_d(x, \epsilon)$ de radio ϵ centrada en x se define como

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon.\}$$

Definición 1.3.19. Sea $A \subset X$, A es un **subconjunto abierto** si para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subset A$.

Definición 1.3.20. Sea $C \subset X$, C es un **subconjunto cerrado** si su complemento $X - C$ es abierto.

Definición 1.3.21. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}^+$. La **esfera** en \mathbb{R}^n de radio r centrada en a es el conjunto:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$$

Definición 1.3.22. Sea X un espacio métrico, la **bola cerrada** de radio $r > 0$ centrada en un punto $a \in X$, se define como:

$$C(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Definición 1.3.23. Sea X un espacio métrico y $S \subset X$ y $r > 0$, entonces la **r -vecindad** de S en X , se define por:

$$N(S, r) = \bigcup \{B_d(x, r) \mid x \in S\},$$

note que $N(S, r)$ es un abierto en X .

Definición 1.3.24. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$, diremos que x es un **punto límite** de A si cualquier vecindad de x contiene un punto $y \neq x$ tal que $y \in A$.

Definición 1.3.25. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in A$, si x no es un punto límite de A , entonces x se llama **punto aislado** de A , es decir, si existe un abierto U de x tal que $U \cap A = \{x\}$.

Definición 1.3.26. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, la **cerradura** de A es la unión de todos sus puntos límite.

Teorema 1.3.27 ([18, Teo. 2.20]). *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$, si x es un punto límite de A , entonces para todo $r > 0$ y para toda $B_d(x, r)$ se cumple que $B_d(x, r)$ tiene un número infinito de puntos de A .*

Corolario 1.3.28 ([18, Cor, pág. 33]). Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$, si A es un conjunto finito de puntos, entonces A no tiene puntos límite.

Definición 1.3.29. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función, diremos que f es **continua en el punto** $x \in X$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$. Diremos simplemente que f es **continua** en X si lo es para cada punto de X .

Como ya mencionamos, de manera análoga a \mathbb{R}^n definimos la continuidad en términos de sucesiones en un espacio métrico.

Definición 1.3.30. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X , x_n **converge** a un punto x de X si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para cualquier $n \geq N$. El punto x se llama el **punto límite** de $\{x_n\}$ en X .

De manera análoga a \mathbb{R}^n , en un espacio métrico podemos dar un criterio sobre la continuidad en términos de sucesiones.

Lema 1.3.31. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es continua en $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que x_n converge a x entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

Demostración. \Rightarrow Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon),$$

dado que x_n converge a x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_{d_X}(x, \delta)$ para toda $n \geq N$. Entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

\Leftarrow Por contradicción. Supongamos que f no es continua, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \not\subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon),$$

es decir, $f(B_{d_X}(x, \delta)) \cap (B_{d_Y}(f(x), \epsilon))^C \neq \emptyset$. Tomemos $\delta = \frac{1}{n}$, así que

$$f(B_{d_X}(x, \frac{1}{n})) \cap (B_{d_Y}(f(x), \epsilon))^C \neq \emptyset.$$

Sea $y_n \in f(B_{d_X}(x, \frac{1}{n})) \cap (B_{d_Y}(f(x), \epsilon))^C$, dado que $y_n \in f(B_{d_X}(x, \frac{1}{n}))$, tenemos que $y_n = f(x_n)$ para algún $x_n \in B_{d_X}(x, \frac{1}{n})$ entonces $f(x_n)$ no converge a $f(x)$. Además, dado $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$ tenemos que $x_n \in B_{d_X}(x, \frac{1}{n})$ para toda $n \geq N$, por lo tanto x_n converge a x , lo cual es una contradicción. \square

Definición 1.3.32. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_i\}$ una sucesión infinita en X , diremos que $\{x_i\}$ es una **sucesión de Cauchy** si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe un entero positivo k tal que $d(x_i, x_j) < \epsilon$ para toda $i, j \geq k$.

Observación 1.3.33. No toda sucesión de Cauchy converge, por ejemplo, consideremos $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ el espacio métrico de los racionales, donde $|\cdot|$ es el valor absoluto y

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

$\{a_n\}$ es sucesión de Cauchy pero a_n no converge en \mathbb{Q} , ya que su punto límite es e , el cual es irracional, así que a_n converge en \mathbb{R} .

Definición 1.3.34. Sea (X, d) un espacio métrico, X es **completo** si y sólo si cualquier sucesión de Cauchy en X converge en X

Definición 1.3.35. Sea (X, d) un espacio métrico, X es **finitamente compacto** si y sólo si todas las bolas cerradas son compactas, es decir,

$$\overline{B_d(a, r)} = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

es compacta para cada $a \in X$ y $r > 0$.

Ejemplo 1.3.36. \mathbb{R}^n es finitamente compacto.

1.4. Topología

En esta sección revisaremos algunos conceptos básicos de topología, así como la compacidad y conexidad de espacio topológicos. Además, describiremos los espacios cocientes. Consideraremos espacios de funciones continuas y le asociaremos dos topologías. Estos temas se puede ver en [15].

1.4.1. Espacios topológicos

En la búsqueda de generalizar espacios euclidianos y espacios métricos, se propusieron varias definiciones, la definición final fue lo más amplia y al mismo tiempo suficientemente estrecha como para que los teoremas fueran consistentes.

En la sección anterior vimos espacios métricos, los cuales están dotados de una métrica, pero no todos los espacios se les puede asociar una métrica. La noción que definiremos a continuación se adapta para todo espacio.

Definición 1.4.1. Sea X un conjunto, una **topología** sobre X es una colección τ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones:

1. \emptyset y X pertenecen a τ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Si τ es una topología sobre X , entonces la pareja (X, τ) se llama **espacio topológico** y los elementos que pertenecen a τ se llaman subconjuntos **abiertos** de X .

Algunos ejemplos de espacios topológicos son los siguientes:

Ejemplo 1.4.2. Sea X un conjunto, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X , esta topología se llama la **topología discreta**. Un espacio X con la topología discreta es llamado **espacio discreto**.

Observación 1.4.3. Sea X un espacio topológico, X es discreto si y sólo si los subconjuntos de un sólo punto son abiertos.

Ejemplo 1.4.4. Sea (X, d) un espacio métrico, el conjunto de todos los conjuntos abiertos de X dados en la definición 1.3.19 inducen una topología sobre X , llamada **la topología inducida por la métrica d** .

Ejemplo 1.4.5. Sea (X, d) un espacio métrico, X es un **espacio métrico discreto** si y sólo si la topología de X inducida por d es la topología discreta.

Para describir una topología de un espacio consideramos sus conjuntos abiertos. En ocasiones resulta complicado esto, por tal motivo se define lo siguiente:

Definición 1.4.6. Sea X un conjunto, una **base** para una topología sobre X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X , llamados **elementos base**, tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento base B que contiene a x .
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos base B_1 y B_2 , entonces existe un elemento base B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.4.7. Sean X un espacio topológico y \mathcal{B} una base para la topología de X , la **topología generada por \mathcal{B}** se describe de la siguiente manera: sea un subconjunto U de X , diremos que U es un abierto en X si para cada $x \in U$, existe un elemento base $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Definición 1.4.8. Sea X un espacio topológico, una **subbase \mathcal{S}** para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X tal que la unión es igual a X . La topología generada por la subbase \mathcal{S} es definida para ser la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

Definición 1.4.9. Sea X un espacio topológico, X tiene una **base numerable** en X si existe una colección numerable \mathcal{B} de vecindades de x tal que cada vecindad de x contiene al menos uno de los elementos de \mathcal{B} .

Definición 1.4.10. Sea X un espacio topológico, diremos que X es **primero numerable** si admite una base numerable en cada uno de sus puntos.

Definición 1.4.11. Sea X un espacio topológico, diremos que X es **segundo numerable** si admite una base numerable para la topología de X .

Una forma de estudiar un espacio topológico es a través de sus subespacios, con respecto a la topología definimos lo siguiente.

Definición 1.4.12. Sea X un espacio topológico con topología τ . Si $Y \subset X$, la colección:

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y , llamada la **topología de subespacio**. Y decimos que Y es un **subespacio** de X .

Definición 1.4.13. Sean X y Y espacios topológicos, la **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección \mathcal{B} de todos los conjuntos abiertos de la forma $U \times V$ donde U es un abierto de X y V es un abierto de Y .

A continuación definiremos algunos conceptos básicos de espacios topológicos:

Definición 1.4.14. Sean (X, τ) un espacio topológico de X y $A \subset X$, el **interior de A** es la unión de todos los conjuntos abiertos que están contenidos en A .

Definición 1.4.15. Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, diremos que A es **cerrado** en X si el conjunto $X - A$ es abierto en X .

Teorema 1.4.16 ([15, Teo. 17.1]). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

1. \emptyset y X son cerrados.
2. La intersección arbitraria de subconjuntos cerrados es cerrado.
3. La unión de una colección finita de subconjuntos cerrados es cerrado.

Definición 1.4.17. Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Decimos que x es un **punto límite** de A si para cualquier vecindad U de x en X cumple lo siguiente: $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

Teorema 1.4.18 ([15, Cor. 17.7]). *Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, A es cerrado en X si y sólo si A contiene todos sus puntos límite.*

Definición 1.4.19. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, la **cerradura** de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que están contenidos en A .

A continuación definiremos un tipo especial de espacios topológicos.

Definición 1.4.20. Sea X un espacio, diremos que X es un **espacio de Baire** si se cumple la siguiente condición: dada cualquier colección numerable $\{A_n\}$ de subconjuntos cerrados de X , donde cada A_n tiene interior vacío en X , entonces $\cup A_n$ también tiene interior vacío en X .

Definición 1.4.21. Sean X un espacio topológico y \mathcal{S} una colección de subconjuntos de X , diremos que \mathcal{S} es **localmente finita** si y sólo si para cualquier punto $x \in X$, existe una vecindad U de x en X tal que U intersecciona sólo un número finito de elementos de \mathcal{S} .

Ejemplo 1.4.22. Consideremos el intervalo cerrado $[0, 1]$ y lo dividimos en 8. Sean

$$\mathcal{S} = \left\{ \left[\frac{n}{8}, \frac{n+2}{8} \right] \mid n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$$

y $5/16 \in [0, 1]$ con $U = (1/8, 1/2)$ un abierto de $5/16$, tenemos que U intersecciona a 4 elementos de \mathcal{S} , de manera análoga para cualquier punto de $[0, 1]$. Por lo tanto, \mathcal{S} es una colección localmente finita.

Proposición 1.4.23 ([15, Lema 39.1]). *Sean X un espacio topológico y \mathcal{S} una colección localmente finita de X . Entonces:*

1. *Cualquier subcolección de \mathcal{S} es localmente finita.*
2. *La colección $\mathcal{B} = \{\overline{S}\}_{S \in \mathcal{S}}$ de cerraduras de elementos de \mathcal{S} es localmente finita.*
3. $\overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \overline{S}$

Consideramos X un espacio euclidiano o métrico, es fácil ver que: dado $x_0 \in X$ y cualquier otro punto $x \in X - \{x_0\}$, existen vecindades abiertas de x y de $\{x_0\}$ tales que no se interseccionan. Pero no todo espacio topológico satisface esta propiedad de separabilidad.

Definición 1.4.24. Sea (X, τ) , diremos que X es un **espacio Hausdorff** si para cada $x, y \in X$ existen vecindades U y V respectivamente de x y y tales que $U \cap V = \emptyset$.

Algunos resultados sobresalientes sobre espacios Hausdorff son los siguientes.

Teorema 1.4.25. *Todo espacio métrico es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$ arbitrarios. Basta tomar $r = \frac{d(x, y)}{2}$ entonces $B_d(x, r)$ y $B_d(y, r)$ son bolas abiertas disjuntas. \square

Teorema 1.4.26 ([15, Teo. 17.11]). *Sea X un espacio topológico Hausdorff, todo subespacio es Hausdorff.*

El concepto de continuidad para espacios topológicos se generalizó de la siguiente manera:

Definición 1.4.27. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y una función $f: X \rightarrow Y$. Diremos que f es una **función continua** si para cada subconjunto abierto V de Y , $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Teorema 1.4.28 ([15, Teo. 18.1]). Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y una función $f: X \rightarrow Y$. Entonces f es continua si y sólo si para cada subconjunto cerrado B en Y , el conjunto $f^{-1}(B)$ es un subconjunto cerrado en X .

Definición 1.4.29. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y una función $f: X \rightarrow Y$, diremos que f es un **homeomorfismo** si f es una biyección y además f y $f^{-1}: Y \rightarrow X$ son funciones continuas.

Ejemplo 1.4.30. Consideremos los intervalos $(0, \infty)$ y (r, ∞) con $r > 0$, ambos con la topología inducida por la métrica euclidiana. Definamos $h: (0, \infty) \rightarrow (r, \infty)$ dada por $h(x) = r + x$, con la función inversa $h^{-1}(x) = \frac{x-r}{1}$. Note que h y h^{-1} son continuas. Por lo tanto, $(0, \infty)$ y (r, ∞) son homeomorfos.

1.4.2. Topología cociente

El espacio cociente no es una generalización de algo ya estudiado en análisis de \mathbb{R}^n . Este espacio es motivado con ideas geométricas: cortando y pegando, tal como se obtienen algunos objetos geométricos, por ejemplo las superficies.

Definición 1.4.31. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos y $p: X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, diremos que p es una **función cociente** si se cumple lo siguiente: para todo subconjunto $U \subset Y$, U es un abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es un abierto en X .

Definición 1.4.32. Sean (X, τ) un espacio topológico, A un conjunto y una función $p: X \rightarrow A$. Si p es una función suprayectiva, entonces existe exactamente una topología τ_p de A que hace a p una función cociente. Dado $U \subset A$, $U \in \tau_p$ si y sólo si $p^{-1}(U) \in \tau$. La topología τ_p se llama **topología cociente inducida por p y A espacio cociente** de X .

Ejemplo 1.4.33. Sea $p: \mathbb{R} \rightarrow A$ una función, donde $A = \{a, b, c\}$, definida por

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0, \\ b & \text{si } x < 0, \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces p es una función cociente, ya que p es suprayectiva, continua y abierta. Además $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, A\}$ es la topología cociente.

Ejemplo 1.4.34. Sea (X, τ) un espacio topológico y X^* una partición de X . Sea $p: X \rightarrow X^*$ la función proyección que manda a cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. Como p es suprayectiva, a X^* le podemos dar la topología cociente inducida por p .

Recordemos que tener una partición X^* de X es equivalente a tener una relación de equivalencia en X , tal que las clases de equivalencia de la relación son los elementos de X^* . Por lo tanto, dada una relación de equivalencia en un espacio topológico X , podemos darle la topología cociente al conjunto de clases de equivalencia de dicha relación.

El siguiente ejemplo muestra la idea geométrica de pegar. Además, la construcción de este espacio cociente será de suma importancia para descripciones posteriores.

Ejemplo 1.4.35. Consideremos en \mathbb{R}^2 la siguiente relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y sólo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos $(1, 1)$, tenemos que $(1, 1)$ se relaciona con todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x, y \in \mathbb{Z}$, ver la figura 1.1.

Entonces la clase de equivalencia de $(1, 1)$ es:

$$[(1, 1)] = \{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

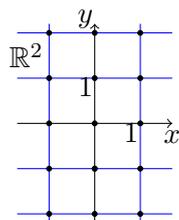


Figura 1.1: Puntos que se relacionan con $(1, 1)$

Sea C un cuadrado cerrado de 1×1 de la forma:

$$C = \{(a, b) \mid 0 \leq a \leq 1 \text{ y } 0 \leq b \leq 1\}.$$

Cabe notar que los vértices del cuadrado pertenecen a la misma clase de equivalencia, mientras que un punto en el interior el cuadrado C es el único representante en C de su clase de equivalencia. Además, dado un punto en una arista esta relacionado con el punto correspondiente en la arista opuesta.

Identificamos las aristas de C y les asignamos una dirección, ver la figura 1.2.

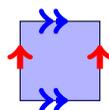


Figura 1.2: Identificación de aristas del cuadrado C

Note que \mathbb{R}^2 / \sim es el mismo que C / \sim , identificamos las aristas opuestas respetando la orientación, ver la figura 1.3.

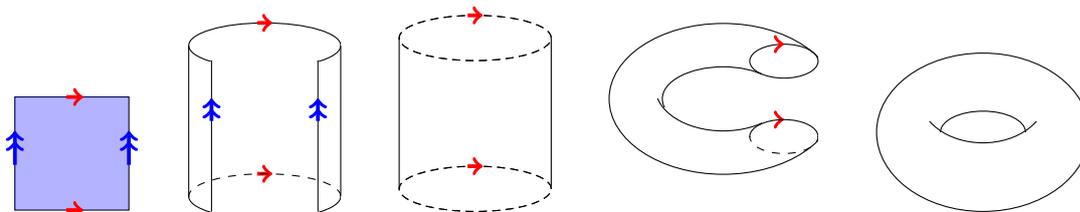


Figura 1.3: Espacio cociente: toro

El siguiente resultado es un criterio para determinar cuando $f: Y \rightarrow Z$ una función con Y es un espacio cociente, se cumple que f es una función continua.

Teorema 1.4.36 (Propiedad Universal del espacio cociente, [15, Teo. 22.2]). Sean $p: X \rightarrow Y$ una función cociente, Z un espacio topológico y $g: X \rightarrow Z$ una función continua tal que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para cada $y \in Y$. Entonces g induce una función continua $f: Y \rightarrow Z$ tal que $f \circ p = g$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow p & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

1.4.3. Conexidad

A continuación haremos una breve revisión sobre una propiedad topológica que intuitivamente nos dice que el espacio está formado por sólo una pieza, este tema se puede ver en [15].

Definición 1.4.37. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par de subconjuntos abiertos y cerrados no vacíos, disjuntos $U, V \subset X$ tal que $X = U \cup V$.

Definición 1.4.38. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **disconexo**, si existe una separación de X , en otro caso, diremos que X es **conexo**.

Dado que en términos de la colección de conjuntos abiertos se da la conexidad, tenemos que la conexidad es una propiedad topológica.

Teorema 1.4.39 ([15, Teo. 23.5]). *La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es conexo.*

Sea X un espacio topológico, definimos una relación sobre X llamada relación de conexidad, denotada por \sim y dada de la siguiente manera: dados $p, q \in X$, $p \sim q$ si existe un subconjunto conexo de X que contiene a p y q .

Lema 1.4.40 ([15, Pág. 150]). *La relación de conexidad es una relación de equivalencia.*

Las clases de equivalencia en X bajo la relación de conexidad se llaman **componentes** de X .

1.4.4. Compacidad

La propiedad de compacidad es una herramienta muy fuerte de topología. A continuación describiremos esta propiedad y mencionaremos algunos resultados importantes.

Definición 1.4.41. Sean (X, τ) un espacio topológico y \mathcal{U} una colección de subconjuntos de X . Diremos que \mathcal{U} es una **cubierta de X** si

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Además, si cada uno de los elementos de \mathcal{U} es un subconjunto abierto de X , diremos que \mathcal{U} es una **cubierta abierta**.

Definición 1.4.42. Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que X es **compacto** si y sólo si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita de X .

Ejemplo 1.4.43. Todo espacio con sólo un número finito de puntos es compacto, ya que dada cualquier cubierta abierta de X se puede extraer una subcubierta finita tomando para cada punto un subconjunto abierto que contenga dicho punto.

Lema 1.4.44. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión. Si x_n converge a algún $y \in X$, entonces $K = \{y, x_1, x_2, \dots\}$ es compacto.*

Demostración. Sean \mathcal{U} una cubierta abierta de K , U_y un elemento de \mathcal{U} que contiene a y y $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset U_y$. Dado que x_n converge a y , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(y, \epsilon)$ para toda $n \geq N$. Sea U_i un elemento de \mathcal{U} tal que $x_i \in U_i$ para $i < N$, entonces $\{U_y, U_1, U_2, \dots, U_{N-1}\}$ es una subcubierta finita de \mathcal{U} . Por lo tanto, K es compacto. \square

No todo espacio topológico es compacto, pero podemos encontrar subespacios que si lo sean.

Definición 1.4.45. Sea Y un subespacio de X , una colección \mathcal{U} de subconjuntos de X se llama **cubierta** de Y si la unión de sus elementos contiene a Y . Diremos que \mathcal{U} es una **cubierta abierta** si cada uno de sus elementos es abierto.

Lema 1.4.46 ([15, Lema 26.1]). *Sea Y un subespacio de X . Entonces Y es compacto si y sólo si cualquier cubierta de Y de conjuntos abiertos en X contiene una subcolección finita que cubre a Y .*

Hay un resultado análogo al ejemplo 1.4.43 para subespacio.

Lema 1.4.47. *Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X . Si Y es finito entonces Y es compacto.*

Demostración. Enumerando los elementos de Y tenemos que $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de Y . Para cada punto y_i en Y sea U_i un elemento de \mathcal{U} tal que $y_i \in U_i$, entonces $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una subcubierta finita de Y , por lo tanto, Y es compacto. \square

Los siguientes resultados describen la compacidad en términos de propiedades de espacios y subespacios.

Teorema 1.4.48 ([15, Teo. 26.2]). *Sean X un espacio compacto y $Y \subset X$ cerrado, entonces Y es compacto.*

Teorema 1.4.49 ([15, Teo. 26.3]). *Sea X un espacio Hausdorff. Si Y es un subconjunto compacto de X , entonces Y es cerrado.*

Hay aportaciones de Bolzano, Borel, Weierstrass y Lebesgue para caracterizar subespacios compactos euclidianos de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.4.50 ([1, Teo. 3.3.1]). *Sea K un subconjunto de \mathbb{R}^n , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I) K es compacto.
- (II) (Heine-Borel) K es cerrado y acotado.
- (III) (Borel-Lebesgue) Cada cubierta \mathcal{U} de K formada por bolas abiertas contiene una subcolección finita \mathcal{D} tal que cubre a K .
- (IV) (Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión en K tiene un punto de acumulación.

Ejemplo 1.4.51. Dado que la esfera de dimensión 2, \mathbb{S}^2 , es un subconjunto de \mathbb{R}^3 cerrado y acotado. Entonces por el teorema 1.4.50 \mathbb{S}^2 es compacta.

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 1.4.52 ([18, Teo. 2.37]). *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$, si A es un subconjunto infinito de un conjunto K compacto, entonces A tiene un punto límite en K .*

Lema 1.4.53. *Sea (X, d) un espacio métrico, compacto y discreto. Entonces X es finito.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que X es infinito. Dado que X es compacto por el teorema 1.4.52 cualquier sucesión infinita $\{x_n\} \subset X$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a algún $y \in X$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, y) < \epsilon$ para toda $n_k \geq N$, así que $x_{n_k} \in B(y, \epsilon)$ para toda $n_k \geq N$, lo cual es una contradicción, ya que X es discreto. Por lo tanto, X es finito. \square

Teorema 1.4.54 ([15, Teo. 26.5]). *La imagen de un espacio compacto bajo una función continua es compacta.*

Definición 1.4.55. Sea X un espacio topológico, diremos que X es **localmente compacto en un punto** $x \in X$ si existe algún $C \subset X$ compacto que contiene una vecindad de x . Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos simplemente que X es **localmente compacto** en X .

Teorema 1.4.56 ([15, Cor. 29.3]). Sean X un espacio localmente compacto Hausdorff y $Y \subset X$. Si Y es cerrado en X (abierto en X), entonces Y es localmente compacto.

1.4.5. Topologías en el conjunto de aplicaciones continuas

Sean X un espacio topológico o un conjunto y (Y, d_Y) un espacio métrico. Consideremos Y^X el conjunto de todas las funciones de X a Y . Además, sea $\mathcal{C}(X, Y)$ el subconjunto de todas las funciones continuas de X a Y .

Definición 1.4.57. Sean X un espacio topológico o un conjunto y (Y, d_Y) un espacio métrico. Diremos que una función $f: X \rightarrow Y$ es una función **acotada** si su imagen $f(X)$ es un subconjunto acotado de Y . Denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X a Y .

En esta sección veremos dos de las topologías que le podemos asociar a un subconjunto de aplicaciones continuas en el espacio de funciones continuas.

Definición 1.4.58. Sean X un espacio topológico o un conjunto y (Y, d) un espacio métrico. Definimos una métrica sobre $\mathcal{B}(X, Y)$ dada por:

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X, f, g \in \mathcal{F}\}.$$

La métrica ρ se llama la **métrica sup**.

Es fácil ver que ρ está bien definida, ya que el conjunto $f(X) \cup g(X)$ es acotado si $f(X)$ y $g(X)$ están acotadas.

Si Y es sólo un espacio topológico y no un espacio métrico nos gustaría poder dar una topología a Y^X . Para esto, definimos la siguiente topología.

Definición 1.4.59. Sean X, Y espacios topológicos, $C \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ abierto, definimos:

$$S(C, U) = \{f \mid f \in Y^X \text{ y } f(C) \subset U\}.$$

Los conjuntos $S(C, U)$ forman una subbase para una topología en Y^X , llamada la **topología compacto-abierto**.

Observación 1.4.60. Estamos interesados en el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(X, Y)$ al cual le damos la topología compacto abierta visto como subespacio de Y^X .

El siguiente resultado nos da un criterio para decir cuando coinciden las topologías que acabamos de mencionar.

Teorema 1.4.61. Sean X un espacio topológico compacto y (Y, d) un espacio métrico. Para el espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología compacto abierta y la topología inducida por la métrica sup coinciden.

Demostración. Véase [15, Teo. 46.7] y [15, Teo. 46.8]. □

Observar que la topología del sup supone que Y es un espacio métrico, mientras que la topología compacto abierta Y es un espacio topológico.

Definición 1.4.62. Sea X y Y dos espacios topológicos, la aplicación

$$e: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y \\ (f, x) \mapsto f(x)$$

se llama la **aplicación evaluación**.

Teorema 1.4.63 ([15, Teo. 46.10]). *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto y $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología compacto abierta. Entonces la aplicación evaluación e es continua.*

A continuación un resultado interesante sobre el espacio de funciones continuas:

Teorema 1.4.64 ([16, Lema. 6, Sección. 5.3]). *Sea (X, d) un espacio métrico, si X es finitamente compacto, entonces $I(X)$ es cerrado en $\mathcal{C}(X, X)$.*

Conjuntos compactos en $\mathcal{C}(X, Y)$

El siguiente teorema da un criterio de cuando un subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$ es compacto. Para enunciarlo necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.4.65. Sea X un espacio topológico. Sean (Y, d) un espacio métrico y \mathcal{F} un conjunto de funciones de $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $x_0 \in X$, diremos que el conjunto \mathcal{F} es **equicontinuo** en x_0 si dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$, $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Si el conjunto \mathcal{F} es equicontinuo en cada $x_0 \in X$, diremos simplemente que \mathcal{F} es **equicontinuo**.

A continuación enunciamos la generalización del teorema de Heine-Borel 1.4.50 para una colección de funciones continuas que cumpla la propiedad de equicontinuidad.

Teorema 1.4.66 (Teorema de Arzela-Ascoli, [15, Teo. 47.1]). *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto y (Y, d) un espacio métrico. Consideremos $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología compacto abierta y \mathcal{F} un conjunto de funciones de $\mathcal{C}(X, Y)$, entonces \mathcal{F} tiene cerradura compacta si y sólo si \mathcal{F} es equicontinuo y el subconjunto $\eta_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ tiene cerradura compacta para cada $x \in X$.*

1.5. Grupos topológicos

En esta sección introduciremos nociones de grupos que cuenten con estructura no sólo de grupo sino también con una topológica. Nos interesaremos en estudiar grupos y subgrupos que vistos como espacios tengan topología discreta.

Definición 1.5.1. Sea G un espacio topológico que también tiene estructura de grupo. Diremos que G es un **grupo topológico** si las funciones:

$$\phi: G \times G \rightarrow G \\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$

$$\nu: G \rightarrow G \\ g \mapsto g^{-1},$$

son continuas, donde $G \times G$ tiene la topología producto.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son los siguientes:

Ejemplo 1.5.2. Un grupo G con la topología discreta es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.3. \mathbb{R} con la topología usual, es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.4. \mathbb{Z} con la suma usual es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.5. \mathbb{C} identificando con \mathbb{R}^2 y la topología usual de \mathbb{R}^2 es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.6. Sea \mathbb{S}^1 el círculo unitario en \mathbb{C} , \mathbb{S}^1 es un grupo topológico. Definimos

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto z_1 z_2.\end{aligned}$$

Observemos que ϕ es continua, ya que la multiplicación de números complejos es continua. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$, $z_1 z_2 \in \mathbb{S}^1$, ya que $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1$. Además tenemos que la aplicación:

$$\begin{aligned}\nu: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\rightarrow z^{-1}\end{aligned}$$

es continua y en este caso, $z^{-1} = \bar{z}$.

Ejemplo 1.5.7. Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, tenemos que \mathbb{C}^* es un grupo topológico, definimos:

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ (z_1, z_2) &\mapsto z_1 z_2\end{aligned}$$

Notar que $z_1, z_2, z_1 z_2 \in \mathbb{C}^*$ y ϕ es continua. Además, definimos:

$$\begin{aligned}\nu: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},\end{aligned}$$

note que ν es continua.

El siguiente teorema nos muestra una condición suficiente para que dado un espacio métrico X , el grupo $I(X)$ sea un grupo topológico.

Teorema 1.5.8 ([16, Teo. 5.2.2]). *Sea (X, d) un espacio métrico, si X es finitamente compacto, entonces el grupo de isometrías $I(X)$ de X es un grupo topológico con la topología compacto abierta.*

Como ya mencionamos, los grupos con los que trabajaremos deberán tener la topología discreta, por tal motivo, haremos un breve estudio de grupos con tal estructura topológica.

Definición 1.5.9. Sea G un grupo topológico, G es **discreto** si como espacio topológico es un espacio discreto.

Lema 1.5.10. *Sea G un grupo topológico, entonces G es discreto si y sólo si $\{e\}$ es abierto en G .*

Demostración. Supongamos que G es discreto, por la definición 1.5.9 y por el ejemplo 1.4.2 tenemos que $\{e\}$ es abierto.

Inversamente, consideremos $L_g: G \rightarrow G$ la traslación izquierda por g dada por $L_g(h) = gh$, la cual es un homeomorfismo. Dado que $\{e\}$ es un abierto en G , entonces $L_g(\{e\}) = \{ge\} = \{g\}$ es un abierto de G . Por lo tanto, por la observación 1.4.3 tenemos que G es discreto. \square

En los siguientes resultados analizaremos grupos o subgrupos discretos.

Lema 1.5.11. *Si G es un grupo topológico con la topología inducida por una métrica d , entonces cualquier subgrupo discreto H de G es cerrado en G .*

Demostración. Por contradicción, supongamos que H no es cerrado, entonces $G - H$ no es abierto, por lo tanto, existe $g \in G - H$ tal que $B_d(g, \frac{1}{n}) \cap H \neq \emptyset$. Sea $g_n \in B_d(g, \frac{1}{n}) \cap H$ entonces g_n converge a g en G . Por la continuidad de ν y por el lema 1.3.31 $\nu(g_n) = g_n^{-1}$ converge a $\nu(g) = g^{-1}$ en H . También, por la continuidad de ϕ y por el lema 1.3.31 $\phi((g_n, g_{n+1}^{-1})) = g_n g_{n+1}^{-1}$ converge a $\phi(g, g^{-1}) = gg^{-1} = e$ en H . Por lo tanto, toda vecindad de e contiene otros puntos de H , lo que contradice que H es discreto. \square

Proposición 1.5.12. *Sean G un grupo topológico con la topología inducida por una métrica d y $H \leq G$, si H es finito entonces H es discreto.*

Demostración. Por hipótesis, supongamos que $H = \{e, h_2, \dots, h_n\}$. Dado que G es un espacio métrico por el teorema 1.4.25 G es Hausdorff, por lo tanto, existen U_i vecindad de e en G y V_i vecindad de h_i en G tales que $U_i \cap V_i = \emptyset$, esto para cada $h_i \in H$ con $i = 2, \dots, n$. Sea

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

entonces U es un abierto en G que sólo contiene a e , bajo la topología de subespacio de G en H tenemos que e es un abierto en H y por lo tanto, por el lema 1.5.10 H es discreto. \square

Corolario 1.5.13. *Sean G un grupo topológico compacto con la topología inducida por una métrica d y $H \leq G$. Si H es discreto entonces H es finito.*

Demostración. Supongamos que H es discreto, por el lema 1.5.11 H es cerrado en G , además, por el teorema 1.4.48 H es compacto y por el lema 1.4.53 G es finito. \square

Ejemplo 1.5.14. Del corolario 1.5.13 notemos que es importante la hipótesis de que G sea compacto. Consideremos los ejemplos 1.5.3 y 1.5.4; tenemos que \mathbb{R} y \mathbb{Z} son grupos topológicos y \mathbb{Z} es un subgrupo discreto de \mathbb{R} , pero \mathbb{R} no es compacto y \mathbb{Z} es infinito.

Lema 1.5.15. *Sean G un grupo topológico con la topología inducida por una métrica y H un subgrupo de índice finito en G . Si H es discreto, entonces G es discreto.*

Demostración. Supongamos que H es discreto, entonces por el lema 1.5.11 H es cerrado en G . Por hipótesis, H es de índice finito, supongamos que $[G : H] = m$, entonces existen $e, \dots, g_{m-1} \in G$, donde

$$G = H \cup \dots \cup g_{m-1}H.$$

Entonces $H = G - (g_2H \cup \dots \cup g_{m-1}H)$.

Consideremos para cada g_i con $i = 2, \dots, m-1$, $L_{g_i} : G \rightarrow G$ la traslación izquierda por g_i dada por $L_{g_i}(h) = g_i h$ para toda $h \in G$. Dado que $L_{g_i}(H) = g_i H$, L_{g_i} es homomorfismo y H es cerrado, entonces cada clase lateral izquierda $g_i H$ es cerrada en G y por el inciso 3. del teorema 1.4.16 tenemos que $g_2H \cup \dots \cup g_{m-1}H$ es cerrado en G .

Entonces $(g_2H \cup \dots \cup g_{m-1}H)^C = G - g_2H \cup \dots \cup g_{m-1}H = H$ es abierto en G y por hipótesis H es discreto, entonces por el lema 1.5.10 $\{e\}$ es abierto en H . Además, H tiene la topología como subespacio de G , entonces $\{e\} = V \cap H$ con V un abierto en G , dado que H es un abierto en G entonces $V \cap H$ es un abierto en G , por consiguiente $V = \{e\}$ es un abierto en G . Por lo tanto, por el lema 1.5.10, G es discreto. \square

1.5.1. Grupos de matrices como grupos topológicos

En la sección 1.2 analizamos la estructura algebraica de grupos de matrices, estos grupos cuentan con una estructura topológica inducida por la métrica euclidiana. Los grupos que principalmente revisaremos son $O(n)$, $SO(n)$ y $U(n)$.

Ejemplo 1.5.16. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Por el lema 1.2.20 $GL(n, \mathbb{F})$ tiene la topología inducida por la métrica euclidiana. Entonces $GL(n, \mathbb{F})$ es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.17. Por el ejemplo 1.3.6, $O(n)$ es un espacio métrico con la métrica euclidiana. Definimos

$$\begin{aligned} \phi: O(n) \times O(n) &\rightarrow O(n) \\ (A, B) &\mapsto AB, \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu: O(n) &\rightarrow O(n) \\ A &\mapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

Dado que el producto de matrices es continuo y la inversa de una matriz en $O(n)$ también lo es, entonces ϕ y ν son continuas.

Por lo tanto, $O(n)$ es un grupo topológico.

Ejemplo 1.5.18. Por el ejemplo 1.3.7, tenemos que $U(n)$ es un espacio métrico. Definimos

$$\begin{aligned} \phi: U(n) \times U(n) &\rightarrow U(n) \\ (A, B) &\mapsto AB, \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu: U(n) &\rightarrow U(n) \\ A &\mapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

Dado que el producto de matrices es continuo y la inversa de una matriz en $U(n)$ también lo es, entonces ϕ y ν son continuas. Por lo tanto, $U(n)$ es un grupo topológico.

A continuación, veremos que $O(n)$, $SO(n)$ y $U(n)$ son compactos, para probar esto haremos uso de la estructura de grupo topológico.

Teorema 1.5.19. *El grupo $U(n)$ es compacto.*

Demostración. Tenemos que $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$, definimos las funciones:

$$\begin{aligned} Id: GL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) & *: GL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ A &\mapsto A & A &\mapsto A^*, \end{aligned}$$

donde $*$ es la traspuesta conjugada. Id y $*$ son funciones continuas, ya que dada $A \in GL(n, \mathbb{C})$ y por la observación 1.2.3 tenemos $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_{A^*} \in \mathbb{C}^{n^2}$, donde \mathbf{v}_{A^*} es la permutación de los conjugados de algunas entradas de \mathbf{v}_A . Entonces

$$\begin{aligned} \psi = (Id, *): GL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \\ A &\mapsto (A, A^*) \end{aligned}$$

es continua. También definimos la función:

$$\begin{aligned} \phi: GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ (A, B) &\mapsto AB, \end{aligned}$$

ϕ es continua, ya que el producto de matrices se puede identificar con un polinomio el cual es continuo. Definamos

$$f = \phi \circ \psi: GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

$$A \mapsto AA^*$$

es una función continua, ya que es la composición de funciones continuas.

Consideremos $\{I\} \subset GL(n, \mathbb{C})$, $\{I\}$ es cerrado en $GL(n, \mathbb{C})$ visto con la topología de subespacio de \mathbb{C}^{n^2} , dado que $f^{-1}(\{I\}) = U(n)$ por el teorema 1.4.28 tenemos que $U(n)$ es cerrado.

Además, sea $A \in U(n)$, por la definición de norma dada en 1.2.3

$$\|A\|^2 = n,$$

tenemos que $U(n)$ es un subconjunto acotado en \mathbb{C}^{n^2} . Por lo tanto, por el teorema 1.4.50 $U(n)$ es compacto. \square

Corolario 1.5.20. *El grupo $O(n)$ es compacto.*

Demostración. Por observación 1.2.39 tenemos que $O(n) = U(n) \cap \mathbb{R}^{n^2}$, donde \mathbb{R}^{n^2} es un subconjunto cerrado en \mathbb{C}^{n^2} . Por los teoremas 1.5.19 y 1.4.48 dado que $U(n)$ es compacto y $O(n)$ es cerrado concluimos que $O(n)$ es compacto. \square

Corolario 1.5.21. *El grupo $SO(n)$ es compacto.*

Demostración. Dado que $SO(n) \leq O(n)$, bastará probar que $SO(n)$ es cerrado en $O(n)$. Definamos:

$$\det: O(n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \det(A).$$

Dado que A se puede identificar con $\mathbf{v}_A \in \mathbb{R}^{n^2}$ por la observación 1.2.3 entonces la función \det es continua con las métricas euclidianas de $O(n)$ y \mathbb{R} . Tenemos que $\{1\}$ es un conjunto cerrado de \mathbb{R} , entonces $\det^{-1}(\{1\}) = SO(n)$, por lo tanto, $SO(n)$ es cerrado en $O(n)$. Por lo tanto, por el teorema 1.4.48 $SO(n)$ es compacto. \square

Ya vimos que $U(n)$ y $O(n)$ son compactos, ahora veremos cuales son sus subgrupos discretos.

Teorema 1.5.22. *Sea G un subgrupo de $U(n)$, G es discreto si y sólo si G es finito.*

Demostración. Por el ejemplo 1.5.18 sabemos que $U(n)$ es un grupo topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana.

Supongamos que G es discreto, tenemos además por el teorema 1.5.19 $U(n)$ es compacto, por lo tanto, por el corolario 1.5.13 tenemos que G es finito.

Por otro lado, si G es finito, entonces por la proposición 1.5.12 G es un grupo discreto. \square

Proposición 1.5.23. *Sea G un subgrupo de $O(n)$, G es discreto si y sólo si G es finito.*

Demostración. La prueba es análoga a la prueba del teorema 1.5.22. \square

1.5.2. Subgrupos discretos de \mathbb{R}^n e $I(\mathbb{R}^n)$

No sólo los grupos de matrices son y tienen subgrupos discretos, a continuación, haremos una breve descripción de los subgrupos de \mathbb{R}^n e $I(\mathbb{R}^n)$ discretos.

Sea $T(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las traslaciones de \mathbb{R}^n , note que $T(\mathbb{R}^n)$ es un subgrupo de $I(\mathbb{R}^n)$ bajo la composición. Dado que \mathbb{R}^n es finitamente compacto, por el teorema 1.5.8 $I(\mathbb{R}^n)$ es un grupo topológico, por lo tanto, $T(\mathbb{R}^n)$ es un grupo topológico con la topología de subespacio de $I(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.5.24 ([16, Cor. 1, Sec. 5.2]). *La aplicación evaluación*

$$\begin{aligned} e_0: T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau &\mapsto \tau(0), \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos topológicos.

Antes de estudiar los subgrupos discretos de \mathbb{R}^n veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.25. *Sean G un grupo topológico, $H \leq G$ y $\eta: G \rightarrow X$ una función continua tal que $\eta^{-1}(\eta(g)) = gH$ para toda $g \in G$. Si $\sigma: X \rightarrow G$ es una función continua inversa derecha de η , entonces la función*

$$\begin{aligned} \psi: X \times H &\rightarrow G \\ (x, h) &\mapsto \sigma(x)h \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Además, la función $\bar{\eta}: G/H \rightarrow X$, inducida por η , es un homeomorfismo.

Demostración. Consideremos la siguiente composición:

$$\begin{aligned} X \times X &\xrightarrow{(\sigma, Id_H)} G \times H \xrightarrow{\phi} G \\ (x, h) &\mapsto (\sigma(x), h) \mapsto \sigma(x)h. \end{aligned}$$

Dado que σ, Id_H y ϕ son funciones continuas tenemos que ψ es una función continua.

Sea $g \in G$, dado que $\eta\sigma = Id_X$ entonces $\eta\sigma\eta(g) = \eta(g)$. Tenemos que:

$$\eta^{-1}(\eta\sigma\eta(g)) = \eta^{-1}(\eta(g)) = gH,$$

por otro lado,

$$\eta^{-1}(\eta\sigma\eta(g)) = \eta^{-1}[\eta(\sigma\eta(g))] = \sigma\eta(g)H.$$

Entonces $\sigma\eta(g)H = gH$ y por el lema 1.1.18 tenemos que $g(\sigma\eta(g))^{-1} \in H$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow X \times H \\ g &\mapsto (\eta(g), [\sigma\eta(g)]^{-1}g). \end{aligned}$$

Sean ϕ y ν las funciones continuas de la definición 1.5.1, consideremos la siguiente construcción de φ :

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{(\eta, \sigma\eta, Id_G)} X \times G \times G \xrightarrow{(Id_X, \nu, Id_G)} X \times G \times G \xrightarrow{(Id_X, \phi)} X \times H \\ g &\mapsto (\eta(g), \sigma\eta(g), g) \mapsto (\eta(g), [\sigma\eta(g)]^{-1}g) \mapsto (\eta(g), [\sigma\eta(g)]^{-1}g) \end{aligned}$$

Dado que la composición de funciones continuas es continua, tenemos que φ es una función continua. Notemos que:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(g)) &= \psi(\eta(g), [\sigma\eta(g)]^{-1}g) \\ &= \sigma(\eta(g))([\sigma\eta(g)]^{-1}g) \\ &= (\sigma(\eta(g)))(\sigma(\eta(g)))^{-1}g \\ &= g, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \varphi(\psi(x, h)) &= \varphi(\sigma(x)h) \\
 &= (\eta(\sigma(x)h), [\sigma\eta(\sigma(x)h)]^{-1}(\sigma(x)h))\varphi(\psi(x, h)) \\
 &= (x, [\sigma(x)]^{-1}(\sigma(x)h)) \\
 &= (x, h).
 \end{aligned}$$

Entonces, φ es la función inversa de ψ . Por lo tanto, ψ es un homeomorfismo.

Sea $\pi: G \rightarrow G/H$ la función cociente, η induce a $\bar{\eta}$, sean $g, g' \in G$ tal que $\bar{\eta}(gH) = \overline{g'H}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}\pi(g) &= \bar{\eta}\pi(g') \\
 \eta(g) &= \eta(g').
 \end{aligned}$$

Entonces $\bar{\eta}$ está bien definida.

Además, $\bar{\eta}(\pi\sigma)(x) = (\bar{\eta}\pi)\sigma(x) = \eta\sigma(x) = x$ y

$$\begin{aligned}
 \pi(\sigma(\bar{\eta})(gH)) &= \pi(\sigma(\bar{\eta}(\pi(g)))) \\
 &= \pi(\sigma(\eta(g))) \\
 &= (\sigma\eta(g))H \\
 &= gH.
 \end{aligned}$$

Entonces $\pi\sigma$ es la función inversa de $\bar{\eta}$, por lo tanto, $\bar{\eta}$ es una función biyectiva.

Por lo tanto $\bar{\eta}$ es un homeomorfismo. \square

El siguiente teorema establece una caracterización de discretez para subgrupos de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.5.26. *Sea $G \leq \mathbb{R}^n$, donde \mathbb{R}^n es un grupo con la suma. Entonces G es discreto si y sólo si G es generado por un conjunto de vectores linealmente independientes.*

Demostración. \Leftarrow Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ el conjunto de vectores linealmente independientes que genera a G , entonces:

$$G = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_m.$$

Por medio de una transformación lineal podemos identificar los elementos de la base canónica de \mathbb{R}^n con los elementos del conjunto linealmente independiente de modo que $v_i = e_i$ para toda $i = 1, \dots, m$.

Veamos que $G \cap B(0, 1) = \{0\}$. Por contradicción, supongamos que existe $x \in (G \cap B(0, 1)) - \{0\}$. Dado que $x \in G$ y aplicando la transformación lineal tenemos que

$$x = c_1e_1 + \dots + c_me_m$$

con $c_m \in \mathbb{Z}$ no todos ceros y $0 < d(0, x) < 1$. Pero

$$d(0, x) = c_1^2\|e_1\|^2 + \dots + c_m^2\|e_m\|^2 = c_1^2 + \dots + c_m^2 < 1,$$

lo cual es una contradicción, ya que $c_m \in \mathbb{Z}$ no son todos ceros. Por lo tanto, $G \cap B(0, 1) = \{0\}$.

Dado que 0 es elemento neutro del grupo \mathbb{R}^n con la suma y $B(0, r)$ es un abierto en \mathbb{R}^n , con la topología de subespacio tenemos que $\{0\}$ es un subconjunto abierto de G , por lo tanto, por el lema 1.5.10 G es discreto.

\Rightarrow Por inducción sobre n .

1. Si $n = 1$, sea $r > 0$ tal que $\{x\} \subset B(0, r)$ para algún $x \in G - \{0\}$. Dado que \mathbb{R}^n tiene la topología inducida por la métrica euclidiana, entonces $C(0, r)$ tiene la topología de subespacio de \mathbb{R}^n . Además, dado que G es discreto, tenemos que $C(0, r) \cap G \leq C(0, r)$ discreto. Por el lema 1.5.11 $C(0, r) \cap G$ es cerrado en $C(0, r)$.

Ahora, por el teorema 1.4.48 tenemos que $C(0, r) \cap G$ es compacto y por el corolario 1.5.13 $C(0, r) \cap G$ es un conjunto finito.

Entonces existe $u \in G - \{0\}$ tal que u es el elemento más cercano a 0. Reemplazando u por $-u$ si es necesario, supongamos que u es positivo. Sea $v \in G$ arbitraria, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $v \in [ku, (k+1)u)$. Tenemos que $s = v - ku$ está en el conjunto $G \cap [0, u) = \{0\}$, es decir, $0 = s = v - ku$. Por lo tanto, $v = ku$, entonces u genera a G .

2. Si $n > 1$, supongamos que cualquier subgrupo discreto de \mathbb{R}^{n-1} es generado por un conjunto de vectores linealmente independientes. De manera análoga al inciso anterior, existe $u \in G$ el elemento más cercano al 0 y $G \cap \mathbb{R}u = \mathbb{Z}u$.

Sean $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de \mathbb{R}^n con $u_n = u$ y una transformación lineal definida por:

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ u_i &\mapsto e_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n-1 \text{ y } \eta(u) = 0. \end{aligned}$$

η es continua y además tenemos lo siguiente para toda $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta(c_1u_1 + \dots + c_{n-1}u_{n-1} + c_nu_n) \\ &= \eta(c_1u_1 + \dots + c_{n-1}u_{n-1} + c_nu) \\ &= c_1\eta(u_1) + \dots + c_{n-1}\eta(u_{n-1}) + c_n\eta(u) \\ &= c_1e_1 + \dots + c_{n-1}e_{n-1} + 0. \end{aligned}$$

Entonces $\eta^{-1}(\eta(x)) = x + \mathbb{R}u$. Definimos la siguiente transformación lineal, dada por:

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ e_i &\mapsto u_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Note que σ es continua. Sea $x = a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \eta\sigma(x) &= \eta(a_1\sigma(e_1) + \dots + a_{n-1}\sigma(e_{n-1})) \\ &= \eta(a_1u_1 + \dots + a_{n-1}u_{n-1}) \\ &= a_1\eta(u_1) + \dots + a_{n-1}\eta(u_{n-1}) + 0 \\ &= a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} + 0 \\ &= x + 0 = x. \end{aligned}$$

Tenemos que σ es la inversa derecha de η . Dado que $\mathbb{R}u \leq \mathbb{R}^n$ y se cumplen las hipótesis del teorema 1.5.25 existe $\bar{\eta}: \mathbb{R}^n/\mathbb{R}u \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ un homeomorfismo de grupos inducido por η .

Sea $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}u$ la función cociente, note que $\eta = \bar{\eta}\pi$. Veamos que $\pi(G)$ es un grupo discreto de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}u$.

Sea $\{v_i\} \subset G$ una sucesión tal que $\pi(v_i)$ converge a 0 en $\pi(G)$, dado que $\bar{\eta}$ es continua por el lema 1.3.31 tenemos que $\bar{\eta}(\pi(v_i))$ converge a 0 en \mathbb{R}^{n-1} , es decir, $\eta(v_i)$ converge a 0 en \mathbb{R}^{n-1} . De nuevo, dado que σ es continua, por el lema 1.3.31 $\sigma\eta(v_i)$ converge a 0 en \mathbb{R}^n .

Entonces existe $r_i \in \mathbb{R}$ tal que $v_i - r_i u$ converge a 0 en \mathbb{R}^n . Sumando un múltiplo entero apropiado de u a v_i supongamos que $|r_i| \leq 1/2$, entonces para i suficientemente grande tenemos que $|v_i - r_i u| \leq \frac{|u|}{2}$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$|v_i| \leq |v_i - r_i u| + |r_i u| < \frac{|u|}{2} + \frac{|u|}{2} = |u|.$$

Por lo tanto, $v_i = 0$ para toda i suficientemente grande, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$ tal que $\|r_i u\| \leq \frac{1}{2}$ para toda $i \geq \frac{1}{2}$. Sea $r_0 < \|u_i\|$ tenemos que $0 \in B(0, r_0)$, por lo tanto, por el lema 1.5.10 $\pi(G)$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}u$.

Por hipótesis inductiva, existen vectores $w_1, \dots, w_m \in G$ tal que $\pi(w_1), \dots, \pi(w_m)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}u$ y generan a $\pi(G)$. Por lo tanto, u, w_1, \dots, w_m son linealmente independientes en \mathbb{R}^n y generan a G .

□

A continuación enunciaremos resultados de subgrupos discretos de $I(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.5.27 ([16, Teo. 5.4.6]). *Sea $G \leq I(\mathbb{R}^n)$ discreto, entonces:*

1. G tiene un subgrupo H abeliano libre de rango m y de índice finito en G .
2. Existe un m -plano Q de \mathbb{R}^n tal que H actúa libremente sobre Q como un grupo discreto de traslaciones.
3. el m -plano Q es invariante bajo G .

Para precisar sobre la estructura de los subgrupos discretos de $I(\mathbb{R}^n)$ introduciremos la siguiente noción.

Definición 1.5.28. Sea $\Gamma \leq I(\mathbb{R}^n)$ discreto, diremos que Γ es un **grupo cristalográfico n -dimensional** si \mathbb{R}^n/Γ es compacto.

Teorema 1.5.29 ([16, Lem. 1, Sec. 7.5]). *Sea $\Gamma \leq I(\mathbb{R}^n)$ un subgrupo discreto y $H \leq \Gamma$ de índice finito, entonces X/Γ es compacto si y sólo si X/H es compacto.*

Teorema 1.5.30 ([16, Teo. 7.5.2]). *Sea $G \leq I(\mathbb{R}^n)$ un subgrupo discreto, entonces G es un grupo cristalográfico si y sólo si el subgrupo de traslaciones de G es de índice finito y de rango n .*

1.6. Acciones de grupos

La acción de un grupo en un conjunto tiene propiedades interesantes, a continuación revisaremos resultados y nociones que serán de apoyo posteriormente. En la segunda parte de esta sección, estudiaremos las propiedades de una acción un grupo topológico en un espacio topológico y definiremos una acción discontinua.

1.6.1. Acciones de grupos en conjuntos

Introduciremos de manera natural la noción de acción de un grupo en un conjunto, los conceptos necesarios y la notación.

Definición 1.6.1. Sean G un grupo y X un conjunto. Una **acción** de G en X es una función $\phi: G \times X \rightarrow X$ donde denotaremos $\phi(g, x)$ por $g \cdot x$, tal que para toda $g, h \in G$, con el elemento neutro $e \in G$ y toda $x \in X$, tenemos que:

1. $e \cdot x = x$,
2. $g(h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Sí ϕ cumple las condiciones 1 y 2, entonces decimos que G **actúa en** X y X es un G -**conjunto**.

El siguiente ejemplo muestra la noción de acción de un grupo en un conjunto.

Ejemplo 1.6.2. Sea (X, d) un espacio métrico, el grupo de isometrías $I(X)$ actúa en X , mediante la siguiente acción:

$$\begin{aligned}\phi: I(X) \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x =: g(x).\end{aligned}$$

Definición 1.6.3. Sean G un grupo, X un conjunto y $Y \subset X$. Definimos

$$GY = \{g \cdot y \mid y \in Y, g \in G\},$$

diremos que Y es G -**invariante** sí $GY = Y$.

La siguiente noción es una propiedad de acciones.

Definición 1.6.4. Sean G un grupo y X un conjunto. Diremos que la acción de G sobre X es **transitiva** si y sólo si para cada $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Ejemplo 1.6.5. Consideremos \mathbb{R}^n y su grupo de isometrías $I(\mathbb{R}^n)$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $k = y - x \in \mathbb{R}^n$. Definimos la traslación:

$$\begin{aligned}t_k: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + k,\end{aligned}$$

por lo tanto $t_k(x) = y$. Entonces la acción de $I(\mathbb{R}^n)$ sobre \mathbb{R}^n es transitiva.

El siguiente conjunto esta formado por los elementos de G que dejan invariante un subespacio.

Definición 1.6.6. Sean G un grupo, X un conjunto, donde G actúa sobre X y sea $Y \subseteq X$, definimos el **estabilizador** de Y bajo G como el conjunto:

$$Stab(Y) = \{g \in G \mid gY = Y\},$$

donde $gY = \{g \cdot y \mid y \in Y\}$.

Lema 1.6.7. $Stab(Y)$ es un subgrupo de G .

Demostración. Primero notemos que $e \in Stab(Y)$. Sean $g \in Stab(Y)$ y $y \in Y$ arbitrario, dado que $gY = Y$ existe $y' \in Y$ tal que $g \cdot y' = y$. Entonces

$$y' = g^{-1}g \cdot y' = g^{-1} \cdot y,$$

por lo tanto, $g^{-1} \in Stab(Y)$.

Sean $g, f \in Stab(Y)$, $y \in Y$ arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned}(gf) \cdot y &= g(f \cdot y) \\ &= g \cdot y' \quad \text{para algún } y' \in Y \\ &= y'' \quad \text{para algún } y'' \in Y.\end{aligned}$$

Entonces $gf \in G$. Por lo tanto, $Stab(Y)$ es un grupo. □

Observación 1.6.8. Sí $Y = \{x\}$, entonces el estabilizador de $\{x\}$ es el subgrupo de G definido por:

$$\text{Stab}(\{x\}) = \{g \in G : g \cdot x = x\},$$

lo denotaremos simplemente por $\text{Stab}(x)$.

La siguiente es otra propiedad de acciones.

Definición 1.6.9. Sean G un grupo, X un conjunto, diremos que la acción de G sobre X es **libre** si $g \cdot x = x$ si y sólo si $g = e$ para todo $x \in X$.

Observación 1.6.10. Sean G un grupo y X un conjunto, la acción de G en X es libre si y sólo si el subgrupo $\text{Stab}(x)$ es trivial para cada $x \in X$.

Ejemplo 1.6.11. El grupo $\{\pm 1\}$ actúa libremente sobre \mathbb{S}^n donde $-1 \cdot x = -x$.

Definición 1.6.12. Sean X un G -espacio y $x \in X$. La **órbita** de x es el subconjunto de X , definido por:

$$Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

La siguiente proposición nos muestra el caso de cuando dos órbitas son iguales.

Proposición 1.6.13. Para toda $h \in G$, la órbita de $h \cdot x$ es la órbita de x , es decir, $G(h \cdot x) = Gx$.

Demostración. Sea $h \in G$, dado $gh \in G$ para toda $g \in G$ y $Gh \cdot x \subseteq Gx$. Por otro lado, $h^{-1} \in G$ así que $Gh^{-1} \cdot x = Gx \subseteq Gh \cdot x$. Por lo tanto, $G(h \cdot x) = Gx$. \square

Más aún, tenemos lo siguiente:

Proposición 1.6.14. Si dos órbitas se intersectan, entonces son iguales.

Demostración. Supongamos que $Gx \cap Gy \neq \emptyset$, es decir, existen g_1, g_2 tales que $g_1 \cdot x = g_2 \cdot y$, entonces $g_2^{-1}g_1 \cdot x = e \cdot y = y$, esto implica que para $h = g_2^{-1}g_1$, $Gy = Gh \cdot x$, pero por la proposición 1.6.13 tenemos que $Gh \cdot x = Gx$, por lo tanto $Gx = Gy$. \square

Podemos enunciar la siguiente observación.

Observación 1.6.15. El conjunto de órbitas forma una partición de X .

El conjunto de órbitas se llama **espacio de órbitas**, lo denotaremos por X/G . Consideremos la proyección de X a X/G dada por $p: X \rightarrow X/G$, como p es sobreyectiva le asociamos a X/G la topología cociente.

Definición 1.6.16. Sean X y Y G -espacios y $f: X \rightarrow Y$ una función, diremos que f es una función **G -equivariante** si para toda $g \in G$ y $x \in X$ se cumple:

$$f(g \cdot x) = gf(x).$$

Hay una relación entre el espacio de órbitas y el estabilizador, el siguiente resultado establece tal relación.

Proposición 1.6.17. Sean X un conjunto, $x \in X$ y G un grupo que actúa sobre X . Consideremos la función:

$$\begin{aligned} \psi_x: G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

1. ψ_x es G -equivariante y $\psi_x(G) = Gx$.

2. ψ_x es la función constante sobre clases laterales izquierdas de $Stab(x)$.

3. ψ_x induce una función biyectiva G -equivariante $p_x: G/Stab(x) \rightarrow Gx$.

Demostración. 1) Definimos

$$\begin{aligned}\phi: G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2.\end{aligned}$$

Dado que G es grupo entonces ϕ es continua y se cumplen las condiciones 1, 2 de la definición 1.6.1, así que G actúa sobre G . Por hipótesis, G actúa sobre X , sean $g \in G$, $x \in X$ arbitrarios, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_x(gg') &= (gg') \cdot x \\ &= g(g' \cdot x) \\ &= g\psi_x(g'),\end{aligned}$$

por lo tanto, ψ_x es una función G -equivariante. Además, para todo $g \in G$, $\psi_x(g) = g \cdot x$ entonces $\psi_x(G) \subset Gx$, más aún, sea $y \in Gx$, tenemos que $y = g' \cdot x$ para algún $g' \in G$, entonces $y = g' \cdot x = \psi_x(g')$, por lo tanto, $\psi_x(G) = Gx$.

2) Para todo $g' \in Stab(x)$ y dado $g \in G$ arbitrario, tenemos que:

$$\begin{aligned}\psi_x(gg') &= gg' \cdot x \\ &= g \cdot x \\ &= \psi_x(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ_x es constante sobre clases laterales izquierdas de $Stab(x)$.

3) Definimos

$$\begin{aligned}p_x: G/Stab(x) &\rightarrow Gx \\ gStab(x) &\mapsto \psi_x(g).\end{aligned}$$

Veamos que está bien definida, sean $g, gg' \in G$ con $g \in Stab(x)$ y $g' \neq e$ tales que $p_x(gStab(x)) = p_x(gg'Stab(x))$, entonces $\psi_x(g) = \psi_x(gg')$, dado que ψ_x es constante en clases laterales izquierdas de $Stab(x)$ tenemos que p_x está bien definida. Veamos que p_x es inyectiva, sean $g, g' \in G$ tal que $p_x(gStab(x)) = p_x(g'Stab(x))$, entonces $g \cdot x = g' \cdot x$, es decir, $g'^{-1}g \cdot x = x$, por lo tanto, $g'^{-1}g \in Stab(x)$ y por el lema 1.1.18 p_x es inyectiva. Además, $Im(p_x) = p_x(G/Stab(x)) = \psi_x(G) = Gx$, por lo tanto, p_x es biyectiva. Por último, tenemos que:

$$\begin{aligned}p_x(gg'Stab(x)) &= \psi_x(gg') \\ &= gg' \cdot x \\ &= g\psi_x(g') \\ &= gp_x(g'Stab(x))\end{aligned}$$

Por lo tanto, p_x es G -equivariante. □

1.6.2. Acciones continuas

Como acabamos de ver, la acción de un grupo en un conjunto tiene varias propiedades, ahora, analizaremos la acción de un grupo topológico en un espacio topológico. También introduciremos el concepto y resultados de una acción.

Definición 1.6.18. Sean X un espacio topológico y G un grupo topológico. Diremos que una acción $v: G \times X \rightarrow X$ de G en X es una **acción continua** izquierda si v es continua, donde $G \times X$ tiene la topología producto.

Definición 1.6.19. Sea G un grupo topológico que actúa continuamente sobre un espacio topológico X . Sea $g \in G$, definimos:

$$\begin{aligned} L_g: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

La función L_g se llama **traslación izquierda** por g .

Proposición 1.6.20. 1. Sea L_h la traslación izquierda por h , entonces $L_g \circ L_h = L_{gh}$.

2. Por el inciso 1. tenemos que

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = L_e.$$

Por lo tanto, el inverso de L_g es $L_{g^{-1}}$

3. G actúa como un grupo de homeomorfismos sobre X .

Demostración. Dado que G es un grupo existe $g^{-1} \in G$ y para toda $x \in X$ se cumple:

$$\begin{aligned} L_g(L_h(x)) &= L_g(h \cdot x) \\ &= gh \cdot x \\ &= L_{gh}x. \end{aligned}$$

□

A continuación unos ejemplos de la noción de acción continua.

Ejemplo 1.6.21. La acción de $GL(n, \mathbb{R})$ en \mathbb{R}^n es continua por la izquierda, mediante la función:

$$\begin{aligned} v: GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, \mathbf{x}) &\mapsto A\mathbf{x}, \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

tenemos que v es continua.

Ejemplo 1.6.22. La acción del grupo ortogonal $O(n)$ en \mathbb{R}^n es continua, dado que $O(n) \leq GL(n, \mathbb{R})$, basta considerar la función (1.6.1) restringida a $O(n) \times \mathbb{R}^n$.

A continuación introduciremos la noción de acción discontinua y veremos algunos resultados.

Sean G un grupo que actúa en un espacio topológico X y $A \subseteq X$. Definimos el conjunto:

$$G_A = \{g \in G \mid gA \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.6.23. Supongamos que la acción de G en X es continua. Diremos que G actúa **discontinuamente** en X si y sólo si para cada $K \subseteq X$ compacto, G_K tiene un número finito de elementos.

El siguiente resultado nos muestra que puede pasar si la acción de un grupo en un espacio topológico no es discontinua.

Lema 1.6.24. Sean (X, d) un espacio métrico y G un subgrupo de $I(X)$, donde la acción de G en X es continua. Si G no actúa discontinuamente, entonces existen $K \subset X$ compacto, $\{g_i\}$ una sucesión de elementos distintos de G y $p \in K$ tal que $g_i(p)$ converge a algún $q \in K$.

Demostración. Supongamos que G no actúa discontinuamente en X , entonces existe $K \subset X$ compacto tal que G_K es infinito. Dado que G_K tiene un número infinito de elementos distintos $g_i \in G_K$ tales que $g_i K \cap K \neq \emptyset$, entonces tenemos un número infinito de $x_i \in g_i K \cap K$, es decir, $x_i = g_i(p_i)$ para algún $p_i \in K$. Dado que K es compacto y $\{x_i\}, \{p_i\}$ son sucesiones infinitas de elementos distintos entre sí de K compacto, entonces por el teorema 1.4.52 tenemos que p_i y x_i convergen respectivamente a algún $p, q \in K$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$d_X(g_i(p), q) \leq d_X(g_i(p), g_i(p_i)) + d_X(g_i(p_i), q),$$

notar que g_i es una isometría de X , entonces $d_X(g_i(p), g_i(p_i)) = d_X(p, p_i)$. Sea $\epsilon > 0$, dado que p_i converge a p y $g_i(p_i)$ converge a q , para $\epsilon/2$ existe $N_1 > 0$ tal que $d_X(p, p_i) < \epsilon/2$ para cualquier $i \geq N_1$, y también existe $N_2 > 0$ tal que $d_X(g_i(p), q) < \epsilon/2$ para cualquier $i \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces

$$d_X(g_i(p), q) \leq d_X(p, p_i) + d_X(g_i(p_i), q) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

para toda $i \geq N$. Por lo tanto, $g_i(p)$ converge a q . \square

En los siguientes resultados haremos uso de los conceptos de acción discontinua, estabilizador y órbitas.

Lema 1.6.25. Supongamos que la acción de G en X es continua, si G actúa discontinuamente sobre X , entonces cada subgrupo estabilizador de G es finito.

Demostración. Sea $K = \{x\}$ entonces K es compacto, dado que G actúa discontinuamente tenemos que

$$G_K = \{g \in G \mid g\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset\}$$

es finito, pero $G_K = \text{Stab}(x)$, ya que $g\{x\} \cap \{x\} = \{gx\} \cap \{x\} \neq \emptyset$ equivale a $gx = x$, es decir, $g \in \text{Stab}(x)$ \square

Lema 1.6.26. Sean G un grupo y (X, d) un espacio métrico, si G actúa discontinuamente sobre X , entonces cada órbita es un subconjunto discreto cerrado de X .

Demostración. Sea $x \in X$, veamos que la colección de subconjuntos de un punto de la órbita Gx es localmente finita, por contradicción.

Supongamos que existe $y \in X$ tal que dada cualquier vecindad V de y , $V \cap Gx$ tiene un número infinito de puntos de Gx . Sea $g_n x \in B(y, \frac{1}{n}) \cap Gx$, entonces $\{g_i\} \subset G$ es una sucesión de elementos distintos entre sí tal que $\{g_i x\}$ converge a y . Entonces por el lema 1.4.44

$$K = \{x, y, g_1 x, g_2 x, \dots\}$$

es un conjunto compacto de X .

Además, $g_i K = \{g_i y, g_i x, g_i g_1 x, g_i g_2 x, \dots\}$ así que $g_i x \in K \cap g_i K$ para cada i , entonces G_K es infinito, esto es una contradicción.

Entonces la colección de conjuntos $\{\{gx\} : g \in G\}$ es localmente finita, existe una vecindad abierta U de gx tal que $U \cap Gx = \{gx, g_1 x, \dots, g_n x\}$ es finita. Entonces $U \cap Gx$ es abierto en Gx , por lo tanto $(U \cap Gx)^C$ es cerrado en Gx .

Sea $C = (U \cap Gx)^C \cup_{i=1}^n \{g_i x\}$, C es cerrado, entonces $C^C = \{gx\}$ es abierto, dado que $\{gx\}$ es arbitrario entonces por la observación 1.4.3 Gx es discreto.

Por el inciso 3. del teorema 1.4.23 Gx es cerrado. \square

1.6.3. El espacio de órbitas

Como ya se mencionamos en la sección 1.6.1 el espacio de órbitas es el conjunto de órbitas de G en X . Ahora, si consideramos un espacio métrico X , veremos que condiciones necesita la acción para poder definir una métrica en el espacio de órbitas.

Teorema 1.6.27. *Sean (X, d) un espacio métrico y G un grupo que actúa sobre X , entonces la función cociente $p: X \rightarrow X/G$ es una función abierta.*

Demostración. Sea $U \subset X$ conjunto abierto, entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(U)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(U)\} \\ &= \{x \in X \mid Gx = Gy \text{ para algún } y \in U\} \\ &= \{x \in X \mid x = gy \text{ para algún } y \in U \text{ y algún } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid x \in gU \text{ para algún } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} gU \end{aligned}$$

Donde cada $g \in G$ es un homeomorfismo, entonces si U es un abierto en X , también $p^{-1}(p(U))$ es un abierto en X , por lo tanto, $p(U)$ es un abierto en X/G \square

Consideremos las siguientes nociones.

Definición 1.6.28. La distancia entre dos conjuntos A y B de X se define por:

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Definición 1.6.29. La **función distancia en el espacio de órbitas** X/G , es $d_G: X/G \times X/G \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$d_G(Gx, Gy) = \text{dist}(Gx, Gy).$$

No siempre d_G es métrica, si d_G es una métrica sobre X/G , entonces d_G se llama **la métrica del espacio de órbitas** sobre X/G .

Una pregunta que surge es la siguiente: ¿bajo que condiciones X/G tiene por métrica a d_G ?

Teorema 1.6.30. *Sean (X, d) un espacio métrico y G un subgrupo de $I(X)$. Entonces d_G es una métrica sobre X/G si y sólo si cada órbita es un subconjunto cerrado de X .*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $f, g, h \in G$. Dado que g^{-1} es una isometría entonces

$$d(gx, hy) = d(x, g^{-1}hy).$$

Por lo tanto, $\text{dist}(Gx, Gy) = \text{dist}(x, Gy)$.

Supongamos que d_G es una métrica sobre X/G y $Gx \neq Gy$, entonces

$$\text{dist}(x, Gy) = d_G(Gx, Gy) > 0.$$

Sea $r = \text{dist}(x, Gy)$, entonces $B(x, r) \subset X - \{Gy\}$, así que $X - \{Gy\}$ es un abierto y por consiguiente Gy un cerrado. Por lo tanto, cada órbita es un subconjunto cerrado de X .

Recíprocamente, supongamos que cada órbita es subconjunto cerrado de X . Sí $x, y \in X$ y $Gx \neq Gy$, entonces $d_G(Gx, Gy) = \text{dist}(x, Gy) > 0$.

Ahora, sean $x, y, z \in X$ y $g, h \in G$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, gy) + d(y, hz) &= d(x, gy) + d(gy, ghz) \\ &\geq d(x, ghz) \\ &\geq \text{dist}(x, Gz). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{dist}(x, Gz) \leq \text{dist}(x, Gy) + \text{dist}(y, Gz)$. Entonces d_G satisface la desigualdad del triángulo.

Por lo tanto, d_G es una métrica sobre X/G . \square

Corolario 1.6.31. Sean (X, d) un espacio métrico y G un subgrupo de $I(X)$ tal que G actúa discontinuamente sobre X , entonces d_G es una métrica sobre X/G .

Demostración. Por lema 1.6.26, cada órbita es un subconjunto cerrado de X y por el teorema 1.6.30, se cumple la afirmación. \square

Teorema 1.6.32. Sean (X, d) un espacio métrico y $G \leq I(X)$ tal que d_G es una métrica sobre X/G . Entonces se cumple las siguientes afirmaciones:

1. Si $p: X \rightarrow X/G$ es la aplicación cociente, entonces para cada $x \in X$ y $r > 0$, se cumple

$$p(B_d(x, r)) = B_{d_G}(p(x), r).$$

2. La topología inducida por la métrica d_G sobre X/G es la topología cociente.

Demostración. Veamos que se cumple 1.

Sean $x \in X$ y $r > 0$, dado $y \in B_d(x, r)$ entonces $d(x, y) < r$, dado que toda $g \in G$ es una isometría tenemos $d(gx, gy) = d(x, y)$, así que $d_G(Gx, Gy) < r$. Entonces $p(y) = Gy \in B_{d_G}(Gx, r)$ donde $Gx = p(x)$. Por lo tanto,

$$p(B_d(x, r)) \subset B_{d_G}(p(x), r).$$

Para la otra contención, sea $y \in X$ y supongamos que $d_G(Gx, Gy) < r$, existen $g, h \in G$ tal que $d(x, h^{-1}gy) = d(hx, gy) < r$ entonces $d_G(x, Gy) < r$. Así que existe $f \in G$ tal que $d(x, fy) < r$, tenemos que $p(gy) = Gy$, entonces $B_{d_G}(p(x), r) \subset p(B_d(x, r))$.

Por lo tanto, $p(B_d(x, r)) = B_{d_G}(p(x), r)$.

La prueba de 2 es la siguiente: Dado que 1 se cumple, tenemos que p es una función abierta y continua con respecto a la topología inducida por la métrica d_G sobre X/G . Sea U un subconjunto abierto de X/G con respecto a la topología cociente, dado que p es una función cociente entonces $p^{-1}(U)$ es un abierto de X . Por lo tanto, $U = p(p^{-1}(U))$ es un abierto en X/G con la topología inducida por la métrica d_G . Sean $x \in X$ y $r > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} p^{-1}(B_{d_G}(p(x), r)) &= p^{-1}(p(B_d(x, r))) \\ &= \bigcup_{g \in G} g(B_d(x, r)) \\ &= \bigcup_{g \in G} B_d(gx, r). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B_{d_G}(p(x), r)$ es un abierto en X/G con la topología cociente, por lo tanto, la topología inducida por la métrica d_G en X/G es la topología cociente. \square

1.7. Algunas nociones sobre topología algebraica

Uno de los problemas básicos de topología es determinar cuando dos espacios topológicos son homeomorfos, donde dos espacios son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos deformar continuamente uno de los espacios hasta obtener el otro. El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no usando la definición de homeomorfismo, puede ser difícil:

- Para probar que son homeomorfos, se tiene que dar un homeomorfismo, lo cual puede ser nada fácil.

- Para probar que no son homeomorfos tenemos que probar que no existe ningún homeomorfismo entre ellos, esto puede resultar muy complicado.

Los siguientes temas que abordaremos se pueden ver en [8] y [15].

1.7.1. Grupo fundamental

Establaremos los conceptos y resultados necesarios para introducir un invariante topológico que puede ayudar a resolver el problema de los dos espacios homeomorfos.

La conexidad por caminos es un concepto más fuerte que la conexidad topológica, basada en el concepto de camino en un espacio topológico.

Definición 1.7.1. Sean $I = [0, 1]$, X un espacio topológico y $a, b \in X$. Un **camino** de a a b en X es una aplicación continua $\alpha: I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

- Observación 1.7.2.**
1. El camino α es la aplicación y no la imagen de $\alpha(I)$.
 2. Un ejemplo de camino es el **camino constante** $\alpha_a(t) = a$ para todo $t \in I$
 3. Sean α y β caminos en X , donde $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces la aplicación $(\alpha * \beta): I \rightarrow X$ definida por:

$$(\alpha * \beta) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.7.1)$$

es un camino.

Definición 1.7.3. Sea X un espacio topológico, diremos que X es **arco-conexo** si para cualquier par de puntos de X pueden unirse por un camino.

Ejemplo 1.7.4. \mathbb{R} y \mathbb{S}^1 son espacios arco-conexo.

A continuación definiremos el concepto que intuitivamente es una deformación continua de una aplicación en otra.

Definición 1.7.5. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que dos aplicaciones continuas de X a Y , $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. La aplicación F se llama una **homotopía** entre f_0 y f_1 y la denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ o $F: f_0 \simeq f_1$.

Para cada $t \in I$ definimos $f_t: X \rightarrow Y$ por $f_t(x) = F(x, t)$ una aplicación continua, ver la figura 1.4.

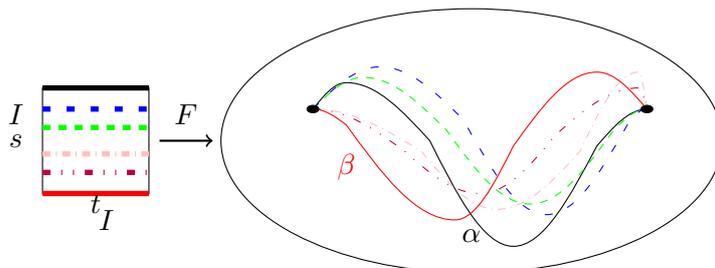


Figura 1.4: Homotopía de caminos

Si $f: X \rightarrow Y$ es aplicación homotópica a la aplicación constante se dice que f es **nulhomotópica** y la homotopía F entre ambas es una **nulhomotopía**.

Definición 1.7.6. Dos aplicaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas relativamente** a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía $F: X \times I \rightarrow Y$ entre f_0 y f_1 tal que

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$$

para cualquier $a \in A$ y $t \in I$.

Utilizando el concepto de aplicaciones homotópicas definimos una relación de equivalencia entre espacios topológicos más débil que la relación de equivalencia entre espacios topológicos dada por homeomorfismos.

Definición 1.7.7. Sean X y Y dos espacios topológicos, diremos que X y Y son del **mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que:

$$\begin{aligned} gf &\simeq 1_X: X \rightarrow X, \\ fg &\simeq 1_Y: Y \rightarrow Y. \end{aligned}$$

Las aplicaciones f, g se llaman **equivalencias homotópicas** y si X y Y son del mismo tipo de homotopía lo denotaremos por $X \simeq Y$. De forma intuitiva que dos espacios sean del mismo tipo de homotopía, significa que un espacio puede deformarse en el otro al contraerse o encogerse.

Definición 1.7.8. Sea X un espacio, decimos que X es **contraíble** si Id_x es homotópica a la aplicación constante en algún punto $x_0 \in X$.

Ejemplo 1.7.9. Consideremos la bola unitaria de dimensión n ,

$$\mathbb{B}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < 1\}. \quad (1.7.2)$$

Sean la aplicación identidad Id en \mathbb{B}^n y la aplicación constante cte al $\mathbf{0}$, ambas continuas. Sea $F: \mathbb{B}^n \times I \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por $F_t(x) = tx$.

Dado que F es continua, $F(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0} = cte(x)$ y $F(x, 1) = x = Id(x)$, entonces F es una homotopía entre las funciones Id y cte . Por lo tanto, \mathbb{B}^n es contraíble a un punto.

Haremos la siguiente construcción para que un subconjunto de clases de equivalencia de caminos bajo la operación $*$ sea un grupo.

Definición 1.7.10. Se dice que dos caminos α y β en X son **equivalentes** si α y β son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$ y lo denotaremos por $\alpha \sim \beta$.

Por lo tanto, los caminos $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ son equivalentes si existe una función continua $F: I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t), & F(t, 1) &= \beta(t) & \text{para } \forall t \in I, \\ F(0, s) &= \alpha(0) = \beta(0), & F(1, s) &= \alpha(1) = \beta(1), & \forall s \in I \end{aligned}$$

Observación 1.7.11. Se cumple que \sim es una relación de equivalencia, además, a la clase de equivalencia de un camino α la llamaremos la **clase de homotopía** de α y la denotamos por $[\alpha]$. El producto de clases de homotopía de caminos esta dado por $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$, ver la definición de composición de caminos (1.7.1).

El conjunto de clases de homotopía de caminos en X cumplen casi todos los axiomas de grupo, excepto que no siempre está bien definido el producto. Además, dado cualquier camino α de a a b en X podemos definir los caminos constantes de $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, donde uno se comporta como la identidad por la izquierda y otro como la identidad por la derecha, entonces, la clase de homotopía de la identidad no es única. Por lo tanto, definimos lo siguiente:

Definición 1.7.12. Se dice que un camino α es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$. Además, si $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ decimos que α es un camino cerrado con **punto base** x .

Observación 1.7.13. Dados cualesquiera dos lazos con el mismo punto base $x \in X$, el producto de estos dos lazos está bien definido y la identidad es única.

Denotaremos por $\pi_1(X, x)$ al conjunto de clases de homotopía de lazos con punto base $x \in X$.

Teorema 1.7.14 ([8, Pro. 1.3]). *El conjunto $\pi_1(X, x)$ es un grupo bajo el producto de clases de homotopía de lazos con punto base $x \in X$.*

A $\pi_1(X, x)$ se le llama el **grupo fundamental** de X con punto base x .

Corolario 1.7.15 ([8, Pág. 28]). *Si X es un espacio arco conexo, entonces $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos para todo par de puntos $x, y \in X$.*

Observación 1.7.16. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua, entonces:

1. Si α y β son caminos en X , entonces $f\alpha$ y $f\beta$ son caminos en Y .
2. Si $\alpha \sim \beta$, entonces $f\alpha \sim f\beta$.
3. Si α es un lazo en X con punto base $x \in X$, entonces $f\alpha$ es un lazo en Y con punto base $f(x)$.

Si $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, entonces $[f\alpha]$ es un elemento bien definido de $\pi_1(Y, f(x))$

$$\begin{aligned} f_*: \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [f\alpha]. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Lema 1.7.17. *La aplicación f_* de (1.7.3) es un homeomorfismo de grupos.*

A continuación caracterizaremos un espacio topológico con las propiedades de arco-conexo y grupo fundamental trivial.

Definición 1.7.18. Sea X un espacio topológico, diremos que X es **simplemente conexo** si X es arco-conexo y $\pi_1(X, x) = \{1\}$ para todo $x \in X$.

Proposición 1.7.19 ([19, Ex. 4.10, Pág. 47]). *Sea X un espacio topológico, X es simplemente conexo si y sólo si existe una única clase de homotopía de caminos entre cualquier par de puntos en X .*

Definición 1.7.20. Sea X un espacio topológico, X es **localmente arco-conexo** si para cada punto $x \in X$ tiene una base local formada por vecindades arco-conexas.

Ejemplo 1.7.21. Dado que cada punto de \mathbb{R}^3 tiene una base de vecindades formada por bolas arco-conexas, el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 es localmente arco-conexo.

1.7.2. Espacios cubrientes

Ahora analizaremos los espacios cubrientes y espacios cubrientes universales. Además, describiremos una propiedad de los espacios cubrientes que es el levantamiento de caminos.

Posteriormente introduciremos el concepto de una acción que llamaremos acción cubriente y probaremos el resultado más importante de la sección, donde la acción cubriente de un grupo en un espacio topológico nos dará varias propiedades del grupo y la función cociente.

Definición 1.7.22. Sean X y Y espacios arco-conexos y localmente arco-conexos, diremos que Y es un espacio **cubriente** de X si existe una aplicación continua y suprayectiva $p: Y \rightarrow X$ tal que para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x que satisface las siguientes condiciones:

1. $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in J} V_j$ con V_j abiertos de Y para toda j .
2. $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo para toda $j \in J$.

La vecindad U se llama **vecindad regular**, las vecindades V_j se llaman **hojas** y diremos que p es una **aplicación cubriente**.

Para cada $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x)$ se llama la **fibra** sobre x y la cardinalidad de $p^{-1}(x)$ se llama el **número de hojas del cubriente**. Dado que p es suprayectiva, entonces $p^{-1}(x) \neq \emptyset$.

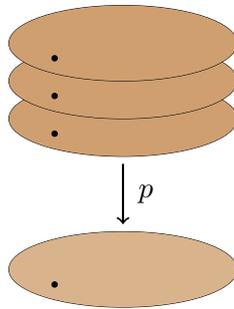


Figura 1.5: Una aplicación cubriente vista localmente

Para mostrar la noción de espacio cubriente, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7.23. Consideremos la aplicación:

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$t \mapsto e^{2\pi it}.$$

Por el ejemplo 1.7.4, \mathbb{R} y \mathbb{S}^1 son arco-conexos y localmente arco-conexos. Notemos que p es continua y suprayectiva por como se define. Sea $z_0 = e^{2\pi it_0} \in \mathbb{S}^1$ y consideremos la siguiente vecindad de z_0

$$U = \{e^{2\pi it} \mid t \in (t_0 - 1/4, t_0 + 1/4)\}.$$

Tenemos que:

1. $p^{-1}(U) = \sqcup_{m \in \mathbb{Z}} (t_0 - 1/4 + m, t_0 + 1/4 + m)$.
- 2.

$$p(t_0 - 1/4 + m, t_0 + 1/4 + m) = \{e^{2\pi it} \mid t \in (t_0 - 1/4 + m, t_0 + 1/4 + m)\}$$

$$= U.$$

Por lo tanto, p es una aplicación cubriente, además p tiene un número infinito de hojas y las fibras son homeomorfas a \mathbb{Z} , ver la figura 1.6.

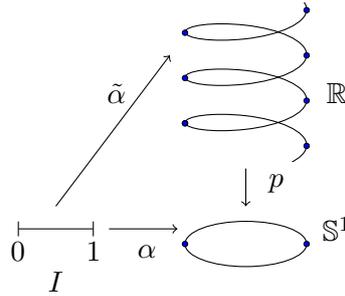


Figura 1.6: La aplicación cubriente de \mathbb{S}^1

Ejemplo 1.7.24. Consideremos la aplicación

$$p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$z \mapsto z^n,$$

para $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Por el ejemplo 1.7.4, tenemos que \mathbb{S}^1 es arco-conexo y localmente arco-conexo. Además, p es continua y suprayectiva. Se tiene que p es una aplicación cubriente.

Para ilustrar, veamos el caso $n = 2$, consideremos $z_0 \in \mathbb{S}^1$ y la vecindad de z_0 dada por $U = \mathbb{S}^1 - \{-1\} = \{e^{it} \mid t \in (-\pi, \pi)\}$. Tenemos que

$$p^{-1}(U) = \{e^{it} \mid t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)\}.$$

Además,

$$p((-\pi/2, \pi/2)) = \{(e^{it})^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi/2)\}$$

$$= \{e^{it} \mid t \in (-\pi, \pi)\}$$

$$= U,$$

p es un homeomorfismo. Por lo tanto, p es una aplicación cubriente con n hojas.

Definición 1.7.25. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Si Y es simplemente conexo diremos que p es una transformación **cubriente universal** y Y es el espacio **cubriente universal**.

Definición 1.7.26. Sean X, Y espacios topológicos y $f: Y \rightarrow X$ una aplicación continua. Decimos que f es un **homeomorfismo local** si para toda $y \in Y$ existe una vecindad U de y y una vecindad V de $f(y)$ tal que f manda homeomorficamente U a V .

Observación 1.7.27. Toda aplicación cubriente es un homeomorfismo local. Sin embargo, no todo homeomorfismo local $p: Y \rightarrow X$ es una aplicación cubriente, por ejemplo, sea

$$p: (0, 3) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$t \mapsto \exp^{2\pi it},$$

p es un homeomorfismo local, pero no es una aplicación cubriente, ya que ninguna vecindad de $1 \in \mathbb{S}^1$ cumple los incisos 1. y 2. de la definición 1.7.22 de aplicación cubriente.

Una propiedad importante de los espacios cubrientes es la siguiente propiedad de levantamiento.

Definición 1.7.28. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente, si $f: Z \rightarrow X$ es una aplicación continua de algún espacio Z , un **levantamiento** de f es una aplicación continua $\bar{f}: Z \rightarrow Y$ tal que $p \circ \bar{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Proposición 1.7.29 ([8, Pro. 1.30]). Sean $p: Y \rightarrow X$ un espacio cubriente, una homotopía $f_t: Z \rightarrow X$, y una función $f'_0: Z \rightarrow Y$ que levanta f_0 , entonces existe una única homotopía $f'_t: Z \rightarrow Y$ de f'_0 que levanta f_t .

Observación 1.7.30. Si en la proposición 1.7.29 tomamos a Z como un punto, obtenemos la **propiedad de levantamiento de caminos** para un espacio cubriente $p: Y \rightarrow X$. Para cada camino $\alpha: I \rightarrow X$ y cada preimagen y_0 del punto $\alpha(0) = x_0$ existe un único $\alpha': I \rightarrow Y$ que levanta a α con punto inicial y_0 .

La unicidad del levantamiento de la proposición 1.7.29 implica que cualquier levantamiento de un camino constante es constante, esto también se deduce del hecho de que $p^{-1}(x_0)$ tiene la topología discreta por la definición de espacio cubriente.

Teorema 1.7.31 (Teorema general de levantamiento, [10, Teo. 21.2]). Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y supongamos que $p(y_0) = x_0$. Sea $f: Z \rightarrow X$ una aplicación continua con $f(z_0) = x_0$, supongamos también que Z es arco-conexo y localmente arco-conexo, la aplicación f puede ser levantada a una aplicación $\bar{f}: Z \rightarrow Y$ tal que $\bar{f}(z_0) = y_0$ si y sólo si

$$f_*(\pi(Z, z_0)) \subset p_*(\pi(Y, y_0)).$$

Además, si dicho levantamiento existe es único.

Ahora describiremos la acción del grupo fundamental en la fibra.

Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente, el grupo $\pi_1(X, x_0)$ actúa en la fibra $p^{-1}(x_0)$ sobre x_0 . Sea α un lazo en X basado en x_0 , su levantamiento $\tilde{\alpha}_{y_0}$ a Y con punto inicial y_0 no necesariamente es un lazo, pero su punto final $\tilde{\alpha}_{y_0}(1)$ será algún punto y_1 en la fibra $p^{-1}(x_0)$ sobre x_0 , dado que el punto final sólo depende de la clase de homotopía de α se puede definir una **acción derecha** $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$ por

$$y[\alpha] = \tilde{\alpha}_y(1)$$

para toda $y \in p^{-1}(x_0)$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$.

Dado $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, como α deja fijo a y_0 si α levanta a Y en un lazo basado en y_0 , es decir, α es la imagen bajo p_* de un lazo en Y basado en y_0 , entonces el **estabilizador** $Stab(y_0)$ es el subgrupo $p_*(\pi(Y, y_0))$.

Si Y es arco-conexo, $\pi(X, x_0)$ actúa **transitivamente**, dado que un camino $\tilde{\alpha}$ de y_0 a y_1 se puede ver como el levantamiento del lazo $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Por lo tanto, los diferentes subgrupos $p_*(\pi(Y, y))$ al recorrer y a lo largo de $p^{-1}(x_0)$ son todos conjugados, dado que $y_0[\alpha] = y_1$, entonces $Stab(y_0) = [\alpha]Stab(y_1)[\alpha]^{-1}$.

Haciendo uso de aplicaciones cubrientes y homeomorfismos definimos lo siguiente.

Definición 1.7.32. Sean $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y un homeomorfismo $h: Y \rightarrow Y$ tal que $p \circ h = p$. A h se le llama **transformación cubriente**.

Observación 1.7.33. 1. Sea $x \in X$, una transformación cubriente h manda la fibra $p^{-1}(x)$ en sí misma.

2. Si h es una transformación cubriente, también lo es h^{-1} .
3. La composición de dos transformaciones cubrientes es una transformación cubriente.
4. Por los incisos anteriores, el conjunto de las transformaciones cubrientes forman un grupo bajo la composición, se llama **grupo de transformaciones cubrientes**, lo denotaremos por $G(Y, p)$.

Definición 1.7.34. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente, diremos que p es **normal** si para cada $x \in X$ y para cada par de elementos \tilde{x}, \tilde{x}' de la fibra de x existe una transformación cubriente de \tilde{x} a \tilde{x}' .

Ejemplo 1.7.35. Sea $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación cubriente del ejemplo 1.7.23, tenemos que p es normal.

Definición 1.7.36. Sean X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de X , diremos que la acción de G en X es una **acción cubriente** si satisface lo siguiente: para cualquier punto $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que

$$gU \cap U = \emptyset$$

para cualquier $g \in G - \{e\}$.

Este tipo de acción es también conocida como acción **propiamente discontinua**, tal como se menciona en [8, Pág. 70-71].

Observación 1.7.37. Sean X un espacio topológico y G un grupo con una acción cubriente en X . Entonces la acción es libre.

El grupo de transformaciones cubrientes es un caso especial de la noción de la acción de un grupo en un espacio, más aún, tenemos lo siguiente:

Ejemplo 1.7.38. Sean $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y $G(Y, p)$ su grupo de transformaciones cubrientes. Consideremos la acción de $G(Y, p)$ en Y es una acción cubriente.

$$\begin{aligned} \psi: G(Y, p) \times Y &\rightarrow Y \\ (h, y) &\mapsto h(y). \end{aligned}$$

Por el inciso 1 de la observación 1.7.33 y la definición de espacio cubriente 1.7.22 la acción de $G(Y, p)$ en Y es una acción cubriente.

Lema 1.7.39. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente con Y un espacio topológico arco-conexo. Sean $g, h \in G(Y, p)$ y $y \in Y$. Si $h(y) = g(y)$ entonces $h = g$.

Demostración. Sean $y' \in Y$ arbitrario. Dado Y es arco-conexo, existe un camino $\alpha: I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = y$ y $\alpha(1) = y'$. Consideremos los caminos: $h(\alpha)$ con punto inicial $h(y)$ y punto final $h(y')$ y el camino $g(\alpha)$ con punto inicial $g(y)$ y punto final $g(y')$. Dado que h y g son transformaciones cubrientes se cumple que $p(h\alpha) = p\alpha$ y $p(g\alpha) = p\alpha$. Por lo tanto, $h(\alpha)$ y $g(\alpha)$ ambos son levantamientos de $p\alpha$.

Por hipótesis tenemos que $h(y) = g(y)$ y por la observación 1.7.30 $h(\alpha) = g(\alpha)$, en particular, $h(y') = g(y')$, dado que y' es arbitrario, concluimos que $h = g$. \square

Teorema 1.7.40. Sean G un grupo y Y un espacio topológico, si la acción de G sobre Y es cubriente, entonces:

1. La función cociente $p: Y \rightarrow Y/G$ dada por $p(y) = Gy$, es una aplicación cubriente normal.

2. Si Y es arco-conexo, entonces G es el grupo de transformaciones cubrientes de la aplicación cubriente $p: Y \rightarrow Y/G$.
3. Si Y es arco-conexo y localmente arco-conexo, entonces G es isomorfo a $\pi_1(Y/G)/p_*(\pi_1(Y))$.

Demostración. 1. Por la definición de función cociente 1.4.31 p es una función continua suprayectiva y X/G tiene la topología cociente.

Sea $x \in X$ y U una vecindad de $x \in X$, dado que p es una función abierta entonces $p(U)$ es una vecindad abierta de Gx , donde $Gx = p(x)$. Tenemos que:

$$p^{-1}(p(U)) = \cup_{g \in G} gU,$$

dado que la acción de G en X es la acción cubriente entonces $\{gU \mid g \in G\}$ es una subcolección de subconjuntos abiertos de X .

Además, $p|_{gU}: gU \rightarrow p(U)$ es una aplicación continua, abierta y biyectiva, por lo tanto, $p|_{gU}$ es un homeomorfismo.

Veamos que p es una aplicación normal. Definimos $L_g: Y \rightarrow Y$ dada por $L_g(y) = gy$. Tenemos que $p(L_g(y)) = p(gy) = Ggy = Gy = p(y)$, por consiguiente, cada elemento de G es una transformación cubriente. Sean $Gy \in Y/G$ y $y_1, y_2 \in p^{-1}(Gy)$ entonces existe $g \in G$ tal que $gy_1 = y_2$. Pero L_g es una transformación cubriente, por lo tanto, p es una aplicación cubriente normal.

2. Por la prueba del inciso 1. tenemos que $G \leq G(Y, p)$. Para la otra contención, sea $h \in G(Y, p)$ y $y \in Y$ arbitrario, dado que $p(y) = Gy$ y por el inciso 1 de la observación 1.7.33 $h(y)$ y y están en la misma órbita, es decir, existe $g \in G$ tal que $h(y) = g(y)$. Dado que Y es arco-conexa, por el lema 1.7.39 $h = g$, por lo tanto $G = G(Y, p)$.

3. Por el inciso b) del teorema [8, Pro. 1.39].

□

Corolario 1.7.41. Sean G un grupo, Y un espacio topológico y supongamos que la acción de G en Y es de espacio cubriente. Si Y es simplemente conexo, entonces G es isomorfo a $\pi_1(Y/G)$.

Demostración. La prueba se sigue de la definición 1.7.18 y del teorema 1.7.40. □

Para finalizar esta sección daremos ejemplos del teorema 1.7.40 y el corolario 1.7.41.

Ejemplo 1.7.42. Consideremos la acción $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n, x) = x + n$. Veamos que f es una transformación cubriente. Para cada $x \in \mathbb{R}$ consideremos el intervalo $U = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ con $\epsilon < \frac{1}{2}$. Dado que los trasladados de U por elementos de \mathbb{Z} son disjuntos, la transformación f es cubriente. Por el teorema 1.7.40 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ es una aplicación cubriente. De hecho tenemos que p es la aplicación cubriente del ejemplo 1.7.23.

Ejemplo 1.7.43. Consideremos la acción de \mathbb{Z} en \mathbb{R}^2 dada por:

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (n, (x_1, x_2)) &\mapsto (n + x_1, (-1)^n x_2), \end{aligned}$$

ψ es una acción continua y de espacio cubriente. Por el teorema 1.7.40 la aplicación cociente $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ es una aplicación cubriente. El espacio cociente \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} es una banda de Möbius.

Ejemplo 1.7.44. Consideremos la aplicación cubriente $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ del ejemplo 1.7.23, sus únicas transformaciones cubrientes son homeomorfismos de la forma:

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + n, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $G(\mathbb{R}, p)$ es isomorfo a \mathbb{Z} .

Ejemplo 1.7.45. Consideremos el toro dado por la aplicación cubriente

$$\begin{aligned} p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x + m, y + n), \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Así que $G(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p \times p)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1.8. Variedades

En esta sección introduciremos las nociones y resultados necesarios sobre variedades Riemannianas. Iniciaremos con las nociones de variedad diferenciable, espacio tangente, la orientación de una variedad diferenciable y la métrica Riemanniana. Posteriormente describiremos algunas propiedades de variedades Riemannianas y enunciaremos el teorema de Clasificación de variedades con curvatura seccional constante. Por último, veremos que dada una variedad Riemanniana y un grupo de isometrías de la variedad Riemanniana, si la acción del grupo en la variedad Riemanniana es una acción cubriente entonces el espacio de órbitas es una variedad Riemanniana. Para mayor detalle revisar en [4], [11] y [3].

Antes de iniciar con el tema, haremos un breve repaso de unas definiciones de cálculo en varias variables.

Definición 1.8.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow Y$ una función, diremos que f es **diferenciable** si para cualquier $x \in X$ existe una vecindad abierta $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \in W$ y existe una función $F: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que existen todas sus derivadas parciales son continuas y $f = F|_{W \cap X}$.

Definición 1.8.2. Sea $(-\epsilon, \epsilon)$ un intervalo abierto de \mathbb{R} , $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, diremos que α es una **curva diferenciable** si todas sus funciones coordenadas son derivables en el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$.

Definición 1.8.3. Sean $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, f: X \rightarrow Y$ una función diferenciable y $x \in X$. La **diferencial de f** en x es una transformación lineal dada por:

$$\begin{aligned} Df_x: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto (f \circ \alpha)'(0), \end{aligned}$$

donde $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$.

La diferencial de una función cumple lo siguiente:

1. La regla de la cadena, sean $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ funciones diferenciables con $x \in X$ y $f(x) = y$, entonces

$$D(g \circ f)_x = Dg_y \circ Df_x.$$

2. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y la función identidad $Id: U \rightarrow U$, entonces para toda $x \in U$, DId_x es la identidad.
3. Sean $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $DL_x = L$

Definición 1.8.4. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $f: X \rightarrow Y$ una función diferenciable. Diremos que f es un **difeomorfismo** si f es biyectiva y f, f^{-1} son diferenciables.

Un difeomorfismo es en particular un homeomorfismo.

Definición 1.8.5. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, diremos que f es un **difeomorfismo local** en algún $x \in X$ si f es un difeomorfismo entre alguna vecindad U de x y una vecindad V de $f(x)$.

Ahora, daremos la definición de variedad diferenciable:

Definición 1.8.6. Sea M un espacio topológico de Hausdorff segundo numerable. Sea $p \in M$, una **carta** de M es un homeomorfismo $x: U \rightarrow U'$ donde U es un abierto de M y U' es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . A su inversa $x^{-1}: U' \rightarrow U$ se le llama **parametrización** de M . Una colección de cartas $\{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es llamado un **atlas** para M si

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M.$$

Dadas dos cartas (U_α, x_α) y (U_β, x_β) tal que:

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$$

obtenemos **transformaciones de cartas** dadas por $x_{\alpha\beta} = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}: x_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow x_\beta(U_{\alpha\beta})$. Un atlas es llamado **diferenciable** si todas las transformaciones de cartas son diferenciables.

Una estructura diferenciable para M es un atlas diferenciable maximal. Una **variedad diferenciable** de dimensión n es un espacio topológico junto con una estructura diferenciable cuyas cartas tienen imagen en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.8.7. Un ejemplo trivial de variedad diferenciable es un abierto U de \mathbb{R}^n con un atlas dado por la función identidad.

Observación 1.8.8. Una variedad diferenciable de dimensión 2 se llama **superficie**.

1.8.1. Espacio tangente

A continuación definiremos diferenciableidad de una función entre variedades diferenciables y el espacio tangente de una variedad diferenciable de dimensión n , veremos que el espacio tangente es un espacio vectorial de dimensión n . Después, definiremos la diferencial de una función diferenciable.

Definición 1.8.9. Sean M y N variedades diferenciales de dimensiones m y n respectivamente y $\varphi: M \rightarrow N$ una función. Sean las cartas $x: U \rightarrow U'$ y $y: V \rightarrow V'$ donde U' es una vecindad abierta de \mathbb{R}^m y U es una vecindad abierta de M tal que $p \in U$ y V' es una vecindad abierta de \mathbb{R}^n y V es una vecindad abierta de N , tal que $\phi(p) \in V$ y $\phi(U) \subset V$, entonces la composición:

$$y \circ \phi \circ x^{-1}: U' \rightarrow V' \tag{1.8.1}$$

es diferenciable. Diremos que φ es **diferenciable en** $p \in M$. Sea W un conjunto abierto de M , entonces φ es diferenciable sobre W si φ es diferenciable sobre cada punto de W .

La función (1.8.1) se llama la **expresión de φ en las parametrizaciones x y y** .

De la condición 2. de la definición 1.8.6 tenemos que la diferenciableidad de variedades es independiente de la elección de las parametrizaciones.

Definición 1.8.10. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y una función $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, tenemos que:

1. Sea $\alpha(0) = p \in M$ y sea \mathcal{D} el conjunto de todas las funciones sobre M diferenciables en p , definimos la función:

$$\begin{aligned}\alpha'(0): \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

$\alpha'(0)$ se llama el vector tangente a la curva diferenciable α en $t = 0$.

El conjunto de todos los vectores tangentes de M en p se llama el **espacio tangente** de M en p , lo denotaremos por $T_p M$

Proposición 1.8.11. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$, entonces $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión n .*

Demostración. Sea $x: U \rightarrow U'$ una carta con $x(p) = 0$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ una función diferenciable en p sobre M . Expresamos f y α en la carta:

$$f \circ x^{-1}(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in M, \quad x \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

respectivamente. Por lo tanto, al restringir f a α tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \right) \left(\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{t=0} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f.\end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha'(0) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_0 \tag{1.8.2}$$

y por hipótesis $p = x(0)$, entonces $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ es el vector tangente en p de la curva coordenada

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

Por la igualdad (1.8.2) tenemos que el vector tangente de la curva α en p depende sólo de las derivadas de las coordenadas i -ésimas de α . \square

Ahora, por medio de la noción de espacio tangente definimos lo siguiente:

Definición 1.8.12. Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente. Consideremos $\varphi: M \rightarrow N$ una función diferenciable, para cada $p \in M$ definimos la aplicación lineal en p , denotada por $D\varphi_p$, dada por

$$\begin{aligned}D\varphi_p: T_p M &\rightarrow T_{\varphi(p)} N \\ v &\mapsto \beta'(0),\end{aligned}$$

donde $p = \alpha(0)$ y $\alpha'(0) = v$ y $\beta = \varphi \circ \alpha$. $D\varphi_p$ se llama la **diferencial de φ** en p .

Proposición 1.8.13. Sean M y N variedades diferenciables, $\varphi: M \rightarrow N$ una función diferenciable y $p \in M$. Entonces la aplicación lineal $D\varphi_p$ no depende de la elección de α .

Demostración. Sea $\varphi: M \rightarrow N$ una función diferenciable, $p \in M$, $v \in T_p M$ elegimos $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, consideremos $\beta = \varphi \circ \alpha$.

Sea $x: U \rightarrow M$ y $y: V \rightarrow N$ parametrizaciones en p y $\varphi(p)$ respectivamente. Expresamos φ en las parametrizaciones y^{-1} y x :

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x(q) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

con $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$ y $(y_1, \dots, y_m) \in V$.

Por otro lado, expresamos α en la parametrización de x , tenemos que $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Por lo tanto:

$$y^{-1} \circ \beta(t) = y^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(t).$$

Entonces $\beta'(0)$ respecto a la base $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})_0\}$ de $T_{\varphi(p)}M$ asociado a la parametrización y , esta dada por:

$$\beta'(0) = D\varphi_p(v) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x'_j(0))$$

con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$, donde $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ es una matriz $m \times n$ y $x'_j(0)$ es una matriz columna $n \times 1$. Por lo tanto, $D\varphi_p$ es una aplicación lineal que no depende de la elección de α , cuya matriz asociada a la base respecto a las parametrizaciones de x y y es la matriz $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. \square

Entonces dada la elección de una parametrización $x: U \rightarrow M$ determina una base asociada a $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\}$ en $T_p M$. Por lo tanto, la estructura lineal en $T_p M$ no depende de la parametrización x .

Sean M y N variedades diferenciables, si $\varphi: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $D\varphi_p$ es un isomorfismo para todo $p \in M$, por lo tanto $\dim(M) = \dim(N)$. Por el teorema de la función inversa en \mathbb{R}^n , ver [1, Sec. 13.3], tenemos:

Proposición 1.8.14 ([4, Teo. 2.10]). Sean M y N variedades diferenciables, $\varphi: M \rightarrow N$ una función diferenciable y $p \in M$ tal que $D\varphi_p$ es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo local en p .

1.8.2. Orientación

A continuación describiremos la orientación de una variedad diferenciable en términos de su estructura diferenciable y del determinante de la diferencial de la transformación de cartas. Además mencionaremos que significa que un difeomorfismo preserve la orientación.

Definición 1.8.15. Sea M una variedad diferenciable. Diremos que M es **orientable** si existe una estructura diferenciable $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que

Para cualquier $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, la diferencial de la transformación de cartas $x_{\alpha\beta}$ tiene determinante positivo.

En caso contrario, diremos que M es no orientable.

Si M es una variedad orientable, una elección de una estructura diferenciable se llama **orientación** de M , por consiguiente, M es una variedad orientada.

Ejemplo 1.8.16. Sean M una variedad diferenciable, U y V vecindades coordinadas tal que $M = V \cup U$ y $V \cap U$ es conexa, dado que el determinante de la diferencial del cambio de coordenadas es distinto de cero y este determinante no cambia en $V \cap U$. Entonces M es una variedad diferenciable orientada.

De manera análoga a espacios vectoriales tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.8.17 ([8, Pro. 3.25]). *Sea M una variedad conexa y orientable entonces M admite sólo dos orientaciones.*

Observación 1.8.18. Dada una variedad orientada M , la orientación en M induce de manera coherente una orientación en todos los espacios tangentes de todos los puntos de M , ver la proposición 1.2.7.

Ahora, induciremos la noción de difeomorfismos que preservan la orientación.

Definición 1.8.19. Sean M y N variedades diferenciables orientadas y $\varphi: M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Sea $p \in M$ y consideremos

$$D\varphi_p: T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

por la observación 1.8.18 T_pM y $T_{\varphi(p)}N$ tienen orientaciones dadas por las correspondientes orientaciones de M y N . Decimos que φ **preserva la orientación** si $D\varphi_p$ preserva la orientación como transformación lineal, ver la definición 1.2.11. En caso contrario, diremos que φ **invierte la orientación**.

1.8.3. Métrica Riemanniana

El siguiente concepto es una gran herramienta, a partir de este podremos definir una variedad Riemanniana e isometría local. Posteriormente introduciremos los conceptos necesarios para describir dos propiedades de variedades Riemannianas: geodésicamente completa y completa. Además enunciaremos el teorema de clasificación de variedades con curvatura seccional constante.

Definición 1.8.20. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , una **métrica Riemanniana** es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el espacio tangente T_pM , tal que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Sea $x: U \rightarrow U'$ una carta de M en p , con $x(q) = (x_1, \dots, x_n) \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = Dx_q^1(0, \dots, 1, \dots, 0)$ entonces

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

es una función diferenciable sobre U . La función g_{ij} se llama **representación local de la métrica Riemanniana en la parametrización x** .

Una métrica Riemanniana no depende de la elección de la parametrización.

Definición 1.8.21. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Diremos que M es una **variedad Riemanniana** si M tiene una métrica Riemanniana.

Definición 1.8.22. Sean M y N variedades Riemannianas, $\lambda: M \rightarrow N$ un difeomorfismo, diremos que λ es una **isometría** si para todo $p \in M$ y $u, v \in T_pM$, se cumple:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle D\lambda_p(u), D\lambda_p(v) \rangle_{\lambda(p)}. \quad (1.8.3)$$

Definición 1.8.23. Sean M y N variedades Riemannianas y $\lambda: M \rightarrow N$ una función diferenciable, diremos que λ es una **isometría local** en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $\lambda: U \rightarrow \lambda(U)$ es un difeomorfismo que cumple la condición (1.8.3).

Ejemplo 1.8.24. Consideremos \mathbb{R}^n con una métrica Riemanniana $\frac{\partial}{\partial x_i}$ que se identifica con $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces la métrica esta dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

\mathbb{R}^n se llama **el espacio euclidiano de dimensión n** y la métrica Riemanniana se llama la **métrica euclidiana**.

Para describir las variedades Riemannianas introduciremos los siguientes conceptos.

Definición 1.8.25. Sean M una variedad Riemanniana y $p \in M$. La **norma** de cualquier vector tangente $v \in T_p M$ es $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$.

Definición 1.8.26. Sea M una variedad Riemanniana. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es un segmento de curva, la **longitud** de γ está definida por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Para medir distancias entre puntos, es útil para modificar ligeramente la clase de curvas que consideramos. Una curva **regular** es una curva suave $\gamma: I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para $t \in I$. Intuitivamente, esto previene que la curva tenga “cúspides” o “puntas”.

Definición 1.8.27. Sea una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow M$. Diremos que γ es un **segmento de curva regular a trozos** si existe una subdivisión finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una curva regular para $i = 1, \dots, k$.

Todas las distancias sobre una variedad Riemanniana se medirán a lo largo de dichos segmentos de curva. Para abreviar, nos referirnos a estos segmentos de curva regular a trozos como **curva admisible**. Además, será conveniente permitir que una curva constante trivial $\gamma: \{a\} \rightarrow M$ dada por $\gamma(a) = p$ se considere una curva admisible.

Definición 1.8.28. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva admisible. La **longitud de arco** es la función $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$s(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \quad (1.8.4)$$

Como consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo de una variable tenemos que s es diferenciable donde γ lo es, y $s'(t)$ es igual a la velocidad $\|\gamma'(t)\|$ de γ .

Definición 1.8.29. Sea M una variedad Riemanniana conexa. Para cualquier par de puntos $p, q \in M$, la **distancia Riemanniana** es el ínfimo de las longitudes de todas las curvas admisibles de p a q , la denotaremos por $d(p, q)$.

Teorema 1.8.30 ([11, Lema 6.2]). *Con la función distancia d definida sobre cualquier variedad Riemanniana conexa es un espacio métrico cuya topología inducida es la misma que la topología de la variedad.*

Definición 1.8.31. Sean M una variedad Riemanniana y γ una curva admisible. Diremos que γ es una **curva minimizante** si $L(\gamma) \leq L(\bar{\gamma})$ para cualquier otra curva admisible $\bar{\gamma}$ con los mismos puntos finales.

De la definición de distancia se sigue inmediatamente que γ es minimizante si y sólo si $L(\gamma)$ es igual a la distancia entre los puntos finales.

Definición 1.8.32. Una curva minimizante con una parametrización de velocidad unitaria la llamaremos **geodésica**.

Definición 1.8.33. Sea M una variedad Riemanniana. Diremos que M es **geodésicamente completa** si cualquier geodésica está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8.34. Consideremos cualquier subconjunto abierto propio de \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana. Existen geodésicas que alcanzan la frontera en tiempo finito. Por lo que no son geodésicamente completos.

El siguiente teorema nos da un criterio simple para determinar cuando una variedad Riemanniana conexa es completa.

Teorema 1.8.35 (Hopf-Rinow, [11, Teo. 6.13]). *Una variedad Riemanniana conexa es geodésicamente completa si y sólo si es completa como un espacio métrico con la distancia Riemanniana, ver la definición 1.8.29.*

Observación 1.8.36. Una implicación del teorema 1.8.35 es que toda variedad Riemanniana compacta es completa, ya que toda sucesión de Cauchy converge.

Ejemplo 1.8.37. Por la observación 1.8.36 el toro es una variedad Riemanniana completa.

El siguiente teorema donde nos da un criterio sobre la completitud de variedades Riemannianas.

Teorema 1.8.38 ([11, Lema 11.6]). *Sean M y \widetilde{M} variedades Riemannianas. Si \widetilde{M} es completa y $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ es una isometría local, entonces M es completa y π es una aplicación cubriente.*

Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n y $p \in M$. Cada subespacio Π de dimensión 2 del espacio $T_p M$ determina una subvariedad de dimensión 2 de M que contiene a p , llamada la **sección plana** determinada por Π , denotada por S_Π . La subvariedad S_Π es el conjunto de geodésicas que pasan por p cuyo vector tangente en p está en Π .

Definición 1.8.39. La **curvatura seccional** de M asociada con Π , denotada por $K(\Pi)$ es la curvatura Gaussiana de la superficie S_Π en p con la métrica inducida, la cual puede calcularse mediante el teorema Egregium, ver [11, Teo. 8.6].

Las variedades Riemannianas de curvatura seccional constante pueden ser todas descritas mediante el siguiente teorema de clasificación.

Teorema 1.8.40 (Clasificación de variedades con curvatura seccional constante [11, Teo. 1.9]). *Una variedad Riemanniana completa y conexa con curvatura constante M es isométrica a \overline{M}/Γ , donde \overline{M} es uno de los espacios modelo \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathcal{H}^n de curvatura seccional constante y Γ es un grupo discreto de isometrías de \overline{M} , isomorfo a $\pi_1(M)$ y Γ actúa libre y discontinuamente en \overline{M} .*

1.8.4. Variedades Riemannianas y acciones

El siguiente resultado será de utilidad para construir las 3-variedades Riemannianas, por tal motivo el siguiente resultado es el principal del capítulo.

Teorema 1.8.41. *Sean M una variedad Riemanniana de dimensión finita y G un subgrupo del grupo de isometrías $I(M)$. Supongamos que la acción de G en M es una acción cubriente. Entonces M/G es una variedad Riemanniana de dimensión finita y la aplicación cociente $p: M \rightarrow M/G$ es una isometría local.*

Demostración. Primero veamos que M/G es una variedad diferenciable. Por el teorema 1.7.40, p es una aplicación cubriente. Sea U_α un subconjunto abierto de M/G , de la definición 1.7.36 se cumple lo siguiente:

1. $p^{-1}(U_\alpha) = \sqcup U_{\alpha i}$, donde $U_{\alpha i}$ son abiertos de M . Dado $U_{\alpha i}$ existe $g_{ij} \in G$ tal que $g_{ij}U_{\alpha i} = U_{\alpha j}$ y $gU_{\alpha i} \cap U_{\alpha i} = \emptyset$ para toda $g \in G$.
2. $p|_{U_{\alpha i}}: U_{\alpha i} \rightarrow U_\alpha$ es un homeomorfismo.

Consideremos $x_{\alpha i}: U_{\alpha i} \rightarrow U'_{\alpha i}$ una carta de M donde $U'_{\alpha i}$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

Sea $h_{\alpha i} = x_{\alpha i} \circ (p|_{U_{\alpha i}})^{-1}: U_\alpha \rightarrow U'_{\alpha i}$. Entonces la colección de $h_{\alpha i}$ son un atlas para M/G . Veamos que los cambios de cartas son diferenciables. Consideremos U_α y U_β tal que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces:

$$h_{\beta j} \circ h_{\alpha i}^{-1}: h_{\alpha i}(U_{\alpha\beta}) \rightarrow h_{\beta j}(U_{\alpha\beta}), \quad (1.8.5)$$

dada por

$$\begin{aligned} h_{\beta j} \circ h_{\alpha i}^{-1} &= (x_{\beta j} \circ (p|_{U_{\beta i}})^{-1}) \circ (x_{\alpha i} \circ (p|_{U_{\alpha i}})^{-1})^{-1} \\ &= x_{\beta j} \circ (p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}} \circ x_{\alpha i}^{-1}. \end{aligned}$$

Analicemos la aplicación $(p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}$. Sean $U_{[\alpha i]\beta} = (p|_{U_{\alpha i}})^{-1}(U_{\alpha\beta})$ y $U_{[\beta j]\alpha} = (p|_{U_{\beta j}})^{-1}(U_{\alpha\beta})$. Entonces tenemos que $(p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}: U_{[\alpha i]\beta} \rightarrow U_{[\beta j]\alpha}$ y como $p|_{U_{\alpha i}}$ y $(p|_{U_{\beta i}})^{-1}$ son homeomorfismos, $(p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}$ también lo es. Tomemos $y_i \in U_{[\alpha i]\beta}$ arbitrario y sea $y = p(y_i)$. Sea $y_j = (p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}(y_i)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} y_j &= (p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}(y_i) \\ &= (p|_{U_{\beta i}})^{-1}(y). \end{aligned}$$

Entonces y_i y y_j están en la preimagen $p^{-1}(y)$, y por lo tanto existe $g \in G$ tal que $gy_i = y_j$ y por el inciso 1 tenemos que $gU_{[\alpha i]\beta} = U_{[\beta j]\alpha}$. Por lo tanto $(p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}$ esta dada por la traslación mediante g y como la acción es mediante isometrías, $(p|_{U_{\beta i}})^{-1} \circ p|_{U_{\alpha i}}$ es una isometría y por lo tanto (1.8.5) es diferenciable.

Ahora veamos que podemos definir una métrica Riemanniana en M/G tal que $p: M \rightarrow M/G$ sea una isometría local. Como p es una aplicación cubriente, por la observación 1.7.27, p es un homeomorfismo local. Dado que ya probamos que M/G es una variedad diferenciable, entonces p es un difeomorfismo local.

Sea $(U_\alpha, h_{\alpha i})$ una carta de M/G . Sea $y \in M/G$ y consideremos $v, w \in T_y(M/G)$. Sea $y' \in p^{-1}(y) \subset U_{\alpha i}$, definimos el producto interior de v y w en $T_y(M/G)$ de la siguiente manera:

$$\langle v, w \rangle_y = \langle D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(v), D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(w) \rangle_{y'}.$$

Veamos que el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ no depende de la elección de $y' \in p^{-1}(y)$. Sea $y'' \in p^{-1}(y) \subset U_{\beta j}$ otro punto en la preimagen de y . Entonces existe $g \in G$ tal que $gy' = y''$ y como la acción de g es una isometría tenemos que

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_y &= \langle D_y((p|_{U_{\beta j}})^{-1})(v), D_y((p|_{U_{\beta j}})^{-1})(w) \rangle_{y''} \\ &= \langle D_{y'}g \circ D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(v), D_{y'}g \circ D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(w) \rangle_{gy'} \\ &= \langle D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(v), D_y((p|_{U_{\alpha i}})^{-1})(w) \rangle_{y'}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ está bien definido y como varía diferenciablemente en $U_{\alpha i}$ también varía diferenciablemente en U_α y es una métrica Riemanniana que hace a p una isometría local. \square

Observación 1.8.42 ([12, Ejerc. 13-4]). Sean M una variedad Riemanniana conexa, orientada y Γ un grupo discreto de difeomorfismos con acción cubriente en M . Entonces M/Γ es orientable si y sólo si la acción de Γ preserva orientación.

1.8.5. Variedades con frontera

Hemos definido una variedad Riemanniana, pero nos interesa saber más sobre la estructura que puede admitir, por tal motivo a continuación definiremos algunas de sus propiedades.

Sea $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ es el semiespacio euclidiano superior cerrado.

Definición 1.8.43. Sea M un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y con un atlas maximal. Diremos que M es una **n -variedad con frontera** si M es localmente homeomorfo a \mathbb{R}_+^n .

Definición 1.8.44. Sea M una n -variedad con frontera, entonces cada punto $p \in M$ que es mandado por alguna carta a un punto con $x_n = 0$, se llama un **punto frontera** de M . El conjunto de puntos frontera de M es canónicamente una $(n - 1)$ -variedad, se llama la **frontera** de M y es denotada por ∂M . Además, $M - \partial M$ es canónicamente una n -variedad y se llama el **interior** de M .

Definición 1.8.45. Sea M una n -variedad diferenciable, diremos que M es una **variedad cerrada** si es una variedad compacta sin frontera.

1.8.6. Superficies cerradas y la característica de Euler

Nos interesa estudiar superficies cerradas, dichas superficies se pueden clasificar en dos tipos: orientables y no orientables. Estudiaremos la noción de triangular una superficie y un invariante topológico. Enunciaremos un teorema donde nos dice cuando dos superficies cerradas son homeomorfas.

Los libros de consulta respecto a esta sección, son los siguientes: [21] y [11].

A continuación enunciamos el teorema de clasificación de superficies:

Teorema 1.8.46 ([16, Teo. 9.1.1]). *Toda superficie es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de toros, o una suma conexa de planos proyectivos.*

Cabe notar que hay un invariante topológico que permite clasificar las superficies cerradas, a continuación lo definiremos.

Definición 1.8.47. Sea M una superficie orientada. Si M es una superficie orientada, sea m el número de toros que se suman. Sea M una superficie no orientada, sea m el número de planos proyectivos que se suman. Diremos que m es el **género** de M .

Ejemplo 1.8.48. El toro es una superficie cerrada de género 1 orientable.

Definición 1.8.49. Consideremos el conjunto Δ^2

$$\Delta^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Sea S una superficie cerrada, una **triangulación** de S consiste de una familia finita de funciones:

$$\{\psi_i: \Delta^2 \rightarrow S\}_{i=1}^m$$

con las siguientes propiedades:

1. La función ψ_i manda Δ^2 homeomorfamente a un subconjunto T_i de M , llamado un **triángulo**. Los vértices y lados de T_i son las imágenes de los vértices y aristas de Δ^2 bajo ψ_i .
2. La superficie S es la unión de los triángulos T_1, \dots, T_m .

3. Si $i \neq j$, entonces

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset, & \text{o} \\ \text{un v\u00e9rtice en com\u00fan de cada tri\u00e1ngulo} & T_i, T_j, \text{ o} \\ \text{un lado en com\u00fan de cada tri\u00e1ngulo.} \end{cases}$$

Note que la triangulaci\u00f3n de superficies es una de las propiedades de superficies, ya que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.8.50 ([5]). *Toda superficie cerrada tiene una triangulaci\u00f3n.*

Ejemplo 1.8.51. A continuaci\u00f3n ilustraremos dos triangulaciones de \mathbb{S}^2 , ver la figura 1.7.



Figura 1.7: Triangulaci\u00f3n de \mathbb{S}^2

Definici\u00f3n 1.8.52. Sean S una superficie cerrada y una triangulaci\u00f3n de S . Sean v el n\u00famero de v\u00e9rtices, e el n\u00famero de aristas y t el n\u00famero de tri\u00e1ngulos. La **caracter\u00edstica de Euler** se define por:

$$\chi(S) = v - e + t.$$

Es un resultado de topolog\u00eda algebraica que la caracter\u00edstica de Euler de las superficies cerradas no dependen de la triangulaci\u00f3n, ver [16] y [20, Teo. 13.3.1].

Usando la caracter\u00edstica de Euler y la orientabilidad es posible comparar las superficies mediante el siguiente teorema:

Teorema 1.8.53 ([16, Teo. 9.1.2]). *Sean M y N dos superficies cerradas. Entonces M y N son superficies homeomorfas si y s\u00f3lo si tienen la misma caracter\u00edstica de Euler y ambas son orientables o no orientables.*

Observaci\u00f3n 1.8.54. Sea S una superficie cerrada, Si S es una superficie cerrada orientable de g\u00e9nero g entonces la caracter\u00edstica de Euler es $2 - 2g$. Por otro lado, si S es una superficie cerrada no orientable, entonces la caracter\u00edstica de Euler es $2 - g$.

1.9. La esfera de Riemann

En esta secci\u00f3n estudiaremos el conjunto de los n\u00fameros complejos con un punto al infinito y veremos que es isomorfo a \mathbb{S}^2 , revisaremos algunas de sus propiedades algebraicas y topol\u00f3gicas.

Sea el plano complejo extendido denotado por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde ∞ es un punto extra llamado punto al infinito. Geom\u00e9tricamente veremos que $\widehat{\mathbb{C}}$ puede ser identificado con la esfera unitaria mediante la **proyecci\u00f3n estereogr\u00e1fica**, consideremos la esfera de dimensi\u00f3n 2 en \mathbb{R}^3 definida por:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Identifiquemos el plano complejo \mathbb{C} con el plano $x_3 = 0$ en \mathbb{R}^3 , identificando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, con $(x, y, 0)$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

Sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de \mathbb{S}^2 , sea $Q \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y sea $P \in \mathbb{C}$ tal que N, Q y P son colineales. Entonces la proyección estereográfica de N está dada por la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ Q &\mapsto P, \end{aligned}$$

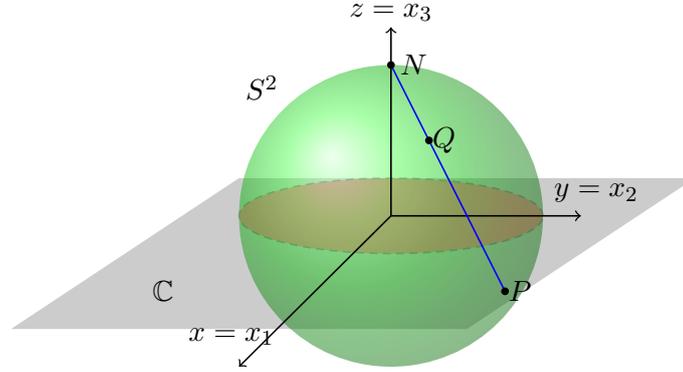


Figura 1.8: Proyección estereográfica

Teorema 1.9.1. La proyección estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}, \quad (1.9.1)$$

con inversa

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \quad (1.9.2)$$

Por lo tanto π es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ y \mathbb{C} .

Demostración. Primero notemos que π y π^{-1} se definen como en las funciones (1.9.1) y (1.9.2) respectivamente. Tomemos $P = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$ así que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y sea $Q = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$. Como P, Q, N son colineales por la ecuación simétrica de una recta en el espacio tenemos:

$$\frac{x-0}{x_1-0} = \frac{y-0}{x_2-0} = \frac{0-1}{x_3-1}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1-x_3}.$$

Además:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{1}{1-x_3}, \quad \text{despejando} \quad x = \frac{x_1}{1-x_3}, \quad (1.9.3)$$

$$\frac{y}{x_2} = \frac{1}{1-x_3}, \quad \text{despejando} \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}. \quad (1.9.4)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto z = x + iy \end{aligned}$$

y si sustituimos $z = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$, se satisface la función dada en la expresión (1.9.1).

Por las igualdades (1.9.3) y (1.9.4), $x^2 = \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2}$ y $y^2 = \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2}$, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} + 1 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x_3)}. \end{aligned}$$

Entonces :

$$1 - x_3 = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Despejando x_1 y x_2 de las igualdades (1.9.3) y (1.9.4) respectivamente, tenemos que:

$$x_1 = x(1 - x_3), \quad x_2 = y(1 - x_3).$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

y usamos que $Q \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, tenemos que:

$$x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Entonces $\pi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$ definida por $\pi^{-1}(P) = Q = (x_1, x_2, x_3)$ y está dada por como se define la función en (1.9.2). Por otro lado, por como se definen π es una biyección y π^{-1} es la función inversa de π , además π y π^{-1} son continuas, por tanto π es homeomorfismo. \square

Extendamos $\pi: \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ a una biyección $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiendo $\pi(N) = \infty$. Los puntos Q cercanos a N bajo π corresponden a números complejos, $P = z$ con $|z|$ grande, así que en algún sentido z es cercano a ∞ . Por otro lado, los puntos Q' cercanos al polo sur $S = (0, 0, -1)$ corresponden a los números complejos z' con $|z'|$ pequeño, cuando $x_3 = 0$ en \mathbb{S}^2 corresponde al círculo unitario $|z| = 1$ de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Usaremos la biyección $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ para definir una topología sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ definiendo conjuntos abiertos a las imágenes bajo π de conjuntos abiertos de \mathbb{S}^2 , con la topología usual vista como subespacio de \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, los conjuntos abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son de dos tipos:

1. Conjuntos abiertos de \mathbb{C} en la topología usual de \mathbb{R}^2 .
2. Conjuntos de la forma $(\mathbb{C} - K) \cup \infty$ donde K es cualquier subconjunto compacto de \mathbb{C} .

Entonces la topología de \mathbb{C} inducida por la inclusión en $\widehat{\mathbb{C}}$ concuerda con la topología usual de \mathbb{C} . Mostrando así que $\widehat{\mathbb{C}}$ es la **compactificación por un punto de \mathbb{C}** , ver en [15, Pág. 185].

Usaremos la biyección $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ para transferir propiedades algebraicas y topológicas de \mathbb{S}^2 a $\widehat{\mathbb{C}}$ y viceversa. El plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ lo llamaremos la **esfera de Riemann** y por medio de la proyección estereográfica \mathbb{S}^2 es homeomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$. Utilizaremos este hecho para cambiar puntos de vista entre el plano y \mathbb{S}^2 e identificaremos cada punto $Q \in \mathbb{S}^2$ con $P = \pi(Q) \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Por el teorema 1.4.54, dado que \mathbb{S}^2 es compacta y π es continua entonces $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacta.

Proposición 1.9.2. *La esfera \mathbb{S}^2 es una variedad diferenciable orientable.*

Demostración. Consideremos \mathbb{S}^2 y sus polos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$. Por el teorema 1.9.1 la proyección estereográfica $\pi_N: \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nos da un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ y \mathbb{R}^2 . Análogamente, la proyección estereográfica $\pi_S: \mathbb{S}^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nos da un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 - \{S\}$ y \mathbb{R}^2 .

Se puede ver que $\pi_N^{-1} \circ \pi_S$ es diferenciable.

Por lo tanto, $\{(\mathbb{S}^2 - \{N\}, \pi_N), (\mathbb{S}^2 - \{S\}, \pi_S)\}$ es un atlas diferenciable de \mathbb{S}^2 . Por lo tanto, \mathbb{S}^2 es una variedad diferenciable de dimensión 2. Notemos que $\mathbb{S}^2 - \{N, S\}$ es conexa, por el ejemplo 1.8.16 \mathbb{S}^2 es orientable y el atlas $\{(\mathbb{S}^2, \pi_N), (\mathbb{S}^2, \pi_S)\}$ determina una orientación sobre \mathbb{S}^2 . \square

1.10. Transformaciones de Möbius

En esta sección describiremos los automorfismos de la esfera de Riemann que preserven la orientación desde un punto de vista algebraico. Veremos que el grupo formado por estos elementos es isomorfo al grupo proyectivo lineal y al grupo proyectivo especial. Estudiarémos la acción transitiva de las transformaciones de Möbius en la esfera de Riemann. Además, clasificaremos estas transformaciones. Para revisar temas relacionados con esta sección ver [9] y [2].

Definición 1.10.1. Diremos que $m: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una **transformación de Möbius** si es de la siguiente forma:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{tal que} \quad a, b, d, c \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0. \quad (1.10.1)$$

Definición 1.10.2. Diremos que $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, de la forma (1.10.1) está **normalizada** si $ad - bc = 1$.

Observación 1.10.3. Las transformaciones de Möbius están definidas y son continuas en toda la esfera de Riemann, ya que al dividir el numerador y el denominador sobre z ,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{az+b}{z}}{\frac{cz+d}{z}} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}},$$

implica que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Así que $m(\infty) = \frac{a}{c}$ y $m(-\frac{d}{c}) = \infty$.

El conjunto de todas las transformaciones de Möbius lo denotaremos por $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

Las transformaciones (1.10.1) también son llamadas **transformaciones fraccionarias lineales**.

Observación 1.10.4. Los coeficientes a, b, c, d no determinan de manera única a m , ya que si tomamos $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ arbitrario, $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ también corresponden a la misma transformación m .

Observación 1.10.5. Dada una transformación de Möbius $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, obtenemos una transformación normalizada si se multiplica a sus coeficientes por $k = \pm \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$.

Proposición 1.10.6. *La composición de cualesquiera dos transformaciones de Möbius es cerrada en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.*

Demostración. Dadas dos transformaciones de Möbius arbitrarias,

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad m'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

la composición $m' \circ m$ está dada por:

$$(m' \circ m)(z) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \quad (1.10.2)$$

y definiendo $r = a'a + b'c$, $s = c'b + d'd$, $t = a'b + b'd$, $v = c'a + d'c$, tenemos que $m' \circ m(z) = \frac{rz+t}{vz+s}$ y notemos que

$$\begin{aligned} rs - tv &= (a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \\ &= a'ac'b + a'ad'd + b'cc'b + b'cd'd \\ &\quad - a'bc'a - a'bd'c - b'dc'a - b'dd'c \\ &= a'd'ad - a'd'bc - b'c'ad + bcb'c' \\ &= (a'b' - b'c')(ad - bc) \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. \square

Proposición 1.10.7. $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ forma un grupo bajo la composición.

Demostración. Por la proposición 1.10.6, $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es cerrado bajo la composición. Además el elemento neutro está dado por la transformación identidad $Id(z) = z$, que corresponde a la transformación de Möbius con $b = c = 0$ y $a = b$. Dada $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ su transformación inversa está dada por $m^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$, ya que

$$\begin{aligned} (m' \circ m)(z) &= \frac{(da - bc)z + db - db}{(-ca + ac)z - cb + ad} \\ &= \frac{(da - bc)z}{ad - bc} \\ &= z. \end{aligned}$$

Por tanto $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo bajo la composición. \square

Corolario 1.10.8. $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ es un grupo de homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismos.

Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Por la observación 1.10.3 m es continua. Por la proposición 1.10.7, m tiene inversa continua, por lo tanto m es homeomorfismo. \square

Cabe mencionar que hay una fuerte conexión entre las transformaciones de Möbius y las matrices.

Definimos la función:

$$\begin{aligned} \theta: GL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

Proposición 1.10.9. La función θ de (1.10.3) es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Dadas $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$ arbitrarias, de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

El producto de matrices es:

$$NM = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix},$$

corresponde a la composición de las transformaciones de Möbius correspondientes, tal como en la ecuación (1.10.2). Por lo tanto, θ es un homomorfismo de grupos. \square

Ahora probemos que el grupo de transformaciones de Möbius que preserva la orientación es isomorfo a dos grupos.

Teorema 1.10.10. $Möb^+(\widehat{\mathbb{C}}) \cong PGL(2, \mathbb{C})$.

Demostración. Sea θ tal como en la expresión (1.10.3), por la proposición 1.10.9 θ es homomorfismo de grupos, más aún, por como se define θ , θ es suprayectiva. Notemos que $K = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$, donde I es el neutro en $Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$ e I es la matriz identidad en $GL(2, \mathbb{C})$. Por el primer teorema de isomorfismos 1.1.26, tenemos que $PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/K \cong Im(\theta) = Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$. \square

Observación 1.10.11. Dadas dos matrices $M, N \in GL(2, \mathbb{C})$, M y N bajo θ de la expresión (1.10.3), determinan la misma transformación de $Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$ si y sólo si $M = \lambda N$ para algún $\lambda \neq 0$.

Lema 1.10.12. Sea $N \in GL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$N = \lambda M \quad \text{con} \quad M \in SL(2, \mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \lambda^2 = \det(N). \quad (1.10.4)$$

Demostración. Sea $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ arbitraria, entonces se puede escribir $N = \lambda M$, donde $\lambda^2 = \det(N)$ y $\frac{1}{\lambda}N = M = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, esto significa que

$$a' = \frac{a}{\sqrt{\det(N)}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{\det(N)}}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{\det(N)}}, \quad d' = \frac{d}{\sqrt{\det(N)}},$$

donde

$$\det(M) = a'd' - c'b' = \frac{ad}{ad - bc} - \frac{bc}{ad - bc} = \frac{ad - bc}{ad - bc} = 1,$$

es decir, $M \in SL(2, \mathbb{C})$, más aún, suponiendo que $N = \lambda M = \lambda' M'$ donde $M, M' \in SL(2, \mathbb{C})$ y $\lambda^2 = \det(N) = \lambda'^2$, es decir $\pm\lambda = \lambda'$ entonces $\pm M = M'$. Por lo tanto, existen $\pm M \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que satisface la condición (1.10.4). \square

Proposición 1.10.13. $PGL(2, \mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$.

Demostración. Por el lema 1.10.12 definimos $\phi: GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$, donde $\phi(N) = M$. Veamos que ϕ es un homomorfismo de grupos, sean $N, N' \in GL(2, \mathbb{C})$, por el lema 1.10.12 $N = \lambda M$ y $N' = \lambda' M'$ donde $\lambda^2 = \det(N)$ y $\lambda'^2 = \det(N')$, entonces

$$\phi(N)\phi(N') = MM' = \phi(NN').$$

Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo de grupos.

Consideremos la proyección $\pi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $\pi \circ \phi$ es suprayectiva por como se define la composición y $Ker(\pi \circ \phi) = \lambda I$. Por el teorema 1.1.26,

$$PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/\lambda I \cong PSL(2, \mathbb{C}).$$

\square

Usaremos estos isomorfismos para identificar a $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $PGL(2, \mathbb{C})$ o con $PSL(2, \mathbb{C})$. Las transformaciones elementales de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ son:

- **Traslación:** $T_a: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $T_a(z) = z + a$, con $a \in \mathbb{C}$, fija ∞ y actúa en el plano \mathbb{C} .
- **Homotecia:** $U_b: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $U_b(z) = bz$, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Esta transformación fija 0 y ∞ , actúa sobre el plano \mathbb{C} donde expande o contrae distancias por el factor b .
- **Rotación:** $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ con $\theta \in \mathbb{R}$ representa una rotación de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ por el ángulo θ .
- **Inversión:** $J: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera $J(z) = \frac{1}{z}$.

A partir de estas transformaciones elementales podemos definir una transformación de Möbius.

Teorema 1.10.14. *Cualquier transformación de Möbius es la composición de una cantidad finita de transformaciones elementales.*

Demostración. Sea m una transformación de Möbius de la forma

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0.$$

Mediante operaciones, m equivale a

$$m(z) = - \left(\frac{ad - bc}{c^2} \right) \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) + \frac{a}{c},$$

es decir, m se puede escribir como la composición

$$m(z) = T_{\frac{a}{c}} \circ U_s \circ J \circ T_{\frac{d}{c}}(z), \quad \text{donde} \quad s = - \left(\frac{ad - bc}{c^2} \right).$$

□

1.10.1. Transitividad y razón cruzada

En este capítulo veremos que las transformaciones de Möbius actúan 3-transitivamente en $\widehat{\mathbb{C}}$. Antes, introduciremos la noción de razón cruzada.

Definición 1.10.15. Si (z_1, z_2, z_3, z_4) es una 4-upla de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, la **razón cruzada** se define como:

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}.$$

Tomando el límite cuando $z_i = \infty$ para $i = 1, 2, 3, 4$ tenemos:

$$(1) \quad [\infty : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)};$$

$$(2) \quad [z_1 : \infty : z_3 : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_3 - z_1)};$$

$$(3) \quad [z_1 : z_2 : \infty : z_4] = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)};$$

$$(4) \quad [z_1 : z_2 : z_3 : \infty] = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)}.$$

Teorema 1.10.16. *Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces hay una única transformación $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que:*

$$m(z_1) = 0, \quad m(z_2) = \infty, \quad m(z_3) = 1.$$

Demostración. Sea $m(z) = [z_1 : z_2 : z_3 : z]$. En cada caso, $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ y m envía z_1, z_2, z_3 a $0, \infty, 1$ respectivamente. Afirmamos que m es única.

Por contradicción, supongamos que existe $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = \infty, \quad f(z_3) = 1,$$

entonces $f \circ m^{-1}$ fija a $0, \infty, 1$ así que

$$f \circ m^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Sustituyendo $0, 1, \infty$ tenemos:

$$f \circ m^{-1}(0) = \frac{b}{d} = 0. \tag{1.10.5}$$

$$f \circ m^{-1}(1) = \frac{a + d}{c + d} = 1. \tag{1.10.6}$$

$$f \circ m^{-1}(\infty) = \infty. \tag{1.10.7}$$

De la igualdad (1.10.5) implica que $b = 0$ y $d \neq 0$, mientras de la igualdad (1.10.7) tenemos que $c = 0$ y entonces de la igualdad (1.10.6) tenemos que a, d son distintos de 0. Por lo tanto, $f \circ m^{-1}$ es la identidad, es decir, $f = m$. \square

El siguiente corolario muestra la 3 transitividad de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Corolario 1.10.17. *Sean $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) dos tripletes donde z_i, w_j son distintos entre sí respectivamente para cada $i, j = 1, 2, 3$. Entonces existe una única transformación $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $f(z_j) = w_j$ para cada $j = 1, 2, 3$.*

Demostración. Por el teorema 1.10.16, existen $m_1, m_2 \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tales que:

$$m_1(z_1) = m_2(w_1) = 0, \quad m_1(z_2) = m_2(w_2) = \infty, \quad m_1(z_3) = m_2(w_3) = 1.$$

Sea $m = m_2^{-1}m_1 \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ envía z_j a w_j para $j = 1, 2, 3$. Por unicidad de m_1 y m_2 , también m es único. \square

El siguiente corolario nos da un criterio para saber cuando es la transformación identidad.

Corolario 1.10.18. *Si $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ fija tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces m es la identidad.*

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3 puntos distintos fijados por $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Como la identidad también los fija, por la unicidad del corolario 1.10.17 tenemos que $m = Id$. \square

1.10.2. Clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$

Ahora, estableceremos una relación de equivalencia sobre el conjunto de elementos conjugados de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ y veremos algunas propiedades a partir de sus puntos fijos y de la traza.

Definición 1.10.19. Sea G un grupo y sean $g, h \in G$, diremos que g es **conjugado** de h , si existe $a \in G$ tal que $g = aha^{-1}$, denotado por $g \sim h$.

Afirmación 1.10.20. *La conjugación es una relación de equivalencia.*

Demostración. 1. \sim es reflexiva, es decir, $g \sim g$.

Sea $g \in G$, pero $g = 1g1^{-1} = 1g1$, por tanto \sim es reflexiva.

2. \sim es simétrica. Sean $g, h \in G$ tal que $g \sim h$, es decir, existe $f \in G$ tal que $g = fhf^{-1}$. Esto equivale a $f^{-1}gf = h$, donde $f = (f^{-1})^{-1}$ así que $h \sim g$.

3. \sim es transitiva, sean $g, h, f \in G$ tales que $g \sim h$ y $h \sim f$, es decir, existen $r, s \in G$ tales que $g = rhr^{-1}$ y $h = sfs^{-1}$. Entonces

$$g = rhr^{-1} = r(sfs^{-1})r^{-1} = (rs)f(rs)^{-1}.$$

Sea $a = rs$ entonces $a \in G$, así que $g \sim f$

Por lo tanto, \sim es una relación de equivalencia. \square

Las clases de equivalencia de la conjugación son llamadas **clases de conjugación**.

Definición 1.10.21. Diremos que z es un **punto fijo** de $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ si $m(z) = z$.

Sea z un punto fijo de $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ y sea $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, notemos que $f(z)$ es un punto fijo de la transformación conjugada de m donde $f \circ m \circ f^{-1} \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

En esta sección consideraremos los puntos fijos y las clases de conjugación de elementos de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, donde cada elemento esta normalizado.

Teorema 1.10.22. *Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ normalizada, de la forma $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Entonces*

- Si $(a+d)^2 \neq 4$, entonces m fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$.
- Si $(a+d)^2 = 4$ y $m \neq \text{Id}$, entonces m tiene un punto fijo en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ normalizada, entonces $m(\infty) = \frac{a}{c}$, tenemos que m fija al ∞ si y sólo si $c = 0$. Por otro lado, si $c \neq 0$, entonces que $z \in \mathbb{C}$ sea un punto fijo de m , equivale a que z sea raíz de la siguiente ecuación :

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Si tiene dos raíces, m fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, a no ser que $(d-a)^2 + 4bc = 0$ en cuyo caso la ecuación tiene una raíz doble y m tendría un punto fijo. Usando que $ad - bc = 1$, tenemos $(a+d)^2 - 4 = 0$. En resumen m tiene un punto fijo si y sólo si $(a+d)^2 = 4$.

Regresando al caso $c = 0$ y m fija al ∞ , tenemos que $ad = 1$ y $m(z) = a^2z + ab$, así tendremos el segundo punto fijo $z = \frac{ab}{(1-a^2)}$ si y sólo si $a^2 \neq 1$ (ó equivalentemente $(a+d)^2 \neq 4$). Cuando $a^2 = 1$ tenemos $m(z) = z \pm b$, así que m es la identidad para $b = 0$ y m tiene un punto fijo, es decir ∞ , si $b \neq 0$. \square

Cabe notar que la traza es importante para determinar las clases de conjugación en $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$.

Dadas $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ arbitrarias de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} r & s \\ t & v \end{pmatrix}$, donde

$$AB = \begin{pmatrix} ar + bt & as + br \\ cr + dt & cs + dv \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ra + cs & rb + sd \\ ta + cv & bt + dv \end{pmatrix},$$

notemos que $tr(AB) = tr(BA)$. Sí B es invertible, entonces:

$$tr(BAB^{-1}) = tr(B^{-1}BA) = tr(A).$$

Tenemos que $\text{tr}(A)$ depende sólo de la clase de conjugación de $A \in GL(2, \mathbb{C})$. Cada transformación de Möbius m es representada por un par de matrices $\pm A$ en $SL(2, \mathbb{C})$, tenemos que $\text{tr}(-A) = -\text{tr}(A)$, así que

$$\text{tr}^2(m) = (\text{tr}(A))^2 = (a + d)^2.$$

La traza de m es una función bien definida que depende sólo de las clases de conjugación de $m \in PSL(2, \mathbb{C})$.

Ejemplo 1.10.23. Sea $T \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, representada por la matriz en $A \in SL(2, \mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix},$$

describiremos sus clases de conjugación en $PSL(2, \mathbb{C})$.

Notemos que

$$\text{tr}^2(T) = \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \lambda + \lambda^{-1} + 2.$$

La clase de conjugación de la identidad es solamente la identidad misma. Cada clase de conjugación de $PSL(2, \mathbb{C})$ es descrita por la selección de un representante. Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, definimos:

$$T_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & \text{si } \lambda \neq 1. \\ z + 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (1.10.8)$$

Teorema 1.10.24. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $m \neq Id$, entonces existe algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $m \sim T_\lambda$, con T_λ definida en la expresión (1.10.8).

Demostración. Primero supongamos que $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tiene sólo un punto fijo z_0 . Por el teorema 1.10.16 existe $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $f(z_0) = \infty$. Entonces $f \circ m \circ f^{-1}$ sólo fija a ∞ , así que $f \circ m \circ f^{-1}(z) = z + t$ para alguna $t \in \mathbb{C} - \{0\}$, esto es, $f \circ m \circ f^{-1} = m_t$ donde m_t es una traslación.

Sea $g = \frac{z}{t}$, entonces $g \circ m_t \circ g^{-1}(z) = z + 1$, así que

$$(g \circ f) \circ m(g \circ f)^{-1} = T_1,$$

entonces, $m \sim T_1$.

Ahora, supongamos que m tiene dos puntos fijos, digamos z_1, z_2 . Por el teorema 1.10.16, existe $h \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $h(z_1) = 0$ y $h(z_2) = \infty$. Entonces $h \circ m \circ h^{-1}$ fija 0 y ∞ . Es fácil ver que $h \circ m \circ h^{-1} = T_\lambda$ con T_λ dada por (1.10.8) para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, es decir, $m \sim T_\lambda$. \square

Para describir completamente las clases de conjugación, nosotros tenemos que determinar T_κ y T_λ .

Teorema 1.10.25. $T_\kappa \sim T_\lambda$ si y sólo si $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \lambda^{-1}$.

Demostración. Sea T_1 , el caso particular de (1.10.8) con $\lambda = 1$, como T_1 fija ∞ , $f \circ T_1 \circ f^{-1}$ fija a $f(\infty)$ para cada $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces T_1 no puede ser el conjugado de cualquier T_λ con $\lambda \neq 1$, ya que sus elementos fijan al 0 y al ∞ .

Ahora, supongamos que T_κ y T_λ son conjugados, donde $\lambda, \kappa \neq 1$. Entonces $\text{tr}^2(T_\kappa) = \text{tr}^2(T_\lambda)$ esto implica que

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2.$$

Por lo tanto, $\kappa = \lambda$ o $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. Para la otra implicación, T_κ es el conjugado de $T_{\frac{1}{\kappa}}$ si $J(z) = \frac{1}{z}$ entonces $J \circ U_{\frac{1}{\kappa}} \circ J^{-1} = U_{\frac{1}{\kappa}}$ \square

Corolario 1.10.26. Sean $m_1, m_2 \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) - \{Id\}$, entonces $m_1 \sim m_2$ si y sólo si $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$.

Demostración. Sólo basta probar que $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$ implica que m_1 y m_2 son conjugados. Supongamos que m_1 y m_2 son conjugados de T_κ y T_λ respectivamente, entonces $tr^2(m_1) = tr^2(m_2)$, implica que $tr^2(T_\kappa) = tr^2(T_\lambda)$, así que $\kappa = \lambda$ o $\kappa\lambda = 1$, es decir, T_κ y T_λ son conjugados. Por lo tanto, m_1 y m_2 son conjugados. \square

1.10.3. Clasificación geométrica de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$

Para finalizar este capítulo, consideraremos la geometría de las transformaciones de Möbius distintas de la Id para clasificarlas.

Como ya mencionamos antes, m no es determinada de manera única por λ , ya que m también es un conjugado de $T_{1/\lambda}$.

Definición 1.10.27. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $m \sim T_\lambda$. Diremos que $\{\lambda, 1/\lambda\}$ es el **múltiplo** de m .

Por el teorema 1.10.25 y por el corolario 1.10.26 tenemos que dos transformaciones de Möbius son conjugadas si y sólo si tienen el mismo múltiplo o sus funciones tr^2 coinciden. Se relacionan estos dos invariantes de la siguiente manera:

$$tr^2(m) = tr^2(T_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2.$$

Así que λ y $1/\lambda$ son raíces de la ecuación cuadrática: $z^2 + (2 - tr^2(m))z + 1 = 0$. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}}) - \{Id\}$ y sea $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$ tenemos los siguientes casos:

1. Diremos que m es una **transformación parabólica**, si m tiene un punto fijo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Por el teorema 1.10.24, m es parabólica si y sólo si $\lambda = 1$.
2. Por otro lado, si tiene dos puntos fijos, con $|\lambda| \neq 1$ y mueve todos los puntos distintos de los fijos. Se despliegan dos casos:
 - a) m es una **transformación hiperbólica** si λ es real y positiva.
 - b) m es una **transformación loxodrómica** en cualquier otro caso del anterior.
3. Si $|\lambda| = 1$ y tiene dos puntos fijos, m es una **transformación elíptica**.

Ahora, m es un conjugado de T_λ si y sólo si $tr^2(m) = tr^2(T_\lambda)$. Tenemos que $tr^2(T_\lambda) = \lambda + \lambda^{-1} + 2$, diremos que:

1. m es **transformación elíptica** si y sólo si $0 \leq tr^2(m) < 4$.
2. m es **transformación parabólica** si y sólo si $tr^2(m) = 4$.
3. m es **transformación hiperbólica** si y sólo si $tr^2(m) > 4$.
4. m es **transformación loxodrómica** si y sólo si $tr^2(m) < 0$ ó $tr^2(m) \notin \mathbb{R}$.

El siguiente teorema caracteriza los elementos de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ que tienen orden finito.

Teorema 1.10.28. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, si $m \neq Id$ tiene orden finito, entonces m es **elíptica**.

Demostración. Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ con $m \neq Id$ de orden finito, es decir, $m^n = Id$. Sea m el conjugado para algún T_λ , así que m^n es el conjugado de T_λ^n para cada entero n , entonces T_λ es de orden finito. Ahora $T_1^n(z) = z + n$, así que T_1 tiene periodo infinito, entonces $\lambda \neq 1$. Con lo cual $T_\lambda^n(z) = \lambda^n z$, propongamos $T_\lambda^s = Id$ donde s es el orden finito de m , entonces también lo es para T_λ , esto que implica $\lambda^s = 1$. Por lo tanto, $|\lambda| = 1$. Entonces m es elíptica. \square

No toda transformación elíptica tiene orden finito. Consideremos $\lambda = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, tenemos que T_λ es elíptica si y sólo si θ no es un múltiplo entero de 2π y T_λ tiene periodo finito si y sólo si θ es un múltiplo racional de 2π . Si θ es un múltiplo irracional de 2π entonces T_λ es una transformación elíptica de orden infinito.

Capítulo 2

Espacio hiperbólico y sus isometrías

En este capítulo iniciaremos con un breve repaso de geometría euclidiana e hiperbólica. Posteriormente describiremos los modelos del espacio hiperbólico y sus grupos de isometrías, explicaremos la relación entre las transformaciones de Möbius y las isometrías del espacio hiperbólico. De manera concreta, introduciremos las 3-variedades hiperbólicas. Después, al igual que en geometría euclidiana, tenemos poliedros en el espacio hiperbólico, analizaremos dichos objetos y los utilizaremos para obtener 3-variedades hiperbólicas.

2.1. Geometría Euclidiana y el quinto postulado

Los elementos de Euclides fue una colección de libros de gran trascendencia para la geometría y datan del año 300 A. C., se conforman de 13 volúmenes de geometría griega y teoría de números. El primer volumen contiene definiciones, nociones básicas y los postulados siguientes:

- I. Es posible trazar una recta de un punto a otro punto.
- II. Cualquier segmento puede ser extendido continuamente en una línea recta.
- III. Es posible trazar una circunferencia dados un centro y un radio.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- V. Si una línea recta corta a otras dos rectas y la suma de los ángulos interiores de un lado es menor a dos ángulos rectos, al prolongar indefinidamente las dos rectas del mismo lado donde la suma de los ángulos interiores es menor a dos ángulos rectos, entonces las rectas que prolongamos se intersectan.

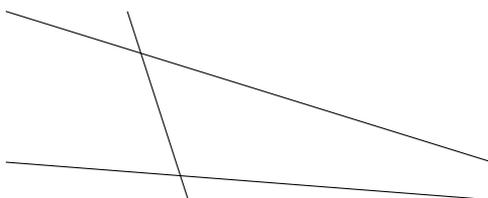


Figura 2.1: Quinto postulado

Los primeros 4 postulados son simples y fáciles de ver, pero el quinto postulado es una afirmación más elaborada, por lo que se buscaron equivalencias más sencillas. La equivalencia más popular fue propuesta por John Playfair llamado el postulado de las paralelas:

“por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse otra paralela a ella”.



Figura 2.2: Postulado de las paralelas

Algunos matemáticos intentaron demostrar si el quinto postulado o alguna de sus equivalencias se podía deducir de los primeros cuatro postulados. Una de las estrategias fue demostrarlo por reducción al absurdo negando el quinto postulado para llegar a alguna contradicción. Sin embargo, nunca se llegó a una contradicción y se construyeron geometrías consistentes, conocidas como geometría hiperbólica y geometría esférica. En estas geometrías el axioma de Play Flair queda de la siguiente manera: En geometría hiperbólica, tal como se muestra en la figura 2.3, el postulado de las paralelas se enuncia de la siguiente manera:

“Sea L una línea y un punto $p \notin L$, existen al menos dos líneas paralelas L_1 y L_2 tal que $p \in L_1$ y $p \in L_2$ ”.



Figura 2.3: Líneas paralelas en geometría hiperbólica

Por otro lado, en geometría esférica el postulado nos dice que, ver la figura 2.4:

“Sean L una línea y $p \notin L$, no existe una línea paralela L_1 tal que $p \in L_1$ ”.

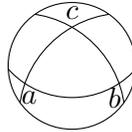


Figura 2.4: Líneas en geometría esférica

2.2. Modelos del espacio hiperbólico

Existen modelos de la geometría hiperbólica, nosotros describiremos sólo dos de ellos que son los necesarios para nuestros fines. Para consultar detalles véase [14], [16] y [13]

2.2.1. Modelo de la bola unitaria

El modelo que presentaremos a continuación es accesible visualmente y comentaremos algunas de sus propiedades.

Definición 2.2.1. El modelo de la **bola unitaria** para el espacio hiperbólico consiste de la bola unitaria \mathbb{B}^3 :

$$\mathbb{B}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| < 1\},$$

dotada con la métrica Riemanniana: Sea $x \in \mathbb{B}^3$, definimos el producto interior de v y w vectores en $T_{\mathbf{x}}\mathbb{B}^3$ por:

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{B}^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{2}{1 - |\mathbf{x}|^2} \right)^2,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ es el producto interior euclidiano.

La cual llamaremos la **métrica hiperbólica** de \mathbb{B}^3 .

Teorema 2.2.2 ([16, Teo. 4.5.1]). *La distancia hiperbólica $ds_{\mathbb{B}^3}$ sobre \mathbb{B}^3 está dada por:*

$$\cosh ds_{\mathbb{B}^3}(x, y) = 1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}.$$

En este modelo las geodésicas son semicírculos ortogonales a la esfera unitaria y diámetros euclidianos. Los planos hiperbólicos son semiesferas ortogonales a la esfera unitaria y planos circulares ortogonales, ver la figura 2.5.

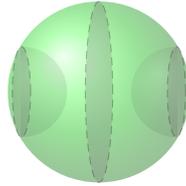


Figura 2.5: Planos hiperbólicos en la bola unitaria

Consideremos los siguientes subconjuntos geométricos de \mathbb{B}^3 :

Definición 2.2.3. Una **horoesfera** Σ de \mathbb{B}^3 basada en $b \in \mathbb{S}^2$ es la intersección de \mathbb{B}^3 con la esfera euclidiana en $\overline{\mathbb{B}^3}$ tangente a \mathbb{S}^2 en b , ver la figura 2.6.

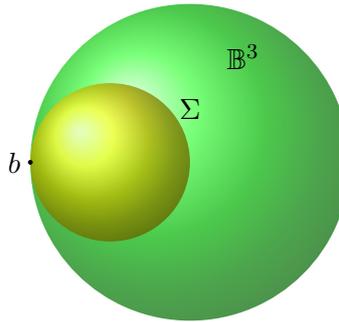


Figura 2.6: Horoesfera Σ en \mathbb{B}^3 basada en b

Definición 2.2.4. Sea Σ una horoesfera de \mathbb{B}^3 , el interior de Σ se llama **horobola**.

2.2.2. Isometrías del modelo de la bola unitaria

Nos interesa ver las isometrías del modelo de la bola unitaria del espacio hiperbólico coincide con las transformaciones de Möbius que preserven \mathbb{B}^3 .

Sea ∞ un punto que no está en \mathbb{R}^3 y definimos $\widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. $\widehat{\mathbb{R}^3}$ se llama la **compactificación por un punto** en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.2.5. La **reflexión** σ de \mathbb{R}^3 en la esfera $S(a, r)$ se define por la formula:

$$\sigma(x) = a + s(x - a),$$

donde s es un escalar positivo tal que $\|\sigma(x) - a\| \|x - a\| = r^2$.

Podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 2.2.6. Una **transformación de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}^3}$ es una composición finita de reflexiones de $\widehat{\mathbb{R}^3}$ en esferas.

Sea $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}^3})$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius que preservan la orientación de $\widehat{\mathbb{R}^3}$. Entonces $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}^3})$ forma un grupo bajo la composición.

Teorema 2.2.7 ([16, Cor. 4.3.2]). *Sea $f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}^3})$, entonces $f(\infty) = \infty$ si y sólo si $f \in S(\mathbb{R}^3)$.*

Dado que $\mathbb{B}^3 \subset \widehat{\mathbb{R}^3}$, definimos:

$$\text{Möb}^+(\mathbb{B}^3) = \{f \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{R}^3}) \mid f(\mathbb{B}^3) = \mathbb{B}^3\}.$$

Los siguientes teoremas describen a las transformaciones de Möbius de \mathbb{B}^3 .

Teorema 2.2.8 ([14, Teo. 1.7]). *El grupo de todos los automorfismos del espacio hiperbólico tal que son isometrías con respecto a la métrica hiperbólica se identifica con $\text{Möb}^+(\mathbb{B}^3)$.*

Teorema 2.2.9 ([16, Teo. 4.4.8]). *Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathbb{B}^3)$, entonces $g(0) = 0$ si y sólo si $g \in SO(3)$.*

2.2.3. Modelo del semiespacio superior

Para entender geoméricamente el siguiente modelo, a continuación mostraremos un conjunto de elementos de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con cierta estructura algebraica y algunas de sus propiedades. Posteriormente, definiremos los objetos geométricos del modelo del semiespacio superior.

La suma de parejas de complejos se define por: para todo $w_1 = (z_1, q_1)$, $w_2 = (z_2, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$w_1 + w_2 = (z_1, q_1) + (z_2, q_2) = (z_1 + z_2, q_1 + q_2).$$

Además, la multiplicación de parejas de complejos se define por:

$$w_1 w_2 = (z_1 z_2 - q_1 \bar{q}_2, z_1 q_2 + q_1 \bar{z}_2), \quad w_1 = (z_1, q_1), \quad w_2 = (z_2, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

El neutro multiplicativo es $(1, 0)$.

Podemos ver a \mathbb{C} como un subcampo de \mathbb{C}^2 identificando a $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si $(z, 0)$. Por lo tanto, escribiremos $z_1 \in \mathbb{C}$ en vez de $(z_1, 0)$. Como

$$(0, z_2) = (z_2, 0)(0, 1) = z_2(0, 1)$$

tenemos que $(z_1, z_2) = z_1 + z_2(0, 1)$ y denotaremos a $(0, 1) = j$, tenemos que $(z_1, z_2) = z_1 + z_2 j$ con $j^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. A \mathbb{C}^2 con esta multiplicación se conoce como los **cuaternios** y se denota por \mathbb{H} .

Tenemos que \mathbb{H} es un grupo con la suma. Algunas propiedades en \mathbb{H} son las siguientes:

1. $j^2 = -1$, $jz = \bar{z}j$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. \mathbb{H} es un anillo.
3. El conjugado de cualquier cuaternio $w = z + qj$ es $\bar{w} = \bar{z} - qj$.
4. $|w|^2 = w\bar{w} = \bar{w}w = z\bar{z} + q\bar{q} = |z|^2 + |q|^2 \geq 0$.
5. Sea $w = z + qj \in \mathbb{H}$ por los incisos 1. y 3. tenemos que

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = (z + qj)^{-1} = (\bar{z} - qj)(|z|^2 + |q|^2)^{-1}.$$

Entonces \mathbb{H} es un anillo con división.

6. En general, todo par de cuaternios no conmuta, excepto si alguno del par de cuaternios es real, es decir, dado $w = (z, q) \in \mathbb{H}$ es real sí $z \in \mathbb{R}$ y $q = 0$.
7. Definimos la unidad $k = ij$.
8. \mathbb{H} es un espacio vectorial real de dimensión 4, ya que para todo $w \in \mathbb{H}$, $w = x_1(1) + x_2(i) + x_3(j) + x_4(k)$ lo podemos identificar con $\mathbf{v} = (x, y, q, p) \in \mathbb{R}^4$. Además, \mathbb{H} tiene por base real $\{1, i, j, k\}$.

Cabe mencionar que los elementos $1, i, j, k$ generan un grupo multiplicativo de orden 8 y las unidades imaginarias satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \\ ji &= -k, & kj &= -i, & ik &= -j. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Definición 2.2.10. El **producto interior** en \mathbb{H} se define por:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2}((w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) - w_1\overline{w_1} - w_2\overline{w_2}) = \frac{1}{2}(w_1\overline{w_2} + w_2\overline{w_1}), \forall w_1, w_2 \in \mathbb{H}.$$

Consideremos el subespacio de dimensión 3 de \mathbb{H} generado por $1, i$ y j , es el siguiente:

$$\mathbb{J} = \{z + qj \in \mathbb{H} \mid q \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{H} \mid ijw = \overline{w}ij\}.$$

Dado que ya describimos a los cuaternios, tenemos que:

Definición 2.2.11. El modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico de dimensión 3 consiste de:

$$\mathbb{U}^3 = \{z + tj \in \mathbb{H} \mid t > 0\},$$

dotado con la métrica Riemanniana: Sea $z + tj \in \mathbb{U}^3$, definimos el producto interior de v y w vectores en $T_{z+tj}\mathbb{U}^3$ dado por:

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{U}^3} = \frac{\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}}{t^2},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ es el producto interior euclidiano. La cual llamaremos la **métrica hiperbólica** de \mathbb{U}^3 .

Teorema 2.2.12 ([16, Teo. 4.6.1]). *La distancia hiperbólica $ds_{\mathbb{U}^3}$ sobre \mathbb{U}^3 está dada por:*

$$\cosh(ds_{\mathbb{U}^3}(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_3y_3}.$$

En este modelo las geodésicas son semicírculos o semilíneas ortogonales a \mathbb{C} , mientras, los planos hiperbólicos son semiesferas ortogonales a \mathbb{C} y semiplanos verticales ortogonales a \mathbb{C} , ver la figura 2.7.

Existe dos tipos de líneas paralelas en \mathbb{U}^3 , dadas de la siguiente manera:

Definición 2.2.13. Sean dos líneas geodésicas L y L' de \mathbb{U}^3 . Diremos que L y L' son **líneas asintóticas** si sólo se intersectan en un punto de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 2.2.14. Sean dos líneas geodésicas L y L' de \mathbb{U}^3 . Diremos que L y L' son **ultraparalelas** si no se intersectan y no son asintóticas.

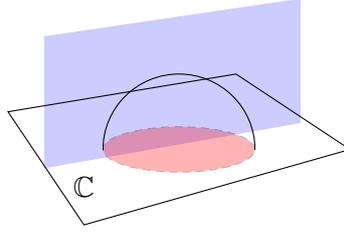


Figura 2.7: Planos hiperbólicos en \mathbb{U}^3

En este capítulo obtendremos variedades Riemannianas hiperbólicas usando el teorema 1.8.41, así que la siguiente observación es fundamental.

Observación 2.2.15. Como \mathbb{U}^3 se puede modelar con un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 por el ejemplo 1.8.7 \mathbb{U}^3 es una variedad diferenciable y por las definiciones 2.2.1 y 2.2.11, tenemos que \mathbb{U}^3 es una variedad Riemanniana, además, \mathbb{U}^3 tiene curvatura seccional constante -1 .

Ahora, veamos algunas de las propiedades de \mathbb{U}^3 .

Observación 2.2.16. El modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico de dimensión 3 es finitamente compacto, ya que \mathbb{U}^3 es modelada en un subespacio abierto de \mathbb{R}^3 .

Observación 2.2.17. El modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico de dimensión 3 es geodésicamente conexo.

Observación 2.2.18. El modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico de dimensión 3 es geodésicamente completo.

2.2.4. Equivalencia de los modelos

Es importante notar que cada uno de los modelos que describimos antes tienen sus respectivas ventajas. Ahora veremos que ambos modelos son isomorfos como variedades Riemannianas.

Teorema 2.2.19. Existe una isometría Riemanniana entre \mathbb{B}^3 y \mathbb{U}^3 .

Demostración. Sean $\pm e_3 = (0, 0, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos:

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbb{R}^n - \{-e_3\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{-e_3\} \\ x &\mapsto 2 \frac{x + e_3}{\|x + e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2} - e_3. \end{aligned}$$

Sean $p_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la 3ra-coordenada y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{-e_3\}$. Entonces $\Pi(\mathbf{x}) \in \mathbb{U}^3$ si y sólo si $p_3(\Pi(\mathbf{x})) > 0$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow p_3 \left(2 \frac{\mathbf{x} + e_3}{\|\mathbf{x} + e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2} - e_3 \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x_3 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{B}^3. \end{aligned}$$

Así que Π restringido a \mathbb{B}^3 a \mathbb{U}^3 es un difeomorfismo.

Ahora veamos que Π es una isometría Riemanniana.

Note que $D\Pi_{\mathbf{x}}$ actúa sobre $T_{\mathbf{x}}\mathbb{B}^3$ por escalamiento por un factor de $\frac{2}{\|\mathbf{x}+e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2}$, entonces reflejando en la dirección de la línea que une \mathbf{x} a $-e_3$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(D\Pi)_{\mathbf{x}}(v)\|_{\mathbb{U}^3} &= \frac{\|(D\Pi)_{\mathbf{x}}(v)\|}{p_3(\Pi(\mathbf{x}))} \\ &= \left(\frac{2\|v\|_{\mathbb{R}^3}}{\|\mathbf{x}+e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2} \right) \left(\frac{2(x_3+1)}{\|x+e_3\|_{\mathbb{R}^3}^2} \right) \\ &= \frac{2\|v\|_{\mathbb{R}^3}}{2x_3+2-(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2)} \\ &= \frac{2\|v\|_{\mathbb{R}^3}}{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2} \\ &= \frac{2\|v\|_{\mathbb{R}^3}}{1-\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^3}^2} \\ &= \|v\|_{\mathbb{B}^3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Π es una isometría Riemanniana. \square

Usando este resultado podemos definir:

Definición 2.2.20. Sea $\Sigma \subset \mathbb{U}^3$, diremos que Σ es una **horoesfera** de \mathbb{U}^3 si y sólo si $\Pi^{-1}(\Sigma)$ es una horoesfera de \mathbb{B}^3 basada en un punto $\Pi^{-1}(b)$.

Observación 2.2.21. La geometría íntinseca de una horoesfera es Euclidiana. Esto se sigue de que cualquier isometría euclidiana actúa sobre una horoesfera extendida por una isometría de \mathbb{U}^3 que la preserva y todas sus horoesferas son horoesferas paralelas, ver [22, Pág. 61].

2.2.5. Isometrías del modelo del semiespacio superior

Para poder ver las isometrías del semiespacio superior, veamos primero que se pueden obtener extendiendo transformaciones de Möbius de $\widehat{\mathbb{C}}$ a \mathbb{U}^3 .

Extensión de Poincaré

Veamos como extender las transformaciones de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ a transformaciones de \mathbb{U}^3 haciendo uso de los cuaternios.

Notemos que $\overline{\mathbb{U}^3} = \mathbb{U}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$. Dada $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ la podemos extender a una transformación $\widehat{m}: \overline{\mathbb{U}^3} \rightarrow \overline{\mathbb{U}^3}$ viendo a \mathbb{U}^3 como subespacio de \mathbb{H} . Sea $m \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ dada por:

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc \neq 0.$$

Sea $z+tj \in \mathbb{U}^3$, definimos:

$$\widehat{m}(z+tj) = [a(z+tj)+b][c(z+tj)+d]^{-1} \quad \text{con} \quad ad-bc=1. \quad (2.2.1)$$

donde el producto es el producto de cuaternios y $m(\infty) = \frac{a(z+tj)}{c(z+tj)}$.

La transformación \widehat{m} es llamada la **extensión de Poincaré** en \mathbb{U}^3 de m .

Observación 2.2.22. Si restringimos a \widehat{m} a los cuaternios de la forma $w = z + 0j$, el resultado es una transformación de Möbius de la forma (1.10.1).

No todas las transformaciones de $\widehat{\mathbb{R}^3}$ dejan invariante al semiespacio superior, pero hay unas que si lo hacen, veamos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.23. *Las transformaciones de Möbius de la forma (2.2.1) dejan fijo el semiespacio superior.*

Demostración. Sea \widehat{m} una transformación de Möbius de la forma (2.2.1) y $w = z + tj \in \widehat{\mathbb{J}}$, entonces:

$$\begin{aligned} m(z + tj) &= [a(z + tj) + b][c(z + tj) + d]^{-1} \\ &= [(az + b) + atj][cz + d + ctj]^{-1}[(\overline{cz + d}) - ctj]^{-1}[(\overline{cz + d}) - ctj] \\ &= \frac{((az + b) + atj)[(\overline{cz + d}) - ctj]}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \\ &= \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) - a\overline{c}t^2 + (ad - bc)tj}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \\ &= \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\overline{c}t^2 + tj}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \end{aligned}$$

Denotemos por $[\widehat{m}(z + tj)]_3$ al coeficiente que acompaña a j en $m(z + tj)$, dado que $w \in \widehat{\mathbb{J}}$ entonces $t > 0$, por consiguiente $[\widehat{m}(z + tj)]_3 > 0$. Por lo tanto, las transformaciones de Möbius de la forma (2.2.1) de $\widehat{\mathbb{J}}$ dejan fijo el semiespacio superior. \square

Definición 2.2.24. Denotaremos por $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ al grupo de transformaciones de la forma (2.2.1) lo llamaremos el grupo de transformaciones de Möbius de \mathbb{U}^3 .

Isometrías de \mathbb{U}^3

Dado que ya vimos la extensión de Poincaré y establecimos la notación del grupo de transformaciones de Möbius de \mathbb{U}^3 , ahora veremos que $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$.

Por el teorema 2.2.23 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.25. *Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$, entonces la restricción de g a \mathbb{U}^3 es una isometría de \mathbb{U}^3 .*

Demostración. Dado que toda $g \in \text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es la extensión de Poincaré de una $g' \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, por el teorema 1.10.14 g es la composición de extensiones de Poincaré de transformaciones elementales de transformaciones de $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, basta probarlo para estas. Usaremos la métrica del teorema 2.2.12 para probar que es una isometría de \mathbb{U}^3 .

1. Supongamos que $g(z + tj) = z + tj + a$ con $a \in \mathbb{C}$. Sean $w_1 = z_1 + t_1 j$ y $w_2 = z_2 + t_2 j$ en \mathbb{U}^3 , entonces,

$$\begin{aligned} \frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3 [g(w_2)]_3} &= \frac{|z_1 + t_1 j + a - z_2 - t_2 j - a|^2}{t_1 t_2} \\ &= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1 t_2}, \end{aligned}$$

entonces, g es una isometría de \mathbb{U}^3 .

2. Si $g(z + tj) = a(z + tj)$ con $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3[g(w_2)]_3} &= \frac{|az_1 + |a|t_1j - (az_2 + |a|t_2j)|^2}{(|a|t_1)(|a|t_2)} \\
&= \frac{|(az_1 - az_2) + (|a|t_1j) - |a|t_2j|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|az_1 - az_2|^2}{|a|^2t_1t_2} + \frac{|a|^2|(t_1j - t_2j)|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|a|^2|z_1 - z_2|^2}{t_1t_2} + \frac{|a|^2|t_1j - t_2j|^2}{|a|^2t_1t_2} \\
&= \frac{|z_1 - z_2|^2}{t_1t_2} + \frac{|t_1j - t_2j|^2}{t_1t_2} \\
&= \frac{|(z_1 - z_2) + (t_1j - t_2j)|^2}{t_1t_2} \\
&= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1t_2},
\end{aligned}$$

por lo tanto, g es un isometría.

3. si g es la anti-inversión, entonces

$$\begin{aligned}
g(z + tj) &= -(z + tj)^{-1} \\
&= -(z + tj)^{-1}(\bar{z} - tj)^{-1}(\bar{z} - tj) \\
&= -[|z|^2 + t^2]^{-1}(\bar{z} - tj) \\
&= \frac{-\bar{z} + tj}{|z|^2 + t^2}.
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$g(z + tj) = -(z + tj)^{-1} = \frac{-\bar{z} + tj}{|z|^2 + t^2}.$$

Para w_1 y w_2 en \mathbb{U}^3 definidos como antes tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{|g(w_1) - g(w_2)|^2}{[g(w_1)]_3[g(w_2)]_3} \\
&= \frac{\left| \frac{-\bar{z}_1 + t_1j}{|z_1|^2 + t_1^2} - \frac{-\bar{z}_2 + t_2j}{|z_2|^2 + t_2^2} \right|^2}{\frac{t_1}{(|z_1|^2 + t_1^2)} \frac{t_2}{(|z_2|^2 + t_2^2)}} \\
&= \frac{|(|z_2|^2 + t_2^2)(-\bar{z}_1 + t_1j) - (|z_1|^2 + t_1^2)(-\bar{z}_2 + t_2j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
&= \frac{|(z_2 + t_2j)(\bar{z}_2 - t_2j)(-\bar{z}_1 + t_1j) - (z_1 + t_1j)(\bar{z}_1 - t_1j)(-\bar{z}_2 + t_2j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
&= \frac{|(\bar{z}_2 - t_2j)(-\bar{z}_1 + t_1j)|^2|(z_2 + t_2j) - (z_1 + t_1j)|^2}{t_1t_2(|z_1|^2 + t_1^2)(|z_2|^2 + t_2^2)} \\
&= \frac{|(z_2 + t_2j) - (z_1 + t_1j)|^2}{t_1t_2} \\
&= \frac{|w_1 - w_2|^2}{t_1t_2}.
\end{aligned}$$

□

Esto nos demuestra que todo elemento de $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es una isometría de \mathbb{U}^3 . A continuación probaremos la otra contención.

Proposición 2.2.26. *Sea g una isometría de \mathbb{U}^3 . Si L y L' son dos geodésicas en \mathbb{U}^3 que se intersectan ortogonalmente, entonces $g(L)$ y $g(L')$ son dos geodésicas que se intersectan ortogonalmente.*

Demostración. Sean L y L' dos geodésicas que se intersectan ortogonalmente en un punto w_1 . Para $w_2 \neq w_1$ un punto en L' , la distancia de w_2 a cualquier punto de L alcanza su mínimo en w_1 , entonces, la distancia de $g(w_2)$ a los puntos de $g(L)$ alcanzan su mínimo en $g(w_1)$. En consecuencia, $g(L')$ debe intersectar ortogonalmente $g(L)$. \square

Sea g una isometría en el semiespacio superior, si w_1, w_2 y w_3 son puntos en \mathbb{U}^3 tal que pertenecen a una geodésica en dicho orden entonces sus imágenes bajo g satisfacen lo siguiente:

$$d_{\mathbb{U}^3}(g(w_1), g(w_2)) + d_{\mathbb{U}^3}(g(w_2), g(w_3)) = d_{\mathbb{U}^3}(g(w_1), g(w_3)).$$

Por lo tanto, deben ser colineales y $g(w_2)$ debe estar entre $g(w_1)$ y $g(w_3)$. Esto implica que g manda geodésicas orientadas en geodésicas orientadas.

Teorema 2.2.27. *Toda isometría de \mathbb{U}^3 que preserva la orientación es una transformación de Möbius de \mathbb{U}^3 que preserva orientación.*

Demostración. Sean L_1, L_2, L_3 geodésicas orientadas en el semiespacio superior mutuamente ortogonales en un punto de intersección w . Si g es una isometría de \mathbb{U}^3 entonces, $g(L_1), g(L_2), g(L_3)$ son mutuamente ortogonales. Entonces, existe una transformación de Möbius f tal que:

$$f(L_1) = g(L_1), \quad f(L_2) = g(L_2), \quad f(L_3) = g(L_3).$$

Tenemos que $f^{-1}g$ deja fijas puntualmente a L_1, L_2, L_3 . Esto prueba que $f^{-1}g$ es la identidad.

Notemos que cualquier geodésica une un punto de L_1 y un punto de L_2 , ambos puntos diferentes de w , están fijos puntualmente bajo $f^{-1}g$, ya que $f^{-1}g$ es una isometría y deja fijos a los puntos de L_1 y L_2 , entonces cualquier geodésica que pasa por w es fija puntualmente por $f^{-1} \circ g$. Por el mismo argumento aplicado a una geodésica arbitraria $L \neq L_3$ que pasa por w y se intersecta con L_2 y L_1 reemplazados por L_3 y la intersección del plano generado por L_3 y L con el plano generado por L_1 y L_2 , respectivamente, implica que $f^{-1}g$ es la identidad en el semiespacio superior. \square

De los teoremas 2.2.25 y 2.2.27, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.28. *El grupo de isometrías de \mathbb{U}^3 bajo la métrica hiperbólica que preservan la orientación es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius que preservan la orientación en \mathbb{U}^3 .*

Más aún, tenemos que:

Teorema 2.2.29. *El grupo $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$.*

Demostración. Por la observación 2.2.22 tenemos que $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es isomorfo a $\text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$. Por el teorema 1.10.10 y la proposición 1.10.13 concluimos que el grupo $\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$ es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$. \square

Además, por la isometría riemanniana entre \mathbb{B}^3 y \mathbb{U}^3 tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.30. Sea $\Pi: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{U}^3$ definida en el teorema 2.2.19, entonces

$$\text{Möb}^+(\mathbb{U}^3) = \Pi \text{Möb}^+(\mathbb{B}^3) \Pi^{-1}.$$

Nos referiremos a cualquiera de estos dos modelos del espacio hiperbólico de dimensión 3 como el **espacio hiperbólico** y lo denotaremos por \mathcal{H}^3 y a su grupo de isometrías que preservan la orientación lo denotaremos por $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3) \cong \text{Möb}^+(\mathbb{B}^3) \cong \text{Möb}^+(\mathbb{U}^3)$. Si necesitamos trabajar en algún modelo específico lo diremos.

2.2.6. $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ visto como grupo topológico

Dado que $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ lo podemos ver como el grupo de isometrías de \mathcal{H}^3 , ahora estudiaremos las topologías que admite y la estructura del mismo.

Consideremos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 , con la topología usual inducida por la métrica euclidiana en \mathbb{R}^3 . Consideremos el conjunto de aplicaciones continuas $C(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$. Como \mathbb{S}^2 es compacta por el ejemplo 1.4.51, el conjunto

$$\{\|f(x) - g(x)\| \mid \text{para toda } x \in \mathbb{S}^2 \text{ y todas } f, g \in C(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)\}$$

es acotado. Por lo tanto, podemos definir la métrica sup en $C(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$, (ver la definición 1.4.58),

$$D_{\mathbb{S}^2}(g_1, g_2) = \sup_{x \in \mathbb{S}^2} \|g_1(x) - g_2(x)\|.$$

También por la compacidad de \mathbb{S}^2 y por el teorema 1.4.61 tenemos que la topología en $C(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ inducida por la métrica $D_{\mathbb{S}^2}$ coincide con la topología compacto abierta. Como $\text{Mob}^+(\hat{\mathbb{C}}) \subset C(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ le damos la topología de subespacio. Por la observación 2.2.22 cada $\hat{g} \in \text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ es la extensión de Poincaré de una $g \in \text{Mob}^+(\hat{\mathbb{C}})$, por lo que podemos definir la métrica en $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ dada por

$$D_{\mathcal{H}^3}(\hat{g}_1, \hat{g}_2) = D_{\mathbb{S}^2}(g_1, g_2).$$

Por la observación 2.2.16 \mathcal{H}^3 es finitamente compacto, por el teorema 1.5.8 $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ es un grupo topológico (también ver [16, Teo. 5.2.6]).

2.2.7. Clasificación de isometrías de \mathcal{H}^3

De manera análoga que en $\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{C}})$, clasificaremos las transformaciones de Möbius de \mathcal{H}^3 y las describiremos brevemente.

Definición 2.2.31. Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$. Diremos que g es un elemento:

1. **Elíptico** si g fija un punto en \mathcal{H}^3 .
2. **Parabólico** si g no fija puntos en \mathcal{H}^3 y fija un único punto de $\hat{\mathbb{C}}$.
3. **Hiperbólico** si g no fija puntos en \mathcal{H}^3 y fija dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$.

De los elementos elípticos de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, tenemos lo siguiente:

Observación 2.2.32. Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ una transformación elíptica, g tiene un eje de rotación en \mathcal{H}^3 y es una geodésica que conecta sus puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$, este eje es fijado puntualmente por g .

Teorema 2.2.33 ([13, Teo 4.15]). Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que todo elemento de G es un elemento elíptico, entonces los elementos de G tienen en común un eje o un punto fijo en \mathcal{H}^3 .

Por otra parte, de las transformaciones parabólicas tenemos lo siguiente:

Definición 2.2.34. Sea $a \in \mathbb{S}^2$ el punto fijo de una transformación parabólica g de \mathbb{B}^3 , el punto a se llama **punto atractor**.

Lema 2.2.35. Sea $a \in \mathbb{C}$ el punto atractor de g una transformación parabólica de \mathcal{H}^3 , si $z + tj \in \overline{\mathcal{H}^3}$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(z + tj) = a.$$

Demostración. Por conjugación en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ supongamos que $a = \infty$ y consideremos a $g(z + tj) = z + tj + b$ con $b \in \mathbb{C}$. Notemos que $|g^m(z + tj)| = |z + tj + mb| \geq |mb| - |z + tj|$ cuando $m \rightarrow \infty$ $|mb| - |z + tj| \rightarrow \infty$ y por lo tanto, $g^m(z + tj) \rightarrow \infty$. \square

El siguiente teorema muestra que las transformaciones parabólicas de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tienen una propiedad relacionada con $I^+(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 2.2.36. Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, g es un elemento parabólico si y sólo si g es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a la extensión de Poincaré de una isometría de \mathbb{R}^2 libre de puntos fijos.

Demostración. \Rightarrow Dado que g es un elemento parabólico, entonces g fija un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos a . Existe $f \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $f(a) = \infty$, entonces $fgf^{-1}(\infty) = \infty$, por el teorema 2.2.7 $fgf^{-1} \in S(\mathbb{R}^2)$. Por los teoremas 1.10.10 y 2.2.29 tenemos que $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3) \cong \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces $fgf^{-1}|_{\mathbb{C}}(z) = z + c$ con $c \in \mathbb{C}$ es una isometría, donde fgf^{-1} no tiene puntos fijos en \mathbb{C} .

\Leftarrow Tenemos que $g = f\bar{h}f^{-1}$ con $h \in I^+(\mathbb{C})$ libre de puntos fijos en \mathbb{C} , entonces $h(z) = z + a$ con $a \in \mathbb{C}$. Dado que los puntos fijos es invariante bajo conjugación tenemos que g fija ∞ , por lo tanto, g es un elemento parabólico. \square

Por último, en el caso de las transformaciones de Möbius hiperbólicas definimos lo siguiente:

Definición 2.2.37. Sea $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3) - \{Id\}$ una transformación hiperbólica. Un **eje de g** es una geodésica L tal que L es invariante bajo g y g actúa en L como una traslación.

Definición 2.2.38. Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ puntos fijos de una transformación hiperbólica h de \mathbb{B}^3 , y sea L el eje de h . Supongamos que h traslada L en dirección de a , el punto a se llama **punto atractor** y b se llama **punto repulsor**.

Tenemos un lema análogo al lema 2.2.35 para transformaciones hiperbólicas.

Lema 2.2.39. Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ los puntos fijos de una transformación hiperbólica h de \mathcal{H}^3 , y sea L el eje de h , si a es el punto atractor de h y $w \in \overline{\mathcal{H}^3}$ con $w \neq b$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h^m(x) = a.$$

Demostración. Por conjugación en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, supongamos que $b = 0$ y $a = \infty$ y consideremos $g(w) = \frac{cw}{c-1}$. Tenemos que $g(w) = c^2w$, como g es hiperbólica por la definición 1.10.27 tenemos que $|c^2| \neq 1$ entonces $|c^2| > 1$ y $|g^m(w)| = |c^{2m}w| = |c^{2m}||w|$. Entonces cuando $m \rightarrow \infty$ tenemos que $g^m(w) \rightarrow \infty$. \square

Para concluir esta sección:

Observación 2.2.40. Si $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ es un elemento parabólico con a como único punto fijo en $\widehat{\mathbb{R}^2}$, por el teorema 2.2.36, g preserva cada horoesfera de \mathcal{H}^3 basada en a .

Dado que todo elemento parabólico sólo fija un punto, entonces g no tiene eje y g no deja superficies invariantes, a menos que sean esferas euclidianas. Todas las horoesferas fijas por una transformación parabólica son tangentes una a otra.

Sea una transformación parabólica con punto fijo $w = \infty$ digamos para $g(z) = z + 1$, tenemos que las horoesferas son planos euclidianos $\{(z, t) \mid t \text{ es constante}\}$ y las horobolas son el semiespacio superior sobre estos planos.

2.3. Conjuntos convexos

Así como en geometría euclidiana tenemos poliedros, en geometría hiperbólica también lo podemos tener. En esta sección introduciremos conceptos básicos y la notación adecuada para describir subconjuntos cerrados, convexos no vacíos de \mathcal{H}^3 .

Sí x, y son puntos distintos de \mathcal{H}^3 , entonces existe un único segmento geodésico en \mathcal{H}^3 que une x a y , denotaremos a este segmento geodésico por $[x, y]$.

Definición 2.3.1. Sea C un subconjunto convexo de \mathcal{H}^3 , diremos que C es **convexo** si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in C$, el segmento geodésico $[x, y]$ está contenido en C .

Observación 2.3.2. De la definición 2.3.1 la intersección arbitraria de subconjuntos convexos de \mathcal{H}^3 es convexo en \mathcal{H}^3 .

Sea C un subconjunto convexo no vacío de \mathcal{H}^3 , tenemos que:

1. La **dimensión** de C está dada por el menor entero m tal que C está contenido en un m -plano de \mathcal{H}^3 .
2. Sí la dimensión de C es m , entonces C está contenido en un m -plano de \mathcal{H}^3 , denotado por $\langle C \rangle$.
3. El **interior** de C es el interior topológico de C en $\langle C \rangle$ y es denotado por C° .
4. La **frontera** de C es la frontera topológica de C en $\langle C \rangle$ y es denotada por ∂C .
5. La **cerradura** de C es la cerradura topológica de C en \mathcal{H}^3 y es denotada por \overline{C} .
Notar que \overline{C} es la unión disjunta de C° y ∂C .

Del inciso 1 afirmamos lo siguiente.

Corolario 2.3.3. Sea C un subconjunto convexo de \mathcal{H}^3 , el m -plano que contiene a C es único.

Demostración. Sea P_1 un m -plano que contiene a C . Por contradicción, supongamos que existe P_2 un m -plano que también contiene a C , notemos que $P_1 \cap P_2$ es una línea L , pero $\dim(L) = m - 1$, lo cual es una contradicción ya que $\dim(C) = m$. \square

Definición 2.3.4. Sea C un subconjunto convexo de \mathcal{H}^3 , un **lado** de C es un subconjunto convexo maximal no vacío de ∂C .

Definición 2.3.5. Sea P un subconjunto cerrado, convexo, no vacío de \mathcal{H}^3 . Diremos que P es un **poliedro convexo** en \mathcal{H}^3 si la colección \mathcal{S} de lados de P es localmente finita en \mathcal{H}^3 .

Ejemplo 2.3.6. Dado que \mathcal{H}^3 es un espacio métrico y por la observación 2.2.16 \mathcal{H}^3 es finitamente compacto, entonces cualquier colección de subconjuntos localmente finita de \mathcal{H}^3 es numerable.

Sea P un poliedro convexo de dimensión 3 en \mathcal{H}^3 . De manera inductiva definiremos una k -cara de P para cada $k = 0, 1, 2, 3$, de la siguiente manera. La única 3-cara de P es P mismo. Supongamos que todas las $(k + 1)$ -caras han sido bien definidas y cada una es un poliedro convexo de dimensión $(k + 1)$ en P . Entonces una k -cara de P es un lado de una $(k + 1)$ -cara de P .

Además, una k -cara de P es un poliedro convexo de dimensión k en \mathcal{H}^3 (ver [16, Teo. 6.3.1, 6.3.4]).

Ejemplo 2.3.7. Una 0-cara de un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 consiste de un conjunto con sólo un punto.

Definición 2.3.8. Sea P un poliedro, un **vértice** de P es un punto en una 0-cara de P .

Geometría de un poliedro convexo

Para describir un ángulo entre los lados de un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , definimos lo siguiente:

Definición 2.3.9. Sean P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , S y T dos lados de P . Diremos que S y T son **adyacentes** si y sólo si:

1. P es un segmento geodésico y S y T son distintas, o
2. P es un polígono en \mathcal{H}^3 y S y T son distintas y asintóticas, o
3. $S \cap T$ es un lado de ambos.

Dado que nos interesa analizar poliedros convexos de \mathcal{H}^3 , una forma será por medio de los ángulos entre sus lados adyacentes.

Definición 2.3.10. Sea P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , el **ángulo diédrico** de P entre lados adyacentes S y T es el número $\theta(S, T)$ definido de la siguiente manera:

1. Si P es un segmento geodésico, entonces $\theta(S, T)$ es cero.
2. Si P es un polígono en \mathcal{H}^3 y S y T son lados distintos y asintóticos, entonces $\theta(S, T)$ es definido como cero.
3. Si $S \cap T$ es un lado de ambos, entonces los 2-planos $\langle S \rangle$ y $\langle T \rangle$ subdividen el m -plano $\langle P \rangle$ en 4 regiones tal que una de las regiones contiene a P , además $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \langle S \cap T \rangle$. Sean x un punto en $S \cap T$ y $\lambda, \mu: \mathbb{R} \rightarrow \langle P \rangle$ son líneas geodésicas tales que:

- a) $\lambda(0) = x\mu(0)$;
- b) λ y μ son normales a $\langle S \rangle$ y $\langle T \rangle$, respectivamente; y
- c) $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ se dirigen lejos del semiespacio superior de $\langle P \rangle$ que contiene a P .

Sea α el ángulo entre λ y μ en el punto x . Claramente α no depende de la elección de x . El ángulo diédrico de P entre S y T se define como el ángulo:

$$\theta(S, T) = \pi - \alpha.$$

El link de un poliedro convexo

Sean un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 y $x \in P$, entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < \pi/2$ y dado que el conjunto de lados de P es una familia localmente finita entonces r es menor que la distancia de x a cualquier lado de P que no contiene a x .

Definición 2.3.11. Sea P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , un **punto ideal** de P es un punto $u \in \bar{P} \cap \mathbb{S}^2$, donde \bar{P} es la cerradura de P en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.3.12. Sea P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , diremos que un lado S de P es **incidente** con un punto ideal u de P si y sólo si u está en la cerradura de S en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.3.13. Sean P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 y u un punto ideal de P . Diremos que u es un **horopunto** si existe una horobola cerrada C de \mathcal{H}^3 basada en u tal que C intersecta sólo los lados de P incidentes con u .

Analicemos la siguiente intersección de P y una horobola cerrada dada de la siguiente manera:

Sea u un horopunto de un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 , entonces existe una horobola cerrada C de \mathcal{H}^3 basada en u tal que C intersecta sólo los lados de P incidentes con u . Sea $\Sigma = \partial C$, el conjunto

$$L(u) = P \cap \Sigma$$

se llama un **link** de u en el poliedro P , ver la figura 2.8.

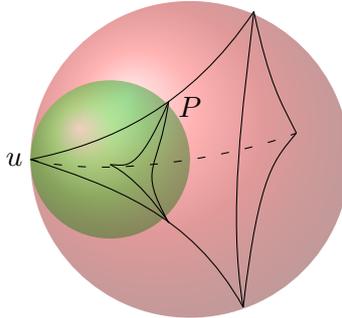


Figura 2.8: Link de un horopunto

La geometría euclidiana del link $L(u)$ es únicamente determinada por u bajo similitudes inducidas por la proyección radial de u .

Para visualizar el link de un horopunto u de un poliedro P en el semiespacio superior \mathcal{H}^3 , si posicionamos a P de modo que $u = \infty$, entonces la proyección vertical $v: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ proyecta $L(u)$ a un poliedro similar en \mathbb{R}^2 que no depende de la elección de la horoesfera Σ tal que $L(u) = P \cap \Sigma$, ver la figura 2.9.

Definición 2.3.14. Sea u un horopunto de un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 . Diremos que u es un **vértice ideal** si su link $L(u)$ es compacto.

2.4. Variedades hiperbólicas

Dado que hasta este punto de la tesis ya tenemos lo necesario, definiremos las variedades claves de nuestro tema.

Definición 2.4.1. Una **3-variedad hiperbólica** es una variedad Riemanniana de dimensión 3 con curvatura seccional constante -1.

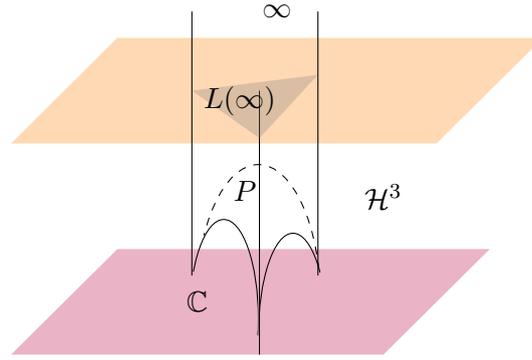


Figura 2.9: $L(v)$ polígono euclidiano

Sea M una 3-variedad hiperbólica completa, conexa, por el teorema 1.8.40 M es isométrica a \mathcal{H}^3/Γ , donde Γ es un grupo de isometrías discreto de \mathcal{H}^3 cuya acción es libre y discontinua en \mathcal{H}^3 .

A M la denotaremos por $M(\Gamma)$ si queremos hacer énfasis en el grupo que está actuando.

Ahora, consideremos \mathcal{H}^3/Γ y Γ un subgrupo de $I^+(\mathcal{H}^3)$ con acción cubriente en \mathcal{H}^3 . Sea $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathcal{H}^3/\Gamma$ dada por $p(w) = \Gamma w$ la aplicación cociente, por la observación 2.2.15 \mathcal{H}^3 es una 3-variedad Riemanniana de curvatura seccional constante -1 y dado que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es cubriente, por el teorema 1.8.41 \mathcal{H}^3/Γ es una 3-variedad Riemanniana de curvatura seccional constante -1 y p es una isometría local. Además, \mathcal{H}^3 es un espacio métrico con la distancia Riemanniana, por el teorema 1.8.38 \mathcal{H}^3/Γ es un espacio completo.

Observación 2.4.2. Dado que \mathcal{H}^3 es conexo, p es suprayectiva y continua por el teorema 1.4.39 \mathcal{H}^3/Γ es un espacio conexo.

Por lo tanto, considerar M una 3-variedad hiperbólica completa, conexa, es lo mismo que \mathcal{H}^3/Γ y Γ un subgrupo de $I^+(\mathcal{H}^3)$ con acción cubriente en \mathcal{H}^3 .

2.5. 3-variedades obtenidas pegando poliedros

Dado que ya describimos poliedros en el espacio hiperbólico, ahora, explicaremos como esta dado el apareamiento de lados de un poliedro, ya que nos interesa obtener una variedad.

En esta sección consideraremos $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^n$ con $n = 2, 3$.

Sean \mathcal{P} una familia finita de poliedros convexos, disjuntos en X y G un grupo de isometrías de X .

Definición 2.5.1. Un G -apareamiento de lados para \mathcal{P} es un subconjunto de G ,

$$\Psi = \{g_S \mid S \in \mathcal{S}\},$$

indexado por la colección \mathcal{S} de todos los lados de los poliedros en \mathcal{P} tal que cada lado S en \mathcal{S} cumple lo siguiente:

1. existe un lado S' en \mathcal{S} tal que $g_S(S') = S$;
2. las isometrías g_S y $g_{S'}$ satisfacen la relación $g_{S'} = g_S^{-1}$ y
3. si S es un lado de P en \mathcal{P} y S' es un lado de P' en \mathcal{P} , entonces $P \cap g_S(P') = S$.

Del inciso 1. tenemos que S' está determinado únicamente por S . El lado S' se llama el **apareamiento** del lado S por Ψ . Del inciso 2. tenemos que $S'' = S$.

Sean $\Pi = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$ y dos puntos $x, x' \in \Pi$, diremos que x, x' están **apareados** por Ψ , sí existe un lado $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S$, $x' \in S'$ y $g_S(x') = x$. Lo denotaremos por $x \simeq x'$. Sí $g_S(x') = x$, entonces $g_{S'}(x) = x'$. Por lo tanto, $x \simeq x'$ si y sólo si $x' \simeq x$.

El apareamiento de puntos de los lados de poliedros en \mathcal{P} por elementos de Ψ genera una relación de equivalencia sobre el conjunto Π .

Diremos que $x, y \in \Pi$, están **relacionados** por Ψ , sí:

1. $x = y$, o
2. existe x_1, \dots, x_m una sucesión de puntos de Π tal que

$$x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m = y.$$

Lo denotaremos por $x \sim y$. Las clases de equivalencia de \sim se llaman los **ciclos** de Ψ .

Si $x \in \Pi$, denotaremos el ciclo de Ψ que contiene a x por $[x]$.

Definición 2.5.2. El **ángulo subtendido** por un poliedro P en X en un punto $x \in P$ es el número real definido por:

$$\omega(P, x) = 2\pi(n-1) \frac{\text{Vol}(P \cap B(x, r))}{\text{Vol}(B(x, r))},$$

donde r es menor que la distancia de x a cualquier lado de P que no contiene a x .

Sea $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ un ciclo finito de Ψ y P_i un poliedro de \mathcal{P} que contiene el punto x_i para cada $i = 1, \dots, m$. La **suma de ángulos** de $[x]$ es un número real definido por:

$$\omega[x] = \omega(P_1, x_1) + \dots + \omega(P_m, x_m).$$

Para $n = 3$, sí x está en el interior de un poliedro de \mathcal{P} , entonces $[x] = \{x\}$ y $\omega[x] = 4\pi$.

Si x está en el interior de un lado S de un poliedro en \mathcal{P} , entonces $x' = g_S^{-1}(x)$ está en el interior de S' y $[x] = \{x, x'\}$. Por lo tanto, $\omega[x] = 2\pi$ o 4π si $x = x'$ o $x \neq x'$ respectivamente.

Suponiendo que x está en el interior de una arista de un poliedro en \mathcal{P} . Entonces cualquier punto de $[x]$ está en el interior de una arista de un poliedro en \mathcal{P} , en este caso, $[x]$ se llama una **ciclo arista** de Ψ . Sea $\theta(P_i, x_i)$ el ángulo diédrico de P_i a lo largo de la arista que contiene a x_i para cada i . La **suma de ángulos diédricos** de la ciclo arista $[x]$ es un número real, definido por:

$$\theta[x] = \theta(P_1, x_1) + \dots + \theta(P_m, x_m).$$

Observemos que $\omega(P, x_i) = 2\theta(P, x_i)$ para cada i , por lo tanto $\omega[x] = 2\theta[x]$.

Definición 2.5.3. Sea Ψ un G -apareamiento de lados para \mathcal{P} , diremos que Ψ es **propio** si y sólo si cada ciclo de Ψ es finito y la suma de ángulos es $2\pi(n-1)$.

Sea Ψ un G -apareamiento de lados propio para \mathcal{P} . Entonces Π es la suma topológica de los poliedros en \mathcal{P} , ya que \mathcal{P} es una familia finita de subconjuntos cerrados disjuntos de X . Antes de continuar, definimos el espacio obtenido de pegar poliedros.

Definición 2.5.4. Sean un G -apareamiento de lados Ψ para \mathcal{P} y M el espacio cociente de Π por los ciclos de Ψ . El espacio M se llama el **espacio obtenido de pegar los poliedros** de \mathcal{P} por Ψ .

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias para obtener una 3-variedad hiperbólica.

Teorema 2.5.5 ([16, Teo. 9.2.2, 10.1.2]). *Sean G un grupo de isometrías de X y M el espacio obtenido por pegar una familia finita \mathcal{P} de poliedros disjuntos en X por un G -apareamiento de lados propio Ψ . Entonces M es una n -variedad euclidiana cuando $X = \mathbb{R}^n$ o hiperbólica cuando $X = \mathcal{H}^n$.*

El teorema anterior nos muestra que basta pedir un G -apareamiento de lados propio para obtener variedades con la geometría de X , ahora, caracterizemos un G -apareamiento de lados propio de poliedros en \mathcal{H}^3 .

Teorema 2.5.6 ([16, Teo. 10.1.3]). *Sean G un grupo de isometrías que preserva la orientación de \mathcal{H}^3 y un G -apareamiento de lados Ψ para un poliedro convexo P de \mathcal{H}^3 . Entonces Ψ es propio si y sólo:*

1. cada ciclo de Ψ es finito;
2. la isometría g_S no fija puntos de S' para cada lado S de P ; y
3. cada ciclo arista de Ψ tiene suma de ángulo sólido diédrico de 2π .

2.5.1. Completez de 3-variedades hiperbólicas

En esta parte nos centraremos en estudiar la condición necesaria y suficiente para obtener una 3-variedad hiperbólica completa.

Sea M una 3-variedad hiperbólica obtenida de pegar una familia finita de poliedros convexos disjuntos de volumen finito \mathcal{P} en \mathcal{H}^3 con un número finito de lados por un $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ -apareamiento de lados propio.

Cada poliedro en \mathcal{P} tiene un número finito de vértices ideales sobre la esfera \mathbb{S}^2 , sin pérdida de generalidad, supongamos que ningún par de poliedros de \mathcal{P} comparten un vértice ideal. Entonces el apareamiento de lados Ψ de los lados \mathcal{S} de los poliedros en \mathcal{P} se extiende a un apareamiento de los vértices ideales de los poliedros en \mathcal{P} , de los cuales genera una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los vértices ideales de los poliedros en \mathcal{P} . Las clases de equivalencias las llamaremos **ciclos**. El ciclo que contiene un vértice ideal v es denotado por $[v]$. Un ciclo de vértices ideales se llama un **punto cúspide** de la variedad M .

Definición 2.5.7. Sean v un vértice ideal de un poliedro P_v en \mathcal{P} y Σ_v una horoesfera basada en v que intersecta sólo las caras en \mathcal{S} incidentes con v . El **link** del vértice ideal v es el conjunto $L(v) = P_v \cap \Sigma_v$.

Notar que $L(v)$ es un polígono euclidiano compacto en la horoesfera con la métrica euclidiana natural de Σ_v , ver la figura 2.9. El tipo de similitud no depende de la elección de la horoesfera Σ_v .

Para cada ciclo $[v]$ de vértices ideales, supongamos que las horoesferas $\{\Sigma_u \mid u \in [v]\}$ han sido elegidas tal que los links $\{L(u) \mid u \in [v]\}$ son disjuntos. Ahora, veamos que Ψ determina un $S(\mathbb{R}^2)$ -apareamiento de lados propio de los polígonos $\{L(u) \mid u \in [v]\}$.

Sea g_S un elemento de Ψ y sean $u, u' \in [v]$ tales que $g_S(u') = u$, entonces $\Sigma_{u'} \cap S'$ es un lado de $L(u')$ y $\Sigma_u \cap S$ es un lado de $L(u)$, ver la figura 2.10. Sea $\bar{g}_S: \Sigma_{u'} \rightarrow g_S(\Sigma_{u'})$ la restricción de g_S . Entonces \bar{g}_S es una isometría con respecto a la métrica euclidiana de las horoesferas $\Sigma_{u'}$ y $g_S(\Sigma_{u'})$, dado que $g_S(\Sigma_{u'})$ es concéntrica a Σ_u tenemos que el segmento de línea $g_S(\Sigma_{u'} \cap S') = g_S(\Sigma_{u'}) \cap S$ es paralelo al segmento de línea $\Sigma_u \cap S$.

Sea $p_S: g_S(\Sigma_{u'}) \rightarrow \Sigma_u$ la proyección radial de $g_S(\Sigma_{u'})$ a Σ_u . Entonces p_S es un cambio de escala con respecto a la métrica euclidiana de $g_S(\Sigma_{u'})$ y Σ_u . Definimos $h_S: \Sigma_{u'} \rightarrow \Sigma_u$ por $h_S = p_S \bar{g}_S$, entonces h_S es una similitud con respecto a las métricas euclidianas de $\Sigma_{u'}$ y Σ_u . Por lo tanto, $\{h_S\}$ es un $S(\mathbb{R}^2)$ -apareamiento de lados propio de polígonos $\{L(u)\}$. Aquí S corre sobre el conjunto de todas los lados en \mathcal{S} incidentes con el ciclo $[v]$.

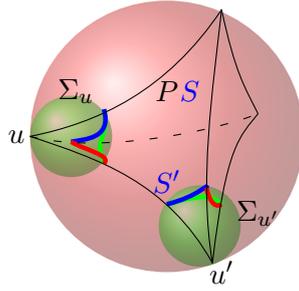


Figura 2.10: Apareamiento de lados

Supongamos que las horoesferas $\{\Sigma_u\}$ han sido elegidas de modo que $p_S = 1$ para el mayor número posible de lados S .

Sea $L[v]$ el espacio obtenido de pegar los polígonos $\{L(u)\}$ por $\{h_S\}$. Por el teorema [16, Teo. 9.2.3] $L[v]$ es una superficie euclidiana. Sea M una 3-variedad hiperbólica obtenida por pegar los poliedros de \mathcal{P} por Ψ , la superficie $L[v]$ se llama **link** del punto cúspide $[v]$ de la 3-variedad hiperbólica M .

El siguiente teorema determina la topología de $L[v]$.

Teorema 2.5.8. *El link $L[v]$ de un punto cúspide $[v]$ de M es un toro.*

Demostración. Tenemos que $L[v]$ es una superficie cerrada, subdividiendo los polígonos, si es necesario, supongamos que todos los polígonos $\{L(u)\}$ son triángulos. Sean v, e, t el número de vértices, aristas y triángulos respectivamente. Dado que cada triángulo tiene 3 aristas y cada lado está acotado por 2 triángulos, tenemos que $3t = 2e$.

Además, se cumple que la suma de los ángulos de todos los triángulos es πt , por otro lado, por el teorema 2.5.6 la suma de los ángulos es $2\pi v$, entonces $\pi t = 2\pi v$, es decir, $t = 2v$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\chi(L[v]) &= v - e + t \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}t + t = 0.\end{aligned}$$

Por la observación 1.8.54 tenemos que $L[v]$ es una superficie cerrada orientable de género 1, o es una superficie no orientable de género 2. Como los elementos de Ψ preservan la orientación, entonces $L[v]$ es orientable. Por lo tanto, $L[v]$ es un toro. \square

La variedad que obtenemos de pegar los links es una 3-variedad hiperbólica por el teorema 2.5.5, los siguientes teoremas caracterizan la completitud de esta 3-variedad hiperbólica.

Teorema 2.5.9 ([16, Teo. 10.2.2]). *El link $L[v]$ de un punto cúspide $[v]$ de M es completo si y sólo si los links $\{L(u)\}$ de los vértices ideales en $[v]$ se pueden elegir de tal manera que se restrinja a Ψ a un apareamiento de lados para $\{L(u)\}$.*

Teorema 2.5.10 ([16, Teo. 10.2.4]). *Sea M una 3-variedad hiperbólica obtenida por pegar una familia \mathcal{P} de poliedros convexos, disjuntos de volumen finito en \mathcal{H}^3 con un número finito de lados por un $I(\mathcal{H}^3)$ -apareamiento de lados Ψ . Entonces M es completa si y sólo si $L[v]$ es completo para cada cúspide $[v]$ de M .*

Observación 2.5.11. Sea M una 3-variedad hiperbólica obtenida de pegar una familia finita de poliedros convexos de volumen finito \mathcal{P} en \mathcal{H}^3 . Por el teorema 2.5.8 el link $L[v]$ de un punto cúspide $[v]$ de M es un toro y por el ejemplo 1.8.37 el toro es completo. Por lo tanto, por el teorema 2.5.10 M es completa.

Ejemplo 2.5.12. El complemento del enlace Whitehead, ver la figura 2.11, es una 3-variedad hiperbólica completa, conexa y de volumen finito obtenida de pegar un octaedro ideal regular ver la figura 2.12. Detalles ver en [16, Pág. 454].



Figura 2.11: Enlace Whitehead

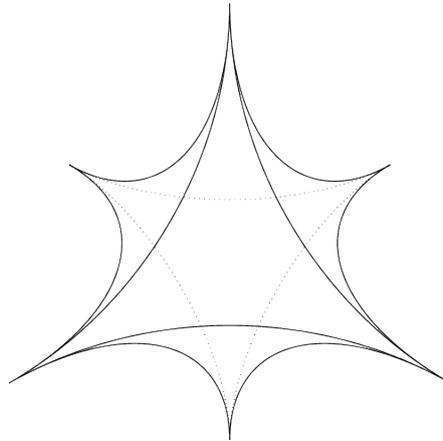


Figura 2.12: Octaedro ideal regular

Capítulo 3

Grupos discretos y su geometría

En el capítulo anterior introducimos las 3-variedades hiperbólicas y vimos que $M(\Gamma)$ una 3-variedad hiperbólica completa, conexa y orientada, por el teorema 1.8.40 es isométrica a \mathcal{H}^3/Γ , donde Γ es un grupo discreto de isometrías de \mathcal{H}^3 que preserva orientación y con acción cubriente en \mathcal{H}^3 . Por lo tanto, nos interesa estudiar estos grupos y como actúan en $\overline{\mathcal{H}^3}$.

El contenido de este capítulo se puede consultar a detalle en [16], [13] y [14].

3.1. Subgrupos de $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ con acción cubriente

El siguiente lema caracteriza a los subgrupos Γ de $\text{Mob}^+(\mathcal{H}^3)$ con acción cubriente en \mathcal{H}^3 de esta forma.

Lema 3.1.1. *Sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La acción de Γ en \mathcal{H}^3 es cubriente.*
2. *Γ actúa libre y discontinuamente en \mathcal{H}^3 .*

Demostración. **1** \Rightarrow **2** Dado que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es cubriente por la observación 1.7.37 Γ actúa libremente. Resta probar que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es discontinua. Por contradicción, supongamos que la acción de Γ no es discontinua en \mathcal{H}^3 , entonces por el lema 1.6.24 existen $K \subset \mathcal{H}^3$ compacto, $\{g_i\}$ una sucesión de elementos distintos entre sí de Γ y $p \in K$ tal que $g_i(p)$ converge a algún $q \in K$.

Dado que $\{g_i\} \subset \Gamma$ es una sucesión de elementos distintos entre sí, entonces $g_i^{-1}g_{i+1} \neq Id$.

Veamos que para cualquier vecindad U de p , se cumple: $g_i^{-1}g_{i+1}U \cap U \neq \emptyset$, esto equivale a probar que para toda vecindad U de p , se satisface que $g_iU \cap g_{i+1}U \neq \emptyset$.

Sea U una vecindad abierta de p , existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{d_{\mathcal{H}^3}}(p, \epsilon) \subset U$, por consiguiente $g_i B_{d_{\mathcal{H}^3}}(p, \epsilon) \subset g_i U$. Sea $i > N_1$ tal que $d_{\mathcal{H}^3}(g_i(p), q) < \epsilon$, es decir, $q \in B_{d_{\mathcal{H}^3}}(g_i(p), \epsilon)$, entonces $q \in g_i U$ para todo $i > N_1$, de manera análoga, tenemos que $q \in g_{i+1} U$ para todo $i > N_2$.

Por lo tanto, $q \in g_i U \cap g_{i+1} U$, para toda U vecindad de p , es decir, para toda vecindad U de p se cumple que $g_i^{-1}g_{i+1}U \cap U \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que la acción de Γ es cubriente en \mathcal{H}^3 . Por lo tanto, la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es discontinua.

2 \Rightarrow **1** Sean $w \in \mathcal{H}^3$ un punto cualquiera y $\overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(w, r)}$ la bola cerrada con centro w y radio r .

Dado que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es discontinua, entonces $\Gamma_{\overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r)}}$ tiene un número finito de elementos, por consiguiente, el conjunto $\Gamma_{\overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r)}} - \{Id\}$ tiene un número finito

de elementos. Dado que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es libre entonces todo elemento de $\Gamma \overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x,r)} - \{Id\}$ satisface que $gw \neq w$ para todo $w \in \mathcal{H}^3$.

Consideremos

$$r' = \min\left\{\frac{d_{\mathcal{H}^3}(w, g(w))}{3} \mid g \in \Gamma \overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x,r)} - \{Id\}, \forall w \in \mathcal{H}^3\right\},$$

tenemos que

$$\overline{gB_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r')} \cap \overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r')} = \emptyset$$

para cualquier $g \in \Gamma - \{Id\}$, así que sólo basta tomar el interior de $\overline{B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r')}$, por lo tanto, la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es cubriente. \square

Por el lema anterior, los subgrupos que nos interesa estudiar son los que actúan libre y discontinuamente en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, a continuación probaremos equivalencias a tales acciones. Antes, aclararemos lo siguiente: sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, diremos que Γ es un subgrupo **discreto**, si la topología de Γ inducida por la topología de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ es discreta.

Proposición 3.1.2. *Sea Γ un grupo de transformaciones de Möbius de \mathcal{H}^3 , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Γ es discreto.
2. No existe una sucesión infinita de elementos distintos de Γ que converge a la identidad.
3. Ninguna sucesión infinita de elementos distintos de Γ convergen a una transformación de Möbius.
4. Γ actúa discontinuamente sobre \mathcal{H}^3 .

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Supongamos que Γ es discreto, entonces existe V una vecindad abierta de Id en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $V \cap \Gamma = Id$. Por contradicción, supongamos que existe $\{g_n\} \subset \Gamma$ una sucesión infinita de elementos distintos tal que $\{g_n\}$ converge a Id , es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_n \in B_{D_{\mathcal{H}^3}}(Id, \epsilon)$ para cualquier $n \geq N$, lo cual es una contradicción, ya que Γ es discreto.

2. \Rightarrow **1.** Por el lema 1.5.10 basta demostrar que existe $B_{D_{\mathcal{H}^3}}(Id, \epsilon) \subset \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que

$$B_{D_{\mathcal{H}^3}}(Id, \epsilon) \cap \Gamma = Id.$$

Por contradicción, supongamos que para cualquier $\epsilon > 0$,

$$B_{D_{\mathcal{H}^3}}(Id, \epsilon) \cap (\Gamma - \{Id\}) \neq \emptyset.$$

sea $g_n \in B_{D_{\mathcal{H}^3}}(Id, 1/n) \cap (\Gamma - \{Id\})$. Sean $\epsilon' > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon'$, entonces

$$D_{\mathcal{H}^3}(g_n, Id) = 1/n < 1/N < \epsilon' \quad \text{para toda } n \geq N,$$

es decir, $\{g_n\}$ converge a la Id .

2. \Rightarrow **3.** Por contradicción, supongamos que existe $\{g_n\}$ una sucesión de elementos distintos entre sí de Γ tal que $\{g_n\}$ converge a alguna transformación de Möbius g . Dado que Γ es subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, Γ hereda la estructura de grupo y la topología de subespacio de la topología inducida por la métrica $D_{\mathcal{H}^3}$ de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$. Consideremos la traslación izquierda por g^{-1} , definida por:

$$\begin{aligned} L_{g^{-1}}: \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ g' &\mapsto g^{-1}g' \end{aligned}$$

es un homeomorfismo, por el lema 1.3.31 dado que $\{g_n\} \subset \Gamma$ es una sucesión de elementos distintos entre sí tal que g_n converge a g tenemos que $L_{g^{-1}}(g_n) = g^{-1}g_n$ converge a $L_{g^{-1}}(g) = g^{-1}g = Id$, lo cual contradice el inciso 2. Por lo tanto, se cumple 3.

3. \Rightarrow **2.** Es claro, dado que el inciso 2. es un caso particular del inciso 3.

4. \Rightarrow **1.** Sea $x \in \mathcal{H}^3$, por el lema 1.6.25 el $Stab(x)$ es finito y por el lema 1.6.26 Γx es un subconjunto cerrado discreto en \mathcal{H}^3 .

Sea la aplicación evaluación:

$$\begin{aligned} e_x: \Gamma &\rightarrow \Gamma x \\ g &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.4.63 la aplicación evaluación es continua, entonces para cualquier $x \in \Gamma x$, $e^{-1}(\{x\}) = \{g \in \Gamma \mid gx = x\} = Stab(x)$ es un abierto de Γ . Definamos el conjunto:

$$A = (Stab(x))^C \bigcup_{g \in (Stab(x) - \{Id\})} \{g\}.$$

Tenemos que $(Stab(x))^C$ es cerrado, el elemento $Id \notin (Stab(x))^C$ y $Stab(x)$ es finito, por el inciso 3. del teorema 1.4.16 A es cerrado en Γ . Por lo tanto, $A^C = \{Id\}$ es un abierto en Γ y por el lema 1.5.10 Γ es un grupo discreto.

1. \Rightarrow **4.** Por contradicción, supongamos que Γ no actúa discontinuamente en \mathcal{H}^3 , por el lema 1.6.24 existen $K \subset \mathcal{H}^3$ compacto, $y \in \mathcal{H}^3$ y $\{g_i\}$ una sucesión de elementos distintos de Γ tal que $g_i y$ converge a algún $p \in K$. Denotemos por $S = \{g_i\}$.

Dado que Γ es discreto, tenemos que S es cerrado en Γ , por el lema 1.5.11, Γ es cerrado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$. Además, dado que \mathcal{H}^3 es finitamente compacto, por el teorema 1.4.64 $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ es cerrado en $\mathcal{C}(\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3)$, entonces S es cerrado en $\mathcal{C}(\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3)$.

Usaremos el teorema 1.4.66 para ver que S es compacto, primero veamos que S es equicontinuo, recordar la definición de equicontinuo 1.4.65. Como g_i es una isometría, para todo $x \in \mathcal{H}^3$, $r > 0$ y para toda i tenemos que:

$$g_i(B_{d_{\mathcal{H}^3}}(x, r)) \subset B_{d_{\mathcal{H}^3}}(g(x), \epsilon).$$

Ahora, veamos que $\eta_x = \{g_i(x) \mid g_i \in S\}$ tiene cerradura compacta para cada $x \in \mathcal{H}^3$.

Sea $x \in \mathcal{H}^3$ arbitrario, $e_x: \Gamma \rightarrow \Gamma x$ la aplicación evaluación en x , $e(S) = \{g_i x\} = \eta_x$. Como $\overline{\{g_i x\}}$ es cerrado, por el teorema 1.4.18 $y \in \overline{\{g_i x\}}$, entonces por el lema 1.4.44 $\{g_i(x)\}$ es compacto. Por lo tanto, por el teorema 1.4.66 S tiene cerradura compacta en $\mathcal{C}(\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3)$ y dado que S es cerrado en $\mathcal{C}(\mathcal{H}^3, \mathcal{H}^3)$, tenemos que $\bar{S} = S$.

Además, dado que $S \subset \Gamma$ y por hipótesis Γ es un grupo discreto, entonces S es un subconjunto discreto bajo la topología de subespacio de Γ , donde Γ es un subgrupo del espacio métrico $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, por el lema 1.4.53 S es finito, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Γ actúa discontinuamente en \mathcal{H}^3 . \square

No sólo hay una equivalencia entre la acción cubriente y la discretez de un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, sino también entre la acción libre y la propiedad libre de torsión.

Teorema 3.1.3. *Sea Γ un grupo discreto de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$. Entonces Γ actúa libremente en \mathcal{H}^3 si y sólo si Γ es libre de torsión.*

Demostración. Supongamos que Γ actúa libremente en \mathcal{H}^3 , esto equivale a decir que no hay puntos fijos en \mathcal{H}^3 , entonces cualquier $g \in \Gamma - \{Id\}$ es un elemento elíptico, parabólico o hiperbólico, por la definición 2.2.31 los únicos elementos que fijan puntos en \mathcal{H}^3 son los elementos elípticos. Por el teorema 1.10.28 los elementos de Γ de orden finito son elementos elípticos, por lo tanto, Γ es libre de torsión.

Ahora, supongamos que Γ es libre de torsión, dado que Γ es discreto por la proposición 3.1.2 tenemos Γ actúa discontinuamente en \mathcal{H}^3 . Por el lema 1.6.25, $Stab(x)$ es finito para cada $x \in \mathcal{H}^3$, como Γ es libre de torsión entonces $Stab(x) = \{Id\}$ para cada $x \in \mathcal{H}^3$. Por lo tanto, Γ actúa libremente en \mathcal{H}^3 . \square

Por lo tanto, si Γ es un subgrupo de $I(\mathcal{H}^3)$ cuya acción es de espacio cubriente en \mathcal{H}^3 equivale a que Γ sea un subgrupo discreto libre de torsión de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$.

A continuación, para ser más específicos introduciremos el siguiente concepto.

Definición 3.1.4. Sea Γ un subgrupo discreto de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$, Γ se llama **grupo kleiniano**.

3.2. Grupos discretos elementales

La clase de grupos de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$ que a continuación estudiaremos, los clasificaremos de acuerdo al conjunto de puntos que fijan.

Definición 3.2.1. Sea G un subgrupo de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$, G es **elemental** si y sólo si G fija:

1. un punto en \mathcal{H}^3 , lo llamaremos **grupo elemental elíptico**; o
2. un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, lo llamaremos **grupo elemental parabólico**; o
3. un conjunto formado por dos puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$, lo llamaremos **grupo elemental hiperbólico**.

En general, basta con que cumpla una condición para decir que un grupo es elemental.

Teorema 3.2.2. Sea $G \leq Möb^+(\mathcal{H}^3)$, G tiene una órbita finita en $\overline{\mathcal{H}^3}$ si y sólo si G es un grupo elemental.

Demostración. \Rightarrow Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la órbita finita. Sea $g \in G$ entonces los puntos $g^m(x_i)$ con $m = 0, 1, 2, \dots$ no pueden ser todos distintos, por lo tanto existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $g^{m_j}(x_j) = x_j$.

Sea $m = m_1 m_2 \dots m_j$, entonces $g^m(x_j) = x_j$, $j = 1, \dots, n$. Por casos:

Caso 1a: $x_j \in \mathcal{H}^3$ con $j = 1, \dots, n$, tenemos que g^m fija a $x_j \in \mathcal{H}^3$, por lo tanto, g^m y por consiguiente g es elíptica o Id . Entonces G consiste de elementos elípticos, por el teorema 2.2.33 G fija un punto en \mathcal{H}^3 , por lo tanto G es un grupo elemental elíptico.

Caso 1b: $x_j \in \widehat{\mathbb{C}}$, $j = 1, \dots, n$ con $n \geq 3$, entonces g^m fija al menos 3 puntos, por lo tanto $g^m = Id$, tenemos que g tiene orden finito por el teorema 1.10.28 g es un elemento elíptico, por lo tanto G tiene elementos elípticos e Id y por el teorema 2.2.33 G fija un punto en \mathcal{H}^3 , es decir, G es un grupo elemental elíptico.

Caso 2: Supongamos que $n = 1$, $x \in \widehat{\mathbb{C}}$, por lo tanto, G es un grupo elemental parabólico.

Caso 3: Supongamos que $n = 2$, $x_1, x_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces G es conjugado a un subgrupo de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$ tal que todo elemento deja invariante a $\{0, \infty\}$, por lo tanto, son de la forma $z \mapsto az$ o $z \mapsto a\frac{1}{z}$. Por lo tanto, G es un grupo elemental hiperbólico.

\Leftarrow Sí G es elemental obviamente tiene una órbita finita. \square

A continuación haremos un análisis a la clasificación de los grupos elementales.

3.2.1. Grupos elementales elípticos

A continuación estudiaremos los subgrupos de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ que fijan un punto en \mathcal{H}^3 .

Teorema 3.2.3. *Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es un grupo elemental elíptico.
2. G es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo de $SO(3)$.

Demostración. Veamos a \mathcal{H}^3 en el modelo de la bola unitaria.

1. \Rightarrow 2. Por hipótesis G fija un punto $a \in \mathcal{H}^3$, existe $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $g(0) = a$, por lo tanto $g^{-1}Gg$ fija a 0. Entonces por el teorema 2.2.9 $g^{-1}Gg$ es un subgrupo de $SO(3)$, por lo tanto, G es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo de $SO(3)$.

2. \Rightarrow 1. Supongamos que existe $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $g^{-1}Gg$ es un subgrupo de $SO(3)$ y por el teorema 2.2.9 $g^{-1}Gg$ fija 0, por consiguiente G fija al $g(0)$. Por lo tanto, G es un grupo elemental elíptico. \square

Teorema 3.2.4. *Sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Γ es finito.
2. Γ es un grupo kleiniano elemental elíptico.
3. Γ es conjugado a un subgrupo finito de $SO(3)$.

Demostración. **1. \Rightarrow 2.** Dado que Γ es finito, entonces por el teorema 1.10.28 todos los elementos de Γ son elementos elípticos e Id y por la definición 2.2.31 cada elemento de Γ fija un punto en \mathcal{H}^3 . Por el teorema 2.2.33 los elementos de Γ fijan un punto en común en \mathcal{H}^3 , entonces Γ es un grupo elemental elíptico.

Dado que $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ es un grupo topológico bajo la topología inducida por la métrica $D_{\mathcal{H}^3}$ y Γ es un subgrupo finito de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, por lo tanto, por la proposición 1.5.12 Γ es kleiniano.

2. \Rightarrow 3. Existe $g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $g^{-1}\Gamma g \leq SO(3)$, donde $SO(3)$ es compacto por el corolario 1.5.21. Dado que Γ es kleiniano, entonces $g^{-1}\Gamma g$ es kleiniano y por el corolario 1.5.13 tenemos que $g^{-1}\Gamma g$ es finito. Por lo tanto Γ es finito.

3. \Rightarrow 1. Dado que Γ es conjugado a un subgrupo finito de $SO(3)$, entonces Γ es finito. \square

Sabemos que toda $g \in \text{Möb}^+(\widehat{\mathbb{C}})$ de orden finito por el teorema 1.10.28 es elíptica. Considerando el caso un poco más general, el recíproco se cumple para un grupo kleiniano Γ formado por sólo elípticas.

Lema 3.2.5. *Sea Γ un grupo kleiniano de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, si Γ está formado sólo por elementos elípticos, entonces Γ es finito.*

Demostración. Por el teorema 2.2.33 los elementos de Γ tienen un punto fijo en común en \mathcal{H}^3 , por consiguiente, Γ es un grupo elemental elíptico. Dado que Γ es kleiniano por el teorema 3.2.4 Γ es finito. \square

Observación 3.2.6. Dado que los elementos parabólicos e hiperbólicos fijan puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, tenemos que todo grupo elemental elíptico esta formado por elementos elípticos e Id .

Por el teorema 3.2.4 si Γ es finito entonces Γ es conjugado a un subgrupo finito de rotaciones de $SO(3)$ y por lo tanto, a un grupo de simetrías de sólidos regulares que preservan la orientación.

Teorema 3.2.7 ([13, Lema 2.3.1]). *Sea Γ un subgrupo infinito de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$. Si $g_1 \in \Gamma$ es un elemento elíptico de orden que excede 6 y $g_2 \in \Gamma$ tiene exactamente un punto fijo en común con g_1 , entonces Γ no es discreto.*

3.2.2. Grupos elementales parabólicos

El grupo elemental que estudiaremos ahora será una herramienta importante para pasos posteriores. Además, hay una ventaja de trabajar en \mathbb{U}^3 y la razón es porque es fácil ver que el $Stab(\infty)$ es isomorfo al grupo $S(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 3.2.8. *Sea G un subgrupo elemental de $Möb^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es un grupo elemental parabólico.
2. G es conjugado en $Möb^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)$ que no fija ningún punto en \mathbb{R}^2 .

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Supongamos que G es un grupo elemental parabólico, entonces G fija un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos $w \in \widehat{\mathbb{C}}$. Por conjugación, sea $g \in Möb^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $g(\infty) = w$, entonces $g^{-1}Gg$ fija a $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, sea $f \in g^{-1}Gg$, por la observación 2.2.22 tenemos que $f|_{\widehat{\mathbb{C}}} \in Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$, entonces $f|_{\widehat{\mathbb{C}}}$ es una función biyectiva. Por consiguiente, $f|_{\mathbb{C}}$ no fija al ∞ , además, es de la forma $f(z) = \frac{az+b}{d}$ y su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

donde $\det(A) = ad = 1$. Entonces $d = \frac{1}{a}$, tenemos que

$$f(z) = \frac{az+b}{\frac{1}{a}} = a^2z + ba.$$

Sean $r = a^2, s = ba \in \mathbb{C}$, $r = x_1 + y_1i$, $z = x_2 + y_2i$. Entonces

$$f(z) = a^2z + ba = rz + s = x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2 + s. \quad (3.2.1)$$

Donde rz lo podemos identificar con

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{sea } B = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$BB^t = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + y_1^2)I,$$

donde I es la matriz identidad y $|r|^2 = x_1^2 + y_1^2$. Consideremos $A = \frac{1}{|r|}B$, notemos que $AA^t = (\frac{1}{|r|}B)(\frac{1}{|r|}B^t) = \frac{1}{|r|^2}|r|^2I$, sustituimos en la transformación (3.2.1), tenemos que:

$$f(z) = s + B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = s + |r|A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

entonces $f \in S(\mathbb{R}^2)$, por lo tanto $g^{-1}Gg \leq S(\mathbb{R}^2)$.

2. \Rightarrow **1.** Existe $g \in Möb^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $g^{-1}Gg$ es un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)$. Sea $h \in g^{-1}Gg$, donde $h: \overline{\mathcal{H}^3} \rightarrow \overline{\mathcal{H}^3}$, entonces $h|_{\widehat{\mathbb{C}}}: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ donde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ por hipótesis h no fija puntos en \mathbb{R}^2 , por consiguiente, h fija $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, G es un grupo elemental parabólico. \square

El siguiente resultado nos muestra un caso donde obtenemos un subgrupo que no es kleiniano.

Teorema 3.2.9. Sean $f, g \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ con g un elemento hiperbólico. Si f y g tienen un punto fijo en común, entonces $\langle f, g \rangle$ no es kleiniano.

Demostración. Por conjugación en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ digamos que f, g fijan a ∞ , dado que $f, g: \overline{\mathcal{H}^3} \rightarrow \overline{\mathcal{H}^3}$, donde $\overline{\mathcal{H}^3} = \mathcal{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $f|_{\mathbb{R}^2}, g|_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir, $f, g \in S(\mathbb{R}^2)$.

Dado que g es un elemento hiperbólico, g fija dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, por conjugación en $S(\mathbb{R}^2)$, supongamos que g fija a 0. Dado que $f, g \in S(\mathbb{R}^2)$ y $g(0) = 0$ entonces por el teorema 1.3.17 existen $r, s \in \mathbb{R}^+$, $A, B \in O(2)$, $a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ tales que

$$f(x) = a + rAx, \quad g(x) = sBx.$$

Reemplazando g por g^{-1} si es necesario, supongamos que $0 < s < 1$, dado que:

$$g^m(x) = s^m B^m x, \quad g^{-1}(x) = s^{-1} B^{-1} x, \quad g^{-m}(x) = s^{-m} B^{-m} x,$$

para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} g^m f g^{-m}(x) &= g^m f(s^{-m} B^{-m} x) \\ &= g^m(a + rA s^{-m} B^{-m} x) \\ &= s^m B^m(a + rA s^{-m} B^{-m} x) \\ &= s^m B^m a + r s^m B^m s^{-m} A B^{-m} x \\ &= s^m B^m a + r B^m A B^{-m} x \end{aligned}$$

Los elementos de la sucesión $\{g^m f g^{-m}\} \subset \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ son distintos entre sí, ya que $g^m f g^{-m}(0) = s^m B^m a$ con $a \neq 0$.

Por el corolario 1.5.20 tenemos que $O(2)$ es compacto, entonces la sucesión $\{B^m A B^{-m}\}$ admite una subsucesión convergente, digamos $\{B^{m_j} A B^{-m_j}\}$, donde $B^{m_j} A B^{-m_j}$ converge a algún $C \in O(2)$.

Sea

$$\begin{aligned} \tau_m: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto x + s^m B^m a \end{aligned}$$

una traslación de \mathbb{R}^2 por $s^m B^m a$, dado que $\{s^m B^m a\}$ es una colección de elementos distintos entre sí para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{\tau_m\} \subset T(\mathbb{R}^2)$ es una sucesión de elementos distintos entre sí.

Dado que $\{s^m\}$ es una sucesión en \mathbb{R}^+ , donde s^m converge a 0 cuando m tiende a ∞ , entonces la sucesión $\tau_m(x) = x$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces τ_m converge a Id .

Además, $g^m f g^{-m} = \tau_m(r B^m A B^{-m})$, dado que τ_m converge a la Id , entonces $g^{m_j} f g^{-m_j}$ converge a rC . Por lo tanto, $\langle f, g \rangle$ no es kleiniano. \square

Teorema 3.2.10. Sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Γ es un grupo kleiniano elemental parabólico.
2. Γ es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo discreto infinito de $T(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Dado que Γ es un grupo elemental parabólico entonces por conjugación supongamos que Γ fija ∞ . Por el teorema 3.2.8 Γ es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)$ que no fija ningún punto en \mathbb{R}^2 , entonces existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}\Gamma h \leq S(\mathbb{R}^2)$

Sí $h^{-1}\Gamma h$ tiene al menos un elemento hiperbólico, digamos g , por conjugación supongamos que g fija a ∞ , para cada $f \in h^{-1}\Gamma h$ por el teorema 3.2.9, $\langle f, g \rangle$ no es kleiniano, pero

$\langle f, g \rangle \leq h^{-1}\Gamma h$, esto contradice que $h^{-1}\Gamma h$ es kleiniano, por lo tanto, Γ no tiene elementos hiperbólicos.

Sea $g \in h^{-1}\Gamma h \leq S(\mathbb{R}^2)$, g es una transformación parabólica que fija ∞ y que es la forma $g(z) = a^2z + ab$. La matriz asociada a g es la siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

donde $\text{tr}(B) = (a + a^{-1})^2 = 4$, tenemos que $a^4 + 1 - 2a^2 = 0$ con solución $a = \pm 1$, entonces, $g(z) = z + s$ donde $s = \pm b$. Por lo tanto, $g \in T(\mathbb{R}^2)$, es decir, $h^{-1}\Gamma h$ es un subgrupo de $T(\mathbb{R}^2)$.

Ahora, veamos que Γ es infinito, por contradicción, supongamos que Γ es finito, entonces por el teorema 3.2.4 Γ es un grupo elemental elíptico, lo cual no puede ser dado que Γ es un grupo elemental parabólico. Por lo tanto, Γ es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo infinito discreto de $T(\mathbb{R}^2)$.

2. \Rightarrow 1. Por hipótesis, existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}\Gamma h \leq T(\mathbb{R}^2)$ infinito, para ver que Γ es un grupo elemental parabólico aplicaremos el teorema 3.2.8. Por contradicción, supongamos que $h^{-1}\Gamma h$ fija un punto de \mathbb{R}^2 . Por conjugación en $T(\mathbb{R}^2)$, supongamos que $h^{-1}\Gamma h$ fija a 0, por el teorema 1.3.12 todo elemento de $g \in h^{-1}\Gamma h, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma $g(x) = Ax$ donde $A \in SO(2)$ y $a = 0 = g(0)$, concluimos que $h^{-1}\Gamma h$ es un subgrupo de $SO(2)$.

Por el ejemplo 1.5.17 sabemos que $O(2)$ es un grupo topológico, además, por el ejemplo 1.3.6 es un espacio métrico con la métrica euclidiana, dado que $SO(2) \leq O(2)$, entonces $SO(2)$ es un grupo topológico con topología inducida por la métrica euclidiana. Además, por el corolario 1.5.21 tenemos que $SO(2)$ es compacto, dado que Γ es kleiniano, $h^{-1}\Gamma h$ es kleiniano, por lo tanto, por el corolario 1.5.13 tenemos que $h^{-1}\Gamma h$ es finito, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, Γ no fija ningún punto en \mathbb{R}^2 , además, dado que Γ es conjugado a un subgrupo de $T(\mathbb{R}^2) \leq S(\mathbb{R}^2)$, por el teorema 3.2.8, concluimos que Γ es un grupo elemental parabólico. \square

3.2.3. Grupos elementales hiperbólicos

El siguiente tipo de grupo elemental fija un conjunto formado por dos puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$, pero se caracteriza con propiedades más elaboradas.

Antes definamos y denotemos lo siguiente:

El conjunto de todas las transformaciones de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ que dejan invariante a $\{0, \infty\}$, lo denotaremos por $S(\mathbb{R}^2)_*$.

El subconjunto de todas las similitudes que fijan 0 y ∞ , lo denotaremos por $S(\mathbb{R}^2)_0$.

Notar que:

1. $S(\mathbb{R}^2)_0 \subset S(\mathbb{R}^2)_*$.
2. $S(\mathbb{R}^2)_*$ es grupo y $S(\mathbb{R}^2)_0 \leq S(\mathbb{R}^2)_*$.
3. Se puede identificar $S(\mathbb{R}^2)_*$ con el subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ cuyos elementos dejan invariante a $\{0, \infty\}$.

Teorema 3.2.11. *Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es un grupo elemental hiperbólico.
2. G es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)_*$ que no fija puntos del eje t .

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Tenemos que G fija un conjunto de 2 puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$. Por conjugación, sea $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h(\infty) = a$ y $h(0) = b$, entonces $h^{-1}Gh$ fija a $0, \infty$, por consiguiente $h^{-1}Gh \leq S(\mathbb{R}^2)_*$, además, $h^{-1}Gh$ no fija puntos en el eje t .

2. \Rightarrow **1.** Dado que G no fija puntos en t , entonces por conjugación existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}Gh \leq S(\mathbb{R}^2)_0$, entonces G fija a 0 y ∞ o $\{0, \infty\}$ es una órbita, por consiguiente G no es un grupo elemental parabólico. Por contradicción, supongamos que G es un grupo elemental elíptico, dado que G fija a ambos 0 y ∞ , entonces G fija al eje t , lo cual es una contradicción, ya que $h^{-1}Gh$ no fija puntos del eje t . Por lo tanto, $\{0, \infty\}$ es una órbita.

Ahora, consideremos a $G0 = \{0, \infty\}$, por la proposición 1.6.17 $|G/Stab(0)| = |G0| = 2$, es decir, $Stab(0)$ es de índice 2, por otro lado, $Stab(0) \subset S(\mathbb{R}^2)_0 \subset S(\mathbb{R}^2)_*$ entonces $Stab(0)$ fija a 0 y ∞ , por consiguiente $Stab(0)$ fija al eje t . Entonces dado $h \in G - Stab(0)$, h deja invariante a t e intercambia 0 y ∞ , por consiguiente, h fija un punto en t , digamos u . Dado que $Stab(0)$ no fija al eje t y h si, tenemos que $G/Stab(0) = \{Stab(0), hStab(0)\}$, entonces $Stab(0)$ y h generan a G , por lo tanto, G fija a $u \in t$, lo cual es una contradicción a 2.

Por lo tanto, G es un grupo elemental hiperbólico. \square

Teorema 3.2.12. *Sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Γ es un grupo kleiniano elemental hiperbólico.
2. Γ es conjugado en $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ a un grupo kleiniano infinito de $S(\mathbb{R}^2)_*$.

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Por el teorema 3.2.11 existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}\Gamma h$ es un subgrupo kleiniano de $S(\mathbb{R}^2)_*$ que no fija a ningún punto de t . Veamos que $h^{-1}\Gamma h$ debe ser infinito. Por contradicción, supongamos que $h^{-1}\Gamma h$ es finito, por el teorema 1.10.28 $h^{-1}\Gamma h$ está formado por elementos elípticos e Id y por el teorema 2.2.33 $h^{-1}\Gamma h$ tiene un punto fijo o eje en común en \mathcal{H}^3 , lo cual contradice que $h^{-1}\Gamma h$ no fija a ningún punto de t . Por lo tanto, $h^{-1}\Gamma h$ es infinito.

2. \Rightarrow **1.** Existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}\Gamma h$ es un grupo kleiniano infinito de $S(\mathbb{R}^2)_*$. Para ver que Γ es un grupo elemental hiperbólico aplicaremos el teorema 3.2.11. Por contradicción, supongamos que $h^{-1}\Gamma h$ fija un punto en el eje t , digamos que fija a $w \in t \subset \mathcal{H}^3$, entonces $h^{-1}\Gamma h$ es un grupo elíptico, además, $h^{-1}\Gamma h$ es kleiniano, por lo tanto, por el teorema 3.2.4 $h^{-1}\Gamma h$ es finito, lo cual es una contradicción, ya que $h^{-1}\Gamma h$ es infinito. Por lo tanto, $h^{-1}\Gamma h$ no fija puntos en el eje t , por el teorema 3.2.11 tenemos que Γ es un grupo elemental hiperbólico y dado que $h^{-1}\Gamma h$ es kleiniano, también lo es Γ . \square

El siguiente teorema muestra explícitamente la estructura de un subgrupo de un grupo kleiniano elemental hiperbólico.

Teorema 3.2.13. *Sea Γ un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, las siguientes afirmaciones son equivalente:*

1. Γ es un grupo kleiniano elemental hiperbólico.
2. Γ tiene un subgrupo cíclico infinito generado por una transformación hiperbólica de índice finito.

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Por el teorema 3.2.12 existe $h \in \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ tal que $h^{-1}\Gamma h$ es un grupo kleiniano infinito de $S(\mathbb{R}^2)_*$. Ahora, veamos como es la estructura de un grupo kleiniano infinito de $S(\mathbb{R}^2)_*$.

Notemos que $Stab(0) \leq h^{-1}\Gamma h$ fija 0 y ∞ . Dado que $h^{-1}\Gamma h \leq S(\mathbb{R}^2)_*$, entonces

$$h^{-1}\Gamma h0 = \begin{cases} \{0, \infty\}, & \text{o} \\ \{0\}, \end{cases}$$

y por la proposición 1.6.17

$$h^{-1}\Gamma h/Stab(0) \cong h^{-1}\Gamma h0,$$

por lo tanto, el índice de $Stab(0)$ es 1 o 2. Sea $g \in Stab(0)$, dado que $Stab(0) \subset S(\mathbb{R}^2)_0$ por el teorema 1.3.17 g es de la forma $g(x) = kAx$ donde $k \in \mathbb{R}^+$, $A \in SO(2)$ y $a = 0 = g(0)$, es decir, $g = kA$ para toda $g \in Stab(0)$. Consideremos R^+ el grupo del ejemplo 1.1.2 y definimos:

$$\begin{aligned} p: Stab(0) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ kA &\mapsto k, \end{aligned}$$

p es un homomorfismo de grupos, donde

$$Ker(p) = \{kA \in Stab(0) \mid p(kA) = 1\} = Stab(0) \cap SO(2).$$

Por el corolario 1.5.21 $SO(2)$ es compacto, un grupo topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana y $Stab(0) \cap SO(2)$ es kleiniano con la topología de subespacio de $h^{-1}\Gamma h$, por lo tanto, por el corolario 1.5.13 $Stab(0) \cap O(2)$ es finito.

Recordemos que estamos considerando al semiespacio superior como subconjunto de \mathbb{H} , sea $j \in \mathcal{H}^3$, dado que $h^{-1}\Gamma h$ es kleiniano por la proposición 3.1.2 $h^{-1}\Gamma h$ actúa discontinuamente y por el lema 1.6.26 la órbita $Stab(0)e_3$ es un subconjunto discreto cerrado en \mathcal{H}^3 .

Sea $g \in Stab(0)$, entonces g fija 0 y ∞ , tenemos que g es hiperbólica, entonces para todo $w \in \mathcal{H}^3$ g es de la forma $g(w) = awa$ donde $a \in \mathbb{C}$. En particular, $g(j) = aja = a\bar{a}j = |a|^2j$, entonces $p(g) = |a|^2$, por consiguiente, $Im(p)$ son puntos en el eje t que podemos identificar con \mathbb{R}^+ , por lo tanto $Im(p)$ es un subgrupo discreto infinito de \mathbb{R}^+ . Entonces existe un escalar $s > 1$ tal que

$$p(Stab(0)) = \{s^m : m \in \mathbb{Z}\}, \quad (3.2.2)$$

es decir, $Im(p)$ es un grupo cíclico infinito.

Sea $g' \in Stab(0)$ tal que $p(g') = s$, por el teorema 1.1.26

$$Stab(0)/Ker(p) \cong Im(p),$$

además por el teorema 1.1.30 $Stab(0) \cong Ker(p) \times Im(p)$. Dado que $[Stab(0) : Im(p)] = |Stab(0)/Im(p)| = |Ker(p)|$ es finito y $Stab(0)$ es de índice 1 o 2 entonces

$$[h^{-1}\Gamma h : Im(p)] = [h^{-1}\Gamma h : Stab(0)][Stab(0) : Im(p)]$$

es finito. Por lo tanto, $Im(p)$ es un subgrupo cíclico infinito de índice finito generado por g' una transformación hiperbólica.

2. \Rightarrow 1. Existe $H \leq \Gamma$ cíclico infinito de índice finito, digamos m , H generado por un elemento hiperbólico g .

Sean $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$ los puntos fijos de g . Dado que $H \subset Stab(a) \leq \Gamma$ y

$$[\Gamma : H] = [\Gamma : Stab(a)][Stab(a) : H],$$

donde $[\Gamma : H] = m$, entonces $[\Gamma : Stab(a)]$ es finito y por la proposición 1.6.17 dado que

$$\Gamma/Stab(a) \cong \Gamma a$$

entonces la órbita Γa es finita, análogamente, la órbita Γb es finita. Por lo tanto, Γ es un grupo elemental.

Dado que H no tiene puntos fijos en \mathcal{H}^3 , Γ no es un grupo elemental elíptico, más aún, Γ tampoco es un grupo elemental parabólico, ya que la unión de todas las órbitas finitas contiene al menos a a y b , por lo tanto, Γ es grupo elemental hiperbólico.

Veamos que Γ es un grupo kleiniano. Por conjugación supongamos que g fija a 0 y ∞ , sean t el eje de g y $x \in t$, entonces g es de la forma $g(z) = \frac{az}{a-1}$ con su matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como g es hiperbólica entonces $\text{tr}(A) = (a+a^{-1})^2 > 4$, desarrollando tenemos que $a > \pm 1$, es decir, $|a| \neq 1$. Sea $x = rj$ con $r \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$g(x) = axa = arja = ra\bar{a}j = r|a|^2j,$$

así que $g^m(x) = r|a|^{2m}j$, donde $r|a|^{2m}$ lo podemos identificar con el eje real, entonces la órbita Hx es un conjunto discreto en \mathcal{H}^3 , consideremos la aplicación evaluación

$$\begin{aligned} e_x: H &\rightarrow Hx \\ g^m &\mapsto g^m x, \end{aligned}$$

por el teorema 1.4.63 e_x es continua, dado que $\{x\}$ es un abierto en Hx entonces $e^{-1}(\{x\}) = \{Id\}$ es un abierto en H , entonces por el lema 1.5.10 H es discreto. Por lo tanto, por el lema 1.5.15 Γ es kleiniano. \square

Antes de continuar, veamos unos ejemplos de grupos elementales.

Ejemplo 3.2.14. Sea $z \mapsto \frac{-1}{z}$ un elemento elíptico de orden 2, entonces $\langle z \mapsto \frac{-1}{z} \rangle$ es un grupo elemental de tipo elíptico. De manera análoga, $\langle z \mapsto \exp \frac{2i\pi}{n} z \rangle$ generado por una transformación elíptica de orden finito.

Ejemplo 3.2.15. Consideremos las siguientes transformaciones de \mathcal{H}^3 :

$$\begin{aligned} h: \mathcal{H}^3 &\rightarrow \mathcal{H}^3 & g: \mathcal{H}^3 &\rightarrow \mathcal{H}^3 \\ x &\mapsto 2x & x &\mapsto \frac{x}{|x|^2}. \end{aligned}$$

Sea el grupo $\Gamma = \langle h, g \rangle$, dado que $ghg^{-1} = h^{-1}$, el grupo cíclico infinito $\langle h \rangle$ tiene índice 2 en Γ . Por el teorema 3.2.13 Γ es un grupo kleiniano elemental hiperbólico de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, notar que Γ deja invariante el conjunto $\{0, \infty\}$, pero no fija a 0 ni a ∞ .

Vamos a suponer que los grupos kleinianos son no elementales, para evitar casos especiales.

3.3. Dominios fundamentales

En el capítulo anterior describimos brevemente poliedros convexos en \mathcal{H}^3 , ahora, dada la acción de un grupo kleiniano en \mathcal{H}^3 le asociaremos un poliedro. Para esto introduciremos algunas definiciones y resultados.

Definición 3.3.1. Sean X un espacio métrico, G un subgrupo de $I(X)$ y $R \subset X$ un subconjunto, R es una **región fundamental** para G si y sólo si:

1. R es un abierto en X ,
2. los miembros de $\{gR \mid g \in G\}$ son mutuamente disjuntos, y
3. $X = \cup \{g\bar{R} \mid g \in G\}$.

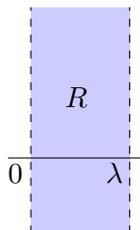


Figura 3.1: Región para el grupo de traslaciones

Ejemplo 3.3.2. Consideremos en \mathbb{R}^2 la traslación $t_k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $t_\lambda((x, y)) = (x + \lambda, y)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sea G el grupo generado por t_λ . Una región fundamental para G es:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \lambda\},$$

ver la figura 3.1. Note que el espacio de órbitas \mathbb{R}^2/G es homeomorfo a un cilindro.

Ejemplo 3.3.3. Consideremos en \mathbb{R}^2 las traslaciones $t_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $t_h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $t_v((x, y)) = (x + 1, y)$ y $t_h((x, y)) = (x, y + 1)$. Sea G el grupo generado por las traslaciones t_v y t_h . Note que las clases de equivalencia del ejemplo 1.4.35 corresponden a las órbitas de este ejemplo. Consideremos el cuadrado dado por:

$$R = \{(a, b) \mid 0 < a < 1 \text{ y } 0 < b < 1\}.$$

Note que R es una región fundamental para G , además, el espacio de órbitas \mathbb{R}^2/G es homeomorfo al toro.

Definición 3.3.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $G \leq I(X)$ y $D \subset X$. Decimos que D es un **dominio fundamental** para G si y sólo si D es una región fundamental conexa para G .

Un dominio fundamental sirve como una realización geométrica para el conjunto abstracto de representantes de las órbitas de la acción de un grupo discreto.

Ejemplo 3.3.5. Sean τ_i con $i = 1, 2, 3$ las traslaciones de \mathbb{R}^3 por e_i con $i = 1, 2, 3$. Entonces $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ genera un subgrupo discreto G de $I(\mathbb{R}^3)$, por consiguiente el 3-cubo abierto $(0, 1)^3$ en \mathbb{R}^3 es un dominio fundamental para G . El espacio de órbitas \mathbb{R}^3/G es similar a el 3-toro $(S^1)^3$.

Teorema 3.3.6 ([16, Teo. 6.6.4]). *Si R es una región fundamental para un grupo kleiniano Γ , entonces para cada $g \in \Gamma - \{Id\}$ tenemos que $\bar{R} \cap g\bar{R} \subset \partial R$.*

La siguiente noción caracteriza a la familia de los trasladados de la región.

Definición 3.3.7. Sean (X, d) un espacio métrico, $G \leq I(X)$ y R una región fundamental para G . Diremos que R es una región **localmente finita** si y sólo si $\{g\bar{R} : g \in G\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos de X (ver la definición 1.4.21).

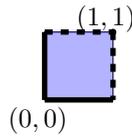
Definición 3.3.8. Sean (X, d) un espacio métrico, un subgrupo G de $I(X)$ y un subconjunto F de X . Diremos que F es un **conjunto fundamental** para G si y sólo si F contiene exactamente un punto de cada órbita de X .

Ejemplo 3.3.9. En el ejemplo 3.3.3, un conjunto fundamental es el conjunto:

$$F = \{(a, b) \mid 0 \leq a < 1 \text{ y } 0 \leq b < 1\}.$$

Ver la figura 3.2

Dado que F contiene sólo un punto de cada órbita, entonces F es un conjunto fundamental para G .

Figura 3.2: Cuadrado C' con sólo un representante

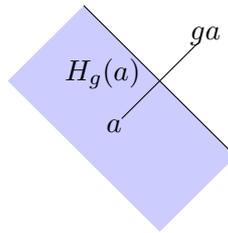
Existe un método para construir un dominio fundamental para un grupo discreto Γ , lo describiremos a continuación.

Sean X un espacio métrico, G un grupo de isometrías que actúa discontinuamente en X y $a \in X$ tal que $Stab(a) = \{Id\}$. Para cada $g \in G - \{Id\}$ definimos

$$H_g(a) = \{x \in X : d(x, a) < d(x, ga)\}.$$

Notar que $H_g(a)$ es un abierto en X .

Además, si $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^3$ con $n = 2, 3$, entonces $H_g(a)$ es el semiespacio de X que contiene a a tal que la frontera es el bisector perpendicular de cualquier segmento geodésico que une a a y ga , ver la figura 3.3.

Figura 3.3: El semiespacio superior $H_g(a)$

Definición 3.3.10. Sean X un espacio métrico, G un subgrupo de isometrías que actúa discontinuamente en X , el **dominio de Dirichlet** con centro $a \in X$, denotado por $D(a)$, es:

$$D(a) = \begin{cases} X & \text{si } G \text{ es trivial;} \\ \bigcap \{H_g(a) : g \in G - \{Id\}\} & \text{si } G \text{ es no trivial.} \end{cases}$$

Observación 3.3.11. Dado que $D(a)$ es X o la intersección de semiespacios abiertos de X podemos concluir que $D(a)$ es un subconjunto convexo de X .

No todo dominio de Dirichlet es un dominio fundamental localmente finito, el siguiente teorema establece las condiciones necesarias:

Teorema 3.3.12 ([16, Teo. 6.6.13]). *Sea $D(a)$ el dominio de Dirichlet con centro a para G un grupo de isometrías que actúa discontinuamente en X un espacio métrico, tal que:*

1. X es geodésicamente conexo.
2. X es geodésicamente completo.
3. X es finitamente compacto.

Entonces $D(a)$ es un dominio fundamental localmente finito para G .

Como consecuencia del teorema anterior todo grupo kleiniano tiene un dominio fundamental localmente finito.

Corolario 3.3.13. *Sea Γ un grupo kleiniano. Entonces un dominio de Dirichlet $D(a)$ es un dominio fundamental localmente finito para Γ .*

Demostración. Como Γ es discreto por la proposición 3.1.2 Γ actúa discontinuamente en \mathcal{H}^3 . Note que $\Gamma \leq \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, es decir, Γ es un subgrupo de isometrías.

Por las observaciones 2.2.16, 2.2.17, 2.2.18 tenemos que \mathcal{H}^3 es finitamente compacto, geodésicamente conexo y geodésicamente completo. Por el teorema 3.3.12 obtenemos el resultado. \square

Para el siguiente teorema consideraremos $X = \mathbb{R}^n$ o \mathcal{H}^3 con $n > 0$.

Teorema 3.3.14 ([16, Teo. 6.7.1]). *Sea G un grupo de isometrías discreto de X . Si D es un dominio fundamental, convexo, localmente finito para G , entonces \overline{D} es un poliedro convexo para G .*

3.3.1. Volumen de una región fundamental

En esta parte veremos una propiedad importante de algunas regiones fundamentales: el volumen. A partir de ahora, como nos interesa definir el volumen de una región fundamental, consideraremos $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^3$ con $n > 0$.

Definición 3.3.15. Sean $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^3$ con $n > 0$, Γ un subgrupo discreto de isometrías de $I(X)$ y R una región fundamental para Γ . Diremos que R es **propia** si y sólo si $\text{Vol}(\partial R) = 0$, es decir, ∂R es un conjunto nulo en X .

Teorema 3.3.16. *Sea Γ un subgrupo discreto de isometrías de X , entonces todas las regiones fundamentales propias para Γ tienen el mismo volumen.*

Demostración. Sean R y S regiones fundamentales propias para Γ . Notar que por el inciso 2. de la definición 3.3.1 tenemos que

$$X - \bigcup_{g \in \Gamma} gS \subset \bigcup_{g \in \Gamma} g\partial S.$$

Dado que R y S es propia tenemos que $\text{Vol}(\partial S) = 0, \text{Vol}(\partial R) = 0$, entonces

$$\text{Vol}(X - \bigcup_{g \in \Gamma} gS) = 0, \quad \text{Vol}(X - \bigcup_{g \in \Gamma} g^{-1}R) = 0$$

respectivamente. Note que $g^{-1}(R \cap gS) = g^{-1}R \cap g^{-1}gS = g^{-1}R \cap S$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \text{Vol}(R \cap (\bigcup_{g \in \Gamma} gS)) + \text{Vol}(R - (\bigcup_{g \in \Gamma} gS)) \\ &= \text{Vol}(R \cap (\bigcup_{g \in \Gamma} gS)) \\ &= \text{Vol}(\bigcup_{g \in \Gamma} (R \cap gS)) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(R \cap gS) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(g^{-1}R \cap S) \\ &= \text{Vol}(\bigcup_{g \in \Gamma} (S \cap g^{-1}R)) \\ &= \text{Vol}(S \cap (\bigcup_{g \in \Gamma} g^{-1}R)) \\ &= \text{Vol}(S \cap (\bigcup_{g \in \Gamma} g^{-1}R)) + \text{Vol}(S - (\bigcup_{g \in \Gamma} g^{-1}R)) \\ &= \text{Vol}(S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las regiones fundamentales propias para Γ tienen el mismo volumen. \square

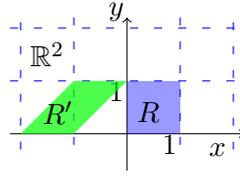


Figura 3.4: Regiones fundamentales con el mismo volumen

Ejemplo 3.3.17. Un ejemplo del teorema 3.3.16 es el ejemplo 3.3.3. Note que el cuadrilátero R' es una región fundamental y tiene el mismo volumen que R , ver la figura 3.4.

La noción de volumen también la podemos definir para variedades hiperbólicas.

Definición 3.3.18. Sea Γ un grupo kleiniano, el **volumen** de \mathcal{H}^3/Γ es el volumen de cualquier dominio fundamental propio para Γ en \mathcal{H}^3 .

Observación 3.3.19. Por el teorema 3.3.16 tenemos que todos los dominios fundamentales propios para Γ tiene el mismo volumen. Por lo tanto, el volumen de $M(\Gamma)$ está bien definido.

3.3.2. Poliedro fundamental convexo

Estamos interesados en estudiar el espacio de órbitas de Γ en \mathcal{H}^3 . Cuando tenemos un poliedro, la acción de Γ en \mathcal{H}^3 nos induce un pegado de lados del poliedro y nos da un espacio de órbitas. En otras palabras, no necesitamos \mathcal{H}^3 , sino saber como pegar los lados del poliedro. Un ejemplo de esto es el ejemplo 1.4.35, donde asignamos una orientación a los lados para identificarlos.

A continuación describiremos el poliedro que más adelante pegaremos.

Definición 3.3.20. Sean Γ un grupo kleiniano y un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 . Diremos que P es un **poliedro fundamental convexo** para Γ si el interior de P es un dominio fundamental localmente finito para Γ .

Observación 3.3.21. Por la observación 3.3.11 y los teoremas 3.3.12 y 3.3.14 $\overline{D(a)}$ es un poliedro fundamental convexo para Γ . $\overline{D(a)}$ se llama el **poliedro de Dirichlet** para Γ con centro en a .

Observación 3.3.22. Por el corolario 3.3.13 todo grupo kleiniano Γ tiene un poliedro de Dirichlet para Γ . Además, el poliedro es una región fundamental propia, ya que la frontera está dada por la unión de las caras del poliedro la cual no tiene volumen.

Por la observación 3.3.22 Γ tiene un dominio de Dirichlet, los siguientes teoremas nos dará una idea de como actúan los elementos de un grupo kleiniano en un dominio de Dirichlet.

Sea $a \in \mathcal{H}^3$ cuyo $Stab(a) = \{Id\}$. Para cada $g \in \Gamma - \{Id\}$, definimos:

$$P_g(a) = \{x \in \mathcal{H}^3 \mid d(x, a) = d(x, ga)\}.$$

Entonces $P_g(a)$ es el único plano de \mathcal{H}^3 que divide y es ortogonal a cada segmento geodésico en \mathcal{H}^3 que une a a ga .

Teorema 3.3.23 ([16, Teo. 6.7.4]). *Sean un grupo kleiniano Γ y un dominio de Dirichlet $D(a)$ para Γ con centro $a \in \mathcal{H}^3$. Sea S un lado de $D(a)$, entonces existe un único elemento $g \in \Gamma$ tal que satisface una (o todas) de las siguientes propiedades:*

1. $\langle S \rangle = P_g(a)$;

$$2. S = \overline{D(a)} \cap \overline{gD(a)};$$

3. $g^{-1}S$ es un lado de $D(a)$.

Definición 3.3.24. Sean Γ un grupo kleiniano y P un poliedro fundamental convexo para Γ . Diremos que P es **exacto** si y sólo si para cada lado S de P existe un elemento $g \in \Gamma$ tal que $S = P \cap gP$.

Observación 3.3.25. Por el inciso 2. del teorema 3.3.23 cualquier poliedro de Dirichlet para un grupo kleiniano es exacto.

Teorema 3.3.26. Si S es un lado de un poliedro fundamental, convexo, exacto P para un grupo kleiniano Γ , entonces existe un único elemento $g \in \Gamma - \{Id\}$ tal que

$$S = P \cap gP.$$

Demostración. Dado que P es exacto existe $g \in \Gamma$ tal que $S = P \cap gP$, notar que $g \neq Id$. Supongamos que existe $h \neq Id$ tal que $S = P \cap hP$, entonces gP° y hP° se traslapan. Por lo tanto, $gP^\circ = hP^\circ$, así que $g = h$, entonces existe un único elemento $g \in \Gamma$ tal que $S = P \cap gP$. \square

En resumen, sea Γ un grupo kleiniano y P su poliedro de Dirichlet exacto, estamos interesados en pegar los lados de P mediante la acción de Γ en \mathcal{H}^3 .

3.3.3. Apareamiento de lados

A continuación dado la acción de un grupo kleiniano en \mathcal{H}^3 y un poliedro fundamental convexo exacto veremos como se induce el pegado de los lados.

Consideremos un grupo kleiniano Γ y un lado S de un poliedro fundamental convexo, exacto P para Γ . Por el teorema 3.3.26, existe un único $g_S \in \Gamma$ tal que $S = P \cap g_S(P)$. Además, $S' = g_S^{-1}(S)$ es un lado de P .

El lado S' se llama el **apareamiento de lado** S por el elemento $g_S \in \Gamma$. Dado que $S' = P \cap g_S^{-1}(P)$ entonces $g_{S'} = g_S^{-1}$. Por lo tanto, S es apareado con S' por g_S^{-1} y $S'' = S$.

Definición 3.3.27. El Γ -apareamiento de lados de P es el conjunto definido por:

$$\Psi = \{g_S \mid S \text{ es un lado de } P\}$$

Los elementos de Ψ , se llaman **transformaciones de apareamiento de lados** de P .

Sean dos puntos $x, x' \in P$, diremos que x, x' están apareados por Ψ , sí existe un lado S de P tal que $x \in S$ y $g_S(x') = x$, lo denotaremos por $x \simeq x'$. Sí $g_S(x') = x$, entonces $g_{S'}(x) = x'$. Por lo tanto, $x \simeq x'$ si y sólo si $x' \simeq x$.

Dos puntos $x, y \in P$, diremos que están relacionados por Ψ , sí:

1. $x = y$, o
2. existe x_1, \dots, x_m una sucesión de puntos de P tal que

$$x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m = y.$$

Lo denotaremos por $x \sim y$. Entonces relacionando puntos de P por elementos de Ψ tenemos una relación de equivalencia sobre P , donde las clases de equivalencia se llaman **ciclos** de Ψ , sí $x \in P$, entonces el ciclo de Ψ que contiene a x lo denotamos por $[x]$.

Proposición 3.3.28. El espacio cociente de un poliedro convexo P en \mathcal{H}^3 con la relación de equivalencia \sim es homeomorfo a \mathcal{H}^3/Γ .

Ejemplo 3.3.29. Consideremos el ejemplo 1.4.35, el poliedro fundamental convexo propio es el cuadrado cerrado:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Consideremos las traslaciones t_v y t_h del ejemplo 3.3.3. Sea $(x, y) \in P$, diremos que (x, y) se relaciona con (x', y') si y sólo si $(x, y) = (x', y')$ o $(x, y) = t_v(x', y')$ o $(x, y) = t_h(x', y')$.

Por lo tanto, analizar la acción de Γ en un poliedro es lo mismo que estudiar la acción de Γ en \mathcal{H}^3 .

Capítulo 4

Geometría de 3-variedades hiperbólicas

Para terminar, analicemos dos subconjuntos obtenidos de la acción cubriente de Γ en $\overline{\mathcal{H}^3}$ y estudiemos los puntos fijos de elementos parabólicos e hiperbólicos. Posteriormente, describiremos la geometría de las 3-variedades hiperbólicas conexas, completas, orientadas y de volumen finito dada en el Teorema de la Piñata.

Para más detalles de este capítulo ver en [16], [14].

4.1. Conjunto límite

Para ver como actúan los grupos kleinianos en $\overline{\mathcal{H}^3}$, introduciremos las siguientes nociones y haremos un análisis a un subconjunto de \mathbb{S}^2 asociado a un grupo kleiniano.

Denotaremos la cerradura topológica de un subconjunto S de $\widehat{\mathbb{R}^3}$ por \overline{S} .

Definición 4.1.1. Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ y $a \in \mathbb{S}^2$, diremos que a es un **punto límite** de G , si existen $x \in \mathcal{H}^3$ y $\{g_i\}$ una sucesión de elementos de G distintos entre sí tales que $g_i x$ converge a a .

Definición 4.1.2. Sean G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, el conjunto:

$$\Lambda(G) = \{a \in \mathbb{S}^2 : a \text{ es un punto límite}\}$$

se llama el **conjunto límite** de G .

Iniciaremos estudiando el conjunto límite usando los puntos fijos de los elementos parabólicos e hiperbólicos de un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$.

Teorema 4.1.3. Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, si $a \in \mathbb{S}^2$ es un punto fijo de $g \in G$ un elemento parabólico o hiperbólico, entonces $a \in \Lambda(G)$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{S}^2$ y $g \in G$ un elemento parabólico o hiperbólico que fija a a . Reemplazando g por g^{-1} , si es necesario, supongamos que a es un punto fijo atractor de g . Dado que a es un punto fijo atractor por los lemas 2.2.35 y 2.2.39 $g^i(0)$ converge a a , por lo tanto, a es un punto límite. \square

Teorema 4.1.4. Sea G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, entonces para cada $x \in \mathcal{H}^3$, tenemos $\Lambda(G) = \overline{Gx} \cap \mathbb{S}^2$.

Demostración. Por las definiciones de conjunto límite y punto límite 4.1.2 y 4.1.1 respectivamente, tenemos que $\overline{Gx} \cap \mathbb{S}^2 \subset \Lambda(G)$.

Por otro lado, sea $a \in \Lambda(G)$, entonces $a \in \mathbb{S}^2$ y a es un punto límite, es decir, existe una sucesión $\{g_i\} \subset G$ de elementos distintos entre si y $y \in \mathcal{H}^3$ tal que $g_i y$ converge a a con la métrica euclidiana. Dado que g_i es una isometría, $d_{\mathcal{H}^3}(g_i x, g_i y) = d_{\mathcal{H}^3}(x, y)$ para toda i .

Sean $k = d(g_i x, g_i y)$, $k' = \cosh d(g_i x, g_i y)$ y $k'' = \frac{2|g_i x - g_i y|^2}{(1 - |g_i x|^2)(1 - |g_i y|^2)}$. Por el teorema 2.2.2 tenemos que $k' - 1 = k''$. Sea $s = (1 - |g_i x|^2)(1 - |g_i y|^2)$. Despejando tenemos que:

$$\frac{k' - 1}{2k^2} = \frac{1}{s},$$

donde $0 < \frac{k^2}{2} < 1$ con $k < k''$. Entonces $d(g_i x, g_i y) = v$ para algún $v \in \mathbb{R}^+$ cuando $g_i x$ tiende a a .

Luego $|g_i y| \rightarrow |a|$, pero $a \in \mathbb{S}^2$ entonces $|a| < 1$. Sea $\epsilon > 0$, existe $B(v, \epsilon)$ tal que $|g_i x - g_i y| < \frac{k'' s}{2}$, entonces $s < \frac{k' - 1}{2}$. Por lo tanto, $|g_i y| \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Tenemos que $\|g_i x - g_i y\|$ tiende a 0 cuando i tiende a ∞ . Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_i x = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i y = a. \quad (4.1.1)$$

Por lo tanto, $a \in \overline{Gx} \cap \mathbb{S}^2$. Entonces $\Lambda(G) = \overline{Gx} \cap \mathbb{S}^2$. □

Para describir algunas propiedades topológicas del conjunto límite daremos las siguientes definiciones que extienden la noción de conjunto convexo a $\overline{\mathcal{H}^3}$ (ver la definición 2.3.1)

Definición 4.1.5. Sea $C \subseteq \overline{\mathcal{H}^3}$. Diremos que C es un subconjunto **convexo hiperbólico** si para cualquier par de puntos distintos de C se pueden unir por un segmento de línea hiperbólico o un rayo hiperbólico o una línea hiperbólica contenida en C .

Definición 4.1.6. Sea K un subconjunto de $\overline{\mathcal{H}^3}$, la **envolvente convexa hiperbólica** de K es la intersección de todos los subconjuntos convexos hiperbólicos de $\overline{\mathcal{H}^3}$ que contienen a K , lo denotaremos por $C(K)$.

Teorema 4.1.7 ([16, Lem. 1, Sec. 12.1]). *Sean G un subgrupo de $M\ddot{o}b^+(\mathcal{H}^3)$, K un subconjunto G -invariante cerrado de \mathbb{S}^2 y $C(K)$ la envolvente convexa hiperbólica en $\overline{\mathcal{H}^3}$. Entonces $C(K)$ es un subconjunto cerrado G -invariante de $\overline{\mathcal{H}^3}$.*

Teorema 4.1.8. *Sea G un subgrupo no elemental de $M\ddot{o}b^+(\mathcal{H}^3)$. Entonces cualquier subconjunto cerrado, G -invariante, no vacío de \mathbb{S}^2 contiene a $\Lambda(G)$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{S}^2$, $K \neq \emptyset$, G -invariante y cerrado. Dado que G es no elemental, por el teorema 4.1.9 $\Lambda(G)$ es infinito. Sea $C(K)$ la envolvente convexa hiperbólica de K en $\overline{\mathcal{H}^3}$, por el teorema 4.1.7, $C(K)$ es G -invariante y cerrado en $\overline{\mathcal{H}^3}$, además, por la definición 4.1.6 $C(K) \cap \mathbb{S}^2 = K$.

Sea $x \in C(K) \cap \mathcal{H}^3$ arbitraria, dado que $C(K)$ es G -invariante, entonces $Gx \subset C(K)$ y por el teorema 4.1.4, tenemos:

$$\Lambda(G) = \overline{Gx} \cap \mathbb{S}^2 \subset C(K) \cap \mathbb{S}^2 = K.$$

Por lo tanto, $\Lambda(G) \subset K$. □

El siguiente teorema caracteriza el conjunto límite de un grupo kleiniano elemental.

Teorema 4.1.9. *Sea Γ un grupo kleiniano, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. Γ es un grupo elemental.
2. $\Lambda(\Gamma)$ tiene 0, 1, o 2 puntos límite.

3. $\Lambda(\Gamma)$ es finito.

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Por casos:

- a) Si Γ es un grupo discreto elemental elíptico, por el teorema 3.2.4, Γ es finito, entonces la órbita $\Gamma 0$ es finita, por el corolario 1.3.28 y el teorema 4.1.4 $\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma 0} \cap \mathbb{S}^2 = \emptyset$.
- b) Si Γ es un grupo elemental parabólico, entonces Γ fija un punto en \mathbb{S}^2 , digamos que $a \in \mathbb{S}^2$. Por la observación 2.2.40 Γ deja invariante a la horoesfera Σ basada en a que pasa por 0 , entonces

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma 0} \cap \mathbb{S}^2 \subset \overline{\Sigma} \cap \mathbb{S}^2 = \{a\}.$$

Dado que a es el punto fijo de una transformación parabólica, por el teorema 4.1.3 $a \in \Lambda(\Gamma)$, por lo tanto, $\Lambda(\Gamma) = \{a\}$.

- c) Si Γ es un grupo elemental hiperbólico, por el teorema 3.2.11, Γ es conjugado a un subgrupo de $S(\mathbb{R}^2)_*$ que fija al conjunto $\{0, \infty\}$ y no fija puntos del eje t en \mathcal{H}^3 . Denotaremos por L al eje t , entonces por el teorema 4.1.4 tenemos que:

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma x} \cap \mathbb{S}^2 \subset \overline{L} \cap \mathbb{S}^2 = \{0, \infty\}.$$

Dado que Γ es un grupo discreto elemental hiperbólico, por el teorema 3.2.13 Γ tiene un subgrupo cíclico infinito de índice finito generado por un elemento hiperbólico, digamos h , cuyos puntos fijos es $\{0, \infty\}$. Por lo tanto, $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$ por el teorema 4.1.3.

2. \Rightarrow **3.** Dado que Γ es un grupo elemental con 0, 1, o 2 puntos límite se sigue que $\Lambda(\Gamma)$ es finito.

3. \Rightarrow **1.** Supongamos que $\Lambda(\Gamma)$ es finito, tenemos los siguientes casos:

- Si $\Lambda(\Gamma) = \emptyset$ por el teorema 4.1.3 $\Lambda(\Gamma)$ contiene los puntos fijos de elementos parabólicos e hiperbólicos, entonces Γ está formado por elementos elípticos e Id . Por el teorema 2.2.33 Γ fija un único punto en \mathcal{H}^3 , por lo tanto Γ es elemental.
- Supongamos que la órbita $\Gamma 0$ es finita. Como que Γ es un grupo discreto por la proposición 3.1.2 Γ actúa discontinuamente en \mathcal{H}^3 . Por el lema 1.6.25 el $Stab(0)$ es un subgrupo finito de Γ . Por la proposición 1.6.17 $\Gamma/Stab(0) \cong \Gamma 0$, así que $|\Gamma|/|Stab(0)| = |\Gamma 0|$. Dado que $\Gamma 0$ y $Stab(0)$ son finitos entonces $|\Gamma| = |\Gamma 0||Stab(0)|$ es finito y por el teorema 3.2.4 G es un grupo elemental elíptico.
- Supongamos que la órbita $G0$ es infinita. Dado que $\overline{\mathcal{H}^3} = \mathcal{H}^3 \cup \mathbb{S}^2$ es un conjunto compacto en \mathbb{R}^3 . Entonces por el teorema 1.4.52 $\Gamma 0$ tiene un punto límite $a \in \overline{\mathcal{H}^3}$. Por el teorema 1.6.26 tenemos que $\Gamma 0$ es un subconjunto cerrado discreto de $\overline{\mathcal{H}^3}$, entonces $a \in \mathbb{S}^2$, (de lo contrario si $a \in \mathcal{H}^3$ por la definición 1.4.17 tenemos que para todo abierto U de a en \mathcal{H}^3 $(\Gamma 0 - \{a\}) \cap U \neq \emptyset$ lo que contradice que $\Gamma 0$ es discreto). Dado que $\Lambda(\Gamma)$ es finito y Γ -invariante entonces $\Lambda(\Gamma)$ es una unión de órbitas finitas. Por el teorema 3.2.2 tenemos que Γ es un grupo elemental hiperbólico.

□

Observación 4.1.10. El número de puntos límite corresponde con el tipo de grupo elemental.

Podemos caracterizar al conjunto límite por medio del conjunto de los puntos fijos de los elementos no elípticos de un grupo kleiniano, los siguientes teoremas son prueba de esto.

Teorema 4.1.11. Sean Γ un grupo kleiniano y F el conjunto de todos los puntos fijos de los elementos no elípticos de Γ . Entonces $\overline{F} = \Lambda(\Gamma)$.

Demostración. Por el teorema 4.1.3 tenemos que $F \subseteq \Lambda(\Gamma)$ y dado que $\Lambda(\Gamma)$ es cerrado entonces $\overline{F} \subseteq \Lambda(\Gamma)$. Veamos la otra contención, por casos:

- Sí Γ es un grupo elemental, entonces por el teorema 4.1.9 Γ tiene 0, 1, o 2 puntos límite. Por lo tanto, $\overline{F} = \Lambda(\Gamma)$.
- Si Γ no es elemental. Dado que algún $g \in \Gamma$ es un elemento no elíptico, por el teorema 3.2.4 Γ es infinito y por el teorema 4.1.9 $\Lambda(\Gamma)$ no consiste de 0, 1, ni 2, por consiguiente $F \neq \emptyset$. Sean $a \in F$, entonces a es un punto fijo de $h \in \Gamma$ algún elemento no elíptico. Si $g \in \Gamma$, entonces ghg^{-1} no es un elemento elíptico de Γ y fija a $g(a)$. Entonces F y por consiguiente \overline{F} son Γ -invariantes. Tenemos que por el teorema 4.1.8 $\Lambda(\Gamma) \subset \overline{F}$, por lo tanto $\overline{F} = \Lambda(\Gamma)$.

□

Teorema 4.1.12 ([16, Teo. 12.2.4]). *Sean Γ un grupo kleiniano no elemental y F el conjunto de todos los puntos fijos de elementos hiperbólicos de Γ entonces $\overline{F} = \Lambda(\Gamma)$.*

4.1.1. Conjunto ordinario

Ahora, definiremos el subconjunto de \mathbb{S}^2 complemento del conjunto límite de un grupo kleiniano.

Definición 4.1.13. El **conjunto ordinario** o **región de discontinuidad** de un grupo kleiniano Γ es el conjunto:

$$\Omega(\Gamma) = \mathbb{S}^2 - \Lambda(\Gamma).$$

El conjunto $\Omega(\Gamma)$ es un subconjunto abierto Γ -invariante de \mathbb{S}^2 .

Usando el conjunto ordinario clasificaremos los grupos kleinianos, de la siguiente manera:

Definición 4.1.14. Sea Γ un grupo kleiniano, diremos que es del **primer tipo** si $\Omega(\Gamma) = \emptyset$, en otro caso diremos que Γ es del **segundo tipo**.

Observación 4.1.15. Por el teorema 4.1.9 cualquier grupo kleiniano elemental es del segundo tipo.

Sea Γ un grupo kleiniano. Se llama conjunto ordinario de Γ porque $\mathcal{H}^3 \cup \Omega(\Gamma)$ es el mayor subconjunto abierto de $\overline{\mathcal{H}^3}$ en el cual Γ actúa discontinuamente, ver [16, Teo. 12.2.8, Obs. pág. 609].

Estamos interesados en estudiar 3-variedades hiperbólicas $M(\Gamma)$ de volumen finito, a continuación veremos como es el grupo kleiniano.

Teorema 4.1.16 ([16, Teo. 12.2.11]). *Sean Γ un grupo kleiniano y P un poliedro fundamental convexo para Γ , entonces*

$$\Omega(\Gamma) = \cup \{g(\overline{P} \cap \Omega(\Gamma)) \mid g \in \Gamma\}.$$

Teorema 4.1.17. *Sea Γ un grupo kleiniano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Γ es del segundo tipo.
2. Cualquier poliedro fundamental convexo para Γ contiene un semiespacio cerrado de \mathcal{H}^3 .
3. Γ tiene un poliedro fundamental convexo que contiene un semiespacio cerrado de \mathcal{H}^3 .

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Sea P un poliedro fundamental convexo para Γ , por el teorema 4.1.16 $\Omega(\Gamma) = \cup_{g \in \Gamma} g(\bar{P} \cap \Omega(\Gamma))$. Dado que Γ es discreto entonces Γ es numerable, además, dado que \mathbb{S}^2 es Hausdorff localmente compacto y $\Omega(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2$ por el teorema 1.4.56 $\Omega(\Gamma)$ es localmente compacto, entonces $\Omega(\Gamma)$ es un espacio de Baire.

Si $g(\bar{P} \cap \Omega(\Gamma))$ tiene interior vacío para cada $g \in \Gamma$, entonces el interior de $\Omega(\Gamma) = \emptyset$, lo cual no puede ser ya que Γ es del segundo tipo. Por lo tanto, existe un subconjunto cerrado $g(\bar{P} \cap \Omega(\Gamma))$ de $\Omega(\Gamma)$ con interior distinto del vacío, así que $\bar{P} \cap \Omega(\Gamma)$ en $\Omega(\Gamma)$ es no vacío.

Sea $x \in \bar{P} \cap \Omega(\Gamma)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap \mathbb{S}^2 \subset \bar{P} \cap \Omega(\Gamma)$. Por convexidad el semiespacio cerrado de \mathcal{H}^3 acotado por $\partial(B(x, r) \cap \mathcal{H}^3)$ está contenida en P . Por lo tanto, del inciso 1. implica el inciso 2.

2. \Rightarrow **3.** Dado que se cumple el inciso 2., por consiguiente el inciso 3. se cumple.

3. \Rightarrow **1.** Sea un poliedro fundamental convexo P que contiene un semiespacio cerrado de \mathcal{H}^3 , entonces existe $x \in \mathbb{S}^2$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap \bar{\mathcal{H}}^3 \subset \bar{P}$.

Dado que P es un poliedro fundamental convexo, por la definición 3.3.20 tenemos que el interior de P es un dominio fundamental localmente finito para Γ . Además, dado que $P^\circ \subset \bar{P}$ entonces $g(B(x, r) \cap \bar{\mathcal{H}}^3) \subset g\bar{P}$ y los elementos del conjunto $\{g(B(x, r) \cap \bar{\mathcal{H}}^3) \mid g \in \Gamma\}$ son mutuamente disjuntos. Tenemos que ningún punto de $B(x, r) \cap \mathbb{S}^2$ es un punto fijo de algún elemento de $\Gamma - \{Id\}$. Por el teorema 4.1.11 $\bar{F} = \Lambda(\Gamma)$ pero $\bar{F} = \emptyset$. Por lo tanto, $\Omega(\Gamma) = \mathbb{S}^2$, entonces $B(x, r) \cap \mathbb{S}^2 \subset \Omega(\Gamma)$. Note que $x \in B(x, r) \cap \mathbb{S}^2$ entonces $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$. Por lo tanto, Γ es del segundo tipo. \square

Teorema 4.1.18. *Sea Γ un grupo kleiniano, si $M(\Gamma)$ tiene volumen finito, entonces Γ es del primer tipo.*

Demostración. Por contrarecíproca, supongamos que Γ es del segundo tipo, entonces por el teorema 4.1.17 tenemos que cualquier poliedro fundamental convexo para Γ contiene un semiespacio cerrado de \mathcal{H}^3 y el volumen de este semiespacio cerrado es infinito, por consiguiente $M(\Gamma)$ es de volumen infinito. \square

Es decir, sí $M(\Gamma)$ es una variedad hiperbólica de volumen finito, entonces $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^2$.

4.2. Puntos límite

A continuación describiremos dos tipos de puntos límite del conjunto límite de un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$.

4.2.1. Punto límite cónico

Haciendo uso de la existencia de un rayo hiperbólico, una sucesión y una r -vecindad del rayo, introduciremos la siguiente noción.

Definición 4.2.1. Sean G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ y $a \in \mathbb{S}^2$, diremos que a es un **punto límite cónico** de G si existen $x \in \mathcal{H}^3$, una sucesión $\{g_i\}$ de elementos de G , un rayo hiperbólico R en \mathcal{H}^3 que termina en a y $r > 0$ tal que $g_i a$ converge a a dentro de la vecindad $N(R, r)$ de R en \mathcal{H}^3 , ver la figura 4.1.

Los siguientes dos teoremas caracterizan los puntos límite cónicos de un conjunto límite de un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$.

Teorema 4.2.2. *Sean G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ y $a \in \mathbb{S}^2$ un punto fijo de un elemento hiperbólico h de G . Entonces a es un punto límite cónico de G .*

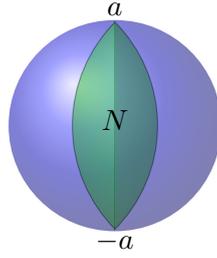


Figura 4.1: r -Vecindad de un punto cónico en la bola unitaria \mathcal{H}^3

Demostración. Reemplazando h por h^{-1} , si es necesario, supongamos que a es el punto fijo atractor de h . Sean L el eje de h y $x \in L$, dado que a es un punto atractor por el lema 2.2.39 $h^i(x)$ converge a a , además dado que h traslada a L en la dirección de a , entonces $h^i(x)$ converge a a dentro de cualquier r -vecindad de L en \mathcal{H}^3 . Por lo tanto, a es un punto límite cónico. \square

Teorema 4.2.3. Sean G un subgrupo de $\text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$, a un punto límite cónico de G , $x \in \mathcal{H}^3$, $\{g_i\}$ una sucesión de elementos de G , R un rayo hiperbólico que termina en a , $r > 0$ tal que $g_i(x)$ converge a a dentro de $N(R, r)$. Entonces para cada $y \in \mathcal{H}^3$ existe $s > 0$ tal que $g_i y$ converge a a dentro de $N(R, s)$.

Demostración. Sea $y \in \mathcal{H}^3$, por el teorema 4.1.4 $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i x = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i y = a$. Sea $s = d_{\mathcal{H}^3}(x, y) + r$. Para cada i existe $z_i \in R$ tal que $d_{\mathcal{H}^3}(g_i y, z_i) < r$. Dado que g_i es una isometría entonces $d_{\mathcal{H}^3}(g_i(y), g_i(x)) = d_{\mathcal{H}^3}(y, x) = s - r$ y por la desigualdad del triángulo tenemos:

$$d_{\mathcal{H}^3}(g_i(y), z_i) \leq d_{\mathcal{H}^3}(g_i(y), g_i(x)) + d_{\mathcal{H}^3}(g_i(x), z_i) < (s - r) + r = s,$$

entonces $g_i(y) \in N(R, s)$ para cada i . \square

Ahora describiremos los puntos límite cónicos de $\Lambda(\Gamma)$ de Γ un grupo kleiniano.

Teorema 4.2.4. Sean a un punto límite cónico de Γ un grupo kleiniano y $\{g_i\}$ una sucesión de elementos distintos entre sí de Γ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para algún (o todo) rayo hiperbólico R en \mathcal{H}^3 que termina en a , existe un $r > 0$ tal que $g_i(0)$ converge a a dentro de $N(R, r)$.
2. Para algún (o todo) rayo hiperbólico R en \mathcal{H}^3 que termina en a , existe $K \subset \mathcal{H}^3$ compacto tal que $K \cap g_i^{-1}R \neq \emptyset$ para toda i .

Demostración. Supongamos que se cumple el inciso 1., sea S otro rayo hiperbólico que termina en a , por el teorema 4.2.3 existe $s > 0$ tal que $N(R, r) \subset N(S, s)$. Por lo tanto, los cuantificadores algunos y todo son equivalentes. Notemos, sea R un rayo hiperbólico que termina en a , entonces para cualquier $g \in \Gamma$ y $r > 0$, tenemos que: $d(g(0), R) \leq r$ si y sólo si existe $y \in R$ tal que $y \in C(g(0), r)$, y esto equivale a $g^{-1}y \in g^{-1}R$ y $g^{-1}(y) \in g^{-1}(C(g(0), r)) = C(0, r)$, es decir, $g^{-1}R \cap C(0, r)$. \square

Teorema 4.2.5. Sea a un punto límite cónico de un grupo kleiniano Γ , entonces el punto a no pertenece a la frontera euclidiana de un poliedro fundamental convexo para Γ .

Demostración. Por contradicción, supongamos que a pertenece a la frontera euclidiana de un poliedro fundamental convexo P para Γ .

Sea $x \in P$, por el teorema [16, Teo. 6.4.3] existe $R = [x, a)$ un rayo hiperbólico geodésico en P que termina en a . Dado que a es un punto límite cónico existen un rayo hiperbólico S , $r_0 > 0$, $\{g_i\} \subset \Gamma$ una sucesión tal que $g_i(x)$ converge a a dentro de $N(S, r_0)$.

Por el teorema 4.2.3 existen $r > 0$ y una sucesión $\{g_i\} \subset \Gamma$ tal que $g_i(0)$ converge a a dentro de $N(S, r)$. Entonces por el teorema 4.2.4 para el rayo hiperbólico R existe $K \subset \mathcal{H}^3$ compacto tal que $K \cap g_i^{-1}R \neq \emptyset$ para toda i , entonces existe $x_i \in K \cap g_i^{-1}R$. Donde $\{x_i\} \subset K$ es una sucesión, dado que K es compacto, por el teorema 1.4.50 existe $\{x_{i_k}\}$ una subsucesión de $\{x_i\}$ tal que x_{i_k} converge a algún $w \in K$. Tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B(w, \epsilon)$ para toda $i > N$. Por lo tanto, $B(w, \epsilon) \cap g_i^{-1}R \neq \emptyset$ para toda i , lo cual contradice la definición de poliedro fundamental convexo 3.3.20, ya que $g_i^{-1}R \subset g_i^{-1}P$. \square

En particular, un punto límite cónico no pertenece a la frontera de un poliedro de Dirichlet.

De los teorema 4.2.2 y 4.2.5 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.6. *Sea a un punto fijo de un elemento hiperbólico de un grupo kleiniano Γ . Entonces a no pertenece a la frontera euclidiana de cualquier poliedro fundamental convexo para Γ .*

4.2.2. Punto límite cúspide

Antes de definir el otro tipo de punto límite, consideremos lo siguiente:

Sea Γ un grupo kleiniano libre de torsión tal que ∞ es un punto fijo de un elemento parabólico f de Γ . Además, $Stab(\infty)$ corresponde bajo extensión de Poincaré a un subgrupo discreto G de $I(\mathbb{R}^2)$ y por el teorema 1.5.27 $Stab(\infty)$ tiene un subgrupo H abeliano libre de rango m e índice finito en $Stab(\infty)$ tal que H actúa libremente sobre un m -plano Q de \mathbb{R}^2 como un grupo de traslaciones.

Podemos considerar $Stab(\infty) \leq I(\mathbb{R}^m)$ con $m = 1, 2$ y el subgrupo \mathbb{Z}^m es de índice finito y rango m , por el teorema 1.5.30 $Stab(\infty)$ es un grupo cristalográfico, es decir, $\mathbb{R}^m/Stab(\infty)$ con $m = 1, 2$ es compacto.

Sean $r > 0$, Q el m -plano $Stab(\infty)$ -invariante y sea $N(Q, r)$ la r -vecindad de Q en \mathbb{R}^3 , entonces $N(Q, r)$ es invariante bajo $Stab(\infty)$.

Se introducirán las siguientes nociones para poder describir los puntos fijos de elementos parabólicos.

Definimos $U(Q, r) = \overline{\mathcal{H}^3} - \overline{N(Q, r)}$.

Entonces, $U(Q, r)$ es un subconjunto abierto $Stab(\infty)$ -invariante de $\overline{\mathcal{H}^3}$. Si $m = 2$, entonces $U(Q, r)$ es una horobola basada en ∞ .

Definición 4.2.7. El conjunto $U(Q, r)$ se llama una **región cúspide** para Γ basado en ∞ si se cumple lo siguiente:

$$U(Q, r) \cap gU(Q, r) = \emptyset \quad \text{para todo } g \in \Gamma - Stab(\infty).$$

Sea $r_1 = \inf\{r > 0 \mid U(Q, r) \text{ una región cúspide basada en } \infty\}$. Si $x, y \in U(Q, r_1)$ y $g \in \Gamma$ tal que $gx = y$ entonces existe $r > r_1$ tal que $U(Q, r)$ es una región cúspide para Γ basada en ∞ , con $x, y \in U(Q, r)$, entonces $g \in Stab(\infty)$. Por lo tanto, $\Gamma \neq Stab(\infty)$, entonces $U(Q, r_1)$ es una región cúspide maximal para Γ basada en ∞ .

Definición 4.2.8. Sean $\Gamma \leq \text{Möb}^+(\mathcal{H}^3)$ y $U(Q, r)$ una región cúspide para Γ basada en ∞ , $U(Q, r)$ se llama **propia** si $U(Q, r)$ es no maximal.

Sean $r > r_1$, $U(Q, r)$ una región cúspide propia para Γ basada en ∞ , $r_1 < s < r$ y $U(Q, s)$ una región cúspide para Γ basada en ∞ , dado que $U(Q, r)$ es propia tenemos que para toda $g \in \Gamma - Stab(\infty)$:

$$\begin{aligned} U(Q, r) &\subset U(Q, s) \\ \overline{U(Q, r)} - \{\infty\} &\subset \overline{U(Q, s)} \\ g(\overline{U(Q, r)} - \{\infty\}) &\subset \overline{gU(Q, s)} \\ (\overline{U(Q, r)} - \{\infty\}) \cap g(\overline{U(Q, r)} - \{\infty\}) &\subset U(Q, s) \cap gU(Q, s) = \emptyset \\ \overline{U(Q, r)} \cap \overline{gU(Q, r)} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Tenemos que la cerradura de una región cúspide propia para Γ y sus trasladados son disjuntos.

Definición 4.2.9. Sea $c \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo de un elemento parabólico de un grupo kleiniano Γ y un subconjunto U de \mathcal{H}^3 . Diremos que U es una **región cúspide (propia)** para Γ basada en c si bajo conjugación en Γ , $c = \infty$ y el conjunto U se transforma en una región cúspide (propia) para Γ basada en ∞ .

Teorema 4.2.10. Sean Γ un grupo kleiniano. Si U es una región cúspide basada en c para Γ , entonces $U \subset \mathcal{H}^3 \cup \Omega(\Gamma)$.

Demostración. Por contradicción, supongamos que U no está contenido en $\mathcal{H}^3 \cup \Omega(\Gamma)$. Entonces existe un punto límite a de Γ en U , así que existen $x \in \mathcal{H}^3$, $\{g_i\} \subset \Gamma$ una sucesión de elementos distintos entre sí tal que $g_i x$ converge a a .

Como U es una vecindad abierta de a en $\overline{\mathcal{H}^3}$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_i x \in U$ para toda $i \geq j$. Dado que U es una región cúspide basada en c para Γ entonces $U \cap gU = \emptyset$ para toda $g \in \Gamma - Stab(c)$, notemos que $g_i(x) = g_i(g_j^{-1}g_j)x = (g_i g_j^{-1})g_j x$ para toda $i \geq j$, donde $(g_i g_j^{-1})g_j x \in g_i g_j^{-1}U$, entonces $g_i g_j^{-1} \in Stab(c)$ para toda $i \geq j$. Entonces existe $f_i \in Stab(c)$ tal que $f_i = g_i g_j^{-1}$ para toda $i \geq j$, sea $y = g_j x$, tenemos que $f_i y = (g_i g_j^{-1})g_j x = g_i x$, entonces $f_i y$ converge a a , por lo tanto, a es un punto límite de $Stab(c)$.

Tenemos que $Stab(c) \leq \Gamma$ es discreto y elemental parabólico, por el teorema 4.1.9 $\{c\} = \{a\}$, es decir, $a = c$, pero U es una región cúspide basada en c , así que $c \notin U$, lo cual contradice que $a \in U$. \square

Con respecto a 3-variedades hiperbólicas de volumen finito, caracterizamos al subgrupo que deja fijo a ∞ mediante el siguiente resultado.

Proposición 4.2.11. Sea $M(\Gamma)$ una 3-variedad hiperbólica de volumen finito y c un punto fijo de un elemento parabólico de Γ . Entonces $Stab(\infty) \cong \mathbb{Z}^2$.

Demostración. Por el teorema 4.1.18 Γ es del primer tipo.

Si U es una región cúspide basada en c para Γ , por el teorema 4.2.10 $U \subset \mathcal{H}^3$ entonces $m = 2$, si $m = 1$ entonces $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por conjugación, supongamos que $c = \infty$ entonces $Stab(\infty)$ tiene a \mathbb{Z}^2 como subgrupo libre abeliano de rango 2 tal que actúa libremente sobre un 2-plano de \mathbb{R}^2 como un grupo de traslaciones. Ahora, supongamos que existe $g \in Stab(\infty)$ tal que $g \notin \mathbb{Z}^2$. Por casos, tenemos lo siguiente:

1. Supongamos que g es un elemento hiperbólico. Sea $h \in Stab(\infty)$, por el teorema 3.2.9 $\langle g, h \rangle$ no es discreto, lo cual contradice que Γ y $Stab(\infty)$ son kleinianos.
2. Supongamos que g es un elemento elíptico. Por casos:
 - a) Sí g tiene orden de más de 6, entonces por el teorema 3.2.7 $Stab(\infty)$ es no discreto, lo cual contradice que Γ es kleiniano.

b) Sí g tiene orden menor igual a 6, esto contradice que Γ sea libre de torsión.

Por último, por el teorema 1.5.26 \mathbb{Z}^2 es generado por dos elementos linealmente independiente. Por lo tanto, $Stab(\infty) = \mathbb{Z}^2$. \square

Definición 4.2.12. Sean Γ un grupo kleiniano y c un punto fijo de un elemento parabólico de Γ . Diremos que c es un **punto límite cúspide** si existe U una región cúspide para Γ basado en c .

Definición 4.2.13. Sean Γ un grupo kleiniano y a un punto fijo de un elemento parabólico de Γ . Diremos que a es un **punto límite parabólico acotado** si el espacio de órbitas $(\Lambda(\Gamma) - \{a\})/Stab(a)$ es compacto.

Estamos interesados en estudiar ambos puntos límite y establecer una relación entre ellos, antes probemos lo siguiente.

Teorema 4.2.14. Sea Γ un grupo kleiniano tal que ∞ es un punto fijo de un elemento parabólico de Γ . Sea Q un m -plano de \mathbb{R}^2 tal que $Q/Stab(\infty)$ es compacto, entonces ∞ es un punto límite parabólico acotado de Γ si y sólo si existe un $r > 0$ tal que $\Lambda(\Gamma) \subset \overline{N(Q, r)}$.

Demostración. Consideremos a $Stab(\infty)$ como un subgrupo discreto de $I(\mathbb{R}^2)$.

\Rightarrow Supongamos que ∞ es un punto límite parabólico acotado de Γ , entonces $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es compacto. Notemos que $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\Lambda(\Gamma) - \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces

$$(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty) \subset \mathbb{R}^2/Stab(\infty).$$

Dado que $Q/Stab(\infty)$ es compacto tenemos que $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es acotado. Por el teorema 4.2.10 existe $r > 0$ tal que $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ está contenido en una r -vecindad de $Q/Stab(\infty)$ en $\mathbb{R}^2/Stab(\infty)$, entonces

$$(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\}) \cup \{\infty\} \cup N(Q, r) \cup \{\infty\}.$$

Dado que $\{\infty\} \subset \overline{Q}$, concluimos que $\Lambda(\Gamma) \subset \overline{N(Q, r)}$.

\Leftarrow Supongamos que $\Lambda(\Gamma) \subset \overline{N(Q, r)}$, entonces $\Lambda(\Gamma) - \{\infty\} \subset \overline{N(Q, r)} - \{\infty\}$, por consiguiente

$$(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty) \subset (\overline{N(Q, r)} - \{\infty\})/Stab(\infty).$$

Dado que $Q/Stab(\infty)$ es compacto, entonces $(\overline{N(Q, r)} - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es compacto, además, dado que $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\Lambda(\Gamma) - \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty) \subset \mathbb{R}^2/Stab(\infty).$$

Dado que ∞ es el punto fijo de un elemento parabólico entonces por el teorema 4.1.3 $\infty \in \Lambda(\Gamma)$, entonces $\infty \notin \Omega(\Gamma) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, así que $\Omega(\Gamma)$ es $Stab(\infty)$ -invariante en \mathbb{R}^2 .

Como $\Omega(\Gamma)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{S}^2 , entonces $\Omega(\Gamma)/Stab(\infty)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2/Stab(\infty)$ y por lo tanto $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^2/Stab(\infty)$.

Dado que $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es cerrado en un subconjunto compacto por el teorema 1.4.48 tenemos que $(\Lambda(\Gamma) - \{\infty\})/Stab(\infty)$ es compacto. Por lo tanto, ∞ es un punto límite parabólico acotado. \square

El siguiente teorema muestra la relación entre un punto límite cúspide y un punto límite parabólico acotado.

Teorema 4.2.15. Sea c un punto límite cúspide de un grupo kleiniano Γ , entonces c es un punto límite parabólico acotado de Γ .

Demostración. Sea c un punto límite cúspide de Γ , entonces existe una región cúspide para Γ basada en c . Por conjugación en Γ supongamos que $c = \infty$.

Sean Q el m -plano $Stab(\infty)$ -invariante de \mathbb{R}^2 y una región cúspide $U(Q, r)$ para Γ basada en ∞ . Por el teorema 4.2.10 $U(Q, r) \subset \mathcal{H}^3 \cup \Omega(\Gamma)$, entonces $\mathcal{H}^3 \cup \Omega(\Gamma) \subset (U(Q, r))^C = \overline{N(Q, r)}$, entonces $\Lambda(\Gamma) \subset \overline{N(Q, r)}$. Por el teorema 4.2.14 concluimos que c es un punto límite parabólico acotado. \square

Teorema 4.2.16. *Sean Γ un grupo kleiniano tal que ∞ es el punto fijo de un elemento parabólico de Γ , Q un m -plano $Stab(\infty)$ -invariante de \mathbb{R}^2 tal que $Q/Stab(\infty)$ es compacto. Sea P un poliedro fundamental convexo para Γ y sea $\{x_i\}$ una sucesión de puntos de P que converge a ∞ . Entonces*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} dist_{\mathbb{R}}(x_i, Q) = \infty.$$

Demostración. Como $Stab(\infty) \leq I(\mathbb{R}^m)$ es un subgrupo discreto $Stab(\infty)$ -invariante en Q un m -plano con $m = 1, 2$, con \mathbb{Z}^m el subgrupo de $Stab(\infty)$ de índice finito y $Q/Stab(\infty)$ es compacto, por el teorema 1.5.29 tenemos que Q/\mathbb{Z}^m es compacto.

Sea D un poliedro de Dirichlet para \mathbb{Z}^m , dado que D es cerrado en Q/\mathbb{Z}^m , entonces D es compacto. Sean $r > 0$ y $M(D, r)$ la r -vecindad de D en \mathbb{R}^2 , dado que D es compacto, entonces $\overline{M(D, r)}$ es compacta.

Sea $M(Q, r)$ la r -vecindad de Q en \mathbb{R}^2 , dado que Q es convexo entonces $M(Q, r)$ es convexo. Note que $\overline{M(D, r)}$ se proyecta a $(M(Q, r) - \{\infty\})/\mathbb{Z}^m$, tenemos que $\overline{M(D, r)}/\mathbb{Z}^m$ es compacto. Entonces $M(Q, r)/\mathbb{Z}^m$ es de volumen finito en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^m$.

Dado que $\{x_i\} \subset P$ es una sucesión tal que $x_i \rightarrow \infty$, entonces $\infty \in \overline{P}$. Sea $v: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección vertical en el semiespacio superior, entonces $v(P^\circ)$ es un subconjunto abierto convexo de \mathbb{R}^2 . Entonces $M(Q, r) \cap v(P^\circ)$ es un subconjunto abierto convexo de \mathbb{R}^2 . Dado que $v(P^\circ) \cap M(Q, r)$ se inyecta en $M(Q, r)/\mathbb{Z}^m$ y dado que es de volumen finito tenemos que $M(Q, r) \cap v(P^\circ)$ tiene volumen finito en \mathbb{R}^2 .

Por lo tanto, $v(P^\circ) \cap M(Q, r)$ está acotado y dado que $\overline{M(D, r)}$ es compacta tenemos que $v(P^\circ) \cap \overline{M(Q, r)}$ es compacto.

Veamos que $dist_{\mathbb{R}}(x_i, Q) \rightarrow \infty$, por contradicción. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $dist(x_i, Q) \leq r$ para un número infinito i . Para este número infinito i , el punto $v(x_i)$ está en el subconjunto acotado $v(P) \cap \overline{M(Q, r)}$ de \mathbb{R}^2 . Dado que x_i converge a ∞ , existe i tal que $dist_{\mathbb{R}}(x_i, Q) \leq r$ y la tercera coordenada de x_i es más grande que r , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $dist_{\mathbb{R}}(x_i, Q) \rightarrow \infty$. \square

Los siguientes teoremas describen los puntos límite cónicos y puntos límite cúspides.

Teorema 4.2.17 ([16, Cor. 3, Sec. 12.3]). *Un punto límite cúspide de un grupo kleiniano no es un punto límite cónico de Γ .*

Teorema 4.2.18 ([16, Teo. 12.6.3]). *Un punto fijo de un elemento parabólico de un grupo kleiniano Γ no es un punto límite cónico de Γ .*

Teorema 4.2.19 ([16, Teo. 12.6.4]). *Un punto $a \in \mathbb{S}^2$ es un punto límite cúspide de un grupo kleiniano si y sólo si a es un punto límite parabólico acotado del grupo Γ .*

Es decir, nos basta estudiar los puntos límite cúspides.

Puntos cúspides de un poliedro convexo

Ahora, haciendo uso de puntos ideales definiremos nociones de puntos de un poliedro convexo en el modelo del semiespacio superior.

Definición 4.2.20. Sean P un poliedro convexo en el semiespacio superior \mathcal{H}^3 y c un punto ideal de P . Diremos que c es un **punto cúspide** de P si existe una vecindad abierta N de c en $\overline{\mathbb{R}^3}$ tal que la intersección de las cerraduras de todos los lados de P en $\overline{\mathcal{H}^3}$ que están en N es c .

Si c es un punto cúspide de P , entonces la **cúspide** de P incidente con c es la unión de todas los lados de P incidentes con c . Además, existe una horoesfera Σ basada en c tal que Σ interseca justo los lados de P que inciden con c . Notar que la orientación que preserva la clase de similitud del link $L(c)$ no depende de la elección de Σ .

Si conjugamos Γ tal que $c = \infty$, entonces existe una forma canónica de representar $L(c)$. Sea $v: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección vertical, entonces $L(c)$ es similar a $v(P)$.

Definición 4.2.21. Un **vértice ideal** de un poliedro P en el modelo del semiespacio superior es un punto cúspide c de P tal que $L(c)$ es compacto.

Observación 4.2.22. Sea P un poliedro de dimensión 3 en \mathcal{H}^3 . Si P tiene volumen finito, entonces todo punto cúspide de P es un vértice ideal de P .

Para relacionar los puntos límite del conjunto límite de un grupo kleiniano y los puntos cúspides de un poliedro convexo consideremos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.23 ([16, Teo. 12.3.7]). *Sean a un punto límite parabólico acotado de un grupo kleiniano Γ y un poliedro fundamental convexo P para Γ tal que $a \in \overline{P}$. Entonces a es un punto cúspide de P .*

4.3. Horocúspides

Nos interesa estudiar las regiones asociadas a los puntos límite cúspides y puntos límite parabólicos acotados para describir la geometría del grupo y las 3-variedades hiperbólicas. Para describir dichas regiones, introduciremos varias nociones.

Definición 4.3.1. Sean Γ un grupo kleiniano con un elemento parabólico tal que fija un punto $a \in \mathbb{S}^2$. Una horobola $B(a)$ basada en a se llama una **región horocúspide** para Γ basada en a si cumple lo siguiente:

$$B(a) \cap gB(a) = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma - \text{Stab}(a).$$

Definición 4.3.2. Sea una región horocúspide $B(a)$ para Γ basada en a . Diremos que $B(a)$ es **propia** si $B(a)$ no es maximal.

De manera intuitiva, una región horocúspide propia en la bola unitaria \mathcal{H}^3 es una región tal que esta y sus trasladados son no tangentes.

Si $B(a)$ es una región horocúspide propia para Γ basada en a , se cumple que

$$\overline{B(a)} \cap g\overline{B(a)} = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma - \text{Stab}(a).$$

Para referirnos a la variedad, consideraremos lo siguiente.

Definición 4.3.3. Sean $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow M(\Gamma)$ la aplicación cociente y $B(a)$ una región horocúspide (propia) para Γ en a . La **horocúspide (propia)** de $M(\Gamma)$ que corresponde a $B(a)$ es el subconjunto abierto $V = p(B(a))$ de $M(\Gamma)$.

Definición 4.3.4. Si una región horocúspide (propia) $B(a)$ para Γ es también una región cúspide para Γ , entonces una horocúspide (propia) V de $M(\Gamma)$ que corresponde a $B(a)$ se llama una **cúspide (propia)** de $M(\Gamma)$.

Como ya mencionamos, nos interesa estudiar la geometría de las 3-variedades hiperbólicas, para eso necesitamos describir las cúspides de las 3-variedades hiperbólicas, dadas en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.5. *Sea Γ un grupo kleiniano. Si V es una horocúspide de $M(\Gamma)$ que corresponde a una región horocúspide $B(a)$ para Γ , entonces la inclusión de $B(a)$ en \mathcal{H}^3 induce un homeomorfismo $\eta: B(a)/Stab(a) \rightarrow V$. Además, si $B(a)$ es una región horocúspide propia, entonces la inclusión de $C(a) = \overline{B(a)} - \{a\}$ en \mathcal{H}^3 induce un homeomorfismo $\bar{\eta}: C(a)/Stab(a) \rightarrow \bar{V}$.*

Demostración. Si $\Gamma = Stab(a)$ es claro.

Supongamos que $\Gamma \neq Stab(a)$, definimos:

$$\begin{aligned} \eta: B(a)/Stab(a) &\rightarrow V \\ Stab(a)x &\mapsto \Gamma x. \end{aligned}$$

Notar que η es continua y sobreyectiva por como se define V . Supongamos que $x, y \in B(a)$ y $\Gamma x = \Gamma y$, entonces existe $g \in \Gamma$ tal que $gx = y$. Dado que $B(a)$ es una región cúspide se cumple que $B(a) \cap g'B(a) = \emptyset$ para toda $g' \in \Gamma - Stab(a)$, entonces $g \in Stab(a)$. Entonces $Stab(a)x = Stab(a)y$, por lo tanto, η es inyectiva.

Por el teorema 1.6.32 tenemos que $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow M(\Gamma)$ es una función abierta, además, $B(a) \subset \mathcal{H}^3$ es abierto entonces η es abierta. Por lo tanto, η es un homeomorfismo.

Supongamos que $B(a)$ es propia. Sea $C(a) = \overline{B(a)} - \{a\}$, dado que p es continua, entonces $p(C(a)) \subset \bar{V}$, además, como $B(a)$ es propia existe una región horocúspide B_a para Γ basada en a tal que $C(a) \subset B_a$.

Sea $s = dist(C(a), \partial B_a)$, por el teorema [16, Lema 1, Sec. 7.1] tenemos que $s > 0$. Entonces

$$dist(C(a), gC(a)) \geq 2s$$

para toda $g \in \Gamma - Stab(a)$. Entonces $B(x, s)$ intersecta a lo más un elemento de $\{gC(a) \mid g \in \Gamma\}$ para cada $x \in \mathcal{H}^3$.

Dado que $\overline{B(a)} - \{a\} = C(a)$ es cerrado en \mathcal{H}^3 y g es continua, entonces

$$\cup\{gC(a) \mid g \in \Gamma\}$$

es un subconjunto cerrado de \mathcal{H}^3 . Tenemos que $p(C(a))$ es un cerrado en $M(\Gamma)$ y $p(C(a)) = \bar{V}$. Definimos:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}: B(a)/Stab(a) &\rightarrow \bar{V} \\ Stab(a)x &\mapsto \Gamma x, \end{aligned}$$

de manera análoga que η , se tiene que $\bar{\eta}$ es biyectiva y continua. Si K es un subconjunto de $C(a)$ cerrado $Stab(a)$ -invariante, entonces $B(x, s)$ intersecta a lo más un elemento de $\{gK \mid g \in \Gamma\}$ para cada $x \in \mathcal{H}^3$.

Por lo tanto, $\cup\{gK \mid g \in \Gamma\}$ es un subconjunto cerrado de \mathcal{H}^3 , así que $p(K)$ es cerrado en $M(\Gamma)$ y por consiguiente $\bar{\eta}$ es una aplicación cerrada. Entonces $\bar{\eta}: C(a)/Stab(a) \rightarrow \bar{V}$ es un homeomorfismo. \square

4.4. Grupos kleinianos geoméricamente finitos

Para poder describir la geometría de las 3-variedades hiperbólicas introduciremos la noción de geoméricamente finito poliedros, grupos y las variedades.

4.4.1. Poliedro convexo geoméricamente finito

A continuación caracterizaremos los grupos kleinianos que tienen la siguiente propiedad: cualquier punto límite es cónico o cúspide dependiendo de la geometría del poliedro fundamental convexo para Γ .

Definición 4.4.1. Sea P un poliedro convexo en \mathcal{H}^3 , diremos que P es un **poliedro geoméricamente finito** si para cada $x \in \overline{P} \cap \mathbb{S}^2$ existe una vecindad abierta N de x en \mathbb{R}^3 tal que intersecta sólo los lados de P incidentes en x .

Ejemplo 4.4.2. Cualquier poliedro convexo con un número finito de lados en \mathcal{H}^3 es geoméricamente finito.

Todo poliedro convexo geoméricamente finito tiene varias propiedades, a continuación las mencionaremos.

Teorema 4.4.3. *Sea un poliedro convexo geoméricamente finito P en \mathcal{H}^3 . Entonces*

1. Si $x \in \overline{\partial P} \cap \mathbb{S}^2$, entonces existe un lado de P incidente con x .
2. Si $x \in \overline{\partial P} \cap \mathbb{S}^2$ y un número infinito de lados de P son incidentes con x , entonces x es un punto cúspide de P .
3. P tiene sólo un número finito de puntos cúspide.
4. Todas salvo un número finito de lados de P son incidentes con un punto cúspide de P .

Demostración. 1. Dado que P es geoméricamente finito, existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ intersecta justamente los lados de P incidentes con x . Como $x \in \overline{\partial P}$, $B(x, r)$ intersecta un lado de P , el cual es por lo tanto incidente con x .

2. Sea $\mathcal{S}(x)$ el conjunto de todas los lados de P incidentes con x . Supongamos que $\mathcal{S}(x)$ es infinito, dado que P es un poliedro convexo, el conjunto $\mathcal{S}(x)$ es una familia localmente finita entonces la intersección de todas los lados en $\mathcal{S}(x)$ es vacío. Por lo tanto, x es un punto cúspide de P .

3. Tenemos que \mathbb{S}^2 es compacto y \overline{P} es cerrado en \mathbb{R}^3 , entonces $\mathbb{S}^2 \cap \overline{P}$ es cerrado en \mathbb{S}^2 , por consiguiente $\mathbb{S}^2 \cap \overline{P}$ es compacto. Como P es un poliedro convexo geoméricamente finito para cada $x \in \overline{P} \cap \mathbb{S}^2$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ intersecta los lados de P incidentes en x . Por lo tanto, $\{B(x, r)\}_{x \in \overline{P} \cap \mathbb{S}^2}$ es una cubierta abierta de $\overline{P} \cap \mathbb{S}^2$, como $\mathbb{S}^2 \cap \overline{P}$ es compacto existen x_1, \dots, x_m en $\overline{P} \cap \mathbb{S}^2$ y radios r_1, \dots, r_m tal que $B(x_i, r_i)$ intersectan sólo justo los lados de P incidentes con x_i para cada i y

$$\overline{P} \cap \mathbb{S}^2 \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, r_i).$$

Supongamos que $B(x_i, r_i)$ contiene un punto cúspide de P , entonces todas los lados de P incidentes con c son incidentes con x_i . Dado que c es un punto cúspide de P tenemos que la intersección de las cerraduras euclidianas de todas los lados de P incidentes con c es c , entonces $c = x_i$. Entonces todas las cúspides de P están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$. Por lo tanto, P tiene un número finito de cúspides.

4. Tenemos que $\overline{P} \cap \mathbb{S}^2$ es compacto. Como en el inciso anterior $x_1, \dots, x_m \in \overline{P} \cap \mathbb{S}^2$ y radios r_1, \dots, r_m tal que $B(x_i, r_i)$ intersectan sólo los lados de P incidentes con x_i . Note que $\cup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$ es abierto, además, dado que P es un poliedro convexo tenemos que P es cerrado. Entonces $P - \cup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$ es cerrado y es acotado por \mathbb{S}^2 . Por consiguiente, $P - \cup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$ es compacto.

Como $P - \cup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$ es compacto y el conjunto de lados de P es localmente finito, todas salvo un número finito de lados de P intersectan $\cup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$. Reindexamos los puntos de modo que x_1, \dots, x_k son todos los puntos cúspides de P . Por el inciso 2. tenemos que $B(x_i, r_i)$ intersecta sólo un número finito de lados de P para cada $i = k + 1, \dots, m$.

Entonces todas salvo un número finito de lados de P intersecta $\cup_{i=1}^k B(x_i, r_i)$. Por lo tanto, todas salvo un número finito de lados de P son incidentes con un punto cúspide de P . □

Los siguientes teoremas describen a los poliedros geoméricamente finitos.

Teorema 4.4.4 ([16, Teo. 12.4.4]). *Sean Γ un grupo kleiniano y un poliedro fundamental, convexo, exacto P para Γ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El poliedro P es geoméricamente finito.*
2. *Cualquier punto de $\overline{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es un punto límite cúspide para Γ .*
3. *Cualquier punto de $\overline{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es un punto límite parabólico acotado para Γ .*

Teorema 4.4.5. *Sean Γ un grupo kleiniano y un poliedro fundamental convexo, exacto y geoméricamente finito P para Γ , entonces $\overline{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es un conjunto finito de puntos límite cúspides de Γ .*

Demostración. Por el inciso 3. del teorema 4.4.4 para todo $x \in \overline{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es un punto límite parabólico acotado de Γ y por el teorema 4.2.23 x es un punto cúspide de P . Ahora, por el inciso 3. del teorema 4.4.3 P sólo tiene un número finito de puntos cúspides. Por lo tanto, por el inciso 2. del teorema 4.4.4 $\overline{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es el conjunto de puntos cúspides de Γ . □

4.4.2. El núcleo convexo

Haciendo uso de la noción de envolvente convexa hiperbólica del conjunto límite de un grupo kleiniano introduciremos la siguiente noción:

Definición 4.4.6. Sean Γ un grupo kleiniano y $C(\Gamma)$ la envolvente convexa hiperbólica de $\Lambda(\Gamma)$, entonces $C(\Gamma) \cap \mathcal{H}^3$ es un subconjunto cerrado, convexo, Γ -invariante de \mathcal{H}^3 . El **núcleo convexo** de $M(\Gamma)$ es el conjunto:

$$C(M(\Gamma)) = (C(\Gamma) \cap \mathcal{H}^3) / \Gamma.$$

El núcleo convexo $C(M(\Gamma))$ es un subconjunto cerrado convexo de $M(\Gamma)$.

Notar, si $|\Lambda(\Gamma)| \leq 1$ entonces $C(M(\Gamma)) = \emptyset$, en cualquier otro caso $C(M(\Gamma))$ es no vacío. Es decir, si Γ es un grupo kleiniano elemental elíptico o parabólico entonces $C(M(\Gamma))$ es vacío.

4.4.3. Grupos geoméricamente finitos

Como ya introducimos la noción de un poliedro convexo geoméricamente finito, ahora, definimos un grupo kleiniano geoméricamente finito.

Definición 4.4.7. Sean Γ un grupo kleiniano. Diremos que Γ es un **grupo geoméricamente finito** si Γ tiene un poliedro fundamental, convexo, exacto, geoméricamente finito.

El siguiente teorema caracteriza a los grupos geoméricamente finitos.

Teorema 4.4.8. Sean Γ un grupo kleiniano, \mathcal{H}^3/Γ una 3-variedad hiperbólica y $C(M(\Gamma))$ el núcleo convexo de $M(\Gamma)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El grupo Γ es geoméricamente finito.
2. Existe una unión finita V (posiblemente vacía) de horocúspides propias de $M(\Gamma)$ con cerraduras disjuntas, tal que $C(M(\Gamma)) - V$ es compacta.
3. Todo punto límite de Γ es cónico o parabólico acotado.
4. Todo poliedro fundamental, convexo y exacto para Γ es geoméricamente finito.

Demostración. **1.** \Rightarrow **2.** Dado que Γ es un grupo geoméricamente finito entonces Γ tiene un poliedro fundamental, convexo, exacto, geoméricamente finito P para Γ . Por el teorema 4.4.5 $\bar{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ es un conjunto finito de puntos límite cúspides de Γ , digamos, c_1, \dots, c_m .

Elegimos una región cúspide propia U_i para Γ basada en c_i para cada i tal que $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m$ son disjuntos y \bar{U}_i interseca sólo los lados de P incidentes con c_i para cada i .

Sea B_i una horobola basada en c_i y contenida en U_i tal que si $gc_i = c_j$ entonces $gB_i = B_j$. Entonces B_i es una región horocúspide propia para Γ basada en c_i para cada i . Sean $p: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathcal{H}^3/\Gamma$ y definimos $V = p(B_1 \cup \dots \cup B_m)$. Entonces V es una unión finita de horocúspides propias de $M(\Gamma)$ con cerraduras disjuntas.

Definamos:

$$K = (P \cap C(\Gamma)) - (B_1 \cup \dots \cup B_m).$$

Dado que $B_1 \cup \dots \cup B_m$ es un abierto en \mathcal{H}^3 entonces K es cerrado en \mathcal{H}^3 .

Veamos que K es acotado. Por contradicción, supongamos que K es no acotado. Sea $\{x_i\}$ una sucesión de puntos de K no acotada, dado que $\{x_i\}$ es una sucesión infinita de puntos en \mathbb{S}^2 , donde \mathbb{S}^2 es compacto, entonces $\{x_i\}$ tiene una subsucesión $\{x_{i_k}\}$ tal que x_{i_k} converge a a algún punto de \mathbb{S}^2 .

Dado que $C(\Gamma)$ es la envolvente convexa de $\Lambda(\Gamma)$, entonces $a \in \bar{P} \cap C(\Gamma) \cap \mathbb{S}^2 = \bar{P} \cap \Lambda(\Gamma)$. Tenemos que $a = c_j$ para algún j .

Pasamos al modelo del semiespacio superior y conjugamos por Γ tal que $a = \infty$. Sea Q el m -plano $Stab(\infty)$ -invariante de \mathbb{R}^2 tal que $Q/Stab(\infty)$ es compacto. Dado que ∞ es un punto límite parabólico acotado, por el teorema 4.2.14 existe $r > 0$ tal que $\Lambda(\Gamma) \subset \bar{N}(Q, r)$. Sea $v: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección vertical y R la cerradura de $v^{-1}(\bar{N}(Q, r))$ en \mathcal{H}^3 , dado que $C(\Gamma)$ es la envolvente convexa de $\Lambda(\Gamma)$, entonces $C(\Gamma) \subset R$, entonces $\{x_{i_k}\} \subset v^{-1}(\bar{N}(Q, r))$.

Dado que $x_i \rightarrow \infty$ en P , por el teorema 4.2.16 $dist_{\mathbb{R}}(x_{i_k}, Q)$ converge a ∞ , entonces $x_{i_k} \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $x_i \in B_j$ para todo i suficientemente grande, lo cual es una contradicción, ya que K es disjunto de B_j .

Entonces K es acotado y cerrado, por lo tanto, K es compacto. Por el teorema 1.4.54 $p(K)$ es compacta. Dado que $C(M(\Gamma)) - V \subset p(K)$, donde $C(M(\Gamma)) - V$ es cerrado, entonces por el teorema 1.4.48 tenemos que $C(M(\Gamma)) - V$ es compacto.

2. \Rightarrow **3.** Por casos:

1. Supongamos que Γ es un grupo elemental. El conjunto límite tiene puntos límite cúspides o cónicos de Γ , más aún, por el teorema 4.2.15 cualquier punto límite de Γ es cónico o punto límite parabólico acotado.
2. Supongamos que Γ es un grupo kleiniano no elemental. Existe una unión finita V de horocúspides propias con cerraduras disjuntas tal que $C(M(\Gamma)) - V$ es compacta.

Sean V_1, \dots, V_m las componentes horocúspides de V y B_i una región horocúspide para Γ basada en $a_i \in \mathbb{S}^2$ que corresponde a V_i para cada i .

Sea S_i la horoesfera frontera de B_i para cada i , por el teorema 4.3.5 la inclusión de $C(\Gamma) \cap S_i$ en \mathcal{H}^3 induce un homeomorfismo de $(C(\Gamma) \cap S_i)/Stab(a_i)$ a $C(M(\Gamma)) \cap \partial V_i$. Dado que $C(M(\Gamma)) \cap \partial V_i$ es compacta para cada i , entonces $(C(\Gamma) \cap S_i)/Stab(a_i)$ es compacto para cada i .

Sea $\pi_i: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{a_i\}$ es la proyección geodésica de a_i , es decir, $\pi_i(x)$ es el punto final de la línea hiperbólica de \mathcal{H}^3 que inicia en a_i y pasa por x . Entonces π_i es $Stab(a_i)$ -equivariante, por lo tanto, $\pi_i(C(\Gamma) \cap S_i)/Stab(a_i)$ es compacto para cada i .

Como $\Lambda(\Gamma)$ es un subconjunto cerrado $Stab(a_i)$ -invariante de \mathbb{S}^2 entonces $\Lambda(\Gamma) - \{a_i\}$ es un subconjunto cerrado $Stab(a_i)$ -invariante de $\pi_i(C(\Gamma) \cap S_i)$, entonces $(C(\Gamma) - \{a_i\})/Stab(a_i)$ es compacto para cada i . Entonces a_i es un punto límite parabólico acotado para cada i .

Ahora, sea a un punto límite de Γ tal que no es un punto límite parabólico acotado. Sea $x \in C(\Gamma) \cap \mathcal{H}^3$ y $[x, a)$ el rayo de x a a , dado que $C(\Gamma)$ y \mathcal{H}^3 son convexos, $C(\Gamma) \cap \mathcal{H}^3$ también lo es, entonces $[x, a) \subset C(\Gamma) \cap \mathcal{H}^3$.

Sean $B = p^{-1}(V)$, las componentes convexas de B son horobolas basadas en los puntos de $\Gamma a_1 \cup \dots \cup \Gamma a_m$ y cada punto de $\Gamma a_1 \cup \dots \cup \Gamma a_m$ es un punto límite parabólico acotado de Γ . Entonces ningún subrayo de $[x, a)$ está contenido en B . Por lo tanto, $[x, a) - B$ es no acotado.

Sea $\{x_i\}$ una sucesión de puntos de $[x, a) - B$ que converge a a . Dado que $C(M(\Gamma)) - V$ es compacto, existe $r > 0$ tal que $C(M(\Gamma)) - V \subset p(C(0, r))$, entonces existe un elemento $g_i \in \Gamma$ tal que $g_i x_i \in C(0, r)$ para cada i .

Veamos que un número infinito de términos de $\{g_i\}$ son distintos, por contradicción. Supongamos que un número finito de términos son distintos, consideremos una sub-sucesión $\{g_{i_k}\}$, existe $g \in \Gamma$ tal que $g x_i \in C(0, r)$ para toda i . Como x_i converge a a y g es continua entonces por el lema 1.3.31 $g x_i$ converge a $g a$, así que $g a \in C(0, r)$, lo cual no puede ser, ya que a no es un punto límite parabólico acotado. Por lo tanto, un número infinito de términos $\{g_i\}$ son distintos entre sí. Dado que $C(0, r) \cap g_i[x, a) \neq \emptyset$ para cada i , por el teorema 4.2.4, a es un punto límite cónico. Entonces cualquier punto límite de Γ es un punto límite cónico o parabólico acotado.

3. \Rightarrow 4. Sea P un poliedro fundamental, convexo, exacto para Γ , sea $x \in \bar{P} \cap \Lambda(\Gamma)$ por el teorema 4.2.5 x no es un punto límite cónico. Dado que todo punto límite de Γ es un punto límite cónico o parabólico acotado, tenemos que x es un punto límite parabólico acotado, entonces por el inciso 1. del teorema 4.4.4 P es geoméricamente finito para Γ .

4. \Rightarrow 1. Por la definición de grupo geoméricamente finito 4.4.7 se cumple. \square

4.5. Variedades geoméricamente finitas

Ahora, introduciremos las 3-variedades hiperbólicas geoméricamente finitas haciendo uso de grupos kleinianos geoméricamente finitos.

Definición 4.5.1. Sea $M(\Gamma)$ un 3-variedad hiperbólica. Diremos que $M(\Gamma)$ es una **3-variedad hiperbólica geoméricamente finita** si Γ es un grupo geoméricamente finito.

Una 3-variedad hiperbólica geoméricamente finita se caracteriza de la siguiente manera:

Teorema 4.5.2 ([16, Teo. 12.7.2]). *Sean Γ es un grupo kleiniano libre de torsión, $M(\Gamma)$ una 3-variedad hiperbólica y $C(M(\Gamma))$ el núcleo convexo de $M(\Gamma)$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $M(\Gamma)$ es una 3-variedad hiperbólica geoméricamente finita.
2. Existe una unión finita V (posiblemente vacía) de horocúspides propias de $M(\Gamma)$ con cerraduras disjuntas tal que $C(M(\Gamma)) - V$ es compacto.
3. El conjunto abierto $N(C(M(\Gamma)), r)$ tiene volumen finito para cada $r > 0$, (ver la definición 1.3.23 de r -vecindad.)

Recordemos, estamos interesados en las 3-variedades hiperbólicas completas, orientadas, conexas y de volumen finito.

Teorema 4.5.3. *Toda 3-variedad hiperbólica completa, conexa de volumen finito es geoméricamente finita.*

Demostración. Sea $M(\Gamma)$ una 3-variedad hiperbólica completa, conexa de volumen finito. Por el teorema 4.1.18 tenemos que Γ es del primer tipo, entonces $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^2$ y $C(\Gamma) = \overline{\mathcal{H}}^3$, en consecuencia $C(M(\Gamma)) = M(\Gamma)$. Por lo tanto, $N(C(M(\Gamma)), r) = N(M(\Gamma), r)$ tiene volumen finito para cada $r > 0$ y por el teorema 4.5.2 $M(\Gamma)$ es geoméricamente finita. \square

Observación 4.5.4. El lema de Margulis (ver [16, Teo. 12.6.1]) implica que existe una cota inferior positiva para los volúmenes de las 3-variedades hiperbólicas [16, Cor. 1, Sec. 12.7]. Supongamos que M es una 3-variedad hiperbólica completa de volumen finito que tiene un número infinito de componentes, las cuales denotaremos por V_i . Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(V_i) < \infty$. Por lo tanto, $Vol(V_i) \rightarrow 0$, pero esto contradice la existencia de la cota inferior que mencionamos. Por lo tanto, toda 3-variedad hiperbólica completa de volumen finito tiene un número finito de componentes conexas.

4.6. El teorema de la piñata

Dado que ya analizamos las 3-variedades hiperbólicas completas, conexas, orientadas de volumen finito, lo que sigue es describir su geometría global.

Teorema 4.6.1 (Teorema de la piñata). *Sea $M(\Gamma)$ una 3-variedad hiperbólica completa, conexa, orientable y de volumen finito. Entonces existe una 3-variedad compacta con frontera M_0 en $M(\Gamma)$ tal que $M(\Gamma) - M_0$ es una unión finita de cúspides propias con cerraduras disjuntas. Además, cada cúspide de $M(\Gamma)$ es difeomorfa a $T^2 \times (0, \infty)$, donde T^2 denota el 2-toro.*

Demostración. Dado que $M(\Gamma)$ es una 3-variedad hiperbólica de volumen finito, por el teorema 4.1.18 Γ es del primer tipo, entonces $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^2$, por lo tanto, $C(M(\Gamma)) = M(\Gamma)$. Además, por el teorema 4.5.3 $M(\Gamma)$ es geoméricamente finita y por el teorema 4.5.2 existe V una unión finita no vacía de horocúspides propias, con cerraduras disjuntas tal que $M(\Gamma) - V$ es compacto.

Sean V_1, \dots, V_m las horocúspides en V . Para cada i , sea B_i la región horocúspide para Γ basada en a_i un vértice ideal correspondiente a V_i .

Sea $M_0 = M(\Gamma) - V$, resta probar que es una variedad con frontera. Notemos que el interior de M_0 es un subconjunto abierto de $M(\Gamma)$, entonces M_0 es una variedad Riemanniana. Además:

$$\begin{aligned}
 \partial M_0 &= \partial(M(\Gamma) - V) \\
 &= \partial V \\
 &= \partial V_1 \cup \dots \cup \partial V_m.
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Ahora, analicemos como es la frontera de V_i . Si vemos que ∂V_i es un toro, tenemos que M_0 es una variedad con frontera tal que $M(\Gamma) - M_0$ es una unión finita de cúspides propias con cerraduras disjuntas. Por conjugación supongamos que $a_i = \infty$.

Sea $S_i = \partial B_i$ para cada i , note que S_i en el modelo del semiespacio superior es una horoesfera basada en ∞ es un plano horizontal.

Sea $r_1 > 0$, supongamos que $B_i = \{z + tj \mid t > r_1\}$, por lo tanto, $C_i = \overline{B_i} - \{\infty\} = \{z + tj \mid t \geq r_1\}$. Por la proposición 4.2.11 supongamos que $Stab(\infty) = \langle T_1, T_2 \rangle$, donde $T_1(z + tj) = z + 1$, $T_2(z + tj) = z + tj + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $Im(\lambda) > 0$.

Notemos que $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ para todo $t \in [r_1, \infty)$ es invariante bajo $Stab(\infty)$ y la acción de $Stab(\infty)$ en $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ es cubriente (ver el ejemplo 3.3.3), por el teorema 1.8.41 $\mathbb{R}^2 \times \{t\}/Stab(\infty)$ es una variedad Riemanniana, más aún, es un toro, ver el ejemplo 1.4.35.

Por el teorema 4.3.5 $\bar{\eta}_i: C_i/Stab(\infty) \rightarrow \bar{V}_i$ es un homeomorfismo, restringiendo $\bar{\eta}_i$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial V_i &\cong (C_i - B_i)/Stab(\infty) = (\partial B_i - \{\infty\})/Stab(\infty) \\ &= (S_i - \{\infty\})/Stab(\infty) \cong (\mathbb{R}^2 \times \{r_1\})/Stab(\infty) \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.6.1) ∂M_0 es una unión finita de toros.

Ahora, veamos como es V_i . Como la acción de $Stab(\infty)$ en B_i es cubriente, ya que la acción de Γ en \mathcal{H}^3 es cubriente, por el teorema 1.8.41 $B_i/Stab(\infty)$ es una variedad Riemanniana. Notemos que B_i es difeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times (r_1, \infty)$ mediante el difeomorfismo $f: B_i \rightarrow \mathbb{R}^2 \times (r_1, \infty)$ dada por $f(z + tj) = (z, t)$. Note que B_i es un subconjunto abierto de \mathcal{H}^3 , por lo tanto, B_i es una variedad Riemanniana. Como las subvariedades $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ son invariantes bajo la acción de $Stab(\infty)$ y el teorema 4.3.5:

$$V_i \stackrel{dif}{\cong} B_i/Stab(\infty) \stackrel{dif}{\cong} \mathbb{R}^2 \times \{\infty\}/Stab(\infty) \stackrel{dif}{\cong} \mathbb{R}^2/Stab(\infty) \times (r_1, \infty) \stackrel{dif}{\cong} T^2 \times (r_1, \infty).$$

Por lo tanto, por el ejemplo 1.4.30 V_i es difeomorfa a $T^2 \times (0, \infty)$. □

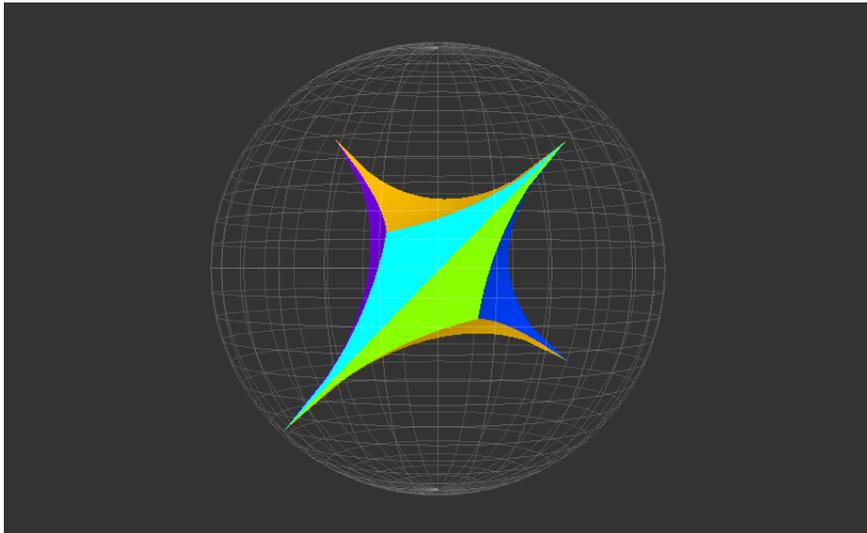


Figura 4.2: Teorema de la piñata

Bibliografía

- [1] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [2] D.E. Blair. *Inversion Theory and Conformal Mapping*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2000.
- [3] Th. Bröcker and Jänich. *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [4] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics (Boston, Mass.). Birkhäuser, 1992.
- [5] P. H. Doyle and D. A. Moran. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.*, 5:160–162, 1968.
- [6] S.H. Friedberg, A.J. Insel, and L.E. Spence. *Linear Algebra*. Featured Titles for Linear Algebra (Advanced) Series. Pearson Education, 2003.
- [7] Victor Guillemin and Allan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [8] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [9] Gareth A. Jones and David Singerman. *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint.
- [10] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, 1989.
- [11] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997.
- [12] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [13] Albert Marden. *Hyperbolic manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016. An introduction in 2 and 3 dimensions.
- [14] Katsuhiko Matsuzaki and Masahiko Taniguchi. *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Oxford Science Publications.
- [15] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [16] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [17] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

-
- [18] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [19] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.
- [20] A.J. Sieradski. *An introduction to topology and homotopy*. Prindle, Weber, and Schmidt series in advanced mathematics. PWS-KENT Pub. Co., 1992.
- [21] John Stillwell. *Geometry of surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1992 original.
- [22] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

Índice alfabético

- $PGL(n, \mathbb{C})$, 8
- $SL(n, \mathbb{C})$, 8
- $Möb^+(\widehat{\mathbb{C}})$, 60
- índice, 3
- órbita, 33
- acción, 32
 - conjunto, 32
 - cubriente, 45
 - libre, 33
- apareamiento
 - propio, 85
- apareamiento de lados
 - poliedros, 84
- aplicación cubriente
 - normal, 45
- arco-conexo, 40
- asintóticas, 73
- base, 16
- bola
 - unitaria, 70
- camino, 39
- carta, 48
- clases
 - conjugación, 64
- colección
 - localmente finita, 18
- compacto, 21
- completo, 15
- conexo
 - topología, 20
- conjugado, 64
- conjunto
 - fundamental, 100
 - límite, 107
 - ordinario, 110
- continua, 14
- contraíble, 41
- converge, 14
- convexo, 81
 - hiperbólico, 108
- cuaternio, 72
- cubierta, 21
- cubriente
 - universal, 44
- curva regular, 52
- difeomorfismo, 48
- disco
 - abierto, 14
- discontinuamente, 36
- distancia Riemanniana, 53
- dominio
 - fundamental, 100
- dominio de Dirichlet, 101
- eje, 80
- equicontinuo, 24
- equivalentes, 41
- esfera
 - Riemann, 59
- espacio
 - Baire, 17
 - cubriente, 42
 - métrico, 11
- estabilizador, 33
- fibra, 42
- función
 - equivariante, 34
- género superficie, 56
- grupo
 - crystalográfico, 31
 - elemental, 92
 - fundamental, 41
 - general
 - lineal, 8
 - geoméricamente finito, 120
 - kleiniano, 92
 - ortogonal, 9
 - topológico, 24
- Hausdorff, 18
- hojas, 42
- homotópicas, 40
- homotopía, 40

- horopunto, 83
- invariante, 32
- isometría, 12
- lazo, 41
- levantamiento, 44
- libre
 - torsión, 2
- longitud, 52
- longitud de arco, 53
- métrica, 11
 - sup, 23
- múltiplo, 66
- núcleo
 - convexo, 120
- norma, 52
- normalizada, 60
- orden, 3
- poliedro
 - fundamental convexo, 103
 - geoméricamente finito, 119
- primero
 - numerable, 17
- proyección
 - estereográfica, 57
- punto
 - aislado, 14
 - atractor, 80
 - base, 41
 - fijo, 64
 - ideal, 83
 - límite, 14
 - cúspide, 115
 - límite, 107
- razón
 - cruzada, 63
- región
 - cúspide, 113, 114
 - fundamental, 99
 - propia, 102
 - horocúspide, 117
 - localmente finita, 100
- segundo
 - numerable, 17
- separación, 20
- similitud, 13
- simplemente
 - conexo, 42
- subbase, 16
- subconjunto
 - abierto, 14
- subgrupo
 - normal, 3
- sucesión
 - Cauchy, 15
- topología
 - discreta, 16
 - producto, 17
 - subespacio, 17
- transformación
 - cubriente, 45
 - elíptica, 67
 - fraccionaria
 - lineal, 60
 - hiperbólica, 67
 - loxodrómica, 67
 - parabólica, 67
- transformación
 - Möbius, 60
- transitiva, 32
- traza, 7
- vértice
 - ideal, 83
- variedad
 - cerrada, 55
 - diferenciable, 48
 - hiperbólica, 83
 - Riemanniana, 52
- variedad con frontera, 55
- variedad diferenciable
 - orientable, 51
- vecindad
 - regular, 42
- volumen
 - de variedad hiperbólica, 103