Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
ERICK SALGADO MATIAS

DIRECTOR DE TESIS
Dr. IVÁN MARTÍNEZ RUÍZ

PUEBLA, PUE. 30 de Noviembre del 2016

Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire

Tesis

Erick Salgado Matias

Dr.Iván Martínez Ruíz

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
B U A P

Título: Aplicaciones del Teorema de Categoría de Baire

Estudiante: Erick Salgado Matias

COMITÉ

Dr. Agustín Contreras Carreto
Presidente

Dr. Alejandro Ramírez Páramo
Secretario

M.M. Díaz Reyes Jesús
Vocal

Dr. Iván Martínez Ruíz
Asesor

Dedicatoria

A mis padres.
B.Eleazar Salgado Flores
Sara L. Matias Aquino

A mis hermanos.
Andres Salgado Matias
O. Giovanni Salgado Matias

Richard Dawkins:

Se ha convertido casi en un comentario cliché, que nadie hoy en día alardea de ser un ignorante en literatura, pero es aceptable socialmente alardear de ignorar la ciencia y afirmar orgulloso que se es un incompetente en matemáticas.

Stefan Banach:

Un matemático es una persona que encuentra analogías entre teoremas; es mejor matemático el que puede ver analogías entre demostraciones y el más grande matemático es aquel que percibe analogías entre teorías. Podemos imaginar que el estado sublime para un matemático sería ver analogías entre analogías.

Agradecimientos

Quiero agradecer, en especial a mis padres Eleazar y Sara, quienes siempre me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones que he tomado respecto a mi vocación, ellos que siempre me han dado todo lo que un hijo puede pedir y pese a las carencias que sufrieron siempre trataron de darme lo mejor. A ellos les debo la persona que soy y el lugar en donde estoy ahora. Es por eso y muchas cosas más que este trabajo va dedicado a ellos.

A mis hermanos, Andres y Giovanni porque con ellos pude disfrutar grandes momentos en mi vida y son fuente de motivación e inspiración para salir adelante.

A una pequeña niña, Lizbeth quien me ha soportado por un gran tiempo, la cual me ha hecho crecer mucho y valorar cada momento que he pasado a su lado. De igual manera a mis colegas de la facultad que de alguna u otra forma ayudaron en mi desarrollo: Yazmin, Jonathan, Tepox y los que falten.

A los profesores de esta facultad quienes me brindaron una buena formación académica y motivación para seguir aprendiendo como: Soriano, Armando, Angoa, Angel, Hugo. Y también a aquellos que me motivaron a ingresar en una facultad de ciencias; Germán, Sidhartha y Gilberto.

A mi asesor de tesis, Dr. Iván Martínez Ruíz, a quien le estoy muy agradecido por haber aceptado trabajar conmigo y por el apoyo que me ha brindado a lo largo de la carrera.

A mis sinodales; Dr. Agustín Contreras Carreto, Dr. Alejandro Ramírez Paramo y M.M. Jesús Díaz Reyes, por haberse tomado el tiempo de revisar este trabajo y hacer las críticas necesarias para mejorarlo.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado, por el apoyo en la elaboración de esta tesis.

Índice general

Resumen

El desarrollo de la topología general estuvo en sus orígenes asociado a la necesidad de formalizar cuestiones de análisis y geometría. Según R. Engelking: "La topología general debe sus comienzos a una serie de artículos publicados por G. Cantor entre 1879-1884. Al discutir la unicidad del problema para series trigonométricas. Cantor se concentró en el estudio de ciertos conjuntos de puntos excepcionales, donde uno puede quitar algunas hipótesis a un teorema sin que éste deje de ser cierto. Después se dedicó exclusivamente a la investigación de conjuntos, dando lugar al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la topología. Cantor introdujo y estudió, en el marco de los espacios Euclídeos, algunas nociones fundamentales de topología". Otros conceptos importantes fueron introducidos entre 1893-1905 por C. Jordan, H. Poincaré, E. Borel y H. Lebesgue. Los espacios abstractos con una estructura topológica fueron introducidos por M.Fréchet y F. Riesz, 1906-1908. La topología general en el sentido que se le da hoy tuvo origen con F. Hausdorff en 1914, dando la primera definición de espacio topológico.

La discusión de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como espacios de coordenadas se remonta hasta R. Descartes y P. Fermat. Así como la noción de vector fue expuesta por B. Bolzano se tiene que la suma de vectores hace su aparición, implícitamente en 1799 en los trabajos de F. Gauss sobre la representación geométrica lo cual hace de los imaginarios y la aplicación de ellos a la geometría elemental. Fue G. Peano en 1888 quien dio la definición axiomática de los espacios vectoriales de dimensión finita e infinita sobre el cuerpo de los números reales, junto con la definición de aplicación lineal. Las técnicas de álgebra lineal asisten con éxito a cuestiones del análisis funcional y matemáticos como D. Hilbert hacen uso de estos conceptos desde un principio. En los años de 1920-1930 S. Banach combinó técnicas de topología conjuntista con técnicas de álgebra lineal, obteniendo resultados como los teoremas de Banach-Steinhaus, del Gráfico cerrado y de la aplicación abierta. Las ramas de la topología, álgebra lineal y análisis funcional continúan beneficiándose mutuamente desde los inicios del siglo XX.

R. Baire fue entre sus contemporáneos quien aprovechó de forma más completa y sistemática la teoría cantoriana de conjuntos, tanto para fundamentar su teoría

ÍNDICE GENERAL

de funciones discontinuas como para contribuir al desarrollo de las nociones topológicas en conjuntos de puntos. La instauración de la teoría de las funciones de variable real en los trabajos de Baire, Borel y Lebesgue a principios del siglo XX, dio lugar a la construcción de objetos matemáticos designados por propiedades topológicas radicalmente nuevas. Tales objetos, se convirtieron en los objetos naturales del análisis, en esta medida, los matemáticos fueron descubriendo que sus propiedades tenían aplicaciones en varios campos de la matemática. Uno de estos nuevos objetos fue precisamente la clase de funciones de Baire, con el estudio de nuevas propiedades intrínsecas. La clase de los espacios de Baire aparece como objeto natural en las formalizaciones del análisis, la topología, la teoría de conjuntos y la lógica; en donde son numerosas las aplicaciones de algunas de sus propiedades más representativas como la llamada propiedad de Baire o Teorema de Categoría de Baire. R. Baire utilizó sistemáticamente las nociones de conjunto numerable, potencia de un conjunto y de transfinito. También estudió sucesivamente las nociones de conjuntos cerrados, perfectos, nada densos y derivados de todos los órdenes.

El objetivo principal de esta tesis es presentar la importancia que posee uno de los resultados más significativos estudiados por R. Baire, así como la importancia que pueden llegar a tener las numerosas aplicaciones de sus propiedades en distintas áreas de la matemática como se verá a lo largo de este trabajo. Entre los espacios que se estudiarán podemos encontrar los espacios Euclídeos, Vectoriales, Topológicos, Polacos y ,en particular, una clase especial de espacios llamada Espacios de Baire; de esta última clase, estudiaremos algunas de sus propiedades así como la relevancia de su objeto de estudio.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones formales de espacio métrico, topológico y algunas propiedades de estos. Se introduce la noción de conjuntos nada densos, F_σ y G_δ, de primera y de segunda categoría. También se habla de la noción de compacidad así como una pequeña introducción sobre números ordinales y cardinales. En el capítulo 2, se exhibe el teorema de categoría de Baire y se prueba tal resultado así como algunas consecuancias inmediatas de este teorema. Se introduce la noción de espacio de Baire en espacios topológicos y se prueban algunas propiedades básicas y caracterizaciones de dichos espacios. Para finalizar este capítulo se exhibe una de las grandes deficiencias que posee la clase de espacios de Baire en el sentido de que la propiedad de Baire no es productiva, en donde se exhibirá un ejemplo de ello. En el Capítulo 3, se revisan consecuencias del teorema de categoría de Baire en cierto tipo de subconjuntos de espacios euclídeos, a saber, espacios formados por números irracionales y ciertos subespacios del conjunto Cantor. Se demuestran algunos de los teoremas fundamentales del análisis funcional como lo son los Teoremas de Hahn-Banach, el del mapeo abierto y el gráfico cerrado. Se introduce además la noción de espacio polaco así como algunos resultados importantes de los mismos. En esa misma sección se define formalmente la noción de árbol desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos y se revisa cierta clase especial de los espacios Polacos. Como última aplicación del teorema de Baire se introduce el juego de Choquet, el cual se emplea para dar una caracterización de los espacios de Baire en base a los juegos infinitos. Finalmente se exponen algunas caracterizaciones de la clase de los espacios de Baire.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan de manera breve los resultados y nociones básicas de espacios métricos y espacios topológicos que se utilizan en el desarrollo del trabajo. En la mayoría de los resultados presentes en este capítulo se omiten sus pruebas, sin embargo se recomienda al lector consultarlas en alguna de las siguientes referencias [4],[18],[26],[10],[19].

1.1. Espacios Métricos

Iniciaremos nuestro estudio considerando conjuntos dotados de una distancia a los que se les denomina espacios métricos, noción que se le atribuye al matemático francés Maurice Fréchet, los cuales juegan un papel muy importante en las matemáticas modernas ya que como estructura matemática abstracta, los espacios métricos constituyen el fundamento indispensable para un estudio serio y riguroso del Análisis Matemático, el cual puede presentarse en forma de una hermosa teoría muy apegada a la intuición geométrica y poco propensa a presentar ejemplos patológicos.

En específico, al introducir la noción de distancia entre los elementos de un conjunto dado, se intenta generalizar lo que sucede en la recta real o en el plano, donde está bien definido lo que representa la distancia entre dos puntos. Al trabajar con conjuntos arbitrarios abstractos el problema se traduce en definir, por lo que se entiende, como una distancia entre cualesquiera dos elementos del conjunto, cuya naturaleza específica se desconoce. En ese sentido se da lugar a la siguiente definición:

Definición 1.1. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto. Una* ***métrica*** *(o distancia) en $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ que tiene las siguientes tres propiedades:*

1.- $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

2.- $d(x, y) = d(y, x)$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathcal{X}$.

3.- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in \mathcal{X}$. *A esta desigualdad se le llama desigualdad triangular.*

Un **espacio métrico** es un conjunto $\mathcal{X}$ provisto de una métrica d, el cual se denota por $(\mathcal{X}, d)$. Además, si $\mathcal{Y}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$, se verifica que $d_{\mathcal{Y}} = d \restriction_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}}$ es una métrica para $\mathcal{Y}$. Al espacio $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ se le llama **subespacio métrico** de $(\mathcal{X}, d)$. Si no es necesario especificar la métrica del espacio escribiremos únicamente $\mathcal{X}$ para denotar al espacio métrico.

Las funciones que cumplan 2 y 3 de la definición anterior y la siguiente propiedad más débil, si $x = y$ entonces $d(x, y) = 0$, se les llamará **pseudo-métrica**. Ser un espacio pseudo-métrico generaliza el de ser espacio métrico, tales espacios tienen su uso más específicamente en Topología y Análisis Funcional.
Algunos ejemplos de espacios métricos son:

Ejemplo 1.2. *Sea* $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, *y defínase* $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. *Entonces*

$$d(x, y) = |x - y|,$$

es una métrica llamada la métrica usual o euclidiana.

Ejemplo 1.3. *El espacio métrico discreto* $(\mathcal{X}, d)$ *donde la métrica* d *está definida para cualesquiera* $x, y \in \mathcal{X}$ *como sigue:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq y \\ 0, & si\ x = y \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. *Si* $1 \leq p < \infty$, *la función* $d_p^n : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ *es una métrica para* $\mathbb{K}^n$, *donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *definida por*

$$d_p^n\left((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\right) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}.$$

A tales espacios se les denotará por l_p^n.

Ejemplo 1.5. *Si* $p = \infty$, *la función* $d_p^n : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ *es una métrica para* $\mathbb{K}^n$, *donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *definida por*

$$d_p^n\left((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n\right) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Dichos espacios se escribirán como l_∞^n *en lugar de* $(\mathbb{K}^n, |\cdot|_\infty)$.

Por último se indicará por l^p, con p número real, al espacio vectorial de todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales o complejos que son $p-$ **sumables**, es decir, que satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty,$$

dotada de la métrica

$$d_p\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Así, l^{∞} denota el espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas de escalares (reales o complejos), es decir, $(x_n)_{n\in\omega} \in l^{\infty}$ si, y sólo si, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para cualquier $n \in \omega$, dotada de la métrica del supremo, la cual se define como

$$d_{\infty}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|.$$

Algunos subespacios importantes de l^{∞} son

$$c = \{(x_n)_{n\in\omega} \in l^{\infty} : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \quad \text{y} \quad c_0 = \{(x_n)_{n\in\omega} \in l^{\infty} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Ejemplo 1.6. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no vacío, se denotará por $(B_{\infty}(\mathcal{X}), d_{\infty})$ al espacio métrico de todas las **funciones acotadas en** $\mathbb{R}$, donde una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se denomina **acotada** si existe $K_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq K_f$ para todo $x \in \mathcal{X}$ y $d_{\infty} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se define por:*

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x\in\mathcal{X}}|f(x) - g(x)|,$$

para cualesquiera $f, g \in B_{\infty}(\mathcal{X})$.

Definición 1.7. *Sean $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico, $x \in \mathcal{X}$ y $r > 0$.*

- *La **bola abierta** con centro en x y radio r, se denota por $B_r(x)$ ó $B(x, r)$, y representa al conjunto $\{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$.*
- *La **bola cerrada** con centro en x y radio r, se denota por $\overline{B_r}(x)$ ó $\overline{B}(x, r)$, y representa al conjunto $\{y \in \mathcal{X} : d(x, y) \leq r\}$.*
- *La **esfera** con centro en x y radio r, denotada por $S_r(x)$, representa el conjunto $\{y \in \mathcal{X} : d(x, y) = r\}$.*

Definición 1.8. *Sean $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico, $A \subset \mathcal{X}$ y $x \in \mathcal{X}$.*

- *Sea $x \in A$. Se dirá que x es un **punto interior** de A si existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se denota por $i(A)$ y es llamado el **interior** de A.*

- *A es un **conjunto abierto** en $\mathcal{X}$, si $A = i(A)$.*
- *x es un **punto de acumulación** de A si para toda bola abierta $B_r(x)$, $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$.*
- *El **derivado** de A se define como el conjunto de todos los puntos de acumulación de A, el cual se denota por A'.*
- *La **cerradura** de A se define como $A \cup A'$, denotada por $\overline{A}$. Diremos que A es un **conjunto cerrado** si y sólo si $\overline{A} = A$.*
- *x es un **punto frontera** de A si para todo $r > 0$, la bola abierta $B_r(x)$ satisface que $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(x) \cap \mathcal{X} \setminus A \neq \emptyset$.*
- *$Fr(A)$ denota al conjunto de todos los puntos frontera de A, llamado **frontera** de A.*

Observación 1.9. *A es un conjunto cerrado en $\mathcal{X}$, si $\mathcal{X} \setminus A$ es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$.*

Aunque en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual la cerradura de una bola abierta coincide con la correspondiente bola cerrada, tal resultado no se cumple en general. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.10. *Sea $\mathcal{X}_{disc}$ un espacio métrico discreto con al menos dos puntos. Puesto que todos los subconjuntos del espacio son cerrados, se tiene que*

$$\overline{B_{disc}(x,1)} = B_{disc}(x,1) = \{x\}, \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Por otra parte,

$$\overline{B}_{disc}(x,1) = \{y \in \mathcal{X} \mid d_{disc}(x,y) \leq 1\} = \mathcal{X}, \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{X}.$$

La propiedad de Cantor y la de ser completo mantienen una estrecha relación, la cual resulta de interés para este trabajo, pero para ello es necesario conocer las siguientes definiciones.

Sean $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico, $x \in \mathcal{X}$ y A subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$. Se define la **distancia** entre x y A como, $dist(x, A) = inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$. Se dice que A es **acotado** en $\mathcal{X}$, si existe una constante $M \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq M$ para cualesquiera $x, y \in A$. Por último se define el **diámetro** de A como;

$$\text{diám}(A) = \begin{cases} \sup_{x,y \in A} d(x,y) & \text{si A es acotado} \\ \infty & \text{si A no es acotado} \end{cases}.$$

Definición 1.11. *Sea $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en algún espacio métrico $\mathcal{X}$. $(x_n)_{n\in\omega}$ **converge** a x, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, siempre que $n \geq N(\epsilon)$. Tal hecho se denotará por $x_n \to x$.*

Observación 1.12. *Sea F subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$. Entonces $x \in \overline{F}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en F tal que $x_n \to x$. Más aún F es un conjunto cerrado si y sólo si para toda $(x_n)_{n\in\omega}$ sucesión en F, tal que $x_n \to x_0$ para algún $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in F$.*

Definición 1.13 (Sucesión de Cauchy)**.** *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\omega}$ sucesión en $\mathcal{X}$. Se dirá que $(x_n)_{n\in\omega}$ es **sucesión de Cauchy**, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \omega$ tal que si $n, m > n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Definición 1.14. *Sean $\mathcal{X}$ cualquier espacio métrico, $x \in \mathcal{X}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{X}$. Se dirá que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es casi constante si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para cada $n \geq K$.*

Es claro que toda sucesión casi constate es convergente.

Ejemplo 1.15. *Las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico discreto son las casi constante.*

Definición 1.16. *Un espacio métrico se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a algún elemento del espacio.*

Así, se tienen como ejemplos de espacios métricos completos a los vistos en los Ejemplos 1.2, 1.3, 1.4, 1.6. Además, no es difícil verificar que cualquier espacio con la métrica discreta es completo.

A continuación se exponen algunos hechos sobre las sucesiones de Cauchy que se necesitan tener presentes.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico.

- Si $(x_n)_{n\in\omega}$ es sucesión de Cauchy en $\mathcal{X}$, entonces existe $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ subsucesión de $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \omega$.
- Cualquier sucesión convergente es de Cauchy en un espacio métrico. Sin embargo el reciproco, no es cierto en general. Por ejemplo, sea $(0, 1)$ con la métrica usual y la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente la sucesión es de Cauchy pero no es convergente en $(0, 1)$.
- Dada una sucesión de Cauchy en $\mathcal{X}$, si esta posee alguna subsucesión convergente a algún $x_0 \in \mathcal{X}$, entonces la sucesión en si misma es convergente, más aún, converge a x_0.

Teorema 1.17 (Cantor)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico. $\mathcal{X}$ es completo si y sólo si, para toda sucesión decreciente de subconjuntos A_n no vacíos y cerrados en $\mathcal{X}$, tal que $\lim_{n\to\infty} diam A_n = 0$, se cumple que:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$$

para algún $x_0 \in \mathcal{X}$.[1]

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea A_n una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos en $\mathcal{X}$ decreciente, tal que

$$\lim_{n\to\infty} diam A_n = 0.$$

Por el axioma de elección, considere para cada $n \in \omega$, un $x_n \in A_n$, y forme la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en $\mathcal{X}$. Afirmamos que tal sucesión es de Cauchy. En efecto, sean $\epsilon > 0$ y $N > 0$ tal que $diam A_N < \epsilon$, entonces, para cualquier $n > N$, $A_n \subset A_N$ y por tanto, $diam A_n < \epsilon$, con lo cual se infiere que si, $m, n > N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Así $(x_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy, luego por la completitud de $\mathcal{X}$, converge a algún x_0, es decir, $x_n \to x_0$.

Por último véase que $x_0 \in \bigcap A_n = \{x_0\}$. Para ello fije un n_0 arbitrario en ω y pruébese que $x_0 \in \overline{A_{n_0}} = A_{n_0}$. En efecto, sea $\epsilon > 0$, como $x_n \to x_0$, existe $N \in \omega$ tal que, $d(x_n, x_0) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Sea $N_1 = max\{N, n_0\}$, entonces para cualquier $n \geq N_1$ se tendrá que $x_n \in B_\epsilon(x_0)$ y $x_n \in A_n \subset A_{n_0}$. Entonces $x_n \in B_\epsilon(x_0) \cap A_{n_0}$. Por tanto, $x_0 \in A_{n_0}$ y como n_0 es arbitrario, se tiene que, $x_0 \in A_n$ para todo $n \in \omega$. Además, como $\bigcap A_n \subset A_l$, para todo A_l, y también, $diam A_l \to 0$, se garantiza que $diam\big(\bigcap_{n\in\omega} A_n\big) = 0$. Por tanto, $\bigcap A_n = \{x_0\}$.

$\Leftarrow$] Sea $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{X}$. Defínanse los conjuntos siguientes,

$$T_n = \{x_i : i \geq n\} \text{ y } \ A_n = \overline{T_n}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Claramente, cada A_n es cerrado, no vacío y $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n. Además $diam A_n = sup_{m,k\geq n} d(x_m, x_k)$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\omega}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que $d(x_n, x_m) < \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $m, n \geq N$, y por tanto, $diam A_n \leq diam A_N \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $n > N$. Así $diam A_n \to 0$, luego por hipótesis $\bigcap A_n = \{x_p\}$ para algún punto $x_p \in \mathcal{X}$. Se puede verificar sin mucha dificultad que $x_n \to x_p$. Por tanto $\mathcal{X}$ es completo. $\square$

[1] Pese a que el teorema de Baire puede ser visto como una consecuencia del teorema de Cantor, su estudio proporciona una herramienta muy poderosa para resolver diversos problemas en distintas áreas de la matemáticas.

Proposición 1.18. *Sea una familia numerable de espacios métricos, entonces el producto cartesiano es completo si sólo si cada elemento de la familia es completo.*

Observación 1.19. *La propiedad de Cantor no se preserva bajo el producto cartesiano.*

La convergencia de una sucesión de funciones reales puede estudiarse de manera puntual y uniforme, así, dada $(f_n)_{n\in\omega}$ sucesión de funciones de valores reales definidas sobre un espacio $\mathcal{X}$, se dirá que $(f_n)_{n\in\omega}$ **converge uniformemente** a una función f sobre $\mathcal{X}$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n > N(\epsilon)$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathcal{X}$, denotado por, $f_n \xrightarrow{c.u.} f$.

Para las series existen diferentes formas de verificar la convergencia uniforme, pero un test muy usual y conveniente es el siguiente:

Test de Weierstrass. Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico y $(f_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{X}$ en $\mathbb{R}$. Supóngase que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante no negativa M_n tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cualquier $x \in \mathcal{X}$. Si $\Sigma_{n\in\omega} M_n < \infty$, entonces $\Sigma_{n\in\omega} f_n$ converge uniformemente sobre $\mathcal{X}$.

Definición 1.20. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $\varphi : X \to Y$ una función. φ es una isometría de X en Y si φ cumple lo siguiente:*

$$d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \text{ para cada } x_1, x_2 \in X.$$

Se dirá que X, Y son isométricos si existe una isometría de X sobre Y, denotado por $X \cong Y$.

Definición 1.21. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico no vacío y d, d' dos métricas definidas sobre $\mathcal{X}$. Se dirá que la métrica d es equivalente a la métrica d' si para todo A subconjunto de $\mathcal{X}$, A es $d-$abierto si y sólo si A es $d'-$abierto*[2].

Se puede verificar que dado un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ existe una métrica equivalente a d, digamos d_1 tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, $d_1(x, y) < 1$. De lo anterior se puede suponer que cualquier métrica satisface que la distancia de cualesquiera dos puntos en su espacio es menor que 1.

Definición 1.22. *Sea $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico arbitrario tal que $\mathcal{X}$ no es completo, entonces siempre se puede construir $(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{d})$ espacio métrico completo y una aplicación φ que cumple lo siguiente:*

- *$\varphi : \mathcal{X} \to \widehat{\mathcal{X}}$ es una isometría de $\mathcal{X}$ sobre $\varphi(\mathcal{X})$, y $\varphi(\mathcal{X})$ es denso en $\widehat{\mathcal{X}}$.*

[2] Un conjunto B en a se dice η-abierto si B es abierto respecto a la métrica η.

- $(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{d})$ *espacio métrico completo es, salvo isometría, único.*

Al par $((\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{d}), \varphi)$ *se le llamará la completación de* $(\mathcal{X}, d)$.

Definición 1.23. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio métrico y* $D \subseteq \mathcal{X}$. *Diremos que* D *es denso en* $\mathcal{X}$ *si, y sólo si todo abierto* U *de* $\mathcal{X}$, $D \cap U \neq \emptyset$. *Además si* $A \subset \mathcal{X}$, *entonces* D *es denso en* A *si* $A \subset \overline{D}$.

Por último se dirá que un espacio es **separable** si este posee un subconjunto denso numerable.

1.2. Espacios Topológicos

La abstracción de las propiedades básicas de los conjuntos abiertos, los cuales son las piezas fundamentales en la teoría de espacios métricos nos lleva al estudio de una nueva área denominada **Espacios topológicos**.

Así, la topología estudia aquellas propiedades de los espacios que permanecen inalterables (invariantes topológicos) al someterlas a deformaciones continuas, en otras palabras, a distorsiones que ni rompen ni pegan algo que no lo estaba previamente. Por lo anterior, la topología es una área de estudio cualitativa, carente en muchos casos de números o cantidades, donde las propiedades intrínsecas de los espacios a estudiar, que son independientes de su tamaño, posición y/o forma.

Definición 1.24. *Sean* $\mathcal{X}$ *un conjunto no vacío y* $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Se dice que* τ *es una topología sobre* $\mathcal{X}$ *si cumple lo siguiente:*

- $\emptyset, \mathcal{X} \in \tau$.
- *Si* $A, B \in \tau$, *entonces* $A \cap B \in \tau$.
- *Si* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de τ son llamados conjuntos abiertos. A la pareja $(\mathcal{X}, \tau)$ se le denomina Espacio Topológico, cuando no sea necesario especificar la topología, simplemente se dirá que $\mathcal{X}$ es un espacio topológico. Sean $Y \subseteq \mathcal{X}$ y $\tau_Y = \{A \subset \mathcal{X} \mid A = U \cap Y$ con U conjunto abierto en $\mathcal{X}\}$, no es difícil verificar que τ_Y es una topología para $\mathcal{Y}$, llamada la topología inducida por τ. Así, se dirá que (Y, τ_Y) es un subespacio de $(\mathcal{X}, \tau)$.

En general si $\mathfrak{G}$ es una familia arbitraria de topologías sobre un conjunto no vacío $\mathcal{X}$, entonces $\bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{A}$ también es una topología sobre $\mathcal{X}$, a diferencia de $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{A}$ que no siempre lo es.

Definición 1.25. *Sea* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico. Una familia* $\mathfrak{B} \subset \tau$*, es una base en* $\mathcal{X}$ *para* τ*, si todo elemento de* τ *no vacío es unión de elementos que pertenecen a* $\mathfrak{B}$*.*

Teorema 1.26. *Sea* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* $\mathfrak{B} \subseteq \tau$*. Son equivalentes:*

1. $\mathfrak{B}$ *es una base para* $\mathcal{X}$*.*

2. *Para cada* $G \subseteq \mathcal{X}$ *abierto no vacío y* $x \in G$*, existe* $V \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in V \subseteq G$*.*

Haciendo uso del teorema anterior nótese que se pueden caracterizar de manera diferente los conjuntos abiertos de un espacio topológico como sigue:

Corolario 1.27. *Sea* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ *base para* $\mathcal{X}$*.* $O \subseteq \mathcal{X}$ *es un conjunto abierto si, y sólo si, para todo* $x \in O$ *existe* $V_x \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in V_x \subseteq O$*.*

Teorema 1.28. *Si* $(\mathcal{X}, d)$ *un espacio métrico, entonces los abiertos en el espacio métrico, forman una base para una topológia sobre* $\mathcal{X}$*, la cual se denota por* τ_d*.*

De tal manera se dirá que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \tau)$ es **metrizable** si existe una métrica d sobre $\mathcal{X}$ tal que $\tau_d = \tau$.

Observación 1.29. *Si la métrica* d *es completa se dice que el espacio es completamente metrizable. Así, cada espacio topológico* $(\mathcal{X}, \tau)$ *discreto es completamente metrizable pues la topología inducida por la métrica discreta coincide con la topología del espacio la cual es una métrica completa.*

Definición 1.30. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio topológico. Se dirá que el espacio* $\mathcal{X}$ *es segundo numerable si tiene una base* $\mathfrak{B}$ *numerable.*

Observación 1.31. *Todo espacio topológico que cumple 2AN es separable*[3]*. En efecto, pues basta elegir un punto de cada elemento de una base numerable para obtener un conjunto denso numerable.*

Definición 1.32. *Sean* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* $\mathfrak{B} \subseteq \tau$*. Se dice que* $\mathfrak{B}$ *es una subbase para* τ *si* $\mathfrak{B}' := \{\bigcap_{i\in I} A_i : I \text{ es finito y } \forall i \in I : A_i \in \mathfrak{B}\} \cup \{\mathcal{X}\}$ *es una base en* $\mathcal{X}$ *para* τ*.*

Otros conceptos básicos de gran utilidad son los de vecindad, sistema de vecindades y base de vecindades para un punto, los cuales se definen de la siguiente manera:

Definición 1.33. *Sean* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* $x \in \mathcal{X}$*.*

[3]El reciproco es falso en general pero todo espacio métrico separable cumple el 2AN, pues dado un subconjunto denso numerable, D, de un espacio métrico $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(d) : n \in \omega \setminus \{0\} \wedge d \in D\}$ es una base numerable de $\mathcal{X}$.

1. *$U \subseteq \mathcal{X}$ es una **vecindad** de x si existe un conjunto A abierto en $\mathcal{X}$ tal que $x \in A \subseteq U$.*

2. *La familia $\mathcal{V}(x) := \{U \subseteq \mathcal{X} | U$ es vecindad de $x\}$ se llama **sistema de vecindades** de x.*

3. *Una colección $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una **base de vecindades** de x si para todo $U \in \mathcal{V}(x)$, existe $E \in \mathfrak{B}_x$ tal que $x \in E \subseteq U$.*

Definición 1.34. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Se dirá que $\mathcal{X}$ es **primero numerable** si y sólo si para cada $x \in \mathcal{X}$, existe $\mathfrak{B}_x$ base de vecindades de x numerable.*

Se dirá que $F \subseteq \mathcal{X}$ es un **conjunto cerrado** en $(\mathcal{X}, \tau)$ respecto a τ si $\mathcal{X} \setminus F$ es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$.

Proposición 1.35. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico, $\mathcal{Y}$ un subespacio de $\mathcal{X}$ y $W \subset \mathcal{Y}$ un subconjunto cerrado (abierto) en $\mathcal{Y}$. Si $\mathcal{Y}$ es cerrado (abierto) en $\mathcal{X}$ y W es cerrado (abierto) en $\mathcal{Y}$, entonces W es cerrado (abierto) en $\mathcal{X}$.*

Definición 1.36. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$.*

1. *Sea $x \in \mathcal{X}$, x es un **punto de acumulación** de A si para todo $U \in \tau$ con $x \in U$, $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

2. *$A'_{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} \mid x$ es punto de acumulación de $A\}$, llamado el **conjunto derivado** de A.*

3. *Los elementos de $A - A'_{\mathcal{X}}$, se llaman **puntos aislados** de A.*

Definición 1.37. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico y $E \subseteq \mathcal{X}$.*

1. *Se define el **interior** de E en $\mathcal{X}$, el cual se denotará como $i_{\mathcal{X}}(E)$, por $\bigcup\{U \subseteq \mathcal{X} : U$ es abierto y $U \subseteq E\}$.*

2. *La **cerradura** de E en $\mathcal{X}$, denotada por $cl_{\mathcal{X}}E$ o $\overline{E}^{\mathcal{X}}$, se define como $\bigcap\{H \subseteq \mathcal{X} : H$ es cerrado en $\mathcal{X}$ y $E \subseteq H\}$.*

Cuando no haya confusión sobre el espacio en el cual se está trabajando omitiremos el uso de sub-índices en las nociones anteriores. Así, se puede definir la **frontera** de A como $Fr_{\mathcal{X}}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.

Teorema 1.38. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico y $E \subseteq \mathcal{X}$.*

1. *$x \in \overline{E}$ si y sólo si para todo $V \in \tau : x \in V$ y $V \cap E \neq \emptyset$.*

2. *Si $E \subseteq Y \subseteq \mathcal{X}$, entonces $\overline{E}^{\tau_Y} = \overline{E}^{\tau} \cap Y$.*

Teorema 1.39. *Sean* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* A *un conjunto abierto no vacío de* $\mathcal{X}$*. Si* $E \subseteq \mathcal{X}$ *tal que* $A \cap E = \emptyset$*, entonces* $A \cap \overline{E} = \emptyset$*.*

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene que si $U, V \in \tau$ conjuntos no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \cap \overline{V} = \emptyset = \overline{U} \cap V$.

Definición 1.40. *Sean* $\mathcal{X}$ *un espacio topológico y* $D \subseteq \mathcal{X}$*. Diremos que* D *es denso en* $\mathcal{X}$*, si* $\overline{D} = \mathcal{X}$*.*

Esto último puede interpretarse como, el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a D es $\mathcal{X}$. Más aún si $A, B \subset \mathcal{X}$ se dirá que A es denso en B si $B \subseteq \overline{A}$.

Teorema 1.41. *Sean* $(\mathcal{X}, \tau)$ *un espacio topológico y* $D \subseteq \mathcal{X}$*, entonces* D *es un conjunto denso en* $\mathcal{X}$ *si y sólo si para todo* $U \in \tau$ *no vacío se cumple que* $U \cap D \neq \emptyset$*.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea $O \neq \emptyset$ un abierto en $\mathcal{X}$. Si $O \cap D = \emptyset$, entonces $\mathcal{X} \setminus O \supset D$ es cerrado, por tanto $\overline{D} \subset \mathcal{X} \setminus O$, lo cual es falso pues contradice la densidad de D.

$\Leftarrow$] Si $\overline{D} \neq \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X} \setminus \overline{D}$ es un abierto tal que $\mathcal{X} \setminus \overline{D} \cap D = \emptyset$, lo cual es falso. □

Corolario 1.42. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio topológico Hausdorff*[4]*. Si* D *es un conjunto denso en* $\mathcal{X}$ *y* O *es un subconjunto abierto no vacío de* $\mathcal{X}$*, entonces* $\overline{O} = \overline{O \cap D}$*.*

Demostración.
Basta ver que $\overline{O} \subset \overline{O \cap D}$. Sean $x \in \overline{O}$ y V una vecindad de x. Para esto $O \cap V \neq \emptyset$ y por la densidad de D en $\mathcal{X}$, se tiene que $V \cap (O \cap D) = (O \cap V) \cap D \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \overline{O \cap D}$. □

Nótese que el concepto de espacio métrico separable se puede extender a los espacios topológicos a partir de la definición de ser denso en los espacios topológicos. Más aún, para verificar la densidad de un subconjunto de algún espacio topológico es suficiente mostrar que el conjunto interseca a todos los elementos de una base dada para el espacio topológico.

Ahora, recuérdese que una función f entre dos espacios topológicos $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ se dice **continua** si y sólo si para cada conjunto abierto W en $\mathcal{Y}$, $f^{-1}(W)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$. Dicho lo anterior, se puede verificar que la **composición** de funciones continuas es continua y lo mismo para la **restricción** a subespacios en el dominio(codominio) de una función continua es una función continua.

[4]En el sentido de la definición 1.48

Definición 1.43. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función. f es **abierta** (cerrada) si y sólo si para cada conjunto abierto (cerrado) U en $\mathcal{X}$, $f(A)$ es un conjunto abierto (cerrado) en $\mathcal{Y}$.*

Definición 1.44. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función, f es un **homeomorfismo** si, f es biyectiva, continua y $f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es continua.*

Así, se dirá que $\mathcal{X}$ es **homeomorfo** a $\mathcal{Y}$ si existe un homeomorfismo de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{Y}$.

Teorema 1.45. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos y $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ biyectiva. Son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(1) h es un homeomorfismo.

(2) h es continua y abierta.

(3) h es continua y cerrada.

Definición 1.46. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función, entonces f es un **encaje** si, f es un homeomorfismo de $\mathcal{X}$ sobre su imagen.*

Por esto último, se dirá que $\mathcal{X}$ es **encajable** en $\mathcal{Y}$ si existe un encaje de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Teorema 1.47. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos. Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es continua, inyectiva y abierta (cerrada), entonces $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un encaje.*

Ahora considérese a los axiomas de separación los cuales juegan un papel muy importante en la teoría de espacios topológicos.

Definición 1.48. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Entonces,*

- *$\mathcal{X}$ es T_0 (**Kolmogórov**) si y sólo si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, existe un conjunto abierto A en $\mathcal{X}$ tal que $A \cap \{x, y\} = \{x\}$.*

- *$\mathcal{X}$ es T_1 (**Fréchet**) si y sólo si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, existen A, B conjuntos abiertos tales que $x \in A \setminus B$ y $y \in B \setminus A$.*

- *$\mathcal{X}$ es T_2 (**Hausdorff**) si y sólo si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, existen A, B conjuntos abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$, $y \in B$ y $x \in A$.*

- *$\mathcal{X}$ es T_3 (**Regular**) si y sólo si $\mathcal{X}$ es T_1 y para todo F cerrado se cumple que para cualquier $x \in \mathcal{X} \setminus F$, existen A, B conjuntos abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$, $F \subset A$ y $x \in B$.*

- *$\mathcal{X}$ es $T_{3_{1/2}}$ (**Completamente Regular o Tychonoff**) si y sólo si $\mathcal{X}$ es T_1 y para todo F conjunto cerrado y para todo $x \notin F$, existe $f : \mathcal{X} \to [0, 1]$ función continua tal que $f(x) = 0$ y $f[F] = \{1\}$.*

- *$\mathcal{X}$ es T_4 (**Normal**) si y sólo si $\mathcal{X}$ es T_1 y para cualesquiera F, D conjuntos cerrados tales que $F \cap D = \emptyset$ se cumple que, existen A, B abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$, $F \subset A$ y $D \subset B$.*

Es fácil ver que todos los espacios métricos son Hausdorff, más aún, cualquier espacio métrico es normal y por ende regular. También no es difícil probar que ser un espacio de Kolmogórov (Fréchet, Hausdorff, Regular, Completamente Regular y Normal) son propiedades topológicas, es decir, se preserva bajo homeomorfismo.

Una característica importante en los espacios topológicos es determinar cuándo un espacio es metrizable. Por ello existen varios teoremas de metrizabilidad. A continuación se enuncia uno de los más importantes.

Teorema 1.49. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico segundo numerable, $\mathcal{X}$ es un espacio metrizable si, y sólo si $\mathcal{X}$ es regular.*

Por último definamos a los conjuntos perfectos que serán de ayuda en este trabajo.

Definición 1.50. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio perfecto si es cerrado y todos sus elementos son puntos de acumulación*[5].

1.2.1. Conjuntos Nada Densos

Definición 1.51. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$, entonces:*

- *$A \subseteq \mathcal{X}$ es **nada denso** (o denso en ninguna parte) si y sólo si $i(\overline{A}) = \emptyset$.*

En otro caso diremos que A es denso en alguna parte. Luego, de la definición anterior se puede verificar el siguiente resultado.

Corolario 1.52. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$.*

(a) Si A es nada denso entonces $\overline{A}$ es nada denso.

(b) $i(\overline{A}) = \emptyset$ si y sólo si $\overline{(\mathcal{X} \setminus \overline{A})} = \mathcal{X}$.

Demostración.
(a) Es consecuencia inmediata de la definición. Para (b), podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es cerrado. $\Rightarrow$] Si $i(A) = \emptyset$, entonces cualquier abierto no vacío, dígase E, no esta contenido en A, luego existe $e \in E$ tal que $e \notin A$, entonces $E \cap A^c \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{X} \setminus A$ es denso, de ahí que $\overline{(\mathcal{X} \setminus \overline{A})} = \mathcal{X}$.
$\Leftarrow$] Demostración análoga. $\square$

[5]Si $P \subset \mathcal{X}$, se dirá que P es un conjunto perfecto en $\mathcal{X}$ si es cerrado y es un espacio perfecto con la topología que hereda.

Proposición 1.53. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$. Entonces A es un nada denso si y sólo si para cada U conjunto abierto no vacío, existe un V conjunto abierto no vacío tal que $V \subseteq U$ y $V \cap A = \emptyset$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea U un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{X}$. Como $i(\bar{A}) = \emptyset$, se cumple que $U \nsubseteq \bar{A}$, con lo cual $U \cap \mathcal{X} \setminus \bar{A} \neq \emptyset$ es abierto y $\left(U \cap \mathcal{X} \setminus \bar{A}\right) \cap A = \emptyset$. Tomando a $V = U \cap \mathcal{X} \setminus \bar{A}$ se termina la prueba.

$\Leftarrow$] Supóngase que $i(\bar{A}) \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $V \subseteq i(\bar{A})$ abierto no vacío tal que $V \cap A = \emptyset$. Si $x \in V$, dado que $V \subseteq i(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$, entonces $x \in \overline{A}$ y, como V es una vecindad de x, $A \cap V \neq \emptyset$ lo cual es falso. Por tanto $i(\bar{A}) = \emptyset$. □

Observación 1.54.

1. Un conjunto nada denso no puede ser vecindad de cualquiera de sus puntos.
2. La frontera de cualquier conjunto cerrado (abierto) es nada denso en el espacio.

El siguiente teorema exhibe la relación que existe entre los conjuntos nada densos y los conjuntos densos.

Teorema 1.55. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff y $B \subset \mathcal{X}$. Entonces*

$$\mathcal{X} \setminus i(B) = \overline{\mathcal{X} \setminus B}.$$

Más aún, $i(B) = \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{X} \setminus B$ es denso en $\mathcal{X}$.

Demostración.
Sabemos que $i(B) \subseteq B$, luego $\mathcal{X} \setminus B \subseteq \mathcal{X} \setminus i(B)$ y como $\mathcal{X} \setminus i(B)$ es cerrado en $\mathcal{X}$, entonces $\overline{\mathcal{X} \setminus B} \subseteq \mathcal{X} \setminus i(B)$. Por otro lado, supóngase que $x \notin \overline{\mathcal{X} \setminus B}$, para algún $x \in \mathcal{X}$. Entonces existe una bola abierta $B_r(x)$, tal que $B_r(x) \cap \mathcal{X} \setminus B = \emptyset$. En otras palabras $x \in B_r(x) \subset B$, es decir $x \in i(B)$. Por tanto $x \notin \mathcal{X} \setminus i(B)$. Así $\mathcal{X} \setminus i(B) \subset \overline{\mathcal{X} \setminus B}$. □

Ahora veamos lo que sucede con una familia de conjuntos abiertos y densos en algún espacio así, como algunas observaciones de este.

Proposición 1.56. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $\{G_n : n \in I\}$ una familia finita de subconjuntos no vacíos, abiertos y densos en $\mathcal{X}$ donde $|I| = N$ para algún $N \in \omega$, entonces $\bigcap G_n$ es un conjunto denso y abierto en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Basta que se considere el caso para dos conjuntos abiertos. Sean $G_1, G_2 \subset \mathcal{X}$ abiertos y densos en $\mathcal{X}$ y O un conjunto abierto cualquiera en $\mathcal{X}$ no vacío. Como G_1 es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$, entonces $G_1 \cap O \neq \emptyset$ y además es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$. Ahora, como G_2 es un conjunto denso en $\mathcal{X}$, entonces $O \cap (G_1 \cap G_2) = G_2 \cap (G_1 \cap O) \neq \emptyset$. Por tanto $G_1 \cap G_2$ es un conjunto denso y abierto en $\mathcal{X}$. $\square$

Observación 1.57.

1. *En relación al apartado (2) del Corolario 1.52, observar que si $A \subset \mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{X}$, entonces no es cierto que en general $\mathcal{X} \setminus A$ es nada denso en $\mathcal{X}$. Basta considerar $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{Q}$. Sin embargo, si A es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X} \setminus A$ es nada denso. Basta verificar que $\mathcal{X} \setminus (\overline{\mathcal{X} \setminus A})$ es denso en $\mathcal{X}$, lo cual se sigue por $\mathcal{X} \setminus (\overline{\mathcal{X} \setminus A}) = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus A) = A$.*

2. *La intersección de dos conjuntos densos en un espacio topológico Hausdorff no necesariamente es denso. Basta que se consideren $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ subconjuntos densos en $\mathbb{R}$.*

3. *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ espacio topológico Hausdorff, entonces la familia*
$$\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathcal{X} : \ A \in \tau \ \text{ y } \ A \text{ denso en } \mathcal{X}\}$$
determina una nueva topología para $\mathcal{X}$, la cual está contenida en τ [6].

4. *La unión finita de conjuntos nada densos en un espacio topológico $\mathcal{X}$, es nada denso en $\mathcal{X}$. En efecto, sea $\{A_i\}$ una colección finita de conjuntos nada densos en $\mathcal{X}$, entonces por el Corolario 1.52, $\mathcal{X} \setminus \overline{A_i}$ es denso y abierto en $\mathcal{X}$ para cada i, por (2) se tiene que $\bigcap_i (\mathcal{X} \setminus \overline{A_i})$ es denso en $\mathcal{X}$ y como $\bigcap_i (\mathcal{X} \setminus \overline{A_i}) = \mathcal{X} \setminus (\bigcup_i \overline{A_i}) = \mathcal{X} \setminus (\overline{\bigcup_i A_i})$, una vez mas por el Corolario 1.52 tenemos que $\bigcup_i A_i$ es nada denso en $\mathcal{X}$.*

5. *La unión numerable de conjuntos nada densos en un espacio topológico $\mathcal{X}$ no necesariamente es nada denso en $\mathcal{X}$. Considérese $\mathbb{R}$ con la métrica usual y definir $\mathcal{A} = \{\{r\} : r \in \mathbb{Q}\}$, donde $\mathbb{Q} = \bigcup \mathcal{A}$ el cual es denso $\mathbb{R}$ pero cada $\{r\}$ es nada denso en $\mathbb{R}$.*

Pese a que la noción de ser nada denso se transmite por inclusión, tal concepto sigue siendo restrictivo debido a la incapacidad que posee para preservarse bajo uniones numerables. Sin embargo las nociones de ser un conjunto de primera y de segunda categoría introducidas por Baire, permiten el estudio de diversas propiedades topológicas, logrando con ello tener una área de trabajo donde se pueda visualizar la importancia de estos conjuntos.

[6] La prueba de este hecho se sigue de inmediato por la forma en que se definió la nueva topología.

1.2.2. Conjuntos de Primera Categoría y Segunda Categoría

Se hereda el término de "Categoria"(el cual obviamente no es en el sentido de la teoría actual de categorías) del lenguaje que utilizó Baire en el estudio de las propiedades de ciertos conjuntos, los cuales fueron parte fundamental en el desarrollo de su trabajo de tesis doctoral.

¿Cuán grande, en un sentido que se debe de precisar, es el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función real sobre un espacio métrico? Piense en la función característica de los números racionales, ahora pregúntese ¿cómo decir si tal conjunto es grande o pequeño? Baire respondiéndose a estas preguntas introdujo la noción de cuando un conjunto es de primera categoría o de segunda categoría. Así, tal medición de estos conjuntos conducen a la siguiente definición.

Definición 1.58. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$.*

- *A es un conjunto de la **primera categoría** (diseminado o magro), si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nada denso en $\mathcal{X}$.*

- *A es un conjunto de la **segunda categoría** (no magro), si A no es la unión numerable de conjuntos nada densos.*

Observación 1.59. *Un espacio topológico es de la segunda categoría si y sólo si cualquier intersección numerable de subconjuntos abiertos densos en el espacio es no vacía.*

Si un espacio $\mathcal{X}$ es de la segunda categoría, entonces se dirá que $\mathcal{X}$ es un espacio de la segunda categoría en sí mismo. Más aún, tales nociones de categoría son relativas. Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$, visto como subconjunto de $\mathbb{C}$, es cerrado y no vacío, por lo que es de la primera categoría, sin embargo $\mathbb{R}$ es de la segunda categoría en sí mismo. Otro ejemplo de esto es el siguiente, sea $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{R}})$ donde $d_{\mathbb{R}}$ es la métrica inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}$, luego no es difícil verificar que $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico completo. Por último $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{R}})$ es de la segunda categoría en sí mismo, pues cada singular en $\mathbb{Z}$ es un conjunto abierto en este espacio y por ende no puede ser nada denso. Sin embargo, $\mathbb{Z}$ visto como subconjunto de $\mathbb{R}$ es en efecto un conjunto de la primera categoría en $\mathbb{R}$.

Desde el punto vista topológico los conjuntos de primera categoría son pequeños, mientras que los de la segunda categoría son grandes. Algunas propiedades que se cumplen en los conjuntos de la primera categoría son las siguientes.

Proposición 1.60. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $A, B \subseteq \mathcal{X}$.*

1. *Si $A \subseteq B$ y B es un conjunto de la primera categoría, entonces A es un conjunto de la primera categoría.*

2. *La unión numerable de conjuntos de la primera categoría, es un conjunto de la primera categoría.*

3. *Si A es un conjunto cerrado en $\mathcal{X}$ cuyo interior es vacío, A es de la primera categoría en $\mathcal{X}$.*

4. *Sea $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un homeomorfismo, entonces A y $h(A)$ son de la misma categoría*[7].

Demostración.
(1) Se sigue del hecho que $A = A \cap B$. (2) Análogo a (1). (3) Por definición. (4) Supóngase que A es de la primera categoría, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nada denso. Aplicando h a A, tenemos que $h(A) = \bigcup_{n\in\omega} h(A_n)$. Supóngase que cada A_n es un conjunto cerrado, entonces $h(A_n)$ es un conjunto cerrado ya que h^{-1} es continua. Véase que $h(A_n)$ es nada denso, para cada n. En efecto, supóngase lo contrario, es decir, $\exists a \in i(h(A_{n_0}))$ para algún n_0, luego $h^{-1}(a) \in h^{-1}(i(h(A_{n_0}))) \subset i(h^{-1}(h(A_{n_0}))) = \emptyset$ lo cual es falso. Por tanto cada $h(A_n)$ es nada denso. Así $h(A)$ es de la primera categoría. $\square$

1.2.3. Conjuntos F_σ y G_δ

Como es bien sabido, la intersección infinita de conjuntos abiertos en un espacio métrico (topológico), no es en general un conjunto abierto, y lo mismo sucede con uniones infinitas de conjuntos cerrados. Sin embargo, cuando se habla de uniones o intersecciones contables, se pueden obtener algunos resultados útiles para resolver diversos problemas en el análisis u otras áreas.

Definición 1.61. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff y $A \subseteq \mathcal{X}$ no vacío. Se dirá que:*

(a) A es un conjunto F_σ en $\mathcal{X}$ si existe una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos cerrados en $\mathcal{X}$, tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

(b) A es un conjunto G_δ en $\mathcal{X}$, si existe una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$, tal que $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$.

*Los conjuntos que se pueden representar como un conjunto F_σ y G_δ al mismo tiempo se les llamarán **ambiguos**.*

[7] Ser de la primera o de la segunda categoría es un invariante topológico.

Observación 1.62. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico de Fréchet y $A \subseteq \mathcal{X}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

- *Todo subconjunto contable de $\mathcal{X}$, es un conjunto F_σ en $\mathcal{X}$, lo cual se sigue por el hecho de que cada conjunto singular en $\mathcal{X}$ es cerrado en $\mathcal{X}$.*
- *A es un conjunto G_δ en $\mathcal{X}$ si y sólo si $\mathcal{X} \setminus A$ es un conjunto F_σ en $\mathcal{X}$* [8].

Ejemplo 1.63. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico y $A \subset \mathcal{X}$. Si A es cerrado, entonces A es un conjunto G_δ. En particular ambiguo.*

Demostración.
Considere para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \bigcup_{x \in A} B_{1/n}(x)$. Véase que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Como $A \subseteq G_n$ para cada n, entonces $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Ahora si $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, $z \in G_n$ para cada n. Fijando algún n_0, existe un $x \in A$ tal que $z \in B_{1/n_0}(x)$. Entonces $z \in \overline{A}$ y como $A = \overline{A}$, $z \in A$. Por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset A$. Así $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ y dado que cada G_n es abierto, A es un conjunto G_δ. Por último, A trivialmente es un conjunto F_σ. Por tanto A es ambiguo. □

Del ejemplo anterior se puede garantizar que si A es un conjunto abierto no vacío en algún espacio métrico $\mathcal{X}$, entonces A es un conjunto F_σ en $\mathcal{X}$. Más aún, A es un conjunto ambiguo.

Ejemplo 1.64. *Los conjuntos de los números racionales e irracionales, es decir, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ respectivamente son conjuntos F_σ y G_δ en $\mathbb{R}$, respectivamente.*

Del ejemplo anterior se puede realizar la siguiente pregunta ¿Es $\mathbb{Q}$ un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$? Dicha respuesta a este problema se considerará en una sección posterior en este trabajo.

Otra definición que se usará con frecuencia en este trabajo es la siguiente:

Definición 1.65. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff y $M \subset \mathcal{X}$. Se dirá que M es* ***residual*** *en $\mathcal{X}$, si $\mathcal{X} \setminus M$ es de la primera categoría en $\mathcal{X}$.*

El siguiente resultado establece una caracterización de los conjuntos residuales.

Proposición 1.66. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff y $M \subset \mathcal{X}$. M es residual en $\mathcal{X}$ si y sólo si existe sucesión $(G_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$, tal que $\bigcap_{n\in\omega} G_n \subset M$.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Se sabe que existe $(A_n)_{n\in\omega}$ sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos nada densos, tal

[8] El resultado se sigue de las leyes de D'Morgan.

que $A_n \subset \mathcal{X}$ para cada n y $\mathcal{X} \setminus M = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Por el Corolario 1.52, tenemos que $G_n = \mathcal{X} \setminus \overline{A_n}$ es denso y abierto en $\mathcal{X}$. Así

$$M = \mathcal{X} \setminus \bigcup A_n = \bigcap(\mathcal{X} \setminus A_n) \supseteq \bigcap(\mathcal{X} \setminus \overline{A_n}) = \bigcap G_n.$$

$\Leftarrow$] Se afirma que $\mathcal{X} \setminus M$ es de la primera categoría. En efecto, por hipótesis existe $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de abiertos y densos en $\mathcal{X}$ tal que $\bigcap G_n \subset M$. Por el Corolario 1.52, se tiene que $\mathcal{X} \setminus G_n$ es nada denso para cada n,pues $\mathcal{X} \setminus (\overline{\mathcal{X} \setminus G_n}) = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus G_n) = G_n$, con G_n denso y abierto en $\mathcal{X}$. Luego, sean $G'_n := \bigcup_{m\in M} B_{1/n}(m)$, para cada n. Nótese que cada G'_n es abierto en $\mathcal{X}$. Es claro que $\bigcap_{n\in\omega} G'_n \supseteq M$. Así $E_n = G_n \cap G'_n$ es un conjunto denso y abierto en $\mathcal{X}$.

Por último véase que $\mathcal{X} \setminus M = \bigcup(\mathcal{X} \setminus E_n)$. $\mathcal{X} \setminus E_n$ es nada denso en $\mathcal{X}$ para cada $n \in \omega$ por Corolario 1.52. Primero véase que $\mathcal{X} \setminus M \subseteq \bigcup(\mathcal{X} \setminus E_n)$, basta observar que $E_n \subset \bigcap G_n \subset M$. La otra contención se obtiene a partir de $M = M \cap (\bigcap G'_n) \subset (\bigcap G_n) \cap (\bigcap G'_n) = E_n$. □

Observación 1.67. *Todo conjunto residual contenido en un espacio métrico completo es de la segunda categoría.*

1.2.4. Producto Topológico

Una tarea de suma importancia en la topología (al igual que en muchas otras áreas de la matemática) es construir nuevos espacios a partir de los existentes[9]. Por ello se introduce la definición de topología para el producto entre dos espacios topológicos como sigue:

Proposición 1.68. *Sean $(\mathcal{X}, \tau), (\mathcal{Y}, \eta)$ espacios topológicos. La familia $\mathfrak{B} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \eta\}$ es base para una topología en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

A la topología de la proposición anterior se le llama topología producto para el espacio $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. En esencia la topología que se define en el producto es la intersección de todas las posibles topologías en el producto de tal forma que las funciones proyección[10] sean continuas.

De lo anterior podemos definir la topología producto para un número finito de espacios topológicos, $\{\mathcal{X}_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ para algún $n \in \omega \setminus \{0\}$, como la topología generada por la subbase $\mathfrak{S} = \{\Pi_i^{-1}(U_i) : U_i$ abierto de $\mathcal{X}_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$, donde los conjuntos $\Pi_i^{-1}(U_i) = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots \times \mathcal{X}_n = U_i \times \prod_{j\neq i} \mathcal{X}_j$, los cuales suelen

[9] Cabe hacer la aclaración que las ideas presentadas sobre le producto Topológico en este trabajo son muy básicas y para una mejor comprensión de estas será necesario consultar alguna de las referencias citadas.

[10] $\Pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ y $\Pi_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$

llamarles **cilindros abiertos**. Así, los abiertos en el producto topológico, $\prod_i \mathcal{X}_i$, son de la forma $B = U_1 \times \cdots \times U_n$.

En una familia indizada de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, el producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ se define como el conjunto de las funciones $\{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i\}$, donde $x(i)$(ó x_i) denota la coordenada i-ésima de $x = (x_i)_{i \in I}$. El axioma de elección nos dice que este conjunto producto es no vacío si cada factor X_i no lo es. Tal concepto puede caracterizarse en términos de las funciones proyección las cuales se definen para cada $j \in I$ como:

$$\Pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j, \text{ por } \Pi_j(x) = x_j.$$

De manera completamente análoga al caso finito se puede definir la topología producto para una familia indizada de espacios topológicos dígase $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$. Una subbase para esta topología es $\mathfrak{S} = \{\Pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \tau_i\}$ y de la cual los **abiertos básicos o canónicos** se definen como intersecciones finitas de cilindros abiertos, es decir, $U = \bigcap_{k=1}^{n} \Pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, o de manera equivalente, $U = U_{i_1} \times \cdots U_{i_n} \times \prod_{i \in I} X_i$, $i \neq i_1, \ldots, i_n$. Lo anterior nos esta diciendo que U es un producto donde todos los espacios coordenados son los X_i salvo para un número finito de índices i_k donde se tienen abiertos propios de cada uno de los espacios indizados.

Así, considerando al conjunto A diferente del vacío con la topología discreta, una base para el producto topológico A^ω es la colección formada por $\prod_{n \in \omega} U_n$ donde $|U_n| = 1$ para una cantidad finita de elementos de ω y $U_n = A$ para los demás índices.$(*)$

1.3. Compacidad

La noción de compacidad está conectada con el teorema de Borel-1894 el cual estable que cada cubrimiento abierto numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene un subcubrimiento finito, y la observación hecha por H.Lebesgue-1903, de que el mismo suceso ocurre para cualquier cubrimiento abierto no necesariamente numerable. El concepto de espacio (regular) compacto fue introducido por L. Vietoris, en 1921. La noción de espacio compacto que se utilizará se debe a P. Alexandroff y P.S. Uryshon, 1923.

Así, hablaremos de una de las nociones más importantes y que se usa frecuentemente en espacios topológicos (espacios métricos), es decir la noción de compacidad, además de algunas equivalencias a este concepto.

Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico y $\mathfrak{U}$ una colección de subconjuntos de $\mathcal{X}$, entonces se dirá lo siguiente:

- $\mathfrak{U}$ es una **cubierta** de $\mathcal{X}$ si $\mathcal{X} = \bigcup \mathfrak{U}$. Si cada uno de los elementos de $\mathfrak{U}$ es un conjunto abierto de $\mathcal{X}$, diremos que $\mathfrak{U}$ es una **cubierta abierta** de $\mathcal{X}$. Más aún, si $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathfrak{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una **subcubierta** de $\mathfrak{U}$ para $\mathcal{X}$, si también es una cubierta de $\mathcal{X}$.

- $\mathfrak{U}$ es **localmente finito** en $\mathcal{X}$ si para cada $x \in \mathcal{X}$, existe una vecindad U de x que interseca sólo a una cantidad finita de elementos en $\mathfrak{U}$.

- $\mathfrak{U}_0 \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es un **refinamiento** de $\mathfrak{U}$, si cada elemento de $\mathfrak{U}_0$ está contenido en algún elemento de $\mathfrak{U}$; además, si los elementos en $\mathfrak{U}_0$ son abiertos en $\mathcal{X}$ se dice que $\mathfrak{U}_0$ es un **refinamiento abierto** de $\mathfrak{U}$.

- $\mathcal{X}$ es **Lindelöf** si toda cubierta abierta de $\mathcal{X}$ posee una subcubierta numerable para $\mathcal{X}$.

- $\mathcal{X}$ es **Paracompacto** si toda cubierta abierta de $\mathcal{X}$ posee un refinamiento abierto localmente finito para $\mathcal{X}$.

Definición 1.69. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq \mathcal{X}$. Entonces,*

1. *$\mathcal{X}$ es **compacto** si toda cubierta abierta de $\mathcal{X}$ tiene una subcubierta finita.*
2. *A es compacto si (A, τ_A) es compacto.*

Definición 1.70. *Sea $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico. $\mathcal{X}$ es **totalmente acotado** o precompacto si, para cada $\epsilon > 0$, de la cubierta abierta $\{U(x, \epsilon) : x \in \mathcal{X}\}$ de $\mathcal{X}$, se puede extraer un subcubrimiento finito.*

Observación 1.71. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico. $\mathcal{X}$ es separable si y sólo si, $\mathcal{X}$ es 2^{o} numerable. Así, todo espacio métrico separable es Lindelöf.*

Proposición 1.72. *Ningún espacio discreto infinito numerable puede ser compacto.*

Demostración.
Supóngase que $(\mathcal{X}, \tau)$ es un espacio topológico con la topología discreta cuya cardinalidad es $\aleph_0$. Si $\mathcal{X}$ se escribe como una sucesión, dígase $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, ...\}$, se tendrá que $\{\{x\} : n \in \omega\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{X}$, del cual no puede extraerse un subcubrimiento finito. $\square$

Una caracterización de la metrizabilidad en los espacios topológicos compactos es la siguiente.

Proposición 1.73. *Si $\mathcal{X}$ es un espacio topológico compacto, entonces $\mathcal{X}$ es metrizable si y sólo si $\mathcal{X}$ es Hausdorff y segundo numerable.*

Definición 1.74. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio metrizable y separable, una **compactación** de $\mathcal{X}$ es un espacio metrizable y compacto, $\mathcal{X}'$, en el cual $\mathcal{X}$ puede ser encajado en $\mathcal{X}'$ como un conjunto denso.*

Definición 1.75. *Una familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$, se dice que tiene la **propiedad de intersección finita** (PIF) si y sólo sí la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathfrak{F}$ no es vacía.*

En el siguiente teorema se exhibe como la propiedad anterior (PIF) ayuda a caracterizar a los espacios compactos que son Hausdorff.

Teorema 1.76. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. $\mathcal{X}$ es compacto si y sólo si cada familia de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que posee la PIF tiene intersección no vacía.*

A continuación se da una lista de algunas proposiciones que se obtienen a partir de la definición de compacidad en un espacio topológico.

Proposición 1.77.

1. *Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*
2. *Los subconjuntos compactos de un espacio topológico Hausdorff son cerrados.*
3. *La imagen continua de un conjunto compacto es un conjunto compacto en cualquier espacio topológico.*
4. *Una función continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico Hausdorff es un encaje.*
5. *La compacidad se preserva para la unión finita de subespacios compactos de un espacio.*
6. *La compacidad se preserva para el producto de espacios compactos (Tychonoff).*

Definición 1.78. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Se dice que $\mathcal{X}$ es **localmente compacto** si y sólo si para cada $x \in \mathcal{X}$ y para todo conjunto abierto A con $x \in A$, existe un conjunto abierto B tal que $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq A$ y $\overline{B}$ es compacto.*

Definición 1.79. *Sean $\mathcal{X}$ espacio topológico y A subconjunto de $\mathcal{X}$. Se dirá que A es $\sigma-$**compacto** si existe $(K_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos compactos en $\mathcal{X}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} K_n$.*

Ejemplo 1.80. *$\mathbb{Q}$ se puede representar como la unión numerable de conjuntos compactos, es decir, $\mathbb{Q}$ es σ-compacto.*

Definición 1.81. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. $\mathcal{X}$ es $\mathcal{K}_\sigma$**-localmente compacto** si $\mathcal{X}$ es σ-compacto y localmente compacto.*

1.4. Ordinales y Cardinales

La pequeña sección que iniciaremos tiene el fin de recordar algunas nociones básicas sobre la teoría de conjuntos, podemos mencionar entre ellas la de ser un número ordinal, un número cardinal y algunas proposiciones que nos serán de ayuda en una sección posterior.

Definición 1.82. *Una relación binaria $<$ sobre un conjunto A es un orden parcial de A si cumple lo siguiente:*

- *$a \not< a$ para todo $a \in A$,*
- *si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.*

Denotado por $(A, <)$. Haciendo abuso de notación simplemente se dirá que A es un conjunto parcialmente ordenado.

Un orden parcial $<$ sobre un conjunto A se dice un orden lineal si para cualesquiera $a, b \in A$, $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$. Así, si se tiene un orden lineal $<$ sobre un conjunto A, se dirá que A es bien ordenado respecto a $<$, si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo.

Definición 1.83. *Un conjunto T se dice transitivo si $\forall x(x \in T \Rightarrow x \subset T)$.*

Sea A un conjunto cualquiera, denotaremos por $|A|$ a la cardinalidad del conjunto A, es decir, a la cantidad de elementos que posea A.

Definición 1.84. *Un conjunto es un* ***número ordinal*** *(o simplemente ordinal) si este es un conjunto transitivo y bien ordenado por $\in$.*

Sea α un ordinal, si $\beta = \alpha + \{\alpha\} = \alpha + 1$, entonces β es un **ordinal sucesor**[11]. Si β no es un ordinal sucesor entonces $\beta = \sup\{\gamma : \gamma < \beta\} = \bigcup \beta$, será llamado **ordinal límite**[12].

Definición 1.85. *Un número ordinal, α, se dice* ***número cardinal*** *si $|\alpha| \neq |\beta|$ para todo ordinal $\beta < \alpha$*[13]*.*

Si B es un conjunto bien ordenado, entonces existe un ordinal β tal que $|B| = |\beta|$. De ahí que $|B|$ se puede definir como el mínimo ordinal, α, tal que $|B| = |\alpha|$.

Sea $f : \alpha \to \beta$ una función entre cardinales, diremos que f es **cofinal** si $\forall\, \gamma \in \beta, \exists \rho \in \alpha : \gamma \leq f(\rho)$. De lo anterior podemos definir la **cofinalidad** de

[11] Para cada α ordinal, $\alpha + \{\alpha\} = \inf\{\beta : \beta > \alpha\}$ es un ordinal.

[12] El mínimo ordinal límite diferente de cero es ω, los elementos de ω son llamados **ordinales finitos** o números naturales.

[13] ω es el mínimo cardinal infinito. Note que todos los cardinales infinitos son ordinales límites.

un cardinal como $cof(\beta) = min\{\alpha : \exists f : \alpha \to \beta \; cofinal\}$. Como consecuencia inmediata se tiene que $cof(\beta) \leq \beta$. También se dirá que un cardinal α es **regular** (singular) si $cof(\alpha) = \alpha$ ($cof(\alpha) < \alpha$). Así, dado κ un cardinal, si κ es regular, $\kappa = \bigcup_{\alpha \leq \gamma} \beta_\alpha$ y $|\gamma| < \kappa$, entonces existe $\alpha < \gamma$ tal que $|\beta_\alpha| = \kappa$ y $\alpha \neq \beta$.

Lema 1.86 (De la raíz)**.** *Sea $\mathfrak{S} = \{S_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de subconjuntos finitos de un conjunto S con $|A| = \kappa \geq \aleph_0$, donde κ es un cardinal regular no numerable. Entonces existe un conjunto $B \subseteq A$ de cardinalidad κ y un conjunto $S_0 \subseteq S$ tales que $S_\alpha \cap S_\beta = S_0$ para cada $\alpha, \beta \in B$.*

Demostración.
Para cada $n < \omega$, defínase $F_n = \{S_\alpha \in \mathfrak{S} : |S_\alpha| = n\}$. Es claro que $\mathfrak{S} = \bigcup_{n<\omega} F_n$. Como κ es regular y $\kappa = \bigcup_{n<\omega} |F_n|$, se puede concluir que existe $n_0 < \omega$ tal que $|F_{n_0}| = \kappa$. De lo anterior se puede suponer sin perdida de generalidad que todo elemento en $\mathfrak{S}$ tiene igual cardinalidad, es decir, $|S_\alpha| = n$ para cada $\alpha \in A$ y algún $n \in \omega$.

Realizando inducción sobre n, se tendrá que, si $n = 0$, entonces $B = A$ y $S_0 = \emptyset$ satisfacen las condiciones pedidas. Supóngase que se cumple para algún n el resultado y $|S_\alpha| = n + 1$ para cada $\alpha \in A$. Sea $\mathfrak{C} = \{S_\alpha : \alpha \in C\}$ una subfamilia ajena por pares maximal de $\mathfrak{S}$[14].

Si $|C| = |A| = \kappa$, entonces $B = C$ y $S_0 = \emptyset$ son los conjuntos buscados. Ahora, si $|C| < |A|$, entonces $|\bigcup C| = \lambda < \kappa$. Defínase para todo $\gamma < \lambda$, $F_\gamma = \{S_\alpha \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{C} : S_\gamma \cap S_\alpha \neq \emptyset\}$. Es claro que $|A \setminus C| = \kappa$. Por la maximalidad de $\mathfrak{C}$, se tiene que $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{C} = \bigcup_{\gamma<\lambda} F_\gamma$. Como $|C| < |A \setminus C| = \kappa$ y κ es regular, entonces existe $\beta^* \in C$ tal que $|F_{\beta^*}| = |\{\alpha \in A \setminus C : S_\alpha \cap S^*_\beta \neq \emptyset\}| = \kappa$.

Sea $s^* \in S_{\beta^*}$ de tal forma que el conjunto $D = \{\alpha \in A \setminus C : s^* \in S_\alpha\}$ tiene cardinalidad κ. Note que la familia $\{S_\alpha \setminus \{s^*\} : \alpha \in D\}$ de subconjuntos de S cumple la hipótesis inductiva, entonces existe $B \subseteq D$ con $|B| = |D| = \kappa$ y $S^*_0 \subseteq S$ tal que $S_\alpha \setminus \{s^*\} \cap S_\beta \setminus \{s^*\} = S^*_0$ para cada $\alpha, \beta \in B$. Así $S_0 = S^*_0 \cup \{s^*\}$, entonces $B \subseteq A$, $|B| = \kappa$ y $S_\alpha \cap S_\beta = S_0$ para cada $\alpha, \beta \in B$. $\square$

Proposición 1.87. *Un cardinal infinito κ es regular si $\kappa \neq \bigcup\{S_\gamma : \gamma < \kappa\}$ donde $S_\gamma \subset \kappa$ con $|S_\gamma| < \kappa$ para cada $\gamma < \kappa$ [Lema 3.6 pág.27 en [20]].*

Definición 1.88. *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $C \subseteq \kappa$. C es cerrado y no acotado en κ si cumple lo siguiente:*

[14] No es complicado verificar que la colección de subfamilias de $\mathfrak{S}$ cumple las hipótesis del lema de Zorn, por tanto existe un elemento maximal en la colección, dígase $\mathfrak{C}$.

- *Para cada sucesión en C de longitud $\gamma < \kappa$, digamos $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\xi < \cdots (\xi < \gamma)$, se tiene que $\lim_{\xi \to \gamma} \alpha_\xi \in C$ (Cerrado).*
- *Para cada $\alpha < \kappa$, existe $\beta > \alpha$ tal que $\beta \in C$ (no acotado).*

Una función n-aria sobre A, es una función $f : A^n \to A$ si $n > 0$ o un elemento de A si $n = 0$. Un conjunto $B \subset A$ es cerrado bajo f si y sólo si $f(B^n) \subset B($ ó $f \in B$ cuando $n = 0)$. Una función finitaria es una función n-aria para algún $n \in \omega$. Sea $\mathfrak{F}$ una familia de funciones finitarias sobre A y $B \subset A$, entonces la cerradura de B bajo $\mathfrak{F}$ es el mínimo conjunto C que contiene a B y es cerrado bajo todas las funciones en $\mathfrak{F}$.

Lema 1.89. *Sean κ un cardinal infinito y A un conjunto. Si $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones finitarias sobre A tal que $|\mathfrak{F}| \leq \kappa$, entonces la cerradura de B bajo $\mathfrak{F}$ tiene cardinalidad a lo más κ [Prueba en [22]].*

Proposición 1.90. *Sean $\kappa > \omega$ un cardinal regular y $\mathfrak{F}$ una familia de funciones finitarias sobre κ con $|\mathfrak{F}| < \kappa$, entonces $C = \{\alpha < \kappa : \alpha$ es cerrado bajo $\mathfrak{F}\}$ es cerrado y no acotado en κ [Prueba en [22]].*

Capítulo 2

Teorema de Categoría de Baire

En 1897, William Fogg Osgood prueba que la intersección de una sucesión de subconjuntos densos y abiertos en $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$. Más tarde, Baire observa que el resultado se preserva en $\mathbb{R}^n$ y lo aprovecha en su estudio de las llamadas funciones de la primera clase de Baire. Después, Hausdorff lo extiende a los espacios completamente metrizables. Por último, Stefan Banach observó que no sólo el resultado se cumple en $\mathbb{R}^n$, sino también en espacios métricos completos y en cualquier espacio topológico localmente compacto.

Nuestro fin será estudiar los tipos de espacios particulares que cumplen tal propiedad y revisar algunas nociones sobre ellos.

2.1. El Teorema de Categoría de Baire para Espacios Métricos Completos

La clase de los espacios métricos completos fue el primer ejemplo histórico de espacios de Baire. La importancia de este hecho quedó registrada en los fundamentos de la topología y el análisis mediante el teorema de Categoría de Baire (TCB) o simplemente teorema de Baire (TB).

El objetivo de esta sección será exhibir al teorema de categoría de Baire en sus dos versiones para espacios métricos completos así como algunas consecuencias inmediatas a partir de este resultado.

Una primera versión del teorema de Baire para espacios métricos completos es la siguiente:

Teorema 2.1. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia numerable de cerrados de $\mathcal{X}$ con interior vacío, entonces $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ tiene interior vacío.*

Demostración.
Supóngase lo contrario, entonces existe un abierto A tal que $A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Como $i(A_0) = \emptyset$, existe $x_0 \in A \setminus A_0$. Como $A \setminus A_0$ es abierto existe una bola cerrada $\overline{B_{r_0}}(x_0)$ tal que $\overline{B_{r_0}}(x_0) \subset A$ y $A_0 \cap \overline{B_{r_0}}(x_0) = \emptyset$, además se puede suponer que $r_0 < 1/2^0$. De manera recursiva, se construye una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ en $\mathcal{X}$ y una sucesión real $\{r_n : n \in \omega\}$ tales que cumplen lo siguiente

- $r_n < 1/2^n$ para cada $n \in \omega$.
- $\overline{B_{r_n}}(x_n) \subset \overline{B_{r_{n-1}}}(x_{n-1})$ y $A_n \cap \overline{B_{r_n}}(x_n) = \emptyset$

Por el Teorema 1.17, $\bigcap_{n\in\omega} \overline{B_{r_n}}(x_n) = \{x\}$ tal que $x \notin A_n$ para todo $n \in \omega$, pero $\overline{B_{r_0}}(x_0) \subset A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n$ lo cual no es posible. □

La siguiente versión del Teorema de Baire se obtiene a partir de intersecciones numerables de conjuntos densos y abiertos. Tal versión del teorema es la más usual en la bibliografía y por ello a la que se referirá cuando hablemos del teorema de Baire.

Teorema 2.2 (TCB para espacios métricos completos)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo y $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una familia numerable de conjuntos abiertos densos en $\mathcal{X}$ entonces*

$$\mathcal{U} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$$

es denso en $\mathcal{X}$.

Observación 2.3. *Todo espacio de Baire es de la segunda categoría.*

Definición 2.4. *Sea $\mathcal{X}$ espacio métrico. Diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire si cualquier intersección numerable de densos y abiertos en $\mathcal{X}$, es densa en $\mathcal{X}$.*

Con el teorema anterior se puede responder a la pregunta planteada anteriormente sobre si el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.5. *El conjunto $\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$.*

Demostración.
Supóngase que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde los U_n son abiertos en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso, cada U_n es denso, y por tanto, los conjuntos $E_n = \mathbb{R} \setminus U_n$ son nada densos. Entonces

$$\mathbb{R} = \bigcup E_n \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$$

es la unión contable de conjuntos nada densos, lo cual contradice al Teorema 2.1. □

Teorema 2.6. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo y $\{C_i : i \in \omega\}$ una familia de cerrados en $\mathcal{X}$. Si U es un abierto de $\mathcal{X}$ no vacío tal que $U \cap i\Big(\bigcup_{i\in\omega} C_i\Big) \neq \emptyset$, entonces $U \cap \bigcup_{i\in\omega} i(C_i) \neq \emptyset$.*

Demostración.
Sea U conjunto abierto de $\mathcal{X}$ tal que $U \cap i\Big(\bigcup_{i\in\omega} C_i\Big) \neq \emptyset$. Se cumple lo siguiente

$$U \cap i\Big(\bigcup_{i\in\omega} C_i\Big) \subseteq \overline{U} \cap \bigcup_{i\in\omega} C_i = \bigcup_{i\in\omega} \overline{U} \cap C_i.$$

De lo anterior que, $i\Big(\bigcup_{i\in\omega} \overline{U} \cap C_i\Big) \neq \emptyset$. Por el teorema de Baire existe $N \in \omega$ tal que $i(\overline{U} \cap C_N) \neq \emptyset$. Por último $\emptyset \neq U \cap i(\overline{U} \cap C_N) \subset U \cap i(C_N)$ pues U es denso en $\overline{U}$ y $i(\overline{U} \cap C_N)$ es un abierto no vacío de $\overline{U}$. Así $U \cap i(C_N) \neq \emptyset$ para algún $N \in \omega$. Por tanto $U \cap \bigcup_{i\in\omega} i(C_i) \neq \emptyset$. □

El teorema de Baire para espacios métricos completos posee dos restricciones importantes, las cuales son:

1. La completitud del espacio métrico.

2. La numerabilidad de los subconjuntos abiertos y densos en el espacio. Por ejemplo, para $\mathbb{R}$, si para cada $x \in \mathbb{R}$ se definen $A_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, se tiene que cada A_x es abierto y denso en $\mathbb{R}$, sin embargo

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x = \emptyset.$$

Corolario 2.7. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{X}$ no es unión numerable de conjuntos nada densos.*

Demostración.
Sea $\{E_n\}_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos nada densos y supóngase que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Como $\mathcal{X} \setminus i(\overline{E_n}) = \mathcal{X}$ y por el Corolario 1.52, $\overline{\mathcal{X} \setminus \overline{E_n}} = \mathcal{X}$. Así tomando $F_n = \mathcal{X} \setminus \overline{E_n}$, se tiene que cada F_n es abierto y denso. Por Teorema 2.2 se cumple que $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{X} \setminus \bigcup \overline{E_n} \neq \emptyset$, lo cual es falso. □

Ejemplo 2.8. *Como ejemplos del Corolario 2.7 se tienen a $\mathbb{R}$ y el espacio de Cantor, lo cual es inmediato a partir de la completitud de ambos espacios.*

Observación 2.9. *Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{X}$ es de segunda categoría.*

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico (Hausdorff) y localmente compacto, entonces $\mathcal{X}$ es de la segunda categoría.*

Demostración.
Supóngase que $\mathcal{X}$ es localmente compacto. Sean $\{U_n : n \in \omega\}$ una colección de conjuntos abiertos y densos de $\mathcal{X}$ y V un conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$.

Véase que $V \cap (\bigcap_{n\in\omega} U_n) \neq \emptyset$. Como $V \cap U_0 \neq \emptyset$ y abierto, entonces existe $B_0 \neq \emptyset$ abierto, tal que $\overline{B_0} \subseteq V \cap U_0$ y $\overline{B_0}$ compacto (pues $\mathcal{X}$ es localmente compacto). Recursivamente se construye lo siguiente

$$\overline{B_n} \subseteq B_{n-1} \cap U_n,$$

además, note que $\overline{B_n}$ compacto pues $\overline{B_0}$ lo es. Defínase $O = \bigcap \overline{B_n}$, por la PIF, se tiene que $O \neq \emptyset$. Así, $\exists x \in O \subset \bigcap U_n$ y $x \in \overline{B_1} \subset V \cap U_1$. Por tanto $V \cap (\bigcap_{n\in\omega} U_n) \neq \emptyset$. Así, por la Observación 2.3 se tiene el resultado. □

Se puede verificar que existen espacios métricos que son de la segunda categoría y los cuales no son espacios de Baire. Por ejemplo considérense los siguientes conjuntos $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ y $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q} \wedge y \neq 0\}$, luego sea (X, η) donde $X := F \cup G$ y $\eta = \tau_{\mathbb{R}^2}{}_X$. Se afirma que X es de la segunda categoría. En efecto, considere una sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$ de abiertos densos en X, y note que para cada $n \in \omega$ se tiene que $U_n \cap (0, \infty)$ es abierto y denso en $(0, \infty)$, de ahí que $(\bigcap_{n\in\omega} U_n) \cap (0, \infty)$ es denso en $(0, \infty)$ pues $(0, \infty)$ es un espacio de Baire ya que $(0, \infty)$ es localmente compacto. Por tanto $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$, lo cual garantiza que X es de la segunda categoría en si mismo, pero véase que X no es un espacio de Baire, para ello obsérvese que G es un conjunto abierto de X que es unión numerable de conjuntos nada densos, de lo cual se sigue el resultado.

Por otro lado existen ciertas categorías de espacios topológicos donde ambas nociones coinciden, por ejemplo, se puede verificar que en los Espacios Vectoriales Topológicos (EVT), ser espacio de Baire es equivalente a ser de la segunda categoría en si mismo, véase Pág. 42 en [6] y también, todo espacio homogéneo de la segunda categoría es un espacio de Baire véase proposición 1.27 en [28].

Corolario 2.11. *Todo espacio métrico compacto es un espacio de Baire.*

Demostración.
Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{X}$ es localmente compacto y por la Proposición 2.10 se tiene que $\mathcal{X}$ es un espacio de segunda categoría. Dado que todo espacio de Baire es de la segunda categoría en si mismo, se concluye que $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire. □

2.2. El Teorema de Categoría de Baire para Espacios Topológicos

La versión del teorema de categoría Baire para espacios topológicos pide la restricción de que el espacio sea Hausdorff y localmente compacto teniendo como conclusión del teorema la misma del TCB para métricos completos. Así el ser un espacio de Baire se puede generalizar a espacios topológicos como sigue:

Definición 2.12. *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico. Se dirá que $\mathcal{X}$ es un **Espacio de Baire** si toda $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$, cumple que $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es densa en $\mathcal{X}$.*

Observación 2.13. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un homeomorfismo. Si $\mathcal{X}$ es de Baire entonces $\mathcal{Y}$ es de Baire.*

Teorema 2.14. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) Cada conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ es de la segunda categoría.

(b) Cada conjunto de la segunda categoría en $\mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{X}$.

(c) Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ familia de conjuntos abiertos y densos de $\mathcal{X}$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso en $\mathcal{X}$.

Demostración.
(a)⇒(c) Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos y densos no vacíos de $\mathcal{X}$. Suponga que $\bigcap\{U_n : n \in \omega\}$ no es densa en $\mathcal{X}$, entonces existe D un conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \cap D = \emptyset$, $D \subseteq \mathcal{X} \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus U_n)$ el cual es de la primera categoría pues para cada $n \in \omega$, $\mathcal{X} \setminus U_n$ es nada denso, lo cual es falso pues por hipótesis D es de la segunda categoría. Por tanto $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso.

(c)⇒(b) Sea $E = \mathcal{X} \setminus U$, donde $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ y cada U_n es nada denso. Entonces $E = \bigcap_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus U_n) \supseteq \bigcap_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus \overline{U_n})$. Nótese que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{X} \setminus \overline{U_n}$ es un conjunto abierto y denso, por tanto $\bigcap_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus \overline{U_n})$ es denso. Así E es denso en $\mathcal{X}$.

(b)⇒ (a) Sea U un conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ y suponga que U es de la primera categoría, entonces $\mathcal{X} \setminus U$ es de la segunda categoría y por hipótesis es denso en $\mathcal{X}$, lo cual es falso pues U es un conjunto abierto no vacío tal que $U \cap (\mathcal{X} \setminus U) = \emptyset$. Por tanto U es de la segunda categoría. □

Un espacio topológico también será llamado de Baire si satisface alguna de las proposiciones del resultado anterior.

Teorema 2.15. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Baire. Todo conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$, es un espacio de Baire en su topología relativa.*

Demostración.
Sean $A \subset \mathcal{X}$ un abierto no vacío en $\mathcal{X}$ y $(D_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de abiertos densos en A, entonces cada D_n es un abierto en $\mathcal{X}$ para cada $n \in \omega$. Defínanse los siguientes conjuntos $G_n = D_n \cup (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$ para cada n. Se afirma que cada G_n es abierto y denso en $\mathcal{X}$. En efecto, es claro que G_n sea abierto en $\mathcal{X}$. Pruébese que G_n es denso en $\mathcal{X}$. Para ello obsérvese lo siguiente, que D_n es denso en A, significa que $A \subseteq \overline{D_n}$ y como $\overline{G_n} = \overline{D_n} \cup \left(\overline{\mathcal{X} \setminus \overline{A}}\right) \supseteq \overline{A} \cup (\mathcal{X} \setminus \overline{A}) = \mathcal{X}$. Se tiene que G_n es denso en $\mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire, entonces $\bigcap G_n$ es denso en $\mathcal{X}$, en particular no vacío. Por último, como

$$\emptyset \neq \bigcap G_n = \bigcap \left(D_n \cup (\mathcal{X} \setminus \overline{A})\right) = \left(\bigcap D_n\right) \cup (\mathcal{X} \setminus \overline{A})$$

se tiene que $\bigcap D_n$ es denso en A. □

Dicho lo anterior se puede formular la siguiente pregunta ¿todo subconjunto cerrado de un espacio de Baire, es de Baire? Desafortunadamente la respuesta es negativa. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16. *Sea $\mathcal{X}' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Se afirma que $\mathcal{X}'$ es un espacio de Baire. Para ello considérese el siguiente conjunto $\mathcal{Y} = \{(x, y) \in \mathcal{X}' : \ y \neq 0\}$, claramente $\mathcal{Y}$ es abierto y denso en $\mathcal{X}'$, más aún, $\mathcal{Y}$ és un espacio de Baire por ser localmente compacto. Sea $(G_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}'$ y note que $G_n \cap \mathcal{Y}$ es un abierto denso en $\mathcal{Y}$ para cada n. Como $\mathcal{Y}$ es un espacio de Baire, entonces $\bigcap(G_n \cap \mathcal{Y}) = \left(\bigcap G_n\right) \cap \mathcal{Y}$ es denso en $\mathcal{Y}$, de ahí que $\bigcap G_n$ es denso en $\mathcal{X}'$. Por tanto $\mathcal{X}'$ es un espacio de Baire. Así $I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{Q}\}$ es cerrado en $\mathcal{X}'$, pero es de primera categoría (pues $\mathbb{Q}$ es de primera categoría).*

Definición 2.17. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Se dice que $\mathcal{X}$ es **hereditariamente de Baire** si todo $A \subseteq \mathcal{X}$ subconjunto cerrado en $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire respecto a la topología relativa.*

Observación 2.18.

1. *Todo espacio hereditariamente de Baire es un espacio de Baire.*
2. *Los espacios completamente metrizables y los localmente compactos Hausdorff son espacios hereditariamente de Baire*[1].

El siguiente resultado muestra una caracterización de los espacios hereditariamente de Baire.

[1] Note que $\mathcal{X}'$ en el Ejemplo 2.16 no es completamente metrizable ni localmente compacto.

Teorema 2.19. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es un espacio hereditariamente de Baire.*

2. *Todo subconjunto cerrado de $\mathcal{X}$ es de la segunda categoría en si mismo.*

Demostración.
(1)⇒(2) Se sigue de (1) en la Observación 2.18 y del hecho de que todo espacio de Baire es de la segunda categoría en sí mismo.

(2)⇒(1) Supóngase que no se cumple (1), entonces existe $F \subseteq \mathcal{X}$ conjunto cerrado de $\mathcal{X}$ que no es de Baire, lo cual implica la existencia de $O \subset \mathcal{X}$ un conjunto abierto relativo de F el cual es de la primera categoría por el Teorema 2.14. Así, $O = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ donde cada F_n es un conjunto cerrado de F y además es nada denso en O. Como cada F_n sigue siendo nada denso en $\overline{O}$ y $\overline{O} = (\overline{O} \setminus O) \cup \bigcup F_n$, entonces $\overline{O}$ es de la primera categoría en si mismo, pues es la unión de conjuntos nada densos en $\overline{O}$, lo cual es falso. □

Modificando la hipótesis de completitud se pueden obtener variantes del teorema de Categoría de Baire, las cuales se verán más adelante.

Otra forma de probar que un espacio topológico es de Baire, debido a G. Choquet, se encuentra en la capacidad que poseen ciertos espacios en admitir una cierta relación de orden entre sus elementos y que además cualquier sucesión decreciente de estos, produzcan intersecciones no vacías.

Teorema 2.20 (D'Choquet)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Entonces $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire si existe una relación, $<$, entre los abiertos no vacíos de $\mathcal{X}$ tales que cumplen lo siguiente:*

1. *Para cualesquiera A, B conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$, si $A < B$ entonces $A \subseteq B$.*

2. *Para todo B conjunto abierto en $\mathcal{X}$ existe A conjunto abierto tal que $A < B$.*

3. *Para cualesquiera A, B, C, D conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$, si $A \subseteq B < C \subseteq D$ entonces $A < D$.*

4. *Para cada $\{A_n : n \in \omega\}$ familia de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$, si $A_n > A_{n+1}$ para cada $n \in \omega$ entonces $\bigcap A_n \neq \emptyset$.*

Demostración.
Supóngase que $\mathcal{X}$ no es de Baire. Por el Corolario 1.52 existe $G \subseteq \mathcal{X}$ conjunto

abierto no vacío que no es de la segunda categoría en $\mathcal{X}$, entonces existe $(F_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos cerrados y nada densos en $\mathcal{X}$ tal que $G = \bigcup F_n$. Recursivamente construiremos una familia $\{O_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$ tal que cumple:

(i) Para cada $n \in \omega : O_n \subseteq G$,

(ii) Para cada $n \in \omega : O_{n+1} \subseteq O_n$,

(iii) Para cada $n \in \omega : O_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \emptyset$.

Se sabe que $i(F_0) = \emptyset$ de lo cual $G \nsubseteq F_0$. Luego $G \cap (\mathcal{X} \setminus F_0)$ es un conjunto abierto no vacío de G y $[G \cap (\mathcal{X} \setminus F_0)] \cap F_0 = \emptyset$, por (2) existe O_0 conjunto abierto no vacío tal que $O_0 \subseteq G \cap (\mathcal{X} \setminus F_0)$, de lo cual $O_0 \subseteq G$ y $O_0 \subseteq \mathcal{X} \setminus F_0$. Además por (3) se cumple que $O_0 < G$.

Supóngase que se han definido $O_0 \ldots O_n$ que cumplen $(i), (ii), (iii)$. Para definir O_{n+1} basta que se considere $F = \bigcup_{l=1}^{n+1} F_l$ en lugar de F_0 y es la misma idea. Ahora, nótese lo siguiente:

$$\Big(\bigcap_{n\in\omega} O_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n\in\omega} F_n\Big) = \emptyset,$$

de lo cual se tiene que

$$\emptyset = \Big(\bigcap_{n\in\omega} O_n\Big) \cap G = \bigcap_{n\in\omega} O_n.$$

Luego, por (4), $\bigcap_{n\in\omega} O_n \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{X}$ es de Baire. □

Ejemplo 2.21. *Una forma análoga de probar que dado un espacio topológico Hausdorff localmente compacto $\mathcal{X}$ es de Baire, es mediante la siguiente relación, $\prec$, sobre los conjuntos abiertos no vacíos en $\mathcal{X}$ dada por:*

$A \prec B$ si y sólo si $\overline{A} \subseteq B$ y $\overline{A}$ es compacto, para cualesquiera A, B abiertos.

Se puede verificar que $\prec$ satisface $(1) \ldots (4)$ del teorema anterior.

Ejemplo 2.22. *De la misma manera, dado $\mathcal{X}$ espacio métrico, podemos definir la relación $\prec$ sobre los conjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{X}$, como:*

$A \prec B$ si y sólo si $\overline{A} \subseteq B$ y $D(A) \preceq \dfrac{D(B)}{2}$ para cualesquiera A, B abiertos

donde $D(F) = min\{1, diam(F)\}$ para todo $F \subseteq \mathcal{X}$. Se verifica que $\prec$ cumple las condiciones del teorema anterior, por tanto $\mathcal{X}$ es de Baire.

Definición 2.23. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Entonces $\mathcal{X}$ cumple la* ***propiedad de Moore****, si ningún conjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{X}$ se puede expresar como la unión de una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ de cerrados en $\mathcal{X}$, tal que para cada $n \in \omega$ cualquier punto de F_n es punto de acumulación de $\mathcal{X} \setminus F_n$.*

Observación 2.24. *Todo espacio métrico completo y espacio topológico Hausdorff localmente compacto cumplen la propiedad de Moore*[2].

Teorema 2.25 (D'Astin)**.** *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff con la propiedad de Moore, entonces $\mathcal{X}$ es de Baire.*

Demostración.
Sea $(G_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{X}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos. Véase que $\bigcap G_n$ es denso en $\mathcal{X}$. Supóngase lo contrario, y para cada $n \in \omega$, defínase

$$F_n = \mathcal{X} \setminus G_n,$$

nótese que cada F_n es un conjunto cerrado y cada punto de F_n es punto de acumulación de $\mathcal{X} \setminus F_n = G_n$, luego por hipótesis se tiene que

$$F = \bigcup F_n$$

no es un conjunto cerrado y por tanto

$$\emptyset \neq \mathcal{X} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n = \bigcap_{n\in\omega} G_n.$$

Como $\bigcap G_n$ no es denso en $\mathcal{X}$, entonces existe $U \subseteq \mathcal{X}$ conjunto abierto no vacío tal que

$$U \cap \left(\bigcap G_n\right) = \emptyset.$$

Por tanto si $x \in U$, existe $n_x \in \omega$ tal que $x \in H_{n_x} = U \setminus G_{n_x}$, así $U = \bigcup_{x\in U} H_{n_x}$.
Primero véase que

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{n\in\omega} H_n} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{H_n} \cup (\overline{U} \setminus U)$$

lo cual asegura que $\overline{U}$ es unión numerable de conjuntos cerrados. En efecto,
$\supseteq]$ $H_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} H_n \Rightarrow \overline{H_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} H_n} \Rightarrow (\overline{U} \setminus U) \cup \overline{H_n} \subseteq (\overline{U} \setminus U) \cup \overline{\bigcup_{n\in\omega} H_n} = (\overline{U} \setminus U) \cup \overline{U} = \overline{U} = \overline{\bigcup_{n\in\omega} H_n}$.
$\subseteq]$ Sea $y \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} H_n}$, entonces $y \in \bigcup_{n\in\omega} H_n$ ó $y \in \left(\bigcup_{n\in\omega} H_n\right)'$. Si $y \in \bigcup_{n\in\omega} H_n$, $y \in \bigcup_{n\in\omega} \overline{H_n}$. Ahora si $y \in \left(\bigcup_{n\in\omega} H_n\right)'$ entonces para cada conjunto abierto V tal que $y \in V$, $V \setminus \{y\} \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} H_n\right) \neq \emptyset$, y como $\bigcup_{n\in\omega} H_n = U$, $V \setminus \{y\} \cap U \neq \emptyset$.

[2] La prueba para el caso cuando el espacio es $\mathbb{R}$ se encuentra en [17] teorema 53, pág.21.

Por tanto $y \in \overline{U} \setminus U$.
Afirmamos que para cada $x \in \bigcup_{n\in\omega} \overline{H_n}$ ó $x \in \overline{U} \setminus U$, x es un punto de acumulación de sus complementos respecto a $\overline{U}$. En efecto, si $x \in \overline{U} \setminus U$, entonces es claro que x es punto de acumulación de $\overline{U} \setminus (\overline{U} \setminus U)$. Ahora, sea $n \in \omega$. Nótese que si $x \in H_n$, entonces $x \in U$ y por tanto x es un punto de acumulación de $U \setminus H_n$, y de ahí que x es un punto de acumulación de $\overline{U} \setminus \overline{H_n}$. Así si $x \in \overline{H_n}$, entonces $x \in H_n$ ó $x \in \overline{H_n} \setminus H_n$. Si $x \in H_n$, x es un punto de acumulación de $\overline{U} \setminus \overline{H_n}$. Si $x \in \overline{H_n} \setminus H_n$, y sea V un conjunto abierto cualquiera en $\mathcal{X}$ tal que $x \in V$, entonces $V \setminus \{x\} \cap H_n \neq \emptyset$, de ahí que existe $z \neq x \in V \cap H_n$, y por lo visto anteriormente, z es un punto de acumulación de $\overline{U} \setminus \overline{H_n}$ y por tanto, x es un punto de acumulación de $\overline{U} \setminus \overline{H_n}$. En ambos casos x es punto de acumulación de sus complementos respecto a $\overline{U}$, pero esto no es posible por la propiedad de Moore. Por tanto $\bigcap G_n$ es denso en $\mathcal{X}$. $\square$

El reciproco del resultado anterior en general es falso[3].

2.3. Algunas Propiedades y Equivalencias en Espacios de Baire

Esta sección estará dedicada fundamentalmente a presentar algunos resultados equivalentes a ser un espacio de Baire, así como algunas consecuencias directas del teorema de Baire. En base a ello iniciaremos estudiando el resultado generalizado del TCB a familias numerables de conjuntos G_δ-densos.

Teorema 2.26. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire y $(G_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos G_δ-densos en $\mathcal{X}$. Entonces $\bigcap G_n$ es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Como cada G_n es un conjunto G_δ, existe $(G_{n_K})_{k\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos de $\mathcal{X}$ tal que,

$$\bigcap_{k\in\omega} G_{n_k} = G_n$$

para cada n. Así

$$\bigcap_{n\in\omega} G_n = \bigcap_{n\in\omega} \Big(\bigcap_{k\in\omega} G_{n_k} \Big),$$

luego, como $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire, entonces $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es un conjunto denso, más aún $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{X}$. $\square$

[3] Para ello consulte [3]

El resultado anterior garantiza que el conjunto, $\mathbb{Q}$, de los números racionales no es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$, pues de lo contrario, si $\mathbb{Q}$ fuera un conjunto G_δ, entonces dado que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ y $\mathbb{Q}$ son conjuntos G_δ-densos, por el resultado anterior, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ es un conjunto G_δ-denso, lo cual es falso.

El siguiente resultado caracteriza de diversas formas a los espacios de Baire.

Proposición 2.27. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es un espacio de Baire.*
2. *Todo conjunto de la primera categoría en $\mathcal{X}$ tiene interior vacío.*
3. *Todo subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{X}$, es de la segunda categoría en $\mathcal{X}$.*
4. *Todo subconjunto residual en $\mathcal{X}$, es denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
(2)$\Rightarrow$ (1). Sea $(G_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$. Entonces por el Corolario 1.52, $\mathcal{X} \setminus G_n$ es nada denso en $\mathcal{X}$ para cada $n \in \omega$. Por hipótesis

$$\emptyset = i\Big(\bigcup(\mathcal{X} \setminus G_n)\Big) = i\Big(\mathcal{X} \setminus \bigcap G_n\Big),$$

luego por el Corolario 1.52,

$$\mathcal{X} \setminus \Big(\mathcal{X} \setminus \bigcap_{n\in\omega} G_n\Big) = \bigcap_{n\in\omega} G_n$$

es denso en $\mathcal{X}$.

(1)$\Rightarrow$(3) Sea $G \subset \mathcal{X}$ subconjunto abierto no vacío y supóngase que G es de la primera categoría en $\mathcal{X}$, entonces existe $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos nada densos en $\mathcal{X}$ tal que $G = \bigcup_{n\in\omega} G_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{G_n}$. De ahí que

$$\bigcap(\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}) \subseteq \mathcal{X} \setminus G. \ (*)$$

Por otro lado como G_n es nada denso para cada n, por el Corolario 1.52 tenemos que $\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$, así por hipótesis $\bigcap(\mathcal{X} \setminus \overline{G_n})$ es denso en $\mathcal{X}$, en particular por (*), $\mathcal{X} \setminus G$ es denso en $\mathcal{X}$. Pero $\mathcal{X} \setminus G$ es un conjunto cerrado y denso en $\mathcal{X}$, es decir, $\mathcal{X} \setminus G = \mathcal{X}$, por tanto $G = \emptyset$. Lo cual es falso. Por tanto G es de la segunda categoría en $\mathcal{X}$.

(3)$\Rightarrow$(4) Sea $G \subset \mathcal{X}$ subconjunto tal que G es residual en $\mathcal{X}$. Si $G = \emptyset$ es claro. Supóngase que $G \neq \emptyset$, como G es residual, $\mathcal{X} \setminus G$ es de la primera categoría en

$\mathcal{X}$. Obsérvese que $\overline{G} \cup i(\mathcal{X} \setminus G) = \mathcal{X}$. Se afirma que $i(\mathcal{X} \setminus G) = \emptyset$. En efecto, supóngase que $i(\mathcal{X} \setminus G) \neq \emptyset$, entonces $i(\mathcal{X} \setminus G)$ es de la segunda categoría, pero $i(\mathcal{X} \setminus G) \subset \mathcal{X} \setminus G$, lo cual no es posible. Por tanto $i(\mathcal{X} \setminus G) = \emptyset$. Así $\overline{G} = \mathcal{X}$.

(4)⇒(2) Sea $G \subset \mathcal{X}$ un subconjunto de la primera categoría en $\mathcal{X}$. Por (4) tenemos que $\mathcal{X} \setminus G$ es denso en $\mathcal{X}$ y por Teorema 1.55, tenemos que $i(G) = \emptyset$. □

Teorema 2.28. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire y $M \subseteq \mathcal{X}$ subconjunto no vacío. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *M es un conjunto residual en $\mathcal{X}$.*
2. *M contiene un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
(1)⇒(2). Como M es un conjunto residual, entonces $\mathcal{X} \setminus M$ es de la primera categoría, así existe $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos nada densos en $\mathcal{X}$ tal que,

$$\mathcal{X} \setminus M = \bigcup_{n\in\omega} G_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{G_n},$$

tomando los complementos de la contención anterior, entonces

$$G = \bigcap_{n\in\omega} (\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}) \subseteq M.$$

Por Corolario 1.52, $\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$ para cada n. Así G es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$.

(2)⇒(1). Por hipótesis existe $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$ tal que, $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n \subseteq M$ es denso en $\mathcal{X}$. Note que cada G_n es denso en $\mathcal{X}$ para cada $n \in \omega$, lo cual es inmediato por $G \subset G_n$. Por último $\mathcal{X} \setminus M \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus G_n)$ y por Corolario 1.52 cada $\mathcal{X} \setminus G_n$ es nada denso en $\mathcal{X}$. Así $\bigcup_{n\in\omega}(\mathcal{X} \setminus G_n)$ es un conjunto de la primera categoría, por tanto $\mathcal{X} \setminus M$ es un conjunto de la primera categoría. □

Observación 2.29. *En todo espacio de Baire la intersección numerable de conjuntos residuales es residual.*

Se puede afirmar que en la familia de espacios de Baire, como consecuencia de la observación anterior, los conjuntos G_δ-densos tienen una propiedad más fuerte en términos de densidad que los conjuntos que son unicamente densos en dicha familia. Para ello basta notar que la intersección finita de conjuntos densos puede ser vacía, pero no así de conjuntos residuales ya que una intersección numerable de conjuntos residuales no sólo se intersecan, sino que además tal intersección es densa. Por lo anterior a los conjuntos residuales también suelen denominarles conjuntos típicos. Un resultado relevante es el siguiente.

Lema 2.30. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire y $(O_n)_{n\in\omega} \subset \mathcal{X}$ sucesión de conjuntos abiertos tal que, $\bigcup_{n\in\omega} O_n$ es denso en $\mathcal{X}$. Para todo $G \subset \mathcal{X}$ subconjunto tal que $G \cap O_n$ es residual en O_n para cada n, entonces G es residual en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Constrúyase recursivamente la sucesión $(W_n)_{n\in\omega}$ donde

$$W_0 = O_0 \quad \wedge \quad W_{n+1} = O_{n+1} \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{n} \overline{O_j}\Big).$$

Note que W_n es abierto para cada $n \in \omega$ y $W_n \cap W_m = \emptyset$ para cualesquiera n, m distintos. Sea $W = \bigcup_{n\in\omega} W_n$, entonces afirmamos que W es denso en $\mathcal{X}$. En efecto, sea U un conjunto abierto no vacío y sea $n_0 = min\{k \in \omega : U \cap O_k \neq \emptyset\}$. Entonces $U \cap \Big(\bigcup_{m<n_0} O_m\Big) = \emptyset$, de lo cual se sigue que $U \cap W_{n_0} \neq \emptyset$. Por tanto W es denso en $\mathcal{X}$. Por otro lado, sea G subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$ tal que $G \cap O_n$ es residual en O_n para cada $n \in \omega$, entonces $G \cap O_n$ contiene un conjunto G_δ-denso en O_n. Así, existe $(U_{n_j})_{j\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos en O_n tal que

$$U_{n_j} \subseteq O_n \subseteq \overline{U_{n_j}} \quad \wedge \quad \bigcap_{j\in\omega} U_{n_j} \subseteq G \cap O_n \ ; \quad n \in \omega.$$

Nótese que cada $U_{n_j} \cap W_n$ es un conjunto abierto y denso en W_n, de las contenciones anteriores se tiene

$$\bigcap_{j\in\omega} (U_{n_j} \cap W_n) \subset G \cap W_n, \ \text{ para cada } n \in \omega,$$

luego para cada $j \in \omega$ se define $G_j = \bigcup_{n\in\omega}(U_{n_j} \cap W_n)$, los cuales son conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$. Más aún, como $W_n \cap W_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcap_{j\in\omega} G_j &= \textstyle\bigcap_{j\in\omega} \Big(\bigcup_{n\in\omega}(U_{n_j} \cap W_n)\Big) \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\omega} \Big(W_n \cap \big(\bigcap_{j\in\omega} U_{n_j}\big)\Big) \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\omega} \Big(\bigcap_{j\in\omega}(U_{n_j} \cap W_n)\Big) \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{n\in\omega}(G \cap W_n) \subseteq G, \end{aligned}$$

por Teorema 2.28, G es residual en $\mathcal{X}$. □

Teorema 2.31. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico Hausdorff y $G \subseteq \mathcal{X}$ subconjunto denso. Si $(G, \tau\restriction_G)$ es de Baire, entonces $\mathcal{X}$ es de Baire.*

Demostración.
Sea $(G_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$, entonces para cada $n \in \omega$, $G_n \cap G$ es un conjunto denso y abierto en G. Por hipótesis

$$\bigcap_{n\in\omega}(G_n \cap G) = \Big(\bigcap_{n\in\omega} G_n\Big) \cap G$$

es denso en G. Afirmamos que $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es denso en $\mathcal{X}$. En efecto, sea U un conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$, como G es denso en $\mathcal{X}$, entonces $G \cap U$ es un conjunto abierto no vacío en G, pero

$$U \cap \Big(\bigcap_{n\in\omega} G_n\Big) \supseteq \Big(\Big(\bigcap_{n\in\omega} G_n\Big) \cap G\Big) \cap (G \cap U) \neq \emptyset$$

pues $\bigcap_{n\in\omega}(G_n \cap G)$ es denso en G. Así $U \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} G_n\right) \neq \emptyset$ y por tanto $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ es denso en $\mathcal{X}$. $\square$

Observación 2.32. *La completación de todo espacio métrico de Baire es de Baire.*

A partir de lo anterior una pregunta que se presenta de forma natural es la siguiente ¿bajo qué condiciones todo subconjunto denso en un espacio de Baire es de Baire? El siguiente resultado da condiciones suficientes para tal pregunta.

Teorema 2.33. *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio de Baire. Si $G \subset \mathcal{X}$ es un conjunto G_δ-denso, entonces $(G, \tau\restriction_G)$ es un espacio de Baire.*

Demostración.
Sea $(O_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en G. Para cada $n \in \omega$, existe U_n subconjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ tal que, $O_n = G \cap U_n$. Por hipótesis existe, $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X}$, tal que $G = \bigcap G_n$. Nótese que cada U_n es denso en G, más aún es denso en $\mathcal{X}$ ya que G es denso en $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es de Baire, $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es densa en $\mathcal{X}$. Por último, como $(\bigcap U_n) \cap G = \bigcap(U_n \cap G) = \bigcap O_n$, entonces $\bigcap O_n$ es denso en G. $\square$

Corolario 2.34. *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio hereditariamente de Baire. Si G es un conjunto G_δ de $\mathcal{X}$, entonces $(G, \tau\restriction_G)$ es de Baire.*

Demostración.
Si G es un conjunto G_δ de $\mathcal{X}$, entonces G es un conjunto G_δ en $\overline{G}$, pero por hipótesis $\overline{G}$ es un espacio de Baire, es decir G es un conjunto G_δ-denso en $\overline{G}$. Así, por el resultado anterior, $(G, \tau\restriction_G)$ es un espacio de Baire. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 2.27, los conjuntos de la primera categoría en los espacios de Baire poseen interior vacío, aunque no necesariamente tienen que ser nada densos, es decir, unión numerable de conjuntos nada densos no necesariamente es nada denso. Así, se pueden formular las preguntas siguientes ¿bajo qué condiciones un conjunto de la primera categoría en un espacio de Baire es un conjunto G_δ en dicho espacio?¿cuál es el papel de los conjuntos de la primera categoría que pueden ser representados como conjuntos G_δ en un espacio de Baire? Una primera respuesta a dichas preguntas fue dada por Kuratowski para espacios métricos completos, luego tal resultado fue generalizado por Dragan Jankovic, Maximillian Ganster e Ivan Reilly como sigue.

Teorema 2.35 (Kuratowski). *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes proposiciones son equivalentes,*

1. *$\mathcal{X}$ es un espacio de Baire.*
2. *Todo conjunto G_δ de la primera categoría en $\mathcal{X}$ es nada denso.*

Demostración.
(1)⇒(2). Sea $A \subset \mathcal{X}$ subconjunto G_δ y de la primera categoría en $\mathcal{X}$. Como A es un conjunto G_δ entonces $\mathcal{X} \setminus A$ es un conjunto F_σ, así $\overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus A) = \overline{A} \setminus A$ también es un conjunto F_σ. Sea $(F_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos cerrados en $\mathcal{X}$ tal que $\overline{A} \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Afirmamos que $Fr(A)$ es nada denso. En efecto, como $Fr(A) = \overline{A} \setminus i(A)$, se observa que $Fr(A)$ es nada denso. Como $\overline{A} \setminus A \subset Fr(A)$, entonces $i(\overline{A} \setminus A) = \emptyset$ y, dado que $\bigcup_{n\in\omega} i(F_n) \subseteq i\Big(\bigcup_{n\in\omega} F_n\Big)$, se concluye que $i(F_n) = \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Por tanto $\overline{A} \setminus A$ es de la primera categoría. Así, $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \setminus A)$ es de la primera categoría. Finalmente, como $\mathcal{X}$ es de Baire entonces $i(\overline{A}) = \emptyset$, por tanto A es nada denso.

(2)⇒(1). Supóngase que $\mathcal{X}$ no es espacio de Baire. Por la Proposición 2.27 existe U abierto no vacío de la primera categoría cuyo interior es no vacío. Al ser U abierto, entonces es un conjunto G_δ, de ahí que $i(\overline{U}) = \emptyset$, lo cual es falso pues $\emptyset \neq i(U) \subset i(\overline{U})$. Por tanto $\mathcal{X}$ es de Baire. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.35 es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.36. *El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, no puede ser un conjunto G_δ.*

Teorema 2.37. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio de Baire y $\{F_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos cerrados en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Entonces $H = \bigcup_{n\in\omega} i(F_n)$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Claramente H es un conjunto abierto. Para cada $n \in \omega$, defínanse $H_n = i(F_n)$ y $G_n = H_n \cup (\mathcal{X} \setminus F_n)$. Afirmamos que cada G_n es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$. Claramente G_n es un conjunto abierto. Ahora, sea U un conjunto abierto no vacío de $\mathcal{X}$ y fije $n \in \omega$; entonces

$$U \subset F_n \quad \vee \quad U \cap \mathcal{X} \setminus F_n \neq \emptyset.$$

Si $U \subset F_n$, entonces $U \subset H_n \subset G_n$, con lo cual $U \cap G_n \neq \emptyset$. Si $U \cap \mathcal{X} \setminus F_n \neq \emptyset$, entonces $U \cap G_n \neq \emptyset$. Por tanto G_n es denso en $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es de Baire, $E = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ es denso en $\mathcal{X}$. Ahora véase que $E \subset H$. En efecto, sea $x \in E \subset \mathcal{X} = \bigcup F_n$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in F_{n_0}$, pero $x \in G_{n_0}$, de ahí que $x \in H_{n_0}$(pues $x \notin \mathcal{X} \setminus F_{n_0}$) y como $H_{n_0} = i(F_{n_0}) \subset H$, se tiene que $x \in H$. Por tanto $E \subset H$, de lo cual se sigue que H es un conjunto denso en $\mathcal{X}$. □

Corolario 2.38. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire y $\{F_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos cerrados en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que F_{n_0} no es nada denso.*

Demostración.
Si $i(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \omega$, entonces por el Teorema 2.37 se tendría que $\emptyset = \bigcup_{n\in\omega} i(F_n)$ es denso en $\mathcal{X}$, lo cual es falso. Por tanto $i(F_{n_o}) \neq \emptyset$ para algún $n_0 \in \omega$. □

Teorema 2.39. *Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio topológico Hausdorff σ-compacto. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es de Baire.*

2. *Existe $K \subset \mathcal{X}$ subconjunto denso y localmente compacto.*

Demostración.
(1)⇒(2). Sea $(K_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos compactos en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\omega} K_n$. Como K_n es un conjunto cerrado, pues cada K_n es compacto, y por el Teorema 2.37, $G = \bigcup_{n\in\omega} i(K_n)$ es denso en $\mathcal{X}$. Afirmamos que G es localmente compacto en $\mathcal{X}$. En efecto, sea $x \in G$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in i(K_{n_0})$, además nótese que $\overline{i(K_{n_0})} \subseteq \overline{K_{n_0}} = K_{n_0}$ y como K_{n_0} es compacto entonces $\overline{i(K_{n_0})}$ es compacto. Por tanto G es localmente compacto.

(2)⇒(1). Sea $G \subseteq \mathcal{X}$ denso y localmente compacto, entonces G es de Baire por la Observación 2.18 y, por el Teorema 2.31 se concluye que $\mathcal{X}$ es de Baire. □

Definición 2.40. *Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función, donde $\mathcal{X}$ es un espacio topológico Hausdorff. Diremos que f es inferiormente semicontinua si para cada $k \in \mathbb{R}$, se tiene $F_k = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq k\}$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{X}$.*

Se puede verificar que toda función continua es trivialmente inferiormente semicontinua[4].

Teorema 2.41. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio de Baire y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua. Entonces para todo U conjunto abierto no vacío, existe V abierto no vacío tal que $V \subseteq U$ y $f[V]$ está acotada superiormente.*

Demostración.
Sea U conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$, para cada $n \in \omega$ defínase $F_n = \{x \in U : f(x) \leq n\}$. Note que $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y F_n es un conjunto cerrado en U. Como $\mathcal{X}$ es de Baire y U es conjunto abierto, U es de Baire. Por Corolario 2.38 existe $n_0 \in \omega$ tal que F_{n_0} no es nada denso, es decir, $i(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Tomando $V = i(F_{n_0})$ se concluye la prueba. □

Teorema 2.42. *Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio de Baire y $(G_n)_{n\in\omega}$ sucesión de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$. Si $\bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}$ es un conjunto nada denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Para cada $n \in \omega$ definamos $H_n = G_n \bigcup (\mathcal{X} \setminus \overline{G_n})$. Veamos que cada H_n es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$. Es claro que H_n es abierto, luego como

$$\overline{H_n} = \overline{G_n} \cup \overline{\left(\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}\right)} \supseteq \overline{G_n} \cup (\mathcal{X} \setminus \overline{G_n}) = \mathcal{X}$$

se garantiza la densidad de cada H_n, además por ser $\mathcal{X}$ de Baire se tiene que $\bigcap H_n$ es densa en $\mathcal{X}$. Ahora véase que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}$ es nada denso en $\mathcal{X}$. Supóngase lo contrario, entonces $i(\bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}) \neq \emptyset$, luego existe U conjunto abierto no vacío tal que $U \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}$, pero también ocurre que $U \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} H_n\right) \neq \emptyset$, por la densidad de $\bigcap_{n\in\omega} H_n$ en $\mathcal{X}$. Así, dado $x \in U \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} H_n\right)$. Como $\bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \notin G_{n_0}$, pero $x \in H_{n_0}$, de ahí que $x \in \mathcal{X} \setminus \overline{G_{n_0}}$, lo cual no es posible pues $x \in U \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}$. Por tanto $\bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n}$ es nada denso en $\mathcal{X}$. □

Recordemos que dados un espacio topológico arbitrario $\mathcal{X}$ y $x \in \mathcal{X}$, se dice que x es un **punto aislado** de $\mathcal{X}$, si $\{x\}$ es un conjunto abierto de $\mathcal{X}$. Tal definición brinda las herramientas suficientes para la prueba del siguiente resultado.

[4] El reciproco en general es falso.

Teorema 2.43. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire sin puntos aislados y G subconjunto de $\mathcal{X}$. Si G es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$, entonces G es no numerable. En particular $\mathcal{X}$ es no numerable.*

Demostración.
Supóngase que G es un conjunto numerable, digamos $G = \{x_n : n \in \omega\}$, entonces $G = \bigcup_{n\in\omega}\{x_n\}$ donde cada $\{x_n\}$ es un conjunto cerrado y nada denso en $\mathcal{X}$, pues el espacio no posee puntos aislados. Así G es de la primera categoría, luego por el Teorema 2.35 se tiene que G es un conjunto nada denso, lo cual es falso. Por tanto G es no numerable. □

Algunas consecuencias inmediatas del Teorema 2.43 son las siguientes.

- Si $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces ningún subconjunto denso numerable de $\mathcal{X}$ se puede escribir como un conjunto G_δ. Lo anterior muestra otra forma de verificar que el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, nunca es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$.

- Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire y numerable, entonces $\mathcal{X}$ posee puntos aislados. Más aún, $\mathcal{X}$ contiene una infinidad de puntos aislados. En efecto, primero note que el conjunto de puntos aislados no es vacío, lo cual se sigue por Teorema 2.43. Verifiquemos que tal conjunto es infinito. Supóngase lo contrario, defínase $A = \{x_1 \dots x_n\}$ como el conjunto de puntos aislados para algún $n \in \omega$ y sea $G = \mathcal{X} \setminus \{x_1 \dots x_n\}$. Note que G es abierto (infinito y numerable, más aún, G es de Baire con la topología relativa) y no vacío. Como $\mathcal{X}$ es de Baire, G es de Baire con la topología relativa y de ahí que es infinito numerable. Finalmente, por el Teorema 2.43 G contiene al menos un punto aislado, que también lo es para $\mathcal{X}$ y no es ninguno de los $x_i'^s$, lo cual contradice la hipótesis. Así el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, como subconjunto de $\mathbb{R}$, no puede ser nunca un espacio de Baire, pues dicho conjunto es infinito numerable sin puntos aislados.

- Dado que $(\mathbb{R}, |\ |)$ es un espacio métrico completo sin puntos aislados, por el Teorema 2.43 $\mathbb{R}$ es no numerable.

- Sea E subconjunto no vacío de algún espacio topológico Hausdorff $\mathcal{X}$, se dice que E es perfecto si E es cerrado y no contiene puntos aislados. Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico completo o $(\mathcal{X}, \tau)$ es un espacio hereditariamente de Baire, entonces todo E subconjunto perfecto de $\mathcal{X}$ es no numerable. En efecto, se tiene que E es un espacio de Baire sin puntos aislados y el resultado se sigue del Teorema 2.43. Tal resultado exhibe otra prueba de que el conjunto ternario de Cantor Γ es no numerable, pues Γ es subconjunto perfecto de $[0, 1]$ el cual es un espacio métrico completo.

Teorema 2.44 (Hurewicz). *Un espacio metrizable $\mathcal{X}$ es hereditariamente de Baire si y sólo si todo subconjunto perfecto no vacío de $\mathcal{X}$ es no numerable.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea F subconjunto no vacío de $\mathcal{X}$ tal que F es perfecto. Como F es perfecto entonces F es cerrado sin puntos aislados y, al ser $\mathcal{X}$ un espacio Hereditariamente de Baire, se tiene que F es de Baire sin puntos aislados.
Sea el conjunto $\{A_i : A_i$ abierto en F y A_i es denso en F para cada $i \in I\}$ donde $|I| \leq \aleph_0$, de lo anterior se tiene que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es denso en F, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es no numerable por el Teorema 2.43. Por lo tanto $\mathcal{X}$ es no numerable.

$\Leftarrow$] La prueba puede consultarse en [17]. □

Otro resultado para los conjuntos G_δ es el siguiente.

Lema 2.45. *Sean $(\mathcal{X}, d)$ y $(\mathcal{Y}, d')$ espacios métricos completos y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función continua y abierta. Si $D \subseteq \mathcal{Y}$ es un conjunto G_δ-denso, entonces $f^{-1}[D]$ es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Sea $V \subset \mathcal{Y}$ un subconjunto abierto y denso. Veamos que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$. Es claro que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto. Para la densidad, considere U un conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ y supóngase que $U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, entonces $f(U) \cap V = \emptyset$ lo cual no es posible por la densidad de V y porque f es abierta. Por tanto $f^{-1}(V)$ es denso en $\mathcal{X}$. Ahora si D es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{Y}$, entonces $D = \bigcap_{n\in\omega} V_n$ donde cada V_n es denso y abierto en $\mathcal{Y}$, de lo cual se tiene que

$$f^{-1}(D) = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}(V_n)$$

es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{X}$. □

2.4. Producto Topológico en Espacios de Baire

En la sección anterior se verificó que la propiedad de Baire se preserva bajo subconjunto abiertos, conjuntos G_δ-densos e imágenes continuas bajo funciones abiertas. Sin embargo no sucede lo mismo para el producto topológico, pues se puede verificar que incluso el producto de dos espacios de Baire no necesariamente es un espacio de Baire. Tal problema ha sido de interés para diversos autores entre los cuales podemos citar J. Oxtoby, W. Fleissner, K. Kunen, J. Aarts, D. Lutzer, etc. Para resolver dicho problema habremos de considerar ciertas restricciones en el espacio en cuestión, tales condiciones permitirán preservar la propiedad de Baire en el producto topológico.

Definición 2.46. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico y γ una familia de conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$. Si para cada abierto no vacío U de $\mathcal{X}$ existe $V \in \gamma$ tal que $V \subset U$, entonces diremos que γ es una π-**base** de $\mathcal{X}$.*

Definición 2.47. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio cualquiera, se define el π-**peso** de $\mathcal{X}$ como:*

$$\pi w(\mathcal{X}) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una } \pi - \text{base } \mathcal{X}\} + \aleph_0.$$

Sea $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos y $U \subseteq \prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ un abierto canónico, entonces se define el **soporte** de U, $sop(U)$, como $\{\alpha \in A : \Pi_\alpha(U) \neq \mathcal{X}_\alpha\}$.

Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios topológicos cualesquiera. Si $G \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ y $x \in \mathcal{X}$, entonces $G(x) = \{y \in \mathcal{Y} : (x, y) \in G\}$ es la x-sección de G. Si $\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de espacios topológicos y $n, m \in \omega$ con $n < m$ entonces:

$$X^{(n)} = \prod_{k=0}^{n} \mathcal{X}_k, \qquad X^{(n,m)} = \prod_{k=n+1}^{m} \mathcal{X}_k, \qquad Y^n = \prod_{k>n+1} \mathcal{X}_k.$$

Para el propósito de esta sección serán necesarios los siguientes resultados.

Lema 2.48. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Baire y $\mathcal{Y}$ un espacio con π-peso numerable. Si $\{G_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos abiertos densos en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ y U es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$, entonces existe $z \in U$ tal que $G_n(z)$ es abierto y denso en $\mathcal{Y}$ para toda n.*

Demostración.
Sea $\{U_m : m \in \omega\}$ una π-base numerable de $\mathcal{Y}$ de conjuntos abiertos no vacíos en $\mathcal{Y}$. Nótese que $G_{n,m} = \Pi_{\mathcal{X}}(G_n \cap (\mathcal{X} \times U_m))$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{X}$ para cada $n, m \in \omega$. Como $\mathcal{X}$ es de Baire, existe $z \in \bigcap\{G_{n,m} : n, m \in \omega\} \cap U$. Véase que para cada $n \in \omega$ se tiene que $G_n(z)$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{Y}$. Fijemos $n \in \omega$, es claro que $G_n(z)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{Y}$. Luego para la densidad, sea V un conjunto abierto en $\mathcal{Y}$. Existe $m_0 \in \omega$ tal que $U_{m_0} \subset V$, como $z \in \bigcap\{G_{n,m} : n, m \in \omega\}$, en particular $z \in G_{n,m_0}$, así existe $y \in \mathcal{Y}$ tal que $(z, y) \in G_n \cap (\mathcal{X} \times U_{m_0})$ de donde $y \in U_{m_0} \subset V$, por tanto $G_n(z) \cap V \neq \emptyset$. □

Proposición 2.49. *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espacios de Baire. Si $\pi w(\mathcal{Y}) = \aleph_0$, entonces $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ también es un espacio de Baire.*

Demostración.
Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ ua familia de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ y $W = U \times V$ un abierto canónico en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Por el lema anterior existe $z \in U$ tal que $A_n(z)$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{Y}$ para cada $n \in \omega$. Entonces $\bigcap\{A_n(z) : n \in \omega\} \cap V \neq \emptyset$, de ahí que existe $y \in \bigcap\{A_n(z) : n \in \omega\} \cap V$, con lo cual $w = (z, y) \in \bigcap\{A_n : n \in \omega\} \cap W$. □

Observación 2.50. *El producto finito de espacios de Baire es de Baire, si los espacios tienen π-peso numerable*[5].

Para un caso más general se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.51. *Sea $\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ familia de espacios de Baire. Si $\pi w(\mathcal{X}_n) = \aleph_0$ para cada n, entonces $X = \prod\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ es un espacio de Baire.*

Demostración.
Sea $\{G_n : n \in \omega\}$ una sucesión decreciente de conjuntos abiertos-densos en X y $U \subset X$ un abierto canónico. Note que $X^{(n)}$ es de Baire y $\pi w(Y^{(n)}) = \aleph_0$ para cada $n \in \omega$. Sea $n_0 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $U \cap G_0$ contiene un abierto básico $U_0 \times Y^{(n_0)}$, donde U_0 es un conjunto abierto no vacío en $X^{(n_0)}$. Por el lema anterior aplicado a $X^{(n_0)} \times Y^{(n_0)}$ existe un punto $x_0 \in U_0$ tal que $G_n(x_0)$ es un conjunto abierto y denso en $Y^{(n_0)}$ para cada $n \in \omega$. Además:

$$\{x_0\} \times Y^{(n_0)} \subseteq U_0 \times Y^{(n_0)} \subseteq U \cap G_0.$$

Haremos inducción sobre k, es decir, supóngase que se han definido números naturales $0 < n_0 < \ldots < n_k$ y puntos $x_0, \ldots, x_k$ con $x_0 \in X^{(n_0)}$ y $x_i \in X^{(n_{i-1}, n_i)}$ para $i = 1, \ldots, K$ tales que:

(a) $\{(x_0, \ldots, x_k)\} \times Y^{(n_k)} \subseteq U \cap G_k$;

(b) $G_n(x_0, \ldots, x_k)$ es abierto y denso en $Y^{(n_k)}$ para cada $n \in \omega$.

Note que para algún $n_{k+1} > n_k$, el conjunto $G_{k+1}(x_0, \ldots, x_k)$ contiene un conjunto de la forma $U_{k+1} \times Y^{(n_{k+1})}$, donde U_{k+1} es un abierto no vacío en $X^{(n_k, n_{k+1})}$. Por el Lema 2.48 aplicado a $X^{(n_k, n_{k+1})} \times Y^{(n_{k+1})}$, existe un punto $x_{k+1} \in U_{k+1}$ tal que $G_n(x_0, \ldots, x_{k+1}) = G_n(x_0, \ldots, x_k)(x_{k+1})$ es denso en $Y^{(n_{k+1})}$ para cada $n \in \omega$. Así, reemplazando k por $k+1$ se tiene la condición (b). Además, $\{x_{k+1}\} \times Y^{(n_{k+1})} \subseteq U_{k+1} \times Y^{(n_{k+1})} \subseteq G_{k+1}(x_0, \ldots, x_k)$, de lo cual $\{(x_0, \ldots, x_{k+1})\} \times Y^{(n_{k+1})} \subseteq G_{k+1}$, por tanto se tiene (a) reemplazando k por $k+1$. Finalmente de (a) se tiene que $(x_n) \in \bigcap\{G_n : n \in \omega\} \cap U$. Por tanto X es de Baire. □

El resultado anterior aún puede generalizarse para productos arbitrarios de espacios con π-peso numerable.

Definición 2.52. *Si $(\mathcal{X}, \tau)$ es un espacio topológico, la **celularidad** de $\mathcal{X}$ se define como, $c(\mathcal{X}) := sup\{|U| : U \subset \tau \ \wedge \ \forall\, u, v \in U : u \cap v = \emptyset\} + \aleph_0$.*[6]

[5] La prueba se hace por inducción.

[6] Una colección $\mathfrak{B}$ de subconjuntos no vacíos de X se le llama celular si para cuales quiera par de elementos en la colección son ajenos.

Note que la definición de celularidad está bien definida, pues la cardinalidad de un conjunto de abiertos no vacíos ajenos dos a dos está acotada por la cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Además, por propiedades de cardinales este supremo es en realidad un máximo. La razón de incluir $\aleph_0$ a la definición es para no preocuparse de la sutileza de los cardinales finitos.

Proposición 2.53. *Sea $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos tales que $\pi w(\mathcal{X}_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha \in A$. Si $X = \prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ entonces $c(X) \leq \kappa$.*

Demostración.
Note que es suficiente probar el resultado para κ regular. Si A es finito, entonces es claro que $c(X) \leq \pi w(X) \leq \kappa$ (por definición). Si A es infinito, supóngase lo contrario, es decir, existe $\gamma = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$ familia celular de abiertos no vacíos tal que $|\gamma| > \kappa$. También suponga que $|\gamma| = \kappa^+$ y que los elementos de γ son abiertos canónicos en X. Tome la familia $\mathfrak{A} = \{sop(U) : U \in \gamma\} \subset [A]^{<\omega}$. Como κ^+ es regular, por el Lema 1.86, existe una familia $\gamma' \subset \gamma$ con $|\gamma'| = |\gamma| = \kappa^+$ y un conjunto finito $A_0 \subseteq A$ tal que $sop(U) \cap sop(V) = A_0$ para cada $U, V \in \gamma'$. Como $c(\prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A_0\}) \leq \kappa$ entonces la familia $\{\Pi_{A_0}(U) : U \in \gamma'\}$ no es ajena por pares. Entonces, existen $U, V \in \gamma'$ tal que $\Pi_{A_0}(U) \cap \Pi_{A_0}(V) \neq \emptyset$. Con lo cual $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es falso. Por tanto $c(X) \leq \kappa$. □

Proposición 2.54. *Sea $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Si $X = \prod_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ producto topológico tal que X es un conjunto de primera categoría y $c(X) \leq \kappa$, entonces existe $B \subset A$ tal que $|B| \leq \kappa$ y $\prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in B\}$ es un conjunto de primera categoría.*

Demostración.
Sea $\{G_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en X tales que $\bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$. Para cada $n \in \omega$, sea γ_n una familia maximal de abiertos canónicos disjuntos contenidos en G_n. Note que para cada $n \in \omega$, $\bigcup \gamma_n$ es abierta y densa en X, de lo contrario existiría un abierto, U que no interseca a los γ_n, pero los G_n son densos, por tanto $\emptyset \neq U \cap G_n \subseteq G_n$ el cual sería un conjunto abierto y ajeno a los elementos de γ_n, lo cual contradice la maximalidad de la familia γ_n. Ahora, si $B = \{sop(U) : U \in \gamma_n, n \in \omega\}$, entonces $\{\Pi_B(\bigcup \gamma_n) : n \in \omega\}$ es una familia de abiertos-densos en $\prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in B\}$ y de intersección vacía. □

Como consecuencia inmediata de los dos resultados previos se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.55. *Sea $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos con $\pi w(\mathcal{X}_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha \in A$. Si $\prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ es un conjunto de la primera categoría, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $|B| \leq \kappa$ y $\prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in B\}$ es un conjunto de la primera categoría.*

Por la Proposición 2.51 y el Corolario 2.55 tenemos el siguiente resultado, el cual resolverá el problema planteado en esta sección.

Teorema 2.56. *Si* $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ *es una familia de espacios de Baire con* $\pi w(\mathcal{X}_\alpha) = \aleph_0$ *para cada* $\alpha \in A$*, entonces* $X = \prod\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in A\}$ *es de Baire.*

Recientemente se ha probado que el producto de una familia de espacios métricos hereditariamente de Baire es de Baire [8]. Más aún, el producto de un espacio métrico de Baire con un espacio métrico hereditariamente de Baire es un espacio de Baire [28].

La razón por la cual se requieren condiciones adicionales en los resultados anteriores es por que ser un espacio de Baire no es una propiedad productiva. Incluso el producto de dos espacios de Baire no necesariamente es un espacio de Baire. El primer ejemplo fue presentado por Oxtoby quien en [27] mostró la existencia de ello exhibiendo que la Hipótesis del continuo implica la existencia de tal espacio. En este trabajo presentaremos otro ejemplo obtenido por W. Fleissner y K. Kunen [13] donde no se requieren axiomas adicionales.

Definición 2.57. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Baire, si existe* $\mathcal{Y}$ *espacio de Baire tal que* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *no es de Baire entonces diremos que* $\mathcal{X}$ *es* ***apenas Baire****.*

La cardinalidad de 2^ω es $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^+$ será el cardinal sucesor de $\mathcal{C}$. Además si se tiene $\{\mathcal{X}_i : i \in \omega\}$ familia de espacios topológicos entonces $X = \prod_{i\in\omega} \mathcal{X}_i$ será el producto usual (Tychonoff). Se usará la base estándar de cilindros abiertos con soporte finito.

Sea $FS_\alpha = \bigcup\{\alpha^n : n \in \omega\}$ el conjunto de sucesiones finitas en α de longitud n. Llamaremos J_κ a κ^ω y se dará una métrica d en J_κ, tal que $d(f,g) = \frac{1}{2^n}$ con n el menor natural tal que $f(n) \neq g(n)$.

Si $\sigma \in FS_\kappa$, y se está trabajando con J_κ, entonces se define el conjunto de todos los elementos en J_κ tales que contienen a σ como B_σ, es decir, $B_\sigma = \{f \in J_\kappa : \sigma \subset f\}$. Se puede verificar que $\{B_\sigma : \sigma \in FS_\kappa\}$ es una base para el producto topológico de ω copias del espacio discreto de cardinalidad κ, J_κ. Si D es un conjunto abierto y denso de J_κ, entonces $D \cap B_\sigma$ es un abierto no vacío, de ahí que existe $B_{\sigma'} \subset D \cap B_\sigma$ abierto canónico no vacío. Así, se puede definir la siguiente función $\widetilde{D} : FS_\kappa \to FS_\kappa$ tal que $B_{\widetilde{D}(\sigma)} \subset B_\sigma \cap D$.

Sea κ un cardinal. Si $cof(\kappa) > \omega$, se puede definir un mapeo $^* : J_\kappa \to \kappa$. Así, f^* será el menor ordinal más grande que $f(n)$ para cualquier $n \in \omega$, es decir, $f^* = \sup\{f(n) : n \in \omega\}$. Si $A \subset \kappa$, entonces $A^* = \{f \in J_\kappa : f^* \in A\}$.

Definición 2.58. *Sea* $C \subset \kappa$*,* C *es un* ***cubo*** *en* κ *si* C *es un conjunto cerrado y no acotado en* κ*.*

Definición 2.59. *Sean $A \subset \kappa$. A es* ***estacionario*** *si $C \cap A \neq \emptyset$ para cada C cubo en κ.*

Defínase el conjunto de ordinales en κ con cofinalidad ω como sigue: $C_\omega\kappa \subset \kappa$ tal que $cof(\gamma) = \omega$ para cada $\gamma < \kappa$, es decir, $C_\omega\kappa := \{\gamma < \kappa \mid cof(\gamma) = \omega\}$.

Proposición 2.60. *Si κ es no numerable y regular, entonces $C_\omega\kappa$ es estacionario.*

Proposición 2.61. *Si κ es regular no numerable, entonces la intersección de menos que κ cubos en κ es un cubo en κ.*

Demostración.
Sea $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de cubos en κ tal que $|A| < cof(\kappa)$. Sea $C = \bigcap\{C_\alpha : \alpha \in A\}$, es claro que C es un conjunto cerrado. Se afirma que C es no acotado en κ. En efecto, para cada $\gamma \in \kappa$ considere $f_\alpha(\gamma)$ como el menor elemento de C_α mayor que γ, así se obtiene $f_\alpha : \kappa \to \kappa$ función. Defínase $g(\gamma) = \sup\{f_\alpha(\gamma) : \alpha \in A\}$, entonces $\gamma < g(\gamma) < \kappa$ pues $|A| < cof(\kappa)$.

Sean $g^0(\gamma) = \gamma$, $g^{n+1}(\gamma) = g(g^n(\gamma))$ y $g^\omega(\gamma) = \sup\{g^n(\gamma) : n \in \omega\}$. Como $|A| < cof(\kappa)$ entonces $\gamma < g^\omega(\gamma) < \kappa$. Para cada α se tiene que $C_\alpha \cap g^\omega(\gamma)$ es cofinal en $g^\omega(\gamma)$ y así $g^\omega(\gamma) \in C_\alpha$. De ahí que $g^\omega(\gamma) \in \bigcap\{C_\alpha : \alpha \in A\}$. Por tanto $g^\omega(\gamma) \in C$ tal que $g^\omega(\gamma) > \gamma$, para cada $\gamma \in \kappa$. □

Proposición 2.62. *Si $\kappa > \omega$ es un cardinal regular, entonces cualquier subconjunto estacionario de κ puede ser dividido en κ subconjuntos disjuntos estacionarios de κ [Teorema pág. 433 en [3]].*

Definición 2.63. *Sea $\widetilde{D} : FS_\kappa \to FS_\kappa$, diremos que γ es un* ***punto fijo*** *de $\widetilde{D}$ si $\widetilde{D}[FS_\gamma] \subset FS_\gamma$.*

Proposición 2.64. *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si D es un subconjunto abierto y denso en J_κ y $\widetilde{D} : FS_\kappa \to FS_\kappa$ es la función inducida por D, entonces el conjunto de los puntos fijos de $\widetilde{D}$ son un cubo en κ.*

Demostración.
Defínase la función $f_n : \kappa^n \to \kappa$ por $f_n(\sigma) = \text{máx}\{\widetilde{D}(\sigma)(m) : m \in dom\widetilde{D}(\sigma)\}$ para cada $n \in \omega \setminus \emptyset$. Note que $\mathfrak{F} = \{f_n : n \in \omega\}$ es una familia de funciones finitarias sobre κ. Por la Proposición 1.90 se tiene $C = \{\gamma < \kappa : \gamma \text{ es cerrado bajo } \mathfrak{F}\}$ es cerrado y no acotado en κ. Por último obsérvese que el conjunto de puntos fijos de $\widetilde{D}$ es C. □

Antes de dar el ejemplo probemos lo siguiente.

Proposición 2.65. *Sean κ un cardinal regular no numerable ($\kappa > \omega$) y $A \subset C_\omega\kappa$ subconjunto estacionario, entonces el subespacio $A^* \subset J_\kappa$ es de Baire.*

Demostración.
Sean $\mathfrak{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$ una familia numerable de abiertos densos en A^* y $V = B_\sigma \cap A^*$ un abierto básico no vacío en A^*. Como A^* es denso en J_k, entonces para cada $n \in \omega \setminus \emptyset$ se puede tomar un conjunto abierto y denso A_n de J_κ tal que $D_n = A_n \cap A^*$. Cada D_n induce una función $\widetilde{D_n} : FS_\kappa \to FS_\kappa$. Considere C_n como el conjunto de puntos fijos de D_n, por la Proposición 2.64 cada C_n es un cubo en κ. Luego, se puede verificar que $C = \bigcap\{C_n \mid n \in \omega\} \cap C_\kappa\omega$ es cerrado y no acotado en $C_\kappa\omega$. Así elíjase $\gamma \in C \cap A$ tal que $\gamma > \sup\{\sigma(i) : i \in dom\sigma\}$, entonces $\sigma \in FS_\gamma$. Como $cof(\gamma)$ es numerable, se puede hallar una sucesión $\{\gamma_n : n \in \omega\}$ en γ, tal que $\gamma = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$. Por último de manera recursiva defínase lo siguiente:

- $\sigma_0 = \sigma$,
- $\sigma_{n+1} = \widetilde{D_n}(\sigma_n) \frown \gamma_n$, para cada $n \in \omega$.

Sea $f = \bigcap\{B_{\sigma_n} : n \in \omega\} = \bigcup\{\sigma_n : n \in \omega\}$, entonces $f^* = \gamma \in A$ y $f \in V \cap \left(\bigcap \mathfrak{D}\right)$. Por tanto A^* es un espacio Baire. □

Ejemplo 2.66 (Un absoluto casi espacio de Baire). *Si A, B son subconjuntos estacionarios disjuntos de $C_\omega\kappa$, entonces $A^* \times B^*$ no es de Baire.*

Demostración.
Defínase $D_n = \{(f,g) \in A^* \times B^* : \text{mín}(f^*, g^*) > \text{máx}(f(n), g(n))\}$ el cual se afirma que es un conjunto abierto y denso en $A^* \times B^*$. En efecto, sean $n \in \omega$ y $(f,g) \in D_n$. Tome $m, m' > n$ tales que $f(m-1) > \text{máx}(f(n), g(n))$ y $g(m'-1) > \text{máx}(f(n), g(n))$. Sean $\sigma = f \restriction_m$ y $\sigma' = g \restriction_{m'}$, entonces $(f,g) \in B_\sigma \times B_{\sigma'} \cap A^* \times B^* \subset D_n$. Por tanto D_n es abierto en $A^* \times B^*$. Para la densidad, tome $U = B_\sigma \times B_{\sigma'} \cap A^* \times B^*$ abierto canónico en $A^* \times B^*$. Supongase que $n \in dom(\sigma) = dom(\sigma')$, luego sea $\gamma \in A$ y $\gamma' \in B$ tales que $\gamma, \gamma' > \text{máx}(\sigma(n), \sigma'(n))$. Defínase f_0 como sigue: $f_0(n) = \sigma(n)$ para $n \in dom(\sigma)$ y $f_0(n) = \gamma$ si $n \notin dom(\sigma)$. De manera análoga se define g_0. Entonces $(f_0, g_0) \in U \cap D_n$, ya que $\text{mín}(f_0^*, g_0^*) = \text{mín}(\gamma, \gamma') > \text{máx}(\sigma(n), \sigma'(n)) = \text{máx}(f(n), g(n))$.

Por otro lado si $(f,g) \in A^* \times B^*$, entonces $f^* \neq g^*$, por lo que suponiendo que $f^* > g^*$, entonces para algún $n \in \omega$ se tiene que $f(n) \geq g^*$ y de ahí que $(f,g) \notin D_n$. Por lo tanto $\bigcap_{n \in \omega} D_n$ es vacía, es decir $A^* \times B^*$ no es un espacio de Baire. □

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo platicaremos sobre la importancia que tiene el teorema de Categoría de Baire en distintas áreas de la matemática como lo son: los espacios euclidianos, análisis funcional, la teoría de conjuntos, topología (Espacios polacos) y los juegos infinitos.

3.1. Espacios Euclideanos

Comenzaremos con el estudio de algunas consecuencias básicas en $\mathbb{R}$ que se obtienen a partir del TCB, así como su uso en algunos resultados presentes en los espacios $C[0,1]$, C^{∞}.

Proposición 3.1. *Ningún intervalo cerrado y acotado $J \subseteq \mathbb{R}$ se puede escribir como una unión numerable de intervalos cerrados y disjuntos dos a dos.*

Demostración.
Supóngase que existe una sucesión de intervalos cerrados y disjuntos dos a dos en $\mathbb{R}$, dígase $\{F_n\}_{n\in\omega}$ tal que $I = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Dado que $F_j = i(F_j) \cup Fr(F_j)$ para cada $j \in \omega$, se tiene que $I = \left(\bigcup_{n\in\omega} i(F_n)\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\omega} Fr(F_n)\right)$, entonces $I \setminus \bigcup_{n\in\omega} i(F_n) = \bigcup_{n\in\omega} Fr(F_n)$, el cual es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y dado que $\mathbb{R}$ es completo se afirma que dicho conjunto es completo. De ahí que es valido el TCB en dicho conjunto y por tanto al menos para algún $i \in \omega$, $i\big(Fr(F_i)\big) \neq \emptyset$ lo cual es falso. $\square$

Proposición 3.2. *Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada $x \in [0,\infty)$ $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ definase, $F_n = \bigcap_{k=n}\{x \in [0,\infty) : |f(kx)| \leq \epsilon\}$, como f es continua, cada F_n es un conjunto cerrado en $[0,\infty)$. Por otro lado, sea

$x \in [0, \infty)$. Existe $n_0 \in \omega$ tal que para todo $n \geq n_0$; $|f(nx)| \leq \epsilon$, de ahí que $[0, \infty) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y como $[0, \infty) \supseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$, se tiene que $[0, \infty) = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Como consecuencia del TCB existe $m_0 \in \omega$ tal que $i(F_{m_0}) \neq \emptyset$. Luego, dado $(a, b) \subset i(F_{m_0})$ intervalo abierto no vacío, por construcción de los conjuntos F_n, se cumple que para todo $k \geq m_0$ y $x \in (a, b)$, $f(kx) \leq \epsilon$. Note que si k es lo suficientemente grande por la propiedad arquimediana se garantiza lo siguiente,

$$\begin{gathered}(ka, kb) \cap ((k+1)a, (k+1)b) \neq \emptyset \\ ((k+1)a, (k+1)b) \cap ((k+2)a, (k+2)b) \neq \emptyset \\ \vdots\end{gathered}$$

Fijemos $k \in \omega$ tal que $a < k(b - a)$. Supongamos $k \geq m_0$, entonces $(ka, \infty) = \bigcup_{i=k-1}^{\infty} (ia, ib) \cap ((i+1)a, (i+1)b)$. Por tanto $f(x) \leq \epsilon$ para todo $x \in (ka, \infty)$. Así $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y más aún es cero. □

Proposición 3.3. *Sean $f \in C[0, 1]$ y $\{f_k : k < \omega\} \subset C[0, 1]$ familia de funciones tales que,*

- *si $k = 0$, $f_0 = f$.*
- *Para todo $k \in \omega$, $f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t)dt, \quad x \in [0, 1]$*

Si para cada $x \in [0, 1]$, existe un entero $k = k(x)$ tal que $f_k(x) = 0$, entonces $f \equiv 0$.

Demostración.
Supóngase que $f \neq 0$ sobre $I = [0, 1]$, entonces existe un $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Por la continuidad de f existe una vecindad abierta de x_0, digamos $U \subset I$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Sea $J \subset U$ un subconjunto cerrado, para cada $k \in \omega$ defínase recursivamente el conjunto, $E_k = \{x \in [0, 1] : f_k(x) = 0\}$. El Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que cada f_k es continua, pues f lo es, de ahí que E_k es un intervalo cerrado, además como todo $x \in [0, 1]$ está en algún E_k, se tiene que $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces $J = J \cap I = J \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(J \cap E_k\right)$. Por el TCB algún elemento de la unión tiene interior no vacío, de ahí que existe $I_{k_0} \subset J \cap E_{k_0}$ abierto no vacío con $K_0 \in \omega$ tal que $f_{k_0}(x) = 0$ para todo $x \in I_{k_0}$. Derivando K_0-veces se tiene que $f(x) = f_0(x) = 0$ para todo $x \in I_{k_0}$ lo cual es falso por la suposición inicial. Por tanto $f \equiv 0$. □

Recordemos que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{∞}[1] entonces la fórmula de Taylor (FT) establece que si $a \in [0, 1]$, entonces para cualquier $x \in [0, 1]$

[1] Es decir su n-ésima derivada $f^{(n)}$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$

se cumple que:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-a)^n \tag{3.1}$$

donde $x_1 \in (x, a)$. Por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \to f(x) \text{ en } I \Leftrightarrow \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-a)^n \to 0; \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.2}$$

Notemos que si la n-ésima derivada de f es cero, entonces de (1) se tiene que $f \equiv P_{n-1}$ sobre I donde P_{n-1} es un polinomio de grado a lo más $n-1$. Una generalización de tal resultado es el siguiente dado por E. Landis.

Proposición 3.4. *Sea $f \in C^{\infty}[0,1]$. Si para cada $x \in [0,1]$, existe un entero $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n(x))}(x) = 0$, entonces f coincide con un polinomio.*

Demostración.
Para cada $n \in \omega$, defínase el conjunto $E_n = \{x \in I : f^{(n)}(x) = 0\}$ con $I = [0,1]$. Por la continuidad de las $f^{(n)}$ se tiene que E_n es cerrado para cada n. Por otro lado, por hipótesis para cualquier $x \in I$ existe $n = n(x) \in \omega$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$, es decir $x \in E_n$ y por tanto $I = \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Por el TCB, si $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i(E_n)$ entonces G es abierto y denso en I. Sea $\Sigma = \{n \in \omega : i(E_n) \neq \emptyset\}$, luego como todo subconjunto abierto $A \subset \mathbb{R} \setminus \{\emptyset\}$ se puede escribir como, $\bigcup_{n\in\omega} I_n$ donde cada I_n es un intervalo abierto y $I_j \cap I_k = \emptyset$ para cualesquiera $j, k \in \omega$ con $i \neq j$, entonces para cada $n \in \Sigma$, existe una colección numerable $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ de intervalos abiertos y ajenos dos a dos tal que $i(E_n) = \bigcup_{k\in\omega} I_k^n$.

Sea $\Gamma = \{I_k^n : k, n \in \omega\}$, entonces $G = \bigcup_{n\in\omega}\left(\bigcup_{k\in\omega} I_k^n\right)$. Sea $n_0 = \min \Sigma$, veamos que $i(E_{n_0}) = I$. Para ello, supongamos que $i(E_{n_0}) \neq I$, lo cual se hará en (3) pasos.

(1) Afirmamos que $G \neq I$. En efecto, sea cualquier $I_k^{n_0}$ de los que cubren a $i(E_{n_0})$, por hipótesis $I_k^{n_0} \neq I$, de ahí que alguno de los extremos de $I_k^{n_0}$, digamos α, satisface que $\alpha \in (0,1)$. Veamos que $\alpha \notin G$, supóngase lo contrario, luego como $G = \bigcup_{n\in\omega}\left(\bigcup_{k\in\omega} I_k^n\right)$ entonces para algunos $n_1, j \in \omega$ con $n_1 > n_0$, $\alpha \in I_j^{n_1}$, así $\alpha \in i(I_j^{n_1})$ y $\alpha \in fr(I_k^{n_0})$. Como $\alpha \in i(I_j^{n_1})$ existe J_1 intervalo abierto tal que $\alpha \in J_1 \subseteq I_j^{n_1}$ y como $\alpha \in \overline{I_k^{n_0}}$ entonces $J_1 \cap I_k^{n_0} \neq \emptyset$, en particular $I_j^{n_1} \cap I_k^{n_0} \neq \emptyset \ldots (*)$. De lo anterior se garantiza que existe un intervalo abierto no vacío J tal que $J \subset I_j^{n_1} \cap I_k^{n_0}$. Se sabe que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $I_J^{n_1}$ y $f^{(n_0)} = 0$ sobre J. Se sigue de FT que $f \equiv P_m$ con P_m un polinomio de grado $m < n_0$ sobre $I_j^{n_1}$, por tanto $I_j^{n_1} \subset i(E_{n_0})$. Por otro lado, por como se definieron los intervalos que cubren a $i(E_{n_0})$ y por $(*)$, se tiene

que $I_j^{n_1} = I_k^{n_0}$, lo cual es falso pues $\alpha \in i(I_j^{n_1})$ y $\alpha \in fr(I_k^{n_0}) = (I_j^{n_1})'$. Por tanto $\alpha \notin G$ y de ahí que $G \neq I$.

(2) Defínase $H = I \backslash G$. Veamos que H es un conjunto perfecto. Primero, como G es un conjunto abierto, denso y distinto de I, entonces H es no vacío, cerrado y nada denso en I. Ahora, supóngase que H no és perfecto, entonces existe $y \in H$ tal que y es punto aislado. Como $y \notin G$, entonces y es un extremo común a dos de los intervalos que cubren a G, diga I_i^n y I_j^m. Sin pérdida de generalidad suponga que $m > n$, por la continuidad de $f^{(n)}$, $f^{(n)}(y) = 0$ y como $f \equiv P_l$ polinomio de grado $l < n$ sobre I_m^j, entonces $f^{(n)} = 0$ sobre el abierto $I_i^n \cup \{y\} \cup I_j^m$, de ahí que $y \in i(E_{n_0}) \subset G$ y por tanto $y \notin H$, lo cual no es posible. Por tanto H es perfecto.

(3) Por último véase que no puede pasar lo siguiente $i(E_{n_0}) \neq I$. Por (2) se sabe que H es no vacío y cerrado en I y por ello completo. Ahora como $H = \bigcup_{n \in \omega}(E_n \cap H)$ y por el TCB existe $n_1 \in \omega$ tal que $(i(E_{n_1} \cap H)) \neq \emptyset$. Fije n_1 y tomemos U un conjunto abierto no vacío en $E_{n_1} \cap H$, entonces $U = H \cap V$ para algún V conjunto abierto no vacío en I, luego que $U \subset E_{n_1}$, implica que $f^{(n_1)} = 0$ sobre U, además por la definición de derivada se tiene que para cualquier $x \in U$,

$$f^{(n_1+1)}(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} \frac{f^{(n_1)}(y) - f^{(n_1)}(x)}{y - x} = 0.$$

Obsérvese que tal límite existe para cualquier $x \in U \subset H$ pues H es perfecto. De lo anterior se tiene que $f^{(m)}(x) = 0$ para todo $m \geq n_1$. Puesto que $G, V \subset I$ uno denso y el otro un conjunto abierto no vacío respectivamente, entonces $G \cap V \neq \emptyset$, de ahí que se puede asegurar que alguno de los intervalos abiertos que cubren a G intersecta a V, dígase que tal intervalo es K, entonces $K \subset E_{m_1}$ para algún $m_1 \in \omega$ y de lo cual $f^{(m_1)}(x) = 0$ para todo $x \in K$, en particular sobre $K \cap V$. Estudiemos la relación entre m_1 y n_1.

- Si $m_1 \leq n_1$, entonces derivando a $f^{(m_1)}$, $n_1 - m_1$ veces, se tiene que $f^{(n_1)} = 0$ sobre $K \cap V$.
- Si $m_1 > n_1$, entonces cualquiera de los extremos de K están en H y por tanto cualquier punto en $fr(K \cap V)$ está en $H \cap V = U$, es decir si α es dicho punto entonces $\alpha \in U$. Luego se cumple que $f^{(n_1)}(\alpha) = f^{(n_1+1)}(\alpha) = \cdots = f^{(m_1)-1}(\alpha) = f^{(m_1)}(\alpha) = 0$. Como $f^{(m_1)} = 0$ sobre $K \cap V$, se puede integrar desde α a cualquier elemento $x \in K \cap V$ obteniendo

$$0 = \int_\alpha^x f^{(m_1)}(t) = f^{(m_1-1)}(x) - f^{(m_1-1)}(\alpha) = f^{(m_1-1)}(x).$$

Lo cual prueba que $f^{(m_1-1)}=0$ sobre $k\cap V$. Si el argumento anterior se repite m_1-n_1 veces, se tiene que $f^{(n_1)}=0$ sobre $K\cap V$.

Defínase $\Gamma_0=\{I_k^n\in\Gamma : I_k^n\cap V\neq\emptyset\}$ y sea $G_0=\bigcup_{I_k^n\in\Gamma_0}I_k^n$ lo que se demostró implica que $f^{(n_1)}=0$ sobre $I_k^n\cap V$ para cualquier $I_k^n\in\Gamma_0$, más aún, como todo intervalo $I_k^n\in\Gamma\setminus\Gamma_0$ cumple $I_k^n\cap V=\emptyset$, por el Corolario 1.42 se tiene que $\overline{G_0\cap V}=\overline{G\cap V}=\overline{V}$. Por lo anterior y la continuidad de $f^{(n_1)}$, se tiene que $f^{(n_1)}=0$ sobre $\overline{V}$, en particular sobre V. Lo último asegura que ningún punto de H puede pertenecer a V lo cual contradice el hecho de que $H\cap V=U\neq\emptyset$.

Por todo lo anterior se concluye que $i(E_{n_0})\neq I$ lo cual no es posible, por lo cual $i(E_{n_0})=I$. Sin embargo como la familia de intervalos abiertos que cubre a $i(E_{n_0})$ es disjunta, $\{I_k^{n_0}:k\in\omega\}$, entonces tal familia debe reducirse a un único intervalo, es decir, existe $K_0\in\omega$ tal que $I_{k_0}^{n_0}=I$ y, por tanto $f^{(n_0)}=0$ sobre I. Finalmente por la FT se tendrá que f es un polinomio de grado a lo sumo n_0-1. □

Ahora estudiemos la relación que hay entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ ya que si bien es cierto que tanto $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ poseen la misma cardinalidad, resulta interesante que ninguna biyección entre tales conjuntos puede ser continua. Antes de probar el resultado que nos interesa será útil probar las siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es una función continua e inyectiva, entonces $g([a,b])\subset\mathbb{R}^2$ es cerrado y nada denso en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración.
Como g es continua y $[a,b]$ es un conjunto compacto, entonces $g([a,b])$ es compacto, en particular, un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Por la inyectividad de g, se tiene que $g:[a,b]\to g([a,b])$ es un homeomorfismo, de ahí que $g([a,b])$ es conexo.

Afirmación: $g([a,b])$ es un conjunto nada denso en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $i(g([a,b]))\neq\emptyset$, entonces existe $B_\epsilon(x)\subset g([a,b])$ una bola abierta de radio $\epsilon>0$ y con centro en x, para algún $x\in g([a,b])$. Trasladando y reduciendo un poco (de ser necesario) la bola $B_\epsilon(x)$, se puede garantizar que $g(b)\neq x\neq g(a)$. Véase que $g([a,b])\setminus\{x\}$ es conexo. Supóngase lo contrario, es decir existen abiertos O_1 y O_2 no vacíos disjuntos en $g([a,b])\setminus\{x\}$ tal que $g([a,b])\setminus\{x\}=O_1\cup O_2$. Como $B_\epsilon(x)\setminus\{x\}$ es conexo, entonces $B_\epsilon(x)\setminus\{x\}\subset O_1$ o $B_\epsilon(x)\setminus\{x\}\subset O_2$. Supóngase que $B_\epsilon(x)\setminus\{x\}\subset O_1$ y defina O_1^1 como $O_1\cup\{x\}=O_1\cup B_\epsilon(x)$. Es fácil ver que O_1^1 y O_2 son abiertos en $g([a,b])$ tales que $g([a,b])=O_1^1\cup O_2$ y $O_1^1\cap O_2=\emptyset$. De ahí que $g([a,b])$ no es conexo lo cual es falso. Ahora por la continuidad de $g^{-1}:g([a,b])\to[a,b]$ se tiene que el conjunto $g^{-1}(g([a,b])\setminus\{x\})$ también es conexo en $[a,b]$, lo cual no es posible, ya que $x\in i(g([a,b]))$ y como $g(b)\neq x\neq g(a)$, entonces $g^{-1}(x)\in(a,b)$ es un punto interior de $[a,b]$ y por tanto

$g^{-1}(g([a,b]) \setminus \{x\}) = [a,b] \setminus \{g^{-1}(x)\}$ sería conexo, lo cual es falso. Por todo lo anterior $g([a,b])$ es un conjunto nada denso en $\mathbb{R}^2$. □

Proposición 3.6. *Ninguna función biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, puede ser continua.*

Demostración.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ función biyectiva y continua, luego escríbase a $\mathbb{R}$ como $\bigcup_{n\in\omega\setminus\{\emptyset\}}[-n,n]$. Como f es biyectiva se tiene que $\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{\emptyset\}} f([-n,n])$. Por la proposición anterior, se tiene que $i\big(f([-n,n])\big) = \emptyset$ para cada $n \in \omega \setminus \{\emptyset\}$, y como $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo, se tendrá por el TCB que $\bigcup_{n\in\omega\setminus\{\emptyset\}} f([-n,n]) \neq \mathbb{R}^2$. Por tanto f no puede ser una función continua. □

3.2. Conjuntos Tipo Cantor

Una forma de pensar al conjunto de Cantor es verlo como un intermedio entre el punto y la recta, es decir, un conjunto con muchos agujeros de longitud nula, que posee la cardinalidad de $\mathbb{R}$ y autosemejante. Tal conjunto se ha convertido en una caja de sorpresas pues posee propiedades sorprendentes y más aún se ha convertido en una fuente muy rica de contraejemplos en distintas áreas de la Matemática, por citar algunas sería topología, sistemas dinámicos, teoría de la medida, álgebra, etc.

Denotaremos al conjunto de Cantor como Γ, una forma geométrica de construir Γ es de la siguiente forma, primero se divide el intervalo $[0,1] = \Gamma_0$ en tres subintervalos todos de igual longitud, de los cuales se elimina el intervalo abierto central de estos, es decir $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, donde los intervalos restantes son cerrados, a la unión de tales intervalos la llamaremos Γ_1. De manera recursiva se pueden construir los Γ_n, así a $\bigcap_{n\in\omega}\Gamma_n$ lo llamaremos el conjunto ternario de Cantor, perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor. Algunas de las propiedades que cumple Γ, las cuales se pueden revisar en [29], son las siguientes: ser nada denso, no numerable, totalmente disconexo, compacto, perfecto, etc. Más aún todo espacio métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo es homeomorfo a Γ.

En el siguiente resultado veremos que por medio de una aplicación del TCB a Γ, se pueden hallar subconjuntos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con cierta peculiaridad.

Teorema 3.7 (Scheeffer)**.** *Sea Γ el conjunto perfecto de Cantor. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + \Gamma$ consta sólo de números irracionales, es decir,*

$$x + \Gamma := \{x + \gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathbb{I}.$$

Más aún, el conjunto $G_\Gamma := \{x \in \mathbb{R} : x + \Gamma \subseteq \mathbb{I}\}$ es residual en $\mathbb{R}$.

Demostración.
Sea $(q_n)_{n\in\omega}$ una posible enumeración de los números racionales. Para cada $n \in \omega$ se definen los siguientes conjuntos, $\Gamma_n = q_n - \Gamma$. Dado que $0 \in \Gamma$ se tiene que $q_n \in \Gamma_n$, con lo cual $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$. Por otro lado, como Γ es un subconjunto cerrado nada denso de $[0,1]$, entonces Γ_n es un subconjunto cerrado nada denso en $\mathbb{R}$. Por el TCB tenemos que $\bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n \neq \mathbb{R}$. Ahora, veamos que $x + \Gamma \subset \mathbb{I}$ para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup \Gamma_n$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup \Gamma_n$, $x \notin \bigcup \Gamma_n \subseteq \mathbb{Q}$, es decir, $x \notin \mathbb{Q}$. Afirmamos que $(x + \Gamma) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, pues si $(x + \Gamma) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ y $q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ tal que $x + \gamma = q_{n_0}$, por tanto $x = q_{n_0} - \gamma \in q_{n_0} - \Gamma = \Gamma_{n_0}$, lo cual es falso pues $x \notin \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$. Por otro lado, como cada Γ_n es cerrado y nada denso en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \setminus \Gamma_n$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$, por tanto aplicando TCB, tenemos que $G := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n = \bigcap_{n\in\omega} (\mathbb{R} \setminus \Gamma)$ el cual es un conjunto G_δ-denso en $\mathbb{R}$. Así $G \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x + \Gamma \subseteq \mathbb{I}\} = \mathbb{I}'$, más aún $\mathbb{I}'$ será un conjunto residual en $\mathbb{R}$. $\square$

El resultado anterior es válido para cualquier conjunto perfecto y nada denso de $\mathbb{R}$.

Debilitando la hipótesis del teorema anterior, F. Bagemihl en [5] presentó el siguiente resultado.

Teorema 3.8 (Bagemihl)**.** *Si $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de la primera categoría y $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ es a lo más numerable, entonces existe un conjunto residual $G \subset \mathbb{R}$ tal que $(x + \mathcal{N}) \cap F = \emptyset$ para todo $x \in G$.*

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{N} = \{x_0, \dots x_k \dots\}$ para cada $k \in \omega$. Definamos $G_k = \{x \in \mathbb{R} : x_k + x \notin F\}$. Notar que por la Proposición 2.27 el conjunto $\mathbb{R} \setminus F$ es residual pues F es un conjunto de la primera categoría, con lo cual $G_k = -x_k + \mathbb{R} \setminus F$ también es residual en $\mathbb{R}$. Sea $G = \bigcap_{k\in\omega} G_k$, entonces G es residual en $\mathbb{R}$, y para cualquier $x \in G$ tenemos que $(x + \mathcal{N}) \cap F = \emptyset$. $\square$

3.3. Pilares del Análisis Funcional

Un espacio métrico no necesita tener ninguna clase de estructura algebraica definida en él, es decir, puede no tener sentido la suma de elementos en el espacio o la multiplicación de un elemento del espacio por un número real o complejo. Sin embargo, es muy frecuente el uso de espacios métricos que son a su vez espacios vectoriales, con una métrica derivada de una norma que mide la longitud de un vector.

La noción de módulo de un número real es muy importante porque a partir de ello se puede definir un indicador de la cercanía de dos números cualesquiera[2]. La relevancia de este hecho es que permite dotar a $\mathbb{R}$ de una estructura no sólo algebraica sino también analítica, en el sentido en que hace posible manejar la noción de convergencia. Se puede observar que las propiedades del valor modular que hacen posible este salto cualitativo son las siguientes:

$$|\lambda x| = |\lambda||x|$$
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$|0| = 0$$

Si se tratase de generalizar estas propiedades y convertirlas en axiomática de una aplicación de valores positivos definida sobre cualquier espacio vectorial[3], se puede obtener de ello la definición de norma que va a construir un marco de estudio el cual tendrá un número elevado de propiedades con gran impacto en el análisis funcional.

Definición 3.9. *Sea X un espacio vectorial(lineal) sobre $\mathbb{K}$ un campo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una **norma** sobre X es una aplicación $\| \; \| : X \to \mathbb{R}$, tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in K$ cumple lo siguiente:*

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

A la pareja $(X, \| \; \|_X)$ se le llama espacio normado. En ocasiones se dirá que X es un espacio normado sin mencionar la norma de manera explícita. Más aún, se puede verificar que todo espacio normado resulta ser un espacio métrico con la métrica inducida por la norma, definida como $d(x,y) = \|x-y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Un espacio normado se llama completo si la métrica inducida por la norma es completa. A este tipos de espacios se les conoce como espacio de Banach. Como ejemplo de estos espacios tenemos $(B_\infty(X), \| \; \|_\infty)$ definido anteriormente. No es difícil verificar que si $X = [0,1]$, entonces $(C[0,1], \| \; \|_\infty)$ es cerrado en $(B_\infty(X).\| \; \|_\infty)$ y por consiguiente es de Banach.

El concepto de espacio de Banach es muy importante porque en ellos resultan válidos los teoremas más significativos del análisis funcional, por ejemplo el teorema de acotación uniforme, del inverso acotado y del gráfico cerrado.

[2]Con este concepto se puede definir de manera casi inmediata la noción de límite de una sucesión

[3]También denominado lineal

Definición 3.10. *Sean* $(X, \| \|_X)$ *y* $(Y, \| \|_Y)$ *espacios normados. Una* ***transformación lineal*** *(u operador lineal) es una aplicación,* $T : X \to Y$*, que satisface; para toda* $x, y \in X$*, y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*:* $T(\alpha x + \beta Y) = \alpha T(a) + \beta T(y)$*.*

Definición 3.11. *Sean* X, Y *espacios normados y* $T : X \to Y$ *una transformación lineal. Si existe* $M > 0$ *con* $M \in \mathbb{K}$*, tal que* $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ *para todo* $x \in X$*, entonces* T *se dice que es un* ***operador lineal acotado***[4]*.*

Si se define para cada operador lineal acotado, $T : X \to Y$, el número $\|T\|$ como $\sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|_Y$, entonces $\|T\|$ define una norma sobre el espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados de X en Y, denotado por $L(X, Y)$. Cuando $Y = \mathbb{R}$ se escribirá X^*, en lugar de $L(X, \mathbb{R})$. A X^* se le llamará el dual de X.

Sea X un espacio normado y $L \subset X$. Se dice que L es una variedad lineal, si para cualesquiera $x, y \in L$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ entonces $\alpha_1 x + \alpha_2 y \in L$. Si la variedad lineal es un conjunto cerrado en X, entonces se llama subespacio de X.

Llamaremos segmento, que une los puntos $x, y \in X$, al conjunto de puntos que satisfacen $\alpha x + (1 - \alpha)y \geq 0$. Diremos que un conjunto $A \subset X$ es convexo si para cualesquiera dos puntos en A, el segmento que los une esta contenido en A.

Sobre un mismo espacio pueden definirse varias normas y puede ser que éstas estén relacionadas, así diremos que dos normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ sobre un espacio lineal X son equivalentes, si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que, para cualquier $x \in X$ se cumple $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Algunos resultados que hay que tener presentes son los siguientes.

Teorema 3.12. *Sean* X, Y *espacios normados y* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) T *es continuo.*

(2) T *es continuo en el origen.*

(3) $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ *está acotado en* $X \setminus \{\vec{0}\}$*.*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) La prueba es inmediata.
(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| < 1$ si $\|x\| < \delta$. Notar que $\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| < 1$, así por la linealidad de T se tiene que, $\|Tx\| < (2/\delta)\|x\|$ para cualquier

[4]No es difícil verificar que ser un operador lineal acotado es equivalente a ser un operador continuo.

$x \in X$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Es inmediato ya que sólo hay que notar que si $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ está acotado en $X \setminus \{\vec{0}\}$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X \setminus \{\vec{0}\}$. $\square$

Con el Teorema 3.12 se puede asegurar que $L(X, Y)$ es un espacio normado cuya norma puede ser

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{\vec{0}\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

para cualquier $T \in L(X, Y)$. Además, no es difícil verificar que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$ y $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.

Teorema 3.13. *Sea X un espacio normado. Si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X, Y)$ es de Banach.*

Demostración.
Sea $(f_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en $L(X, Y)$. Note que para cada $x \in X$ se tiene que $(f_n(x))_{n\in\omega}$ es de Cauchy en Y. Como Y es un espacio de Banach, se puede definir $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Observe que la linealidad de f es inmediata, por lo cual basta probar la continuad de f y la convergencia de $(f_n)_{n\in\omega}$ a f. Para la continuidad, notemos que para cada $x \in X$,

$$\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| \leq \|x\| \sup \|f_n\|.$$

Como $(f_n)_{n\in\omega}$ es de Cauchy, es acotada y $\sup \|f_n\| < \infty$. Luego se tiene la continuidad de f, es decir, $f \in L(X, Y)$. Ahora para la convergencia observe que si $k \geq n$,

$$\|f_n(x) - f_k(x)\| \leq \sup_{k\geq n} \|f_n - f_k\|\|x\|.$$

Luego, calculando el límite cuando $k \to \infty$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|x\| \sup_{n\leq k} \|f_n - f_k\|.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. $\square$

Definición 3.14. *Sean $(\mathcal{X}, d_1), (\mathcal{Y}, d_2)$ espacios métricos y $\mathcal{F}$ una colección de funciones de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es **equicontinua** en $x_0 \in \mathcal{X}$ si*

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(x_0) > 0)(d_1(x_0, y) < \delta \Rightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} d_2(f(x_0), f(y)) < \epsilon).$$

Si $\mathcal{F}$ es equicontinua en todo punto de $\mathcal{X}$, diremos que $\mathcal{F}$ es equicontinua en $\mathcal{X}$. Más aún si la elección de δ no depende de x_0, diremos que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

Observación 3.15. *No es difícil verificar que si $\mathcal{F}$ es una familia de operadores lineales, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua siempre que $\mathcal{F}$ es equicontinua.*

Teorema 3.16. *Sean X, Y espacios normados y $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua si y sólo si $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\| < \infty$.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Por hipótesis existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{x\in X\setminus\{\vec{0}\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq M.$$

Es decir,

$$\sup_{x} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| \leq M\|x\|.$$

Luego se tiene que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x-h) - f(x)\| \leq M\|h\|$. Así tomando a $\delta = \epsilon/M$ para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

$\Rightarrow$] Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\| < 1, \text{ si } \|x\| < \delta.$$

Luego, como

$$\|f(x)\| = \frac{2\|x\|}{\delta} \left\| f\left(\frac{x\delta}{\|x\|2}\right) \right\| < \frac{2}{\delta}\|x\|, \text{ para toda } f \in \mathcal{F}.$$

Entonces, $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\| < \infty$. $\square$

Veamos ahora algunas formas de acotación que se pueden definir sobre las familias de operadores.

Sean X, Y espacios normados, $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ subfamilia de operadores lineales acotados.

- $\mathcal{F}$ es **acotada** en $x_0 \in X$ si $\sup\{\|Tx_0\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.
- $\mathcal{F}$ es **puntualmente acotada** en $B \subset X$ si $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$ para todo $x \in B$.
- $\mathcal{F}$ es **uniformemente acotada** en $B \subset X$ si $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}, x \in B\} < \infty$.

- $\mathcal{F}$ es **uniformemente acotada en la bola unidad**: $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Teorema 3.17 (Principio de acotación uniforme)**.** *Sean X, Y espacios normados, donde X es de Banach y $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ es una familia de operadores lineales y acotados . Sea $D \subset X$ tal que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada en D, es decir, $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\| < \infty$ para cada $x \in D$. Si D es conjunto de segunda categoría, entonces $X = D$ y $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en D, es decir,* $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

Demostración.
Sean $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ y $D \subset X$, si $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada en D entonces para cada $x \in D$ existe $M(x) > 0$ tal que $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\| < M(x)$. Defínase

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\| \leq n\} = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} \{x \in X : \|T(x)\| \leq n\}.$$

Se afirma que E_n es cerrado para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, para ello tome $x \in \overline{E_n}$, luego existe $(x_k)_{k\in\omega} \subset E_n$ sucesión tal que $x_k \to x$ si $k \to \infty$. Como cada operador $T \in \mathcal{F}$ es continuo, entonces $T(x_k) \to T(x)$ y por la continuidad de la norma $\|T(x_k)\| \to \|T(x)\|$. Finalmente como $x_k \in E_n$, entonces $\|T(x_k)\| \leq n$. Por tanto $\|T(x)\| \leq n$, así $x \in E_n$. Más aún, por construcción se tiene que:

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Como D es de segunda categoría se tiene que existe $n_0 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que E_{n_0} tiene clausura con interior no vacío (por el TCB), es decir, $i(\overline{E_{n_0}}) \neq \emptyset$. Además, como cada E_n es cerrado y por lo anterior, existe $x_0 \in E_{n_0}$ y $r_0 > 0$ tal que

$$B(x_0, r_0) \subset E_{n_0}.$$

Sea $z \in B(\vec{0}, r_0)$ y tomemos $y = x_0 + z$ donde $y \in B(x_0, r_0)$. De lo anterior se tiene que:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(y)\| \leq n_0.$$

Luego por la linealidad de T y para $z \in B(\vec{0}, r_0)$ se implica que

$$\|T(z)\| = \|T(x_0 + z) + T(x_0)\| \leq 2n_0, \quad \text{para toda } T \in \mathcal{F}.$$

Así, para cada $x \in X \setminus \{\vec{0}\}$ se tiene:

$$\|T(x)\| = \frac{2\|x\|}{r_0} \left\| T\left(\frac{r_0 x}{2\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{4n_0}{r_0} \|x\|, \text{ para toda } T \in \mathcal{F}.$$

Por tanto se concluye que $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$ y $D = X$. □

Definición 3.18. *Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $T : D(T) \to Y$ con $D(T) \subset X$ es **abierta** si para todo abierto A en $D(T)$, $T(A)$ es abierto en Y.*

Teorema 3.19 (Mapeo abierto)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una función lineal y continua. Si $T[X]$ es un conjunto de la segunda categoría, entonces $Y = T[X]$ y T es abierto.*

Demostración.
Por comodidad denotaremos por B_r^X a $B(\vec{0}, r)$, para cada $r > 0$, si $B(\vec{0}, r)$ se encuentra en X y respectivamente para Y. Sea $T : X \to Y$ una función lineal acotada, tomando B_n^X para cada $n \in \omega$, se tiene que $X = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, de lo cual se sigue que $T[X] = \bigcup_{n\in\omega} T(B_n) = \bigcup_{n\in\omega} \overline{T(B_n)}$. Como $T[X]$ es un conjunto de segunda categoría, existe un $n_0 \in \omega$ tal que $i(\overline{T(B_{n_0}^X)}) \neq \emptyset$ (Por el TCB). Así existe $y_0 \in Y$ y $r_0 > 0$ tal que

$$B(y_0, r_0) \subset \overline{T(B_{n_0}^X)}. \quad (*)$$

Sea $z \in B_{r_0}^Y$, entonces $y = z + y_0 \in B(y_0, r_0)$. Por $(*)$ existen $\{u_n\}_{n\in\omega}$ y $\{v_n\}_{n\in\omega}$ sucesiones en $B_{n_0}^X$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = y \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} T(v_n) = y_0.$$

Defínase $w_n = u_n - v_n$. Afirmación: $w_n \in B_{2n_0}^X$ tal que $\lim_{n\to\infty} T(w_n) = z$. En efecto, como $\|w_n\| = \|u_n - v_n\| \leq \|u_n\| + \|v_n\| < 2n_0$, se tiene $w_n \in B_{2n_0}^X$ y dado que el operador T es lineal y por propiedades de limites se tiene que $\lim_{n\to\infty} T(w_n) = z$. Como $\lim_{n\to\infty} T(w_n) = z$, entonces $B_{r_0}^Y \subset \overline{T(B_{2n_0}^X)}$.

Ahora veamos que para cada $y \in B_{r_0}^Y$, existe $x \in B_{4n_0}^X$ tal que $T(x) = y$, es decir, $B_{r_0}^Y \subset T(B_{4n_0}^X)$. Sea $y \in B_{r_0}^Y$, entonces $y \in \overline{T(B_{2n_0}^X)}$, de ahí que existe $x_0 \in B_{2n_0}^X$ tal que $\|y - T(x_0)\| < \frac{r_0}{2}$, entonces $y - T(x_0) \in B_{\frac{r_0}{2}}^Y \subset \overline{T\left(B_{\frac{2n_0}{2}}^X\right)}$. Así existe $x_1 \in B_{\frac{2n_0}{2}}^X$ tal que

$$\|y - T(x_0) - T(x_1)\| < \frac{r_0}{2^2}.$$

Para el caso n-ésimo, siguiendo la misma construcción, se tendrá: $x_n \in B_{\frac{2n_0}{2^{n+1}}}^X$ y

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{r_0}{2^{n+1}}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - T\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \right\| = 0.$$

Ahora, como
$$\left\|\sum_{k=0}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{n} \frac{2n_0}{2^{k+1}} < 4n_0,$$
existe $x \in B^X_{4n_0}$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$. Por la continuidad de T se tiene que $T(x) = y$. Por tanto, para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $B(T(x), \delta) \subset T(B(x, \epsilon))$.

Para finalizar, dado $U \subset X$ abierto. Sea $T(x) \in T(U)$ con $x \in U$, como U es abierto existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$, por lo anterior existe $\delta > 0$ tal que $B(T(x), \delta) \subset T(B(x, \epsilon))$. Por tanto $B(T(x), \delta) \subset T(U)$. □

El teorema de la aplicación abierta da condiciones para que un operador lineal sea abierto y más aún si a las condiciones del teorema se le añade la hipótesis de que el operador sea biyectivo, entonces se puede garantizar la existencia del operador inverso y acotado.

Definición 3.20. *Dados dos espacios normados X, Y y $T : D(T) \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es un* ***operador lineal cerrado*** *o simplemente un operador cerrado si su gráfico, $G(T) : \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$, es cerrado en el espacio normado $X \times Y$, definido por las operaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

donde la norma en $X \times Y$ se define como, $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Observación 3.21. *Si X, Y son espacios de Banach, entonces $X \times Y$ también lo es.*

Demostración.
En efecto, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X\times Y$. Entonces tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n, m > N : \|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \epsilon$$

lo cual implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy en X e Y respectivamente, por tanto convergen. Si $x_n \to x, y_n \to y$, entonces no es difícil verificar que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. □

Teorema 3.22. *Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \to Y$ un operador lineal. Entonces T es cerrado si y sólo si, cada vez que $x_n \to x$ con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ y $Tx_n \to y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ una sucesión tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Entonces

$$\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - y\|_Y \to 0.$$

Por hipótesis el gráfico es cerrado, luego $(x, y) \in G(T)$, por tanto $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

$[\Leftarrow$ Sea $\{(x_n, Tx_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(T)$ una sucesión tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, entonces

$$\|x_n - x\|_X + \|Tx_n - y\|_Y = \|(x_n, Tx) - (x, y)\| \to 0.$$

Así, $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|Tx_n - y\| \to 0$. Por hipótesis, $x \in D(T)$ y $Tx = y$, es decir, $(x, y) \in G(T)$. $\square$

Teorema 3.23 (Gráfico cerrado)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : D(T) \to Y$ un operador lineal. Si $D(T)$ es cerrado en X, entonces T es un operador cerrado si y sólo si T es un operador acotado.*

Demostración.
$\Rightarrow]$ Po hipótesis $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, donde $D(T)$ es cerrado en X, por tanto $D(T)$ y $G(T)$ son completos. Sea la aplicación $P : G(T) \to D(T)$ definida como $P(x, Tx) = x$, la cual es lineal y acotada pues,

$$\|P(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|.$$

Además P es inyectiva, pues su inversa $P^{-1} : D(T) \to G(T)$ es $P^{-1}x = (x, Tx)$. Por el Teorema 3.19, P^{-1} e acotada y existe $k > 0$ tal que

$$\|(x, Tx)\| \leq k\|x\|, \text{ para todo } x \in D(T).$$

Así, T está acotado por lo siguiente:

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| \leq k\|x\|, \text{ para todo } x \in D(T).$$

$\Leftarrow]$ Por hipótesis T es acotado, es decir, T es continuo. Por el Teorema 3.22 T es cerrado. $\square$

Ejemplo 3.24. *Sea $X = C[0, 1]$ y $T : \mathcal{D}(T) \to X$ definida por $Tx = x'$, donde x' representa la derivada y $\mathcal{D}(T)$ es el conjunto de funciones con derivada continua en $[0, 1]$, entonces T es cerrado pero no acotado.*

Demostración.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, entonces $Tx_n(t) = nt^{n-1}$ y $\|x_n\| = \max_{0\le t\le 1} |x_n(t)| = 1$, así $\|Tx_n(t)\| = n$. Por tanto no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx_n\| \le k$, es decir, T no está acotado.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(T)$ tal que $x_n \to x$ y $x'_n = Tx_n \to y$. Como la convergencia en norma de $C[0,1]$ es la convergencia uniforme, se tendrá que $y \in C[0,1]$ es una función continua, así para cada $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} x'_n(s)ds \\ &= \lim_{n\to\infty}(x'_n(t) - x'_n(0)) \\ &= x(t) - x(0). \end{aligned}$$

Entonces, $x(t) = x(0) - \int_0^t y(s)ds$. Por tanto, $x \in D(T)$ y $x' = y$. Y por el Teorema 3.23, T es cerrado. □

3.4. Espacios Polacos

Definición 3.25. *Un espacio $\mathcal{X}$ se denomina **Polaco** si $\mathcal{X}$ es completamente metrizable y separable.*

Ejemplo 3.26. *El espacio $\mathbb{R}^n$ con $n \in \omega$ es un espacio polaco.*

Recordar que si $A, B \subseteq \mathcal{X}$, diremos que A es denso en B si $B \subseteq \overline{A}$.

Proposición 3.27. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico separable entonces su completación es un espacio polaco.*

Demostración.
Sean $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico y $(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{d})$ su completación, entonces existe una isometría $f : \mathcal{X} \to \widehat{\mathcal{X}}$ tal que $f[\mathcal{X}]$ es denso en $\widehat{\mathcal{X}}$. Como $\mathcal{X}$ es separable, existe $D \subseteq \mathcal{X}$ denso numerable. Afirmamos que $f[D]$ es denso en $f[\mathcal{X}]$. En efecto, como $y \in f[\mathcal{X}]$ y $r > 0$, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $y = f(x)$, luego como D es denso en $\mathcal{X}$ se tiene que $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$. Así existe $z \in B_r(x) \cap D$, note que al ser f una isometría se tiene que $\widehat{d}(f(x), f(z)) = d(x,z) < r$, entonces $f(z) \in B_r(f(x))$ con lo cual $f(z) \in B_r(Y) \cap f[D]$. Por tanto $f[D]$ es denso en $f[\mathcal{X}]$. Ahora veamos que $f[D]$ es denso en $\widehat{\mathcal{X}}$. Sea U un abierto no vacío en $\mathcal{X}$, como $f[\mathcal{X}]$ es denso en $\widehat{\mathcal{X}}$ entonces $f[\mathcal{X}] \cap U \neq \emptyset$. Notemos que $f[\mathcal{X}] \cap U$ es un abierto en $f[\mathcal{X}]$ y como $f[D]$ es denso en $f[\mathcal{X}]$, se tiene que $f[D] \cap (f[\mathcal{X}] \cap U) \neq \emptyset$. Como f es biyección, $f[D]$ es numerable y así $\widehat{\mathcal{X}}$ es separable. Por tanto $\widehat{\mathcal{X}}$ es un espacio métrico completo y separable, es decir, $\widehat{\mathcal{X}}$ es un espacio polaco. □

Proposición 3.28. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco y $Y \subseteq \mathcal{X}$ cerrado, entonces Y es un espacio polaco.*

Demostración.
Sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio polaco y $Y \subseteq \mathcal{X}$ subespacio cerrado de $\mathcal{X}$ con d la métrica que se obtiene al ser $\mathcal{X}$ un espacio completamente metrizable. Como Y es cerrado y al ser $(\mathcal{X}, d)$ completo, entonces (Y, d_y) es completo. Luego Y es separable pues dado un denso numerable D en $\mathcal{X}$ se obtiene que $Y = Y \cap \mathcal{X} = Y \cap \overline{D} = \overline{Y \cap D}$, es decir $Y \cap D$ es un denso numerable en Y. Por todo lo anterior se tiene que Y es polaco. $\square$

Hay que tener en cuenta que un subespacio de un espacio polaco no necesita ser cerrado para ser polaco, lo cual se verá a continuación, antes de ello probemos el resultado siguiente que será útil para nuestro propósito.

Teorema 3.29. *Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico y $r > 0$, entonces la aplicación $\delta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada por $\delta(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), r\}$ es una distancia en $\mathcal{X}$ tal que $\tau_d = \tau_\delta$. Además $(\mathcal{X}, d)$ es completo si y sólo si $(\mathcal{X}, \delta)$ lo es.*

Demostración.
La verificación de que δ es en efecto una métrica para $\mathcal{X}$ no es difícil de verificar pues note que la única propiedad que necesita atención es la desigualdad triangular y la cual se verifica fácilmente pues solo hay que revisar los casos pertinentes. Para la última parte del resultado, note que d y δ determinan las mismas bolas abierta para cada $\epsilon > 0$ donde $0 < \epsilon < r$, sabemos que estas forman una base para las topologías inducidas respectivamente, de ahí que $\tau_d = \tau_\delta$. Por último, como las sucesiones de Cauchy coinciden en ambas métricas, pues ya se vio que las métricas son equivalentes, se tiene que $(\mathcal{X}, d)$ es completo si y sólo si $(\mathcal{X}, \delta)$ también lo es. $\square$

Teorema 3.30. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco y $U \subset \mathcal{X}$. Si U es un subespacio abierto de $\mathcal{X}$, entonces U es polaco.*

Demostración.
Sean $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio polaco y $U \subset X$ abierto. Supongamos que U es un abierto no trivial, Como $\mathcal{X}$ es polaco entonces $\mathcal{X}$ es completamente metrizable. Por tanto existe una métrica d que es completa, más aún que solo toma valores menores que 1, la cual induce la topología sobre $\mathcal{X}$, por el teorema anterior. Definamos $d' : U \times U \to \mathbb{R}$ por $d' = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, \mathcal{X} \setminus U)} - \frac{1}{d(y, \mathcal{X} \setminus U)} \right|$. Note que como $\mathcal{X} \setminus U$ es un conjunto cerrado entonces los denominadores no se anulan, no es difícil verificar que d' es una métrica en U.

Veamos que $\tau_{d'} = \tau_{d_U}$ sobre U. Como $d(x,y) \leq d'(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in U$ si $V \subset U$ es d-abierto entonces es d'-abierto. Ahora para la otra parte, primero obsérvese lo siguiente: fijemos $x \in U$ y sea $r = d(x, \mathcal{X} \setminus U) > 0$. Sea $y \in U$ es tal que $d(x,y) < r' < r$, se puede obtener la siguiente relación $r - r' \leq d(y, \mathcal{X} \setminus U) \leq r + r'$. De lo anterior podemos obtener dos casos, $d(y, \mathcal{X} \setminus U) \leq r$ ó $d(y, \mathcal{X} \setminus U) \geq r$, si tal distancia $\leq r$ se tiene lo siguiente:

$$\left| \frac{1}{d(x, \mathcal{X} \setminus U)} - \frac{1}{d(y, \mathcal{X} \setminus U)} \right| = \frac{1}{d(y, \mathcal{X} \setminus U)} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r - r'} - \frac{1}{r} = \frac{r'}{r(r - r')}.$$

O bien si tal distancia $\geq r$ se tiene:

$$\left| \frac{1}{d(x, \mathcal{X} \setminus U)} - \frac{1}{d(y, \mathcal{X} \setminus U)} \right| = \frac{1}{r} - \frac{1}{d(y, \mathcal{X} \setminus U)} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{r + r'} < \frac{r'}{r(r - r')}.$$

En ambos casos $d'(x,y) \leq r' + \frac{r'}{r(r-r')}$. Como

$$r' + \frac{r'}{r(r - r')} \to 0 \text{ si } r' \to 0.$$

Una vez hecha la observación anterior se tiene lo siguiente. Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta = r'$ tal que $B_\delta^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$ lo cual se puede afirmar por la observación anterior, así todo d'-abierto es d-abierto.

Ahora veamos que la métrica d' es completa sobre U. Sea $(x_n)_{n \in \omega}$ una sucesión de Cauchy en (U, d'), como $d \leq d'$ entonces $(x_n)_{n \in \omega}$ es de Cauchy bajo d y dado que d es una métrica completa, existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$. Veamos que $x \in U$, para ello, se afirma que la sucesión $d(x_n, \mathcal{X} \setminus U)^{-1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, lo cual es inmediato pues como en el caso anterior, se tiene que $\left| \frac{1}{d(x_n, \mathcal{X} \setminus U)} - \frac{1}{d(x_m, \mathcal{X} \setminus U)} \right| \leq d'(x_n, x_m)$. Visto a $\mathbb{R}$ con la métrica usual se tiene que existe $M > 0$ tal que $d(x_n, \mathcal{X} \setminus U)^{-1} \leq M$ para todo $n \in \omega$, es decir $d(x_n, \mathcal{X} \setminus U) \geq 1/M$ y como $d(\ \ , \mathcal{X} \setminus U)$ es una función continua (para d), se tiene que $d(x, \mathcal{X} \setminus U) \geq 1/M > 0$, luego $x \in U$. Por todo lo anterior se tiene que la distancia $d'(x_n, x)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, y de ahí que la sucesión $(x_n)_{n \in \omega}$ converge a x bajo d'. □

Teorema 3.31. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio metrizable, entonces todo conjunto cerrado en $\mathcal{X}$ es un conjunto G_δ.*

Demostración.
Véase el ejemplo 1.63 □

Un resultado que generaliza a los dos resultados previos en espacios polacos es el siguiente.

Teorema 3.32. *Todo subconjunto G_δ en un espacio polaco es un espacio polaco con la topología relativa.*

Demostración.
Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco y $G = \bigcap_{n<\omega} U_n$ una intersección numerable de conjuntos abiertos. Supongamos que $U_{n+1} \subset U_n$ entonces $U_n = \bigcap_{i \geq n} U_i$ para cada $n < \omega$, luego por el resultado anterior existe una métrica completa que induce la topología relativa tal que d_n en U_n tal que para cualesquiera $x, y \in U_n$ se tiene que $d_n(x, y) < 1$.

Definamos $d : G \times G \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y)$, no es difícil verificar que d es una métrica en G. Afirmamos que $\tau_d = \tau_G$. Para ello veamos lo siguiente, sean $\epsilon > 0$ y $x \in G$. Se puede verificar que $B^d_{\epsilon/2}(x) \subset B^{d_0}_\epsilon(x) \cap G$, de lo anterior se tiene que todo abierto para la topología relativa en G es abierto para d. Para ver el reciproco, sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N_0 \in \omega$ tal que $\sum_{N_0<i} \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $n < N_0$; si $d_n(x, y) < \delta_0$ entonces $\sum_{n<N_0} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$, por tanto $d(x, y) < \epsilon$.

Ahora, como cada d_n induce la topología relativa en U_n respectivamente, existe $0 < \delta_1 < \delta_0$ tal que $B^{d_1}_{\delta_1}(x) \subset B^{d_0}_{\delta_0}(x)$. De manera inductiva se tiene que $0 < \delta_{n-1} < \delta_0$ tal que $B^{d_{n-1}}_{\delta_{n-1}}(x) \subset B^{d_{n-2}}_{\delta_{n-2}}(x) \subset \cdots \subset B^{d_0}_{\delta_0}(x)$. Así $B^{d_{n-1}}_{\delta_{n-1}}(x) \cap G \subset B_\epsilon(x)$, por tanto todo abierto para d es abierto para la topología relativa. Por tanto se tiene lo pedido, es decir $\tau_d = \tau_G$.

Veamos que (G, d) es completo. Sea $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en G bajo d, como $G = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ entonces $(x_n)_{n\in\omega}$ es de Cauchy en cada U_n con la métrica d_n correspondiente, de ahí que existe $c_n \in U_n$ tal que $x_n \to c_n$ cuando $n \to \infty$ bajo d_n, pero como la topología de cada U_{n+1} es la inducida desde U_n, se tendría que en U_n la sucesión converge a c_n y c_{n+1}, de lo cual se tiene que $c_n = c_{n+1}$ y por tanto todos los límites son iguales a uno mismo, digamos $c \in G$. Así la sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a c respecto a la topología relativa, luego respecto a la métrica d que la induce, con lo cual se tiene tiene que d es completa y por tanto G es un espacio polaco. □

Teorema 3.33. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio polaco y $\mathcal{Y}$ un subespacio de $\mathcal{X}$ entonces, $\mathcal{Y}$ es un espacio polaco si y sólo si $\mathcal{Y}$ es un conjunto G_δ.*

Demostración.
$\Leftarrow$] Se tiene por el Teorema 3.32.

$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco y $\mathcal{Y}$ un subespacio polaco de $\mathcal{X}$. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base para $\mathcal{X}$ y d una métrica completa tal que $\tau_d = \tau_{\mathcal{Y}}$. Definamos

$$G = \overline{\mathcal{Y}} \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} \left(\bigcup \left\{ U_m : D(\mathcal{Y}\cap U_m) < \frac{1}{m} \right\} \right),$$

donde $D(\mathcal{Y}\cap U_m) = diam(\mathcal{Y}\cap U_m)$ respecto a d. Por el resultado anterior $\overline{\mathcal{Y}}$ es un conjunto G_δ, más aún $\bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} \left(\bigcup\{U_m : D(\mathcal{Y}\cap U_m) < \frac{1}{m}\}\right)$ también es un conjunto G_δ, de ahí que G es un conjunto G_δ. Afirmamos que $\mathcal{Y} = G$. En efecto, primero veamos que $\mathcal{Y} \subseteq G$, sea $x \in \mathcal{Y}$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene que $B^d_{1/4n}(x)$ es un abierto en $\mathcal{Y}$, luego existe $m \in \omega$ tal que $x \in \mathcal{Y}\cap U_m \subseteq B^d_{1/4n}(x)$ y $D(\mathcal{Y}\cap U_m) \leq 1/2n < 1/n$, es decir $x \in G$.

Veamos ahora que $G \subset \mathcal{Y}$. Sea $x \in G$, luego para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, sea $m_n \in \omega$ tal que $x \in U_{m_n}$ y $D(\mathcal{Y}\cap U_{m_n}) < 1/n$. Como $\mathcal{Y}$ es denso en G, existe[5] $y_n \in \mathcal{Y}\cap U_{m_1}\cap\cdots\cap U_{m_n}\cap B^{d_{\mathcal{X}}}_{1/n}(x)$ donde $d_{\mathcal{X}}$ es una métrica que induce la topología en $\mathcal{X}$. Así, cuando $n' > n$ se tendrá que $y_n, y_{n'} \in \mathcal{Y}\cap U_{m_n}$, luego $d(y_n, y_{n'}) \leq 1/n$, de lo anterior se tendrá que la sucesión $(y_n)_{n\in\omega}$ es de Cauchy en $\mathcal{Y}$, más aún converge a algún $y \in \mathcal{Y}$, pues $\mathcal{Y}$ es polaco. Pero, por construcción tal sucesión se tiene que converge a x, de ahí que $x = y \in \mathcal{Y}$. Por tanto $\mathcal{Y} = G$, y por tanto $\mathcal{Y}$ es un conjunto G_δ. □

Con lo anterior es posible revisar el siguiente resultado.

Proposición 3.34. *Sea $\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de espacios polacos entonces $X = \prod_{n\in\omega} \mathcal{X}_n$ es un espacio polaco.*

Demostración.
Sean $\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de espacios polacos y $X = \prod_{n\in\omega} \mathcal{X}_n$ el producto topológico. La separabilidad de X está dada por el hecho de que X posee una base numerable, la cual se puede construir de la siguiente manera. Sea $n \in \omega$, como $\mathcal{X}_n$ es un espacio polaco entonces posee una base numerable $\mathcal{B}_n$, luego definamos

$$\mathcal{B} = \{U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} \mathcal{X}_n : m \in \omega\},$$

donde para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$ se cumple que $U_i \in \mathcal{B}_i$. Obsérvese que $\mathcal{B}$ es una base numerable para X, entonces se tiene lo pedido.

Ahora veamos que X es un espacio metrizable. Para cada $n \in \omega$ considérese una métrica completa, d_n, que induzca la topología de $\mathcal{X}_n$ tal que para cualesquiera

[5] Uso típico del principio de elecciones dependientes

$x, y \in \mathcal{X}_n$, $d_n(x, y) < 1$. Lo anterior permitirá definir sobre $\mathcal{X}$ una métrica d[6], tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n),$$

con $x = (x_n)_{n\in\omega}$ y $y = (y_n)_{n\in\omega}$[7].

Ahora veamos que la topología que induce esta métrica coincide con la topología producto. Para cada $x \in X, \epsilon > 0$ y $m \in \omega$ defina:

$$\mathcal{U}_\epsilon^m(x) = B_\epsilon(x_0) \times \cdots \times B_\epsilon(x_m) \times \prod_{n=m+1}^{\infty} \mathcal{X}_n.$$

Notar que $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_m^\epsilon(x) : x \in X, \epsilon > 0, m \in \omega\}$ es una base para la topología producto. Sean U un conjunto abierto en X y $x \in U$, afirmamos que U es un abierto en la topología inducida por la métrica d. En efecto, al ser $\mathfrak{U}$ base para la topología producto existen $\epsilon > 0$ y $m \in \omega$ tal que $\mathcal{U}_\epsilon^m(x) \subset U$, observemos que $B_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x) \subseteq \mathcal{U}_\epsilon^m$ y por tanto $x \in B_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x) \subseteq U$, de lo cual se sigue que U es un conjunto abierto en la topología inducida por la métrica d. Con lo anterior se ha visto que $\tau \subseteq \tau_d$.

Ahora para la otra inclusión, sea $\epsilon > 0$ y recordando que las bolas abiertas forman una base para la topología inducida por la métrica d. Afirmamos que $B_\epsilon(x)$ es un conjunto abierto en la topología producto. En efecto, dado que la serie $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}}$ converge, existe $m \in \omega$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$, y existe $\delta > 0$ tal que si $n \leq m$, $y_n \in \mathcal{X}_n$ y $d_n(x_n, y_n) < \delta$ entonces $\sum_{n=0}^{n=m} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $y \in X$ tal que para cada $n < m$ se cumple que $d_n(x_n, y_n) < \epsilon$, entonces $d(x, y) < \epsilon$. Por tanto $\mathcal{U}_\delta^m(x) \subseteq B_\epsilon(x)$. Con lo anterior se asegura que los conjuntos abiertos en la topología inducida por la métrica d, también son abiertos en la topología producto. Por tanto se tiene que $\tau_d \subseteq \tau$. Por tanto las topologías coinciden y así X es un espacio metrizable.

Ahora veamos que la métrica d, es completa. Sea $(x^k)_{k\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en X, para cada $n \in \omega$ la sucesión $(x_n^k)_{n\in\omega}$ es de Cauchy en $\mathcal{X}_n$ y dado que cada $\mathcal{X}_n$ es un espacio métrico completo, se tiene que $(x_n^k)_{n\in\omega}$ es convergente en $\mathcal{X}_n$, es decir $x_n^k \to y_n$ con $y_n \in \mathcal{X}_n$. Sea $x = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in X$, entonces $x^k \to x$ cuando $k \to \infty$. Por tanto (X, d) es un espacio métrico completo. Por todo lo anterior se tiene que X es un espacio polaco. $\square$

[6] La verificación de que d es una métrica no es difícil de realizar.

[7] Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n)$ es convergente pues para cada $n \in \omega$ se cumple que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ donde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ es convergente.

Observación 3.35. *Si A es un espacio discreto, se cumple que A es completamente metrizable y numerable entonces A es un espacio polaco. De lo anterior podemos afirmar que A^ω, visto como producto topológico de ω copias de A, es polaco si A es discreto y numerable.*

Cabe hacer mención que el producto arbitrario de espacios polacos no puede ser polaco salvo en casos triviales, puede consultar la prueba de ello en [10].

3.4.1. Árboles

Dos espacios polacos que representan un papel protagonista en la teoría descriptiva de conjuntos y de nuestro interés, son el espacio de Baire y el espacio de Cantor, para estudiar estos definamos un espacio aún más general en donde los espacios anteriores serían no más que casos particulares de este.

Definición 3.36. *Sean A un conjunto no vacío y $n \in \omega$. Entonces se definen las siguientes conjuntos;*

1. $A^n := \{s : \{0, \dots, n-1\} = n \to A | s \text{ es función}\}$, *es decir, el conjunto A^n consiste de todas las sucesiones de longitud n con elementos en A.*
2. $A^{<n} = \bigcup_{m<n} A^m$.
3. $A^{\leq n} = A^{<n} \cup A^n$.
4. $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$.

*Si $s \in A^n$ entonces al número natural n se le denomina la **longitud** de s, denotada por $l(s)$.*

Observación 3.37.

1. *Si $s \in A^n$ y $k < n$, entonces denotaremos por s_k a $s(k)$. De esta forma representaremos por $(s_0, \dots, s_{n-1})$ al elemento s.*
2. *Se denotará por el conjunto $\emptyset$ a la función $s \in A^0$.*

En lo sucesivo A es un conjunto no vacío.

Definición 3.38. *Sean $s, t \in A^{<\omega}$. Se define la **concatenación** de s seguida de t, denotada por $s\,\hat{}\,t$, como la sucesión;*

$$s\,\hat{}\,t : l(s) + l(t) \to A \ \text{ tal que, } \ s\,\hat{}\,t = (s_0, \dots, s_{l(s)-1}, t_0, \dots, t_{l(t)-1}) \in A^{l(s)+l(t)}$$

$$\text{Esto es para cada } x < l(s) + l(t) \text{ se tiene, } \quad s\,\hat{}\,t(x) = \begin{cases} s(x), & \text{si } x < l(s) \\ t(x - l(s)), & \text{si } x \geq l(s) \end{cases}$$

Observación 3.39. *Si $s \in A^n$ con $n \in \omega$ y $a \in A$, $s\,\hat{}\,(a)$ representa a la función $h \in A^{n+1}$ tal que $h\restriction_n = s$ y $h(n) = a$. Tal función se denotará por $s\,\hat{}\,a$ cuando no haya riesgo de confusión.*

En el conjunto $A^{<\omega}$ se puede definir la siguiente relación de orden: para cualesquiera $s, t \in A^{<\omega}$: $s \leq t$ si y sólo si $s \subset t$. No es difícil verificar que la anterior relación de orden es un orden parcial sobre $A^{<\omega}$. Si $s \leq t \equiv s \subset t$, diremos que t extiende a s.

Definición 3.40. *Sea A un conjunto, $T \subseteq A^{<\omega}$ se denomina un **árbol** sobre A si cumple:*

$$(\forall\ t \in T)(\forall\ s \in A^{<\omega})(s \leq t \Rightarrow s \in T)$$

Se considerará a todo árbol como un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión.

Definición 3.41. *Sean $a, b \in A$ y $\leq -$un orden en A. Diremos que a, b son **$\leq$-comparables** si, $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Definición 3.42. *Sea A un conjunto ordenado respecto al orden $\leq$ y sea $C \subset A$. C es una **cadena** en A si para cualesquiera $a, b \in C$ son $\leq$-comparables.*

Definición 3.43. *Sea A un conjunto ordenado respecto a algún orden. Diremos que una cadena C es **maximal** en A si no existe otra cadena C' en A tal que C este contenida propiamente en C'.*

Definición 3.44. *Sea A un conjunto y T un árbol sobre A. Entonces,*

1. *Una **rama** sobre T es una cadena $\mathfrak{C} \subset T$, $\leq$-máximal.*
2. *Un elemento $x \in A^\omega$ se denomina **rama infinita** de T si para todo $n \in \omega$, se tiene que, $x\restriction_n \in T$.*

Definición 3.45. *Sea A un conjunto y T un árbol sobre A. El **cuerpo** de T denotado por $[T]$, se define como:*

$$[T] = \{x \in A^\omega : x \text{ es una rama infinta de } T\}.$$

Consideremos el conjunto A con la topología discreta. Por el teorema de Tychonoff es posible definir la topología producto en A^ω. El objetivo ahora será definir una topología en $A^{<\omega}$ a partir de subconjuntos especiales del árbol $A^{<\omega}$ llamados conos y verificar que ambas topologías coinciden. Notemos que si A es numerable entonces tanto A como A^ω son espacios polacos.

Definición 3.46. *Sean A un conjunto con $|A| > 1$ y $s \in A^{<\omega}$. Se define el **cono generado** por s, denotado por $\langle s \rangle$, como:*

$$\langle s \rangle = \{x \in A^\omega : s \subseteq x\}.$$

Observación 3.47. *Para cualesquiera $s, t \in A^{<\omega}$ ocurre una y sólo una de las siguientes condiciones:*

1. $\langle s\rangle \subset \langle t\rangle$ *ó*
2. $\langle t\rangle \subset \langle s\rangle$ *ó*
3. $\langle s\rangle \cap \langle t\rangle = \emptyset$.

Demostración.
Supongamos que $s \neq t$. Si $s \subset t$, entonces se garantiza que $\langle t\rangle \subset \langle s\rangle$, pues si $m = \text{mín}\{dom(t) \setminus dom(s)\}$ es posible elegir $a \in A$ tal que $a \neq t(m)$ entonces $s' \in A^{\omega}$ tal que $s' \restriction_{dom(s)+1} = s\hat{\ }a$, cumple que, $s' \in \langle s\rangle \setminus \langle t\rangle$.

Si $t \subset s$, entonces de manera análoga se demuestra que $\langle s\rangle \subsetneq \langle t\rangle$.

Si $s \neq t$, $s \not\subset t$ y $t \not\subset s$, entonces se afirma que $\langle s\rangle \cap \langle t\rangle = \emptyset$. En efecto pues tomando $s \diamond t = \text{mín}\{k \in dom(s) \cap dom(t) | s(k) \neq t(k)\}$. Si $x \in \langle s\rangle$, entonces $x(s \diamond t) = s(s \diamond t) \neq t(s \diamond t)$ y por tanto $x \notin \langle t\rangle$. □

Proposición 3.48. $\mathfrak{B} = \{\langle s\rangle : s \in A^{<\omega}\}$ *es una base para alguna topología en* A^{ω}.

Demostración.
Basta observar lo siguiente, si $\prod_{n\in\omega} U_n$ es un básico canónico de A^{ω} y para los U_n, subconjuntos propios de A que son singulares, puede fijarse en $n_0 = \text{máx}\{n \in \omega : |U_n| = 1\}$, así para cada $m \in \omega$ tal que $m \leq n_0$ se elige $x_n \in U_n$ y $s : n_0 + 1 \to A$ es una función, tal que para cada $m \leq n_0$ se tiene que $s_m = x_m$, entonces $\langle s\rangle \subseteq \prod_{n\in\omega} U_n$.

Además si $s \in A^n \subseteq A^{<\omega}$, se define una familia de abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ donde para cada $m < n$, $U_m = \{s_m\}$ y si $m \geq n$, $U_n = A$, entonces $\langle s\rangle = \prod_{n\in\omega} B_n$. □

Denotemos a esta topología como τ_A, ahora denotando a la topología producto en A^{ω} por τ_T donde A tiene la topología discreta no es difícil verificar que $\tau_A = \tau_T$. En efecto pues dado $s \in A^{<\omega}$ y $n = l(s)$, se puede definir $\mathfrak{U}_s = \bigcap_{i\in I} \pi^{-1}(\{s(i)\})$ donde I es un conjunto finito de índices, lo cual implica que $\mathfrak{U}_s = \langle s\rangle \in \tau_T$, es decir $\tau_A \subseteq \tau_T$. Para la otra contención, sea U un abierto básico en τ_T, entonces existe $F \subset \omega$ finito y para todo $i \in F$, existe $y_i \in A$ tal que $U = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(\{y_i\})$. Así, para cada $x \in U$ y $m = \text{máx}\{i \in \omega : i \in F + 1\}$ se cumple $x \in \langle x \restriction_m\rangle \subseteq U$. Por tanto $\tau_T \subseteq \tau_A$.

Definición 3.49. *Sea A un conjunto. Un árbol, $T \subset A^{<\omega}$, se denomina **bien podado** si:*

$$(\forall\ s \in T)(\exists t \in T)(s \neq t\ \wedge\ s \subseteq t).$$

Sean $T \subset A^{<\omega}$ y $s, t \in T$. Diremos que t es sucesor inmediato para s si, $s \subset t$ y $|t \setminus s| = 1$

Definición 3.50. *Sea A un conjunto. Un árbol, $T \subset A^{<\omega}$, es de **ramificación finita** si para cada $s \in T$, $\{t \in T : t$ es sucesor inmediato de $s\}$, es un conjunto finito.*

Lema 3.51 (König)**.** *Sea A un conjunto. Si T es un árbol infinito de ramificación finita sobre A, entonces T admite una rama infinita, es decir $[T] \neq \emptyset$.*

Demostración.
Sabemos que $\emptyset \in T$. Como T es infinito entonces $\emptyset$ tiene infinidad de sucesores, al ser T de ramificación finita existe $t_0 \in T$ tal que t_0 es sucesor inmediato de $\emptyset$. Como $t_0 \in T$, entonces t_0 tiene infinidad de sucesores luego al ser T de ramificación finita, existe $t_1 \in T$ tal que t_1 es sucesor inmediato de t_0. Recursivamente se construirá la siguiente rama infinita:

$$x = t_0\hat{\ }t_1\hat{\ }\cdots\hat{\ }t_n\hat{\ }\cdots \in [T].$$

Por tanto $[T] \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 3.52. *Sea A un conjunto, si T es un árbol bien podado sobre A entonces T es de ramificación finita si y sólo si $[T]$ es compacto.*

Demostración.
$\Leftarrow]$ Supongamos que T no es de ramificación finita, entonces existe $s \in T$ tal que s admite una cantidad infinita de sucesores. Sea $A_s := \{a \in A : s\hat{\ }a \in T\}$ que cumple $|A_s| \geq \aleph_0$. Sea $\mathcal{C} = \{\langle s\hat{\ }a\rangle : a \in A_s\}$ y $\mathcal{C}' = \{\langle x\restriction_{l(s)}\rangle : x \in [T]\ \wedge\ x\restriction_{l(s)} \neq s\}$, luego se afirma que $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ es una cubierta abierta para $[T]$. En efecto, pues dado $x \in [T]$ se cumple que x es una rama infinita de T, de ahí que $x\restriction_{l(s)} \in T$. Si $x\restriction_{l(s)} = s$ existe $a \in A$ tal que $x \in \langle s\hat{\ }a\rangle$, en el otro caso, es decir, si $x\restriction_{l(s)} \neq s$, entonces existe $s' \in T$ tal que $l(s) = l(s')$ y $x \in \langle s'\rangle$. Así, se tiene lo pedido. Más aún $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ no admite una subcubierta finita pues dados $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tales que $s\hat{\ }a_1, s\hat{\ }a_2 \in T$ entonces por la observación anterior $\langle s\hat{\ }a_1\rangle \cap \langle s\hat{\ }a_2\rangle = \emptyset$. Luego se contradice la compacidad de $[T]$. Por tanto T es de ramificación finita.

$\Rightarrow]$ Veamos que $[T]$ es compacto. Recordar que basta con fijarse en los elementos de la base estándar, sean $\mathcal{C} = \{\langle s_i\rangle : i \in I\}$ una cubierta abierta de básicos en $[T]$ y $T' = \{t \in T : (\forall\ i \in I)(\langle t\rangle \setminus \langle s_i\rangle \neq \emptyset)\}$. Se afirma que T' es finito. En efecto, supongamos que T' es infinito y note que T' es un árbol de ramificación finita, luego por el lema de könig $[T'] \neq \emptyset$, es decir, existe x rama infinita de $[T']$, lo cual es falso pues $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de $[T]$ y $x \in [T'] \subseteq [T]$. Por tanto T' es finito.

Notar que, si $\langle\emptyset\rangle \in \mathcal{C}$, entonces $[T] = \langle\emptyset\rangle$ y $\{\langle\emptyset\rangle\}$ es subcubierta finita de $\mathcal{C}$. En caso contrario, sea $T'' = \{t \in T' : \nexists\, r \in T', t \subseteq r\}$, note que $T'' \subseteq T'$ y por tanto T'' es finito. Para cada $t \in T''$ existen $S^t_{i_1}, S^t_{i_2}, \ldots, S^t_{i_{n_t}}$ con $n_t \in \omega$, $i_l \in I$ donde $l \in \{1, \ldots, n_t\}$ tal que $\langle t\rangle \subseteq \bigcup_{l \leq n_t} \langle S^t_{i_l}\rangle$. Luego, basta notar que $[T] = \bigcup_{t \in T''} \langle t\rangle$. Como $T'' \subseteq T' \subseteq T$, $\langle t\rangle \subseteq T$ para todo $t \in T''$, por lo tanto es suficiente verificar que $[T] \subseteq \bigcup_{t \in T''} \langle t\rangle$. Sea $x \in [T]$, como $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de básicos para $[T]$, existe $i \in I$ tal que $x \in \langle s_i\rangle$. En caso de que sean varios s_i elijase el que cumpla que $l(s_i)$ es mínima. Notemos que, por hipótesis $l(s_i) > 0$, así $x \restriction_{l(s_i-1)} \in T''$ y $x \in \langle x \restriction_{l(i)-1}\rangle$, de lo cual $[T] \subset \bigcup_{t \in T''} \langle t\rangle$. Por tanto $[T] = \bigcup\{\langle s^t_{i_l}\rangle : t \in T'', l \in \{1, \ldots, n_t\}\}$, y $\{\langle s^t_{i_l}\rangle : t \in T'', l \in \{1, \ldots, n_t\}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{C}$. Por tanto $[T]$ es compacto. $\square$

3.4.2. Espacios Polacos Perfectos

Definición 3.53. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Diremos que $\mathcal{X}$ es **cero-dimensional** si el espacio $\mathcal{X}$ posee una base formada por conjuntos abiertos-cerrados.*

Se puede verificar que todo espacio cero-dimensional es normal.

Definición 3.54. *Se define el espacio de **Cantor** como el subespacio de ω^ω formado por todas las sucesiones de $\{0,1\}$, es decir, $\mathcal{C} = 2^\omega \subset \omega^\omega$ donde $2 = \{0,1\}$.*

El siguiente resultado establece como todo espacio perfecto no vacío admite una copia del espacio perfecto de Cantor. En particular todo espacio perfecto no vacío es no numerable.

Definición 3.55. *Un **esquema de Cantor** (EC) sobre un conjunto $\mathcal{X}$ es una familia $\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}$ de subconjuntos no vacíos de $\mathcal{X}$ tal que para todo $s \in 2^{<\omega}$, cumple lo siguiente:*

1. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$.

2. $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$, *con* $i \in \{0,1\}$.

Teorema 3.56. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco perfecto no vacío. Entonces existe un encaje de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{X}$.*

Demostración.
Constrúyase recursivamente una familia $\{O_s : s \in 2^{<\omega}\}$ sobre $\mathcal{X}$ tal que para cada $s \in 2^{<\omega}$ se cumple lo siguiente:

- O_s es un conjunto abierto no vacío.
- $diam(O_s) < \frac{1}{2^{l(s)}}$.
- $O_{s\frown 0} \cap O_{s\frown 1} = \emptyset$.
- Si $i \in 2$ entonces $\overline{O_{s\frown i}} \subset O_s$.

Para comenzar elíjase $O_\emptyset$ un abierto no vacío en $\mathcal{X}$ tal que $diam(O_\emptyset) < \frac{1}{2^0} = 1$, supóngase que se ha definido O_s para $s \in 2^{<\omega}$ y se desea definir $O_{s\frown 0}$ y $O_{s\frown 1}$. Sean $x_0, x_1 \in O_s$ tal que $x_0 \neq x_1$, la elección de tales elementos se puede realizar porque $\mathcal{X}$ es perfecto, es decir $|O_s| > 1$. Como el espacio $\mathcal{X}$ es metrizable entonces $\mathcal{X}$ es normal, de ahí que podemos encontrar dos abiertos U_1, U_2 ajenos tales que $x_0 \in U_1 \subset \overline{U_1} \subseteq O_s$ y $x_2 \in U_2 \subset \overline{U_2} \subseteq O_s$, definamos $O_{s\frown 0} = U_1$ y $O_{s\frown 1} = U_2$. Nótese que por construcción la familia $\{O_s : s \in 2^{<\omega}\}$ es un EC y para todo $x \in \mathcal{X}$, $\bigcap_{n\in\omega} O_{x\restriction n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{O_{x\restriction n}}$. Dado que $\mathcal{X}$ es un espacio métrico completo, $\mathcal{X}$ posee la propiedad de intersección finita de Cantor, con lo cual $\bigcap_{n\in\omega} \overline{O_{x\restriction n}} \neq \emptyset$. Más aún $\left|\bigcap_{n\in\omega} O_{x\restriction n}\right| = 1$.

Sea $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ la función dada por $\varphi(x) = P_x$, donde $\{P_x\} = \bigcap_{n\in\omega} O_{x\restriction n}$. Afirmamos que φ es una función inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \mathcal{C}$ tales que $x \neq y$. Veamos que $P_x \neq P_y$. Para ello note que al ser $x \neq y$ existe $n \in \omega$ tal que n es el mínimo natural que cumple $x(n) \neq y(n)$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x(n) = 0$ y $y(n) = 1$, entonces $O_{x\restriction n} = O_{y\restriction n}$ y $O_{x\restriction n+1} \cap O_{y\restriction n+1} = O_{x\restriction n\frown 0} \cap O_{y\restriction n\frown 1} = \emptyset$. Por lo tanto $P_x \neq P_y$.

Veamos que φ es continua. Sea $U \subset \mathcal{X}$ un conjunto abierto. Afirmamos que $\varphi^{-1}[U]$ es abierto en $\mathcal{C}$. En efecto, si $\varphi^{-1}[U] = \emptyset$ es claro. Ahora, si $\varphi^{-1}[U] \neq \emptyset$, sea $x \in \varphi^{-1}[U]$, como U es abierto en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es perfecto entonces $diam(U) > 0$ pues al ser perfecto el espacio $\mathcal{X}$ se garantiza que la cardinalidad del conjunto U es mayor que uno. Y como $\lim_{n\to\infty} diam(O_{x\restriction n}) = 0$, existe $n \in \omega$ tal que $P_x \in O_{x\restriction n} \subset U$. Veamos que $\langle x \restriction_n \rangle \subseteq \varphi^{-1}[U]$. Sea $z \in \langle x \restriction_n \rangle$, entonces $z \restriction_n = x \restriction_n$ de ahí que $O_{x\restriction n} = O_{z\restriction n}$, así $\varphi(z) \in O_{x\restriction n} \subset U$. Por tanto $y \in \varphi^{-1}[U]$. Por tanto φ es continua.

Como φ es una función continua, $\mathcal{C}$ un espacio compacto y $\mathcal{X}$ un espacio Hausdorff se tiene que $\varphi[\mathcal{C}]$ es compacto en $\mathcal{X}$. Por tanto φ es cerrada. Por todo lo anterior se garantiza que φ es un encaje de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{X}$. □

Teorema 3.57. *(Cantor-Bendixson) Sea $\mathcal{X}$ un espacio polaco. Entonces existen P y $\mathcal{N}$ conjuntos ajenos donde P es perfecto y $\mathcal{N}$ es abierto numerable tal que $\mathcal{X} = P \cup \mathcal{N}$, más aún esta descomposición es única.*

Demostración.
Sean $\mathcal{X}$ un espacio polaco y tomemos $U = \{U_n : n \in \omega\}$ base numerable para

$\mathcal{X}$. Defínanse los conjuntos $P = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{toda vecindad de x es no numerable}\}$[8] y $\mathcal{N} = \mathcal{X} \setminus P$. Notemos que $\mathcal{N} = \bigcup\{U_n \in U : U_n \text{ es numerable }\}$ y P es un conjunto cerrado pues contiene todos sus puntos de acumulación. Veamos que P es un conjunto perfecto, sean $x \in P$ y V una vecindad de x la cual es no numerable. Demostremos que x es punto de acumulación para P. Afirmamos que $V \setminus \{x\} \cap P \neq \emptyset$. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, $V \setminus \{x\} \cap P = \emptyset$, entonces $V \setminus \{x\} \subset \mathcal{X} \setminus P = \mathcal{N}$ el cual es numerable, de ahí que V es numerable, lo cual es falso.

Para mostrar la unicidad, supongamos que $\mathcal{X} = P_1 \cup \mathcal{N}_1$ con P_1 perfecto y $\mathcal{N}_1$ abierto numerable. Verifiquemos primero $P_1 \subset P$. Dado que P_1 es cerrado en $\mathcal{X}$, de ahí P_1 es polaco por la Proposición 3.28. Así P_1 es polaco y perfecto. Sean $x \in P_1$ y U vecindad abierta de x en $\mathcal{X}$. Entonces $U \cap P_1 \neq \emptyset$ y note que P_1, al ser perfecto es un conjunto cerrado. Por el Teorema 3.31 se tiene que $U \cap P_1$ es un conjunto G_δ y por Teorema 3.33, es polaco. Así $U \cap P_1$ es polaco y perfecto. Luego por Teorema 3.56 contiene una copia del espacio de Cantor, de ahí que es no numerable por tanto U también lo es. Por tanto $x \in P$.

Ahora veamos que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, lo cual es claro pues dado $x \in \mathcal{N}_1$ resulta que $x \in \mathcal{N}$ pues $\mathcal{N}_1$ es abierto numerable. Por todo lo anterior se tiene que $P = P_1$ y $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$. □

Observación 3.58. *Sea $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ con $\mathcal{X}$ un espacio cualquiera, si $\mathcal{Y}$ es un espacio polaco perfecto entonces $\mathcal{Y}$ coincide con los puntos de condensación en $\mathcal{X}$.*

Hay que tomar en cuenta que cualquiera de los conjuntos citados en el teorema anterior pueden ser vacío. Con lo cual se puede tener el siguiente resultado.

Corolario 3.59. *Todo espacio polaco infinito es numerable o tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Teorema 3.60. *El espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es el único espacio (salvo homeomorfismo) perfecto, compacto, cero-dimensional no vacío.*

Demostración.
Veamos que $\mathcal{C}$ cumple las propiedades que se afirman. $\mathcal{C}$ es compacto por la Proposición 1.77. Por la Observación 3.35 se tiene que $\mathcal{C}$ es polaco y por tanto metrizable. El que $\mathcal{C}$ sea perfecto se sigue por la Proposición 3.48 y del hecho de que para cada $s \in 2^{<\omega}$ se tiene que $\langle s \rangle$ es infinito. Que $\mathcal{C}$, sea cero-dimensional también esta dado por la Proposición 3.48.

[8]A los puntos en P también se les conoce como puntos de condensación.

Ahora supongamos que $\mathcal{X}$ cumple lo anterior. Construiremos un EC, $(C_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ sobre $\mathcal{X}$ tal que:

1. $C_\emptyset = \mathcal{X}$,
2. Para cada $s \in 2^{<\omega}$: C_s es un conjunto cerrado-abierto distinto del vacío,
3. Para cada $s \in 2^{<\omega}$: $C_s = C_{s^\frown 0} \cup C_{s^\frown 1}$,
4. Para cada $x \in \mathcal{C}$, $\lim_{n\to\infty} diam(C_{x\restriction n}) = 0$.

Dado que $\mathcal{X}$ es cero dimensional, existe una base $\mathfrak{B}$ de conjuntos abiertos y cerrados. Defínase $C_\emptyset = \mathcal{X}$ y C_1 una cubierta abierta de $\mathcal{X}$ formada con elementos de la base $\mathfrak{B}$ con $diam < 1$. Como $\mathcal{X}$ es un espacio compacto, existe $n \in \omega$ y familia finita de conjuntos $\{X_1, \ldots, X_n\}$ tal que $diam(X_i) < 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{i=n} X_i$ y para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos se tiene que $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Si $n \in \omega$ denotaremos por 0^n a la sucesión de longitud n que consta unicamente de ceros. Si $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ se define $C_{0^i\frown 1} = X_{i+1}$, $C_{0^{n-1}} = X_n$ y $C_{0^i} = X_{i+1} \cup \cdots \cup X_n$. Por la Proposición 1.77 se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i es un subespacio compacto al ser cerrado. Luego podemos repetir el proceso para cada X_i usando una cubierta de elementos en $\mathfrak{B}$ con $diam < 1/2$ y así recursivamente.

Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ una función tal que para cada $x \in \mathcal{C}$, $f(x) \in \bigcap_{n\in\omega} C_{x\restriction n}$. De manera análoga a la prueba hecha en el Teorema 3.56 se tiene que f es un homeomorfismo. □

Otro ejemplo de espacio polaco perfecto es el siguiente:

Definición 3.61. *Llamaremos al espacio $\mathcal{N} = \omega^\omega$ **espacio de Baire**, el cual representa el espacio de todas las sucesiones de números naturales, donde se considerará a ω como espacio discreto y tomaremos en $\mathcal{N}$ la topología discreta.*

Para adentrarnos un poco respecto a los espacios de Baire, en particular $\mathcal{N}$, será necesario introducir las siguientes definiciones.

Definición 3.62. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no vacío. Un **esquema de Luzin** en $\mathcal{X}$ es una familia $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que cumple lo siguiente:*

1. *Si $s \subset t$ entonces $A_t \subset A_s$.*
2. *Si $s \in \omega^{<\omega}$ y $i \neq j$ con $i, j \in \omega$, entonces $A_{s^\frown i} \cap A_{s^\frown j} = \emptyset$.*

Definición 3.63. *Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico y $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ es un esquema de Luzin sobre $\mathcal{X}$, diremos que $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ es de* ***diámetro cero*** *si para cada $x \in \mathcal{N}$, $\lim_{n\to\infty} diam(A_{x\restriction n}) = 0$.*
En este caso, si $\mathfrak{D} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n} \neq \emptyset\} \subseteq \omega^{<\omega}$, defínase $\varphi : \mathfrak{D} \to \mathcal{X}$ como $\{\varphi(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n}$.

Proposición 3.64. *Sean $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico y $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ un esquema de Luzin sobre $\mathcal{X}$ de diámetro cero, entonces si φ se define como arriba, tenemos que:*

1. *φ es una función inyectiva y continua.*
2. *Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico completo y cada A_s es un conjunto cerrado, entonces $\mathfrak{D}$ es un conjunto cerrado.*
3. *Si cada A_s es un conjunto abierto, entonces φ es un encaje.*

Demostración.
Notemos que φ está bien definida pues dada la familia $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$, la cual es de diámetro cero, se tiene que para cualquier $x \in \mathfrak{D}, \lim_{n\to\infty} diam(A_{x\restriction n}) = 0$ y $\bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n} \neq \emptyset$. Por tanto $|\bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n}| = 1$. Para ver la inyectividad, tomemos $x, y \in \mathfrak{D}$ tales que $x \neq y$ (es decir $p \neq m$ para algunos $p, m \in \omega$). Sea $n = \min\{k \in \omega \mid x(k) \neq y(k)\}$ entonces $A_{x\restriction n+1} \cap A_{y\restriction n+1} = \emptyset$, por definición de esquema de Luzin. Y por como se definió φ se sigue que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Para mostrar la continuidad de φ tomemos $x \in \mathfrak{D}$ y $B_\epsilon(\varphi(x)) \subset V_{\varphi(x)}$. Como $\{\varphi(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction n}$ con diámetro cero, entonces existe $N_0 \in \omega$ tal que $diam(A_{x\restriction m}) < \epsilon/2$ para todo $m \geq N_0$. Sea $s = x \restriction_{N_0}$, veamos que $\langle s\rangle \cap \mathfrak{D} \subseteq \varphi^{-1}[B_\epsilon(\varphi(x))]$. Dado $y \in \langle s\rangle \cap \mathfrak{D}$, $x \restriction_{N_0} = s = y \restriction_{N_0}$ y $\varphi(y) \in A_{x\restriction_{N_0}} \subseteq B_\epsilon(\varphi(x))$. Por tanto $\varphi(\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}) \subseteq B_\epsilon(\varphi(x))$.

Supongamos que $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico completo donde cada A_s es un conjunto cerrado, veamos que $\mathfrak{D}$ es cerrado. Sean $x \in \mathcal{N}$ y $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{D}$ tal que $x_n \to x$. Afirmamos que $(\varphi(x_n))_{n\in\omega}$ es de Cauchy en $\mathcal{X}$. En efecto, sea $\epsilon > 0$, dado que $\lim_{n\to\infty} diam(A_{x\restriction n}) = 0$, existe $N \in \omega$ tal que $diam(A_{x\restriction_N}) < \epsilon$, y por hipótesis, existe $M \in \omega$ tal que si $n > M : d(x_n, x) < \frac{1}{2^{N+1}}$, entonces $x_n \restriction_N = x \restriction_N$. Luego dados $n, m > M$, $x_n \restriction_N = x \restriction_N = x_m \restriction_N$, $A_{x_n\restriction_N} = A_{x\restriction_N} = A_{x_m\restriction_N}$, de lo cual se tiene que $\varphi(x_n), \varphi(x_m) \in A_{x\restriction_N}$ y dado que $diam(A_{x\restriction_N}) < \epsilon$, se tiene $d(\varphi(x_n, \varphi(x_m)))\epsilon$. Por tanto $(\varphi(x_n))_{n\in\omega}$ es de Cauchy en $\mathcal{X}$ y como $(\mathcal{X}, d)$ es completo, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $\varphi(x_n) \to y$.

Ahora, sea $n \in \omega$. Como $x_n \to x$ existe $k \in \omega$ tal que si $m > k$, $d(x_m, x) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Así $x_m \restriction_n n = x \restriction_n$, de ahí que $\varphi(x_m) \in A_{x_m\restriction_n} = A_{x\restriction_n}$ para cada $m > k$ y como

$A_{x\restriction_n}$ es cerrado, $y \in A_{x\restriction_n}$. Por tanto $x \in \mathfrak{D}$ y $\varphi(x) = y$.

Por último veamos que φ es un encaje. Supongamos que cada A_s es abierto, luego observe que para verificar que φ es un homeomorfismo sobre su imagen basta ver que φ^{-1} es continua, equivalentemente, que φ es abierta. Para ello, sea $\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}$ un abierto básico en $\mathfrak{D}$, lo cual se garantiza porque la colección de $\langle s\rangle$ forman una base para $\mathcal{N}$. Por tanto basta ver que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $\varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}]$ es un abierto en $\varphi[\mathfrak{D}]$.

Afirmación. $\varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}] = \varphi[\mathfrak{D}] \cap A_s$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$.
$\subseteq]$ Como $\langle s\rangle \cap \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$, entonces $\varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}] \subseteq \varphi[\mathfrak{D}]$. Ahora, sea $y \in \varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}]$, existe $x \in \langle s\rangle \cap \mathfrak{D}$ tal que $\varphi(x) = y$. Dado que $x \in \langle s\rangle$, existe $n \in \omega$ tal que $s = x\restriction_n$ y $\varphi(x) \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction_n} \subseteq A_s$, entonces $y = \varphi(x) \in A_s$. Por tanto $\varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}] \subseteq \varphi[\mathfrak{D}] \cap A_s$.
$\supseteq]$ Sea $y \in \varphi[\mathfrak{D}] \cap A_s$, existe $x \in \mathfrak{D}$ tal que $y = \varphi(x)$. De lo anterior se puede decir que, basta ver que $s \subseteq x$ para garantizar que $x \in \langle s\rangle$. Supongamos que $s \not\subseteq x$, existe $m \in \omega$ tal que $s(m) \neq x(m)$. Tomemos $n = \min\{k \in \omega \mid s(k) \neq x(k)\}$, así $s\restriction_{n-1} = x\restriction_{n-1}$ y $A_{s\restriction_{n-1}\frown s(n)} \cap A_{x\restriction_{n-1}\frown x(n)} = \emptyset$ por esquema de luzin. Notemos que $A_s \subseteq A_{s\restriction_{n-1}\frown s(n)}$ y $\varphi(x) = y \in A_s$, de ahí que $\varphi(x) \in A_{s\restriction_{n-1}\frown s(n)}$. Además $\varphi(x) \in \bigcap_{n\in\omega} A_{x\restriction_n} \subseteq A_{x\restriction_{n-1}\frown x(n)}$. Por tanto $\varphi(x) \in A_{s\restriction_{n-1}\frown s(n)} \cap A_{x\restriction_{n-1}\frown x(n)}$ lo cual es falso. Por tanto $\varphi[\mathfrak{D}] \cap A_s \subseteq \varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}]$.

Por tanto se cumple la afirmación y como A_s es abierto en $\mathcal{X}$ se tiene que $\varphi[\langle s\rangle \cap \mathfrak{D}]$ es abierto en $\varphi[\mathfrak{D}]$. Por todo lo anterior φ es un encaje. $\square$

Teorema 3.65. *(Alexandroff-Urysohn) El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es el único, salvo homeomorfismo, espacio polaco no vacío, cero dimensional, cuyos subconjuntos compactos tienen interior vacío.*

Demostración.
Veamos que $\mathcal{N}$ cumple las propiedades dichas.

- $\mathcal{N}$ es un espacio polaco.
- $\mathcal{N}$ es cero dimensional pues se demostró que la topología producto en $\mathcal{N}$ coincide con la topología generada por la familia $\mathfrak{B} = \{\langle s\rangle \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ donde los elementos en $\mathfrak{B}$ son abiertos-cerrados.
- Veamos que todo conjunto compacto en $\mathcal{N}$ tiene interior vacío. Sea $A \subseteq \mathcal{N}$ compacto y supongamos que $i(A) \neq \emptyset$. Luego existe $x \in \omega^\omega$ y $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in \langle s\rangle \subseteq i(A) \subseteq A$. Sea $s = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ con $n \in \omega$, entonces defínase $C_0 = s \frown \{0\} = (s_0, \ldots, s_{n-1}, 0) \in \omega^{<\omega}$. Se construye el cono de C_0, $\langle C_0\rangle$ tal que $\langle C_0\rangle \subseteq \langle s\rangle$, de la misma manera se realiza para cada $n \in \omega$.

Así $C_n = s \frown \{n\}$ tal que $\langle C_n\rangle \subseteq \langle s\rangle$.

Afirmación.

1. $\langle C_n\rangle \cap \langle C_m\rangle = \emptyset$ si $n \neq m$.
2. $\langle s\rangle \subseteq \bigcup_{n\in\omega}\langle C_n\rangle$.

(1) se sigue por la Observación 3,47. Para (2), sea $x \in \langle s\rangle$, $s \subset x$. Sea $k = x(l(s)+1)$, $C_{n_k} = (s_0, \ldots, s_{n-1}, l(s)+1)$, de ahí que $x \in \langle C_{n_k}\rangle$. Por tanto $\langle s\rangle \subseteq \bigcup_{n\in\omega}\langle C_n\rangle$. Como $\langle C_n\rangle \cap \langle s\rangle \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$ entonces $\{\langle C_n\rangle \mid n \in \omega\}$ es una cubierta abierta de $\langle s\rangle$ que no contiene subcubierta abierta finita. Por lo tanto $\langle s\rangle$ no es compacto, lo cual es falso.

Ahora, sea $(\mathcal{X}, \tau)$ un espacio Polaco, cero dimensional y tal que $i(K) = \emptyset$. Si $K \subset \mathcal{X}$ entonces K es compacto. Sin perdida de generalidad supongamos que $\forall x, y \in \mathcal{X} : d(x,y) \leq 1$, donde d es una métrica completa compatible con τ.

Afirmación. Si $U \subseteq \mathcal{X}$ un abierto no vacío y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\{U_n \mid n \in \omega\}$ partición de U (es decir $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ y $U_n \cap U_m = \emptyset$ si $n \neq m$) de conjuntos abiertos y cerrados con $diam(U_n) < \epsilon$. En efecto, sean $U \subseteq \mathcal{X}$ abierto y $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \omega\}$ base de cerrados y abiertos en $\mathcal{X}$. Si $\epsilon > 0$ es posible hallar $\{V_{n_k} \mid k \in \omega\} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $\overline{U} \subseteq \bigcup_{k\in\omega} V_{n_k}$ y $diam(V_{n_k}) < \epsilon$. Sabemos que $i(\overline{U}) \neq \emptyset$, entonces $\overline{u}$ no es compacto. Se puede suponer que para algún ϵ dado ocurre que $\overline{U}$ no puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{B}$ con $diam < \epsilon$ (en otras palabras se está diciendo que $\overline{U}$ no es totalmente acotado).

Definamos recursivamente U_n con $n \in \omega$ como sigue:

- $U_0 = V_0$
- $U_n = V_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k$

donde $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es la partición buscada.

Lo anterior nos garantiza que podemos construir un esquema de Luzin $\{A_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ de diámetro cero tal que:

- $A_\emptyset = \mathcal{X}$,
- Para todo $s \in \omega^{<\omega}$: A_s es un conjunto abierto y cerrado,
- Para todo $s \in \omega^{<\omega}$: $A_s = \bigcup_{i\in\omega} A_{s\frown\{i\}}$,
- $diam(A_s) \leq 2^{l(s)}$.

Ahora veamos que $\mathfrak{D} = \mathcal{N}$. Sea $x \in \mathcal{N}$, entonces $A_{x\restriction n}$ es cerrado para cada $n \in \omega$ y $A_{x\restriction n+1} \subset A_{x\restriction n}$. Por tanto $\bigcap_{n\iota\omega} A_{x\restriction n} \neq \emptyset$ (por cantor). Por tanto $\mathcal{N} = \mathfrak{D}$.

Sea $\varphi : \mathfrak{D} \to \mathcal{X}$ definida como antes, luego por la proposición anterior se tiene que φ es biyectiva, continua y abierta. por tanto φ es un homeomorfismo. $\square$

3.5. El Espacio y Juego de Choquet

Aunque los juegos combinatorios, en su forma matemática, fueron descubiertos probablemente por primera vez a principios del siglo XVII, la noción de un juego posicional con información perfecta fue introducida en la famosa monografía de Von Neumann y Morgenstern [10]. En tal monografía, los autores consideraron juegos posicionales finitos y probaron que cada uno de tales juegos pueden ser reducidos a una matriz de juego. Más aún, si el juego posicional (finito) es uno con información perfecta, la correspondiente matriz de juego tiene un punto de silla. Sin embargo, los juegos posicionales infinitos con información perfecta fueron descubiertos un poco antes. El concepto corresponde intuitivamente a juegos como el ajedrez y las damas en los cuales los movimientos y las posiciones de un jugador son conocidos por sus oponentes en todo momento. En 1935, Stanisław Mazur propuso un juego relacionado con el Teorema de Categoría de Baire, cuya su solución fue dada por Stefan Banach. Este juego es ahora conocido como el juego de Banach-Mazur y es el primer juego infinito posicional con información perfecta. Desafortunadamente, a causa de la segunda guerra mundial, problemas como estos no fueron ampliamente conocidos hasta mediados de los años cincuenta [7]. Un poco más adelante, otros personajes que contribuyeron a la teoría de juegos infinitos (con información perfecta) fueron David Gale y F. M. Stewart el cual se puede revisar en [10].

Pese a lo comentado anteriormente, empezaremos analizando un juego más simple sobre un espacio topológico $\mathcal{X}$, el cual se denominará como juego de Choquet ($Ch(\mathcal{X})$). El juego de Choquet fue originalmente aplicado por Choquet [9] para caracterizar cuáles espacios metrizables admiten una métrica completa.

Definición 3.66. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico no vacío. El **juego de Choquet** denotado por $Ch(\mathcal{X})$, asociado al espacio topológico $\mathcal{X}$ se define como sigue: Hay dos jugadores, I y II, los cuales toman turnos alternados para ω rondas. En la ronda $i-esima$ el jugador I mueve primero de tal forma que $U_i \subseteq V_{i-1}$ si $i \geq 1$, entonces II responde con un abierto $V_i \subseteq U_i$. Una vez que todas las rondas se*

[9] [Cho69] que se encuentra en [9]

hayan llevado acabo, diremos que I gana el juego si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$, de otra manera II ganará el juego.

Definición 3.67. *Una **jugada legal** en el juego de Choquet será una sucesión finita $\{U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}, U_n\}$ o bien $\{U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\}$ tal que para todo $o < i \leq n : U_i \wedge V_i$ son abiertos tales que $V_i \leq U_i \leq V_{i-1}$.*

Una estrategia para el jugador I en el juego de Choquet es una regla que le dirá como jugar en cada ronda, la estrategia le dice cuál debe ser su siguiente movimiento dado los movimientos previos del jugador II, formalmente se define como:

Definición 3.68. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico no vacío, $Ch(\mathcal{X})$ el juego de choquet sobre $\mathcal{X}$ y denotemos por $(T, \leq)$ al árbol de todas las posibles jugadas legales en $Ch(\mathcal{X})$.*

*Una **estrategia** para el jugador I es un subárbol σ de T que cumple lo siguiente:*

- *σ es no vacío.*
- *Si $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n\rangle \in \sigma$, entonces para cada abierto $V \neq \emptyset$ tal que $V \subseteq U_n$ se cumple que $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V\rangle \in \sigma$.*
- *Si $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle \in \sigma$, entonces existe un único abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \subseteq V_n$ y $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U\rangle \in \sigma$.*

Definición 3.69. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico no vacío, $Ch(\mathcal{X})$ el juego de choquet sobre $\mathcal{X}$ y denotemos por $(T, \leq)$ al árbol de todas las posibles jugadas legales en $Ch(\mathcal{X})$. Diremos que σ es una **estrategia ganadora** para I si para cada jugada legal $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle$ ó $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}\rangle \in \sigma$ se cumple que: si tenemos una rama infinita en σ, dígase $\langle U_0, V_0, \ldots\rangle$, cuya jugada legal es segmento inicial de la sucesión $\langle U_0, V_0, \ldots\rangle$ y $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$. De manera análoga se puede definir una estrategia ganadora para el jugador II.*

Teorema 3.70. *Un espacio $\mathcal{X}$ es de Baire si y sólo si el jugador I no tiene una estrategia ganadora en $Ch(\mathcal{X})$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos que el jugador I tiene una estrategia ganadora σ y sea U_0 el primer movimiento del jugador I de acuerdo a σ. Basta ver que U_0 no es de Baire. Construyamos un subárbol $S \subseteq \sigma$ como sigue:

- Si $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}\rangle \in S$, entonces $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n\rangle \in S$ donde U_n es el único movimiento para I determinado por σ.
- Si $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n\rangle \in S$, entonces para cada $V \subseteq U_n$ abierto no vacío existe $U_V \subseteq V$ abierto tal que $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n, U_V\rangle \in S$.

Sea $\mathcal{V} = \{V \mid V \subseteq U_n \wedge V - \textit{abierto}\}$ por el lema de Kuratowsky Zorn existe una familia maximal $\mathcal{V}^*$ en $\mathcal{V}$ de subconjuntos abiertos ajenos por pares, entonces $\{U_{V^*} \mid V^* \in \mathcal{V}^*\}$ es una familia de conjuntos ajenos por pares, los elementos de S serán $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V^*, U_{V^*}\rangle$. Sean $P = \langle U_0, V_0, \ldots, U_n\rangle \in S$ y $\mathcal{U}_P = \{U_{n+1} : \exists \mathcal{V}^* \wedge \langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}\rangle \in S\}$. Afirmamos $\bigcup \mathcal{U}_P$ es denso en U_n. En efecto, supongamos lo contrario, entonces existe $V \subseteq U_n$ abierto tal que $V \cap \bigcup \mathcal{U}_P = \emptyset$, entonces $V \cap V^* = \emptyset$ para todo $V^* \in \mathcal{V}^*$, entonces $\mathcal{V}^* \cup \{V\}$ es una familia de abiertos ajenos por pares y $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \cup \{V\}$ lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{V}^*$.

Para cada $n \in \omega$, sea $W_n = \bigcup\{U_n : \langle U_0, V_0, \ldots, U_n\rangle \in S\}$, notemos que W_n es abierto, además si $V \subseteq U_0$ es un abierto no vacío, haciendo $V_0 = V$ podemos obtener una sucesión $\langle U_0, V, \ldots, U_n\rangle \in S$, luego como $U_n \subseteq V_0 = V$ es no vacío y $U_n \subseteq W_n$, entonces $V \cap W_n \neq \emptyset$. Por lo tanto W_n es denso en U_0 para cada $n \in \omega$.

Afirmación. $\bigcap W_n$ no es un conjunto denso. Basta ver que $\bigcap W_n = \emptyset$. Supongamos lo contrario, entonces existe $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, así existe una rama infinita en S, pero más aún dicha rama también está en σ, digamos $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, \ldots\rangle$ tal que para cada $n \in \omega$, $x \in U_n$. Notemos que la rama es única pues para cada n, la colección de los U_n es ajena por pares, de ahí que $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$, lo cual es falso pues σ es una estrategia ganadora para el jugador I.

Así, se ha construido una colección numerable de abiertos densos en U_0 cuya intersección no es densa, por tanto U_0 no es de Baire y de ahí que $\mathcal{X}$ no es de Baire.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\mathcal{X}$ no es de Baire y sea $\{G_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos-densos tal que $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ no es un conjunto denso. Sea $U_0 \subseteq \mathcal{X}$ abierto no vacío tal que $(\bigcap_{n\in\omega} G_n) \cap U_0 = \emptyset$. Sea $\langle U_0\rangle$ la primera jugada del jugador I, si $V_0 \subseteq U_0$ es una jugada del jugador II entonces V_0 es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$ y $V_0 \cap G_0 \neq \emptyset$ pues G_0 es denso en $\mathcal{X}$. Entonces podemos definir $U_1 := V_0 \cap G_0 \subseteq V_0$ como jugada del jugador I, luego si el jugador II juega con V_1 entonces el jugador I puede jugar con $U_2 := V_1 \cap G_1$ y de manera recursiva se define una estrategia para el jugador I, es decir, en general si $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle$ es una jugada del jugador II entonces $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1} = V_n \cap G_n\rangle$ es una jugada para el jugador I.

Más aún $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq (\bigcap_{n\in\omega} G_n) \cap U_0 = \emptyset$, por tanto $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$ si $\langle U_0, V_0, \ldots\rangle$ es una jugada legal. De ahí que se ha descrito una estrategia ganadora para el jugador I. □

Definición 3.71. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ se denomina* ***espacio de Choquet*** *si el jugador II tiene una estrategia ganadora en $Ch(\mathcal{X})$.*

Observación 3.72. *Todo espacio de Choquet es de Baire.*

Definición 3.73. *Dado un espacio topológico $\mathcal{X}$ no vacío, se define el* ***juego fuerte de Choquet*** *en $\mathcal{X}$, $Ch(\mathcal{X})^F$, como sigue:*

$$\begin{array}{c|cccc} I & x_0, U_0 & \cdots & x_n, U_n & \cdots \\ \hline II & V_0 & \cdots & V_n & \cdots \end{array}$$

Para cada $n \in \omega$ se tiene lo siguiente:

- *U_n es un abierto en $\mathcal{X}$ y $x_n \in U_n$.*
- *$V_n \subseteq U_n$ es abierto en $\mathcal{X}$ y $X_n \in V_n$.*

El jugador I gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$ o el jugador II gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.

Definición 3.74. *Un espacio $\mathcal{X}$ se denomina* ***espacio fuerte de Choquet*** *si el jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego fuerte de Choquet.*

Lema 3.75. *Sea (Y, d) un espacio métrico separable y $\mathcal{U}$ una colección de conjuntos abiertos no vacíos en Y, entonces $\mathcal{U}$ admite un refinamiento puntual finito, es decir, existe γ familia de abiertos no vacíos en Y tal que $\bigcup \gamma = \bigcup \mathcal{U}$, $(\forall\, V \in \gamma)(\exists U \in \mathcal{U}) : (V \subseteq U)$ y $(\forall\, y \in Y) : |\{V \in \gamma : y \in V\}| < \omega$. Más aún dado $\epsilon > 0$ se puede añadir la condición que $diam(V) < \epsilon$ para cada $V \in \gamma$.*

Demostración.
Tenemos que Y es un espacio segundo numerable pues Y es un espacio métrico separable. Sea $\mathfrak{B}$ una base numerable de Y. Considere la colección $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que cumple lo siguiente:

- $(\forall\, n \in \omega)(\exists\, U \in \mathcal{U}) : (U_n \subseteq U)$.
- $\bigcup U_n = \bigcup \mathfrak{U}$

Más aún si $\epsilon > 0$ se puede suponer que $diam(U_n) < \epsilon$. Para cada $n \in \omega$, sea $U_n^0 \subseteq Y$ conjunto abierto no vacío tal que $\overline{U_n^0} \subseteq U_n$. Luego como Y es un espacio metrizable, es un espacio normal, de ahí que existe $U_n^1 \neq \emptyset$ abierto no vacío tal que $\overline{U_n^0} \subseteq U_n^1 \subseteq \overline{U_n^1} \subseteq U_n$. Recursivamente construimos una sucesión $\{U_n^P\}_{P\in\omega}$ tal que $U_n^0 \subseteq \overline{U_n^0} \subseteq U_n^1 \subseteq \overline{U_n^1} \subseteq \cdots \subseteq U_n$ y $\bigcup U_n^p = U_n$.

Para cada $m \in \omega$, sea $V_m = U_m \setminus (\bigcup_{n<\omega} \overline{U_n^m})$. Afirmamos que $\bigcup_{n\in\omega} V_n = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. En efecto, para $\subseteq]$ es inmediato por como se definió V_m. Ahora veamos $\supseteq]$, sea $x \in \bigcup_{n\in\omega} U_n$, entonces existe $m = \min\{k \in \omega : x \in U_k\}$, $x \in U_m$, más aún $x \in V_m$ (por la elección de m). Por tanto $\bigcup_{n\in\omega} V_n \supseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Así $\bigcup_{n\in\omega} V_n = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ y por tanto $\bigcup_{n\in\omega} V_n = \bigcup \mathcal{U}$. Además, si $n \in \omega$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_n \subseteq U$.

Finalmente para ver que es finita la familia $\gamma = \{V_n : n \in \omega\}$, observe que si $x \in U_n$ para algún $n \in \omega$ entonces $x \in U_n^P$ para algún $P \in \omega$, luego $x \in U_n^m$ para todo $m \geq P$. De ahí que $x \notin V_m$ para todo $m \geq P$. Por tanto γ es un refinamiento puntual finito. $\square$

Teorema 3.76. *Sea X un espacio métrico separable y $\widehat{X}$ un espacio Polaco tal que X es denso en $\widehat{X}$, entonces*

1. *(Oxtoby) X es un espacio de Choquet si y sólo si X es comagro en $\widehat{X}$.*

2. *(Choquet) X es fuertemente de Choquet si y sólo si X es un conjunto G_δ en $\widehat{X}$ si y sólo si X es Polaco.*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$] Sea σ una estrategia ganadora para el jugador II en $Ch(X)$ y sea d una métrica compatible para $\widehat{X}$. Construyamos un árbol bien podado no vacío S que consiste de sucesiones de la forma $\langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_n\rangle$ o $\langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_n, \widehat{V_n}\rangle$ con $U_i \neq \emptyset$ abierto en X y cada $\widehat{V_i} \neq \emptyset$ abierto en $\widehat{X}$, $\widehat{V_0} \supseteq \widehat{V_1} \supseteq \cdots \supseteq \widehat{V_n} \supseteq \ldots$ y si $V_n = X \cap \widehat{V_n}$ entonces $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n\rangle$ o $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle$ son compatibles con σ.

- $\emptyset \in \sigma$.

- Si $P = \langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_n\rangle \in S$ entonces $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n\rangle \in \sigma$, así existe un único $V_n \subset X$ abierto tal que $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle \in \sigma$, pero $V_n = X \cap \widehat{V_n}$. En este caso $\langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_n, \widehat{V_n}\rangle \in S$.

- Si $P = \langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_{n-1}, \widehat{V_{n-1}}\rangle \in S$ entonces $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}\rangle \in \sigma$ y así para cada $U \subseteq V_{n-1}$ abierto no vacío, existe un único abierto $V_U \subseteq U$ tal que $\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U, V_U\rangle \in \sigma$. Para cada V_U existe $\widehat{V_U}$ abierto en $\widehat{X}$ tal que $V_U = \widehat{V_U} \cap X$.

Análogo a una idea anterior es posible hallar una familia $\widehat{\gamma}_P$ de abiertos ajenos en $\widehat{X}$ tal que:

- $\bigcup \widehat{\gamma_P}$ es denso en $\widehat{V_{n-1}}$ y para todo $v \in \widehat{V_P}$: $diam(v) < \frac{1}{2^n}$.

- $W_n = \bigcup\{\widehat{V} : \langle U_0, \widehat{V_0}, \ldots, U_n, \widehat{V}\rangle \in S\}$ es un abierto y denso en $\widehat{X}$.

Afirmamos que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq X$. En efecto, sea $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, entonces existe una única sucesión $\langle U_0, \widehat{V_0}, U_1, \widehat{V_1} \ldots\rangle \in [S]$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \widehat{V_n}$ y como para cada $n \in \omega$: $diam(\widehat{V_n}) < \frac{1}{2^n}$ entonces $\bigcap_{n\in\omega} \widehat{V_n} = \{x\}$. Sabemos que $\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots\rangle \in [\sigma]$, pero σ es una estrategia ganadora para el jugador II, así $\bigcap U_n = \bigcap V_n \neq \emptyset$ en X, $x \in X$. Por tanto $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq X$, de ahí que X es comagro en $\widehat{X}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que X es comagro en $\widehat{X}$, entonces existe una familia $\{D_n : n \in \omega\}$ de densos abiertos en $\widehat{X}$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} D_n \subseteq X$. Construyamos en X una estrategia ganadora para II. Sea $U_0 \subseteq X \setminus \{\emptyset\}$ abierto, existe $W_0 \subseteq \widehat{X}$ abierto tal que $U_0 = W_0 \cap X$. Como D_0 es abierto y denso en $\widehat{X}$, $W_0 \cap D_0 \neq \emptyset$ y abierto en $\widehat{X}$. Como X es denso en $\widehat{X}$, $X \cap D_0 \cap W_0 \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in X \cap W_0 \cap D_0$. Por la regularidad de X, existe V abierto en X tal que $x_0 \in V \subseteq \overline{V_0} \subseteq X \cap W_0 \cap D_0 = U_0 \cap D_0$.

Sea $V_0 = V$ el movimiento del jugador II, para cualquier conjunto abierto U no vacío en X tal que $U \subseteq V_0$ se puede repetir el proceso anterior, con lo cual se tiene de manera general que existe $W_n \subseteq \widehat{X}$ abierto tal que $U_n = W_n \cap X$, con argumentos similares a los anteriores se tiene que $X \cap W_n \cap D_n$ es no vacío y abierto en X, así existe $x_n \in X \cap W_n \cap D_n$, por la regularidad de X existe V_n abierto en X tal que $x_n \in V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq X \cap W_n \cap D_n$. Con lo cual se tiene ya una estrategia para el jugador II.
Por último si $\langle U_0, V_0, U_1, V_1 \dots \rangle \in [\sigma]$, entonces por el teorema de Cantor (EM) se tiene que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Por tanto σ es una estrategia ganadora para II.

(2) X es un conjunto G_δ en $\widehat{X}$ si y sólo si X es Polaco se sigue por un resultado previo. Veamos que X es fuertemente de Choquet si y sólo si X es un conjunto G_δ en $\widehat{X}$.

$\Rightarrow$] Se realiza una construcción similar a la hecha en (1) donde se utilizó el lema previo.

$\Leftarrow$] Sea $U_0 \subseteq X$ abierto no vacío y $x_0 \in U_0$, el movimiento del jugador I. Dado que X es regular, entonces existe un abierto no vacío V_0, tal que $x_0 \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0$ y $diam(V_0) < 1/2^0$. Procediendo de manera recursiva uno puede tener una estrategia para el jugador II, más aún $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} \neq \emptyset$. Por tanto se ha construido una estrategia ganadora para el jugador II. $\square$

3.6. Generalizaciones de la Propiedad de Baire

Como se ha constatado a lo largo de todo este trabajo, la familia de espacios de Baire forma una clase muy interesante con aplicaciones de suma importancia en distintas áreas de la matemática. Pero, como en toda área de ciencia, siempre se encuentran problemas cuando se trata de formalizar o generalizar resultados. Un claro ejemplo de lo anterior se presenta en el estudio de la propiedad productiva, que no se garantiza en la familia de espacios de Baire. Tales problemas motivan al estudio de distintas variantes del teorema de categoría de Baire, modificando el concepto de completitud y obteniendo clases más generales de espacios topológicos. En esta sección presentamos algunas de estas generalizaciones omitiendo los detalles invitando al lector en profundizar en dichos temas.

Definición 3.77. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff. Una **compactación** del espacio $\mathcal{X}$ es una pareja $(h\mathcal{X}, h)$ donde $h\mathcal{X}$ es un espacio topológico Hausdorff compacto y h es un homeomorfismo del espacio $\mathcal{X}$ sobre un subespacio denso de $h\mathcal{X}$.*

La existencia de compactaciones para espacios completamente regulares queda garantizada por el teorema de Stone- Čech. Dicha compactación fue construida en 1937 por M.Stone y E. Čech de manera independiente.

Teorema 3.78. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio completamente regular. Existe una compactación $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ caracterizada con la siguiente propiedad, cada función acotada y continua $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se extiende de forma única a una función continua de $\mathcal{Y}$ en $\mathbb{R}$.*

Definición 3.79. *Para cada espacio completamente regular $\mathcal{X}$, elegimos una compactación de $\mathcal{X}$ verificando la condición de extensión del teorema anterior. Dicha compactación del espacio $\mathcal{X}$ está representada por $\beta(\mathcal{X})$ la cual llamaremos **compactación de Stone-Čech** del espacio $\mathcal{X}$.*

Definición 3.80. *Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico Hausdorff $\mathcal{X}$. Un subconjunto F de $\mathcal{X}$ se dice que es $\mathcal{U}$-**pequeño** si F esta contenido en algún miembro de $\mathcal{U}$. En general una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ se dice que es $\mathcal{U}$-pequeña si existen $F \in \mathcal{F}$ y $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$.*

Definición 3.81. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio completamente regular. $\mathcal{X}$ se llama **numerablemente Čech completo** si existe una colección numerable $\{U_n : n \in \omega\}$ de cubrimientos abiertos de $\mathcal{X}$ tales que para cualquier familia numerable y decreciente $\mathfrak{F} = \{F_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos cerrados de $\mathcal{X}$ que es U_n-pequeña para cada $n \in \omega$, se tiene $\bigcap_{k\in\omega} F_k \neq \emptyset$.*

Teorema 3.82. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff que es numerablemente Čech completo, entonces $\mathcal{X}$ es un espacio de Baire.*

Definición 3.83. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico completamente regular. $\mathcal{X}$ es **Čech-completo** si existe una colección numerable $\{U_n : n \in \omega\}$ de cubrimientos abiertos de $\mathcal{X}$ con la propiedad de que para cualquier familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos cerrados de $\mathcal{X}$ con la propiedad de intersección finita y U_n-pequeña para cada $n \in \omega$, se tiene $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F \neq \emptyset$.*

Observación 3.84. *Todo espacio Čech-completo es numerablemente Čech-completo y por tanto es de Baire.*

Exhibamos una de las caracterizaciones de los espacios Čech-completos.

Teorema 3.85. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hausdorff completamente regular. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es Čech-completo.*

2. *$\mathcal{X}$ es un G_δ en $\beta\mathcal{X}$.*

3. *$\mathcal{X}$ es un G_δ en cualquier compactación $\alpha\mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$.*

En el caso de que el espacio $\mathcal{X}$ sea completamente metrizable, se puede garantizar que el espacio $\mathcal{X}$ es Čech-completo.

La siguiente clase de espacios topológicos fue creada por Frolik en [14].

Definición 3.86. *Un espacio completamente regular $\mathcal{X}$ se dice **Casi Čech-completo** si existe un subconjunto G_δ-denso del espacio $\mathcal{X}$ que es Čech-completo.*

J.M Aarts y D.J Lutzer en [2] establecieron la pregunta siguiente:

¿Existe una clase natural de espacios topológicos que contenga a los espacio completamente metrizables y a los espacios localmente compactos pero que, además, cada uno de sus miembros satisfaga la conclusión del teorema de Categoría de Baire?

Aaron R. Todd usando la noción de espacio pseudo-completo introducida por Oxtoby, demuestra que la clase de los espacios pseudo-completos es una apropiada solución a la pregunta formulada por Aarts y Lutzer.

Definición 3.87. *Un espacio topológico Hausdorff $\mathcal{X}$ se dice **cuasi-Regular** si para cada conjunto abierto no vacío U de $\mathcal{X}$, existe un conjunto abierto no vacío V de $\mathcal{X}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Definición 3.88. *El espacio $\mathcal{X}$ se llama**Oxtoby-completo** (Pseudo-Completo) si el espacio $\mathcal{X}$ es cuasi-regular y posee una familia de pseudo-bases (π-base) $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ tal que cumple lo siguiente: si $B_n \in \mathcal{B}_n$ y $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ para cada $n \in \omega$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} B_n \neq \emptyset$.*

Teorema 3.89. *Todo espacio Čech-completo es un espacio Oxtoby-completo.*

Teorema 3.90. *Todo espacio Oxtoby-completo es un espacio de Baire.*

Corolario 3.91. *Todo espacio casi-Čech-completo es un espacio Oxtoby-completo.*

Aarts y Lutzer construyen en [2] un espacio que es Oxtoby-completo pero no un espacio casi-Čech-completo.

Los espacios casi-Čech-completos se pueden caracterizar, en términos de propiedades casi- cubiertas, para ello es necesario considerar las siguientes definiciones.

Definición 3.92. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff y $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\mathcal{X}$.*

- *$\mathfrak{F}$ es un **filtro base** sobre $\mathcal{X}$ si,*
  - *Para todo $F \in \mathfrak{F}$, $F \neq \emptyset$.*
  - *Si $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, entonces existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset F_1 \cap F_2$*
- *Sea $(U_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Si para cada $n \in \omega$, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subseteq U_n$, entonces se dice que la familia $\mathfrak{F}$ está controlada por la sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$.*

Definición 3.93. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff completamente regular y $(U_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos de $\mathcal{X}$. La sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$ se dice **completa** si, para cualquier filtro base $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{X}$ controlado por la sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$, entonces $\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F} \neq \emptyset$.*

Definición 3.94. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $\mathfrak{U}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Si cada elemento U de $\mathfrak{U}$ es abierto en $\mathcal{X}$ y $\bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U$ es denso en $\mathcal{X}$, entonces la familia $\mathfrak{U}$ se dice que es un **cuasi-cubrimiento abierto** del espacio $\mathcal{X}$.*

Teorema 3.95. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff completamente regular. Entonces $\mathcal{X}$ es casi-Čech-completo si, y sólo si $\mathcal{X}$ posee una sucesión completa $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\omega}$ de cuasi-cubrimientos abiertos tal que para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{U}_n$ es una familia disjunta.*

Veamos la siguiente caracterización para aquellos espacios que poseen un subespacio denso completamente metrizable en [2].

Teorema 3.96. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico completo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es casi Čech-completo.*
2. *$\mathcal{X}$ es Oxtoby-completo.*
3. *$\mathcal{X}$ posee un subespacio denso completamente metrizable.*

Para finalizar exhibiremos dos caracterizaciones, una para los espacios completamente metrizables y la otra para los espacios casi-Čech-completos dadas por E. Michael en [23], de la misma manera se puede consultar en el mismo documento toda definición que no se haya definido en este trabajo que aparezcan en los siguientes teoremas.

Teorema 3.97. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio metrizable. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es completamente metrizable.*

2. *$\mathcal{X}$ es un conjunto G_δ de algún espacio métrico completo.*

3. *$\mathcal{X}$ posee una sucesión completa $(U_n)_{n\in\omega}$ de cubrimientos abiertos.*

4. *El jugador II posee una estrategia ganadora para $G(\mathcal{X})$.*

5. *El jugador II posee una estrategia ganadora para $G^*(\mathcal{X})$.*

Capítulo 4

Conclusiones

El estudio de las aplicaciones del Teorema de Baire constituyen un vasto campo de investigación en muchas áreas de la matemática. Como un ejemplo de ello se mostró que el Teorema de Baire es fundamental en la prueba de resultados muy importantes en la teoría del análisis funcional y también la gran cantidad de resultados que se pueden obtener a partir de tal propiedad. Con lo anterior de manera natural surgió el estudio de la familia de espacios de Baire en donde se revisaron algunas de las propiedades que tales espacios poseen, así como una de las grandes deficiencias que posee esta familia.

En el estudio de los espacios de Baire tuvo que estudiarse cierta clase especial de conjuntos llamada espacios polacos, en ellos se estudiaron algunas de las propiedades que caracterizan a los espacios polacos. También se dieron técnicas como el esquema de Cantor y el esquema de Luzin los cuales nos permitieron dar construcciones explicitas, en ciertas familias de subconjuntos de estos espacios, cuya importancia de tales técnicas radicó en garantizar la cardinalidad del espacio en cuestión.

Finalmente se dejó como trabajo a futuro el estudio de ciertas clases de espacios como lo son los Čhech-completos y los oxtoby-completos. De igual forma un estudio más riguroso de los espacios polacos pues se vio sólo una pequeña parte de las numerosas propiedades que estos pueden poseer.

Bibliografía

[1] Aarts, J. M., & Lutzer, D. J. Completeness properties designed for recognizing Baire spaces. 1974.

[2] Aarts, J., & Lutzer, D. Pseudo-completeness and the product of Baire spaces. Pacific Journal of Mathematics, 48(1), 1-10. 1973.

[3] Astin, J. T. A study of Baire-Moore Theorems. 1966.

[4] Apostol, T. M. Análisis matemático. Edit.Reverté. Segunda Edición. 1996.

[5] Bagemihl, F. A note on Scheeffer's theorem. The Michigan Mathematical Journal, 2(2), 149-150. 1953.

[6] Brito, W. El Teorema de Categoría de Baire y Aplicaciones. Pub. electrónica.

[7] Cao, J., & Moors, W. B. A survey on topological games and their applications in analysis. RACSAM, 100(1-2), 39-49. 2006.

[8] Chaber, J., & Pol, R. On hereditarily Baire spaces, σ-fragmentability of mappings and Namioka property. Topology and its Applications, 151(1), 132-143. 2005.

[9] Dorais, F. G., & Mummert, C. Stationary and convergent strategies in Choquet games. arXiv preprint arXiv:0907.4126. 2009.

[10] Dresher, M., Tucker, A. W., & Wolfe, P. Contributions to the Theory of Games (Vol. 3). Princeton University Press. 1957.

[11] Dgundji, J. Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Massachusetts. 1966.

[12] Engelking, R. General topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6. 1989.

[13] Fleissner, W., & Kunen, K. Barely Baire spaces. Fundamenta Mathematicae, 101(3), 229-240. 1978.

[14] Frolík, Z. Generalizations of the G_δ-property of complete metric spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, 10(3), 359-379. 1960.

[15] Frolík, Z. Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, 11(2), 237-248. 1961.

[16] Giles, J. R. Introduction to the analysis of normed linear spaces (No. 13). Cambridge University Press. 2000.

[17] Hurewicz, W. Relativ perfekte teile von punktmengen und mengen (A). Fundamenta Mathematicae, 12(1), 78-109. 1928.

[18] Iribarren, I. L. Topología de espacios métricos. Limusa-Wiley, México. 1973.

[19] Castillo, C. I. Teoría Descriptiva de Conjuntos I.

[20] Jech, T. Set theory. Springer Science & Business Media. 2013.

[21] Kakol, J., Kubis, W., & López-Pellicer, M. Descriptive topology in selected topics of functional analysis (Vol. 24). Springer Science & Business Media. 2011.

[22] Kunen, K. Set Theory: An Introduction to independence Results. 1980.

[23] Michael, E. A note on completely metrizable spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 513-522. 1986.

[24] Moore, R. L. Foundations of point set theory (Vol. 13). American Mathematical Soc. 1932.

[25] Moors, W. The product of a Baire space with a hereditarily Baire metric space is Baire. Proceedings of the American Mathematical Society, 134(7), 2161-2163. 2006.

[26] Munkres, J. R. Topología, Prentice Hall, 2. a edición. 2002.

[27] Oxtoby, J. Cartesian products of Baire spaces. Fundamenta Mathematicae, 49(2), 157-166. 1961.

[28] RC Haworth and RA McCoy, Baire spaces, Dissertationes Mathematicae 141.

[29] Steen, L. A., Seebach, J. A., & Steen, L. A. Counterexamples in topology (Vol. 18). New York: Springer. 1978.