Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

"EL LEMA DE COUSIN: APLICACIONES AL ANÁLISIS REAL"

T E S I S

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Ericka Tlatilpa Guarneros

Directora

M.C. Mª Guadalupe Raggi Cárdenas

Codirectora

Dra. Olga Leticia Fuchs Gómez

PUEBLA, PUE. AGOSTO DE 2012

AGRADECIMIENTOS

Son Muchas las personas especiales a las que me gustaría agradecer, su apoyo, amistad, ánimo y confianza en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en el corazón. Sin importar donde estén, quiero agradecerles por formar parte de mi vida, por lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

Mami y Papi, no me equivoco si digo que son los mejores padres del mundo, que me han heredado el tesoro mas valioso que pueden darle a una hija, su amor. Quienes sin escatimar esfuerzo alguno han sacrificado gran parte de su vida en formarme y educarme. A quienes la ilusión de su existencia ha sido verme convertida en una persona de provecho. Nunca podré pagarles con las riquezas más grandes del mundo, pero si les dedico este esfuerzo alcanzado gracias a su apoyo incondicional. Son los seres que más quiero. Sinceramente gracias.

Hermanito, ¿Adivina qué? también te dedico esta tesis por ser el mejor hermano que una hermana puede tener, yo sé que no te he demostrado mi cariño, pero quiero agradecerte tu comprensión. Te quiero muchísimo.

Familias Tlatilpa Pedraza y Guarneros Sánchez, gracias por compartir este logro conmigo.

A todos mis amigos sin excluir a ninguno, gracias por todos los momentos que hemos pasado juntos y porque han estado conmigo siempre, aunque solo sea para molestar☺. Gracias por el valor más bonito que me pueden brindar, su amistad.

A todos y cada uno de mis profesores, gracias de ante mano por los consejos que me brindaron durante mi vida como estudiante. Especialmente a la Mtra. Ma. Gpe. Raggi Cárdenas por su paciencia como tutora y ahora directora de tesis, al igual que la Dra. Leticia Fuchs Gómez por sus sugerencias, comentarios y tiempo dedicado para sacar adelante este trabajo.

A mis sinodales Dr. Agustín Contreras Carreto, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, y Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por sus sugerencias, comentarios y valioso tiempo que invirtieron en revisar este trabajo.

Al más especial de todos, a ti Dios mío, por todo el amor con el que me rodeas, por no abandonarme cuando más te necesité, pero principalmente por permitirme realizar uno de mis sueños más importante de mi vida.

Ericka

Índice general

Introducción ɪ

1. El Lema de Cousin **1**
- 1.1. Preliminares 1
- 1.2. Lema de Cousin 2
- 1.3. Equivalencia con el Axioma del Supremo 3

2. Aplicaciones al Análisis **5**
- 2.1. Preliminares 5
- 2.2. Aplicaciones 8

3. Aplicaciones al Cálculo Diferencial **15**

4. Aplicaciones Avanzadas **21**
- 4.1. Equicontinuidad Puntual y Uniforme 21
- 4.2. Una Aplicación para Familias Equicontinuas 24

Conclusiones **27**

Bibliografía **29**

Introducción

Aprender a aprender en la escuela, o también aprender a pensar, es uno de los retos más singulares de la enseñanza actual. En este sentido, las estrategias de aprendizaje, entendidas como las operaciones del pensamiento con las que trabaja el alumno en el proceso de desarrollo del currículo, son herramientas de inestimable valor.

Una metodología para enseñar a pensar en el aula debe caracterizarse principalmente por potenciar un aprendizaje activo ya que es la propia experiencia la que proporciona el conocimiento y la utilización de estrategias o habilidades del pensamiento y de los conocimientos previos. La aplicación de estos principios a la realidad de la vida del aula mejorará la forma de trabajar las diversas áreas curriculares.

Hablar de la situación actual de la Didáctica del Análisis Matemático implica hacer un poco de historia y explicar el marco general en el que se inserta. En efecto, es en 1985, en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado "Pensamiento Matemático Avanzado" y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal [6, 10].

El interés por estos temas se explica por la tendencia de la Didáctica Matemática, durante la década de los noventa, a considerar la problemática del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de competencias y de habilidades; en esos años se aprecia una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia investigaciones acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Este desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes.

De acuerdo con las palabras de Dreyfus [6], “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante” y es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”. Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

Para contribuir significativamente a la maduración intelectual de los estudiantes de matemáticas debemos proveer múltiples oportunidades que signifiquen genuinas situaciones de pensamiento para hacerlos capaces de reflexionar por si mismos. En otras palabras, para generar un pensamiento matemático es necesario estimular su desarrollo. El explorar diferentes caminos en la resolución de un problema, le abre al estudiante un nuevo panorama que influye en su capacidad de análisis y le permite observar desde diferentes puntos de vista una misma situación, construyendo así una estructura intelectual cada vez mas fortalecida. De hecho, los conceptos matemáticos deberán ser construidos por los estudiantes partiendo de una variedad de experiencias gracias a las cuales se irá acumulando un capital matemático sobre la base de procesos de pensamiento constructivo.

Usualmente en los textos de Análisis Real se demuestran los teoremas del Valor Intermedio, de Weierstrass, de Continuidad Uniforme, etc., usando el Axioma del Supremo, o la Compacidad, entre otras equivalencias. Nuestro propósito principal es estudiar estos teoremas, basándonos en [1, 2, 3, 4, 5, 8], donde se dan demostraciones alternativas de estos teoremas y algunos más, usando el Lema de Cousin. Este Lema es equivalente al Axioma del Supremo y también a la compacidad de los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. La demostración de este lema se le atribuye a P. Cousin [11]. Posteriormente, alrededor de los años 60's, en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil de una función, se usa este lema, entre otras cosas, para demostrar la unicidad de la integral de Henstock-Kurzweil de una función. Ver [5].

Una prueba alternativa de un teorema ofrece una nueva forma de ver el teorema y la nueva perspectiva es a menudo suficiente para justificar el nuevo enfoque. Además, una nueva prueba de un resultado nos puede permitir introducirnos a nuevas áreas de trabajo.

El objetivo general es mostrar que los teoremas pueden tener varias pruebas alternativas, usando algunas equivalencias, en este caso usamos una equivalencia del Axioma del Supremo. Como objetivo particular es ver la versatilidad de particiones etiquetadas δ-fina en el uso de pruebas de algunos teoremas vistos en los cursos de Análisis Clásico Elemental, tales como el Teorema del Valor Intermedio, de Weierstrass, Teorema de Continuidad Uniforme, entre otros.

La motivación de este trabajo, es que el alumno se anime a analizar y hacerse múltiples preguntas a lo largo de la carrera, ya que de ahí pueden surgir investigaciones en temas básicos de las matemáticas.

Debido a que a muchos estudiantes se les dificulta la comprensión del Axioma del Supremo y del concepto de compacidad, además de que en muchos resultados del Análisis Real son utilizados estos conceptos, considero importante este trabajo de tesis de licenciatura en Matemáticas, ya que en éste se presenta la demostración de estos teoremas y de otros usando el Lema de Cousin.

La presente tesis está conformada por cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 se introduce el Lema de Cousin, donde a su vez se expone la demostración de dicho lema. También se presenta la demostración de la equivalencia del Lema de Cousin con el Axioma del Supremo.

En el Capítulo 2 se presentan pruebas alternativas, usando el Lema de Cousin, a diversos teoremas demostrados en los cursos de Análisis Real, tales como: los Teoremas del Valor Intermedio, de Weierstrass, de Continuidad Uniforme, haciendo uso del Lema de Cousin.

En el Capítulo 3 se usa el Lema de Cousin en las pruebas de algunos teoremas importantes del Cálculo Diferencial.

En el Capítulo 4 se aplica el Lema de Cousin a teoremas que usualmente no son vistos en los cursos de análisis elemental, dichos teoremas abordan el tema de las familias de funciones equicontinuas, en donde se hace un estudio, en extenso, de lo que tratan dichas familias.

Finalmente daremos las conclusiones de dicho trabajo.

Capítulo 1

El Lema de Cousin

1.1. Preliminares

Definición 1.1. *Sean $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $I = [a, b]$. Una partición de I, es una colección finita de subintervalos de I, denotada $\{I_i\}_{i=1}^n$ ($I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, ..., n$), donde*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Definición 1.2. *Una partición etiquetada de I es una familia*

$$P = \{(I_i, t_i) \mid i = 1, ..., n\},$$

donde $\{I_i\}_{i=1}^n$ es una partición de I y $t_i \in I_i$, t_i se le llama una etiqueta de I_i.

Definición 1.3. *Sean $I = [a, b]$ y $\delta : I \to \mathbb{R}$ una función. A δ se le llama una función medidora, si $\delta(t) > 0$ para todo $t \in I$.*

Definición 1.4. *Sean $P = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada del intervalo $[a, b]$ y δ una función medidora de I, se dice que P es δ-fina si:*

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \quad i = 1, ..., n.$$

Notación: *Si la partición P es δ-fina, se denotará como $P \ll \delta$.*

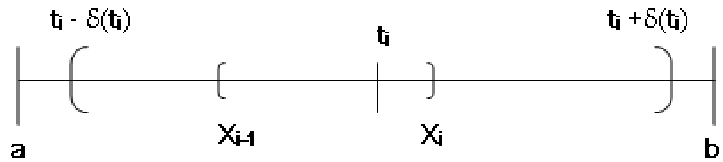

Figura 1.1: Interpretación Geométrica de la **Definición 1.4**

1.2. Lema de Cousin

Puede parecer un poco sorprendente que una partición δ-fina de un intervalo $[a, b]$ siempre exista. Sin importar "lo mal" que la función δ se comporte. Sin embargo, es importante que δ sea mayor que cero y que el intervalo sea compacto.

El descubrimiento de la existencia de una partición δ-fina para cualquier intervalo $[a, b]$ se remonta al siglo XIX por el matemático belga Cousin.

Lema 1.5 (Cousin)**.** *Si* $I = [a, b]$ *y* $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *positiva, entonces existe una partición etiquetada* δ*-fina del intervalo* $[a, b]$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$S = \{x \in [a, b] \mid \text{ existe una partición } \delta\text{-fina de } [a, x]\}.$$

Es claro que $S \neq \emptyset$, pues $a \in S$, además, S está acotado superiormente por b. Así que, por el Axioma del Supremo, existe $\alpha = \sup S$, además $\alpha \in [a, b]$.

Vamos a demostrar que $\alpha \in S$, es decir, que el intervalo $[a, \alpha]$ tiene una partición etiquetada δ-fina.

Como $\delta(\alpha) > 0$, $\alpha - \frac{\delta(\alpha)}{2}$ no es cota superior de S, entonces existe $x_0 \in S$ tal que

$$\alpha - \frac{\delta(\alpha)}{2} < x_0.$$

Como $x_0 \in S$, el intervalo $[a, x_0]$ tiene una partición $P \ll \delta$. Tomemos

$$\overline{P} = P \cup ([x_0, \alpha], \alpha).$$

$\overline{P}$ es una partición δ-fina en $[a, \alpha]$. Por lo tanto, $\alpha \in S$.

Para terminar la demostración, probaremos que $\alpha = b$. Por contradicción, supongamos que $\alpha < b$, sea $z \in [a, b]$ tal que

$$\alpha < z < \text{mín}\{\alpha + \delta(\alpha), b\}.$$

Entonces $\overline{P} \cup \{([\alpha, z], \alpha)\}$ es una partición etiquetada δ-fina del intervalo $[a, z]$, es decir $z \in S$, lo cual contradice que α es el supremo de S. Por lo tanto, $\alpha = b$.

$\square$

1.3. Equivalencia entre el Lema de Cousin y el Axioma del Supremo

Si en $\mathbb{R}$ se toma el Lema de Cousin como axioma, entonces se puede demostrar con éste, el Axioma del Supremo, como lo veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *El Lema de Cousin implica el Axioma del Supremo.*

Demostración. En esta demostración se procederá usando la contrarrecíproca.

Supongamos que no es verdadero el Axioma del Supremo, entonces existe $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, acotado superiormente, tal que M no tiene supremo. Sean $a \in M$ y b una cota superior para M, $(a < b)$. Definimos $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la siguiente manera:

- Si $t \in [a, b]$ y t no es cota superior de M, entonces existe $x \in M$, tal que $x > t$. En este caso, definimos $\delta(t) = x - t$.
- Si $t \in (a, b]$ y t es cota superior de M, entonces existe $z < t$, tal que z es cota superior de M, ya que t no puede ser la mínima cota superior. En este caso, definimos $\delta(t) = t - z$.

Sea $\overline{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ una partición etiquetada y supongamos que es δ-fina en $[a, b]$. Para cada i, $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$. La partición $\overline{P}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si t_i no es cota superior de M, entonces tampoco lo es x_i, ya que, como

$$\begin{array}{rrcl} & x_i & < & t_i + \delta(t_i) \\ \Longrightarrow & x_i & < & t_i + x - t_i, \quad \text{para algún } x \in M \\ \Longrightarrow & x_i & < & x. \end{array}$$

   Luego, x_i no es cota superior de M.

2. Si t_i es cota superior, entonces también lo es x_{i-1}, ya que, como

$$\begin{array}{rrcl} & t_i - \delta(t_i) & < & x_{i-1} \\ \Longrightarrow & t_i - t_i + z & < & x_{i-1}, \quad \text{para } z \text{ cota superior de } M \\ \Longrightarrow & z & < & x_{i-1}. \end{array}$$

   Luego, x_{i-1} es cota superior de M.

La etiqueta t_n es cota superior de M: como $t_n \in [x_{i-1}, b]$, usando la contrarrecíproca de 1., si b es cota superior de M, entonces t_i es cota superior de M.

La etiqueta $t_1 \in [a, x_1]$, no es cota superior de M, usando la contrarrecíproca de 2., como a no es cota superior de M, entonces t_1 no es cota superior de M.

Tomamos $B = \{i \in \{1, \ldots, n\} | \ t_i \text{ es cota superior de M}\}$. $B \neq \emptyset$ puesto que $t_n \in B$.

Sea k el mínimo de B, con $k \geq 2$, por 2., x_{k-1} es cota superior en M, como t_{k-1} no es cota superior de M, por 1. x_{k-1} tampoco lo es, contradicción, luego $\overline{P}$ no es una partición δ-fina en $[a, b]$.

$\square$

Capítulo 2

Aplicaciones al Análisis

En éste Capítulo daremos pruebas alternativas, usando el Lema de Cousin, a diversos teoremas demostrados en los cursos de Análisis Real.

Antes de dar dichas pruebas, daremos algunos preliminares que serán de gran utilidad para las demostraciones de los teoremas.

2.1. Preliminares

Definición 2.1. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función,* $X \subset \mathbb{R}$. f *es continua en* $x_0 \in X$*, si para toda* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *tal que*

$$\textit{para toda } \ x \in X, \ \textit{ si } \ |x - x_0| < \delta, \ \textit{ entonces } \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f *es continua en* X*, si lo es en cada punto de* X.

Definición 2.2. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $X \subset \mathbb{R}$. f *es uniformemente continua en* X*, si para toda* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\textit{para toda } \ x, y \in X, \ \textit{ si } \ |x - y| < \delta, \ \textit{ entonces } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Observación 2.3. Si f es uniformemente continua en X, entonces f es continua en X.

Pero el recíproco no siempre se cumple.

Ejemplo 2.4.
Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, f es continua en $(0,1)$, pero no es uniformemente continua en $(0,1)$, como lo demostraremos a continuación.

Sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ y sea $\delta > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \delta/2$, de donde, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $\left|\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right| < \delta$, pero

$$\left| f\left(\frac{1}{n_1}\right) - f\left(\frac{1}{n_2}\right) \right| = \left| \frac{1}{1/n_1} - \frac{1}{1/n_2} \right| = |n_1 - n_2| \geq 1 > \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, f no es uniformemente continua en $(0,1)$.

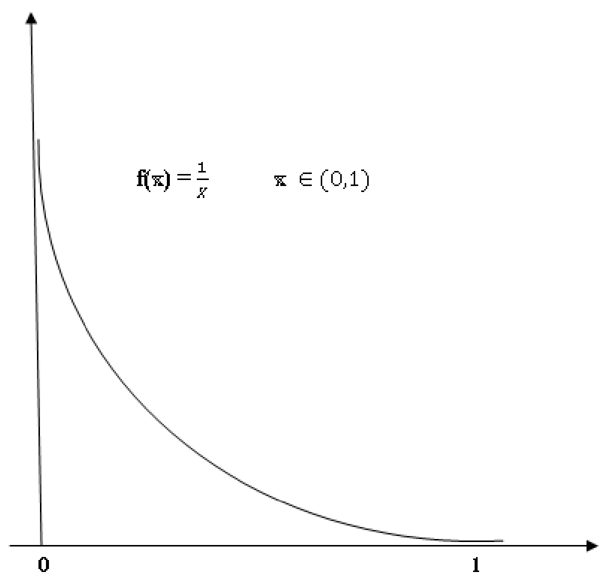

Figura 2.1: Gráfica de $f(x) = 1/x$, $x \in (0,1)$

Proposición 2.5. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, $L \in \mathbb{R}$. Si f es continua en t y $f(t) < L$, entonces existe $\delta_t > 0$ tal que*

$$si\ x \in [a,b]\ y \mid x - t \mid < \delta_t,\ entonces\ f(x) < L.$$

Demostración. Sea $\varepsilon = L - f(t) > 0$, como f es continua en t, entonces existe $\delta_t > 0$ que cumple

$$\text{si } \ x \in [a,b] \ \text{ y } \ |x - t| < \delta_t, \ \text{ entonces } \ |f(x) - f(t)| < \varepsilon,$$

es decir, tenemos que

$$|f(x) - f(t)| < L - f(t),$$

de aquí que, $f(x) < L$.

$\square$

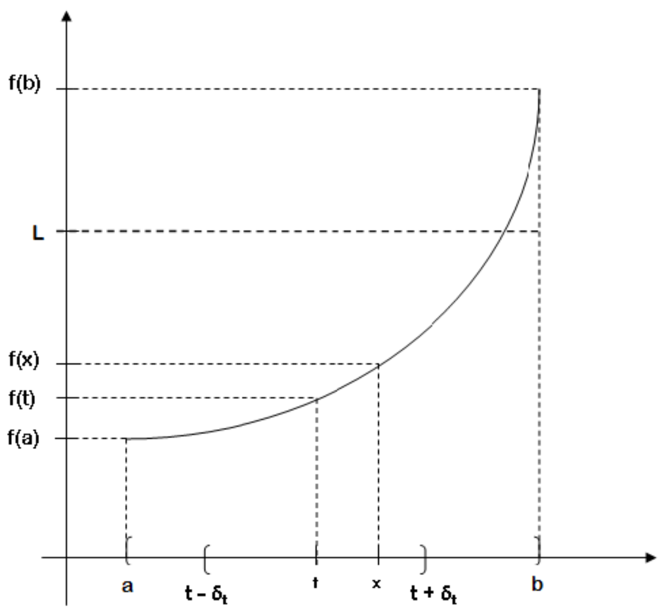

Figura 2.2: Interpretación Geométrica de la Prop.**2.5**

Proposición 2.6. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, $L \in \mathbb{R}$. Si f es continua en t y $f(t) > L$, entonces existe $\delta_t > 0$ tal que*

$$\textit{si } \ x \in [a,b] \ \textit{ y } \ |x - t| < \delta_t \ \textit{ entonces } \ f(x) > L.$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la **Proposición 2.5**

$\square$

2.2. Aplicaciones

Las pruebas de los siguientes teoremas fueron obtenidas de [2, 4].

Teorema 2.7 (Teorema del Valor Intermedio (TVI))**.** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y L un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L$.*

Demostración. Supongamos que $f(a) < f(b)$ y que $f(x) \neq L$ para toda $x \in [a, b]$.

Si $x \in [a, b]$, se tiene que $f(x) > L$, o bien, $f(x) < L$,

1. si $f(x) > L$, por la **Proposición 2.6**, existe $\delta_x > 0$ tal que $f(t) > L$ para $t \in [a, b]$ que cumpla $|t - x| < \delta_x$.

2. si $f(x) < L$, por la **Proposición 2.5**, existe $\delta_x > 0$ tal que $f(t) < L$ para $t \in [a, b]$ que cumpla $|t - x| < \delta_x$.

Sea la función $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida como $\delta(x) = \delta_x$. Por el Lema de Cousin existe una partición δ-fina

$$P = \{([x_{i-1}, x_i], c_i) \mid i = 1, \ldots, n\},$$

donde, para cada i, $f(t) > L$ para cada $t \in [x_{i-1}, x_i]$, o bien, $f(t) < L$ para cada $t \in [x_{i-1}, x_i]$.

Como $f(a) < L$, entonces $f(t) < L$ para cada $t \in [a, x_1]$, en particular en x_1, esto es, $f(x_1) < L$.

Como $f(x_1) < L$, entonces $f(x) < L$ para cada $t \in [x_1, x_2]$, en particular $f(x_2) < L$ y de manera análoga continuamos con el proceso hasta llegar al intervalo $[x_{n-1}, b]$, donde $f(x_{n-1}) < L$, entonces $f(t) < L$ para cada $t \in [x_{n-1}, b]$, en particular $f(b) < L$, lo cual contradice la hipótesis $L < f(b)$. Podemos concluir que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L$.

De manera análoga se puede ver en el caso de que $f(a) > L > f(b)$.

$\square$

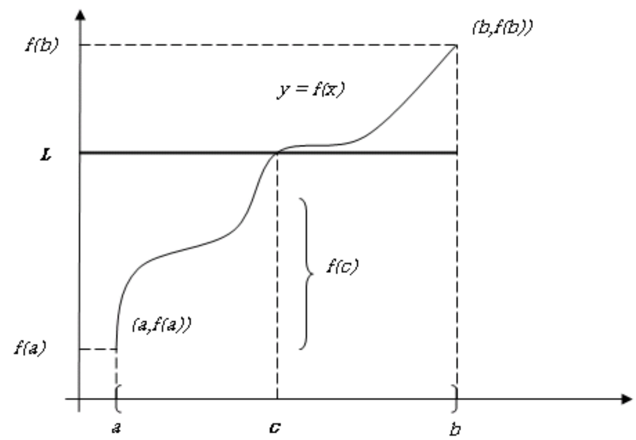

Figura 2.3: Interpretación Geométrica del TVI.

Observación 2.8. Una consecuencia del Teorema del Valor Intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay cuando menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$. Así, si el punto $(a, f(a))$ está abajo del eje X y el punto $(b, f(b))$ está arriba del eje X, o viceversa, la gráfica cruza el eje X cuando menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, como se ve en las siguientes figuras.

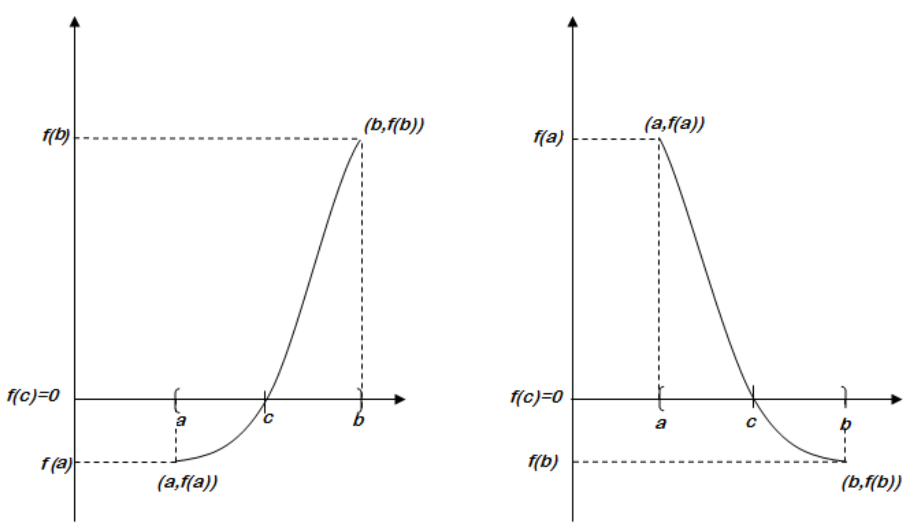

Figura 2.4: Interpretación Geométrica de la **Observación 2.8**

Antes de dar la siguiente aplicación se demostrará un resultado que será de gran utilidad en la prueba.

Proposición 2.9. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en t, entonces existen $\delta_t > 0$ y $M_t > 0$ tales que*

$$\textit{si } \ x \in [a,b] \ \ \textit{y} \ \ |x-t| < \delta_t \ \ \textit{entonces} \ \ |f(x)| \leq M_t.$$

Demostración. Sea $\varepsilon = 1$, como f es continua en t, entonces existe $\delta_t > 0$ tal que si $x \in [a,b]$ y $|x-t| < \delta_t$, entonces $|f(x) - f(t)| < 1$, como

$$|f(x)| - |f(t)| \leq |f(x) - f(t)| < 1.$$

tomamos $M_t = 1 + |f(t)|$, despejando $|f(x)|$ obtenemos

$$|f(x)| < 1 + |f(t)| = M_t.$$

□

Teorema 2.10 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para cada $x \in [a,b]$.*

Demostración. Por la **Proposición 2.9** tenemos que para cada $t \in [a,b]$ existe $\delta_t > 0$ y $M_t > 0$ tal que

$$\text{si } \ x \in [a,b] \text{ y } \ |x-t| < \delta_t, \text{ entonces } \ |f(x)| \leq M_t. \tag{2.1}$$

Definamos $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ como $\delta(t) = \delta_t$, entonces por el Lema de Cousin existe

$$P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}, (P \ll \delta).$$

Sea $M = \max\{M_{t_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $x \in [a,b]$, existe $i_o \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in [x_{i_o-1}, x_{i_o}]$, luego $|x - t_{i_o}| < \delta(t_{i_o})$, entonces por (2.1),

$$|f(x)| \leq M_{t_{i_o}} \leq M.$$

□

Teorema 2.11 (Continuidad Uniforme)**.** *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua en $t \in [a,b]$, existe $\delta_t > 0$ tal que

$$\text{si } \ x \in [a,b] \ \text{ y } \ |x-t| < \delta_t \ \text{ entonces } \ |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Definimos $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ como $\delta(t) = \frac{\delta_t}{2}$.

Por el Lema de Cousin, existe

$$P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \mid i = 1, \ldots, n\},\ (P \ll \delta).$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta(t_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Sean $x, y \in [a,b]$ tales que $|x-y| < \delta$, debemos demostrar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Para esa x, existe $1 \leq i \leq n$, tal que $x \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$|x - t_i| \ < \ \delta(t_i) \ = \ \tfrac{\delta_{t_i}}{2}.$$

Probemos que

$$|y - t_i| < \delta_{t_i}.$$

Sabemos que $|x-y| < \delta$, en particular se tiene que:

$$|x - y| \ < \ \delta(t_i) \ = \ \tfrac{\delta_{t_i}}{2}.$$

Luego

$$|y - t_i| \ = \ |y - x + x - t_i| \ \leq \ |y - x| + |x - t_i| \ < \ \tfrac{\delta_{t_i}}{2} + \tfrac{\delta_{t_i}}{2} \ = \ \delta_{t_i}.$$

Entonces

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(y)| \ < \ \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en $[a,b]$.

□

En la teoría de integración de Riemann se hace uso de particiones etiquetadas para definir la suma de Riemann de la siguiente manera:

Definición 2.12. *Sea una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y una partición etiquetada*

$$P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

A

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

le llamamos suma de Riemann para la función f con respecto a la partición etiquetada P.

Esta definición es la que se utiliza normalmente en los cursos de Cálculo.

A mediados de los años cincuenta los matemáticos Ralph Henstock y Jaroslav Kursweil definen, de manera independiente, una integral más general que la integral de Riemann y la de Lebesgue. La definición es la siguiente:

Definición 2.13. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una función **Henstock-Kurzweil integrable** sobre $[a,b]$, si existe $A \in \mathbb{R}$, tal que para toda $\varepsilon > 0$, existe δ una función medidora en $[a,b]$, tal que*

$$\textit{si} \;\; (P \ll \delta) \;\; \textit{entonces} \;\; |S(f,P) - A| < \varepsilon.$$

Teorema 2.14. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a,b]$, entonces existe un único $A \in \mathbb{R}$ que cumple con:*

$$\textit{si } (P \ll \delta), \;\; \textit{entonces } |S(f,P) - A| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Demostración. La existencia de A nos la garantiza la **Definición 2.13**. Supongamos que existen A_1 y $A_2 \in \mathbb{R}$ con $A_1 \neq A_2$ que cumplen con la conclusión del **Teorema 2.14**

Sea $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$, entonces existen δ_1 y δ_2 funciones medidoras, tales que

$$|S(f,P) - A_1| < \varepsilon \tag{2.3}$$

$$|S(f,P) - A_2| < \varepsilon \tag{2.4}$$

cada vez que $P \ll \delta_1$ y $P \ll \delta_2$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea P una partición etiquetada δ-fina (el Lema de Cousin nos garantiza la existencia de al menos una). Entonces

$$|A_1 - A_2| \leq |A_1 - S(f,P)| + |S(f,P) - A_2| < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $A_1 = A_2$.

$\square$

Capítulo 3

Aplicaciones al Cálculo Diferencial

Consideramos ahora el uso de particiones etiquetadas δ-fina para probar algunos resultados en los que participa la derivada. Uno de los más simples resultados de este tipo es el hecho de que una función diferenciable, con derivada positiva en un intervalo, es creciente en ese intervalo, la demostración usual usa el Teorema del Valor Medio.

Teorema 3.1. *Supongamos que $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $[a,b]$. Si $F'(x) > 0$ para cada $x \in [a,b]$, entonces F es estrictamente creciente en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $x \in [a,b]$. Como $F'(x) > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\text{si } \ t \in [a,b] \ \text{ y } \ 0 < |t-x| < \delta_x, \ \text{ entonces } \ \frac{F(t)-F(x)}{t-x} > 0.$$

Definimos

$$\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+, \ \text{ como } \ \delta(x) = \delta_x.$$

Probaremos que F es estrictamente creciente.

Sean u, v tales que $a \leq u < v \leq b$.

Por el lema de Cousin, existe una partición δ-fina de $[u,v]$

$$\{([x_{i-1}, x_i], c_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

Para cada índice i, obtenemos que

$$F(x_{i-1}) \leq F(c_i) \leq F(x_i)$$

y al menos una de estas desigualdades es estricta.

Como

$$F(u) - F(v) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) > 0,$$

entonces $F(u) < F(v)$. Por lo tanto, la función F es estrictamente creciente en $[a, b]$.

$\square$

Las hipótesis del **Teorema 3.1** pueden debilitarse de varias maneras, daremos una versión que ilustra como, con particiones etiquetadas δ-fina, podemos demostrar el teorema cuando trabajamos con funciones que son diferenciables n.e, esto es, funciones diferenciables en un conjunto del tipo $[a, b] \setminus D$, para algún conjunto numerable D.

Teorema 3.2. *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si F es diferenciable* n.e *en $[a, b]$ y $F'(x) > 0$* n.e*, entonces F es creciente en $[a, b]$.*

Demostración. Sea $D = \{d_k : k \in \mathbb{N}\}$, tal que $F'(x)$ no existe, o bien, $F'(x) \leq 0$. Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $x \in [a, b] \setminus D$. Como $F'(x) > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\text{si } \ t \in [a, b] \ \text{ y } \ 0 < |t - x| < \delta_x, \ \text{ entonces } \ \frac{F(t) - F(x)}{t - x} > 0\,. \tag{3.1}$$

Para $x = d_k$, por la continuidad de F en x, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\text{si } \ t \in [a, b] \ \text{ y } \ 0 < |t - x| < \delta_x, \ \text{ entonces } \ |F(t) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{3.2}$$

Definimos

$$\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \ \text{ tal que } \ \delta(x) = \delta_x.$$

Sean u, v tales que $a \leq u < v \leq b$.

Por el lema de Cousin, existe una partición δ-fina de $[u, v]$

$$\{([x_{i-1}, x_i], c_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Sean

$$S_0 = \{i : c_i \notin D\} \text{ y } S_D = \{i : c_i \in D\}.$$

Si $i \in S_0$, por (3.1),

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (F(x_i) - F(c_i)) + (F(c_i) - F(x_{i-1})) > 0;$$

si $i \in S_D$, por (3.2),

$$-\frac{\varepsilon}{2^k} < F(x_i) - F(c_i) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{y} \quad -\frac{\varepsilon}{2^k} < F(c_i) - F(x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

para alguna k, sumando ambas desigualdades, obtenemos

$$-2\frac{\varepsilon}{2^k} < F(x_i) - F(x_{i-1}) < 2\frac{\varepsilon}{2^k}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &= \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&= \sum_{i \in S_0}(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \sum_{i \in S_D}(F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&> -2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) = -2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se tiene que $F(v) \geq F(u)$, es decir, la función F es creciente en $[a, b]$.

$\square$

El siguiente resultado: Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua en $[a, b]$. Si $F'(x) = 0$ en casi todas partes en $[a, b]$, es decir, $F'(x) = 0$ en $[a, b]$ excepto en un conjunto de medida cero, entonces F es constante. Este resultado es importante en la teoría de integración de Lebesgue.

En la mayoría de los libros de análisis, la prueba de este resultado utiliza el Lema de recubrimiento de Vitali. Como los conceptos involucrados en el Lema de recubrimiento de Vitali son difíciles para muchos estudiantes, la siguiente prueba puede ser más fácil de entender.

Antes del resultado, daremos algunas definiciones que se utilizarán en la prueba de dicho resultado.

Definición 3.3. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección de intervalos abiertos $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tales que*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon$$

donde $m(I_n)$ es la longitud del intervalo I_n.

Definición 3.4. *Una función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a,b]$, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de subintervalos disjuntos en $[a,b]$, tales que*

$$si \quad \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \quad entonces \quad \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Teorema 3.5. *Supongamos que $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a,b]$. Si $F'(x) = 0$ en casi todas partes en $[a,b]$, es decir, $F'(x) = 0$ en $[a,b]$ excepto en un conjunto de medida cero, entonces F es constante en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $E = \{x \mid x \in [a,b]\}$, tal que $F'(x)$ no existe, o bien, $F'(x) \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como F es absolutamente continua en $[a,b]$, para esa ε, existe $\eta > 0$ tal que para toda familia $\{(s_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ de subintervalos disjuntos en $[a,b]$, tales que

$$\text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i) < \eta, \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(s_i)| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Como E tiene medida cero, entonces existe una colección de intervalos abiertos $\{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tales que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \eta$$

1. Si $x \notin E$, como $F'(x) = 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

   $$\text{si } \ t \in [a,b] \ \text{ y } \ 0 < |t-x| < \delta_x \ \text{ entonces } \ |F(t) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-x|.$$

2. Si $x \in E$, existe $\delta_x > 0$ tal que $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq I_k$, para algún k.

Definimos

$$\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+, \quad \text{tal que } \ \delta(x) = \delta_x.$$

Por el lema de Cousin, existe una partición δ-fina de $[a,b]$

$$\{([x_{i-1}, x_i], c_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Sean

$$S_0 = \{i : c_i \notin E\} \ \ y \ \ S_E = \{i : c_i \in E\}.$$

Si $i \in S_0$, por 1.,

$$\begin{aligned}
|F(x_i) - F(x_{i-1})| &\leq |F(x_i) - F(c_i)| + |F(c_i) - F(x_{i-1})| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}(x_i - c_i) + \frac{\varepsilon}{2}(c_i - x_{i-1}) = \varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Si $i \in S_E$, por 2., como E tiene medida cero, se tiene que

$$\sum_{i \in S_E} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \eta.$$

Por (3.3) y (3.4), resulta que

$$\begin{aligned}
|F(b) - F(a)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \right| \\
&\leq \sum_{i \in S_0} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \sum_{i \in S_E} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i \in S_0} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon(b - a + 1).
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, concluimos que $F(b) = F(a)$. Del mismo modo, se puede demostrar que $F(x) = F(a)$ para toda $x \in (a, b)$. Esto completa la demostración.

$\square$

Capítulo 4

Aplicaciones Avanzadas

En este capítulo daremos una aplicación del Lema de Cousin a un resultado que usualmente no es visto en los cursos de Análisis Elemental.

Antes de ver la aplicación, a continuación se darán una serie de definiciones y observaciones.

4.1. Equicontinuidad Puntual y Uniforme

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Definición 4.1. *Sea una familia*

$$\mathbf{F} \subset \{f : X \longrightarrow Y \mid \ f \textit{ es función}\}.$$

Decimos $\mathbf{F}$ *es uniformemente equicontinua en* X*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\textit{si } d_X(x, y) < \delta, \textit{ entonces } d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \textit{ para toda } f \in \mathbf{F}.$$

Observación 4.2. Si $\mathbf{F}$ es uniformemente equicontinua en X, entonces cada miembro de $\mathbf{F}$ es una función uniformemente continua en X.

Observación 4.3. Si

$$\mathbf{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y \mid f_i \text{ uniformemente continuas en X, } i = 1, \ldots, n\},$$

entonces $\mathbf{F}$ es uniformemente equicontinua en X.

Demostración. Demostremos que **F** es uniformemente equicontinua en X, es decir, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\text{si } d_X(x,y) < \delta_i, \text{ entonces } d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon, \text{ para toda } f_i \in \mathbf{F}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots \delta_n\} > 0$

$$\text{si } d_X(x,y) < \delta \leq \delta_i, \text{ entonces } d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon, \text{ para toda } i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, **F** es uniformemente equicontinua en X.

□

Definición 4.4. *Sea* **F** *una familia de funciones,* **F** *es equicontinua en* $x_0 \in X$*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *tal que*

$$\textit{si } d_X(x,x_0) < \delta, \textit{ entonces } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \textit{ para toda } f \in \mathbf{F}.$$

F *es equicontinua en* X*, si lo es en cada punto de* X*.*

Observación 4.5. Si

$$\mathbf{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y \mid f_i \text{ continuas en X}, i = 1, \ldots, n\},$$

entonces **F** es equicontinua en X.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Demostraremos que **F** es equicontinua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$, como cada f_i es continua en $x_0 \in X$, $i = 1, \ldots, n$, existen $\delta_i(\varepsilon, x_0) > 0$, tal que si $d_X(x, x_0) < \delta_i$, entonces $d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots \delta_n\} > 0$

$$\text{si } d_X(x,x_0) < \delta \leq \delta_i, \text{ entonces } d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon \text{ para toda } f_i \in \mathbf{F}.$$

Por lo tanto, **F** es equicontinua en X.

□

Observación 4.6. Si **F** es uniformemente equicontinua en X, entonces **F** es equicontinua en X. El recíproco no siempre se cumple.

Ejemplo 4.7.
Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbf{F} = \{f\}$ es equicontinua en $X = (0,1)$, pero no es uniformemente equicontinua.

A continuación se dará un ejemplo tipo de una familia equicontinua, infinita.

Antes de ver el ejemplo, daremos la siguiente definición.

Definición 4.8. *Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A. Sean $S \subseteq A$ y f una función definida en S. Se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f \in S$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq N$, entonces*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para} \quad \textit{cada} \quad x \in S.$$

Ejemplo 4.9.
Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow Y$ uniformemente continua de tal modo que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Entonces $\mathbf{F} = \{f_1, f_2, ..., f_n, .., f\}$ es uniformemente equicontinua en X.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para toda } x \in X.$$

Sea $\mathbf{F}_N = \{f_1, f_2, ..., f_{N-1}\}$. Por la Observación 4.3, $\mathbf{F}_N$ es uniformemente equicontinua, entonces existe δ_N tal que, para $i = 1, \ldots, N-1$

$$\text{si } d_X(x, y) < \delta_N, \quad \text{entonces} \quad d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Por las hipótesis iniciales, f es uniformemente continua, luego, existe $\widehat{\delta} > 0$ tal que

$$\text{si} \quad d_X(x, y) < \widehat{\delta}, \quad \text{entonces} \quad d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_N, \widehat{\delta}\} > 0$ y sean $x, y \in X$ tales que $d_X(x, y) < \delta$. Entonces, para $f_1, f_2, \ldots f_{N-1}, f$ la conclusión se sigue de 4.1. Si $n \geq N$,

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f_n(y)) &\leq d_Y(f_n(x), f(x)) + d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), f_n(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces

$$d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, **F** es uniformemente equicontinua.

$\square$

4.2. Una Aplicación del Lema de Cousin para Familias Equicontinuas

Teorema 4.10.

$$\textit{Sea } \mathbf{F} \subset \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \ \textit{ es función}\}.$$

F *es equicontinua en* $[a,b]$*, si y sólo si,* **F** *es uniformemente equicontinua en* $[a,b]$.

Demostración.
Vamos a demostrar que **F** es uniformemente equicontinua en $[a,b]$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in [a,b]$. Como **F** es equicontinua en $[a,b]$, existe $\delta(x) > 0$ tal que si $y \in [a,b]$ y $|y-x| < \delta(x)$, entonces $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para toda $f \in \mathbf{F}$.

Definimos $\widehat{\delta} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, como $\widehat{\delta}(x) = \dfrac{\delta(x)}{2}$, ésta es una función medidora. Por el Lema de Cousin, existe una partición $\widehat{\delta}$-fina en $[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < t_1 < x_1 < .... < x_{i-1} < t_i < x_i < ... < x_n = b\}.$$

Sea $\eta = \text{mín}\{\widehat{\delta}(t_1), ..., \widehat{\delta}(t_n)\}$.
Sean $x, y \in [a,b]$, con $|x-y| < \eta$. Como $x \in [a,b]$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Luego $|x - t_i| < |x_i - x_{i-1}| < 2\widehat{\delta}(t_i) = \delta(t_i)$.

$$\text{Entonces } \ |f(x) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ para toda } \ f \in \mathbf{F}.$$

Ahora probaremos que $|y - t_i| < \delta(t_i)$. Sabemos que $|y - x| < \eta$.

$$\text{Si } \ |y - t_i| = |y - x + x - t_i| \leq |y - x| + |x - t_i| < \widehat{\delta}(t_i) + \widehat{\delta}(t_i) = \delta(t_i),$$

entonces

$$|f(y) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } f \in \mathbf{F}.$$

Luego

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es uniformemente equicontinua en $[a, b]$.

La necesidad se obtiene de la **Observación 4.6**.

$\square$

Conclusiones

Es evidente que, en el campo de las matemáticas, en particular, del Análisis Matemático, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de las demostraciones de los resultados que se exponen en los cursos. De ahí la necesidad de buscar alternativas para un mejor entendimiento de diversos conceptos. Para ello partimos del uso de definiciones, tales como: Partición Etiquetada, Función Medidora, Partición δ-fina y así llegar a un resultado llamado el Lema de Cousin.

A lo largo del Capítulo 1 vimos en qué consiste el Lema de Cousin y demostramos la equivalencia de este lema con el Axioma del Supremo, un concepto un tanto difícil de comprender dentro de los cursos del análisis. En el Capítulo 2 mostramos las pruebas de algunos teoremas del Análisis Real haciendo uso del Lema de Cousin, tales como: el Teorema de una Función Henstock-Kurzweil Integrable, del Valor Intermedio, de Weierstrass y de Continuidad Uniforme. En el Capítulo 3 presentamos la aplicación del Lema de Cousin en las pruebas de algunos teoremas del Cálculo Diferencial. Finalmente en el Capítulo 4 se presentó una serie de resultados del análisis, donde se da una breve introducción de lo que tratan las familias de funciones equicontinuas, debido a que este tema no entra en el programa de los cursos de análisis, impartidos en la licenciatura.

Algunos de los resultados, expuestos en la tesis, están publicados en los artículos que se muestran en la bibliografía [5, 9]. Como podemos notar, las pruebas de los teoremas y observaciones se facilitan con el Lema de Cousin, además, el alumno no necesariamente requiere de resultados avanzados para lograr comprender las aplicaciones que aquí mostramos.

Consideramos que con este trabajo se estimula al alumno a construir conceptos, que le permitan simplificar pruebas de resultados ya conocidos o demostrar nuevos resultados, con el nuevo contexto.

Perspectivas

Este trabajo se puede continuar, al menos en dos direcciones, a saber:

1. Intentar demostrar teoremas conocidos o nuevos resultados del análisis real, usando el Lema de Cousin, por ejemplo La Regla de L'Hôpital, etc,...

2. Hacer un estudio similar a éste para funciones reales de varias variables.

Bibliografía

[1] Bartle R.G., *A Modern Theory of Integration*, Grad. Studies Math., Vol. 32 (2001), American Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[2] Bosch Girald C., *Las Particiones y el Teorema de Bolzano.*, Miscelánea Matemática, Vol. 41 (2005), 1-7.

[3] Botsko M., *Unified Treatment of Various Theorems in Elementary Analysis.*, Amer. Math. Monthly, Vol. 94 (1987), 450-452.

[4] Botsko M., *The Use of Full Convers in Analysis.*, Amer. Math. Monthly, Vol. 94 (1987), 327-334, 450-452.

[5] Botsko M., *Unified Treatment of various theorems in elementary analysis.*, Amer.Math. Monthly. Vol. 94 (1987) pags: 449-453.

[6] Dreyfus, T., *Advanced Mathematical Thinking: Mathematics and cognition.*, Cambridge: Cambridge University (1990), Press, 113-133.

[7] Dreyfus, T., *Advanced mathematical thinking processes.*,Dordrecht: Kluwer Academic Publisher (1991),25-41.

[8] Gordon Russell A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4 (1994), American Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[9] Gordon Russell A., *The Use of Tagget Partitions in Elementary Real Analysis.*, Amer. Math. Monthly, Vol. 105 (1998), 105-117 and 886.

[10] Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking.*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[11] Vyborny Rudolf.,*The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock.*, Cambridge University Press, 2000.