Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría matemática, algoritmos y razonamiento en el juego Go

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Esmeralda Zúñiga Gamboa

Asesorada por

José Matías Alvarado Mentado

Iván Martínez Ruiz

Puebla Pue.
11 de Noviembre de 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría matemática, algoritmos y razonamiento en el juego Go

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Esmeralda Zúñiga Gamboa

Asesorada por

José Matías Alvarado Mentado

Iván Martínez Ruiz

Puebla Pue.
11 de Noviembre de 2022

Título: Teoría matemática, algoritmos y razonamiento en el juego Go
Estudiante: Esmeralda Zúñiga Gamboa

COMITÉ

Dr. Carlos Guillén Galván
Presidente

Mtra. Elizabeth Martínez Banfi
Secretario

Dr. Farid García Lamont
Vocal

José Matías Alvarado Mentado
Asesor

Iván Martínez Ruiz
Asesor

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

"Vas a tener batallas duras y habrá dolor, pero eres una verdadera guerrera, así que levántate, pelea y gana."

Dedicado a mis padres: Gloria y José Alfredo, a mis hermanos: Ruby y Alfredo, a los verdaderos amigos que me acompañaron en este camino llamado universidad y especialmente a mi compañero de aventuras, mi mejor amigo desde siempre, al amor de mi vida: Christopher.

Agradecimientos

"Nosotros no luchamos solos... Porque tenemos compañeros que nos ayudan cuando estamos en apuros. Cuando estamos en un apuro, confiamos en que vendrán a ayudarnos."

Quiero agradecer a mis padres Gloria Gamboa Hernández y José Alfredo Zúñiga Zepeda, las principales personas que hicieron el duro trabajo de darme una carrera universitaria. A mis hermanos Ruby Zúñiga Gamboa y José Alfredo Zúñiga Gamboa, por ser mis principales compañeros en nuestra casa, un apoyo importante en mi vida diaria y motivación para salir adelante.

A la persona con la que puedo ser siempre yo misma, quien me enseño a ver una perspectiva diferente de la vida y a buscar soluciones tranquilas pero efectivas en cualquier situación. Que me dió y sigue dando un amor incondicional, apoyo, comprensión y respeto, a mi mejor amigo de siempre, mi compañero de aventuras y el amor de mi vida, Christopher Iván Rodriguez Franco.

A mis amigos en general, Aleyda Toledano y Zaida Gárate por haberme hecho esta estancia más amena, por compartir risas, lágrimas, fracasos y victorias juntas, como un equipo y hermanas de sangre. A Enrique Aponte, por ser un gran compañero y verdadero apoyo en todas las clases. A mis compañeros del cubículo, ellos saben quiénes son, por hacer esos días de estrés, un poco relajados al tomar una taza de café y hacer de ese espacio un lugar cálido y seguro. A mi mejor amiga de secundaria Ruth Anahí González, una de las personas que nunca se ha ido de mi vida y que hasta la fecha sigue brindándome un apoyo incondicional, a pesar de la distancia.

A mis asesores el Dr. Iván Martínez Ruiz, por haber trabajado conmigo a lo largo de varios años y haber creído en mis capacidades de desarrollar este tema, siempre siendo un profesor excelente e impecable en sus enseñanzas y al Dr. José Matías Alvarado Mentado por aceptarme como tesista y por haber contribuido extensamente en este trabajo, con artículos de su autoría y por sus conocimientos sobre el tema. A los dos, muchas gracias.

A mis sinodales el Dr. Carlos Guillén Galván, la Mtra. Elizabeth Martínez Banfi y el Dr. Farid García Lamont, por el tiempo dedicado para revisar esta tesis, gracias.

Y finalmente tengo que agradecerme a mí misma, por nunca rendirme a pesar de todos los obstáculos que tuve durante este tiempo y a lo largo de mi vida, por "Insistir, persistir, resistir y nunca desistir."

"Vive con orgullo. Si te vence tu debilidad, calienta tu corazón, aprieta los dientes y sigue adelante."

Resumen

La motivación de este trabajo de tesis, es explicar en los primeros capítulos la teoría matemática del antiguo juego chino Go (o Weiqi): la formalización de los movimientos en el tablero del juego, las tácticas, así como las secuencias agrupadas en estrategias y estilos de juego como enfoque en la Teoría de Gráficas, y dar una comparación con un segundo enfoque en la Teoría de Juegos Combinatorios que se presenta en el capítulo 4. Cabe mencionar que el primer enfoque fue desarrollado por Emil García en su tesis de licenciatura *Hacia una teoría matemática del juego de Go: tácticas, estrategias, influencia y control de territorio* [3], mientras que el segundo fue desarrollado por Antonie Blom de igual manera, en su tesis de licenciatura *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go* [8], y la única intensión es retomarlas, para dar una pequeña comparación, así mismo tomarla como teoría base, para poder realizar un programa que será explicado desde el código, tomando en cuenta el lenjuaje del go y el lenguaje python. Este programa simulará las tácticas, estrategias y una partida de go, si se desea. Así mismo, el trabajo busca conectar de manera suave y explícita la teoría matemática con los algoritmos que automatizan el juego, para visualizar esa transición.

Por otro lado, mencionar las plataformas de enseñanzas del juego para niñas y niños: el objetivo es enfatizar la relevancia del razonamiento del jugar Go en el desarrollo del pensamiento analítico y estratégico de los niños, como herramienta para un mejor desarrollo intelectual. Por medio de las plataformas de juego, las niñas y niños construyen su propio conocimiento en lugar de recibirlo ya elaborado. El aprendizaje se consigue mediante situaciones en las que hay que "explorar" estrategias de solución de problemas. El ir enfrentándose con los problemas y contradicciones que surgen, les permitirá ir reproduciendo y recreando el conocimiento que se pretende adquirir, quedando así asimilado al resto de los conocimientos significativos.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Origen

El Go se originó en China hace más de 4000 años y fue considerado una de las cuatro artes esenciales de la antigüedad China. La referencia escrita más antigua que se conoce del juego es el Zuo Zhuan (siglo IV a. C), que hace referencia a un evento histórico del año 548 a. C. Así mismo también se le menciona en el Libro las Analectas de Confucio en XVII.

Originalmente el Go se jugaba sobre una cuadrícula de 17×17, pero durante la Dinastía Tang (618-907), se impuso el uso de la cuadrícula de 19×19 . La leyenda "oficial" atribuye el origen del Weiqi al Emperador Yao (2337-2258 a. C.), quien solicitó a su consejero Shun que diseñara un juego que enseñara disciplina, concentración y equilibrio a su hijo Dazhu, quien se supone era desjuiciado. Otras teorías sugieren que el juego fue inventado por generales y jefes del ejército chino, quienes usaban piedras para señalar posiciones de ataque en mapas, o que los elementos usados actualmente para el juego fueron alguna vez usados para realizar lecturas de la suerte [1].

Figura 1.1: Mujer que juega Go (dinastía Tang ca. 744), descubierto en lastumbas de Astana.

Fuente: Creación no propia

Fue considerado el juego preferido por la aristocracia, mientras que el xiangqi era el juego de las masas. El Go era considerado una de las Cuatro Artes Tradicionales de los eruditos chinos, junto con la caligrafía, la pintura y la interpretación del instrumento musical guqin.

Expansión a Corea y Japón

El Go fue introducido en Corea entre los siglos V y VII d. C. y se volvió popular entre las clases altas del país. En Corea al juego se le denomina baduk, que evolucionó en una variante llamada Sunjang baduk en el siglo XVI. El Sunjang baduk fue la versión que más se jugó en el país hasta finales del siglo XIX.

Aunque se considera que el aristócrata Kibi no Makibi introdujo el juego en Japón. Kibi había sido comisionado por la hija del emperador Komu para regresar con lo mejor de la dinastía Tang, sin embargo se sabe que ya existía desde antes como pasatiempo para los monjes budistas. Aun así el prestigio del Go aumentó tras el regreso de Kibi no Makibi.

Figura 1.2: Partida de go durante el periodo Momoyama, Japón, siglo XVI.
Fuente: Creación no propia

Llegó a Japón en el siglo VI d. C. donde recibe el nombre go o igo. De acuerdo a los registros de la dinastía Sui, el go era uno de los tres principales pasatiempos de los japoneses del siglo VII, los otros eran el backgammon y las apuestas. Es posible que esta información llegara a través del embajador japonés en la capital del reino. Lo que hace posible que haya llegado durante el siglo VI o antes y así llegara a Japón a través de Corea.

Figura 1.3: Jugadores coreanos, en el vestido tradicional, juegan en una fotografía fechada entre 1910 y 1920.
Fuente: Creación no propia

Este juego se volvió popular en la Corte Imperial Japonesa en el siglo VIII, y entre el público general en el siglo XIII. En 1603, Tokugawa Ieyasu volvió a establecer el gobierno nacional unificado de Japón. Ese mismo año, designó al mejor jugador japonés de ese entonces, un monje budista llamado Nikkai, en el puesto de Godokoro (Ministro de Go). Nikkai tomó el nombre Honinbo Sansa y fundó la escuela Hon'inbōm asi mismo también se fundaron otras escuelas poco después. Esos institutos de Go, oficialmente reconocidos y subsidiados, contribuyeron enormemente a desarrollar el nivel de juego, e introdujeron el sistema de clasificación de jugadores.

El Go en Europa y Estados Unidos

A pesar de su elevada popularidad en el este de Asia, el juego se ha introducido muy lentamente en el resto del mundo, a diferencia de otros juegos de origen asiático. Aunque existen algunas menciones al juego en la literatura occidental a partir del siglo XVI, el Go no empezó a volverse popular hasta finales del siglo XIX, cuando el científico alemán Oskar Korschelt escribió un tratado sobre el go. Así, a comienzos del siglo XX, el Go empezó a expandirse en el imperio alemán y el imperio austrohúngaro.

Después, en 1905, Edward Lasker aprendió a jugarlo de la mano de Oscar Korschelt mientras se encontraba en Berlín. Cuando se trasladó a Nueva York, Lasker fundó el New York Go Club junto a Arthur Smith, que conocía el juego y había publicado el libro The Game of Go en 1908. El libro de Lasker, Go and Go-moku (1934) ayudó a popularizar el juego en Estados Unidos.

Edward Lasker jugó un papel decisivo en el desarrollo de Go en los EE. UU., y junto con Karl Davis Robinson y Lee Hartman fundaron la American Go Association . Dos años después, en 1937, se creó la Asociación Alemana de Go.

En La Segunda Guerra Mundial se detuvo temporalmente la expansión del juego. Durante la mayor parte del siglo XX, la Asociación de go de Japón jugó un papel vital en la propagación del juego fuera de Asia al publicar la revista Go Review en los años 1960, establecer Centros de Go en Estados Unidos, Europa y Sudamérica, y enviar maestros profesionales a realizar giras por diversas naciones occidentales.

Históricamente, este milenario juego de estrategia se ha expandido por diversas culturas y ha cautivado a una amplia gama de perfiles como: artistas, intelectuales, académicos; más recientemente a emprendedores, empresarios y financieros. La ocupación eficaz del territorio, en cualquier ámbito, es fundamental. Para ello, el juego de Go es muy revelador.

Figura 1.4: Nueva York, 1940. Edward Lásker jugando al «Go» en el pub Chumley's.
Fuente: Espaciodivergente.

El Go en México

En México se practica desde hace tiempo: son pocos los que saben de la existencia de Oscar Trigo, quien dice haberlo conocido en los años 50's. La versión más conocida es que llegó primero a la Facultad de Ciencias de la UNAM por medio del Dr. Juan José Rivaud Morayta (1943-2005).

Otras personas, de la primera generación de jugadores son: el Dr. Carlos Torres Alcaraz, actual profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM, Marcos Arámbula Moreno y el Dr. Ricardo Quintero Zazueta, actual investigador del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), quien es también el maestro del único Dojo de Go en México. También combiene mencionar, el profesor Syddhartha Ávila del Centro de Investigaciones Educativas y Artísticas Pipiolo, una escuela primaria, en donde el Go es asignatura oficial desde hace algunos años.

En la actualidad, existen diversios grupos dedicados a promover el interés por el juego de go, destacando la UNAM, donde existe un equipo de instructores, coordinados por Emil E. García y apoyados por las autoridades de la Facultad de Ciencias y por la Dirección General de Atención a la Comunidad Universitaria (DGACU).

En 2015, en La tesis *Selection of Strategies in Complex Games: Baseball, American Footballand Go* [18], para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Computación, Arturo Yee Rendón desarrolla el estudio algorítmico del juego Go, pionero en Iberoamérica. El Dr. Yee en los artículos científicos ([15], [16], [17]), que publica como parte del proceso de desarrollo de su tesis doctoral, entrena con aprendizaje automático redes neuronales artificiales para el reconocimiento de tácticas del juego, tales como: *ojos, escaleras y redes*; para la combinación estratégica de las jugadas básica.

Por otro lado, en México, la dinámica para la ocupación y disputa de territorio por dos adversarios, característica del juego de Go, se utilizó para la modelación matemática y simulación algorítmica del crecimiento del cáncer y la respuesta del sistema inmune. En el artículo científico *Cancer growth and metastasis as a metaphor of Go gaming: An Ising model approach*, publicado en 2018 por Alvarado, Barradas, Agostino y Cocho [9], se explica cómo modelar y simular la metástasis del cáncer, a través de la analogía entre el proceso del cáncer y el juego de mesa Go. En el juego, las piedras negras que juegan primero podrían corresponder a una metáfora del nacimiento, crecimiento y metástasis del cáncer. Además, jugar piedras blancas en el segundo turno podría corresponder a la inhibición de la invasión del cáncer. Por lo tanto, el modelado matemático y la simulación algorítmica de Go pueden beneficiar los esfuerzos para implementar terapias para superar la enfermedad del cáncer al proporcionar información sobre el crecimiento celular y la expansión en un área de tejido. Usando el hamiltoniano de Ising, que modela el intercambio de energía en partículas que interactúan, para modelar la dinámica del cáncer [9].

Recientemente, también el juego de Go ha tenido un desarrollo en la formalización de la teoría en la tesis de Licenciatura en Matemáticas de la UNAM, *Hacia una teoría matemática del juego de Go: tácticas, estrategias, influencia y control de territorio*, escrita por Emil García y dirigida por el Dr. Matias Alvarado-Mentado [3]. En esta tesis se hace un desarrollo de la teoría matemática del juego, que inicia con la definición formal de piedra, como nodo o trayectoria sobre el tablero; enseguida, se definen las tácticas y estados del juego y se pasa a definir los conceptos de estrategias de influencia y control territorial. Y para cuantificar la fuerza que tiene cada grupo de piedras de un mismo color en el tablero, se introduce una función de energía asociada al sistema de juego de go. La tesis de Emil García es base en este trabajo de tesis.

1.2. Inteligencia Artifical y el Go

AlphaGo: Primer IA en derrotar al campeón mundial de Go

Go es conocido como el juego clásico más desafiante para la inteligencia artificial debido a su complejidad. A pesar de décadas de trabajo, los programas de computadora Go más fuertes solo podían jugar al nivel de los aficionados humanos. Los métodos estándar de IA, que prueban todos los movimientos y posiciones posibles usando un árbol de búsqueda, no pueden manejar la gran cantidad de posibles movimientos de Go o evaluar la fuerza de cada posición posible en el tablero [6].

Por simples que parezcan las reglas, Go es profundamente complejo. Hay un asombroso 10 a la potencia de 170 posibles configuraciones de placa, más que la cantidad de átomos en el universo conocido. Esto hace que el juego de Go sea un googol veces más complejo que el ajedrez.

AlphaGo, un programa informático desarrollado por DeepMind, que combina un árbol de búsqueda avanzado con redes neuronales profundas. Estas redes neuronales toman una descripción de la placa Go como entrada y la procesan a través de varias capas de red diferentes que contienen millones de conexiones similares a neuronas.

Una red neuronal, la “red de políticas”, selecciona el siguiente movimiento para jugar. La otra red neuronal, la “red de valor”, predice el ganador del juego. Introdujimos AlphaGo en numerosos juegos de aficionados para ayudarlo a desarrollar una comprensión del juego humano razonable [6].

En 2016, AlphaGo, fue el primer programa de computador capaz de derrotar a un campeón mundial en go y este avance en el campo de la inteligencia artificial llegó casi 20 años después de que los grandes maestros de ajedrez fueran derrotados por programas como Deep Blue [6].

Con el tiempo, AlphaGo mejoró y se volvió cada vez más fuerte y mejor en el aprendizaje y la toma de decisiones. Este proceso se conoce como aprendizaje por refuerzo. AlphaGo derrotó a los campeones mundiales de Go en diferentes escenarios globales y podría decirse que se convirtió en el mejor jugador de Go de todos los tiempos.

Los creadores de DeepMind aseguran que el objetivo de esta tecnología es “resolver inteligencia”, la cual están tratando de lograr mediante la combinación de “las mejores técnicas de aprendizaje automático y Neurociencia de Sistemas” para construir potentes algoritmos de aprendizaje de propósito general.
Actualmente, el enfoque de la compañía está en publicar investigaciones en sistemas computacionales que son capaces de jugar y desarrollar estos sistemas, que van desde juegos como Go hasta Arcade [7].

1.3. Plataformas de juego

Como vemos, hoy se juega go en una diversidad de formatos, y hasta se han creado programas para ello, para poder competir en torneos muy prestigiados en el mundo entero: de manera presencial desde la histórica Copa Honimbohasta la copa Samsung, con generosos premios y reconocimientos; asimismo, en plataformas virtuales como KGS, OGS, Pandanet, entre muchas otras [3]. México es potencia Iberoamericana del juego de Go, en la rama amateur, junto con Argentina y Chile, y en sinergia con varios países de América Latina. La mayoría de los grandes jugadores profesionales son chinos, coreanos y japoneses; de manera sostenida es creciente el número de maestros profesionales de Europa y Estados Unidos.

Veamos por lo menos algunas plataformas que nos ayudan a aprender y prácticar la reglas del juego. Además de poder competir y mejorar la habilidad de resolver problemas basados en la vida o muerte, en términos del Go.

KGS Go Server

El KGS Go Server, conocido hasta 2006 como Kiseido Go Server, es un servidor de juegos desarrollado por primera vez en 1999 y establecido en 2000 para que la gente juegue Go. El sistema fue desarrollado por William M. Shubert y su código ahora está escrito completamente en Java. En la primavera de 2017, Shubert transfirió la propiedad a la American Go Foundation.

El servidor de Go KGS se distingue por la posibilidad de crear comunidades que facilita encontrar personas con las que poder jugar. Muestra de ello son la «Sala andaluza» y la «Sala española».

Para comenzar a jugar de forma inmediata puedes hacer click en el enlace «Juega a go ahora!». Esto te llevará a una nueva página donde se nos pide un usuario y contraseña. Si aún no lo tienes, puedes registrar tu cuenta de usuario o bien entrar como invitado.

KGS permite juegos en tableros de cualquier tamaño cuadrado desde 2x2 hasta 38x38, incluidos los tableros de 19x19, 13x13 y 9x9. Hay varios tipos de juegos que se ofrecen en KGS, como por ejemplo:

1. Clasificados, que se utilizan para los cálculos de calificaciones de KGS. Solo se pueden clasificar los juegos jugados en tableros de 19x19, y solo si ambos jugadores usan la opción de clasificación. El resto de los tipos de juegos de esta lista no están clasificados.

2. Juegos didácticos, que permiten al jugador de piedras blancas iniciar la exploración de líneas alternativas de juego.

3. Rengo , que son para dos parejas de jugadores, que de manera general que el Pair Go donde los jugadores pueden ser de cualquier género. Cada jugador del equipo debe jugar por turno,

jugar fuera de secuencia normalmente resultará en una pequeña penalización (generalmente tres prisioneros)

4. Torneo, con emparejamientos gestionados por el sistema de torneos KGS.
5. Simul, en el que un jugador juega 2 o más juegos al mismo tiempo.
6. Demo, en la que una persona juega piedras blancas y negras, y puede tener líneas de juego alternativas. Los juegos de demostración se utilizan para revisiones, conferencias y lecciones, así como para retransmitir juegos de interés que no son de KGS.

Además, los juegos no clasificados pueden marcarse como privados.

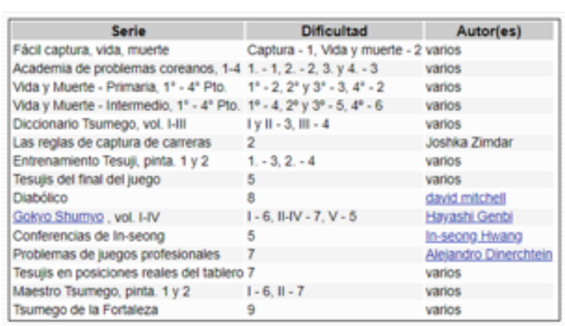
KGS ofrece 4 controles de tiempo : Ninguno, Absoluto, Canadiense y Byo-yomi. También, los jugadores de KGS pueden ser calificados utilizando niveles de 30 kyu a 9 dan , de acuerdo con sus resultados en juegos clasificados. Y una ventaja, es que los jugadores profesionales certificados pueden usar sus rangos profesionales para torneos fuera de la plataforma.

Y es uno de los mayores servidores mundiales de Go, que llega a más de 1500 usuarios simultáneos en un día. Además, lista de jugadores en el top 100 puede ser consultada en la plataforma.

Tsumego Hero

Tsumego Hero es un sitio de problemas de tsumego (es el término japonés para un tipo de problema de go basado en la vida o la muerte) y tesuji en inglés , activo desde al menos 2018. Esta plataforma de tsumegos ayuda a mejorar la capacidad de lectura a la hora de analizar una posición en el tablero de Go.

Las series de problemas propuestos se clasificaron previamente en dificultad por un sistema de cinco estrellas, con más estrellas indicando una mayor dificultad, como se describe en la tabla a continuación. En algún momento desde octubre, se cambió el sistema de calificación y ahora es un rango numérico del 1 al 9, siendo 9 el más difícil.



Serie	Dificultad	Autor(es)
Fácil captura, vida, muerte	Captura - 1, Vida y muerte - 2	varios
Academia de problemas coreanos, 1-4	1. - 1, 2. - 2, 3. y 4. - 3	varios
Vida y Muerte - Primaria, 1° - 4° Pto.	1° - 2, 2° y 3° - 3, 4° - 2	varios
Vida y Muerte - Intermedio, 1° - 4° Pto.	1° - 4, 2° y 3° - 5, 4° - 6	varios
Diccionario Tsumego, vol. I-III	I y II - 3, III - 4	varios
Las reglas de captura de carreras	2	Joshka Zimdar
Entrenamiento Tesuji, pinta. 1 y 2	1. - 3, 2. - 4	varios
Tesujis del final del juego	5	varios
Diabólico	8	david mitchell
Gokyo Shumyo , vol. I-IV	I - 6, II-IV - 7, V - 5	Hayashi Genbi
Conferencias de In-seong	5	In-seong Hwang
Problemas de juegos profesionales	7	Alejandro Dinerchtein
Tesujis en posiciones reales del tablero	7	varios
Maestro Tsumego, pinta. 1 y 2	I - 6, II - 7	varios
Tsumego de la Fortaleza	9	varios

Figura 1.5: Tabla de dificultades actualizada.
Fuente: Tsumego Hero.

En los problemas se utilizan varias convenciones. El objetivo es matar a un grupo o evitar que lo maten. Los problemas no especifican cuántas jugadas hay en la solución (como sería habitual en un problema de ajedrez).), porque el objetivo del problema rara vez es capturar piedras; tan pronto como se realiza el primer movimiento correcto, el grupo amenazado puede considerarse vivo (o muerto). Los diagramas de solución mostrarán la resistencia más tenaz que el oponente puede ofrecer o líneas que requieren tácticas interesantes o engañosas. Si solo se muestra una parte del tablero, como suele ser el caso, se puede suponer que el resto del tablero está vacío. La convención moderna es que los problemas bien compuestos no permiten que el grupo amenazado escape a áreas vacías del tablero (esta es una forma en que estos problemas difieren de los juegos reales), aunque el escape y la recaptura eran un tema en los problemas clásicos.

OGS (online-go)

OGS o también conocido como "online-go" es un servidor de Go que no requiere java ni instalar ningún programa en el ordenador.

OGS en el 2011 era uno de los servidores Go por turnos[1] más populares. Pero a partir del 2014 maneja juegos en tiempo real[2] y por turnos directamente desde el navegador web.

En esta plataforma, sólo se requiere hacer una cuenta, dirigiéndose a `https://online-go.com/register` o navegando en la página de inicio de OGS, haciendo clic en Iniciar sesión en la esquina superior derecha de la pantalla y luego en el botón de registro. OGS proporciona una colección de contenido, recursos, herramientas y tecnologías que permiten a los usuarios disfrutar del juego de Go e interactuar con otros usuarios.

Cuando se inicia el juego, OGS te clasifica con un sistema basado en la fórmula Glicko II (`https://en.wikipedia.org/wiki/Glicko_rating_system`) para poder ofrecer juegos emocionantes e igualitarios. El rango inicial (junto a al nombre) se muestra como "?" porque el sistema no tiene información sobre la fuerza real del jugador. Esto cambiará rápidamente si juega varias partidas igualadas (generalmente se necesitan alrededor de 5) y apartir de esto, el rango junto al nombre se convierte en kyu/dan tradicional.

Encontrar un juego en esta plataforma, tiene dos distintas formas de hacerlo: **Automatch (Quick Match Finder)** intentará encontrar automáticamente un juego con preferencias similares a las del jugador ó **Custom Match** que permite especificar exactamente qué configuración desea y luego mostrar el desafío públicamente para que cualquiera pueda elegirlo. Pero también tiene opciones como: desafiar a un jugador (un amigo) directamente ó juega con un Bot (IA).

La plataforma, cuenta con distintos apartados, que permite personalizar el espacio de juego, más aparte dar información referente a la comunidad de OGS. Y son las siguientes:

1. En realidad jugando un juego: donde encuentras todo referente a controles básicos, chatear en el juego, analizar un juego, terminar un juego y anotar un juego, y controles de juego adicionales.

2. Reseñas, demostraciones y rompecabezas: donde el usuario revisa un juego, un tablero de demostración (hacer movimientos para ambos jugadores), resolver y/o crear rompecabezas.

3. Comprender la revisión de IA: cada vez que termina un juego en OGS, se pone automáticamente en cola para una revisión de IA gratuita (si el jugador u oponente son partidarios del sitio, se iniciará una revisión de IA completa y estará disponible para ambos).

[1] Un jugador registra un movimiento con el servidor, y el servidor presentará este movimiento al oponente la próxima vez que se conecte al servidor. De esta manera, los jugadores nunca necesitan estar en línea simultáneamente y aún pueden jugar entre sí. Éstos también realizan un seguimiento de los controles de tiempo, pero estos generalmente se miden en días, en lugar de minutos, como es habitual en los servidores de tiempo real.

[2] Generalmente, esto implica una configuración en la que ambos jugadores usan un programa cliente para conectarse al servidor, que luego transmite los movimientos de un jugador a otro. El servidor también realiza un seguimiento de los controles de tiempo, calcula el puntaje y, si corresponde, calcula las calificaciones de los jugadores en función de sus resultados. Dichos servidores requieren que los jugadores descarguen un programa cliente, y muchos de estos programas se han desarrollado para una amplia gama de plataformas.

4. Chatear e involucrarse en la comunidad: sala de chat, mensajes personales, foros, resolución de problemas/contacto con moderadores, grupos y ser parte de ellos.
5. Torneos: acerca de ellos y crear torneos personalizados.
6. Escaleras: escaleras-básicos, ¿a quién se puede desafiar en una escalera?, ¿qué sucede cuando se desafía a alguien en una escalera?, retirarse de una escalera y tiempo de espera en una.
7. Rengo: es una variante de Go para jugar en equipo. Estos equipos pueden consistir en una pareja (de género equilibrado) de un jugador masculino y femenino, pero eso no es obligatorio. Los equipos también pueden ser más grandes que dos jugadores.
8. Entre otras.

Pandanet

Pandanet (originalmente llamado IGS, abreviatura de Internet Go Server), ubicado en Tokio, Japón, es un servidor que permite a los jugadores del juego Go observar y jugar contra otros a través de Internet. Iniciado el 2 de febrero de 1992 por Tim Casey, Chris Chisolm y Mark Okada, trabajando en la Universidad de Nuevo México, y hasta el 5 de abril de 1993, continuó en la Universidad de California, Berkeley y UC San Francisco (con un adicional servidor en el Instituto Pasteur, Francia), fue el primer servidor de este tipo. Después de su inicio inicial, algunos de sus miembros ayudaron a mejorar el servidor escribiendo software con una interfaz gráfica; y así nació IGS.

Mientras se está en una sala de Pandanet, solo se verán los jugadores y sus juegos, pero también se puede chatear con las personas. Al iniciar un juego, se puede hacer de distintas maneras: desafiar a un jugador, estableciendo el estado en buscando y sea desafiado ó usando el sistema de búsqueda de oponentes.

Algo interesante, es que también se pueden descargar las partidas, se ingresa a **Net Social Plaza**, con la misma combinación de nombre de usuario/contraseña que usa para iniciar sesión en IGS, haciendo clic en “Registros de juegos, Kifu” en “Información personal”, y se obtendrá un archivo completo de los juegos realizados.

Además de ser un servidor Go, Pandanet también alberga varias galerías de arte. La galería principal contiene arte japonés y chino que tiene un tema relacionado con Go. Otras galerías se ocupan de fotografías antiguas de Go y fotografías del siglo XIX y principios del XX, relacionadas con San Francisco y Chinatown .

También transmite partidos de campeonato en vivo para los principales eventos profesionales, incluidos los títulos de Meijin , Honinbo y Judan , y el torneo de parejas profesionales de la Copa Ricoh .

El primer jugador profesional en registrarse en IGS fue Jiang Zhujiu -9 dan-, el 24 de abril de 1992, lo que inició la tendencia de membresía de jugadores dan de alto nivel que continúa hasta el día de hoy. Durante los meses de julio y agosto de ese año se llevó a cabo el primer torneo profesional, con más de 300 partidos disputados.

En septiembre de ese año, el famoso torneo Meijin Sen de Japón se mostró en vivo en IGS a una audiencia de muchas naciones. Jugado en una habitación de hotel de Ámsterdam por Kobayashi Koichi y Otake Hideo, los usuarios jansteen y AshaiRey escribieron el juego jugada por jugada, respectivamente, mientras miraban el juego en la televisión. Fue presenciado por más de

100 observadores en IGS y tardó 16 horas en completarse.

Color Go Server

Color Go Server (CGS), es un servidor del juego del Go en Internet que te permite jugar contra jugadores de todo el mundo, en tiempo real y directamente desde tú navegador web. Su principal propósito es facilitar el descubrimiento y aprendizaje del Go, actualizando su diseño y añadiendo algunas herramientas para hacer que las reglas sean más fáciles de comprender. Y son las siguientes:

1. Grafismo: cuando se juega Go, cada piedra colocada irradia cierta influencia en el tablero. Este concepto es muy complicado de visualizar para un principiante en un tablero tradicional. CGS remarca los territorios potenciales haciendo visible esa influencia.

2. Atari: CGS resaltará esta situación reduciendo el tamaño de las piedras a las que le queden una sola libertad.

3. Libertades: Para ayudar a que los jugadores principiantes queden en situación de Atari, ofrece la opción de mostrar las libertades de las piedras.

4. Temas visuales: el jugador podrá elegir su diseño preferido entre diferentes temas visuales, además de reajustar otros parámetros como la intensidad de la rejilla o la intensidad de la influencia.

5. Revisión de partida: ofrece herramientas para revisar las partidas por él mismo o por otros jugadores en tiempo real. Un jugador más fuerte, hará notar los errores y propondrá mejores jugadas.

6. Emparejamiento automático y Desafío personalizado: por defecto, cuando el jugador hace clic en el botón "Jugar" se abrirá la ventana emergente "Emparejamiento automático", que muestra solo unas pocas opciones. Si el jugador quiere crear un desafío personalizado, puede hacer clic en el icono de ajustes de la ventana "Emparejamiento automático."

7. Insignias: al jugar en CGS, de vez en cuando el jugador desbloqueará nuevas insignias. Estas constatarán que hizo acciones específicas para ganárselas y se podrán mostrar en el perfil, resaltando alguna si así lo desea.

8. Localización: Una de las principales metas de CGS es ser accesible a todo el mundo. Por eso motivo está disponible en múltiples idiomas gracias a los voluntarios, quienes ayudaron a traducir CGS.

9. Charlar: los jugadores podrán enviar mensajes privados, crear grupos de conversación o hablar en salas de conversación públicas.

10. Carga de ficheros SGF: se puede cargar un fichero SGF desde tu computadora para ver cómo progresa la influencia a lo largo de la partida.

1.4. ¿Por qué es muy relevante saber jugar Go?

Las reglas del juego Go son simples, que no parecen ser inventadas por el hombre, sino más bien descubiertas, como las leyes de la naturaleza.

Desde el primer movimiento, cada jugador construye una formación. De hecho, hay tanto espacio para la expresión individual que se cree que ninguna partida de go se ha jugado en el patrón exacto de cualquier otro anterior. Las posibilidades del go son inimaginables, tanto que el jugador se pierde sin encontrar un objetivo que lo guíe. Hay más de 10200 patrones diferentes disponibles [1].

El aprendizaje del go no es nada fácil. Un juego de go puede alcanzar una maravillosa complejidad artística, nacida de la creatividad intrínseca de un individuo y realizada en el significado de las formas que crea en en el tablero. El go es una aventura estética de mayor importancia que el mero hecho de ganar o perder. Sin embargo, en cada partida cada jugador gana en cierta medida y necesariamente pierde en cierta medida, el yin y el yang. El subcampeón puede reclamar una parte gratificante de los logros en casi todas las partidas de go. La acción en el tablero de go refleja un esfuerzo personal hacia el equilibrio y la armonía interior, un ideal tanto espiritual como un ideal espiritual y práctico. El éxito en el tablero está relacionado con el éxito en este juego interior. El go desafía y amplía inevitablemente la capacidad de la capacidad de concentración del jugador. La convincente dinámica de del juego tiende a ser completamente absorbente [1].

Todas las situaciones que surgen de los objetivos simples del go, son lo suficientemente complejas como para haber frustrado todos los intentos de programar un ordenador que juegue al go de forma competitiva, que por suerte ya lo hicieron. La estrategia efectiva del go es sublimemente sutil. Por ejemplo, un jugador puede atraer a un oponente para que consiga una serie de pequeñas victorias, asegurando así un triunfo menos obvio pero mayor para el estratega. La avaricia y la agresividad precipitada suelen conducir a la caída. Una solución fácil puede tener éxito de inmediato, pero más tarde resulta ser un grave inconveniente. Los errores rara vez son definitivos, sino que el éxito suele depender de la recuperación efectiva de la adversidad, de la voluntad de aguantar los golpes. La combinación de juicio y capacidad de pensamiento global necesaria en los juegos de alto nivel es, en gran medida, lo que reduce a los ordenadores y programas más potentes existentes a una virtual impotencia cuando se enfrentan a un oponente humano experimentado, aunque no es del todo imposible [1].

Quizás lo más importante es que el go es un medio de comunicación entre las dos personas, un debate amistoso, punto-contrapunto. La jugada de cada pieza es una declaración, la mejor declaración que el jugador puede hacer, y cada una es una respuesta al conjunto de la composición. Cada obra puede constituir una respuesta simple o sutil, ampliar otras declaraciones o comenzar a explorar nuevas áreas.

Los jugadores de cualquier nivel de habilidad pueden disfrutar del go. Dos principiantes jugando juntos pueden experimentar tanta emoción como dos jugadores veteranos. Una partida de go puede generar en los jugadores una sorprendente gama de emociones.

1.5. Objetivos de la tesis

Objetivos generales

1. Mostrar y resaltar dos teorías desarrolladas del juego de Go en distintos campos de la matemática.
2. Presentar las aportaciones de las dos teorías y crear una discusión entre los dos enfoques.
3. Inspirar a futuros proyectos, interesados en seguir formalizando la teoría del Go y de otros juegos, mostrando que su parte algorítmica, puede ser la base del mismo desarrollo.

Objetivos específicos

1. Se presentará un programa, desarrollado en lenguaje python, basado en las reglas, tácticas y estrategias del juego. Esto con el fin de conectar la teoría matemática y los algorítmos que automatizan el juego.

2. Sustentar el programa con diagramas de flujo que muestran la estructura del código.

3. Presentar diversas plataformas de juego, donde el lector pueda jugar libremente Go, teniendo herramientas que faciliten el aprendizaje y potencien las habilidades que se obtienen jugando. Dando a conocer las características, propósitos y beneficios que cada una de ellas ofrece.

Capítulo 2

El juego de Go

El objetivo en un partido de Go es controlar más territorio que el adversario en el tablero.

2.1. Antecedentes históricos

Es un juego de estrategia para dos personas, sobre un tablero cuadriculado de 19x19, vease en la figura 2.1. El objetivo en un partido de Go es controlar más territorio que el adversario en el tablero.

El go se originó en China hace unos 4000 años. Japón importó el go alrededor del año 700 d.C. Fue considerado una de las cuatro artes esenciales de la antigüedad China. Los textos más antiguos que hacen referencia al Go son las Analectas de Confucio [2].

Hoy en día, el go sobrevive en su forma original como el juego más antiguo del mundo.

Figura 2.1: Tablero de Go durante una partida.

Todo el juego es visible en el tablero. El juego comienza en un tablero vacío, excepto en las partidas con desventaja (el jugador con menos experiencia suele tener una ventaja equitativa). La acción del juego es viva y emocionante, saltando de un frente de batalla a otro mientras cada contendiente busca una ventaja de posición. Las piedras se colocan con el propósito de establecer fronteras que delimiten regiones, eventualmente vacías del tablero; el territorio formado por tales regiones rodeadas por piedras de un mismo color, pertenecen al jugador que juega con ellas [2].

Toda partida de go está llena de posibilidades de cambios; la pérdida en una parte del tablero puede compensarse o mitigarse con una ganancia en otra parte. Es frecuente que un jugador pueda forzosamente ganar una ventaja local con el resultado de una pérdida a mayor escala. Todas estas posibilidades de "cambios" constituyen mucha de la complejidad estratégica del go. La mayoría de las jugadas puede tener numerosas ventajas e inconvenientes de naturaleza sutil [2].

La estrategia general del go es expandir el territorio de uno cuando sea posible, atacar los puntos débiles del oponente (grupos que posiblemente puedan matarse), y siempre ser consciente del "estado de vida" de los propios grupos. Las libertades de los grupos son contables. Situaciones donde dos grupos opuestos deben capturarse el uno al otro para poder vivir se llaman "carrera de captura" ('semeai' en Japonés) [2]. En una carrera de captura, el grupo con mayores libertades (y/o mejor forma) terminará siendo capaz de capturar las piezas del oponente. Las carreras de capturas y las cuestiones de vida y muerte son ejemplos de la complejidad y desafíos del Go.

Una vez que las fronteras están bien definidas y el territorio consolidado, se cuantifica: el jugador con mayor territorio es el ganador.

2.2. Reglas básicas

El juego comienza con el tablero vacío de piedras. El objetivo del juego es controlar más territorio en el tablero.

Los 9 puntos que se observan en la cuadrícula, son llamados puntos estrella o hoshi, que sirven de guía para colocar piedras, y de esta manera el jugador obtenga lugares estretégicos para el manejo de un mejor territorio.

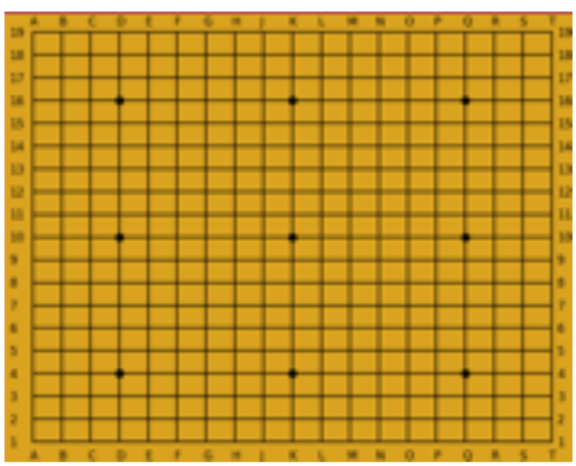


Figura 2.2: Puntos estrella o hoshi.

Las piezas del juego se llaman piedras, en cual un conjunto es negro y otro blanco. Las piedras se colocan en cualquiera de las intersecciones del tablero. Una vez colocada una piedra, nunca se mueve a otra intersección. El jugador que toma las negras empieza primero y las blancas juegan el siguiente turno. Solamente se puede saltar un turno cuando está por terminar el juego, esta condición pasa cuando un jugador decide que ya no tiene buenas jugadas para realizar.

En este juego se utilizan un conjunto de tácticas, las cuales se concretan de manera específica para ganar control o influencia sobre el tablero. Algunas de ellas son: escalera, red, reducción, invasión y ojo [3].

En Go, las tácticas se ocupan de la lucha inmediata entre piedras, la captura y salvación de piedras, la vida, la muerte y otros problemas localizados en una parte específica del tablero. Los problemas más importantes, que no se limitan solo a una parte de la junta, se denominan estrategias y se tratan en su propia sección.

De manera concreta, el uso de estas tácticas da paso a la conformación de estrategias, las cuales se entienden como un plan para hacerse del mayor control territorial posible. Las principales estrategias son: influencia, moyo, territorio y joseki [3].

Por otra parte, la vida y muerte es un concepto fundamental en el juego del go, en el que se define el estatus de un grupo diferenciado de piedras como “vivo”, de manera que tiene posibilidad de permanecer en el tablero, o “muerto”, de manera que el grupo será “capturado”. La idea básica puede expresarse sencillamente así: Un grupo debe tener dos ojos (libertades internas seguras) para vivir.

Las situaciones de vida y muerte ocurren cuando un área con piedras está contenida en un área limitada por piedras enemigas, de manera que el estatus del grupo es cuestionable. Como la pérdida de un grupo desarrollado puede significar a menudo la derrota en el juego, y como el uso eficiente de cada movimiento es importante, conocer el estatus de vida y muerte de un grupo propio (al igual que el de los grupos enemigos) es una habilidad importante a cultivar si se quiere ser un jugador fuerte.

2.3. Desarrollo del juego

Un factor esencial en el desarrollo del juego es colocar las piedras en los cruces del tablero tal que hagan una red de cooperación para controlar el tablero: implica restringir la cooperación entre piedras adversarias y eventualmente capturarlas minimizando sus *libertades*.

Una libertad es una intersección adyacente vacía, (un caso particular vease en la figura 2.3). Una piedra singular tiene 4 libertades máximo. Si una piedra rival ocupa alguna de estas 4 intersecciones entonces la piedra solo tendrá 3 libertades.

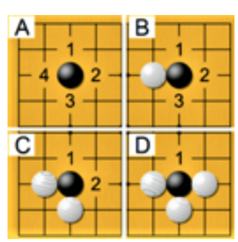


Figura 2.3: Las cuatro libertades (puntos adyacentes vacíos) de una sola piedra negra.

Ahora, hay varios tipos de situaciones que definen una libertad; Un grupo con un ojo tiene la característica que en caso de ser encerrado su ultima libertad será la intersección vacía adyacente a la intersección en la que se encuentra una piedra. Existen también ciertos grupos a los cuales no se les puede dejar sin libertades, a estos grupos se les conoce como grupos de 2 ojos, no hay nada que el oponente pueda hacer para capturar tal grupo, porque no puede eliminar todas las libertades del grupo jugando una sola piedra por turno. Por último, el término Atari, se refiere a la situación en que una piedra o grupo de piedras poseen una sola libertad.

Por otra parte, las piezas pueden ser capturadas si están completamente rodeadas por las piezas del oponente, por lo que el juego debe realizarse para obtener el máximo territorio para cada jugador, y al mismo tiempo posicionarse para defenderse (evitando que sea capturado).

De manera contraria a las capturas, la influencia que ejerce un grupo de piedras es la capacidad potencial que tiene una región del tablero por convertirse en territorio. A diferencia del enfoque territorial orientado a las esquinas y orillas, la influencia se ejerce en todas las direcciones del tablero. Esto implica que lo que se construye no es territorio sólido, pero si algo que tiene la capacidad de serlo, pero que dependerá de como se desarrolle para confirmar si se consolida o no [3].

2.4. Definiciones: piedra, libertad, captura

Para explicar y entender el desarrollo de una partida de Go necesitamos definir los conceptos de piedra, libertad y captura, los cuales tomamos de [3]:

Definición 2.4.1. *Piedras o Hishi: Unidad (pieza) blanca o negra del tablero, que es colocada por los jugadores uno a uno en las intersecciones vacías del tablero.*

Definición 2.4.2. *Libertad: Una libertad es una intersección vacía al lado de un grupo de piedras, es decir; intersección vacía adyacente a la intersección en la que se encuentra una piedra. Una sola piedra tiene 4 libertades, Cada vértice tiene 4 vértices contiguos o adyacentes a través de los cuales una piedra colocada en el puede desarrollarse en un grupo.*

Definición 2.4.3. *Grupos: Un grupo es un conjunto de piedras que se encuentran unidas en los vértices de la cuadrícula.*

Definición 2.4.4. *Conexión: Cuando más de una piedra o grupos de piedras se unen para formar un solo grupo de piedras.*

Definición 2.4.5. *Captura: Cuando una piedra o grupo de piedras es rodeada completamente por el grupo de piedras del oponente. Al ser encerradas, esta piedra o grupo de piedras son retiradas del tablero, pues pierden sus libertades y son consideradas capturas del oponente.*

Definición 2.4.6. *Atari: Una piedra o grupo es capturado cuando no tiene libertades. Una piedra o grupo con una sola libertad es estar en atari.*

Definición 2.4.7. *Esfera de influencia: Es una región del tablero que está distribuida con piedras del mismo color, con probabilidad de convertirse en territorio.*

2.5. Reglas del juego

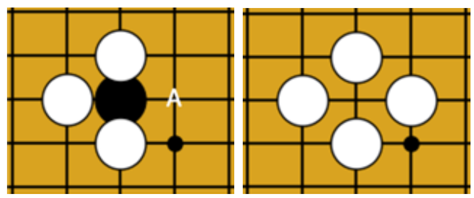
En esta sección veremos las reglas del juego. El orden en el que se abordan todos estos elementos no es arbitrario; para avanzar es necesario entender todo lo visto previamente.

Captura

La regla dice que:

Al efectuar una jugada que ocupa la última libertad de una piedra o grupo contrario, esta piedra o grupo se remueve del tablero y el jugador que hizo la captura las conserva hasta el final de la partida. Estas piedras contarán entonces como puntos a favor para dicho jugador, uno por cada piedra capturada [4].

Por ejemplo, Blanco puede jugar en A para capturar la piedra negra.

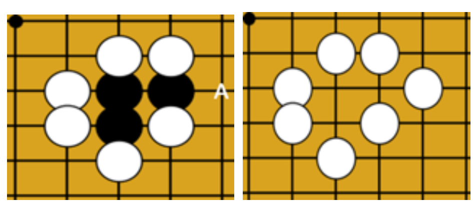


(a) Piedra en tari (b) Captura

Figura 2.4: Captura 1

Las piedras que están conectadas verticalmente u horizontalmente forman un grupo, pelean juntas y son capturadas como una unidad.

Por ejemplo, Blanco capturará tres piedras con una jugada en A.



(a) Grupo de piedras en atari (b) Captura

Figura 2.5: Captura 2

Suicidio

La regla dice que:

Uno no puede jugar en un punto que quite la última libertad de un grupo propio (resultando una "autocaptura"), a menos que con esta jugada se capturen piedras del oponente [4].

No se permiten las jugadas que terminen en estar completamente rodeadas. Dos ejemplos:

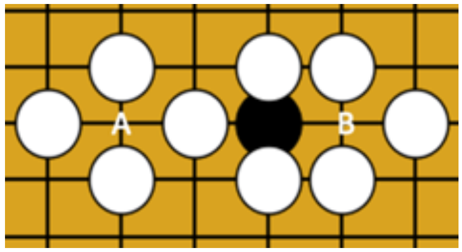


Figura 2.6: Las jugadas A y B son suicidio para Negro.

Las piedras negras terminarían completamente rodeadas. No obstante, Negro puede jugar en C ya que también captura dos piedras blancas:

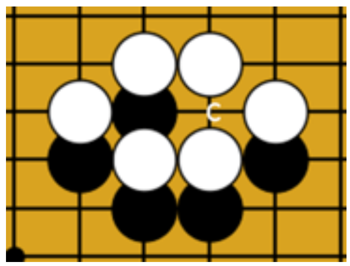


Figura 2.7: Suicidio 2

La regla del Ko: Infinito en Japonés

Posición en la que una piedra se encuentra en atari pero al ser capturada, la piedra que captura también queda en atari, haciendo de esto un ciclo. La recurrente realización de amenazas de ko por un jugador y otro se llama "lucha de ko".

Siguiendo las reglas japonesas, en realidad, la regla del ko se expresa así:

Si un jugador captura una piedra en situación de ko, entonces el oponente tiene prohibido recapturar inmediatamente [4].

En el ejemplo de abajo, figura 2.8, no se puede capturar de inmediato. Sin embargo, puede recapturar después de que juegue primero en otro sitio. Así que puede hacer una amenaza en otro lugar y luego recapturar el ko después de que el adversario responda a la amenaza.

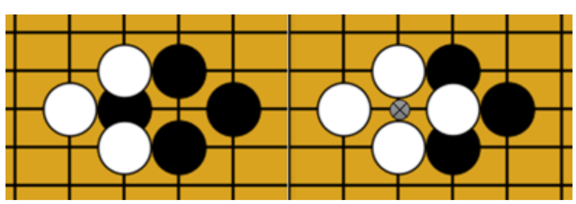


Figura 2.8: Esta situación se puede repetir infinitamente.

2.6. Tácticas

Si bien las reglas del Go son relativamente simples, el juego posee una inmensa complejidad. Dar una exposición completa de táctica es muy difícil, si no imposible. Es por eso que, con los elementos del juego conocidos, veremos solamente algunas tácticas más relevantes, con el fin de que el jugador tenga al menos una guía a seguir a la hora de decidir sus jugadas y un punto de partida en el estudio del juego.

1. **Invasión.** Esta táctica se refiere cuando un jugador coloca una piedra dentro del territorio o esfera de influencia del rival. El objetivo de esta táctica, es crear un grupo incondicionalmente vivo dentro de la esfera de influencia rival o que las piedras invasoras corten su conexión de la esfera de influencia para escapar hacia una región del tablero donde no haya riesgo de ser capturado. En contraparte el rival hará todo lo posible para encerrar al grupo invasor y capturarlo.

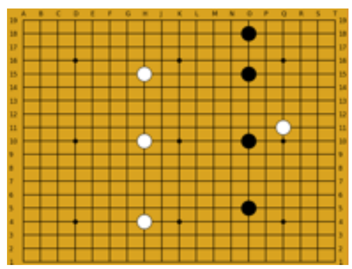


Figura 2.9: Invación

2. **Reducción.** Una reducción es una jugada que se realiza en las colindancias de la frontera de una esfera de influencia rival con el propósito de limitar el desarrollo de dicha esfera de influencia. A pesar de que una reducción no se juega dentro de la esfera de influencia rival también es susceptible a ser atacada por el rival.

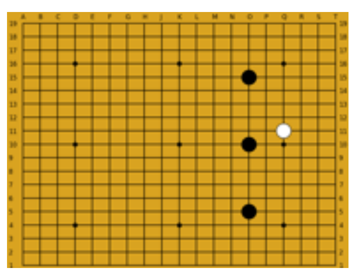


Figura 2.10: Reducción

3. **Escalera.** Para capturar piedras en una escalera, el jugador utiliza amenazas de capturas, llamadas atari al oponente hacia un patrón de zigzag. Salvo que el patrón vaya hacia piedras amigas, las piedras de la escalera no pueden evitar ser capturadas. La captura se concreta cuando el grupo de piedras bajo ataque llega a la orilla del tablero o cuando encuentra una piedra rival que no le permite seguir escapando.

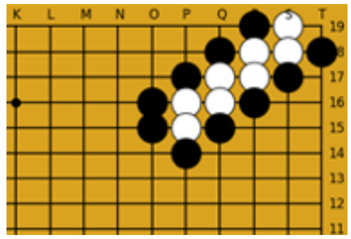
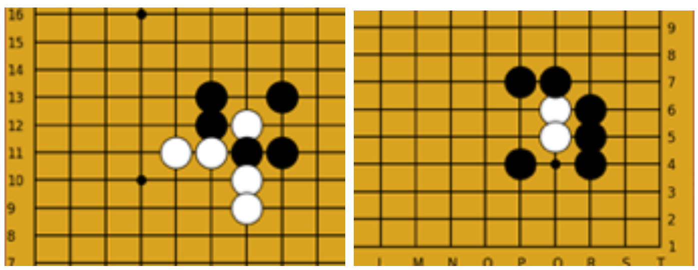


Figura 2.11: Escalera

4. **Red.** La técnica de la red o geta consiste en rodear un grupo contrario impidiéndole que escape, colocando una piedra en una posición diagonal al grupo bajo ataque. Si intenta escapar, simplemente lo bloqueamos eliminando sus libertades.



(a) Ejemplo 1 (b) Ejemplo 2

Figura 2.12: Red

5. **Ojo.** En esta táctica, el vértice vacío es rodeado por un grupo de piedras del mismo color, con una posibildad de escape. Esta carazterística está dada por tener la posibilidad de que si es encerrado, la ultima libertad será el ojo (el vértive vacío).

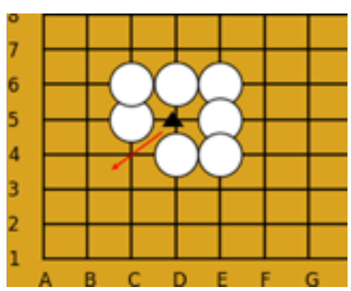


Figura 2.13: Ojo

2.7. Estrategias

Así como en la sección anterior dijimos que las posibilidades tácticas en el Go son muchísimas, con las estrategias pasa lo mismo, dando lugar al hecho de que cada persona adquiere un estilo de juego propio y único, haciendo que cada partida de Go sea interesante, sin importar tanto el nivel de los jugadores. Presentamos algunas estrategias más relevantes.

1. **Influencia.** Es una manera de definir al potencial de capacidad que tiene una región del tablero en consolidarse como territorio debido a la distribución de las piedras de un mismo color en esa región.

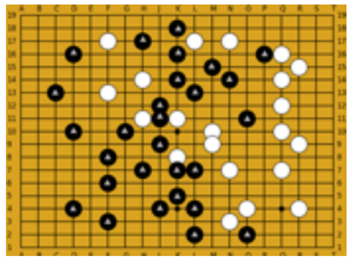


Figura 2.14: Influencia

2. **Territorio.** Es una región encerrada por piedras de un mismo color en las cuales las posibilidades de que el oponente invada de manera exitosa son prácticamente nulas. Es decir, una esfera de influencia que se consolida.

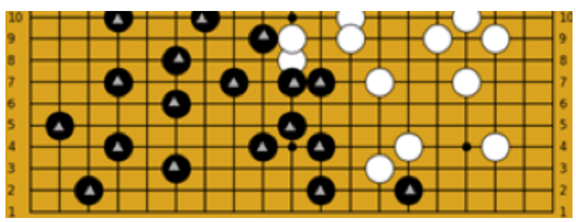


Figura 2.15: Territorio

3. **Moyo.** Región del tablero delineada por piedras de un solo color (no interfieren piedras rivales) y cuyas intersecciones están vacías en su mayoría. De manera coloquial, es una estructura de territorio potencial que normalmente consiste de piedras desconectadas con alguna distancia entre estas.

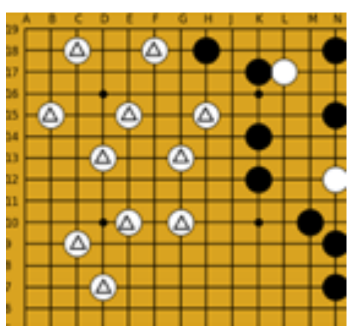
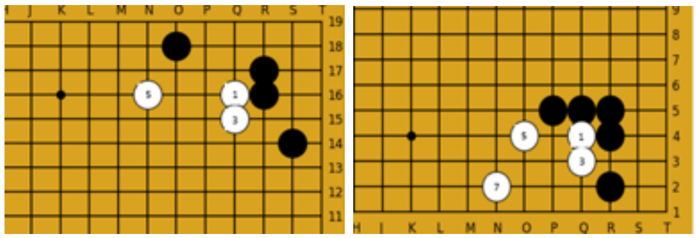


Figura 2.16: Moyo

El conjunto de intersecciones vacías es considerablemente más grande que el conjunto de intersecciones ocupadas por el color que controla la esfera y a su vez esto es mayor al conjunto de piedras rivales.

4. **Joseki.** Un Joseki es una secuencia de jugadas que se realizan sobre una esquina del tablero. Este tipo de jugadas proporcionan beneficios como: territorio, influencia, etc. Y también proporcionan una ventaja equivalente a ambos jugadores.



(a) Joseki 1 1 (b) Joseki 2

Figura 2.17: Josekis

5. **Atsumi.** Atsumi significa fuerza. Un grupo posee fuerza cuando sus conexiones están prácticamente aseguradas y tiene a su vez numerosas libertades. La forma más simple de fuerza son las "paredes". La característica más importante de un grupo fuerte es que define una distancia para ambos jugadores, cerca de la cual no es conveniente jugar.

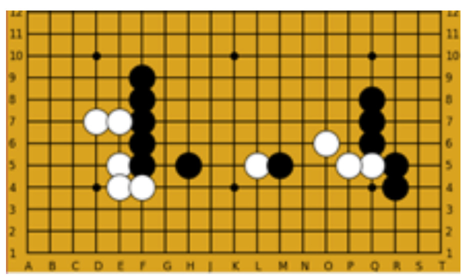


Figura 2.18: Atsumi

Cuanto más fuerte es un grupo, o extrapolado al caso particular de una pared, cuanto mayor es la cantidad de piedras que posee, más lejana será la posición ideal de una nueva piedra aislada, tanto del mismo jugador como del oponente.

2.8. Estados

Así como hay estrategias y técnicas de juego, en el go, también hay estados en el juego. A continuación, mencionaremos algunos de ellos.

1. **Semeai.** Se refiere a una carrera de libertades entre dos grupos rivales de piedras, en el que se busca reducir el número de libertades del grupo rival a cero antes que el oponente haga lo mismo con tu propio grupo.

   Por ejemplo, los dos grupos abajo están en una carrera para capturar: Blanco puede jugar en A y B para capturar las tres piedras negras, mientras que Negro tiene que jugar en C, D y E para capturar las tres piedras blancas. Blanco ganará esta pelea.

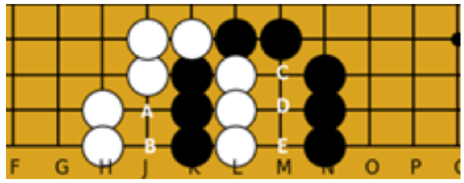


Figura 2.19: Semeai

2. **Vida o muerte.** Cuando un grupo de piedras está casi rodeado y no tiene opciones de conectarse con otras piedras amigas, podemos decir que tal grupo es vivo, muerto o inestable.

   Veamos algunos ejmeplos de vida o muerte:

   a) La tirada 2 es aquí el movimiento correcto. Las negras se aproximan con 3, y las blancas se protegen con 4. Note que tanto los grupos N y B tienen cuatro libertades, y ahora es el turno de las negras.

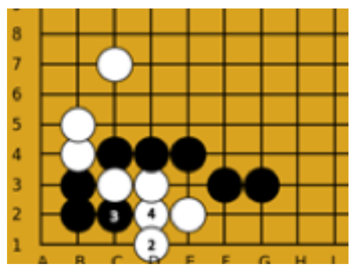
   

   Figura 2.20: Vida o muerte 1

   b) Tras los siguientes movimientos, la situación se hace más clara. A pesar de las mejores respuestas que podían realizar las negras, las cinco piedras blancas tienen una libertad más (la que hay debajo del movimiento 9) que las negras. Si no queda claro cómo sobreviven las blancas, vea la siguiente imagen para más detalle.

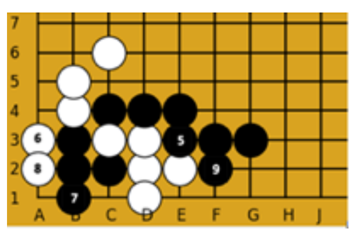
   

   Figura 2.21: Vida o muerte 2

   c) Tras B tirar en 10, N en 11, B en 12, las piedras negras están en atari. Cuando al final las negras hacen el movimiento 13 (como amenaza ko), las blancas pueden capturar las cuatro piedras negras.

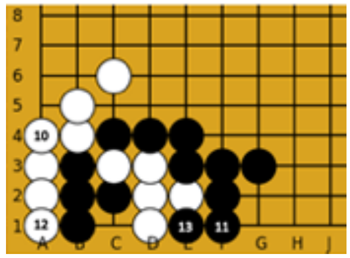
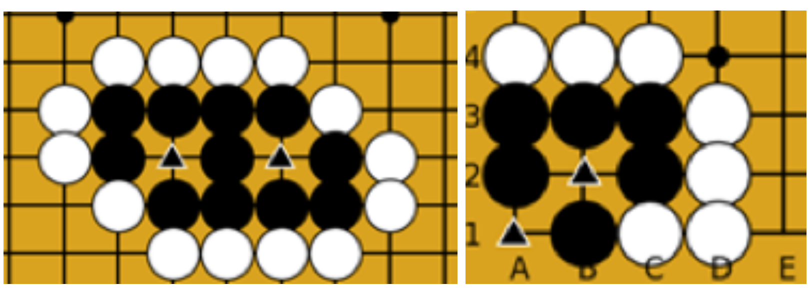


Figura 2.22: Vida o muerte 3

Prácticamente todas las partidas tendrán al menos unas cuantas piedras muertas, que son capturadas; un juego igualado puede tener una equivalencia de capturas en ambos jugadores.

Y es así, como a través de los conceptos de libertad y captura podemos definir cuando una piedra o un grupo de piedras está vivo o muerto. Podemos extender esta definición para otro tipo de grupos en los cuales no necesariamente necesitamos capturarlo por completo para poder decir que el grupo está muerto. Como lo es el siguiente

3. **Dos ojos.** Existen sin embargo ciertos grupos a los cuales no se les puede dejar sin libertades, a estos grupos se les conoce como grupos de 2 ojos. De esta manera, si existen dos ojos, el oponente nunca puede capturar el grupo de piedras, puesto que este siempre tendrá al menos dos libertades. Este estado asegura, pero no es condición necesaria para que una piedra esté viva. Un ejemplo:



(a) Ojo 1 (b) Ojo 2

Figura 2.23: Dos ojos

4. **Seki (vida mutua).** Hay una excepción al requerimiento de que un grupo debe tener dos ojos para vivir: se llama seki (o vida mutua). Cuando dos grupos opuestos están adyacentes y comparten libertades, la situación puede llegar a una posición en la que ninguno de los jugadores desea mover primero, porque al hacerlo permitiría ser capturado por el oponente. Por tanto, en estas situaciones las piedras de ambos jugadores permanecen en el tablero en un estado de vida mutua o “seki”. Ningún jugador recibe punto alguno por dicho grupo (estos puntos son “neutros”), pero al menos se mantiene vivos, en vez de ser capturados.

   El seki puede ocurrir en muchas formas. Las más simples son: 1. Cada jugador tiene un grupo sin ojos y comparten dos libertades, y 2. Cada jugador tiene un grupo con un ojo y comparten una libertad más. En el ejemplo de la figura 2.24, los puntos con círculos son libertades compartidas por los grupos blancos y negros. Ningún jugador quiere jugar en uno de los puntos con círculos, porque al hacerlo permitiría ser capturado por el oponente. Todos los otros grupos en este ejemplo, tanto blancos como negros, están vivos con al menos dos ojos. El seki es inusual, pero puede resultar de un intento de un jugador por invadir y matar a un grupo de otro jugador.

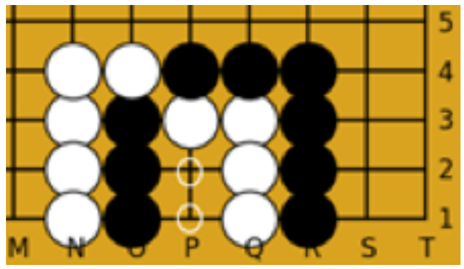


Figura 2.24: Vida mutua.

Capítulo 3

Teoría Matemática del juego de Go

El desarrollo formal de la teoría matemática del juego de este capítulo, es un resumen de lo que se presenta en al tesis de Emil García [3]. De la misma manera en que se hace en dicha tesis, primero introducimos conceptos de de trayectoria y conexidad de la Teoría de las Gráficas (o Grafos).

Se considera que la teoría de gráficas tiene su inicio en 1736 cuando Leonhard Euler publicó *«Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»* en donde aparece la solución al famoso Problema de los Puentes de Königsberg. Durante el siglo XIX la Teoría de las Gráficas fue redescubierta a través del estudio de diversos problemas obteniendo así nuevos y más resultados importantes. Por ejemplo, Arthur Cayley en 1857, mientras estudiaba la cantidad posible que podía haber de ciertas estructuras químicas, descubrió una importante familia de gráficas, a las que llamó árboles. Aunque poco a poco iba aumentando el interés en ésta área, fue hasta 1936 cuando el húngaro Dénes König publicó el primer libro sobre este tema.

3.1. Trayectorias y conexidad

Definición 3.1.1. *Gráfica. A la pareja de conjuntos $G(V, E)$ se define como gráfica. Si V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices** y E es un conjunto formado por subconjuntos $\{u, v\}$ tales que $u, v \in V$. A los elementos en E se les llamas **aristas**. Y de manera simple a $G(V, E)$ se le denotará solamente como G.*

*Para simplificar a cada arista $\{u, v\}$ en G, se le denotará simplemente por uv. De manera adiconal, diremos que si $e = uv \in E$ entonces e une a **u** y a **v**.*

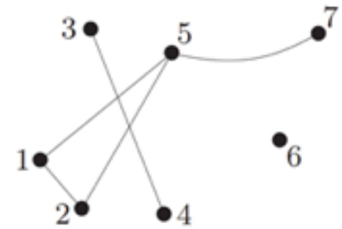


Figura 3.1: Una gráfica, con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$.
Fuente: Ref[12]

Decimos que si uv es una arista de G, entonces decimos que u y v son vértices adyacentes. Y si uv y vw son aristas distintas en G, entonces diremos que uv y vw son aristas adyacentes.

Al número de vértices en una gráfica se le denomina el orden de G, denotado por $|G|$. Y al número de aristas en una gráfica se le denomina el tamaño de G, denotado por $||G||$.

Definición 3.1.2. *Gráficas completas. Cualesquiera dos vértices distintos que están unidos por una arista, se les denonima gráficas completas. El tamaño de una gráfica completa de orden n es* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. *A la gráfica completa de orden n se le denota como* K_n.

Definición 3.1.3. *Subgráfica. Una gráfica* G' *es una subgráfica de una gráfica* G *si* $V(G') \subset V(G)$ *y* $E(G') \subset E(G)$, *quer podemos denotar como* $G' \subseteq G$. *Si G' es una subgráfica de G entonces diremos que G es una* ***supergráfica*** *de G'. Si* $V(H) = V(G)$, *entonces H es una* ***subgráfica generadora*** *de G.*

Definición 3.1.4. *Subgráfica inducida. Si* $G' \subseteq G$ *y* G' *contiene todas las aristas* $xy \in E$ *con* $x, y \in V(G')$, *entonces* G' *es una* ***subgráfica inducida*** *de G. Decimos que* $V(G')$ *induce o extiende* G' *en G.*

Definición 3.1.5. *Grafo inducido por un conjunto de vértices. Si* $U \subseteq V$ *es cualquier conjunto de vértices, entonces* $G[U]$ *denota el grafo en U cuyo conjunto de aristas son precisamente las aristas de G con ambos extremos en U.*

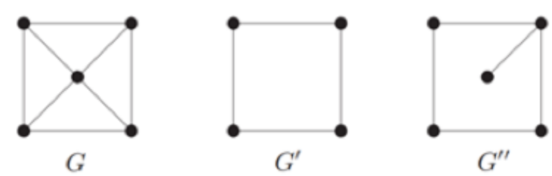


Figura 3.2: Una gráfica G, con subgráficas G' y G'': G' es una subgráfica inducida de G, pero G'' no lo es de G'. Fuente: Ref[12]

Definición 3.1.6. *Caminos. Para un entero* $n \geq 1$, *el camino* P_n *es una gráfica de orden n y tamaño* $n-1$ *cuyos vértices se pueden etiquetar como* $v_1, v_2, ..., v_n$ *y cuyas aristas son* $v_i v_{i+1}$ *para* $i = 1, 2, ..., n-1$.

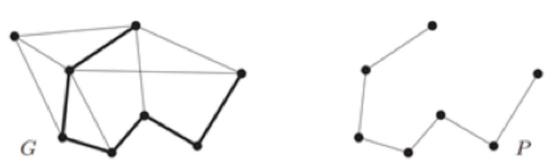


Figura 3.3: El camino $P = P_6$ en G, con $n-1 = 6$, donde k es la longitud del camino.
Fuente: Ref[12]

Definición 3.1.7. *Ciclos. Para un entero* $n \geq 3$, *el ciclo* C_n *también llamado* $n-ciclo$, *es una gráfica de orden n y tamaño n cuyos vértices se pueden etiquetar como* $v_i v_{i+1}$ *y cuyas arístas son* $v_i v_{i+1}$ *para* $i = 1, 2, ..., n-1$.

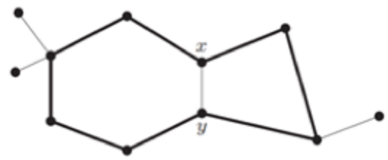


Figura 3.4: El ciclo C_8, con la cuerda xy, y los ciclos inducidos C_6 y C_4, con $n = 8, 6, 4$ la longitud.
Fuente: Ref[12]

Una arista que une dos vértices de un ciclo pero que no es en sí misma una arista del ciclo, es una **cuerda** de ese ciclo. Así, un ciclo inducido en G, es un ciclo en G que forma un subgrafo inducido y es aquel que no tiene cuerdas.

Definición 3.1.8. *Grado. En una gráfica G, el del grado de un vértice **v**, se define como el número de vértices en G que son adyacentes a v denotado por $d_G(v) = d(v)$. Si consideremos una gráfica G de orden n. Dado un vértice v en G, la vecindad de v es el conjunto de todos los vertices adyacentes de v y la denotamos por $N_G(v) = N(v)$.*

Otros conceptos importantes que se generan del anterior, es el de grado mínimo de G, que es el menor de los grados de entre todos sus vértices y lo denotamos por $\delta(G) := min\{d(v)|v \in V\}$. Y el grado máximo de G, es el mayor de los grados entre todos sus vértices y lo denotamos por $\Delta(G) := mas\{d(v)|v \in V\}$.

Definición 3.1.9. *Recorrido. Un camino en una gráfica G se dice que es un **recorrido** si ninguna arista se repite, además si agregamos el requisito de que ningun vértice se repita estaríamos hablando de una **trayectoria**.*

Definición 3.1.10. *Conjunto conexo. Una gráfica G es conexo si cualquier par de elementos (a, b) están conectados. Por tanto, toda trayectoria es un conjunto conexo.*

3.2. Teoría Formal del Go

En el capítulo anterior se introdujeron algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas, como conocimientos previos a la Teoría formal del juego. En esta sección, se muestra un resumen del enfoque a la introducción formal de elementos básicos del juego Go. Toda esta teoría que se muestra en seguida, es tomada del trabajo realizado en la tesis de (García, E. [3]), pero se muestra una copia literal textual en esta tesis como base para el razonamiento y algoritmo que se realizará del juego Go. Es decir, se pretende darle seguimiento a la parte algorítmica, teniendo como fundamento la teoría ya realizada.

Tablero, piedras y libertades

El tablero de go es una cuadrícula de 19 líneas verticales por 19 horizontales, formando 361 intersecciones, donde cada una de las intersecciones son vértices formados por coordenadas (x, y) en $\mathbb{R}^2$. Entonces, el tablero de go está definido por la siguiente función.

> *El tablero es el conjunto $\tau = \{(x, y) : 1 \leq x, y \leq 19$ con $x, y \in \mathbb{N}\}$. Si Ω es el conjunto $\{e, b, n\}$ donde e=vacío, b=blanca, n=negra, $\rho : \tau \to \Omega$ es una función y $\pi \in \tau$, entonces $\rho(\pi)$ se denomina el color de π (con respecto a la coloración ρ). (García, E. [3])*

Una configuración de juego en términos simples, es la coloración que puede tener el tablero mediante los vértices, es decir; blanca, negra o simplemente esa coloración puede estar vacía. Y se define como sigue.

Una configuración de juego es definida como $g = \{(\alpha, \rho(\alpha)) : \alpha \in \tau, \rho(\alpha) \in \Omega\}$, donde ρ es una coloración del tablero.

Podemos identificar al tablero τ con la configuración inicial $g_0 = \{(\alpha, e) : \alpha \in \tau\}$.

Denotaremos por G a la colección de configuraciones de juego. Es decir: $G = \{g : g\ es\ configuración\ de\ juego\}$

Dada una configuración de juego g, con coloración ρ, un elemento $\vartheta = (\alpha, \rho(\alpha)) \in g$ se denomina un vértice en g. Si $\rho(\alpha) \neq e$, diremos que ϑ es un vértice ocupado en g. Denotaremos por $Ps(g)$ a la colección de vértices ocupados en g, es decir $Ps(g) = \{\vartheta = (\alpha, \rho(\alpha)) \in g : \rho(\alpha) \neq e\}$. (García, E. [3])

Una definición importante usada en esta teoría para definir algunos conceptos importantes como lo son *trayectoria* y *conjunto de piedras*, es la siguiente.

Distancia Manhattan. Sean $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ dos vectores unitarios en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sean $\vartheta_0 = (\alpha_0, \rho(\alpha_0))$ y $\vartheta_1 = (\alpha_1, \rho(\alpha_1))$ en g. La Mh, entre ϑ_0 y ϑ_1 en g se define como $Mh(\vartheta_0, \vartheta_1) = |\alpha_0 i - \alpha_1 i| + |\alpha_0 j - \alpha_1 j|$. (García, E. [3])

En términos simples, la distancia Manhattan (en la geometría del taxista donde la métrica usual de la geometría euclidiana es reemplazada por una nueva métrica) nos dice que la distancia entre dos puntos es la suma de las diferencias absolutas de sus coordenadas.

Cuando hablamos de una trayectoria en términos del go, nos referimos a un camino que une a dos piedras del mismo color, y que forma un recorrido por vértices distintos en el tablero. Entonces, una trayectoria en términos de teoría de gráficas, queda de la siguiente manera.

Decimos que t es una trayectoria entre ϑ y ϑ^* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. *$t = \vartheta_1 \vartheta_2 ... \vartheta_n$, tal que $\vartheta = \vartheta_1$ y $\vartheta_n = \vartheta^*$.*
2. *$Mh(\vartheta_k, \vartheta_{k+1}) = 1$.*
3. *$\rho(\alpha) = \rho(\alpha_k) = \rho(\alpha^*)$, $\forall k$, con $2 \leq k \leq n-1$. (García, E. [3])*

En términos simples, una piedra es una componente que ocupa un lugar en el tablero, específicamente en un vértice. Por lo tanto, una piedra se define de la siguiente manera.

El color de un conjunto conexo C, está definido como $\rho(C) = \rho(\alpha)$, para cualquier vértice $(\alpha, \rho(\alpha)) \in C$. Así, podemos decir que para cualquier conjunto C en g, $U \subset C$, es una componente conexa de C, si U es conexo y U no es subconjunto propio de cualquier otro subconjunto conexo de C.

Sea $\sigma \subset P_s(g)$ es una piedra si σ es una componente conexa de P_s. Y también, σ es una piedra individual si $|\sigma| = 1$, denotada específicamente como s. Así, para denotar un conjunto de piedras, tomamos a $\Sigma = \{\sigma \subset P_s : \sigma\ es\ piedra\}$. Y al conjunto de piedras individuales de $\sigma \in \Sigma$, se define como $\bar{\sigma} = \{s : |s| = 1\ y\ s\ elemento\ de\ \sigma\}$. (García, E. [3])

Una piedra tiene 4 libertades (puntos adyacentes vacíos). Cuando dos o más piedras están conectadas mediante líneas, también forman una sola piedra, y comparten sus libertades. Así, se definen las libertades de una piedra de la siguiente manera.

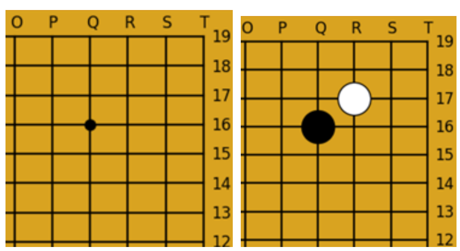
El conjunto de libertades de una piedra σ_0, son todos las intersecciones adyacentes vacías. Sea $L(\sigma_0) = \{\vartheta = (\alpha, e) : \exists \vartheta_0 \in \bar{\sigma_0}$ con $Mh(\vartheta_0, \vartheta) = 1\}$ el conjunto de libertades de σ_0 y dado $C \in g$ un conjunto conexo, se define su conjunto frontera como $\partial(C) = \{\vartheta : \exists \vartheta_0 \in C,$ con $Mh(\vartheta, \vartheta_0) = 1, \rho(\vartheta) \neq \rho(\vartheta_0)\}$ (Note que por definición $C \cap \partial(C) = \emptyset$). Entonces, se define $l(\sigma)$ como el conjunto de libertades interiores de σ y es la unión de las componentes conexas U_i del conjunto de libertades $L(\sigma)$, que cumplen $\rho(\partial(Ui)) = \rho(\sigma)$. Y a $E(\sigma)$: Dada $\sigma \in \Sigma$, el complemento de $l(\sigma)$ respecto de $L(\sigma)$. Así, el conjunto de libertades exteriores de σ es $E(\sigma) = L(\sigma) \setminus l(\sigma)$. (García, E. [3])

El movimiento de una piedra, depende de una configuración de juego y el vértice hacia donde la piedra se dezplace, mediante una función que modifique al vértice.

El movimiento de una piedra, está dado por una configuración de juego $g \in G$ y un vértice $(\alpha, e) \in g$, y m es un movimiento que modifica a (α, e), siendo m una función de G en G, donde $m(g) = g' \in G$, que cumple

$$m(g) = g' \rightarrow \begin{cases} (\alpha, e) & \rightarrow (\alpha, n) \\ (\alpha, e) & \rightarrow (\alpha, b) \end{cases}$$

Donde uno de los vértices $(\alpha, n), (\alpha, b)$ está en g'. (García, E. [3])



(a) (b)

Figura 3.5: Los vértices $((Q, 16), e)$ y $((R, 17), e)$ son modificados a $((Q, 16), n)$ y $((R, 17), b)$.

3.3. Tácticas y Estrategias

Así como se definieron los conceptos de tablero, piedras y libertades, en esta sección se formalizan algunas de las tácticas y estrategias vistas en el capítulo anterior, tomando como referencia el enfoque de teoría de gráficas en las dos secciones anteriores, que también se profundizan en la tesis de (García, E. [3]).

Emil García, desarrolla todas las tácticas básicas de captura mostradas en el capítulo 2, tomando en cuenta las definiciones de teoría de gráficas, como se muestran a continuación, donde utiliza los conceptos de movimientos y configuraciones en el tablero.

Captura. *Diremos que un movimiento $m(g)$ resulta en captura a σ si:*

1. *Se tiene que σ está en atari.*
2. *El vértice (e, α) que modifica $m(g)$ es el único elemento de $L(\sigma)$.*
3. *Se retira a σ del tablero, lo que se expresa como que $\forall(\alpha, \rho(\alpha)) \in \sigma \subset g$, resulta en que $(\alpha, e) \in m(g)$.*

Atari. *Diremos que un movimiento $m(g)$ es atari a σ, si el vértice (α, e) que m modifica está en $L(\sigma) \subset g$ y $|(L(\sigma)| = 1$ en $m(g)$.*

Conexión. *Decimos que el movimiento $m(g)$ conecta a σ con σ', las piedras aliadas en Σ, si la piedra resultante s produce que $\sigma \cup \{s\} \cup \sigma'$ es conexo en $m(g)$.*

Suicidio. *Diremos que un movimiento m es un suicidio si la piedra resultante s cumple que $L(s) = 0$ o que si s se conecta una piedra σ, entonces se tiene que $L(\sigma \cup s) = 0$. (García, E. [3])*

El suicido es el único movimiento prohibido en una partida de Go. No obstante, este movimiento es válido en el sistema de reglas Neozelandés; pero no en el sistema de reglas Japonés o Chino [3]. Aunque es relevante porque apuntala el concepto de ojo, a su vez fundamental en el desarrollo de una partida.

Ojo. *Dado σ, decimos que $\epsilon(\sigma) \subset L(\sigma)$ es ojo de σ si $\epsilon(\sigma) \subseteq l(\sigma)$ y $\partial(\epsilon(\sigma))$ es conexa.*

Una condición necesaria para la existencia de un ojo es que su conjunto frontera está conformado por piedras del mismo color. Y la condición suficiente es que este conjunto frontera sea conexo.

Ojo falso. *Dada $\sigma \in \Sigma$, decimos que $\phi(\sigma) \subset L(\sigma)$ es ojo falso de σ si $\phi(\sigma) \subseteq l(\sigma)$ y $\partial(\phi(\sigma))$ es disconexa. (García, E. [3])*

En este concepto, el vértice vacío es rodeado por un grupo de piedras del mismo color, con una posibildad de escape. Esta característica está dada por tener la posibilidad de que si es encerrado, la ultima libertad será el ojo (el vértive vacío).

En los ojos falsos las piedras alrededor de su ojo pueden ser capturados: es importante asegurar el control de las diagonales y la conexión entre las piedras alrededor de su ojo. Por ejemplo, en la imagen de abajo, los siguientes grupos tienen un ojo falso.

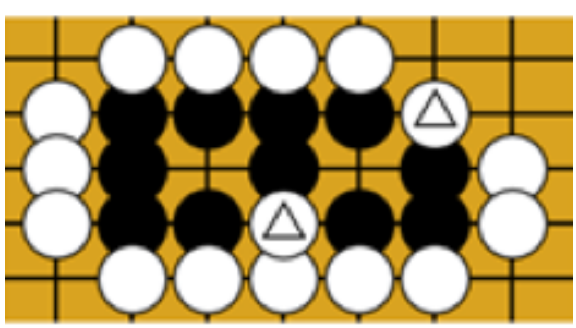


Figura 3.6: Ojo falso.

Cuando hablamos de estados en el juego, nos referimos a situaciones tácticas y estratégicas creadas por ambos jugadores. Veamos las siguientes.

Semeai. *Cuando dos grupos de piedras buscan reducir el número de libertades del grupo rival. Decimos que σ y σ', dos piedras adversarias están en semeai si:*

1. $L(\sigma) \cap L(\sigma') \neq \varnothing$.
2. *Existe una secuencia $s_1, s_2, ..., s_k \in L(\sigma')$ de movimientos aliados a σ, tal que s_k produce la captura a σ'.*
3. *Existe una secuencia $s'_1, s'_2, ..., s'_k \in L(\sigma)$ de movimientos aliados a σ', tal que s'_k produce la captura a σ.*

Si $k < n$ entonces diremos que σ gana el semeai. Si $n < k$ diremos que σ' gana el semeai.

Al definir semeai, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Cómo se utiliza la definición de movimiento para definir semeai? Podemos decir que cuando hablamos de un semeai entre dos piedras adversarias, decimos que existe una secuencia de movimientos (vértices (α, e) modificados por la función m), que se encuentran en el conjunto de libertades de la piedra rival, tal que el último movimiento de esa secuencia produce una captura. Así, podemos decir que es esencial la definición para definir esta táctica, ya que un semeai es una carrera de movimientos, siendo el último movimiento el que capture a la piedra adversaria.

Piedra muerta. *Decimos que σ es una piedra muerta, si existe una trayectoria t que tenga como posición de inicio a un elemento de $\bar{\sigma}$, entonces existe n movimientos rivales , tal que σ es capturada. (García, E. [3])*

La táctica de la red consiste en rodear un grupo contrario impidiéndole que escape, colocando una piedra en una posición diagonal al grupo bajo ataque. Si intenta escapar, simplemente lo bloqueamos eliminando sus libertades. Es decir, la táctica de red puede describirse como:

Red. *Un movimiento rival $m(g)$ es una red sobre σ, si:*

1. $|L(\sigma)| \leq \left[\dfrac{|\partial(\sigma)|}{2}\right]$ *en g. Note que $|\partial(\sigma)|$ es la máxima cantidad de libertades que puede tener σ.*
2. *Existe una piedra unitaria s_0 en $\bar{\sigma}$ que cumple que $Mh(s, s_0) = 2$ donde s es la piedra resultante de $m(g)$.*
3. *Para todo movimiento $w(m(g))$ que resulte en una piedra aliada unitaria s que se conecte con σ, existe un movimiento rival $m'(w)$ que resulta en que: $|L(\sigma \cup \{s\})| \leq |L(\sigma)|$.*

Notemos que $L(\sigma) \subset m(g)$ y que $L(\sigma \cup \{s\}) \subset m'(w)$. (García, E. [3])

Para capturar piedras en una escalera, el jugador utiliza amenazas de capturas, llamadas atari al oponente hacia un patrón de zigzag. Por lo tanto, decimos que una escalera es:

Escalera. *Un movimiento rival $m(g)$ es una escalera sobre σ, si m es atari sobre σ y sí σ se conecta con una piedra unitaria aliada s_1 en su única libertad entonces $\exists s'_1$ atari sobre $\sigma \cup \{s_1\}$ tal que si este conjunto se conecta con s_2 en su única libertad, entonces $\exists s'_2$ atari sobre $\sigma \cup \{s_1\} \cup \{s_2\}$ y así sucesivamente hasta que s_k produce la captura de $\sigma \cup \{s_1\} \cup ... \cup \{s_k\}$, para alguna $k \in \mathbb{N}$. (García, E. [3])*

Note que una escalera es un caso particular de red, dado que para toda piedra unitaria aliada s_1 que se conecte a σ, existe un movimiento s'_1 tal que $|L(\sigma \cup \{s_1\})| \leq |L(\sigma)|$, en particular para una escalera: $|L(\sigma \cup \{s_1\} \cup ... \cup \{s_k\})| = |L(\sigma \cup \{s_1\}| = |L(\sigma)| = 1$.

En general, el objetivo del juego es conseguir más territorio que el oponente, para conseguir esto existen diversos enfoques en cuanto al desarrollo de las piedras y los grupos. Y cuando hablamos de influencia, hablamos de esferas de influencia, las cuales se definen como una región del tablero con el potencial de convertirse en territorio, por lo que Emil García define algunos conceptos de la siguiente manera.

Sea $A \subset \Sigma$, un conjunto de piedras aliadas.

Territorio. *Definimos el territorio de A como $T(A) = \{\vartheta \in I(\sigma) : \sigma \in A\}$, que cumple lo siguiente: $\forall m_i$ movimiento rival que modifique a ϑ, se tiene que las piedras resultantes si están muertas.*

Sean $t_1, t_2, ..., t_n$ las trayectorias mínimas que conectan a los $\sigma \in A$ entre ellos.

Influencia. *Definimos la influencia de A como $Inf(A) \subset g$, a aquel conjunto que cumple que $\partial(Inf(A)) = \bigcup_{i=1}^{n} t_i$.*

Por un lado, el objetivo de una invasión es crear un grupo incondicionalmente vivo dentro de la esfera de influencia rival.

Invasión. *Un movimiento m es una invasión si la piedra resultante $s \in Inf(A)$ y si s es es piedra rival a A.*

Y por el contrario, el propósito de la reducción es limitar el desarrollo de una esfera de influencia rival.

Reducción. *Un movimiento m es una reducción si la piedra resultante $s \in \partial(Inf(A))$ y s es una piedra rival a A. (García, E. [3])*

Estas últimas definiciones muestran los conceptos más avanzados de estrategias de control territorial e influencia, que fueron tomados de los elementos básicos y piedras compuestas, así como de las tácticas y estratégias que fueron definidas antes, dando como resultado conseguir un mayor control de territorio que el oponente.

Aportaciones del enfoque

Este capítulo tiene como objetivo dar a conocer la idea formal de la teoría matemática del Go, bajo el enfoque de la Teoría de Gráficas desarrollada por Emil García en su tesis [3], así mismo explicar la estructura y la dinámica del juego con los conceptos previos. Dicho enfoque tiene sus aportaciones, bajo esa transformación de conceptos básicos a formales, en una teoría bastante estructurada que se puede representar por medio de un diagrama.

1. Establecer el tablero como una función contenida en $\mathbb{R}^2$ y a los grupos de piedras en el Go como vértices conectados por aristas.

2. Definir una configuración de juego como una función, de tal manera que se pueda ver la coloración que puede tener el tablero mediante los vértices.

3. Usar conceptos de Gráficas conectadas y distancia para definir tácticas y estrategias del juego.

4. Usar los conceptos de conexidad para definiciones de piedra y sus libertades.

5. Usar el concepto de vértice para definir tácticas básicas de captura.

6. Usar conceptos de Inf de una función, para definir estrategias de influencia y territorio.

De manera específica, podríamos decir que las anteriores son algunas de ellas. Pero de manera general, son las siguientes..

1. Iniciar un desarrollo teórico del juego de Go, sustentado con la Teoría de Gráficas, de manera que de sentido a la terminología usada y también para desarrollar algunas ideas intuitivas de los conceptos básicos.

2. Dar paso a una teoría formal más amplia sobre el juego, iniciando por lo esencial, que pueda tener un desarrollo formal y aplicable para casos específicos de posiciones en un juego real de Go.

3. Usar en futuros trabajos una teoría más detallada, admisible y generalizada para el razonamiento de casos complejos, como el crecimiento y metástasis del cáncer y su respuesta inmune [9].

Capítulo 4

Cuantificación del Go y Juegos Combinatorios

La Teoría de Juegos Combinatorios surgió en relación con la teoría de los juegos imparciales, en la que cualquier juego disponible para un jugador debe estar disponible para el otro también.

En la década de 1960, Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway y Richard K. Guy introdujeron conjuntamente la teoría de un juego partisano, en el que se relaja el requisito de que una jugada disponible para un jugador esté disponible para ambos. Sus resultados fueron publicados en su libro *Winning Ways for your Mathematical Plays* en 1982. Sin embargo, el primer trabajo publicado sobre el tema fue el libro *On Numbers and Games*, también conocido como *ONAG*, escrito por Conway en 1976. En este texto, Conway introduce el concepto de números surreales y la generalización de juegos. *On Numbers and Games* también fue fruto de la colaboración entre Berlekamp, Conway y Guy.

A pesar de que Go inspiró el desarrollo temprano del campo, el primer trabajo de referencia integral sobre la aplicación de la Teoría de juegos combinatorios para Go solo salió en 1994, *Mathematical Go* de Berlekamp y Wolfe, basado en parte en la tesis doctoral de David Wolfe.

El objetivo de este capitulo es presentar algunos de los resultados básicos de la Teoría de Juegos Combinatorios y de los números surreales, desarrollados por John H. Conway. además de presentar una colección de reglas y resultados, desarrollados por Berlekamp y Wolfe, que permiten establecer una manera de estudiar las estrategias del Go mediante la Teoria de Juegos Combinatorios.

4.1. ¿Qué son los Juegos Combinatorios?

A nivel conceptual, un juego combinatorio es una competencia entre dos jugadores llamados Izquierda (L) y Derecha (R) que alternan movimientos. Pero en lenjuaje natural, los juegos combinatorios son juegos de dos personas con información perfecta, sin movimientos aleatorios y en los cuales no hay empates. En estos juegos se parte de una posición inicial y los jugadores se turnan para hacer su jugada, la cual conduce a una nueva posición. El juego prosigue hasta que se llega a una posición final, es decir, una situación en la que ningún movimiento es posible. Las reglas del juego establecen las características de un movimiento legal, el criterio de terminación y quién es el ganador en la posición final.

Para comenzar a entender, veamos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.1. *Un juego (partidario) G, es un par de conjuntos L y R, cada uno de los cuales consta de otros juegos. Los elementos de L se denominan opciones de la izquierda y los elementos de R se denominan opciones de la derecha. Estos representan los movimientos disponibles para el jugador de la izquierda y el jugador de la derecha, respectivamente.*

La palabra partidario en la definición, se refiere a que las opciones disponibles para la izquierda pueden diferir de las disponibles para la derecha.

Definición 4.1.2. *Para un juego con opciones de izquierda a, b, c,... y opciones de derecha p, q, r,... lo denotamos por $\{a, b, c, ... \mid p, q, r, ...\}$. En cambio, si deseamos referirnos a algún juego no especificado G escribimos $G = \{G^L \mid G^R\}$, usando G^L y G^R como símbolos representantes de las opciones Izquierda y Derecha respectivamente. Esto es, G^L y G^R representan conjuntos de juegos, de la forma: $G^L = \{G^L_i : i \in I\}$, $G^R = \{G^R_j : j \in J\}$.*

Los juegos que aparecen como opciones de un juego G, o como opciones de opciones, etc. se conocen como posiciones o seguidores de G. Los juegos con un número finito de posiciones se denominan cortos, los que tienen un número infinito de posiciones, largos. Pero aquí solo veremos el estudio de juegos cortos, es decir donde G^L y G^R son conjuntos finitos de juegos.

Juegos simples

Definición 4.1.3. *El juego más simple que podemos construir a partir de $L = \emptyset = R$, es el siguiente. Llamamos a este juego cero y escribimos $0 := \{ \mid \}$. Ningún jugador puede hacer algún movimiento legal. El que empieza el juego pierde.*

Usando el juego del cero podemos construir otros juegos. Por ejemplo, el juego $G := \{0 \mid \}$. Si comienza L, debe moverse de G a 0, después de lo cual R no tiene movimientos legales, por lo que L gana. Si R comienza, no tienen movimientos legales, y L también gana. Vemos que la L siempre gana, sin importar quién comience. Por el contrario, el juego $G := \{ \mid 0\}$ siempre lo gana R.

El juego final que podemos construir usando solo el 0 es lo suficientemente importante como para tener su propio símbolo.

Definición 4.1.4. $* := \{0 \mid 0\}$. *Quien se mueva primero en $*$ gana.*

4.2. ¿Quién gana?

Los juegos anteriores representan cuatro tipos diferentes de juegos, caracterizados por qué jugador tiene una ganancia después de que comienza un jugador determinado. Para ellos usamos la siguiente notación.

1. $G > 0$. La izquierda gana sin importar quién comience ($G := \{0 \mid\}$).
2. $G < 0$. La derecha gana sin importar quién comience ($G := \{\mid 0\}$).
3. $G \parallel 0$. El primer jugador en moverse gana ($G = *$)
4. $G = 0$. El segundo jugador en moverse gana ($G = \{\mid\}$)

Los juegos en general caen en una de estas cuatro clases de resultados. El siguiente resultado, denominado el *Teorema Fundamental de la Teoría de Juegos Combinatorios*, establece que los juegos combinatorios caen en alguna de estas cuatro clases de resultados. Omitimos la prueba de este resultado, pero mencionamos que la demostración requiere del Axioma de elección y de un principio de inducción múltiple, análogo la principio de inducción en teoría de conjuntos.

Teorema 4.2.1. *Cualquier juego G se clasifica por alguna de las anteriores cuatro relaciones.*

La notación $G = 0$ para la última categoría quizás no sea tan clara. Después de todo, el juego $\{* \mid *\}$ es una victoria para el segundo jugador, pero se ve muy diferente de 0. ¿Qué sentido tiene escribir $\{* \mid *\} = 0$? La respuesta está en que en la Teoría Combinatoria de Juegos, la igualdad es una relación definida. Hay una distinción entre la forma de un juego y el valor de un juego. Dos juegos pueden tener el mismo valor pero tener diferentes formas. Y hasta ahora solo se ha definido lo que significa la igualdad de valor con respecto a cero.

Por notación, de ahora en adelante usaremos el símbolo $\equiv$ para denotar los juegos que son idénticos, es decir, iguales en forma.

A partir de las notaciones anteriores, se derivan las siguientes combinaciones de los cuatro categorías principales de juegos.

1. $G \geq 0$, es decir $G > 0$ o $G = 0$; Si R empieza entonces gana L.
2. $G \leq 0$, es decir $G < 0$ o $G = 0$; Si L empieza entonces gana R.
3. $G \mathrel{|\!\rhd} 0$, es decir $G > 0$ o $G \parallel 0$; Si L empieza, L gana.
4. $G \mathrel{\lhd\!|} 0$, es decir $G < 0$ o $G \parallel 0$; Si R empieza, R gana.

El siguiente resultado establece una forma de verificar que un juego G es igual a 0 es mostrando que ocurren las siguientes relaciones muy particulares entre todas las posibles opciones izquierdas con el juego 0, así como todas las opciones derechas.

Teorema 4.2.2 (De simplicidad)**.** *Sea G un juego tal que $G^L \mathrel{\lhd\!|} 0$ para todas las opciones izquierdas G^L y $G^R \mathrel{|\!\rhd} 0$ para todas las opciones G^R derechas. Entonces $G = 0$.*

De ahora en adelante usaremos el símbolo $\equiv$ para referirnos a juegos que son idénticos, es decir, iguales en forma.

4.3. Sumas de juegos

Los juegos combinatorios generalmente, por convención, se ponen en una forma en la que un jugador gana cuando al otro no le quedan movimientos. Uno de los conceptos más importantes en la teoría de los juegos combinatorios es el de la suma de dos juegos, que es un juego en el que cada jugador puede elegir moverse en un juego o en el otro en cualquier momento del juego, y un jugador gana cuando su oponente no tiene movimiento en ninguno de los juegos.

Conway declaró en [20] que la inspiración para la teoría de los juegos partisanos se basó en su observación del juego en los finales de Go, que a menudo se pueden descomponer en sumas de finales más simples aislados entre sí en diferentes partes del tablero.

Nos gustaría definir la noción de suma de juegos. Intuitivamente queremos que la suma de dos juegos G y H sea un juego en el que en cada movimiento, un jugador puede elegir jugar en G o H, siguiendo las reglas del juego correspondiente. Por ejemplo, la suma de un juego de ajedrez y un juego de Go tendrá dos tableros (un tablero de ajedrez, un tablero de Go) uno al lado del otro, y en cada movimiento, un jugador puede elegir jugar en el tablero de ajedrez o en el tablero de Go. Una cosa importante es que no permitimos que los dos juegos interfieran entre sí, al igual que un movimiento en el juego de ajedrez no afectará la posición del juego de Go. Con esto en mente, podemos hacer una definición recursiva formal para las sumas de juegos.

Definición 4.3.1. *La suma de dos juegos G y H, denotada por $G + H$, está definida por:*

$$G + H := \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

.

Obsérvese que si G, H son juegos, entonces $G + H$ es también un juego. También, conviene considerar que los elementos G^L, G^R, H^L y H^L no se refieren a elementos específicos. En cambio, se entiende que estos símbolos recorren todas sus opciones.

Para comprender mejor la definición recursiva anterior, conviene observar que si $G = \{G^L|G^R\}$ y $H = \{H^L|H^R\}$, entonces el conjunto de opciones izquierdas de $G + H$, es decir el conjunto de juegos en $(G + H)^L$, es el conjunto:

$$\bigcup_{G^L}\{G^L + H\} \cup \bigcup_{H^L}\{G + H^L\},$$

donde G^L y H^L corren sobre todas las opciones izquierdas de G y H, respectivamente. Si ocurre que G o/y H no tienen opciones izquierdas, entonces las correspondientes uniones en la igualdad anterior serían conjuntos vaciós. Por tanto, dependiendo de cuál conjunto de opciones es vacío, el conjunto de opciones izquierdas de $G + H$ podría consistir de opciones de la forma $G^L + H$ o de la forma $G + H^L$, o bien ser vacío. Se cumple algo similar para $(G + H)^R$, el conjunto de opciones derechas de $G + H$

Ejemplo 4.3.2. *Veamos algunas sumas de juegos.*

1. *Debido a que el juego cero no tiene opciones de izquierda o derecha, encontramos rápidamente que* $0 + 0 \equiv \{|\} \equiv 0$

2. *Podemos usar lo anterior para ver que* $\{0\ |\} + 0 \equiv \{0 + 0\ |\} \equiv \{0\ |\}$. *De manera análoga para,* $0 + \{0\ |\} \equiv \{0 + 0\ |\} \equiv \{0\ |\}$

3. *Ahora algunos sumandos distintos de cero, como* $\{0\ |\} + \{0\ |\} \equiv \{0 + \{0\ |\}, \{0\ |\} + 0\ |\} \equiv \{\{0\ |\}\ |\}$. *Vemos que resulta algo nuevo, pero ¿en qué parte de las cuatro categorías cae este juego? Podemos averiguarlo simplemente jugando el juego. Si comienza L, debe moverse a* $\{0\ |\}$, *después de lo cual se garantiza una victoria para L (recuerde* $\{0\ |\} > 0$*). Si comienza R, pierden instantáneamente. Por lo tanto,* $\{\{0\ |\}\ |\} > 0$, *una victoria garantizada para L. Análogamente para,* $\{|\ 0\} + \{|\ 0\} \equiv \{|\ \{|\ 0\}\} < 0$.

4. *Otra suma interesante es* $* + *$ *(recordemos que* $*$ *está definido por* $* := \{0 \mid 0\}$*). Podríamos calcular el resultado directamente, como hicimos anteriormente, pero también podemos usar el hecho de que la suma no es más que jugar dos juegos a la vez. Digamos que L comienza el juego* $* + *$ *moviéndose a* $0 + *$. *L solo puede responder moviéndose a* $0 + 0$, *después de lo cual R no tiene movimientos legales. Si L hubiera comenzado moviéndose a* $* + 0$, *habrían terminado en la misma situación. Si R comienza el juego, la situación para ellos parece ser igual. El primer jugador en moverse pierde, entonces* $* + * = 0$.

El negativo de un juego

La suma conduce naturalmente a la construcción del inverso aditivo de un juego: su negativo.

Definición 4.3.3. *El* ***negativo*** *de G es definido como* $-G := \{-G^R \mid -G^L\}$.

Negar un juego corresponde a que los jugadores intercambien lugares o, para un juego de mesa como las damas, el ajedrez o el go, intercambiar los colores de las piezas. Así que rápidamente se ve que si $G > 0$ entonces $-G < 0$; si $G < 0$ entonces $-G > 0$; si $G \parallel 0$ entonces $-G \parallel 0$; si $G = 0$ entonces $-G = 0$ y que negar un juego dos veces no afecta dicho juego.

Definición 4.3.4. *Una suma de la forma $G + (-H)$ se llama juego de diferencia y también se puede escribir como $G - H$.*

A partir de la definición del juego de diferencia, es posible establecer una relación entre juegos, de la siguiente forma:

Definición 4.3.5. *Sean G, H dos juegos. Entonces:*

- $G > H$ *si* $G - H > 0$.
- $G < H$ *si* $G - H < 0$.
- $G \parallel H$ *si* $G - H \parallel 0$. *En este caso diremos que G se confunde con H.*
- $G = H$ *si* $G - H = 0$.

Como consecuencia del Teorema Fundamental de la Teoría de Juegos Combinatorios, es posible obtener el siguiente resultado.

Teorema 4.3.6. *Para cualquier par de juegos G y H, se cumple alguna de las relaciones anteriores.*

4.4. Números surreales

En las secciones anteriores ya definimos el juego $0 \equiv \{|\}$. Algunas preguntas naturales que se pueden establecer son las siguientes: ¿hay otros números en los juegos? ¿Se pueden definir números enteros positivos? ¿Y podrán definirse fracciones? ¿Qué pasa con los números ordinales? Estas preguntas son respondidas por John Conway en su libro *On Numbers and Games*, escrito en 1976. En ese libro, Conway introdujo la idea de "número surreal" y su conexión con los juegos combinatorios. Esta es posiblemente la aplicación más conocida de la teoría de juegos combinatorios, la cual fue popularizada posteriormente por Knuth. La clase de números surreales es enorme, nuestro enfoque en juegos cortos significa que solo necesitaremos una porción pequeña de ellos en nuestros análisis para la siguiente sección.

Definición 4.4.1. *Un número surreal $x = \{x^L \mid x^R\}$ es un juego donde todas sus opciones x^L y x^R son números surreales y satisfacen $x^L < x^R$.*

Como puede observarse, la definición de número surreal, al igual que la definición de juego, es recursiva. Veamos la construcción de la clase de números surreales desde cero, usando la definición recursiva paso a paso o, usando el lenguaje más poético de Conway, día a día.

Día cero, se descubrió el número $0 \equiv \{|\}$. Día uno, los candidatos $\{0\ |\}, \{|\ 0\}$ y $* \equiv \{0 \mid 0\}$. De estos, los dos primeros se ajustan a la definición de un número surreal, y fueron llamados 1 y -1 respectivamente. El número $*$ no es un número, ya que $0 \not< 0$.

En el segundo día, se usaron los números creados en los dos anteriores ahora para generar los siguientes:

1. $\{1\ |\}$, $\{1, 0\ |\}$, $\{1, -1\ |\}$, $\{1, 0, -1\ |\}$,
2. $\{0 \mid 1\}$, $\{-1, 0 \mid 1\}$,
3. $\{|\ 1\}$, $\{-1 \mid 1\}$, $\{-1\ |\}$,

4. $\{-1 \mid 0\}$, $\{-1 \mid 0, 1\}$,
5. $\{\mid -1\}$, $\{\mid -1, 0\}$, $\{\mid -1, 1\}$, $\{\mid -1, 0, 1\}$.

Muchos de los números construidos el segundo día eran diferentes formas de números que ya se habían encontrado. El siguiente resultado nos permite reconocer más fácilmente cuando un número es equivalente a otro, o incluso si un juego dado es en realidad un número disfrazado.

Formalmente, podemos establecer una definición recursiva de los juegos que son números surreales y corresponden a los números náturales y los números enteros usuales.

Definición 4.4.2. *Se define* $\mathbf{1} = \{0|\}$ *y recursivamentese define para cada número natural* n *el número surreal* $\mathbf{n+1} = \{\mathbf{n}|\}$*. De igual forma, se definen* $-\mathbf{1} = \{|0\}$ *y para cada entero positivo* n*, se define* $-\mathbf{n}$ *como* $-\mathbf{n} = \{|-(\mathbf{n-1})\}$*.*

A partir de la definición, se puede deducir que un entero positivo $\mathbf{n}$ es un juego donde Izquierda tiene n más "movimientos libres"que Derecha, y un entero negativo $-\mathbf{m}$ es un juego donde Derecha tiene m más "movimientos libres"que Izquierda.

Ahora que se han definido los números enteros, nos interesa obtener una forma adecuada de definir los números fraccionarios. Por ejemplo, para obtener un candidato adecuado para referirnos al juego $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, conviene identificar un número surreal G que sea solución de la ecuación $\mathbf{x+x=1}$, es decir $\mathbf{x+x}-1=0$.

No es difícil verificar que si $G = \{0|1\}$, entonces $G+G = \{0|\}$, es decir $G+G = \mathbf{1}$. Por tanto, se sugiere definir a $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ como:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{G} = \{\mathbf{0}|\mathbf{1}\}.$$

Análogamente, se puede verificar que una forma adecuada de definir $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ es como $\{0|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$, y así sucesivamente para todos los números fraccionarios de la forma $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$. Más aún, es posible definir los números de la forma $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{2^n}}$, donde $\mathbf{i}$ es un número impar, dado que $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{2^n}}$ se puede obtener a partir de la suma de los números $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}, \ldots$.

Esta definición recursiva de números permite verificar por inducción propiedades que ellos satisfacen. Esto es, si deseamos probar que una propiedad $\mathbf{P}$ se verifica para todos los números surreales de la forma $G = \{G^L|G^R\}$, basta probar que siempre que G^L y G^R satisfacen la propiedad $\mathbf{P}$, es posible concluir que G también satisface $\mathbf{P}$. Usando lo anterior, probemos el siguiente resultado interesante de los números surreales.

Teorema 4.4.3. *Sea* $x = \{x^L|x^R\}$ *un número surreal. Entonces* $x^L < x < x^R$ *para cualquier opción izquierda* x^L *de* x *y cualquier opción derecha* x^R *de* x*.*

Demostración: Verifiquemos por inducción que toda opción izquierda x^L de x cumple que $x^L < x$. Para ello, supongamos que para cada opción izquierda x^L se cumple que cada opción izquierda X^LL de x^L satisface que $x^LL < x^L$. Si Izquierda comienza el juego $x - x^L$, entonces puede ganar de forma trivial al mover x a x^L. Si Derecha comienza el juego, entonces ningun movimiento de x a cualquier x^R es bueno, dado que $x^L < x^R$ por definición. Por tanto, Derecha necesita mover $-x^L$ a algún $-x^LL$ pero, dado que $x^LL < x^L$, se concluye que Izquierda gana moviendo x a x^L. □

Corolario 4.4.4. *Si* x *e* y *son números y* $x < y$*, entonces el número* $\{x|y\}$ *cumple que* $x < \{x|y\} < y$*. Más aún, si* X *es un conjunto de números entonces* $l = \{X|\}$ *es un número que es estrictamente mayor que cada número* $x \in X$ *y el número* $r = \{|X\}$ *es un número que es estrictamente mayor que cualquier número* $x \in X$*.*

La construcción de los números surreales se asemeja demasiado a la que se realiza del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales mediante las *cortaduras de Dedekind*, que consisten en parejas de subconjuntos de números racionales con propiedades muy específicas.

El siguiente resultado permite verificar cuándo un número es equivalente a otro, de forma que nos permite identificar de forma más sencilla a qué número surreal corresponde un número de la forma $\{G|H\}$. La demostración de este resultado se puede consultar en [20].

Teorema 4.4.5. *Teorema de la simplicidad. Sea G un juego. Supongamos que un número x satisface que $G^L \lhd\!\mid x \lhd\!\mid G^R$ para toda G^L y G^R, pero que ninguna opción de x satisface la misma condición. Entonces $G = x$.*

Justo como lo establece Conway al introducir a los números surreales, una forma "práctica" de identificar a qué número corresponde un número x de la forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_n|b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, donde los elementos de x^L y de x^R son números como los estudiados previamente, consiste en observar que los conjuntos de números $x^L = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $x^R = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ son conjuntos totalmente ordenados, de forma que se pueden identificar el elemento más grande de x^L y el elemento más pequeño de x^R. Por tanto, para obtener a qué número corresponde x, basta encontrar el número adecuado entre el mayor elemento de x^L y el menor elemento de x^R.

De lo anterior, se puede verificar, por ejemplo, que $\{0, 1|\} = \mathbf{\frac{1}{2}}$, $\{0, 1, 2|\} = 3$, $\{|1, 0, 4\} = -1$, $\{2|4\} = 3$ y $\{\frac{1}{3}|\frac{4}{6}\} = \frac{3}{6}$. Más aún, como consecuencia del corolario anterior, es posible definir el número *ordinal* ω de la siguiente forma:

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots |\},$$

el cual es mayor que cualquier número real. De igual forma, es posible definir el número surreal $\frac{\mathbf{1}}{\omega} = \{0|1, 2, \cdots\}$, el cual cumple ser mayor que 0 y menor estricto que todo número real positivo. Para concluir esta sección, presentamos la definición formal de número infinitesimal y algunos de los principales números infinitesimales, los cuales aparecerán al aplicar los resultados de números surreales en el juego de Go.

Definición 4.4.6. *Un juego G se denomina infinitesimal si $G \neq \emptyset$ y para cada número x se cumple que $-x < G < z$.*

A continuación presentamos tres de los infinitesimales más utilizados en teoría de juegos combinatoria.

$$* = \{0|0\}$$
$$\uparrow = \{0|*\}$$
$$\downarrow = -\uparrow = \{*|0\}.$$

El siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [20], presenta algunas de las propiedades que satisfacen los infinitesimales definidos anteriormente.

Proposición 4.4.7. *Los infinitesimales definidos anteriormente cumplen las siguientes propiedades:*

1. $* \parallel 0$.
2. $\uparrow + \downarrow = 0$.
3. $* + * = 0$.
4. $\uparrow > 0$ *y* $\downarrow < 0$.
5. $\uparrow \parallel *$ *y* $\downarrow \parallel *$

Finalmente, enunciamos siguiente resultado que utilizaremos más adelante, es ligeramente más fuerte que el *Teorema de evitación de números* ([8], pag 15).

Teorema 4.4.8. *Teorema de traducción de números. Sea G un juego que no es un número. Para cualquier número x, tenemos que $G + x = \{G^L + x \mid G^R + x\}$.*

4.5. Una aplicación de la teoría de juegos combinatorios en el Go

El propósito de esta sección es presentar, mediante un estudio breve, algunos elementos de la teoría desarrollada por Berlekamp y Wolfe [10], donde se aplican resultados de la Teoría de Juegos Combinatorios para estudiar algunos movimientos de Go. Específicamente, se presenta una aplicación en algunos casos de posiciones finales de Go, las cuales ocurren con frecuencia.

Comencenos, identificamos los siguientes tres principios que se establecen.

> ***Principio 1.*** *Un jugador puede moverse colocando una piedra en el tablero, de la forma permitida por las reglas de Go. Los conceptos básicos para colocar una piedra y capturar las piedras de tu oponente no se modifican. Nos referimos a los jugadores Izquierda (L) y Derecha (R) como Blanco y Negro.*
>
> ***Principio 2.*** *No se puede permite que un juego caiga en un ciclo. Las posiciones nunca deben repetirse (la regla del ko y superko específicamente). Los suicidios y pasar turno están prohibidos.*
>
> ***Principio 3.*** *Las piedras capturadas del color del oponente se convierten en prisioneras del jugador. Un jugador puede "pasar" entregando uno de sus prisioneros, devolviendo la piedra [8].*

Para comenzar, se analizan posiciones básicos y, mediante principios básicos de la teoría, se deriva el valor de la otras posiciones.

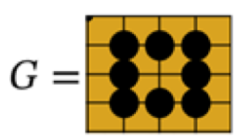


Figura 4.1: Posición básica
Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Conviene tener en cuenta que las negras solo tienen exactamente una jugada y las blancas ninguna, ya que el suicidio y el pasar están prohibidos. Pero después del movimiento de las negras, a ningún jugador le quedan movimientos, por lo que la posición final es solo el juego cero. Luego, G corresponde al juego $\{0 \mid\}$, que también se conoce con el nombre "1".

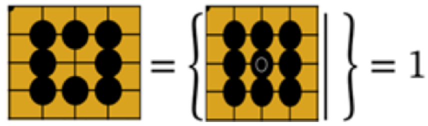


Figura 4.2: Juego 1

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Ahora, analicemos una posición similar con dos intersecciones vacías. En tal posición, ambos jugadores parecen tener dos movimientos. Por simetría sólo necesita considerar uno de cada uno. Las negras pueden moverse para obtener la misma posición de una intersección que vimos anteriormente como el número 1, las blancas solo pueden hacer el movimiento simplemente de "entregar" una piedra, por el **Principio 3**.

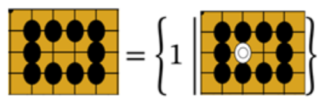


Figura 4.3: Juego 1, dos intersecciones

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Después, calculamos la posición después de blancas. Pero las blancas ya no tienen movimientos, porque el turno que sigue es de negras, y así negras pueden moverse para capturar la piedra blanca.

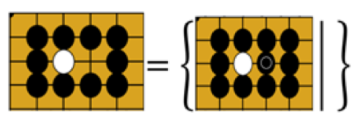


Figura 4.4: Calcular posición

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Así, debido a que cualquier posición donde ningún jugador puede moverse es el juego cero, independientemente de cuántas piedras de cualquier color haya en el área, naturalmente no podemos recuperar ningún tipo de puntaje de área de nuestros principios básicos.

Por otro lado, trabaja el **Principio 3**. Este derecho de "pasar" corresponde exactamente a decir que, si las negras tienen $n > 0$ prisioneros, ese número corresponde al juego $\{n-1 \mid\}$ en el que las negras pueden moverse "pasar" al disminuir su número de prisioneros, y las blancas no tienen movimientos. Los prisioneros tomados por blancas son números enteros negativos. Estos números se agregan a la posición Go.

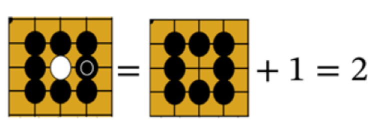


Figura 4.5: Principio 3

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Ahora un ejemplo con dos intersecciones.

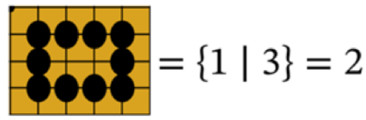


Figura 4.6: Principio 3, dos intersecciones
Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Se tiene en cuenta que este enfoque de análisis de movimientos de Go requiere que un juego se haya "dividido" en subjuegos completamente independientes. Esto significa que nos vemos obligados a ignorar las posiciones en las que hay un ko en el tablero.

Ahora veamos el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. ***Principio de territorio poblado.*** *Sea G un área aislada del tablero de Go que esté rodeada por grupos de piedras negras incondicionalmente vivos, y en la que las blancas no puedan vivir o hacer un ko. Supongamos que contiene intersecciones vacías y piedras blancas. Entonces $G = n + 2m$.*

Demostración: *Considere $G-(n+2m)$ como, las negras se mueven. Entonces, las negras deben hacer un movimiento en G sin opciones en $-(n+2m)$. ¿Cuántos movimientos pueden hacer las negras seguidas si las blancas nunca responden? Pueden completar las n intersecciones vacías, después de lo cual se capturan todas las m piedras blancas. Luego pueden completar esas m nuevas intersecciones y pasar otras m veces. Después las negras pueden hacer $n + 2m$ jugadas seguidas. Entonces, si las blancas siguen aumentando $-(n+2m)$ en 1 en cada jugada, las negras son las primeras en quedarse sin opciones. Pero si las blancas mueven primero, su estrategia no puede ser simplemente ignorar G y aumentar $-(n + 2m)$, ya que las negras pueden mover $n + 2m$ veces seguidas. Es más, dado que las blancas no pueden hacer vida, las negras siempre tienen una respuesta a cualquier movimiento de las blancas en G. E incluso si las blancas logran capturar una cierta cantidad de piedras negras p, las negras solo pueden llenar p intersecciones adicionales. Así que las negras siempre pueden mover las últimas [8].* □

En general,como lo establece Blom, el que no se permita a los jugadores pasar tiene sus inconvenientes, y significa que el enfoque es prácticamente nulo con respecto a los problemas de vida o muerte. Por ejemplo, consideremos el siguiente ejemplo:

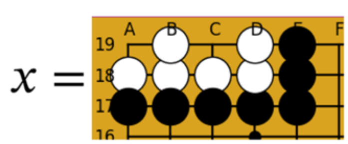


Figura 4.7: Ejemplo vida o muerte 1
Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Por toda la información que ya se dió anteriormente, nos gustaría tener $x = -2$ pero como las blancas no pueden pasar si es su turno, y como en este ejemplo presenta una situación de **ojos**, blancas deben llenar uno de ellos, entonces tenemos que $x = \{| \ 14\} = 0$ y se termina, las negras ganan. Sin embargo, Blom recalca que es interesante notar en algunos contextos, que el valor exacto de x realmente no importa. Por ejemplo:

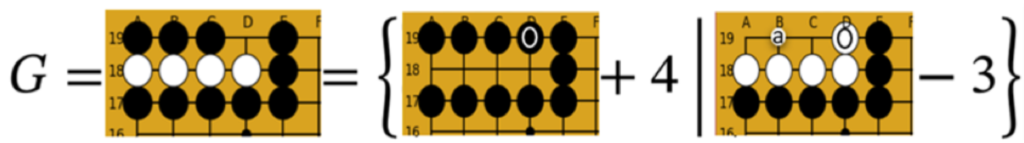


Figura 4.8: Ejemplo vida o muerte 2

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Se encuentra que

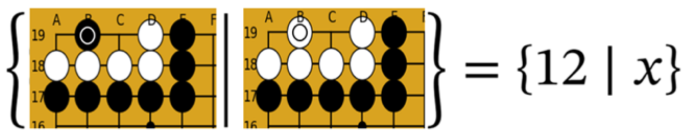


Figura 4.9: Ejemplo vida o muerte 3

Fuente: Tomada de *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.*

Y por los teoremas 4.4.2 y 4.4.3, obtiene que $G = \{8 \mid \{9 \mid x - 3\}\} = 9$, independientemente si $x = -2$ ó $x = 0$.

Entonces, el conjunto de reglas del Go simple y basado en principios que se han presentado hasta ahora, se presta fácilmente al análisis de la Teoría de Juegos Combinatorios, pero no puede hacer frente a situaciones como el ko, seki y de vida o muerte. Por lo tanto, sería de gran ayuda establecer formalmente qué tipos de posiciones en el Go se descartará.

Algunos ejemplos de tacticas y estrategias

El grupo de negras en la parte superior del tablero están vivas, puesto que tienen dos ojos. El grupo de negras en la parte inferior están muertas, puesto que tienen solo un ojo. El punto marcado con una X es un ojo falso. Notemos que cada ojo es una posición y tienen valor de $\{0 \mid\} = 1$.

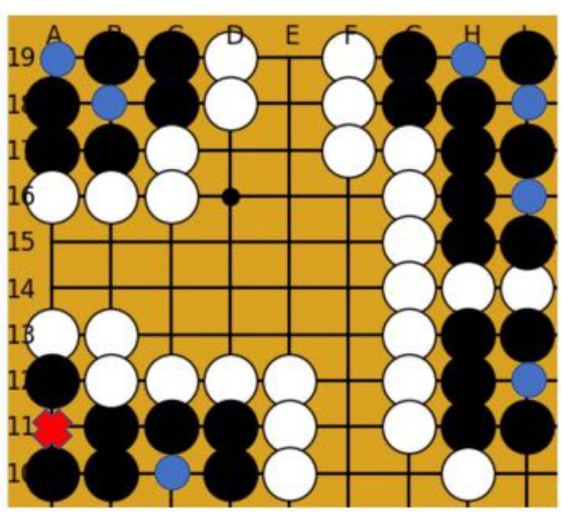


Figura 4.10: Ejemplo de ojos y ojo falso.

En esta escalera, negras no pueden escapar a no ser que se conecte con piedras negras que interceptaría el descenso de la escalera. Y junto la escalera que forma blancas, un pequeño corredor bloqueado por negras, con valor de $\frac{1}{4}$.

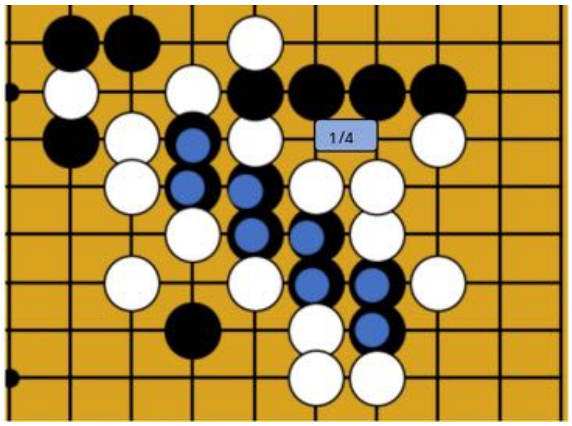


Figura 4.11: Ejemplo de escalera y corredor.

En esta malla, la cadena de tres piedras negras marcadas con un triángulo no puede escapar en ninguna dirección.

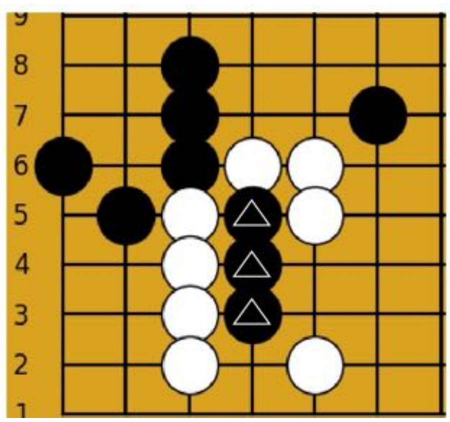


Figura 4.12: Ejemplo de malla.

En el siguiente ejemplo, hay dos grupos **invasores**, uno negro en la parte superior izquierda y otro blanco en la parte inferior derecha. El de arriba a la izquierda está conectado a corredores bloqueados, de valores $\{1 \mid 0\} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$. El grupo blanco invasor tiene un único corredor bloqueado de valor $\frac{1}{4}$. Y pasillos desbloqueados con valores de $\{1 \mid 0\} = \frac{1}{2}, \{1 \mid 0\} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

Es fácil distinguir también en el ejemplo que, los pasillos marcados en verde, son un ejemplo de **conexión**, dando paso a conectar piedras blancas de la parte superior con la parte inferior izquierda.

Así mismo, en el pasillo bloqueado de blancas marcado con verde, negras hace una **reducción** con las 4 piedras negras, y reduce territorio al grupo invasor blanco de la izquierda.

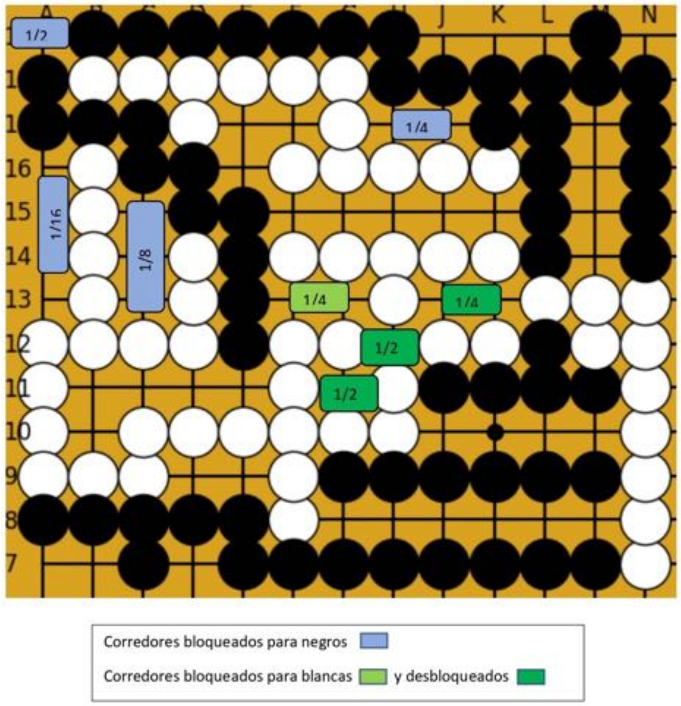


Figura 4.13: Ejemplo de invasión.

Aportaciones del enfoque

En este capítulo se introducen los resultados básicos de la Teoría de Juegos Combinatorios, desarrollada por John Conway, la cual tiene por finalidad estudiar estrategias en juegos secuenciales con información perfecta. Se introduce también la noción de número surreal y se revisan algunas propiedades de los números surreales, introducidos también por Conway. Finalmente, se presenta una aplicación de la teoría de números surreales para el estudio de posiciones finales, que se presentan de forma regular en partidas de juegos de Go. De manera específica se abordan los siguientes temas.

1. Se establece la definición formal de juego combinatorio. Además se establecen diversas relaciones entre juegos de este tipo.

2. Se definen operaciones básicas entre juegos, también de forma recursiva, la suma de dos juegos y el negativo de un juego.

3. Empleando lo anterior, se establece la definición formal de número surreal, se presentan ejemplos de números surreales y algunas de sus propiedades.

4. Se expone, de forma breve, una aplicación de los números surreales en el análisis de algunas posiciones del tablero de Go. Específicamente, si consideramos devolver una piedra capturada a tu oponente como un movimiento legal, Go puede ser visto como el juego en el que el jugador que se queda sin movimientos pierde el juego y se puede analizar mediante el análisis de la regla de "hacer el último movimiento" de la teoría de juegos combinatorios.

Capítulo 5

Programación básica del Go

En este capítulo explicaremos un programa creado en lenjuage phyton que simula el juego de Go. Se dibujará el tablero de Go como primer paso, como lo hacen en [24], y posteriormente en la siguiente sección, se colocarán las piedras en el tablero e implemente las reglas de Go mediante programación, similar a una plataforma como las mencionadas en el capítulo 1.

5.1. El tablero y la colocación de piedras

Para realizar el programa, se crea un archivo de texto llamado ***juegogo.py***, en donde guardaremos todas las líneas de código. Posteriormente dibujamos el tablero, definiendo una función llamada ***draw_ board()*** y se añade al archivo ***juegogo.py***.

Se creó una figura ***matplotlib*** con un tamaño de 9x9 pulgadas (ancho, alto) y se estableció el color del tablero usando la función del objeto ***set_ facecolor()*** de la figura ***patch***.[1] [2]

Después añadimos un gráfico en la figura actual, que devuelve un objeto ***Axes***. Se quitó las etiquetas de los ejes usando la función ***ax.set_ axis_ off()***. Y se devolvió el objeto de figura y los ejes al llamado de la función. Hasta aquí solo obtendremos un tablero vacío, con color y del tamaño predeterminado. Véase el diagrama 5.2. Definimos la función ***draw_ grids()*** para dibujar las 19 líneas verticales y horizontales de un tablero oficial. Específicamente la función ***plot()*** pinta cada linea, y acepta los siguientes argumentos:

ax.plot([punto inicial abscisa, punto final abscisa], [punto inicial ordenada, punto final ordenada], 'color')

Así mismo se define una función llamada ***draw_ starpoints()*** para definir como serán los puntos de estrella que se pintarán más adelante.

Después, para dibujar una piedra en el tablero, definiré una función llamada ***draw_ stone()***, con x, y cordenadas del punto donde se colocó el cursor y el color designado. Hasta aquí, véase el diagrama 5.3

En la siguiente parte, se dibujarán las letras y números guía como en un tablero real de go. Primero se definen los ejes ***(ax, x, y, val)*** y así agregar texto en ellos; con los parámetros de tamaño en la fuente ***fontsize=12*** y el color deseado ***color='black'***.

[1] Un objeto ***Patch*** es un artista 2D con un color de cara y un color de borde.
[2] La clase Artist contiene la clase base Abstract para objetos que se procesan en FigureCanvas. Todos los elementos visibles en una figura son subclases de Artista.

Después, colocamos las letras que servirán de guía en el *ejeX*, creando un arreglo y haciendo que el contenido almacenado (en este caso, las letras guía) vayan colocadas en cada eje, mediante un ciclo ***for***. Véase el diagrama 5.4

Así mismo haciendo dos pequeños ciclos que dibujen los números en los ***ejes Y*** que servirán también de guía en el tablero. Véase el diagrama 5.5

Usualmente para poner una piedra (fichero) fijo en python, se utiliza la siguiente intrucción:

variable,= ax.plot(x,y,'o',markersize=tampunto, markeredgecolor=(0,0,0), markerfacecolor='colorpnto', markeredgewidth=anchomargen)

Pero como en un juego de Go, se van poniendo piedras conforme cada jugador tome su turno, esiste una función en python llamada ***eventos***[3] que me permite poner un fichero en el tablero con un clic. El controlador que está conectado a un evento, puede conocer la posición ***(xdatay ydata)*** en la que el usuario ha hecho clik en la figura a través del argumento ***event***.

Definimos la función ***on_click(event)***, para indicar que la acción del evento será ejecutada al dar un clin en el tablero. Y después globalizamos[4] la variable white para indicar si el color de piedra actual es blanco. Si su valor es True, el color actual de la piedra es blanco, de lo contrario la piedras en color negro.

Después definimos la función que nos dará acceso a las coordenadas exactas de cada piedra con el respectivo valor entero. Véase el diagrama 5.6.

Otra parte importante de un tablero real, son los puntos estrella o hoshi, que sirven de guía para colocar piedras, y de esta manera estretégica para la mayor obtención de territorio. Véase el diagrama 5.7

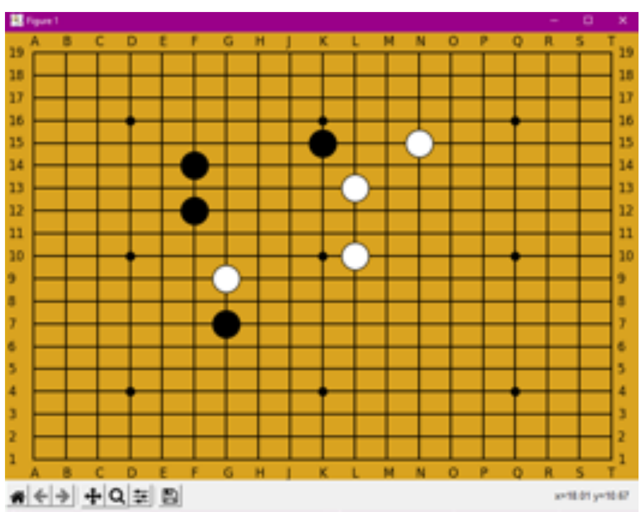


Figura 5.1: Resultado del tablero con las características anteriores.

Y para finalizar, se dan algunas especificaciones sobre los valores de los colores, qué color inicia primero, la función que almacena el tablero actualizado cada vez que se requiere hacer una

[3]Los eventos ejecutan tareas asíncronas y llamadas de retorno, realizan operaciones de E/S de red y ejecutan subprocesos.

[4]Las variables globales en Python son aquellas definidas en el cuerpo principal del programa fuera de cualquier función. Son accesibles desde cualquier punto del programa, incluso desde dentro de funciones.

modificación en el juego, librerías y la función que despliega el resultado final del programa.

Figura 5.2: Diagrama1: Tablero con color y tamaño predeterminado.

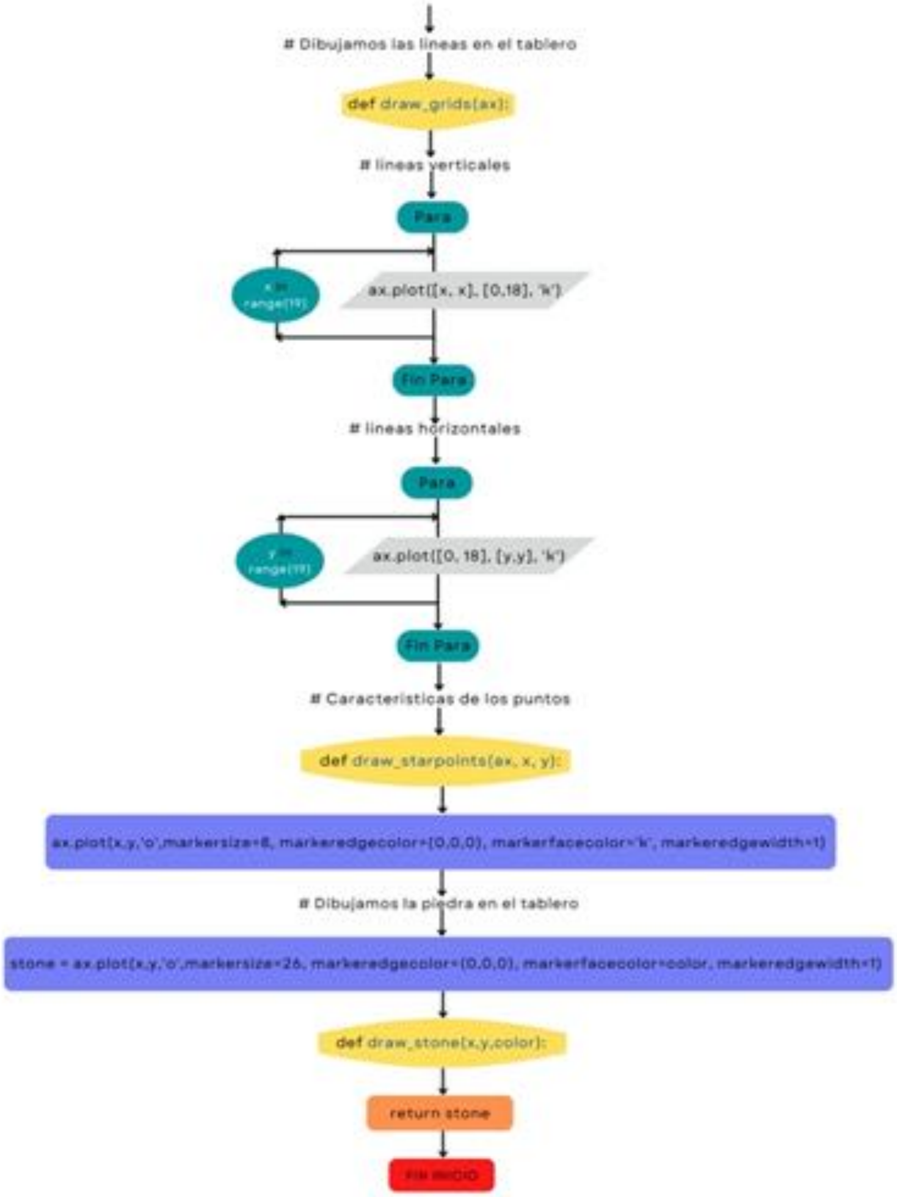


Figura 5.3: Diagrama2: Cuadrícula, características de puntos estrella y dibujar puntos en el tablero.

Figura 5.4: Diagrama3: Letras en el borde del tablero.

Figura 5.5: Diagrama4: Números en el borde del tablero.

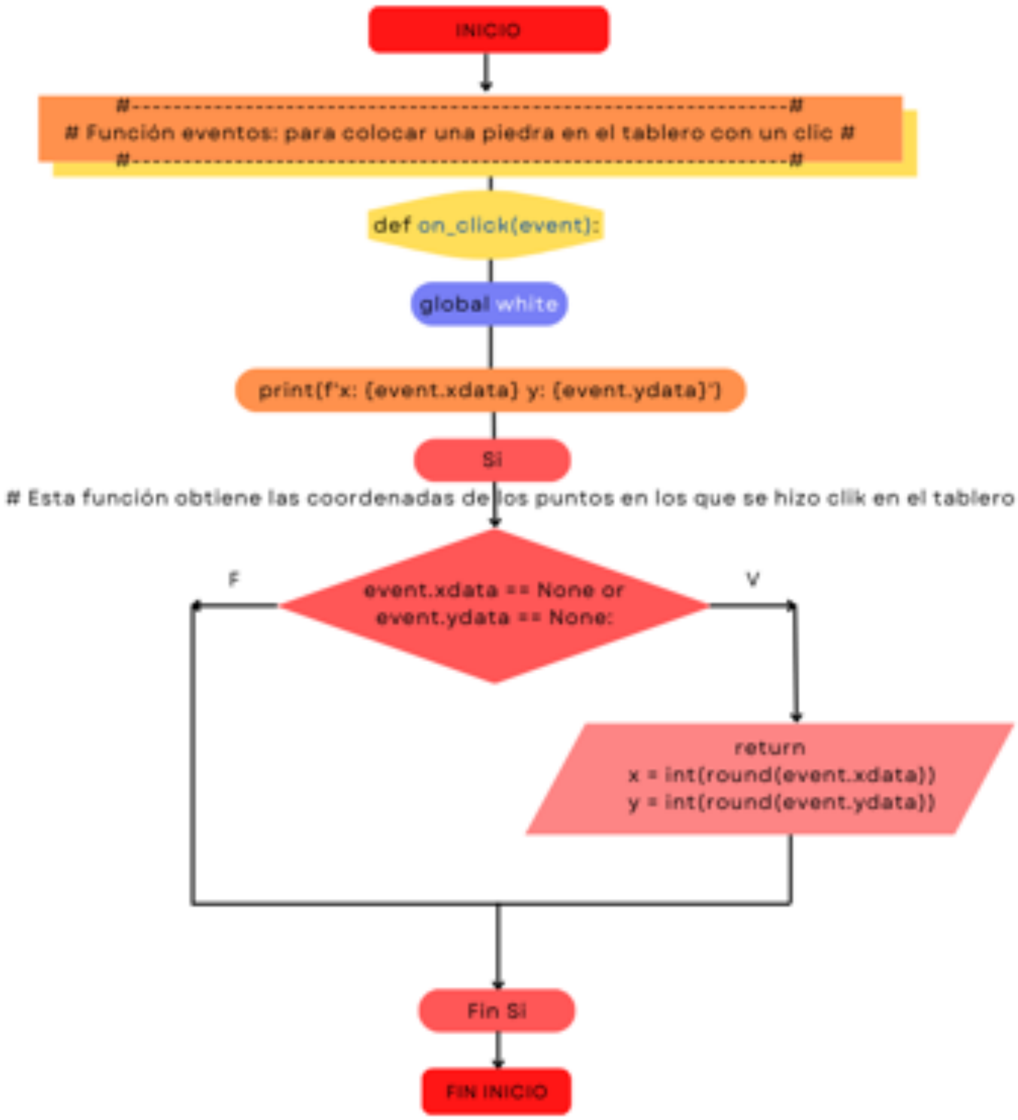


Figura 5.6: Diagrama5: Funsión *eventos* para colocar una piedra en el tablero.

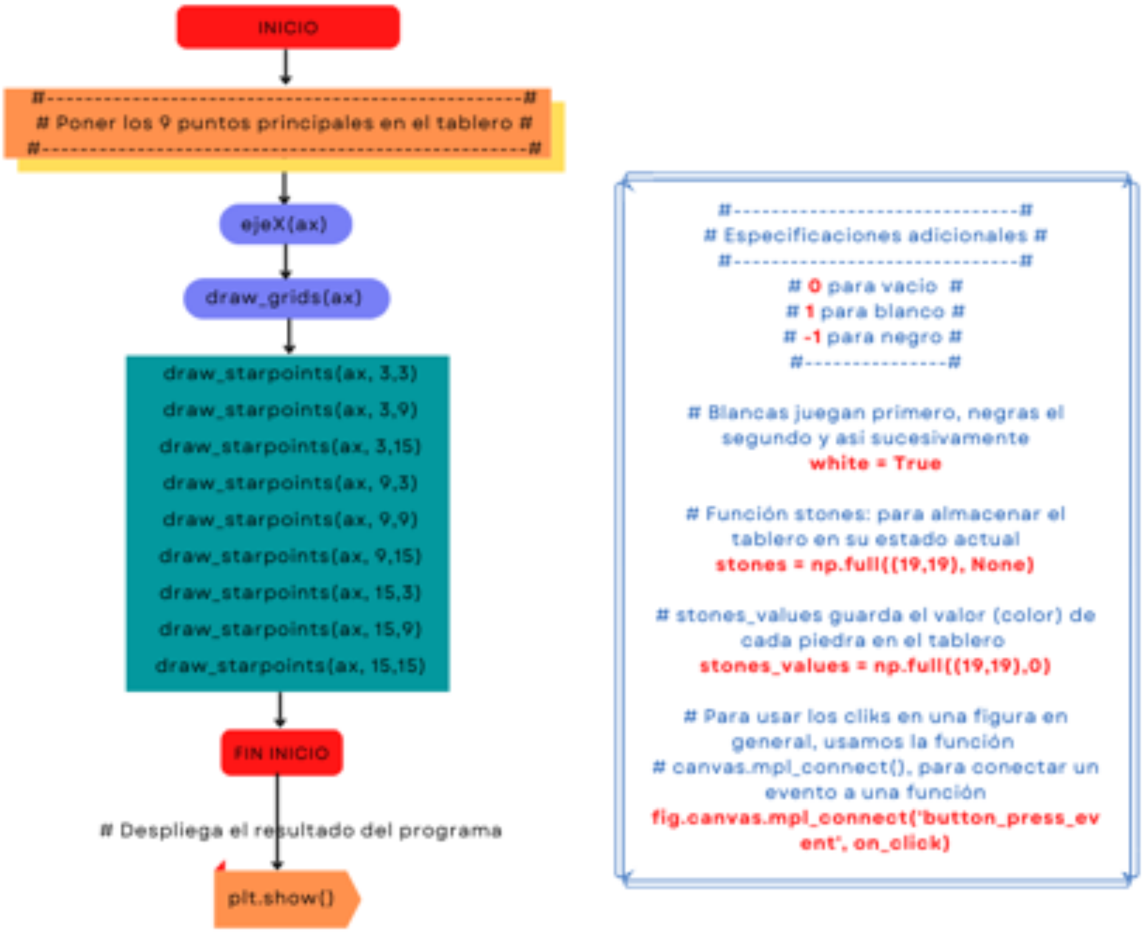


Figura 5.7: Diagrama6: Puntos principales y especificaciones del tablero.

5.2. Contar y retirar piedras del tablero de Go

Esta segunda parte del programa es importante dentro del juego, porque aquí ya se empiezan a implementar las reglas del Go.

Primero calculamos el territorio en el que están rodeadas las blancas y negras. Para esto, se define la función ***calculate_score()***. Y añadimos un ***for*** para evaluar el color de las piedras en el territorio.

El siguiente paso es ver el caso cuando piedras negras o blancas tienen territorio en las orillas. Para el caso de los bordes, se deben colocar piedras "imaginarias" fuera de los bordes, es decir, de manera auxiliar añadiremos un ***padding***[5] para poder verificar si alguna piedra en el

[5] El relleno de cadenas se refiere a agregar, generalmente, caracteres no informativos a una cadena en uno o ambos extremos de la misma.

tablero está totalmente rodeada (es decir, sin libertades) por piedras adversarias.

Luego, creamos una matriz con el relleno de 1 a los lados, para copiar los valores actuales de las piedras. Despues buscamos si hay un cruce vacío de piedras del oponente, recordemos que buscamos calcular un grupo de piedras (territorio) que esté rodeada por piedras adversarias. Para esto, añadimos de manera auxiliar un ***for*** y un ***if*** con las condiciones necesarias.

El siguiente paso es para asegurarse de que una piedra o grupo de piedras estén libres de piedras del oponete, para esto las piedras deben infectar a las piedras conectadas del mismo color.

Creamos una variable llamada ***flipped*** para comparar si los valores que están dentro de nuestro ***zip***[6] son verdaderos. Y lo hacemos de la siguiente manera: asignamos un valor a cada cruce, como en el paso anterior, ese valor está designado por un número (entero cualquiera), entonces cada vez que la función verifique un cruce vació de piedras adversarias, lo denotará con el valor asignado.

Si cumple con las condiciones, devuelve nuestro valor en ***true*** y sigue susesivamente el proceso. En caso de que no cumpla las condiciones, mi variable se queda ***false*** (como al principio) y deja de entrar al ciclo para ser evaluada.

Y por último contamos e imprimimos el total de piedras de un mismo color. Véase el diagrama 18.

Ahora, creamos una función que nos permitirá eliminar las piedras capturadas. Aquí solo definimos la función con dos parámetros, uno que indique el ***color*** de la piedra y el segundo llamado ***remove*** que nos permite remover un elemento de la lista.

Después, creamos una nueva matríz con un reglón adicional (debido al ***padding***) para así volver a actualizar los valores de la matriz que estaremos ocupando. Esto nos ayuda porque continuamente en un juego de Go se capturan y eliminan piedras. Véase el diagrama 19.

En el Go es importante las libertades de una o un grupo de piedras. Entonces, esta parte del código que nos permite comprobar las libertades de una piedra o un grupo de piedras.

Como en pasos anteriores, usamos un ciclo ***for***, cuya función sea trabajar con una lista ***zip***. Lo que hacemos ahora, es verificar que los valores en los cruces sean 0, es decir, siempre que al evaluar una piedra o grupo de piedras, tenga un entorno 0 (vacío) quiere decir que tiene al menos una libertad. Al tener los valores 0 en los 4 vértices quiere decir que esa piedra está incondicionalmente viva. Véase el diagrama 20

Ahora, ya que en el paso anterior verificamos las libertades, justo ahora usando eso, verificaremos con la función ***flipped*** los grupos de piedras que están vivas. Que a diferencia de lo que ya se ha hecho, aquí no se verifican cuantas libertades tiene una piedra, sino que veremos qué piedras forman un grupo donde todas estén incondicionalmente vivas.

Para eso, evaluaremos los elementos de la lista, y las piedras que tengan un valor de 8 (que esté totalmente viva) vayan "infectando" a las que cumplan con esas mismas características. Véase el diagrama 21.

Ahora, vamos a eliminar las piedras o grupos de piedras que estén en atari, dicho de otro

[6] La función zip() puede tomar cualquier iterable como argumento y devuelve un objeto zip que también es un iterador.

modo, que solo tengan una libertad y vayan a ser capturadas. Usamos el método ***pop()***[7] para eliminar el elemento de la lista por completo, junto con la función ya definida ***remove*** y devolver el elemento ya eliminado con un valor ***None***[8]. Primero asigmanos qué elementos debemos eliminar y después se da la intrucción con la condición para poder ser eliminado; verificamos qué piedra o grupo de piedras tienen el valor 0, es decir una sola libertad, para proceder a ser eliminado. Véase el diagrama 22.

Ya que escogimos el método para dibujar las piedras en el tablero, falta la manera en que el controlador realiza la acción de ir colocando cada piedra con el clic izquierdo y el color que le corresponde por turno a cada jugador.

Agregamos una piedra al tablero si el usuario hace clic en el botón izquierdo ***(event.button == 1)*** si el punto actual no tiene una piedra y se realiza un pequeño ciclo para inicializar el primer color que será colocado, para después ir cambiando al siguiente color.

De manera adicional como práctica, porque en realidad en un juego de Go no se pueden quitar las piedras ya puestas en el tablero, se realiza la acción para poder borrar una piedra con el clic derecho, usando la función ***pop().remove()***, de manera que se elimine del tablero. Y terminando con actualizar el estado del tablero con las piedras puestas y eliminadas. Véase el diagrama 23.

Como vimos anteriormente, ya se hizo un método para eliminar piedras en atari o grupos de piedras en la misma situación que vayan a ser capturadas, aquí solo se emplea la acción ***remove_ stones(color)==0***, que elimina las piedras automáticamente. Y lo demás del proceso verifica los casos cuando hay o no suicidio. Véase el diagrama 24.

De manera complementaria se muestra lo siguiente: una tabla resumida con todas las funciones o métodos que se utilizaron y algunos ejemplos de partidas relevantes en el Go, pero realizadas con el programa. Porteriormente, los diagramas de flujo que hacen referencia a esta parte del proceso, se incluyeron en la parte de Anexos.

Nombre	Descripción
$draw\_board()$	Función que dibuja el tablero.
$matplotlib$	Es una librería de Python especializada en la creación de gráficos en dos dimensiones.
$set\_facecolor()$	Establece el color prediseñado para el tablero.
$axis.set\_axis\_off()$	Desactiva los ejes en el tablero.
$draw\_grids(ax)$	Configura las líneas de la cuadrícula.
$draw\_starpoints(ax, x, y)$	Dibuja los puntos estrella en el tablero.
$draw\_stone()$	Dibuja las piedras en el tablero.
$calculate\_score()$.	Calcular territorio en el tablero.
$padding$	Un padding se refiere a agregar, generalmente, caracteres no informativos a una cadena en uno o ambos extremos de la misma

[7]El método pop() elimina y retorna un elemento de una lista. Hay un parámetro opcional, el índice a ser eliminado de la lista, si no se especifica ningún índice, a.pop() elimina y retorna el último elemento de la lista.

[8]None es utilizado cuando se quiere crear una variable pero aún no se le quiere asignar ningún valor en particular; aunque, en definitiva, None es también un valor.

$zip()$	Toma como argumento objetos iterables y retorna un nuevo iterable cuyos elementos son tuplas que contienen un elemento de cada uno de los iteradores originales.
$pop()$	El método pop() elimina y retorna un elemento de una lista.
$event$	Los eventos ejecutan tareas asíncronas y llamadas de retorno, realizan operaciones de E/S de red y ejecutan subprocesos.
$on_{c}lick(event)$	Indica que la acción del evento se ejecuta con un clic.
$pop().remove()$	Remueve una piedra con un clic derecho.

Tabla 5.1: Lista de funciones y métodos

Algunos ejemplos de partidas en el Go

AlphaGo versus Lee Sedol encuentro a cinco juegos celebrado entre el 9 y el 15 de marzo de 2016. Veamos las 3 primeras.[9]

AlphaGo (blanco) ganó el primer juego.

Figura 5.8: Primeros 99 movimientos del juego 1.
Fuente: Tomada de *AlphaGo contra Lee Sedol [Internet].*

[9]Disponible en https://en.wikipedia.org/wiki/AlphaGo_versus_Lee_Sedol

AlphaGo (negro) ganó el segundo juego.

Figura 5.9: Primeros 99 movimientos del juego 2.
Fuente: Tomada de *AlphaGo contra Lee Sedol [Internet]*.

AlphaGo (blanco) ganó el tercer juego.

Figura 5.10: AlphaGo gana
Fuente: Tomada de *AlphaGo contra Lee Sedol [Internet]*.

Capítulo 6

Discusión

En el go los jugadores toman turnos colocando fichas en un tablero de 19x19 con el objetivo de encerrar territorio. Al final del juego, gana el jugador que tenga más territorio. En el capítulo 3, se mostró la definición del conjunto G con todas las configuraciones de juego g posibles, que en Teoría de computación es llamado **espacio de toma de decisiones del juego.**

Si tomanos en cuenta todas las posibles secuencias de configuraciones de juego sucesivas, una primer aproximación a su tamaño se obtiene de 361!, considerando la primer jugada que puede realizarse de 361 maneras, la segunda de 360, continuando de manera sucesiva, obteniendo lo siguiente: $n(DT) < 361! \approx 1{,}4379x10^{768}$.

Esta aproximación de configuraciones de juego, excluyen la posibilidad de volver a jugar en un vértice donde haya sido colocada una piedra capturada y por ende esté vacío [3]. Si consideramos la posibilidad de jugar en vértices que estaban previamente ocupados, la aproximación a la que se llega es de: $n(DT) < 10^{10^{117}}$ [3].

La cardinalidad del árbol de juego del ajedrez, comparada solamente con la cardinalidad del espacio de estados del Go, es $10^{40} \leq\leq 10^{170}$; casi insignificante comparada con la cardinalidad del árbol de juego del Go, $1{,}4379x10^{768}$.

Desde inicios del siglo XXI, las llamadas inteligencias artificiales que juegan Go, son programas que utilizan métodos de aprendizaje automático profundo [13]. Desde 2016, algunas lo juegan mejor que los mejores maestros humanos profesionales del mundo. Algunas de ellas son AlphaGo, su evolución AlphaGo Zero y HanDol, una IA desarrollada en Corea del Sur.

En México los desarrollos matemáticos y algorítmicos sobre el juego de Go son los artículos científicos en teoría de juegos [15], [16], [17], que formaron parte de la tesis doctoral de Arturo Yee Rendón [18]. En esta tesis, para la cuantificación del control territorial el juego de Go, se utiliza el modelo de Ising tal que, con una adaptación de la función de energía del Hamiltoniano, se calcula la pelea entre conjutos de piedras negras y blancas en una configuración del tablero de juego, al cuantificar y sumar las interacciones entre todas las piedras en dicha configuración.

Asimismo, en lo que son inicios de una teoría matemática del juego de Go, en la tesis de licenciatura de Emil García [3] (Facultad de Ciencias de la UNAM), se dan definiciones matemáticas de conceptos del juego de Go: tácticas, estratégias, influencias y control de territorio.

Por otro lado, en la Teoría de juegos combinatorios de Berlekamp, Conway y Guy, en un juego **partisano** no es requisito que una jugada disponible para un jugador esté disponible para ambos; tal condición se incluyen en el desarrollo de A. Blom [8], segundo enfoque mostrado en esta tesis: ciertos juegos se representan como "sumas" de juegos simples, más pequeños; en este caso en varias regiones del tablero de Go.

Estos enfoques son aportaciones notables a la teoría formal y la cuantificación del número de partidas de Go, y dan pie a futuros desarrollos formales.

Capítulo 7

Conclusiones

Este trabajo de tesis expone dos enfoques: los inicios de una teoría matemática del juego de Go sobre tácticas y estrategias e influencia de territorio; y una sobre teoría de juegos combinatorios aplicado al juego de Go. En ambos se explican las aportaciones y diferencias.

Además, se muestran un programa en lenguaje Python implementando las reglas del Go; se explica el código y se ilustra con diagramas de flujo la dinámica del juego, a través de las tácticas; así mismo, se ilustran los algoritmos que automatizan el juego, en situaciones particulares.

Bibliografía

[1] Baker, K. (1986). *The way to go.* American Go Foundation.

[2] Kageyama, T. (1978). *Lessons in the Fundamentals of Go.* Kiseido publishing company.

[3] García, E., (2022). *Hacia una teoría matemática del juego de Go: tácticas, estrategias, influencia y control de territorio.* Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, dirigida por el Dr. José Matías Alvarado Mentado. Presentada el 29 de Septiembre de 2022.

[4] López Minnucci, M. *Introducción al juego de Go.* Esta obra existe bajo una Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Derivar 4.0 Internacional. Segunda edición, junio de 2015.

[5] Korschelt, O. *Theory and Practice of Go.* C.E. Tuttle Co, ISBN 978-0-8048-0572-8, 1966.

[6] DeepMind. *AlphaGo is the first computer program to defeat a professional human Go player, the first to defeat a Go world champion, and is arguably the strongest Go player in history.* https://deepmind.com/research/case-studies/alphago-the-story-so-far

[7] Muñoz de Frutos, A. *¿Qué es DeepMind Alpha Go?* Computer Hoy, diciembre 2017. https://computerhoy.com/noticias/software/que-es-deepmind-alpha-go-72213

[8] Blom, A. *Combinatorial Game Theory. An Introduction Guided by the Game of Go.* July, 2021.

[9] Barradas-Bautista, D., Alvarado-Mentado, M., Agostino, M., and Cocho, G. (2018). *Cancer growth and metastasis as a metaphor of Go gaming: An Ising model approach.* PloS one, 13(5), e0195654.

[10] Berlekamp, E. R., and *Wolfe, D.* (1994) *Mathematical Go Endgames: Nightmares for Professional Go Player.* Ishi Press International.

[11] Kawabata, Y., Sato, A., and *Stahl, A. K.* (2004). *El maestro de Go.* Emecé.

[12] Diestel, R. (2000) *Graph Theory.* 5ª edición. Springer-Verlag, Heidelberg Graduate Texts in Mathematics.

[13] Rojas-Domínguez, A., Barradas-Baustista, D., and Alvarado-Mentado, M (2019). *Modeling the game of go by ising Hamiltonian, deep belief networks and common fate graphs.* IEEE Access, 7, 120117-120127.

[14] Silver, D., Huang, A., Maddison, C. J., Guez, A., Sifre, L., Van Den Driessche, G., ... and Hassabis, D. (2016). *Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search.* Nature, 529(7587), 484-489.

[15] Yee Rendón, A. and Alvarado-Mentado, M. (2011). *Formal Language and Reasoning for Playing Go.* In LA-NMR (pp. 125-132).

[16] Yee Rendón, A. and Alvarado-Mentado, M. (2012). *Pattern Recognition and Monte-CarloTree Search for Go Gaming Better Automation.* In: Pavón, J., Duque-Méndez, N.D., Fuentes-Fernández, R. (eds) Advances in Artificial Intelligence–IBERAMIA 2012. IBERAMIA 2012. Lecture Notes in Computer Science(), vol 7637. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34654-5_2

[17] Yee Rendón, A. and Alvarado-Mentado, M. (2014). *Well-time pattern recognition in Go gaming automation.* Math. Methods Comput. Tech. Sci. Eng, 174-181.

[18] Yee Rendón, A. (2015). *Selección de estrategias en juegos complejos: béisbol, fútbol americano y go.* Centro de Investigación Y de Estudios Avanzados del Instituto Politéctico Nacional, Departamento de Computación Unidad Zacatenco.

[19] Hebert, Drusilla. (2015). *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy. https://hdl.handle.net/11299/174778.

[20] John Horton Conway. *On Numbers and Games.* London: Academic Press, 1976. isbn: 0-12-186350-6.

[21] *Go.* https://thereaderwiki.com/es/Go

[22] *Tsumego Hero.* https://tsumego-hero.com/

[23] *The KGS Go Server.* https: www.gokgs.com

[24] *Developing the Go Game using matplotlib and NumPy — Part 1.*

https://towardsdatascience.com/developing-the-go-game-棋-using-matplotlib-and-numpy-part-1-3f94127d73e6

Anexos

El significado de una posición de Go

En el texto *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* [19], Drusilla Lorange expone una aplicación de los números surreales para analizar posibles estrategias de los jugadores, en un instante específico de un juego de Go, mediante el estudio de la puntuación en el juego. Estos resultados brindan una solución a un problema planteado por Berlekamp y Wolfe en el libro *Mathematical Go*. En esta sección presentamos la solución planteada por Lorange.

De manera particular, la propuesta de los puntos ganados por las blancas tienen un valor negativo y pueden considerarse como puntos que las negras no toman, mientras que los puntos ganados por las negras tienen un valor positivo. Si divimos el tablero en sumas disyuntivas e ignorando las reglas de puntuación anteriores; veamos lo que Berlekamp denominó *"the chilled game."*

Se le asigna un valor fraccionario $\pm\frac{1}{2^n}$ a los territorios en el tablero, donde n es asignado a los puntos que obtienen blancas o negras en el primer movimiento. En cuanto al valor positivo o negativo de las posiciones, a las blancas se les asignan los valores negativos (ó si negras se mueven en sentido de las blancas) y a las negras, se les asignan los valores positivos. Por ejemplo, en la siguiente figura 1, tenemos que $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, si las negras se mueven primero.

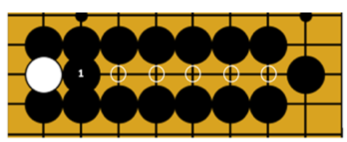


Figura 1: Valor del pasillo

Veamos otro ejemplo; en la figura 2, si blancas se mueven en a, el valor del movimiento sería $-\frac{1}{8}$. Y si negras bloquean, sa valor es $-\frac{1}{4}$. Recordando que el valor negativo, es para las blancas.

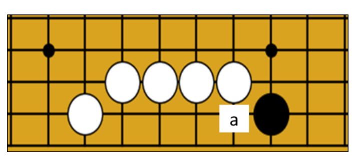


Figura 2: Un pasillo

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.21)

En la figura 3, el movimiento de las negras ganaría 2 puntos, mientras que el movimiento de las blancas ganaría 0, obteniendo el juego $\{2|0\}$. Sin embargo, bajo el sistema, las negras perderían un punto tanto por *enviar* como por colocar una piedra, haciendo esto (un juego relajado, equivalente a $0|0 = *$), como en la figura 4

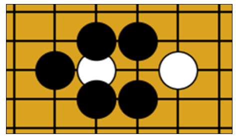


Figura 3: Movimiento $*$

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.21)

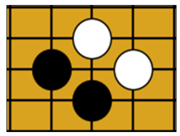


Figura 4: Una *dama*

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.21)

Donde los valores fraccionarios e infinitesimales se redondean a favor del último movimiento. Por ejemplo, $*$ se redondea a -1 o 1, $\uparrow$ se redondea a 0 o 1 y $\downarrow$ se redondea a -1 o 0 (donde los números negativos son para blancas y los positivos para negras).

Fin del juego

Con el fin de extender el significado de los movimientos, se analizará un juego, que se presenta en [19], donde explica el método *"in media res"*, que a su vez es explicado por medio de otros movimientos, que tienen valor con los números surreales.

En la imagen 5, las regiones disputadas del tablero están indicadas por a-z y A, después se divide el tablero en subjuegos. Se analizarán primero, pasillos y sus valores. Despúes los juegos infinitesimales, sumando los subjuegos, el valor enfriado total de un juego, el jugador con la ventaja y los movimientos ganadores.

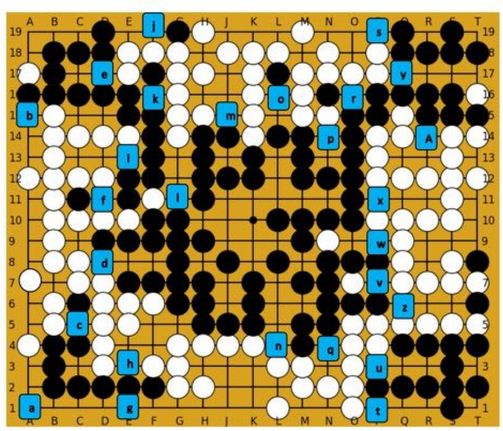


Figura 5: Encuentra los movimientos ganadores

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.22)

Pasillos

A los pasillos más largos se le otorgan más puntos. Veamos que a las regiones alrededor de e, p y q son equivalentes en valor para Blanco y Negro. Ahora, supongamos que jugamos *"the chilled game."* en estos pasillos. Veamos qué sucede si juegan en e.

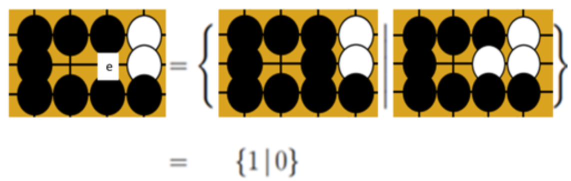


Figura 6: Pasillo e

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.23)

Así, este pasillo se convierte en el juego $\{-1|-1\} = -1*$ si negras han *enviado*, signifcando que negras en el mejor de los casos, puede redondear esto a 0 y las blancas a -2. Y sin enfriamiento, los pasillos restantes (p, q, d, t, u, b, i, h, A y x) también se evalúan fácilmente. Veamos.

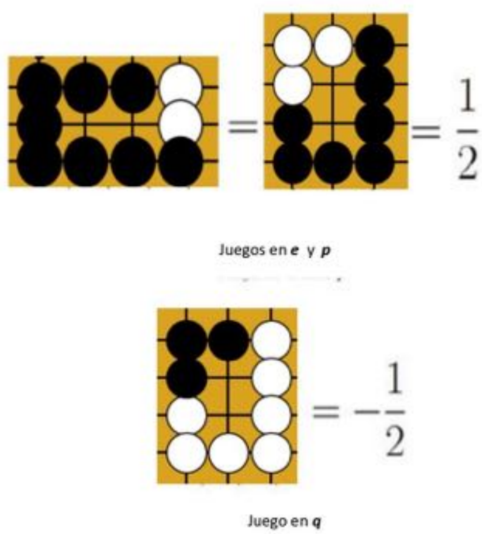


Figura 7: Pasillos e, p y q

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p. 23,24,25)

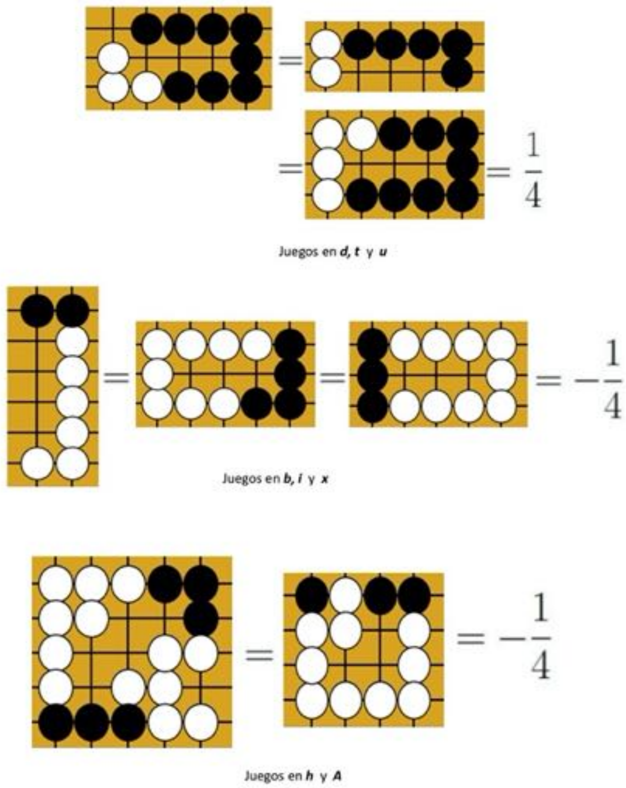


Figura 8: Pasillos d, t, u, b, i, x, h y A

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p. 23,24,25)

Jugadas $*$

Las jugadas en c, k, f, r y v dan como resultado el juego $*$. Analicemos, en los primeros 4 subjuegos, por ejemplo en c, si las blancas juegan primero, capturan una piedra negra, pero esta se reduce a 0 debido al *enviar* y al impuesto por jugar. Y las negras no obtiene nada. Entonces tenemos que nos da $\{0|0\}$, que es en sí el juego $*$.

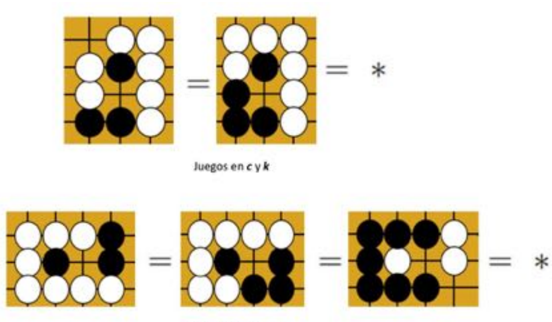


Figura 9: Juegos en *c, k, f, r* y *v*

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.25)

Subidas y bajadas

En el siguiente juego, el movimiento más rápido para las negras alrededor de w, es capturar la piedra blanca. Por ende a blancas solo le queda la opción de moverse a una *dama*. Siendo así, el subjuego $\{0|*\} = \uparrow$. Y de manera similar los juegos j y s.

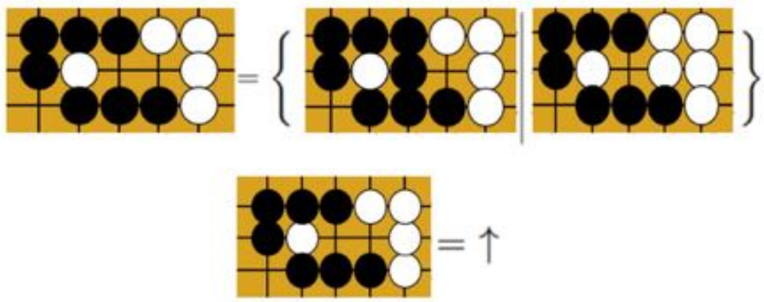


Figura 10: Jugada en w

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.26)

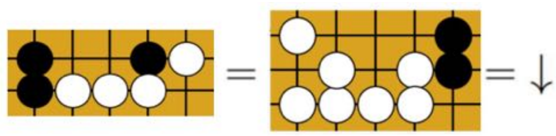


Figura 11: Jugada en j y s

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.26)

Una jugada más complicada es la y, pues tenemos que tener en cuenta más de un movimiento en regiones más grandes que no están tan bien unidas por una piedra al final.

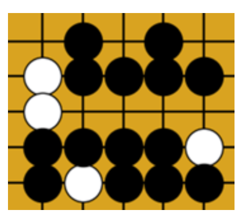


Figura 12: Jugada en y

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.27)

Así, tenemos a blancas imponiéndose sobre negras, desde los dos extremos, jugada similar a la de un pasillo, puesto que las negras pueden defender en cualquier extremo. Y las blancas pueden extenderse sobre la izquierda. Ya que es esta situación, las blancas pueden hacer que su área se acerque a una *dama* y las negras pueden capturar esa piedra blanca, quitándole sus puntos, en tres variaciones. En total, obtenemos tres $\uparrow$.

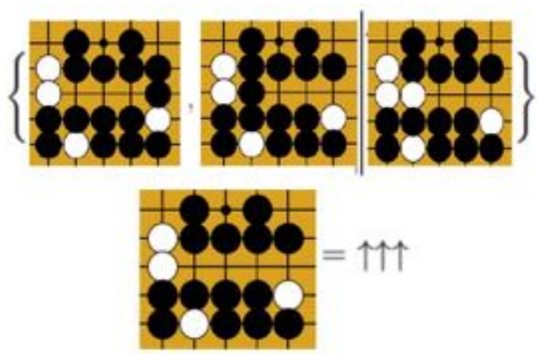


Figura 13: Siguiendo con la jugada en y

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.27)

Aquí, se añaden más movimientos en base al tablero, de *Subidas, Bajadas* y movimientos $*$.

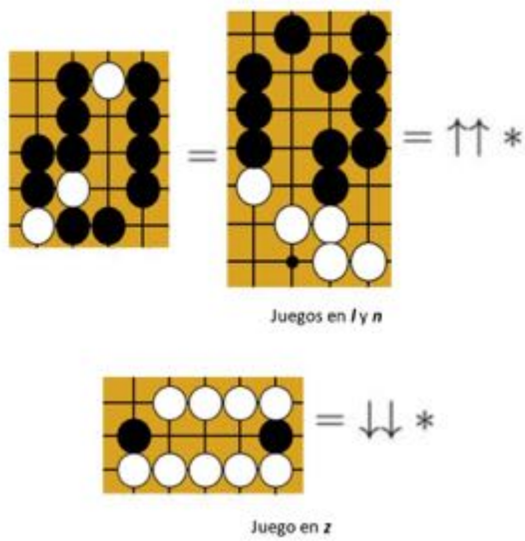


Figura 14: Jugadas en l, n y z

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.28)

Movimientos ganadores

Por último, se muestra la suma del juego en particular.

Aquí, la suma de los pasillos, que da un total de

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

Figura 15: Suma total de los pasillos

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.29)

Notemos que $* + * = 0$ y $\uparrow = -\downarrow$ podemos simplificar los infinitesimales a

$$\overbrace{* + * + * + * + * + *}^{0} + \overbrace{\uparrow + \downarrow}^{0} + \downarrow + \overbrace{\downarrow + \downarrow + \downarrow + \uparrow\uparrow\uparrow}^{0} + \uparrow\uparrow * + \overbrace{\uparrow\uparrow * + \downarrow\downarrow *}^{0}$$

Figura 16: Simplificando los juegos infinitesimales

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.29)

Por lo tanto, tenemos que $\downarrow + \uparrow\uparrow * = \uparrow *$. Al igual que $*$ y $\uparrow *$ son incomparables a 0 y es un juego que gana el primer jugador. De igual manera, jugar en cualquiera de los pasillos le da ventaja al segundo jugador, por ejemplo, supongamos que las negras jugaron en d. Entonces el juego sería $-\frac{1}{4} \uparrow *$, así las blancas podrían recuperar los puntos perdidos redondeando el juego a su favor. Pero si las blancas se mueven en una región $*$, el total del juego es $\uparrow > 0$, lo que hace que el juego le de la victoria a negras.

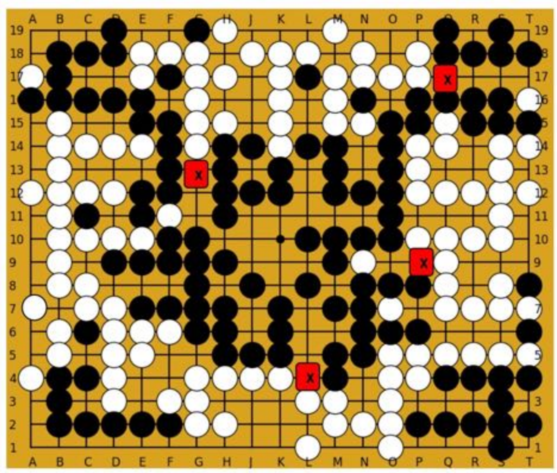


Figura 17: Posibles movimientos ganadores en d

Fuente: Tomada de *Construction, Operations, and Applications of the Surreal Numbers.* (p.29)

La Teoría de Juegos Combinatorios y los números surreales, no solo pueden adentrarnos a la explicación de un juego de Go, sino que, también pueden asociarse a los campos del Análisis no estándar, el Análisis surrealista y las Transseries.

Código del programa

Para mejor entendimiento y uso al lector, el código del programa puede descargarse en el siguiente link: PYTHON CODE

Diagramas de flujo detallados

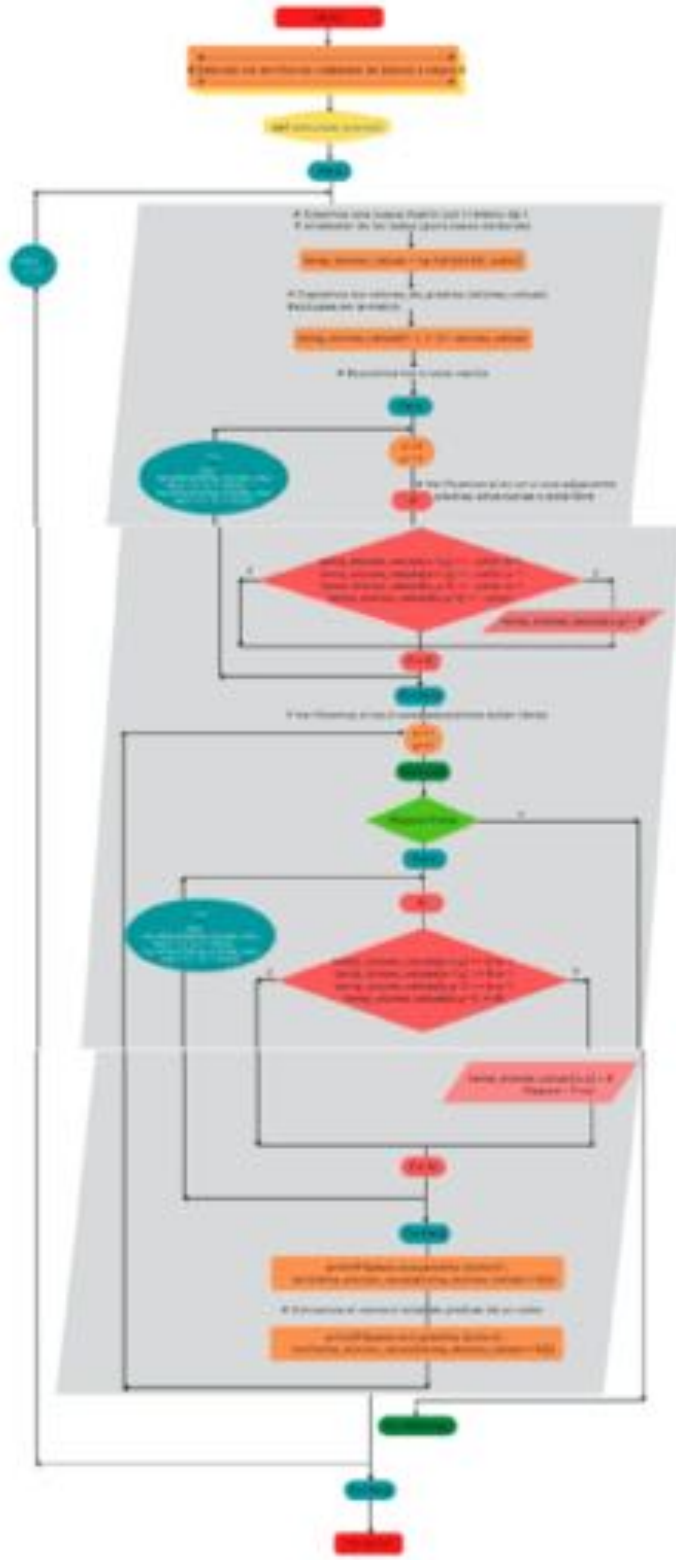


Figura 18: Diagrama7: Cálculo de territorio de piedras.

Figura 19: Diagrama8: Piedras capturadas por el oponente.

Figura 20: Diagrama9: Libertades de conjuntos de piedras.

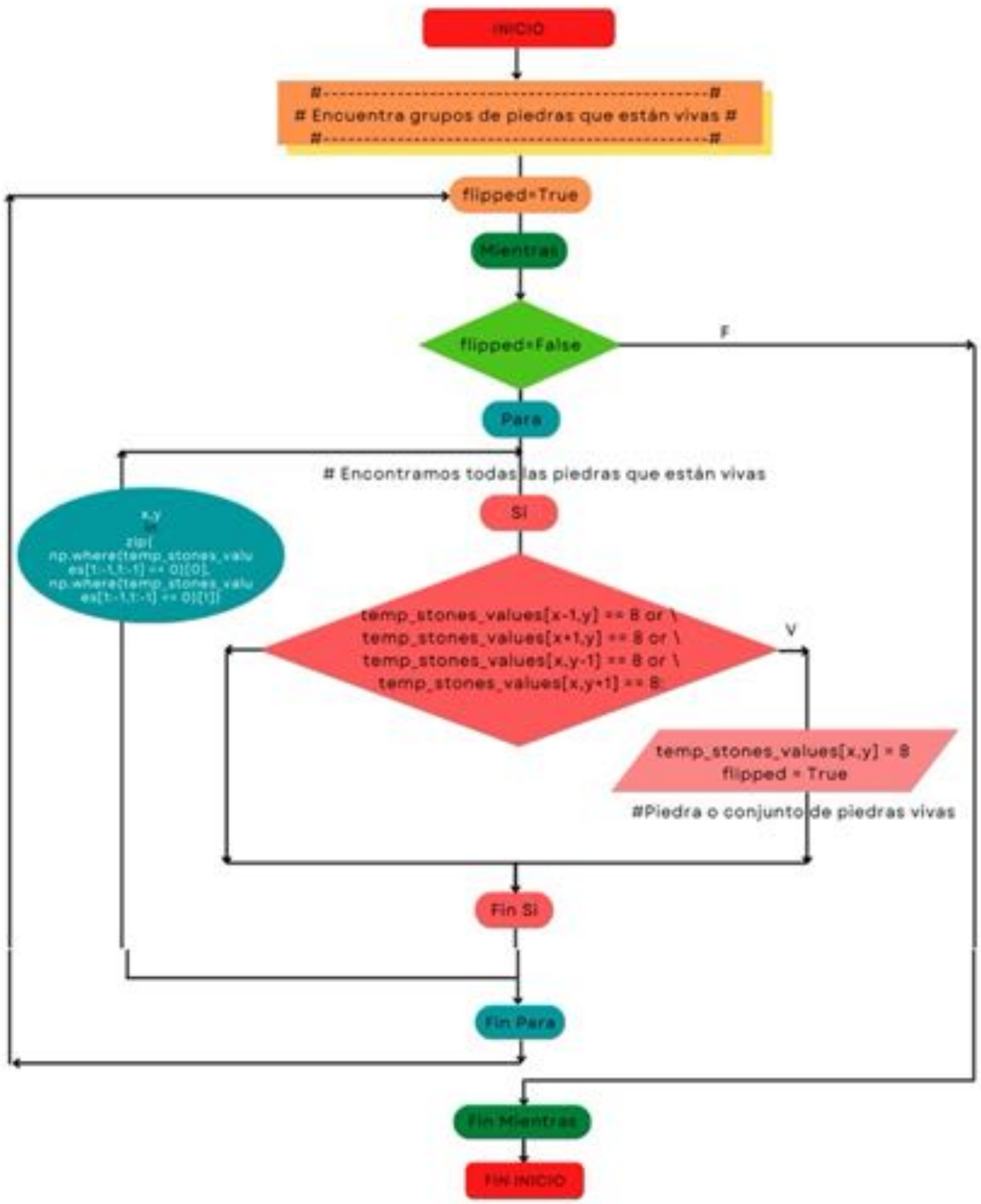


Figura 21: Diagrama10: Grupos de piedras vivas.

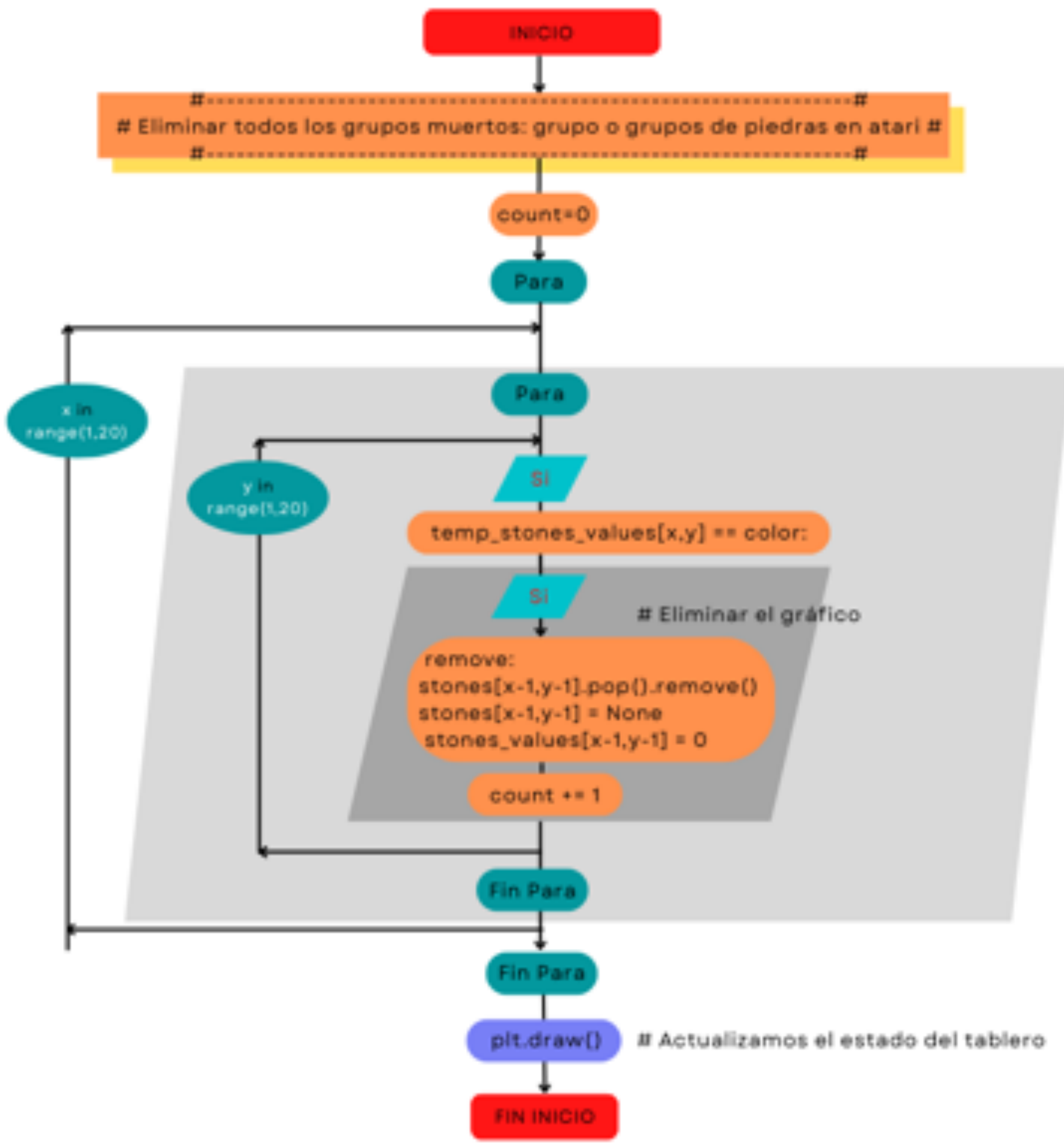


Figura 22: Diagrama11: Eliminar grupos muertos de piedras en atari.

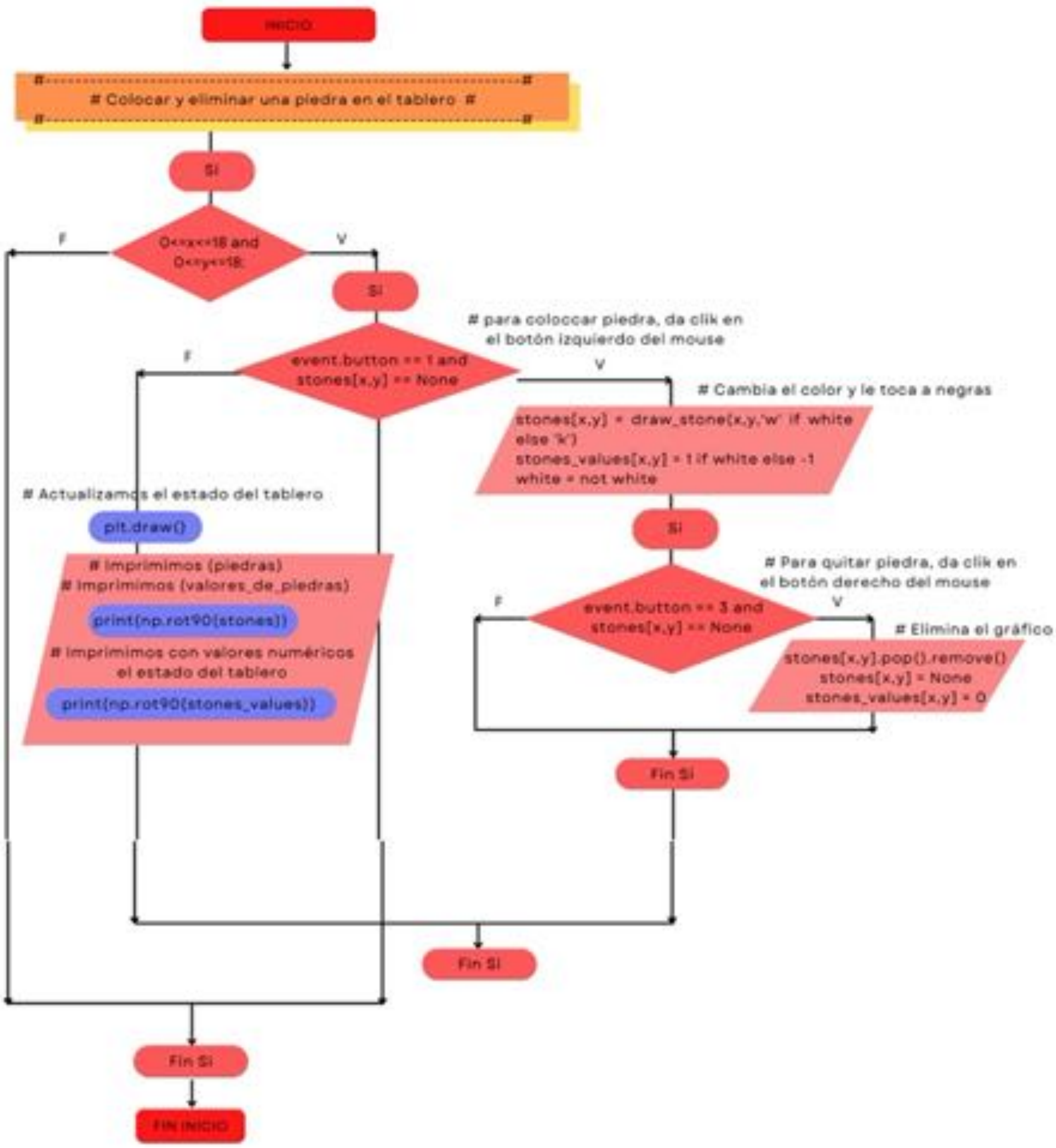


Figura 23: Diagrama12: Colocar y eliminar una piedra en el tablero.

Figura 24: Diagrama13: Eliminar piedras capturadas.