Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Teorema de Representación de Riesz en Espacios Localmente Compactos

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Enrique Espinoza Loyola

Director de tesis

Dr. Slavisa Djordjevic

Puebla, Pue., Enero de 2013.

''Si la gente no piensa que
las matemáticas son simples,
es sólo porque no se dan
cuenta de lo complicada que es
la vida''

John Von Neumann

''De pronto, cuando cierro los
ojos estás tu, es entonces
cuando mis ansias de amarte
bajan como la marea,
acariciando tu pecho y besando
tu alma. Haciéndote el amor
con la mirada ...''

V.M.V.E.

Agradecimientos

A mis padres: Enrique Espinoza Hernández y María Victoria Loyola Evangelista, porque ellos han sacrificado tantas cosas, han sabido guiarme siempre, me han apoyado de principio a fin en todo momento y gracias a ellos he llegado hasta donde estoy. Es por eso y muchas cosas más que este pequeño trabajo va dedicado a ellos dos.

A mis hermanos: Rodrigo Adrián, Victor, Lorena y Emmanuel, porque más que mis hermanos, han sido mis mejores amigos en la escuela de la vida y porque sin ellos no habría disfrutado de la vida como lo he hecho.

A mis compañeros y amigos de mil batallas en la facultad (próximamente matemáticos): Ricardo, Iván, Ángel Fernando, María, Cristina, Alejandra, Fernanda y Martha Patricia; y a los que se unieron en el camino: Alejandro, Ivette y Mónica (próximamente físicos); que se convirtieron como una segunda familia para mi durante todo este tiempo en la licenciatura.

A la chiquilla (futura física) que tantas veces se quedó dormida del otro lado de la pantalla de la computadora echándome porras y acompañándome en varias noches de desvelo. Por eso y muchas cosas más, gracias Valeria Montserrat.

A mis sinodales: Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. David Herrera Carrasco y Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por toda la ayuda que me brindaron, por haberse tomado el tiempo de revisar este trabajo y hacerle las críticas necesarias para mejorarlo.

A mi director de tesis: Dr. Slavisa Djordjevic, por haberme permitido trabajar bajo su tutela.

A todos los profesores con los que tuve el placer de tomar clases.

A todas las personas que de una u otra manera me han ayudado en este largo camino.

A ese angelito que se me adelantó y sé que de alguna forma me cuida.

En general, a todas las personas que han formado parte de mi vida, porque de todo y de todos se aprende.

De todo corazón. MUCHAS GRACIAS.

Enrique Espinoza Loyola

Índice

Introducción

La representación de funcionales ha sido tema primordial desde la creación del análisis funcional, en particular la representación de funcionales continuos. Desde 1903 este problema fue atacado por primera vez por Hadamard y en 1904 por Fréchet, pero fue resuelto por Riesz en 1909 usando la integral de Stieltjes.

En 1909, Frigyes Riesz probó el Teorema de Representación, que hoy lleva su nombre, para el dual de las funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, denotado por $C[a, b]$, el cual se encuentra en el conjunto de las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$, por medio del uso de la integral de Riemann-Stieltjes; el inconveniente que se tenía era que la función de variación acotada que se encontraba no era única y además que se no podía generalizar el mismo trabajo para un espacio de orden superior. Los problemas desaparecieron cuando Johan Radon tuvo la idea de reemplazar a las funciones de variación acotada por funciones que actuaban sobre conjuntos. La generalización del teorema para un cubo $[a, b]^n$ de dimensión n fue hecho por Radon en 1913. Para el año de 1937, Stefan Banach logró probar una versión más general del teorema para un espacio métrico compacto. Hacia 1938, Markoff logra probar el teorema para espacios normales. En 1940, Alexandroff lo prueba para espacios completamente regulares. Finalmente, el caso más general, que es para espacios Hausdorff compactos, lo demostró Shizuo Kakutani en 1941.

En las versiones de Radon y de Banach las representaciones fueron medidas finitas en los conjuntos de Borel y no hacían mención a la regularidad. La versión de Markoff fue muy similar a las de Radon y Banach, pero Markoff ya hizo notar que la medida era regular. En la version de Alexandroff, las representaciones fueron medidas regulares finitas en el álgebra de Baire.

También, Riesz resolvió el problema de representar funcionales lineales para los espacios l^2 y L^2, pero en 1910 introduce los espacios L^p con $1 < p < \infty$, como una generalización de L^2 y se plantea el problema para espacios de funciones f que cumplan que $|f|^p$ sea integrable en el sentido de Lebesgue. Se limita al análisis con $p > 1$ para poder aplicar las desigualdades de Hölder y de Minkowski. Este trabajo de Riesz clarificó las ideas de dualidad, ya que es el primer ejemplo en el cual el dual topológico no puede identificarse con el espacio base, como pasaba en l^2 y L^2, es decir, encuentra el primer ejemplo de espacios reflexivos no isomorfos a su dual. Así pues, vemos que en los trabajos de Riesz se conforman las nociones básicas del Análisis Funcional, entre las que destacan la noción de norma, espacio dual y convergencia débil.

He aquí, la importancia del Teorema de Representación de Riesz, ya que fue un parteaguas en el Análisis Funcional, pues vino acompañado de la construcción de nuevos conceptos y numerosas aplicaciones de esta rama de las matemáticas.

El objetivo de este trabajo es dar las demostraciones a detalle del Teorema de Representación de Riesz en sus versiones más utilizadas, esto debido a que los diferentes autores de los libros en los que se encuentran las diferentes versiones de este teorema, omiten pasos por "obviedad" (que resultan no ser tan obvios) o porque los mencionan como procedimientos análogos a los que desarrollan a través de su libro (dichos procedimientos no siempre son tan claros como uno quisiera). Otro objetivo es el de dar, en algunos casos, demostraciones diferentes al de los libros clásicos. El último objetivo, es el de hacer notar que a pesar de que los teoremas llevan el mismo nombre, las técnicas de construcción usadas en cada caso son diferentes.

La intención de este trabajo es que cualquiera que posea cierta madurez matemática en el área de la topología y el análisis, sea capaz de entender las demostraciones del Teorema de Representación de Riesz, por eso este trabajo quedó estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo damos un repaso general de los resultados básicos de Topología que necesitaremos para entender y tener cada vez más claros los resultados que aquí presentamos.

En el segundo capítulo damos resultados elementales sobre teoría de la medida, tales como el Teorema de Caratheodory y el de Radon-Nikodym; y sobre teoría de integración, entre los que se mencionan están el Teorema de la Convergencia Dominada, el de Convergencia Monótona y el Lema de Fatou.

En el tercer capítulo, introducimos los espacios L^p y desarrollamos un poco de teoría sobre ellos, esto debido a que enunciamos el Teorema de Representación de Riesz para funcionales lineales acotados sobre este espacio. Cabe señalar que los resultados aquí presentados son cruciales en el desarrollo de el teorema sobre estos funcionales.

En el último capítulo, enunciamos y damos las demostraciones de tan mencionado Teorema (de Representación de Riesz) en 3 versiones diferentes pero que se relacionan. Además, damos alguna aplicación en cada caso.

Este es un intento de que los matemáticos en formación (por lo menos los de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP) conozcan tan importante resultado en el área del Análisis, dado que muchos no lo conocen, pues este teorema se trabaja en la materia de Teoría de la Medida que se imparte en nuestra facultad, la cual muchos no la llegan a cursar debido a que forma parte de las materias optativas.

Capítulo 1

Topología Elemental

A través de la historia, la Topología ha resultado ser de gran importancia y ha sido fundamental para poder cimentar el análisis moderno, pues a finales del siglo XVIII las matemáticas se encontraban en un caos total y prueba de ello era que los conceptos fundamentales del análisis, tales como el de función y continuidad, no estaban expuestos con el rigor necesario. El siglo XIX fue crucial, pues a finales de siglo, George Cantor desarrolló una teoría en la que se encontraban las nociones básicas de la teoría de conjuntos, las cuales permitieron dar definiciones y demostraciones que fueran aceptadas por la mayoría de la comunidad matemática. A finales del siglo XX, matemáticos como Hilbert, Banach y Hausdorff se apoyaron en esas ideas para construir espacios diferentes al euclidiano, tales como métricos, normados, de funciones, etc., lo cual permitió el desarrollo de una teoría más general, proponiendo un sistema axiomático del análisis en términos de conjuntos y no de distancias, como inicialmente se hacía.

Es importante mencionar que Hausdorff fue quien construyó la teoría definitiva de espacios topológicos abstractos, pues fue él quien definió a un espacio topológico como un conjunto de elementos junto con una familia de subconjuntos asociados a cada punto (a dichos subconjuntos los denominó vecindades) y con ciertas propiedades (estos espacios hoy son llamados Hausdorff o T_2), pero tal definición no se aleja mucho de la definición actual de topología. Ya teniendo esto, se definen los conceptos básicos para topología, entre los que están el de conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto compacto y punto límite. A partir de estas definiciones surgen los conceptos de transformaciones continuas y homeomorfismos.

Dada su importancia, no podemos dejar de incluir los conceptos básicos de topología, pues son a partir de ellos que es posible desarrollar y cimentar este trabajo. Todos los conceptos no definidos en este capítulo serán tomados como en [6].

1.1 Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto. Una topología (o estructura topológica) sobre X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen:*

1) Cada unión de miembros de τ es también un miembro de τ,

2) Cada intersección finita de miembros de τ es también un miembro de τ,

3) $\emptyset$ y X son miembros de τ.

Definición 1.1.2. *A la pareja (X, τ) le llamaremos espacio topológico.*

Cuando no haya confusión con respecto a la topología que se está usando, en lugar de poner (X, τ), sólo pondremos X. De aquí en adelante, cuando pongamos X nos estaremos refiriendo a un espacio topológico con una topología dada.

A los elementos de X les llamaremos puntos y a los miembros de τ conjuntos abiertos de X.

Ejemplo 1.1.1. *1. Sea X un conjunto. La familia $\tau = \{\emptyset,\ X\}$ define una topología sobre X y es llamada Topología Indiscreta. Esta topología es la más pequeña de las topologías sobre X.*

2. Sea X un conjunto. La familia $\tau = 2^X$ también define una topología y es llamada Topología Discreta. Esta topología es la más grande de las topologías sobre X.

Definición 1.1.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. El conjunto $U \subset X$ es una vecindad de x, si $x \in U$ y $U \in \tau$. Escribiremos $U(x)$ cuando el conjunto U sea vecindad de x.*

Teorema 1.1.1. ***[6, Proposición 1.4, pág. 64]*** *Sean $\mathscr{A}$ un conjunto de índices y $\{\tau_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ una familia de topologías en X. Entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} \tau_\alpha$ es también una topología en X.*

Ahora daremos un poco sobre bases topológicas:

Definición 1.1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que la familia $\beta \subseteq \tau$ es una base para τ si cada conjunto abierto (i.e. cada elemento de τ) es unión de elementos de β. A los elementos de β los llamaremos conjuntos abiertos básicos (o solamente básicos).*

Ejemplo 1.1.2. *1) τ es base para τ.*

2) Sea $\tau = 2^X$ la topología discreta, entonces $\mathscr{B} = \{\{x\} | x \in X\}$ es una base para τ.

Es bien sabido que una topología puede tener muchas bases, pero dichas bases son caracterizadas por el siguiente teorema:

Teorema 1.1.2. ***[6, Teorema 2.2, pág. 64]*** *Sea $\beta \subset \tau$ con τ una topología sobre X. Las siguientes dos propiedades de β son equivalentes:*

(1) β es base para τ.

(2) Para cada $G \in \tau$ y cada $x \in G$ existe un $U \in \beta$ con $x \in U \subset G$.

El siguiente resultado parte de una familia $\Sigma \subset 2^X$ y y nos garantiza la existencia de una topología que contiene a Σ.

Teorema 1.1.3. ***[6, Teorema 3.1, pág. 65]*** *Dada una familia cualquiera $\Sigma = \{A_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ de subconjuntos de X, existe una única topología más pequeña $\tau(\Sigma) \supset \Sigma$. La familia $\tau(\Sigma)$ puede ser descrita como sigue: Consiste de $\emptyset$, X, todas las intersecciones finitas de los A_α y todas las uniones arbitrarias de esas intersecciones finitas. La familia Σ es llamada una subbase para $\tau(\Sigma)$ y $\tau(\Sigma)$ se dice generada por Σ.*

Recíprocamente para este teorema, si tenemos una topología dada τ, una familia $\Sigma \subset \tau$ es llamada una subbase para τ siempre que $\tau = \tau(\Sigma)$.

Ejemplo 1.1.3. *1. Para cualquier topología τ, τ es una subbase para τ.*

2. Las intersecciones finitas de miembros de Σ son una base para $\tau(\Sigma)$.

Otro resultado que involucra bases topológicas que generan a la misma topología, es el siguiente:

Definición 1.1.5. *Dos bases β y β' son equivalentes si generan a la misma topología, es decir, si $\tau(\beta) = \tau(\beta')$*

Aunado con esta definición, damos una caracterización de este tipo de bases:

Teorema 1.1.4. ***[6, Teorema 3.4, pág. 68]*** *Una condición necesaria y suficiente para que dos bases, β y β', en X sean equivalentes, es que ambas cumplan con las condiciones siguientes:*

(1). Para cada $U \in \beta$ y cada $x \in U$, existe un $U' \in \beta'$ tal que $x \in U' \subset U$.

(2). Para cada $U' \in \beta'$ y cada $x \in U'$, existe un $U \in \beta$ tal que $x \in U \subset U'$.

Definición 1.1.6. *$A \subset X$ es llamado conjunto cerrado en X si $X - A$ es un conjunto abierto en X.*

Teorema 1.1.5. ***[6, Proposición 4.2, pág. 69]*** *Sea X un espacio topológico. La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados en X es un conjunto cerrado en X. La unión de un número finito de conjuntos cerrados en X es un conjunto cerrado en X. Además, X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados en X.*

Ahora definimos lo que es un subespacio topológico:

Definición 1.1.7. *Sea X un espacio topológico con la topología τ. Si Y es un subconjunto de X, la colección $\tau_Y = \{Y \cap U | U \in \tau\}$ es una topología sobre Y, llamada topología subespacio. Con esta topología, Y es llamado un subespacio topológico (o simplemente subespacio) de X.*

Con el siguiente teorema caracterizamos a los conjuntos cerrados de un subespacio topológico:

Teorema 1.1.6. ***[14, Teorema 17.2]*** *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si y sólo A es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.*

Definición 1.1.8. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ se llama adherente a A si cada vecindad de x contine al menos un punto de A (el cual puede ser él mismo). El conjunto de todos los puntos en X que son adherentes a A es llamado la cerradura o clausura de A en X y lo denotaremos por $\overline{A}$. Es decir,*

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall\ U(x) : U(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Esta definición nos arroja una manera de caracterizar a los conjuntos cerrados, la cual va incluida en el siguiente teorema:

Teorema 1.1.7. ***[6, Proposición 4.4, pág. 69]*** *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces*

1) $A \subset \overline{A}$.

2) A es cerrado en X si y sólo si $A = \overline{A}$.

De esto podemos deducir que $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, además de que cumple con la monotonía y que la unión de cerraduras es la cerradura de la unión.

Otra manera de caracterizar a los conjunos cerrados es mediante sus puntos límite, los cuales se definen de la siguiente manera:

Definición 1.1.9. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es llamado un punto límite de A si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A distinto de x. El conjunto de todos los puntos límite de A es llamado el conjunto derivado de A y se denotará por A'. Es decir,*

$$A' = \{x \in X | \forall\ U(x) : U(x) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\}.$$

Mediante el conjunto derivado se caracteriza a los conjuntos cerrados, el siguiente teorema nos muestra cómo.

Teorema 1.1.8. ***[6, Proposición 4.7, pág. 71]*** *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $\overline{A} = A \cup A'$. En particular, A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.*

Una definición que será importante recordar para capítulos posteriores es la de conjunto denso.

Definición 1.1.10. *Sean X un espacio topológico y $D \subset X$. Decimos que D es denso en X si $\overline{D} = X$.*

1.2 Axiomas de Separación

Debido a que nos centraremos en trabajar sobre espacios topológicos Hausdorff, es necesario dar un pequeño paseo por los axiomas de separación.

Definición 1.2.1. *Un espacio topológico X es Hausdorff (o separado o T_2) si cada dos puntos distintos tienen vecindades disjuntas, es decir, para cualesquiera $p \neq q$ existen vecindades $U(p), V(q)$ tales que $U(p) \cap V(q) = \emptyset$.*

Esta definición tiene diferentes maneras de escribirse, las cuales se engloban en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. ***[6, Proposición 1.2, pág. 138]*** *Sea X un espacio topológico. Las siguientes cuatro propiedades son equivalentes:*

1. *X es Hausdorff.*
2. *Sea $p \in X$, para cada $q \neq p$, existe una vecindad $U(p)$ tal que $q \notin \overline{U(p)}$.*
3. *Para cada $p \in X$, $\bigcap\{\overline{U} | U$ es vecindad de $p\} = \{p\}$.*
4. *La diagonal $\triangle = \{(x,x) | x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.*

Además, la propiedad de ser Hausdorff es hereditaria.

Teorema 1.2.2. ***[6, Teorema 1.3, pág. 138]*** *Cada subespacio de un espacio Hausdorff es un espacio Hausdorff.*

Cabe mencionar que la propiedad de ser Hausdorff no se preserva bajo mapeos continuos, pero estos espacios tienen caracerísticas especiales.

Teorema 1.2.3. ***[6, Proposición 1.4, pág. 139]*** *Sean X un espacio topológico Hausdorff y $A \subset X$. Se cumple:*

1) Si A tiene una cantidad finita de elementos, entonces A es un conjunto cerrado en X.

2) x es un punto límite de A si y sólo si cada vecindad de x contiene una infinidad de puntos de A.

Una condición de separación más fuerte que Hausdorff es la de ser regular:

Definición 1.2.2. *Un espacio Hausdorff X es regular (o T_3) si cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado A que no contiene a x tienen vecindades disjuntas, es decir, si A es cerrado en X y $x \notin A$, entonces existe una vecindad U de x y un abierto $V \supset A$ tal que $U \cap V = \emptyset$.*

Esta definición la podemos formular de diferentes maneras equivalentes:

Teorema 1.2.4. ***[6, Proposición 2.2, pág. 141]*** *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes tres propiedades son equivalentes:*

(1) X es regular.

(2) Para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x, existe una vecindad V de x con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

(3) Para cada $x \in X$ y cada cerrado A que no contiene a x, existe una vecindad V de x, tal que $\overline{V} \cap A = \emptyset$.

Al igual que la propiedad de ser Hausdorff, el ser regular también es una propiedad hereditaria, esto se tiene en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.5. ***[6, Teorema 2.3, pág. 142]*** *Todo subespacio de un espacio regular es regular.*

Una separación aún más fuerte que la regularidad es la normalidad.

Definición 1.2.3. *Un espacio Hausdorff X es normal (o T_4) si cada par de conjuntos cerrados disjuntos tienen vecindades disjuntas.*

Es fácil notar que todo espacio normal es regular, pero que no todo regular es normal. La definición de espacio normal tiene estas equivalencias:

Teorema 1.2.6. ***[6, Proposición 3.2, pág. 144]*** *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes cuatro propiedades son equivalentes:*

(1) *X es normal.*

(2) *Para cada cerrado A y cada abierto $U \supset A$, existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

(3) *Para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B, existe un abierto U tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$.*

(4) *Cada par de conjuntos cerrados disjuntos tienen vecindades cuyas cerraduras no se intersectan.*

La propiedad de normalidad no es hereditaria en general, pero bajo cierta condición si lo es:

Teorema 1.2.7. ***[6, Teorema 3.3, pág. 145]*** *Un subespacio de un espacio normal no necesariamente es normal. Un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.*

Un teorema de suma importancia para espacios Hausdorff es el siguiente:

Teorema 1.2.8. ***(P. Urysohn) [6, Teorema 4.1, pág. 146]*** *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces las dos siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es normal.*
2. *Para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B en X, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$, llamada función de Urysohn para A y B, tal que:*

   (a) $0 \leq f(x) \leq 1$ *para todo* $x \in X$.

   (b) $f(a) = 0$ *para todo* $a \in A$.

   (c) $f(b) = 1$ *para todo* $b \in B$.

1.3 Compacidad

Ahora toca el turno de la compacidad, otra de las propiedades usadas fuertemente en el último capítulo de este trabajo. Comenzaremos definiendo lo que son los espacios compactos:

Definición 1.3.1. *Un espacio Hausdorff X es compacto si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

El siguiente teorema formula una proposición equivalente a la definición de compacidad:

Teorema 1.3.1. ***[14, Teorema 26.9]*** *El espacio topológico X es compacto si y sólo si X cumple con la propiedad de intersección finita, es decir, si para cada familia $\{F_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ de conjuntos cerrados en X que satisfacen $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} F_\alpha = \emptyset$, existe una subfamilia finita $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$, tal que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$.*

Para propiedades de invarianza tenemos:

Teorema 1.3.2. ***[6, Teorema 1.4, pág. 224]***

1. *La imagen de un conjunto compacto bajo una función coninua es un conjunto compacto.*

2. *Un subconjunto compacto A de un espacio Hausdorff X es cerrado en X; además, para cada $x \notin A$ existen vecindades disjuntas $U(A)$ y $U(x)$.*

3. *Un subespacio de un espacio compacto es compacto si y sólo si es cerrado.*

En los espacios Hausdorff, los subconjuntos compactos se comportan como puntos, hacen y tienen las mismas propiedades de separación:

Teorema 1.3.3. *1. Una unión finita de subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff es compacto.*

2. *Dos subespacios compactos disjuntos de un espacio Hausdorff tienen vecindades disjuntas.*

3. *Si A es un subconjunto compacto de un espacio regular, entonces para cada abierto $U \supset A$, existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración. 1) Vamos a probarlo para dos conjuntos. Sean A y B subconjuntos compactos de X, y sea $U = \{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ una cubierta abierta de $A \cup B$. Como U cubre a $A \cup B$, en particular cubre a A y como A es compacto existen $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Análogamente, se encuentran a $U_{\alpha'_1}, ..., U_{\alpha'_m}$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha'_i}$. Luego $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}, U_{\alpha'_1}, ..., U_{\alpha'_m}$ es una cubierta finita de $A \cup B$. Por lo tanto, $A \cup B$ es compacto. Mediante un argumento similar y usando Inducción Matemática, se prueba para cualquier unión finita.

2) Sean A y B subespacios compactos de X, y sea $A \cap B = \emptyset$. Por el Teorema 1.3.2, para cada $b \in B$ existen vecindades disjuntas $U_b(A), U(b)$. De la cubierta abierta $\{U(b) \cap B | b \in B\}$ de B, extraemos una subcubierta que sea finita $U(b_1) \cap B, \cdots, \cap U(b_n) \cap B$. De la misma manera obtenemos una subcubierta finita para A, $U_{b_1}(A) \cap A, ..., U_{b_n}(A) \cap A$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} U(b_i)$, $\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}(A)$ son las vecindades requeridas.

3) Sea $a \in A$. Como X es regular, por el Teorema 1.2.4, existe una vecindad $V(a)$ tal que $\overline{V(a)} \subset U$. La familia $\{V(a) | a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, como A es compacto existe una subcubierta finita $V(a_1), ..., V(a_n)$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(a_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V(a_i)} \subset U$. Tomando $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(a_i)$ y $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V(a_i)}$ obtenemos la prueba de este inciso. ■

Teorema 1.3.4. *Si X es Hausdorff, $F \subset X$ cerrado y $K \subset X$ compacto, entonces $F \cap K$ es compacto.*

Demostración. Como X es Hausdorff y $K \subset X$ es compacto, por el Teorema 1.3.2 tenemos que K es cerrado en X. Dado que F es cerrado y K es cerrado, por el Teorema 1.1.5 el conjunto $F \cap K$ es cerrado en X. Finalmente, por el Teorema 1.3.2 tenemos que $F \cap K$ es cerrado en X. ■

Teorema 1.3.5. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio Hausdorff X, entonces para todo punto $x \in X - Y$ existen U y V abiertos ajenos en X, tales que $x \in U$ y $Y \subset V$.*

Demostración. Considerando las hipótesis, dado $x \in X$, para todo $y \in Y$, como X es Hausdorff tomamos U_y y V_y abiertos ajenos en X tales que $y \in V_y$ y $x \in U_y$. Entonces la familia $\{V_y | y \in Y\}$ es una cubierta abierta de para Y, como Y es compacto entonces existe una subcubierta finita $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$ para Y, es decir $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Tomamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$, entonces U y V son abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $Y \subset V$. ■

Hay un tipo de compacidad que es de sumo interés para nosotros, la cual es una de las propiedades topológicas más importantes y características de los espacios euclídeos, la compacidad local. En la siguiente definición recordemos que un subconjunto A es relativamente compacto si su cerradura $\overline{A}$ es un compacto.

Definición 1.3.2. *Diremos que un espacio topológico Hausdorff X es localmente compacto si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad relativamente compacta. Diremos que el espacio X es σ-compacto si es unión numerable de compactos.*

Nosotros trabajaremos en espacios Hausdorff localmente compactos. De la definición de espacio localmente compacto y de los teoremas anteriores, se sigue que en un espacio Hausdorff localmente compacto los conjuntos abiertos relativamente compactos forman una base para la topología.

Teorema 1.3.6. *Sea X un Hausdorff, entonces son equivalentes:*

1. *X es localmente compacto.*

2. *Para cada $x \in X$ y cada vecindad $U(x)$, existe un conjunto abierto relativamente compacto tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$*

3. *Si K es compacto, U abierto y $K \subset U$, entonces existe un conjunto abierto relativamente compacto V, tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

4. *X tiene una base que consiste de conjuntos abiertos relativamente compactos.*

Demostración. [1. $\Rightarrow$ 2.] Sea $x \in X$. Como X es Hausdorff localmente compacto, entonces existe un abierto W con $x \in W \subset \overline{W}$ con $\overline{W}$ compacto. Considerando a $\overline{W}$ como un espacio Hausdorff, pues la propiedad de ser Hausdorff es hereditaria por Teorema 1.2.2; tomemos un conjunto cerrado $A \subset \overline{W}$ y $x \in \overline{W}$ tal que $x \notin A$, como $A \subset \overline{W}$ es cerrado y $\overline{W}$ es compacto, entonces A es subespacio compacto de $\overline{W}$, luego por el Teorema 1.3.6 tenemos que existen M y N conjuntos abiertos disjuntos tales que $x \in M$ y $A \subset N$, así, por la Definición 1.2.2, $\overline{W}$ es un espacio regular. Como $\overline{W}$ es un espacio regular y $\overline{W} \cap U$ es una vecindad de x en $\overline{W}$, por el Teorema 1.3.3 existe un conjunto abierto G en $\overline{W}$ tal que $x \in G \subset \overline{G_{\overline{W}}} \subset \overline{W} \cap U$ en donde $\overline{G_{\overline{W}}}$ es la cerradura de G en el subespacio $\overline{W}$. Entonces $G = E \cap \overline{W}$, donde E es un abierto en X. Tomemos $V = E \cap W$ la vecindad de x contenida en X. Notemos que $x \in V$, pues $x \in W$ y $x \in E$, entonces $x \in V \subset \overline{V}$. Como $V \subset G \subset \overline{G_{\overline{W}}} \subset \overline{W} \cap U \subset U$. Por lo tanto se demuestra este inciso.

[2. $\Rightarrow$ 3.] Sea $x \in K$, por inciso 1), encontramos una vecindad relativamente compacta $V(x)$ con $\overline{V(x)} \subset U$; entonces la familia $\{V(x)|x \in K\}$ es una cubierta abierta para K, pero como K es compacto, entonces existe una cantidad finita de esas vecindades $V(x_1), ..., V(x_n)$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V(x_i)}$. Tomemos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$ y notemos que $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V(x_i)}$, en donde cada $\overline{V(x_i)}$ es compacto, por el Teorema 1.3.3 tenemos que $\overline{V}$ es un compacto y además $\overline{V} \subset U$. Luego $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

[3. $\Rightarrow$ 4.] Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los conjuntos abiertos relativamente compactos en X; como cada $\{x\} \subset X$ es compacto, el inciso 3), asegura que $\mathscr{B}$ es una base.

[4. $\Rightarrow$ 1.] Es inmediato de la definición. ∎

Ahora definiremos el soporte de una función:

Definición 1.3.3. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{K}$ una función, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Llamamos soporte de f al conjunto*

$$sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Con $C_C(X)$ denotaremos al $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las funciones $f : X \to \mathbb{K}$ continuas con soporte compacto.

De lo anterior sabemos que si $f \in C_C(X)$, entonces $f(X)$ es un compacto de $\mathbb{K}$. Sean K y V subconjuntos de un espacio topológico X, usaremos la notación $K \prec f$ y $f \prec V$ para indicar que $f : X \to [0,1], f \in C_C(X),$ K es un conjunto compacto, V es un conjunto abierto, f toma el valor de 1 en K y f toma el valor de 0 en $X - V$.

Con esto damos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.7. ***(Lema de Urysohn)*** *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto, V un conjunto abierto y $K \subset V$ un conjunto compacto. Entonces existe $f \in C_C(X)$ tal que $K \prec f \prec V$.*

Demostración. Como K es un compacto, V un abierto, $K \subset V$ y X es un espacio Hausdorff localmente compacto, por el Teorema 1.3.6 existe un abierto W_0 de clausura compacta tal que $K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset V$. Sea $W_1 = X$. Aplicamos de nuevo el Teorema 1.3.6 a $\overline{W_0} \subset V$, con lo cual obtenemos un abierto $W_{\frac{1}{2}}$ de clausura compacta tal que

$$K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset W_{\frac{1}{2}} \subset \overline{W_{\frac{1}{2}}} \subset V \subset W_1.$$

Aplicamos el Teorema 1.3.6 ahora dos veces, primero al abierto $W_{\frac{1}{2}}$ con el compacto $\overline{W_0}$ y luego al abierto V con el compacto $\overline{W_{\frac{1}{2}}}$, con lo cual obtenemos

$$K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset W_{\frac{1}{4}} \subset \overline{W_{\frac{1}{4}}} \subset W_{\frac{1}{2}} \subset \overline{W_{\frac{1}{2}}} \subset W_{\frac{3}{4}} \subset \overline{W_{\frac{3}{4}}} \subset V \subset W_1.$$

Lo seguimos aplicando e inductivamente vamos obteniendo una familia de abiertos $\{W_r\}_{r\in R}$, donde $R = \{\frac{k}{2^i} | i \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^i\}$, de manera que si $r < r' < 1$ son puntos de R, entonces $K \subset \overline{W_r} \subset W_{r'} \subset V$.

Definimos la función $g : X \to [0,1]$ mediante $g(x) = \inf\{r \in R | x \in W_r\}$, lo cual tiene sentido ya que $\{r \in R | x \in W_r\} \neq \emptyset$ pues estamos tomando $W_1 = X$, entonces cada $x \in X$, al menos está en W_1, así siempre pasa que $1 \in \{r \in R | x \in W_r\}$. Entonces, tenemos que $g(K) = \{0\}$ porque $K \subset W_0$ y $g(X - V) = \{1\}$ porque $W_r \cap (X - V) = \emptyset$ si $r < 1$. Nos basta probar que g es continua, pues tomando despúes $f = 1 - g$ obtenemos lo que buscamos, pues tendríamos que $sop(f) = K$ y K es un conjunto compacto.

Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $g(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 1$, entonces gracias a que los números racionales forman un conjunto denso, existen $r, r' \in R$ tales que

$$g(x) - \epsilon < r < g(x) < r' < g(x) + \epsilon,$$

luego $U = W_{r'} - \overline{W_r}$ es un entorno de x que cumple

$$g(U) \subset [r, r'] \subset (g(x) - \epsilon, g(x) + \epsilon).$$

Si $g(x) = 0$, tomamos $0 = g(x) < r < g(x) + \epsilon$ y $U = W_r$ cumple lo mismo. Si $g(x) = 1$, tomamos $g(x) - \epsilon < r < g(x)$ y el U buscado es $X - \overline{W_r}$. En cualquier caso obtenemos la continuidad de g en x. ■

Como consecuencia de este teorema se pueden construir particiones, subordinadas a los abiertos dados, de la unidad en un espacio Hausdorff localmente compacto. Esta herramienta se usa generalmente para hacer de un problema global, un problema local.

Teorema 1.3.8. ***(Particiones de la Unidad)*** *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto, $V_1, \ldots, V_n$ conjuntos abiertos de X y $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$ un compacto. Entonces existen funciones $h_i \prec V_i$ tales que $h_1(x) + ... + h_n(x) = 1$ para todo $x \in K$.*

Demostración. Dado $x \in K$ existe un i tal que $x \in V_i$. Existe un abierto W_x de clausura compacta tal que $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V_i$. La familia $\{W_x | x \in K\}$ forman una cubierta abierta para K, es decir, $K \subset \bigcup_{x \in K} W_x$. Debido a que K es compacto existe una subcubierta finita y llamamos H_i a la unión de todos los abiertos del subcubrimiento cuya clausura está contenida en V_i. De este modo los H_i son abiertos de clausura compacta que cubren a K y $\overline{H_i} \subset V_i$. Por el Lema de Urysohn 1.3.7, existen funciones $\overline{H_i} \prec g_i \prec V_i$.

Definimos

$$h_1 = g_1,\ h_2 = (1 - g_1)g_2, ..., h_n = (1 - g_1)(1 - g_2)...(1 - g_{n-1})g_n.$$

Es claro que $h_i \prec V_i$ y una inducción prueba que

$$h_1 + ... + h_n = 1 - (1 - g_1)...(1 - g_n).$$

Ahora es claro que la suma vale 1 sobre los puntos de K, pues alguna función g_i debe tomar el valor de 1. ■

Capítulo 2

Espacios de Medida

Entre 1880 y 1890, el concepto de medida estaba disociado del de integral, pero se manejaba el hecho de que lo que estaba debajo de la gráfica de una función siempre tenía área sin importar que f fuera o no integrable. Peano criticó que trataran la integral basados en la noción de área, pues el término de área no estaba bien definido. Cabe señalar que se tenían fórmulas bien determinadas para calcular áreas de regiones poligonales, al menos hasta $\mathbb{R}^3$

Peano abordó el problema de definir el área. Comenzó definiendo las nociones de punto exterior, punto interior y frontera de un conjunto contenido en $\mathbb{R}^n$. Hizo un tratamiento para $n = 1, 2, 3$. Para el caso $n = 2$, definió el área interior de un conjunto como el supremo de las áreas de todas las regiones poligonales contenidas enteramente en el conjunto tratado y el área exterior como el ínfimo de las áreas de todas las regiones poligonales que contienen al conjunto. Si ambas áreas coincidían, ese valor era el área del conjunto. También dió cuenta de que el área exterior podía verse como la suma del área interior del conjunto con el área exterior de la frontera del conjunto, y señaló que el conjunto tenía área si el área exterior de la frontera era cero. La noción de medibilidad estaba presente en estos trabajos de Peano, pero nunca los hizo notar.

Jordan, motivado por el estudio de las integrales múltiples, comienza definiendo las nociones de punto interior, exterior y frontera de un conjunto. Define los conceptos de contenido exterior y contenido interior de modo análogo al de Peano para un conjunto en $\mathbb{R}^n$, y llama al conjunto "medible" si su contenido exterior coincide con su contenido interior. Después prueba que si el conjunto puede verse como una unión disjunta de subconjuntos de él, entonces la suma de los contenidos interiores de los uniendos era menor o igual al contenido interior del conjunto, que a su vez era menor o igual que su contenido exterior, y este último menor o igual a la suma de los contenidos exteriores de los uniendos. Además probó que si cada uniendo era medible, entonces todo el conjunto era medible y que su área era la suma de las áreas de los uniendos.

Para funciones acotadas definidas sobre algún conjunto medible, define sumas inferior y superior relativas a una partición del conjunto en subconjuntos medibles y prueba que los límites de esas sumas existen cuando el contenido de los subconjuntos tiende a cero; a dichos límites los llama integral por defecto e integral por exceso, respectivamente. Define que la función es integrable sobre el conjunto si las integrales coinciden. Esta definición, cuando $n = 1$, nos lleva a la noción de integral de Riemannn, que ocupa particiones de un intervalo. La nueva defición de integral ocupa conjuntos medibles arbitrarios y no sólo intervalos. Con esto se nota un indicio de la conexión entre la extensión de la integral y la extensión de la clase de conjuntos medibles. Con todo esto y definiendo la integral de una función f sobre un conjunto no medible, Jordan establece el Teorema de Fubini, tomando a una función f acotada e integrable sobre un conjunto medible del plano.

La hipótesis esencial, tal como lo hizo notar Jordan, fue el hecho de trabajar sobre un conjunto medible. Estas ideas influyeron ampliamente sobre Borel y Lebesgue. Estas ideas también dieron pie a desarrollar más adelante definiciones y estudios sobre medidas en general.

2.1 Álgebras y σ-álgebras

Primero consideraremos un conjunto X del que queremos medir (de alguna manera) algunos de sus subconjuntos y definiremos la estructura que tiene la colección de esos subconjuntos que queremos medir. Para un conjunto X, entenderemos a $P(X)$ como el conjunto potencia de X o el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de X.

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathscr{A} \subset P(X)$, es un álgebra si:*

a) $X \in \mathscr{A}$,

b) Para cada conjunto A, si$A \in \mathscr{A}$, entonces $A^C \in \mathscr{A}$ (A^C es el complemento del conjunto A),

c) Para cada sucesión finita $A_1, \cdots, A_n$ de conjuntos que pertenecen a $\mathscr{A}$, el conjunto $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ pertenece a $\mathscr{A}$,

d) Para cada sucesión finita $A_1, \cdots, A_n$ de conjuntos que pertenecen a $\mathscr{A}$, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ pertenece a $\mathscr{A}$.

Entonces, un álgebra sobre X es una familia de subconjuntos de X que contiene a X, que es cerrada bajo complementos, cerrada bajo uniones finitas y cerrada bajo intersecciones finitas. De esta definición podemos deducir rápidamente que $\emptyset = A - A \in \mathscr{A}$.

Definición 2.1.2. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathscr{A} \subset P(X)$ es una σ-álgebra si cumple con las siguientes propiedades:*

a) $X \in \mathscr{A}$,

b) Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^C \in \mathscr{A}$, *c) Si* $A_1, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$, *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$,

d) Si $A_1, ..., A_n, ... \in \mathscr{A}$, *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Así, una σ-álgebra sobre X es una familia de subconjuntos de X que contiene a X, que es cerrada bajo complementos, cerrada bajo uniones numerables y cerrada bajo intersecciones numerables. De hecho, toda σ-álgebra es un álgebra.

Ejemplo 2.1.1. *Sea* X *un conjunto.*

1. $P(X)$ *es la mayor* σ*-álgebra sobre* X.

2. $\{\emptyset, X\}$ *es la menor* σ*-álgebra sobre* X.

3. *Sea* X *que tiene un número infinito de elementos y consideremos la colección* $\mathscr{A}$ *de todos los subconjuntos* A *de* X, *tales que* A *o* A^C *sea numerable. Entonces* $\mathscr{A}$ *es* σ*-álgebra sobre* X.

4. *Sea* X *que tiene un número infinito de elementos y consideremos la colección* $\mathscr{A}$ *de todos los subconjuntos* A *de* X *tales que* A *o* A^C *sea finito. Entonces* $\mathscr{A}$ *es álgebra pero no* σ*-álgebra sobre* X.

Ya estamos en condición de decir lo que para nosotros es un espacio medible:

Definición 2.1.3. *Llamaremos espacio medible al par* $(X, \mathscr{A})$, *donde* X *es un conjunto y* $\mathscr{A}$ *es una* σ*-álgebra sobre* X. *Llamaremos conjuntos medibles a los elementos de* $\mathscr{A}$.

Como la intersección arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 2.1.4. *Sean* X *un conjunto y* C *una familia de subconjuntos de* X, *denotaremos con* $\sigma(C)$ *a la mínima* σ*-álgebra que contiene a* C, *la cual existe y es la intersección de todas las* σ*-álgebras que la contienen.*

A la familia $\sigma(C)$ la llamaremos la σ-álgebra generada por C.

Un caso particular y muy importante de espacio medible se tiene cuando (X,τ) es un espacio topológico, pues la definición obliga a $\sigma(\tau)$ a ser una σ-álgebra. En base a esto, definimos los conjuntos de Borel.

Definición 2.1.5. *Dado un espacio topológico (X,τ), llamaremos σ-álgebra de Borel a la generada por sus abiertos, que denotaremos por $\mathbf{B}(X) = \sigma(\tau)$ y a sus elementos los llamamos borelianos.*

Gracias a esta definición, tenemos que los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff, también los compactos son borelianos, pues son cerrados.

Definición 2.1.6. *Llamaremos límite superior y límite inferior de una sucesión de conjuntos A_n, respectivamente, a los conjuntos*

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \ \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n,$$

y damos las siguientes notaciones:

$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\bigcup A_n = A$.

$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\bigcap A_n = A$.

Con estas notaciones definimos lo que es una clase monótona.

Definición 2.1.7. *Sea X un conjunto. Una familia C de subconjuntos de X, es una clase monótona si satisface las siguientes condiciones:*

a) Si $A_n \in C$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in C$.

b) Si $A_n \in C$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in C$.

Lo cual nos ayuda a caracterizar a las σ-álgebras:

Teorema 2.1.1. ***[7, Proposición 1.2.20]*** *Sea X un conjunto. Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X es una σ-álgebra si y sólo si $\mathscr{A}$ es una álgebra y una clase monótona.*

2.2 Medidas

2.2.1 Positivas

A partir de ahora, con $\overline{\mathbb{R}}_+$ denotaremos al conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$.

Definición 2.2.1. *Una medida positiva o simplemente medida, sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$, es una función de conjuntos $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que es σ-aditiva y se anula en el vacío, es decir, μ es una medida si y sólo si*

a) Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

b) $\mu(\emptyset) = 0$.

A la terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ le llamaremos espacio de medida.

Diremos que X es de medida finita si $\mu(X) < \infty$ y que es de medida σ-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = X$ y cada $\mu(A_n) < \infty$. Además, llamaremos probabilidad a toda medida que verifique $\mu(X) = 1$.

Ya con esta definición, las medidas positivas tienen las siguientes propiedades:

Teorema 2.2.1. ***[12, Propiedades de las medidas positivas]*** *Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, entonces μ satisface las siguientes propiedades:*

1) μ es aditva, es decir, si $\{A_n\}_{n=1}^{p}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n)$

2) μ es monótona, es decir, si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además, si $\mu(A) < \infty$, entonces $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) Para un número finito de conjuntos medibles cualesquiera, μ satisface que si $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$. Además, si $\{A_n\}_{n=1}^{p} \subset \mathscr{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n)$. Esta última condición se llama subaditividad.

4) μ es σ-subaditiva, es decir, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Una de las propiedades básicas de mayor utilidad de las medidas y que es consecuencia de ser σ-aditivas, es la de continuidad secuencial.

Teorema 2.2.2. ***[7, Proposición 1.3.11]*** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ una sucesión, entonces se cumple lo siguiente:*

a) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

b) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

2.2.2 Exteriores

Una herramienta básica para poder construir medidas, es el procedimiento de Caratheodory, el cual trabaja con medidas exteriores, las cuales definimos a continuación:

Definición 2.2.2. *Sea X un conjunto. Una medida exterior, usualmente denotada μ^*, es una función de conjuntos $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, la cual se anula en el vacío, es monótona y σ-subaditiva (y por ende, también subaditiva).*

Ejemplo 2.2.1. *Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mu^*(A) := 0$ si A es numerable; $\mu^*(A) := 1$ si A es no numerable y existe un intervalo acotado I tal que $A - I$ es numerable; y $\mu^*(A) := \infty$ en otro caso.*

Aunque las medidas exteriores pueden no ser medidas, son útiles en la construcción de medidas, un resultado muy útil es:

Teorema 2.2.3. ***(Caratheodory) [12, Teorema 1.1]*** *Sea μ^* una medida exterior sobre $P(X)$, entonces la clase*

$$T := \{A \subset X \mid \forall\ Y \subset X,\ \mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y - A)\}$$

es una σ-álgebra y la función de conjuntos $\mu =: \mu^*|_T$ es una medida completa, es decir, que todo subconjunto de un conjunto de medida nula es medible (y por tanto, de medida nula).

Diremos que una propiedad se cumple casi siempre o casi seguro respecto de μ (μ-c.s.) si el conjunto C de puntos donde no se verifica la propiedad está en contenido un medible, $C \subset B$, con $\mu(B) = 0$.

2.2.3 De Lebesgue

Definición 2.2.3. *Sea μ^* una medida exterior. Diremos que un subconjunto $E \subset X$ es μ^*-medible si para todo $A \subset X$ se cumple que*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Sea $\mathscr{M}$ la colección de todos los conjuntos μ^*-medibles.

Teorema 2.2.4. ***[7, Nota 1.4.6]*** *$\mathscr{M}$ es una σ-álgebra y la restricción de μ^* a $\mathscr{M}$ es σ-aditiva.*

A la restricción mencionada en el teorema, se le conoce como Medida de Lebesgue.

2.2.4 Complejas

Definición 2.2.4. *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra en un conjunto. Se dice que una colección numerable $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ es una partición de E, si $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ y*

$E_i \cap E_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Una medida compleja es una función compleja μ en $\mathscr{A}$ tal que $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, con $E \in \mathscr{A}$ para toda partición E_i de E.

Si μ es una medida compleja en $\mathscr{A}$, sea $|\mu|$ una función en $\mathscr{A}$ definida por

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ es una partición de } E\right\},$$

para cada $E \in \mathscr{A}$. La función $|\mu|$ se llama la variación total de μ.

Notemos que si μ es una medida positiva, entonces $|\mu| = \mu$.

Teorema 2.2.5. ***[5, Teorema 1.1.4]*** *La variación total $|\mu|$ de una medida compleja μ en $\mathscr{A}$ es una medida positiva en $\mathscr{A}$.*

Teorema 2.2.6. ***[5, Teorema 1.1.5]*** *Si μ es una medida compleja en X, entonces $|\mu|(X) < \infty$.*

Así, podemos decir que si μ es una medida positiva en X tenemos que: μ es una medida compleja si y sólo si $\mu(X) < \infty$.

2.2.5 Regulares

Ahora vamos a enunciar algunos resultados que tienen que ver con espacios Lebesgue medibles y espacios Topológicos Hausdorff.

Definición 2.2.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra que contiene a la σ-álgebra de Borel. Diremos que una medida μ es regular interior en cada $E \in \mathscr{A}$ si*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\}.$$

Diremos que μ es regular exterior en cada $E \in \mathscr{A}$ si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \text{ abierto y } E \subset A\}.$$

Si μ es una medida regular interior en los abiertos y en cada $E \in \mathscr{A}$ con $\mu(E) < \infty$, es regular exterior en cada $E \in \mathscr{A}$ y es finita en los compactos, entonces se dice que μ es cuasi-regular

Diremos que μ es regular si es finita en los compactos, es regular exterior y es regular interior en todo $E \in \mathscr{A}$.

Para el concepto de regularidad, enunciamos un teorema que nos garantiza la regularidad de una medida a partir de la regularidad interior:

Teorema 2.2.7. ***[12, Proposición 3.4]*** *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y μ una medida finita sobre una σ-álgebra que contiene a los borelianos. Si μ es regular interior, entonces μ es regular.*

Una medida μ sobre una σ-álgebra que contiene a los borelianos de un espacio topológico Hausdorff, es llamada de Borel si para todo compacto K, $\mu(K) < \infty$.

Teorema 2.2.8. ***[16, Teorema 2.17]*** *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y μ una medida de Borel cuasi-regular en X. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) Para cada E conjunto de Borel y $\epsilon > 0$, existen un conjunto cerrado F y un conjunto abierto V, tales que $F \subset E \subset V$ y $\mu(V - F) < \epsilon$

b) μ es una medida regular de Borel en X.

2.3 Funciones medibles

Usaremos la notación $\overline{\mathbb{R}}$ para denotar al conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición 2.3.1. *Sean $(X_1, \mathscr{A}_1)$ y $(X_2, \mathscr{A}_2)$ espacios medibles. Una función $F : (X_1, \mathscr{A}_1) \to (X_2, \mathscr{A}_2)$ es medible si $F^{-1}(B) \in \mathscr{A}_1$ para todo $B \in \mathscr{A}_2$.*

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos las funciones $f^+ = \max\{f, 0\},\ f^- = \max\{-f, 0\}$, con las cuales $f = f^+ - f^-$ y las llamamos parte positiva y parte negativa de f, respectivamente. Además se cumple que $|f| = f^+ + f^-$.

Un resultado básico es que la composición de funciones medibles es medible. Además, las funciones continuas entre espacios topológicos son medibles cuando el codominio de la función es un espacio medible el cual considera a la σ-álgebra de Borel.

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Si tenemos que $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$ es medible, entonces $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ es medible, esto es debido a que la inclusión $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función continua, y por lo tanto medible. Así cuando tomemos una función real, estaremos considerando que el codominio de la función es $(\overline{\mathbb{R}}, \mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Algunas propiedades de las funciones medibles son las siguientes:

Teorema 2.3.1. ***[7, Proposición 2.2.2]***

1. *Una función $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ es medible si y sólo si para cada $c \in \mathbb{R},\ \{x \in X : f(x) > c\} \in \mathscr{A}$*

2. *Si f es una función medible, entonces $-f$ y $|f|$ son funciones medibles.*

3. *Si f y g son funciones medibles, entonces la función $(f \vee g) = \max\{f, g\}$ y la función $(f \wedge g) = \min\{f, g\}$, son funciones medibles.*

4. *Si f es una función medible, entonces f^+ y f^- son funciones medibles.*

En el inciso 1) del Teorema 2.3.1, podemos cambiar el símbolo $>$ por cualquier otra desigualdad $(<, \leq, \geq)$ y la propiedad se sigue cumpliendo.

Es importante también mencionar que la medibilidad se conserva al tomar límites. Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, definimos sus límites superior e inferior como $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} a_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{k\geq 0} \inf_{n\geq k} a_n$, respectivamente.

Definición 2.3.2. *Sean X un conjunto y $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $x \in X$ las funciones* $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *y* $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *se definen puntualmente:*

a) $(\inf f_n)(x) = \inf\{f_n(x)|n \in \mathbb{N}\}$,

b) $(\sup f_n)(x) = \sup\{f_n(x)|n \in \mathbb{N}\}$,

c) $(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n)(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$,

d) $(\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n)(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$.

Recordemos que el límite superior de una sucesión es el supremo de sus puntos adherentes, y el límite inferior es el ínfimo de sus puntos adherentes (ver [11, pag. 123]).

Teorema 2.3.2. ***[7, Teorema 2.24]*** *Sean $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, para $n \in \mathbb{N}$ funciones medibles, entonces:*

a) El $\sup f_n$ *y el* $\inf f_n$ *son funciones medibles.*

b) El $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *y el* $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *son funciones medibles.*

c) Si existe en todo $x \in X$ el límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, entonces f es medible.

Una función de mucha utilidad es la función característica de un conjunto o función indicadora:

Definición 2.3.3. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $A \in \mathscr{A}$, llamaremos función característica de A, a la función medible $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, la cual toma el valor* 1 *si $x \in A$ y 0 si $x \notin A$.*

2.4 Integral de Lebesgue

En todo espacio de medida podemos definir una integral, en la cual juegan un papel importante los conjuntos medibles. Por el hecho de que aquí se integra sobre conjuntos que son más generales que los intervalos, se obtienen más funciones integrables, y eso nos ayudará a que además de que se conserva la integrabilidad en las operaciones algebraicas, también lo hagan los límites.

Será importante dar una aritmética apropiada a los números reales extendidos para que tengan sentido las siguientes definiciones. Dicha aritmética es la siguiente:

Recordemos que denotamos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Adicionalmente a las operaciones con las que cuenta $\mathbb{R}$, definimos en $\overline{\mathbb{R}}$:

- $a - \infty = -\infty$ y $a + \infty = +\infty$, para $a \in \mathbb{R}$.
- $\infty - (-\infty) = \infty$ y $\infty + \infty = \infty$.
- Si $a < 0$, $a(-\infty) = \infty$ y $a(\infty) = -\infty$.
- Si $a > 0$, $a(-\infty) = -\infty$ y $a(\infty) = \infty$.
- $0(\infty) = 0(-\infty) = 0$

Notemos que la ley de cancelación deja de ser válida y que $\infty - \infty$ no está definida.

En esta sección estaremos considerando $X = (X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida.

Definición 2.4.1. *Una función simple en un espacio de medida X, es una función medible $s : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que sólo toma un número finito de valores $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$. Si llamamos $A_i = s^{-1}[\alpha_i]$, entonces los conjuntos A_i son medibles disjuntos y* $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.

La base de la construcción de la integral es el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. ***[11, Teorema 7.10]*** *Sea X un espacio de medida y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples en X tal que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ y $f = \lim_{n\to\infty} s_n$.*

Ya con este teorema a cuestas, podemos definir la integral de funciones simples como sigue:

Definición 2.4.2. *Sean X un espacio de medida y $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple en X. Definimos la integral de s en X como*

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

con el convenio de que $\infty \cdot 0 = 0$

Esta definición podemos restringirla a conjuntos medibles, pues si E es un conjunto medible de X, entonces $s|_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$, donde las funciones características se toman ahora sobre E, y así

$$\int_E s|_E d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Por otro lado veamos que $s\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$ con las funciones características en X, y así concluimos que

$$\int_E s d\mu = \int_X s\chi_E d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E),$$

con esto estamos diciendo que a efectos de integración se puede adoptar de manera consistente el convenio por el cual las funciones $s|_E$ y $s\chi_E$ se identifican.

Por ahora necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.2. ***[11, Teorema 7.12]*** *Sea X un espacio de medida.*

a) Sea s una función simple en X. Para cada subconjunto medible E de X, definimos $\nu(E) = \int_E s d\mu$. Entonces ν es una medida en X.

b) Si s y t son funciones simples en X, se cumple

$$\int_X (s+t)d\mu = \int_X sd\mu + \int_X td\mu.$$

Notemos que si $s \leq t$ son funciones simples en un espacio de medida X, entonces $t-s$ también es una función simple y además

$$\int_X sd\mu \leq \int_X sd\mu + \int_X (t-s)d\mu = \int_X td\mu.$$

En particular tenemos que

$$\int_X td\mu = \sup \left\{ \int_X sd\mu | s \text{ es una función simple }, s \leq t \right\}.$$

Gracias a lo anterior, tenemos que la definición que a continuación se presenta es consistente:

Definición 2.4.3. *Sea X un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Definimos la integral de f como*

$$\int_X fd\mu = \sup \left\{ \int_X sd\mu | s \text{ es una función simple }, \ s \leq f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Observemos que si E es un subconjunto medible de X y s es una función simple en E por debajo de $f|_E$, su extensión a X (solamente haciéndola nula fuera de E) es una función simple bajo $f\chi_E$, y la restricción a E de una función simple en X bajo $f\chi_E$ es una función simple en E bajo $f|_E$. De esto se concluye que $\displaystyle\int_E fd\mu = \int_X f\chi_E d\mu$, por el hecho de que ambas integrales son el supremo del mismo conjunto.

A partir de ésta definición podemos enunciar algunas propiedades:

Teorema 2.4.3. ***[11, Teorema 7.14]*** *Sea X un espacio de medida y E un subconjunto medible de X.*

1. *Si $0 \leq f \leq g$ son funciones medibles en X, entonces $\displaystyle\int_X fd\mu \leq \int_X gd\mu$.*
2. *Si $f \geq 0$ es una función medible en X y $A \subset B$ son subconjuntos medibles de X, entonces $\displaystyle\int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$.*

3. *Si* $f \geq 0$ *es una función medible en* X *y* $f|_E = 0$*, entonces* $\int_E f d\mu = 0$ *(aunque* $\mu(E) = \infty$*).*

4. *Si* $f \geq 0$ *es una función medible en* X *y* $\mu(E) = 0$*, entonces* $\int_E f d\mu = 0$ *(aunque* $f|_E = \infty$*).*

Uno de los resultados más importantes del cálculo integral es el siguiente:

Teorema 2.4.4. ***(de la Convergencia Monótona de Lebesgue)*** *Sea* X *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles en* X *tal que*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f \text{ y } f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Entonces f *es medible y* $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$*.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.3, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu$. Sabemos que toda sucesión monótona creciente en $[0, \infty]$ converge a su supremo, entonces existe $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \in [0, \infty]$. Por el Teorema 2.3.2 tenemos que f es medible, pues f es el límite puntual de funciones medibles. Nuevamente por el Teorema 2.4.3, $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$, entonces $\alpha \leq \int_X f d\mu$.

Sea s una función simple, $s \leq f$ y sea $0 < c < 1$. Definimos el conjunto

$$E_n = \{x \in X | f_n(x) \geq c \cdot s(x)\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, ...$$

Claramente $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$, son conjuntos medibles y, como veremos ahorita, $X = \bigcup_n E_n$.

Sea $x \in X$ y $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$ y si $f(x) > 0$ entonces llegamos a que $cs(x) < s(x) \leq f(x)$, luego $x \in E_n$ para algún n. Así tenemos que

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu.$$

Ahora aplicando el Teorema 2.4.2 y dado que el Teorema 2.2.2 nos garantiza que la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos es el supremo de las medidas, obtenemos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu \geq c \int_X s d\mu.$$

Como esto es cierto para todo $c < 1$, podemos concluir que $\alpha \geq \int_X s d\mu$ para toda función simple $s \leq f$. Tomando el supremo de estas integrales resulta que $\alpha \geq \int_X f d\mu$, con lo cual tenemos la igualdad deseada y por lo tanto la igualdad.

■

Este teorema nos permite reducir propiedades de la integral de funciones no negativas a propiedades de funciones simples, por ejemplo, para funciones medibles ya se cumple que $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.

Otra aplicación del teorema anterior es la conservación de sumas.

Teorema 2.4.5. *Sea X un espacio medible y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no negativas medibles en X. Entonces*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. Primero veamos para el caso de una suma finita. Probaremos que si f y g son funciones medibles no negativas, entonces

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Para esto, por el Teorema 2.4.1 existen dos sucesiones de funciones simples medibles no negativas $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, las cuales son convergentes a f y g, respectivamente. Por el Teorema 2.4.2, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_X (s_n + t_n) d\mu = \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu.$$

Tomando límites, el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue nos da la igualdad.

Para el caso general, gracias a lo que acabamos de probar, tenemos que

$$\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n d\mu, \text{ para } k = 1, 2, ...$$

Las funciones $\sum_{n=1}^{k} f_n$ forman una sucesión monótona de funciones medibles, luego por el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue tenemos que

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

■

Ya con estas nuevas herramientas podemos generalizar el Teorema 2.4.2:

Teorema 2.4.6. *Sea X un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Para cada subconjunto medible E de X, definimos $\nu(E) = \int_E f d\mu$. Entonces ν es una medida en X.*

Demostración. Es claro que $\nu(\emptyset) = 0$. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es una unión disjunta de conjuntos medibles. Es claro que $f\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$ y aplicando el Teorema 2.4.5, nos queda que $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$. ■

Otro de los resultados clásicos y no menos importante dentro de la teoría de integración, es el Lema de Fatou:

Teorema 2.4.7. ***(Lema de Fatou)*** *Sea X un espacio de medida y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas en X. Entonces*

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. Sea $g_k = \inf_{n\geq k} f_n$, entonces $g_k \leq f_n$ para $n \geq k$, luego se cumple que $\int_X g_k d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu$. Además, las funciones g_k forman una sucesión monótona creciente que converge a $\varliminf_{n\to\infty} f_n$, luego por el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \sup_{k\geq 1} \int_X g_k d\mu \leq \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

■

Ya con toda esta teoría estamos en condiciones de definir la integral de Lebesgue:

Definición 2.4.4. *Sea X un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Diremos que f es Lebesgue integrable en X si tanto $\int_X f^+ d\mu$ como $\int_X f^- d\mu$ son finitas. En este caso definimos la integral de Lebesgue de f como*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Con esta definición, si f es una función no negativa, entonces $f^- = 0$ y su integral es la que ya teníamos definida. Las siguientes propiedades se siguen inmediatamente de los resultados enunciados previamente.

Teorema 2.4.8. ***[11, Teorema 7.20]*** *Sea X un espacio de medida y sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles.*

a) f es integrable si y sólo si $\int_X |f| d\mu < +\infty$, y en tal caso

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

b) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f, g son integrables, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

c) Si $f < g$ y ambas son integrables, entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

d) Si E es un subconjunto medible de X y f es integrable en X, entonces f es integrable en E y $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$.

e) Si E y F son subconjuntos medibles disjuntos de X, entonces la función f es integrable en $E \cup F$ si y sólo si lo es en E y en F y, en tal caso,

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

f) Si E es un subconjunto medible de X y $f|_E = 0$, entonces $\int_E f d\mu = 0$.

g) Si E es un subconjunto nulo de X, entonces $\int_E f d\mu = 0$.

h) Si f es integrable en X, entonces el conjunto de los puntos donde f toma los valores $\pm\infty$ es nulo.

Como consecuencias inmediatas de este teorema tenemos que

$$\int_E 1 d\mu = \int_X \chi_E d\mu = \mu(E),$$

y que si $|f| \leq g$ y g es integrable, entonces f también lo es. Además podemos deducir que toda función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita es integrable.

Antes de cerrar esta pequeña sección, veamos un teorema de convergencia, el cual se vale para toda función medible.

Teorema 2.4.9. ***(de la Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *Sea X un espacio de medida y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones medibles de X en $\overline{\mathbb{R}}$ que convergen puntualmente a una función f. Si existe una función integrable $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración. Observemos claramente que $|f| \leq g$, entonces f es integrable. Como $|f_n - f| \leq 2g$, podemos aplicar el Lema de Fatou a las funciones no negativas $2g - |f_n - f|$, con lo cual obtenemos que

$$\int_X 2g d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|) d\mu.$$

Es fácil ver que el signo negativo sale del límite, pero cambiando éste por un límite superior, así $-\varlimsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \geq 0$, es decir, $\varlimsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$. Pero es claro que

$$0 \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

luego los límites inferior y superior coinciden, así $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|d\mu = 0$.

Ahora aplicamos que

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|d\mu,$$

de donde se sigue el teorema. ■

En este teorema se dice que las funciones f_n están dominadas por la función g.

El que la integral de una función sea 0 no significa que el conjunto sobre el que se integra sea de medida nula, pero tampoco que la función sea la función cero, pero si podemos inferir algo más.

Teorema 2.4.10. ***[11, Teorema 7.22]*** *Sea X un espacio de medida y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible tal que $\int_X f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ μ-c.s. en X.*

Terminamos esta parte con la siguiente sección:

2.5 Teorema de Radon-Nikodym

Definición 2.5.1. *Sea λ una medida compleja (en particular una medida o una medida real), en el espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, diremos que λ es absolutamente continua respecto de μ, lo cual denotaremos por $\lambda \ll \mu$, si para cada $A \in \mathscr{A}$ se cumple que si $\mu(A) = 0$, entonces $\lambda(A) = 0$.*

El siguiente teorema nos aclara la razón por la cual se usa la palabra continuidad en la definición precedente.

Teorema 2.5.1. ***[7, Proposición 4.4.1]*** *Sea λ una medida compleja en el espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Entonces son equivalentes:*

i) $\lambda \ll \mu$,

ii) $|\lambda| \ll \mu$,

iii) *Para cada* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $\mu(E) < \delta$, *entonces* $|\lambda(E)| < \epsilon$.

Concluimos este capítulo con el siguiente resultado, el cual es fundamental en teoría de la medida.

Teorema 2.5.2. *(**Radon-Nikodym I**) [7, **Teorema 4.4.3**] Sean* λ *y* μ *medidas* σ*-finitas en* $(X, \mathscr{A})$*, tales que* $\lambda \ll \mu$*. Entonces existe una única c.s.* $(\mathscr{A}, \mu)$ *función finita medible con integral* $g : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$*, tal que para cada* $A \in \mathscr{A}$,

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Como una aplicación de este resultado, tenemos

Teorema 2.5.3. *(**Radon-Nikodym II**) [7, **Teorema 4.4.5**] Sea* λ *una medida compleja y* μ *una medida* σ*-finita en* $(X, \mathscr{A})$*, tales que* $\lambda \ll \mu$*. Entonces existe una única c.s.* $(\mathscr{A}, \mu)$ *función medible integrable* $g : X \to \mathbb{C}$*, tal que para cada* $A \in \mathscr{A}$,

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Capítulo 3

Espacios L^p

A principios del Análisis, la extensión de las nociones de límite y continuidad a conjuntos no numéricos se había hecho sólo para situaciones particulares. La posibilidad de definir estas nociones en un conjunto arbitrario fue desarrollada por Fréchet, pues introduce las nociones de espacio métrico, compacidad, completitud y separabilidad, discutiendo estas propiedades en algunos espacios especiales. Como un ejemplo de estos espacios especiales, encontramos el espacio de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$, dotado de la métrica uniforme; también trabajó espacios funcionales no metrizables, como el de todas las funciones continuas sobre $[a, b]$ con la convergencia puntual.

Cuando se aplicaron estas ideas sobre la teoría de la integración de Lebesgue, se originaron los espacios L^p. Para $p = 1$, este espacio ya estaba contenido implícitamente en los trabajos de Lebesgue. El caso $p = 2$, aparece de manera explícita en 1907, cuando de manera independiente, F. Riesz y E. Fischer descubren el Teorema de Riesz-Fischer, en el cual se encontró que el espacio métrico $L^2([a, b])$ es completo, separable e isomorfo al espacio de Hilbert de sucesiones l^2. También de manera independiente, Riesz y Fréchet obtienen la representación de cualquier forma lineal continua sobre L^2. El resultado para un espacio de Hilbert abstracto, también lo desarrolla Riesz, en 1934.

Los espacios L^p, para $1 < p < \infty$, fueron introducidos por Riesz en 1910, los cuales sirvieron para estudiar y resolver el problema general de los momentos, es decir, caracterizar cuándo existe una función f que cumpla las condiciones $\int_a^b f(x)g_n(X) = c_n$ para $n = 1, 2, 3, ...$, donde g_n es una sucesión de funciones y c_n es una sucesión de escalares dados.

Después de referirse a los trabajos de Hilbert, Schmidt y Fischer, quienes consideraron el caso en el que $f \in L^2 = L^2([a, b])$, Riesz estudió el problema para una clase más general de funciones, el de las funciones f tales que $|f|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue, que él denotó por $[L^p]$ para $p > 1$, e hizo notar la linealidad de esta clase. Para que el problema siempre tenga sentido, Riesz mostró que la solución g debe buscarse en la clase $[L^q]$, en donde p y q son número naturales conjugados, también introduce la norma usual en estos espacios.

Además introduce la noción de convergencia débil, en la forma

$$(f_n) \underset{\rightarrow}{w} f \Leftrightarrow \int_a^x f_n(t)dt \rightarrow \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in [a, b].$$

Después prueba que esto equivale a que $\int f_n g$ converja a $\int fg$, para cada $g \in L^q([a, b])$. Así se establece que el dual de L^p es L^q con p y q conjugados. También probó que toda sucesión en L^p acotada en norma, tiene una subsucesión débilmente convergente a alguna función de L^p. A pesar de que Riesz pudo encontrar los duales de los espacios L^p, él no los llamó así.

Es importante hacer notar, que para el estudio de este capítulo se requiere tener conocimientos básicos sobre espacios normados y conceptos relacionados a este tipo de espacios.

Debido a la familiaridad que se tiene con la medida de Lebesgue y los espacios L^p de Lebesgue, todo lo aquí expuesto se puede restringir sólo a este tipo particular de espacio.

3.1 Primeras propiedades

Comenzaremos dando las primeras definiciones.

Definición 3.1.1. *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$. El espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ se define mediante*

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ funciones medibles } \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Notemos que si $f : X \to \mathbb{C}$ es medible y $\int_X |f|^p d\mu = 0$, entonces $f = 0$ μ-c.s. Además, por las propiedades de la integral tenemos que

$$\int_X |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu \text{ para toda } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Teorema 3.1.1. ***[13, Proposición 2.2]*** *El espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial complejo.*

Sea $N := \{f \in L^p(\mu) \mid \int_X |f|^p d\mu = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid f = 0 \mu - c.s.\}$, notemos que N es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^p(\mu)$. Además $f = g$ $\mu - c.s.$ si y sólo si $f - g \in N$.

Definición 3.1.2. *Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio vectorial $L^p(X)$ se define mediante el espacio cociente $L^p(X) := \mathcal{L}^p(\mu)/N$ y además definimos la aplicación $|| \cdot ||_p : L^p(X) \to [0, \infty]$ mediante la expresión $||f||_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, para cada $f \in L^p(X)$.*

Es necesario hacer ver que así como hemos definido a $L^p(X)$, sus elementos son clases de equivalencia, de modo que para cada $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, denotamos su clase de equivalencia, como es costumbre, por $[f] \in L^p(X)$. Debido a esto se cumple que

1. $g \in [f]$ si y sólo si $f = g$ $\mu - c.s.$.
2. Si $g \in [f]$, entonces $\int_X |f|^p d\mu = \int_X |g|^p d\mu$.

Habiendo hecho esta aclaración, llamaremos a los elementos de $L^p(X)$ funciones, las cuales manejaremos poniendo mucha atención en lo antes mencionado y denotaremos las clases por un elemento que pertenezca a ellas.

También recordemos que si $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$) (con p y q números enteros) y cumplen que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, a los números p y q les llamaremos exponentes conjugados.

Existen unas desigualdades de suma importancia en el desarrollo de esta teoría, las cuales presentamos a continuación:

Teorema 3.1.2. ***[13, Teorema 2.4]*** *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $1 < q < \infty$ *exponentes conjugados,* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *funciones* μ*-medibles. Entonces se cumple:*

i) $\displaystyle\int_X fgd\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ *(**Desigualdad de Hölder**).*

ii) $\displaystyle\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ *(**Desigualdad de Minkowski**).*

Como resultado de este teorema tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1.1. *Para todo* $1 \leq p < \infty$ *el espacio* $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ *es un espacio normado.*

Demostración. Basta probar que $||\cdot||_p$ es una norma. Por las observaciones hechas y la manera en la que se definió $||\cdot||_p$, ya sabemos que es no negativa y que saca escalares. Resta verificar que se cumpla la desigualdad triangular, para el caso $p > 1$ esta desigualdad es precisamente la desigualdad de Minkowski y para el caso $p = 1$ la prueba es inmediata. ■

Pero no sólo eso, pues el siguiente teorema nos garantiza que además de ser normado, es completo.

Teorema 3.1.3. *Para todo* $1 \leq p < \infty$ *el espacio* $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Por el Corolario 3.1.1 tenemos que el espacio $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ es un espacio normado. Para ver que es completo, vamos a usar el teorema que dice que un espacio normado es Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.

Sea $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(X)$, la cual produce una serie absolutamente convergente, es decir, que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} ||f_j||_p < \infty$. Debemos probar que la serie $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ es convergente, es decir, que existe $h \in L^p(X)$ tal que $\left|\left|h - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j\right|\right|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para cada $n \geq 1$ definimos las funciones $g_n : X \to [0, \infty]$ tales que para cada $x \in X$, $g_n(x) := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|$, y definimos a la función $g : X \to [0, \infty]$ mediante $g(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ para cada $x \in X$.Notemos que todas las funciones son medibles y por la Desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\left(\int_X g_n^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} |f_j|\right|\right|_p \leq \sum_{j=1}^{n} ||f_j||_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||f_j||_p < \infty$$

y como $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ para cada $x \in X$, por el Lema de Fatou se cumple que

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \underline{\lim_{n\to\infty}} g_n^p d\mu \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||f_j||_p\right) < \infty.$$

Por lo tanto $g(x) < \infty$ μ-c.s.

Definimos la función $h : X \to \mathbb{C}$, mediante $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. La función h está bien definida μ-c.s., cumple que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = h(x)$ μ-c.s. y

$$\left|h(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right|^p \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p \leq g(x)^p, \ \mu - c.s.$$

Como $\displaystyle\int_X g^p d\mu < \infty$, por el Teorema de la Convergencia Dominada de

Lebesgue, se cumple que

$$\left|\left|h - \sum_{j=1}^{n} f_j\right|\right|_p = \left(\int_X \left|h(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0^{\frac{1}{p}} = 0 \; si \; n \to \infty$$

y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ es convergente en $L^p(X)$. ■

Como ejemplo de estos espacios tenemos:

Ejemplo 3.1.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A} = B(X)$, el conjunto de los borelianos en X y μ la medida de Lebesgue en X, entonces los espacios $L^p(X)$ son los espacios estándar de Lebesgue con la norma $||f||_p = \left(\int_X |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.*

3.2 Espacio L^∞

Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función continua. La norma usualmente usada para estas funciones es la norma del supremo, definida como $||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, pero esta puede modificarse cuando f varía en un conjunto de medida cero, por lo tanto, para evitar esto introducimos el siguiente concepto:

Definición 3.2.1. *Sean $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible y $K \geq 0$. Decimos que K es una cota esencial de f si $|f(x)| \leq K$ μ-c.s. Se llama supremo esencial de f al ínfimo de las cotas esenciales de f y se escribe como $||f||_\infty$.*

Notemos que K es una cota esencial de f si y sólo si

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > K\}) = 0.$$

Ahora algunos resultados acerca del supremo esencial.

Teorema 3.2.1. ***[13, Proposición 2.8]*** *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medibles y $K \in [0, \infty)$. Tenemos que:*

a) $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ *μ-c.s.*

b) $|f(x)| \leq K$ *μ-c.s si y sólo si* $||f||_\infty \leq K$.

c) Si $f = g$ *μ-c.s., entonces* $||f||_\infty = ||g||_\infty$.

d) Si $N \subset X$ *y* $\mu(N) = 0$, *entonces* $||f||_\infty \leq \sup_{x \notin N} |f(x)|$.

e) Existe $N \subset X$ *tal que* $\mu(N) = 0$ *y* $||f||_\infty = \sup_{x \notin N} |f(x)|$.

Cabe hacer notar que estos conceptos se extienden a conceptos que ya conocemos para funciones continuas:

Teorema 3.2.2. ***[13, Lema 2.9]*** *Sean* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continua y* $K \geq 0$. *Entonces*

1. K *es cota esencial de* f *si y sólo si* $|f(x)| \leq K$ *para todo* $x \in [a, b]$.

2. *El supremo esencial de* f *es el supremo de* f *en* $[a, b]$, *es decir,*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Ahora definiremos el concepto importante de esta sección.

Definición 3.2.2. *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida. El espacio* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *se define como* $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ medible } : ||f||_\infty < \infty\}$. *Como* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *es un espacio vectorial y el conjunto* $N = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ medible t.q. } f = 0 \ \mu - c.s.\}$ *un subespacio, definimos el espacio cociente, como antes lo habíamos hecho,* $L^\infty(X) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/N$.

Así como pasaba con $L^p(X)$, tenemos:

Teorema 3.2.3. *El espacio* $(L^\infty(X), ||\cdot||_\infty)$ *es un espacio normado de Banach.*

Demostración. Primero debemos verificar que $||\cdot||_\infty$ es una norma. Es claro que $||f||_\infty \geq 0$ y si $||f||_\infty = 0$ entonces $f(x) = 0$ μ-c.s. y por tanto $f = 0$ en $L^\infty(X)$.

Para verificar la desigualdad triangular tomemos $f, g \in L^\infty(X)$, entonces por el Teorema 3.2.1 tenemos que $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ μ-c.s. y $|g(x)| \leq ||g||_\infty$ μ-c.s. Por lo tanto

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty,\ \mu - c.s.$$

nuevamente el Teorema 3.2.1 nos implica que

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty,\ \mu - c.s.$$

Para determinar que es una norma, nos falta verificar que saque escalares. Sean $0 \neq \lambda$ y $f \in L^\infty(X)$, entonces

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|||f||_\infty,\ \mu - c.s.$$

y por lo tanto, por el Teorema 3.2.1, tenemos que $||\lambda f||_\infty \leq |\lambda|||f||_\infty$. Aplicamos esta desigualdad y tenemos que

$$||f||_\infty = ||\frac{1}{\lambda}(\lambda f)||_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|}||\lambda f||_\infty,$$

combinando ambas desigualdades obtenemos la igualdad $||\lambda f||_\infty = |\lambda|||f||_\infty$. Si $\lambda = 0$, la igualdad es inmediata. Por lo tanto $||\cdot||_\infty$ es una norma.

Ahora veamos que el espacio $(L^\infty(X), ||\cdot||_\infty)$ es completo. Tomemos $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(X)$. Para cada $n, m \geq 1$ existe $N_{n,m} \subset X$ tal que $\mu(N_{n,m}) = 0$ y además $||f_n - f_m||_\infty = \sup_{x \notin N_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$. Sea $N = \bigcup_{n,m} N_{n,m}$ que cumple que $\mu(N) = 0$ y $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n(x) - f_m(x)||_\infty,\ x \notin N$.

Entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en $X - N$ y por lo tanto es uniformemente convergente en $X - N$. Sea $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n$ si $x \notin N$ y $f(x) = 0$ si $x \in N$. Tenemos que

$$||f_n - f||_\infty \leq \sup_{x \notin N} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Con lo cual se concluye la demostración. ■

3.3 Espacios L^p de medida finita

Teorema 3.3.1. ***[13, Proposición 2.12]*** *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces $L^\infty(X) \subset L^q(X) \subset L^p(X) \subset L^1(X)$.*

Notemos que con el Teorema 3.3.1 tenemos que si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_q$, entendiendo que $\frac{1}{\infty} = 0$.

También es necesario darse cuenta que las contenciones son estrictas y además que si $\mu(X) = \infty$, el teorema es falso. Esto quedará probado con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.3.1.

1. *Sea $X = (0,1)$ con la medida de Lebesgue y tomemos $f_s(x) = \frac{1}{x^s}$ con $s > 0$. Luego tenemos que $f_s \in L^p((0,1))$ si y sólo si $\frac{1}{p} > s$. Esto muestra que las contenciones son propias.*

2. *Sea $X = (1,\infty)$ con la medida de Lebesgue y tomemos $f_s(x) = \frac{1}{x^s}$ con $s > 0$. Tenemos que $f_s \in L^p((1,\infty))$ si y sólo si $\frac{1}{p} < s$. Si $p < q$, nos bastará con tomar s tal que $\frac{1}{p} > s > \frac{1}{q}$, para que $f_s \in L^q((1,\infty))$ pero $f_s \notin L^p((1,\infty))$.*

3.4 Densidad

Sea $s : X \to \mathbb{C}$ una función simple, si llamamos $E_i = s^{-1}[\alpha_i]$, entonces los conjuntos E_i son medibles disjuntos y $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, gracias a esto se prueba que $|s|^p = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \chi_{E_i}$, y por lo tanto $s \in L^p(X)$ para cada $1 \leq p < \infty$ si y sólo si $\mu(E_i) < \infty$ para todo $1 \leq i \leq \infty$, así s es integrable, es decir, $s \in L^1(X)$. Además toda función simple y medible es elemento de $L^\infty(X)$.

Teorema 3.4.1. ***[13, Teorema 2.16]*** *El conjunto de las funciones simples y medibles es denso en $L^\infty(X)$.*

Un resultado análogo se cumple para los espacios L^p:

Teorema 3.4.2. *[13, Teorema 2.17] El conjunto de las funciones simples, medibles e integrables es denso en $L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$.*

Como hemos venido mencionando, nos interesan en particular los espacios topológicos Hausdorff localmente compactos. Sea (X, τ) un espacio de ese estilo, y sea $\mathbf{B}(X)$ la σ-álgebra generada por los abiertos de X. Diremos que una medida $\mu : \mathbf{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es regular: si $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subset X$; y si para todo $E \in \mathbf{B}(X)$ con $\mu(E) < \infty$ y $\epsilon > 0$, existe V un abierto y K un compacto tales que $K \subset E \subset V$ y $\mu(V - K) < \epsilon$.

Teorema 3.4.3. *Sean X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y $(X, \mathbf{B}(X), \mu)$ un espacio de medida con μ una medida regular. Entonces se cumple que $C_C(X)$ es denso en $L^p(X)$ si $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Primero supongamos que $f = \chi_E \in L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ y $E \in \mathbf{B}(X)$. Sea $\epsilon > 0$, como $\mu(E) < \infty$ y μ regular, existen un compacto K y un abierto V tales que $K \subset E \subset V$ y $\mu(V - K) < (\frac{\epsilon}{2})^p$.

Por el Lema de Urysohn, existe $\phi \in C_C(X)$ tal que $K \prec \phi \prec V$. Por lo tanto

$$||f - \phi||_p \leq ||f - \chi_K||_p + ||\chi_K - \phi||_p = \left(\int_{E-K} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{V-K} |\phi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \mu(E - K)^{\frac{1}{p}} + \mu(V - K)^{\frac{1}{p}} \leq 2\mu(V - K)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \ (*)$$

Sea ahora f una función simple e integrable, $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, con $E_i \in \mathbf{B}(X)$, $\mu(E_i) < \infty$, $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{C}$ para $1 < i < n$. Tomemos $\epsilon > 0$, por $(*)$ para cada $i = 1, 2, ..., n$, existen $\phi_i \in C_C(X)$ tales que $||\chi_{E_i} - \phi_i||_p < \frac{\epsilon}{n|\alpha_i|}$. Sea ahora $\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \in C_C(X)$ y

$$||f - \phi||_p = \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\chi_{E_i} - \phi_i) \right|\right|_p \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||\chi_{E_i} - \phi_i||_p < \epsilon.$$

Finalmente, sea $f \in L^p(X)$ y $\epsilon > 0$, por el Teorema 3.4.2, el conjunto de las funciones simples e integrables es denso en $L^p(X)$, entonces existe s una función simple e integrable, tal que $||f-s||_p < \frac{\epsilon}{2}$. Luego por $(*)$, existe $\phi \in C_C(X)$ tal que $||s-\phi||_p < \frac{\epsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular se tiene que $||f-\phi||_p < \epsilon$. ■

Para terminar con este capítulo, es de nuestro interés la clausura de $C_C(X)$ en $L^\infty(X)$, donde X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Para ello será parte de nuestro estudio el espacio vectorial de las funciones continuas que se anulan en el infinito, el cual formalmente se define como

$$C_0(X) := \{f \in C(X) : \forall \epsilon > 0, \exists K \subset X \textit{ compacto tal que } |f(x)| < \epsilon \textit{ si } x \notin K\}.$$

A veces se dice que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, para cada elemento de C_0.

Notemos que $C_0(X) \subset L^\infty(X)$ y además se cumple que $||f||_\infty = \max\limits_{x\in X} |f(x)|$ para cada $f \in C_0(X)$.

Teorema 3.4.4. *El espacio* $(C_0(X), ||\cdot||_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Ya sabemos que $C_0(X)$ es un subespacio vectorial de $L^\infty(X)$ y por tanto es un espacio normado con la norma heredada por $L^\infty(X)$. Nos resta ver que es completo.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0(X)$ una sucesión de Cauchy, entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en X y, por ser $\mathbb{C}$ completo, la sucesión es uniformemente convergente a $f \in C_C(X)$. Falta comprobar que $f \in C_0$.

Sea $\epsilon > 0$, como $f_n \to f$ uniformemente en X, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Fijando n, existe $K \subset X$ tal que $|f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \notin K$, por lo tanto $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$ ■

Por el hecho de que $L^\infty(X)$ es espacio de Banach, $C_0(X) \subset L^\infty(X)$ y como $C_0(X)$ es completo, tenemos que $C_0(X)$ es cerrado.

Teorema 3.4.5. *La clausura de* $C_C(X)$ *en* $||\cdot||_\infty$ *es igual a* $C_0(X)$

Demostración. Es evidente que $\overline{C_C(X)}^{||\cdot||_\infty} \subset C_0(X)$. Ahora sea $f \in C_0(X)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $K \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \epsilon$ si $x \notin K$. Por el Lema de Urysohn existe $\phi \in C_C(X)$ tal que $K \prec \phi \prec V$ con V un abierto cualquiera tal que $K \subset V$. Definimos $h := \phi f,\ h \in C_C(X)$ y cumple que

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - f(x)\phi(x)| = |f(x)||1 - \phi(x)|,$$

lo cual vale 0 si $x \in K$ y ϵ si $x \notin K$. Por lo tanto, $||f - h||_\infty < \epsilon$. Notemos además que $sop(h) \subset sop(\phi)$. ■

Capítulo 4

Teorema de Representación de Riesz

En las diferentes ramas de las matemáticas se encuentran diferentes teoremas que llevan como nombre "Teorema de Riesz", pues depende de la teoría que se esté abordando, pero hay un caso especial de estos teoremas, el cual es usado principalmente en el área de Teoría de la Medida, en este campo se le conoce como "Teorema de Representación de Riesz".

Hay diversas maneras de enunciarlo pero, como sucede en matemáticas, depende de las condiciones que se le pongan y el uso que queramos darle. Nosotros lo enunciaremos en tres maneras diferentes, comenzando por la manera más general en los espacios localmente compactos, el cual está enunciado para funcionales lineales positivos.

Es necesario hacer notar que a lo largo de este último capítulo, solamente trabajaremos sobre un espacio topológico X, el cual es Hausdorff y localmente compacto. También es importante mencionar que el Teorema de Representación de Riesz es uno de los resultados claves que vinculan la Teoría de la Medida con el Análisis Funcional.

4.1 Para funcionales lineales positivos

Teorema 4.1.1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y sea $T : C_C(X) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una única medida de Borel cuasi-regular μ en X tal que para toda función $f \in C_C(X)$ se cumple:*

$$T(f) = \int_X f d\mu.$$

Demostración. Vamos a construir una medida de Borel cuasi-regular en X que cumpla con lo requerido.

Para cada abierto V definimos $\mu(V) = \sup\{T(f) : f \prec V\}$; esto nos implica inmediatamente que si V_1 y V_2 son abiertos tales que $V_1 \subset V_2$, entonces se cumple que $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Por otro lado, para cada conjunto $E \subset X$ definimos $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}$. Debido a la manera en que definimos a μ, ambas definiciones coinciden en los conjuntos abiertos.

Ahora definamos

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}} = \{E \subset X : \mu(E) < \infty \ y \ \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \ compacto\}\}$$

Y también definimos

$$\mathfrak{M} = \{E \subset X : E \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}, \forall K \ compacto\}$$

Primero demostraremos que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. Para esto probaremos lo siguiente:

a) "Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son subconjuntos de X, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$"

Veamos que se cumple para una unión finita. Sean V_1 y V_2 conjuntos abiertos, entonces $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Tomemos $g \prec V_1 \cup V_2$ arbitraria. Por el teorema de partición de la unidad existen funciones h_1y h_2 tales que $h_1 \prec V_1,\ h_2 \prec V_2$ y $h_1 + h_2$ toma el valor 1 sobre los puntos del soporte de g. Por lo tanto $h_1 g \prec V_1,\ h_2 g \prec V_2,\ g = h_1 g + h_2 g$ y así

$$T(g) = T(h_1 g) + T(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Como esto se cumple para toda $g \prec V_1 \cup V_2$, se cumple la desigualdad que buscamos.

Ahora supongamos que $\mu(E_i) < \infty$ para todo i, pues de lo contrario la desigualdad se cumpliría de manera trivial. Dado $\epsilon > 0$, la definición de la función μ implica que existen abiertos V_i que contienen a E_i de modo que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \epsilon 2^{-i}$. Sea V la unión de todos los V_i y tomemos $f \prec V$. Como f tiene soporte compacto, en realidad $f \prec V_1 \cup ... \cup V_n$ para algún natural n, luego

$$T(f) \leq \mu(V_1 \cup ... \cup V_n) \leq \mu(V_1) + ... + \mu(V_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Como esto vale para toda $f \prec V$, resulta que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Luego, como eso vale para toda ϵ, se tiene la desigualdad.

b) "Si K es compacto, entonces $K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ y $\mu(K) = \inf\{T(f) : K \prec f\}$. De aquí concluimos que los compactos tienen medida finita".

Si $K \prec f$ y $0 < \alpha < 1$, definimos

$$V_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Entonces $K \subset V_\alpha$ y si $g \prec V_\alpha$ se cumple que $\alpha g \leq f$. Por lo tanto

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{T(g) : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1} T(f).$$

Si hacemos que α tienda a 1, concluimos que $\mu(K) \leq T(f)$, y es obvio que K está en $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$. Dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V tal que $K \subset V$ y $\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$. Existe una función $K \prec f \prec V$, luego

$$\mu(K) \leq T(f) \leq \mu(V) < \mu(K) + \epsilon.$$

Lo cual prueba que $\mu(K) = \inf\{T(f) : K \prec f\}$.

c) “$\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ contiene a todos los abiertos de medida finita”.

Sea V un abierto de medida finita y α un número real tal que $\alpha < \mu(V)$, por definición de μ en cada abierto, existe $f \prec V$ tal que $\alpha < T(f)$. Sea $K = sopf$, si W es un abierto que contiene al soporte de f, entonces $f \prec W$, luego $T(f) \leq \mu(W)$, así $T(f) \leq \mu(K)$. Hemos encontrado un compacto $K \subset V$ tal que $\alpha < \mu(K)$, lo cual prueba que $V \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.

d) “Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son elementos disjuntos de la familia $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ y $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces $\mu(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. Si además $\mu(E) < \infty$, entonces $E \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.”

Primero veamos que si K_1 y K_2 son compactos disjuntos entonces

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $K_1 \prec f \prec X - K_2$, por el inciso *b*) existe g tal que $K_1 \cup K_2 \prec g$ y

$$T(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

Es claro que $K_1 \prec fg$ y $K_2 \prec (1 - f)g$, luego

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq T(fg) + T(g - fg) = T(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon$$

Luego tenemos que $\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$ y por el inciso *a*) tenemos la igualdad deseada.

Ya para el caso general, gracias al inciso *a*) basta con probar una desigualdad. Si $\mu(E) = \infty$, entonces la desigualdad se cumple trivialmente. Supongamos que E tiene medida finita, tomemos $\epsilon > 0$, como cada $E_i \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ por hipótesis, entonces existen compactos $H_i \subset E_i$ tales que $\mu(H_i) > \mu(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$. Sea $K_n = H_1 \cup ... \cup H_n$, entonces

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) - \epsilon,$$

lo que nos da la desigualdad que buscamos. Una vez que sabemos que toda la serie vale $\mu(E)$, la desigualdad anterior también muestra que $\mu(K_n)$ tiende a $\mu(E)$ cuando n tiende a ∞.

Por lo tanto $E \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.

e) "Si $E \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un compacto K y un abierto V tales que $K \subset E \subset V$ y $\mu(V - K) < \epsilon$"

Por la definición de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ y de μ, existen K y V tales que

$$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $V - K$ es abierto, por inciso $c)$ tenemos que $V - K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, pues dicho conjunto tiene medida finita. Además por el inciso $d)$ tenemos que

$$\mu(K) + \mu(V - K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon.$$

Luego $\mu(V - K) < \epsilon$.

f) "Si $A, B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, entonces $A - B,\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$."

Sean $A, B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, por el inciso $e)$ existen conjuntos K_i y V_i, para $i = 1, 2$, de manera que $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$ y $\mu(V_i - K_i) < \epsilon$. Entonces

$$A - B \subset V_1 - K_2 \subset (V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2),$$

luego, el inciso $a)$ implica que $\mu(A - B) \leq \epsilon + \mu(K_1 - V_2) + \epsilon$ y $K_1 - V_2$ es un subconjunto compacto de $A - B$, esto prueba que $A - B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$. Como $A \cup B = (A - B) \cup B$, el inciso $d)$ implica que $A \cup B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$. Finalmente, como $A \cap B = A - (A - B)$, también $A \cap B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.

Hasta este punto, ya podemos probar que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra.

Por definición de $\mathfrak{M}$ tenemos que $\emptyset,\ X \in \mathfrak{M}$. Si $A \in \mathfrak{M}$ y K es un compacto en X, tenemos que $(X - A) \cap K = K - (A \cap K)$, puesto que $K,\ A \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ por el inciso $f)$ concluimos que $(X - A) \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, por lo tanto $X - A \in \mathfrak{M}$.

Ahora tomemos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con cada $A_i \in \mathfrak{M}$, si K es compacto en X definamos $B_1 = A_1 \cap K$ y $B_n = (A_n \cap K) - (B_1 \cup ... \cup B_{n-1})$, con $n = 2, 3, ...$, entonces por el inciso f), $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de miembros disjuntos de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ y tenemos que $A \cap K = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$; del inciso d) se sigue que $A \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, lo cual implica que $A \in \mathfrak{M}$. Así tenemos que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra.

Además, $\mathfrak{M}$ contiene a la σ-álgebra de Borel. Sea C un cerrado y K un compacto, entonces su intersección es un compacto y por tanto un elemento de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, luego $C \in \mathfrak{M}$; así tenemos que $\mathfrak{M}$ contiene a todos los cerrados, por f) contiene a todos los abiertos, así $\mathfrak{M}$ contiene a todos los borelianos.

Para poder concluir la construcción de la medida, resta probar:

g) "$\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ está formada por los conjuntos de $\mathfrak{M}$ de medida finita".

Si $E \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, los incisos b) y f) implican que $E \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ para todo K compacto, así $E \in \mathfrak{M}$. Recíprocamente, si $E \in \mathfrak{M}$ y tiene medida finita, dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V que contiene a E y tiene medida finita, por c) y e) existe un compacto $K \subset V$ con $\mu(V - K) < \epsilon$. Como $E \cap K \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, existe un compacto $H \subset E \cap K$ con $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \epsilon$. Puesto que

$$E \subset (E \cap K) \cup (V - K),$$

tenemos que

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V - K) < \mu(H) + 2\epsilon,$$

luego $E \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$.

Ahora tomemos la restricción de μ a la σ-álgebra de Borel. Por los incisos d) y g) se concluye que dicha restricción es una medida. Probamos que μ es finita sobre los compactos, por definición se aproxima por abiertos y por g) se aproxima por compactos en los conjuntos de medida finita. Por la parte c) se prueba que los abiertos de medida infinita contienen compactos de medida arbitrariamente grande, concluyendo que μ se aproxima por compactos en todos los abiertos. Finalmente por definición tenemos que μ es cuasi-regular.

Ahora veamos que μ representa a T, es decir, que dada $f \in C_C(X)$,

$$T(f) \leq \int_X f d\mu.$$

Sea K el soporte de f, entonces $f(X) \subset f(K) \cup \{0\}$ es un conjunto compacto y $f(X) \subset [a,b]$, para ciertos números reales a y b. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos números $y_0 < a < y_1 < ... < y_n = b$ tales que $y_{i+1} - y_i < \epsilon$. Pongamos

$$E_i = \{x \in X : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K,$$

y como f es continua, f es medible respecto a la álgebra de Borel y además los conjuntos E_i son borelianos disjuntos y su unión es todo K. Existen conjuntos abiertos V_i, $E_i \subset V_i$, tales que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{2}$ para $i = 1, ..., n$ y que cumplen que $f(x) < y_i + \epsilon$ para toda $x \in V_i$. Por el Teorema de Partición de la Unidad existen funciones $h_i \prec V_i$ tales que la suma de todos ellos es 1 en K. Por lo tanto $f = h_1 f + h_2 f + ... + h_n f$ y de b) se sigue que

$$\mu(K) < T(h_1 + ... h_n) = T(h_1) + ... + T(h_n).$$

Como $h_i f \leq (y_i + \epsilon) h_i$ y como $y_i - \epsilon < f(x)$ en E_i, tenemos que

$$\begin{aligned}
T(f) = \sum_{i=1}^{n} T(h_i f) &\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon) T(h_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + y_i + \epsilon) T(h_i) - |a| \sum_{i=1}^{n} T(h_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + y_i + \epsilon)(\mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}) - |a| \mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \epsilon) \mu(E_i) + 2\epsilon \mu(K) + \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon) \\
&\leq \int_X f d\mu + \epsilon (2\mu(K) + |a| + b + \epsilon).
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, llegamos a la desigualdad deseada.

Por un argumento similar, pero aplicado a $-f$ se obtiene la otra desigualdad y por lo tanto la igualdad.

Para finalizar la prueba del teorema, veamos la unicidad.

Sean μ_1 y μ_2 medidas cuasi-regulares que cumplen el teorema. Como una medida cuasi-regular se determina por los valores que toma sobre los conjuntos compactos, nos bastará probar que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para todo K compacto.

Sea K un conjunto compacto, gracias a la regularidad existe un abierto V tal que $K \subset V$ y $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$. El Lema de Urysohn nos garantiza que existe una función $K \prec f \prec V$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_1(K) &= \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 \\ &= T(f) = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_V d\mu_2 \\ &= \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon. \end{aligned}$$

Así tenemos que $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. De igual manera se prueba la otra desigualdad. Concluyendo que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$.

■

Como una aplicación de este teorema de representación tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1.1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y T un funcional lineal positivo sobre $C_C(X)$. Si K es un subconjunto compacto y no vacío de X, entonces $E_K = \{f \in C_C(K) | sop f \subset K\}$ es un subespacio normado de $C_C(X)$ y $T|_{E_K}$ es continuo.*

En particular, si X es compacto, entonces T es continuo y $||T|| = T(1)$.

Demostración. El hecho de que E_K es un subespacio normado es trivial.

Sea μ la medida asociada a T por el Teorema de Representación de Riesz, entonces para todo $f \in E_K$ se cumple que $|Tf| = \left|\int f d\mu\right| \leq ||f||_\infty \mu(K)$, así $||T|_{E_K}|| \leq \mu(K)$. Por lo tanto T es continuo.

Ahora, si X es compacto, entonces $E_K = C_C(X) = C(X)$ y se tiene que $T(1) = \int d\mu = \mu(X)$, lo que gracias a la desigualdad antes mencionada tenemos que $||T|| = T(1)$. ■

4.2 Para funcionales lineales acotados en $L^p(X)$

El teorema que ahora presentaremos también lleva el nombre de Teorema de Representación de Riesz y se tiene que X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, pero a diferencia del anterior, este teorema está enunciado para funcionales lineales acotados en $L^p(X)$ y además se pide que X sea un espacio de medida positiva σ-finita:

Teorema 4.2.1. *Supongamos que $1 \leq p < \infty$, μ es una medida positiva σ-finita sobre X, y T un funcional lineal acotado en $L^p(X)$. Entonces existe una única $g \in L^q(X)$, donde q es el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $1 < p < \infty$ y $q = \infty$ si $p = 1$, tal que $T(f) = \displaystyle\int_X fgd\mu$.*

Más aún, si T y g cumplen con lo anterior, tenemos que $||T|| = ||g||_q$.

Demostración. Comenzaremos definiendo el funcional $\Phi : L^q(X) \to (L^p(X))'$. Sea $g \in L^q(X)$, se define $\Phi(g) = \Phi_g$, con la regla de correspondencia

$$\Phi_g(f) = \int_X gfd\mu, \ g \in L^q(X), \ f \in L^p(X).$$

Primero veamos que Φ está bien definida. Sea $g \in L^q(X)$ y $f \in L^p(X)$ con q y p conjugados. Aplicando la desigualdad de Hölder en el caso $1 < p < \infty$ (pues si $p = 1$, es directo), tenemos que $gf \in L^1(X)$ y por lo tanto $\Phi_g(f) \in \mathbb{C}$. Más aún,

$$|\Phi_g(f)| = \left| \int_X gfd\mu \right| \leq \int_X |g||f|d\mu \leq ||g||_q||f||_p. \ (**)$$

Es fácil darse cuenta que Φ_g es lineal, además por $(**)$ tenemos que Φ_g es continuo, y por consiguiente tenemos que $\Phi_g \in (L^p(X))'$. Además se cumple que $||\Phi_g|| \leq ||g||_q$.

Es rutina probar que Φ es lineal. Ahora comprobaremos que $||\Phi_g|| \geq ||g||_q$ para todo $g \in L^q(X)$, con lo cual concluiremos que $||\Phi|| = 1$. Tomemos un $0 \neq g \in L^q(X)$, y para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que existe $\beta \in \mathbb{C}$ con $|\beta| = 1$ tal que $\alpha\beta = |\alpha|$ (sólo debemos tomar $\beta = \frac{|\alpha|}{\alpha}$ o $\beta = 1$ si $\alpha = 0$). Debido a esto definimos $h : X \to \mathbb{C}$ tal que $|h(x)| = 1$ y $g(x)h(x) = |g(x)|$ para todo $x \in X$. Como

$$h = \chi_{\{x:g(x)=0\}} + \frac{|g|}{g}\chi_{\{x:g(x)\neq 0\}},$$

entonces h es medible y además $h \in L^\infty(X)$.

Si $q = \infty$, entonces $\Phi_g(h) = \int_X |g|d\mu = ||g||_1$ y por lo tanto $||\Phi_g|| \geq ||g||$ para todo $g \in L^\infty(X)$.

Si $1 < q < \infty$, se define $f = |g|^{q-1}h$, de donde se cumple que $gf = |g|^q$; como $p(q-1) = q$, entonces $|f|^p = |g|^q$ y así $||f||_p^p = ||g||_q^q$. Como

$$\Phi_g(f) = \int_X gf d\mu = \int_X |g|^q = ||g||_q^q,$$

tenemos que

$$\frac{|\Phi_g(f)|}{||f||_p} = \frac{||g||_q^q}{||g||_q^{\frac{q}{p}}} = ||g||_q.$$

De aquí se deduce que $||\Phi_g|| \geq ||g||$ para todo $g \in L^q(X)$.

Con esto tenemos que $||\Phi|| = 1$, con lo cual se concluye que es continua e inyectiva.

Después de estas consideraciones, comenzaremos a atacar el problema que nos interesa:

Sean μ es una medida positiva σ-finita sobre X y $T : L^p(X) \to \mathbb{C}$ lineal y continuo con $1 \leq p < \infty$. Si $||T|| = 0$, la tesis del teorema se mantiene con $g = 0$. Por lo tanto supongamos que $||T|| > 0$. Aquí tenemos dos casos:

Primero supongamos que μ es finito.

Sea $\mathscr{A}$ la σ-álgebra de X sobre la que μ es positiva dentro de nuestro espacio de medida. Definimos $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera: $\nu(E) = T(\chi_E)$ para cada $E \in \mathscr{A}$. La aplicación dada está bien definida pues

$$|\nu(E)| = |T(\chi_E)| \leq M||\chi_E||_p = M\mu(E)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde $||T|| < M$ por ser T continuo. Vamos a probar que ν es una medida compleja, es decir, si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, cumpliendo que los conjuntos E_n son disjuntos dos a dos y $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, entonces $\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n)$. Como los E_n son disjuntos dos a dos, tenemos que $\chi_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$ en $L^p(X)$, luego tenemos $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{E_n}$ en $L^p(X)$ gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. Entonces

$$\nu(E) = T(\chi_E) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} T(\chi_{E_n}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n).$$

Así ν es una medida compleja.

Ahora veamos que ν es absolutamente continua con respecto a μ, es decir, si $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$. Sea $E \in \mathscr{A}$ con $\mu(E) = 0$, tenemos que $|\nu(E)| = |T(\chi_E)| \leq ||T||||\chi_E||_p$, además

$$||\chi_E||_p = \left|\int_X (\chi_E)^p d\mu\right|^{\frac{1}{p}} = |\mu(E)|^{\frac{1}{p}},$$

pero como $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$. Por lo tanto $\nu \ll \mu$

Ahora, por el Teorema de Radon-Nikodym existe $0 \neq g \in L^1(X)$ tal que para cada conjunto medible E,

$$T(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g d\mu = \int_X \chi_E g d\mu.$$

Por la linealidad tenemos que toda función s, simple y medible, cumple que $T(s) = \int_X s g d\mu$. Como $\mu(X) < \infty$, por el Teorema 3.3.1 tenemos que se cumple que $L^\infty(X) \subset L^p(X) \subset L^1(X)$.

Consideremos los funcionales $T|_{L^\infty(X)} : L^\infty(X) \to \mathbb{C}$ y $\Phi_g : L^\infty(X) \to \mathbb{C}$, donde Φ_g está definido como antes. Como son funcionales lineales, continuos y coinciden en el conjunto de las funciones simples y medibles, el cual por el Teorema 3.4.1 es un subconjunto denso de $L^\infty(X)$, se tiene que

$$T|_{L^\infty(X)}(f) = \int_X fgd\mu, \text{ con } f \in L^\infty(X).$$

Si $p = 1$ y $q = \infty$, veamos que $g \in L^\infty(X)$ y $T(f) = \displaystyle\int_X gfd\mu$, para toda $f \in L^1(X)$. Sea $E \in \mathscr{A}$, entonces tenemos que es cierto lo siguiente:

$$\left|\int_E gd\mu\right| = |T(\chi_E)| \leq ||T||||\chi_E||_1 = ||T||\mu(E).$$

Si en particular tomamos $E = \{x \in X : Re(g) \geq 2||T||\} \in \mathscr{A}$ tenemos que

$$||T||\mu(E) \geq \left|\int_E gd\mu\right| \geq Re\left(\int_E gd\mu\right) = \int_E Re(g)d\mu \geq 2||T||\mu(E),$$

concluyendo que $Re(g) \leq 2||T||$ μ-c.s. Análogamente podemos probar que $Im(g) \leq 2||T||$ μ-c.s. Por lo tanto tenemos que $|g| \leq K\mu$ en casi todos los puntos, es decir, $g \in L^\infty(X)$. El funcional $\Phi_g : L^1 \to \mathbb{C}$ es lineal , continuo y cumple que $T(s) = \displaystyle\int_X sgd\mu$ para toda función, simple y medible, s. Otra vez por la densidad de las funiones simples, medibles e integrables (Teorema 3.4.2), concluimos que $T(f) = \displaystyle\int_X fgd\mu$, con $f \in L^1(X)$.

Si $1 < p < \infty$ y q es su exponente conjugado, veamos que $g \in L^q(X)$ y que $T(f) = \displaystyle\int_X gfd\mu$, con $f \in L^p(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos $E_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$ y observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 1$ para todo elemento $x \in X$, luego por el Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue se cumple que

$$\int_X |g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{E_n}|g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |g|^q d\mu.$$

Tomemos $h : X \to \mathbb{C}$ tal que $|h(x)| = 1$ para cada $x \in X$ y que cumpla que $gh = |g|$. Definimos las funciones $h_n = \chi_{E_n}|g|^{q-1}h$. Debido a la definición, $h_n \in L^\infty(X) \subset L^p(X)$ y además $h_n g = \chi_{E_n}|g|^q$. Por lo tanto

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu = T(h_n) \leq ||T|| \left(\int_X \chi_{E_n}|g|^{p(q-1)}d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = ||T|| \left(\int_{E_n} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

de donde concluimos que

$$\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq ||T||,$$

es decir, que $g \in L^q(X)$ y $||g||_q \leq ||T||$. Así se cumple que $T(s) = \displaystyle\int_X sgd\mu$ con $g \in L^q(X)$ para toda s función simple y medible. También sabemos que $\Phi_g : L^p(X) \to \mathbb{C}$ es lineal, continua y cumple las mismas propiedades que T. Luego por el Teorema 3.4.2 tenemos que el conjunto de las funciones simples, medibles e integrables es denso en $L^p(X)$, entonces concluimos que

$$T(g) = \int_X fgd\mu, \ f \in L^p(X).$$

Terminaremos la demostración con el caso cuando μ es σ-finito.

Sea $X = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n$ con $\mu(A_n) < \infty, \ A_n \subset A_{n+1}$ para todo entero $n \geq 1$ y sea $T : L^p(X) \to \mathbb{C}$ lineal y continuo, con $1 \leq p < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $T_n : L^p(A_n) \to \mathbb{C}$ tales que $T_n(f) := T(f\chi_{A_n})$. Notemos que la aplicación T_n está bien definida, pues $f\chi_{A_n} \in L^p(X)$, es lineal y además cumple que

$$|T_n(f)| \leq ||T||||f\chi_{A_n}||_{L^p(X)} = ||T||||f||_{L^p(A_n)}.$$

Entonces T_n es continua y $||T_n|| \leq ||T||$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Gracias al caso anterior, sabemos que existe $g_n \in L^q(A_n)$ que cumple

$$T(f\chi_{A_n}) = T_n(f) = \int_{A_n} fg_n d\mu,$$

con $f \in L^p(A_n)$ y $||g_n||_q \leq ||T_n||$.

Veamos que $g_n = g_{n+1}$ μ-c.s. en A_n. Bastará demostrar que

$$\int_E g_n d\mu = \int_E g_{n+1} d\mu$$

para todo $E \subset A_n$ medible. Calculando tenemos:

$$\int_E g_n d\mu = \int_{A_n} g_n \chi_E d\mu = T(\chi_E \chi_{A_n}) = T(\chi_E \chi_{A_{n+1}}) = \int_E g_{n+1} d\mu.$$

Definiendo $g(x) := g_n(x)$ si $x \in A_n$, por lo anterior g está bien definida y si $1 < p < \infty$,

$$\int_X |g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |g|^q d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{A_n} |g|^q d\mu \leq ||T||^q,$$

así $g \in L^q(X)$.

El caso $p = 1$ es directo. Entonces tomemos $f \in L^p(X)$, como se cumple que $f = \lim\limits_{n\to\infty} f\chi_{A_n} \in L^p(X)$, entonces tenemos que

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f\chi_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} g_n f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} gf d\mu = \int_X gf d\mu,$$

lo cual resulta después de haber aplicado el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Finalmente demostraremos la unicidad de la función g. Supongamos que g y g' son funciones que satisfacen el teorema. Entonces $\int_X fg d\mu = \int_X fg' d\mu$ para cada $f \in L^p(X)$, luego $\int_X fg d\mu - \int_X fg' d\mu = 0$, así $\int_X f(g - g') d\mu = 0$. Sea $X = \bigcup\limits_i X_i$ donde $\mu(X_i) < \infty$, pues μ es σ-finita. Lo anterior nos lleva a que para todo $E \in \mathscr{A}$ la σ-álgebra de los subconjuntos medibles de X_i, $\int_E (g - g') d\mu = 0$. Como la función $g - g' \in L^q(X_i)$ y como tenemos que $L^q(X_i) \subset L^1(X_i)$ pues $\mu(X_i) < \infty$, podemos concluir que $g - g' \in L^1(X)$. Pero la última igualdad se cumple para todo E; entonces $g - g' = 0$ μ-c.s. en X_i, para todo i. Así $g - g' = 0$ c.s. en X, es decir $g = g'$ en $L^q(X)$.

Por lo tanto se prueba el teorema.

$\blacksquare$

4.3 Para funcionales lineales acotados

En la sección anterior hemos enunciado el teorema para funcionales lineales positivos, los cuales no necesariamente son continuos. El teorema que a continuación se presenta trata precisamente sobre funcionales lineales positivos que son continuos. Este teorema es otra conexión entre Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

Para lograr nuestro cometido es importante darnos cuenta que si X es un espacio topológico Hausdorff y μ es una medida compleja sobre X, entonces el funcional T sobre $C_0(X)$, definido por $T(f) := \int f d\mu, \ \forall f \in C_0(X)$, es lineal, continuo y además $||T|| \leq ||\mu||$.

La versión clásica del Teorema de Representación de Riesz es:

Teorema 4.3.1. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces todo funcional lineal acotado T en $C_0(X)$ es representado por una única medida compleja regular de Borel μ, en el sentido que*

$$T(f) = \int_X f d\mu$$

para todo $f \in C_0(X)$. Más aún,la norma de T es la variación total de μ, es decir, $||T|| = |\mu|(X)$.

Demostración. Sea T un funcional continuo sobre $C_0(X)$. Si $T = 0$, la medida $\mu = 0$ cumple con el teorema. Si $T \neq 0$, podemos tomar el funcional $\hat{T} = \frac{T}{||T||}$. Así que sin perder generalidad supongamos que $||T|| = 1$. Debemos construir una medida compleja regular que cumpla con el teorema.

A partir de T, definimos $|T|$ sobre $C_C^+(X) := \{f \in C_C(X) : f \geq 0\}$ tal que para cada $f \in C_C^+(X)$,

$$|T|(f) := \sup\{|Tg| \ : \ g \in C_C^+(X) \ y \ |g| \leq f\}.$$

De esta definición deducimos que sobre $C_C^+(X)$: $|T|$ es positivo; también deducimos que $|Tf| \leq |T|(|f|)$, pues $|f| = f$ por ser positivo y por lo tanto $|T|(f) = |T|(|f|)$. También tenemos que $|T|(|f|) \leq ||f||_\infty$ para cada función $f \in C_C^+(X)$, pues si $g \in C_C(X)$ y $|g| \leq f$ se cumple $|Tg| \leq ||T|| ||g||_\infty$ porque T es continuo, además $||T|| ||g||_\infty = ||g||_\infty$ pues $||T|| = 1$, y como $|g| \leq |f|$, tenemos que $||g||_\infty \leq ||f||_\infty$, entonces concluimos que $|T|(|f|) \leq ||f||_\infty$. De la misma definción es fácil ver que $|T|$ es monótona y que si $a \in \mathbb{R}_+$ y $f \in C_C^+(X)$, entonces $|T|(af) = a|T|(f)$.

Ahora demostraremos que $|T|$ distribuye sumas sobre $C_C^+(X)$, es decir, que para todo $f, g \in C_C^+(X)$, $|T|(f+g) = |T|(f) + |T|(g)$. Sean $f, g \in C_C^+(X)$ y dado $\epsilon > 0$, por la definición de $|T|$ podemos elegir $f_1, g_1 \in C_C(K)$ tales que $|f_1| \leq f$, $|g_1| \leq g$ y $|T|(f) \leq |Tf_1| + \frac{\epsilon}{2}$ y $|T|(g) \leq |Tg_1| + \frac{\epsilon}{2}$. Elegimos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = |\beta| = 1$ y $\alpha Tf_1 = |Tf_1|$, $\beta Tg_1 = |Tg_1|$, entonces

$$\begin{aligned}
|T|(f) + |T|(g) &\leq |Tf_1| + |Tg_1| + \epsilon \\
&= \alpha Tf_1 + \beta Tg_1 + \epsilon \\
&= T(\alpha f_1 + \beta g_1) + \epsilon \\
&\leq |T|(|f_1| + |g_1|) + \epsilon \\
&\leq |T|(f+g) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, tenemos que $|T|(f+g) \leq |T|(f) + |T|(g)$. Para probar la otra desigualdad tomemos $h \in C_C(X)$ tal que $|h| \leq f + g$. Construimos el conjunto $U = \{x \in X : (f+g)(x) > 0$, la función $f_1 := \chi_U \frac{f \cdot h}{f+g}$ y la función $g_1 := \chi_U \frac{g \cdot h}{f+g}$. Dichas funciones están bien definidas porque $f + g > 0$ en U. Además son continuas en U y son continuas en U^C porque $|f_1| \leq h$, $|g_1| \leq h$ y $h|_{U^C} = 0$. Además tenemos que en U,

$$|f_1| \leq |\chi_U| \frac{f \cdot |h|}{f+g} \leq \frac{f \cdot (f+g)}{f+g} = f,$$

y en U^C, $|f_1| = 0 \leq f$ y $|g_1| = 0 \leq g$ pues f y g son positivas. Análogamente $|g_1| \leq g$ pues f, g son positivas. Debido a todo esto tenemos que $f_1, g_1 \in C_C(X)$, $f_1 + g_1 = h$, $|f_1| \leq f$ y $|g_1| \leq g$, entonces apoyados de la definición de $|T|$, tenemos que

$$|Th| = |Tf_1 + Tg_1| \leq |Tf_1| + |Tg_1| \leq |T|(f) + |T|(g)$$

y como tomamos $h \in C_C(X)$ solamente bajo la condición de que $|h| \leq f + g$, nuevamente por la definición de $|T|$ tenemos que $|T|(f+g) \leq |T|(f) + |T|(g)$.

Por lo tanto $|T|(f+g) = |T|(f) + |T|(g)$. Así $|T|$ es un funcional lineal.

Ahora vamos a extender $|T|$ a todo $C_C(X)$. Sea $f \in C_C(X)$, podemos escribir a f de la siguiente manera

$$f = (Ref)^+ - (Ref)^- + i[(Imf)^+ - (Imf)^-]$$

y definimos

$$|T|(f) = |T|(Ref)^+ - |T|(Ref)^- + i[|T|(Imf)^+ - |T|(Imf)^-].$$

Vamos a probar la linealidad. Notemos que gracias a la manera en la que definimos este funcional, bastará tomar el caso en el que f y g son funciones reales, notemos que por un lado $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$ y por otro lado, como $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g^-$, tenemos que $f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, luego

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ + g^+ - f^- - g^-$$

Debemos hacer mención que esto no significa que $(f+g)^+ = f^+ + g^+$, así

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-.$$

Como ya tenemos puras funciones positivas, y probamos que $|T|$ es lineal en funciones positivas, entonces

$$\begin{array}{ccc} |T|((f+g)^+ + f^- + g^-) & = & |T|(f^+ + g^+ + (f+g)^-) \\ |T|((f+g)^+) + |T|(f^-) + |T|(g^-) & = & |T|(f^+) + |T|(g^+) + |T|((f+g)^-) \\ |T|((f+g)^+) - |T|((f+g)^-) & = & |T|(f^+) - |T|(f^-) + |T|(g^+) - |T|(g^-) \\ |T|(f+g) & = & |T|(f) + |T|(g) \end{array}$$

Para ver que $|T|(\alpha f) = \alpha|T|(f)$, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la propiedad es inmediata de la definición de $|T|$. Luego $|T|$ es funcional lineal sobre $C_C(X)$. Además, por la construcción de $|T|$, sabemos que es positivo.

Gracias a las propiedades que hemos probado y a que $\forall f \in C_C^+(X)$, se cumple $|T|(f) := \sup\{|Tg|, g \in C_C^+(X) \ y \ |g| \leq f\}$, podemos concluir que

$$\forall f \in C_C(X), \ |T(f)| \leq |T|(|f|) \leq ||f||_\infty.$$

Aplicando el Teorema de Representación de Riesz para funcionales lineales positivos en $|T|$, obtenemos λ la medida cuasi-regular asociada a $|T|$. En la prueba del Teorema de Representación de Riesz para funcionales lineales positivos tenemos que $\lambda(X) = \{\sup |T|(f) : f \in C_C(X) \wedge 0 \leq f \leq 1\}$ y como $|Tf| \leq 1$ siempre que $||f|| \leq 1$, concluimos que $\lambda(X) \leq 1$, lo cual nos indica que λ es regular en todos los borelianos.

Por otro lado, habíamos probado que $\forall f \in C_C(X),\ |T(f)| \leq |T|(|f|)$, pero $|T|(|f|) = \int |f| d\lambda \leq ||f||_1$, entonces

$$\forall f \in C_C(X),\ |T(f)| \leq |T|(|f|) = \int |f| d\lambda \leq ||f||_1.$$

Así, T es un funcional lineal con norma no mayor a 1 sobre todo $C_C(X)$, como subsespacio de $L^1(\lambda)$.

Pero sabemos que $C_C(X)$ es denso en $L^1(\lambda)$, entonces T se extiende de manera única a todo $L^1(\lambda)$ y manteniendo su norma. Alicando el Teorema de Representación de Riesz para los espacios L^p, tenemos que existe una única $g \in L^\infty$, con $|g| \leq 1$ y tal que $\forall f \in L^1(\lambda),\ Tf = \int fg d\lambda$.

Esto último se cumple en particular para $f \in C_C(X)$, pero como $g \in L^\infty$ y λ es finita, y también $\overline{C_C(X)} = C_0(X)$ bajo la norma $|| \cdot ||_1$, entonces la misma desigualdad se cumple para todo $f \in C_0(X)$. Luego tomando $d\mu := g d\lambda$ concluimos que $\forall f \in C_0(X),\ Tf = \int f d\mu$.

Gracias a esta desigualdad y a que $||T|| = 1$ y $d|\mu| = |g| d\lambda$, entonces

$$||\mu|| = |\mu|(X) = \int |g| d\lambda \geq \sup\{|Tf| : f \in C_0(X)\ \wedge\ ||f||_\infty \leq 1 = 1,$$

pero teníamos que $\lambda(X) \leq 1$ y $|g| \leq 1$, entonces no queda de otra más que $||\mu|| = ||\lambda|| = ||g||_\infty = 1$. Con esto se demuestra que $||T|| = ||\mu||$. Además, con esto mismo tenemos que $|\mu| = \lambda$, y como λ es regular, la definición de regularidad nos implica que μ es regular.

Sólo nos resta probar la unicidad de μ. Para probar esto, es suficiente probar que si μ es una medida regular compleja tal que para todo $f \in C_0(X)$, que cumpla que $\int f d\mu = 0$, entonces $\mu = 0$; esto debido a que

$$\int f d(\mu - \lambda) = \int f d\mu - \int f d\lambda.$$

Sea μ una medida compleja regular sobre los borelianos de X, entonces por teorema existe una función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para cada $x \in X$ y tal que $d\mu = hd|\mu|$. Entonces por teorema, existe una sucesión $\{h_n\} \subset C_C(X)$, con $|h_n| \leq 1$ y $h_n \to \overline{h}$ μ-c.s. Como $h_n \to \overline{h}$ μ-c.s., entonces $hh_n \to \overline{h}h$ μ-c.s., pero $\overline{h}h = |h|^2 = 1$, así tenemos que $hh_n \to 1$, luego por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebeshue y porque para todo $f \in C_0(X)$, se cumple que $\int f d\mu = 0$, llegamos a que

$$|\mu|(X) = \int d|\mu| = \lim \int h_n h d|\mu| = \lim \int h_n d\mu = 0.$$

Por lo tanto, $\mu = 0$.

$\blacksquare$

Conclusiones

El contenido de este trabajo y, en particular, las demostraciones de los teoremas del último capítulo muestran claramente la manera en la que se relacionan el área del análisis y la topología. Es por esto que se considera al Teorema de Representación de Riesz como un puente entre esas dos ramas de la matemática.

En este trabajo dimos las demostraciones de 3 versiones diferentes del Teorema de Representación de Riesz en 3, y la presentación de esas demostraciones es muy especial, pues fueron expuestos todos los detalles que en otros libros se omiten.

Pocos libros contienen las 3 versiones del Teorema de Representación de Riesz aquí trabajadas, por lo tanto, este trabajo se une a ese grupo de libros.

Por último, estamos seguros que cualquier alumno que haya cursado un curso básico de Topología y uno básico de Análisis Matemático será capaz de entender esta tesis en su totalidad y, por supuesto, entenderá muy bien el teorema que fue el tema central de este trabajo.

Bibliografía

[1] Alegría, Pedro. *Teoría de la Medida*. Departamento de Matemáticas. Universidad del país Vasco. Bilbao, España. 2007.

[2] Berberian, Sterling K. *Measure and Integration*. Chelsea Publishing Company. Bronx, New York, USA. 1962.

[3] Bombal, Fernando. *Análisis Funcional: Una perspectiva histórica*. Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla. España. 2003. pp. 81-117.

[4] Bombal, Fernando. *La Teoría de la Medida: 1875-1925*. Seminario de Historia de la Matemática I. Universidad Complutense. Madrid, España. 1991. pp. 107-144.

[5] Calderón Andrade, Alina Ixchel. *Medidas Complejas y Teoremas de Representación*. Tesis de licenciatura. FCFM-UMSNH. Morelia, Mich. Mayo de 2008.

[6] Dugundji, James. *Topology*. Edit Allyn and Bacon, Inc. Boston, USA. 1978.

[7] Faro Moreno, Ricardo. *Apuntes de Teoría de la Medida*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura. Badajoz, España. Enero de 2012.

[8] Galaz Fontes, Fernando. *Medida e Integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. Oxford University Press México. México. 2002.

[9] Gamboa de Buen, Berta. *Historia del Análisis Funcional.* Miscelánea Matemática SMM. Guanajuato, Gto. México. 1999. pp. 17-39.

[10] Garro Moreno, David. *Historia de la Topología.* Historia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España.

[11] Ivorra Castillo, Carlos. *Análisis Matemático.* Universidad de Valencia. Valencia, España. 2010.

[12] Jiménez Pozo, Miguel Antonio. *Medida, Integración y Funcionales.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba. 1989.

[13] Miana, Pedro J. *Curso de Análisis Funcional.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. Espanã. 2006.

[14] Munkres, James R. *Topology.* Prentice Hall Inc. 2nd edition. Upper Saddle River, N.J. USA. 2000.

[15] Pietsch, Albrecht. *History of Banach Spaces and Linear Operators.* Birkhäuser. Bostón, USA. 2007.

[16] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill International Editions. Third Edition. Singapore. 1987.

[17] Santana Bejarano, Jessica Yuniver. *Detereminación del dual de algunos espacios clásicos en análisis.* Tesis de licenciatura. Universidad de Sonora. Departamento de Matemáticas. Hermosillo, Sonora. Agosto de 2006.

[18] Vestrup, Eric M. *The Theory of Measures and Integration.* John Wiley & Sons Inc. USA. 2003.

Índice Alfabético