Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

UNA CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LOS IRRACIONALES

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
ENRIQUE CAMPOS MORALES

DIRECTOR DE TESIS
DR. AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO

PUEBLA, PUE. OTOÑO, 2013

A mis padres

CATALI *y* ***JOSÉ LUIS*** *por su amor,*
su apoyo incondicional y su infinita paciencia
de tan larga espera, para ver la culminación
de este modesto trabajo.

LAS MATEMÁTICAS POSEEN NO SÓLO LA VERDAD, SINO CIERTA BELLEZA SUPREMA. UNA BELLEZA FRÍA Y AUSTERA, COMO LA DE UNA ESCULTURA.
Bertrand Russell

EN LA RAZÓN SÓLO ENTRAN LAS DUDAS QUE TENGAN LLAVE.
Mario Benedetti

HAY UNA FUERZA MOTRIZ MÁS PODEROSA QUE EL VAPOR, LA ELECTRICIDAD Y LA ENERGÍA ATÓMICA:
LA VOLUNTAD.
Albert Einstein

AGRADECIMIENTOS

He querido agradecer la participación de todos los que han colaborado con esta dura, pero hermosa tarea. A mis padres, hermanos, sobrinos, amigos, a mi asesor, a mis sinodales y profesores que de alguna manera me han impulsado con consejos, comentarios y críticas en la realización del mismo. No crean que he sido mal educado al no nombrar a cada una de las personas que me han brindado su ayuda, pero son tantas que me sentiría muy mal si dejase de nombrar alguna. Cualquier reclamación que sea sin remitente.

GRACIAS

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el de estudiar el espacio topólogico de los números irracionales con la topología usual: la heredada como subespacio de la topología usual de los números reales.

A diferencia de los números racionales, que se consideran como razones de números enteros, los números irracionales tienen siempre alguna relación con los procesos infinitos, razón por la cual suelen ser más misteriosos que los números racionales. Por ejemplo, el mismo descubrimiento de los irracionales tiene que ver con el descubrimiento de que el procedimiento para medir segmentos que se usaba en la antigüedad, el de sustracciones sucesivas, es un proceso que nunca termina, lo que equivale al descubrimiento de la inconmensurabilidad, como veremos en el primer capítulo. También recuerde el lector que la representación decimal de todo número irracional consta de una sucesión infinita y no periódica de dígitos.

Quizá una caracterización más convincente es la de que la fracción continua de un número irracional es infinita, mientras que la de un número racional es finita, como también veremos. Precisamente por medio de las fracciones continuas se obtienen aproximaciones muy buenas a cualquier número irracional y a lo largo de la historia de la matemática se han usado en topología (ver [1]y [12]) para estudiar los números irracionales. Haremos eso aquí aunque, como dice Jerry Vaughan en [14] “el uso de las fracciones continuas introduce un poco de álgebra que no es necesaria para la topología. Sin embargo sirve como una introducción a las fracciones continuas que es un tema de considerable interes en sí mismo”.

En el segundo capítulo discutimos dos nociones de dimensión cero en espacios métricos que resultan equivalentes (ver Terorema 2.24) en la clase de los espacios métricos y separables. Para puntualizar ideas, exponemos brevemente el significado de estos conceptos, incluimos algunos ejemplos y demostramos algunos resultados interesantes.

En el tercer capítulo construimos una ultramétrica en el espacio de Baire $\mathbb{B}_1$; también construimos otro espacio ultramétrico $\mathbb{B}_2$, homeomorfo a él, que utilizaremos para demostrar que el espacio de Baire es homeomorfo al subespacio $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$, que consiste de los números irracionales. En este capítulo damos algunas propiedades de las ultramétricas junto con un par de ejemplos de espacios ultramétricos, los cuales son muy interesantes. Uno de ellos, el de la métrica p-ádica sobre los números racionales $\mathbb{Q}$, muestra que las ultramétricas aparecen de manera natural en la teoría de valuación. Sin embargo, esta métrica p-ádica no induce la topología usual sobre $\mathbb{Q}$ (ver [2]). En cambio el otro ejemplo de ultramétrica en $\mathbb{Q}$ sí induce la topología usual sobre $\mathbb{Q}$. Está basado en la construcción de una sucesión de cubiertas del espacio $\mathbb{Q}$ que satisfacen ciertas propiedades (ver [13]). Para mayor generalidad, en este capítulo demostramos el Teorema de J. de Groot (Teorema 3.16) que caracteriza a los espacios métricos (X, d) que son ultrametrizables con una ultramétrica φ, topológicamente equivalente a la métrica d.

En el cuarto capítulo hacemos con el espacio métrico de los números irracionales $\mathbb{P}$ algo análogo a lo hecho con $\mathbb{Q}$ en el capítulo 3: generar una ultramétrica sobre $\mathbb{P}$ que inducirá la topología usual en $\mathbb{P}$, construyendo una sucesión de cubiertas de $\mathbb{P}$ que satisface las propiedades que señala el Teorema de de Groot, pero ahora usando fracciones continuas. Esto nos permitirá definir un homeomorfismo explícito entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{B}_2$ (Terorema 4.6) y por tanto que $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{P}$ son homeomorfos. Probaremos también el Teorema de Sierpiński que señala que el espacio $\mathbb{P}$ es el espacio universal de la clase de todos espacios métricos separables y cero dimensionales (Teorema 4.7).

Hemos tratado de cuidar la redacción de este trabajo de forma tal que, en términos generales, sea autocontenido para que cualquier estudiante de la licenciatura en matemáticas pueda empezar su lectura en cualquier capítulo.
Destacamos enfáticamente que en esta tesis no hemos hecho ningún resultado inédito. Este trabajo ha sido motivado en unas interesantes notas del año 1996 [14]y un lindo artículo públicado en 1975 por Jerry E. Vaughan [13].

Enrique Campos Morales
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
B. Universidad Autónoma de Puebla
Otoño de 2013

Notación

Adoptaremos la siguiente notación:

- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números irracionales.
- $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de todos los números enteros.
- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números enteros positivos.
- ω denota el primer ordinal numerable

Índice general

UNA CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LOS IRRACIONALES

Enrique Campos Morales

OTOÑO 2013

Capítulo 1

IRRACIONALES Y FRACCIONES CONTINUAS

1.1. Reseña histórica

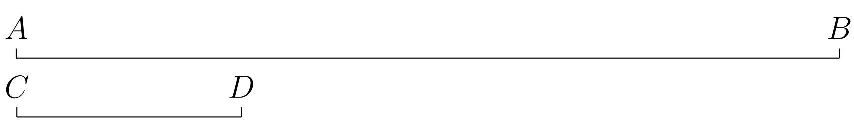
Las fracciones continuas tienen sus primeros antecedentes en los trabajos de Euclides, dado que el algoritmo para hallar el máximo común divisor entre dos enteros provee un método para hallar una fracción continua. Posteriormente, en el siglo XVI se pueden mencionar los resultados de Bombelli y Cataldi quienes las emplean para encontrar aproximaciones de raíces cuadradas. John Wallis en su obra La aritmética de los infinitesimales presenta una pequeña teoría acerca de las fracciones continuas. En los trabajos realizados por Leonhard Euler, se encuentra una sistematización de la teoría de las fracciones continuas y, entre líneas, se puede intuir en un sentido actual una construcción de los reales en términos de fracciones continuas.
El aporte de Euclides al desarrollo de las fracciones continuas se da en dos instancias, producto de la separación que establece para las magnitudes y los números. La primera tiene que ver con las magnitudes, en los libros V, VI y X. La segunda instancia, corresponde a los libros VII, VIII y XI, con la teoría de números. El algoritmo de Euclides, desarrollado en los Elementos, para hallar el máximo común divisor entre dos números enteros, es un método que permite también encontrar la fracción continua de un número racional. Este algoritmo se presenta en el libro VII de los Elementos a través de las siguientes proposiciones:
Proposición VII. 1: Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede la unidad, los números iniciales serán primos entre sí.
Proposición VII. 2: Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.
En esta proposición Euclides ofrece un método eficaz para hallar la medida común máxima de dos números por el método de sustracción recíproca sucesiva (*antiphaeresis*). La versión modernizada de este procedimiento aproxima la aritmética de Eu-

clides a la aritmética de fracciones y se da en términos no ya de sustracción sino de división: mediante el algoritmo de la división.
Las siguientes proposiciones del libro X, expresan la antiphaeresis, en la versión para magnitudes de las proposiciones anteriores.
Proposición X. 1: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.
Proposición X. 2: Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

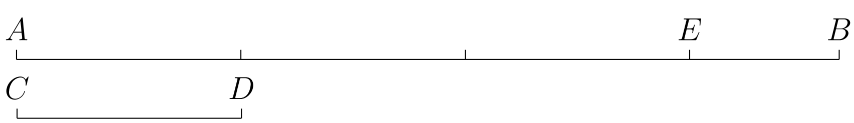
Se dice que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son *conmensurables*, si existe un segmento $\overline{EF}$ que cabe un número entero de veces en $\overline{AB}$ y un número entero de veces en $\overline{CD}$, es decir, si las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son a, b y c respectivamente, entonces existen números naturales m y n tales que $a = mc$ y $b = nc$. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son *inconmensurables*, si no son conmensurables.

Cabe mencionar que la antiphaeresis expresada en la proposición X. 2 es una copia del algoritmo de Euclides de la proposición del libro VII que ya conocían los Pitagóricos. En efecto, desde antes de los primeros filósofos griegos, en las grandes civilizaciones antiguas como Egipto, Mesopotamía, India y China, se medían los segmentos usando el método de sustracciones sucesivas (llamado antiphaeresis por los griegos).
Por ejemplo dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de magnitudes AB y CD con $AB > CD$, para medir $\overline{AB}$ usando como unidad $\overline{CD}$, se procede así:
Por el método de antiphaeresis se veía cuántas veces cabe el segmento $\overline{CD}$ en el segmento $\overline{AB}$.

antiphaeresis



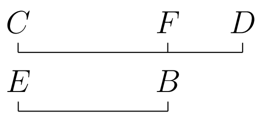
En nuestro ejemplo, el segmento $\overline{CD}$ cabe tres veces en el segmento $\overline{AB}$ y sobra un segmeto $\overline{EB}$ más pequeño que CD.



En números

$AB = 3CD + EB$, con $0 < EB < CD$.

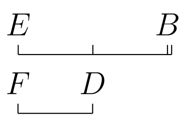
Luego se ve cuántas veces cabe el segmento $\overline{EB}$ en el segmento $\overline{CD}$



La figura muestra que el segmento $\overline{EB}$ cabe una vez en el segmeto $\overline{CD}$ y sobra un segmento $\overline{FD}$ menor que el segmento $\overline{EB}$.
Así

$CD = EB + FD$, con $0 < FD < EB$

En el siguiente paso se ve cuántas veces cabe el segmento $\overline{FD}$ en el segmento $\overline{EB}$

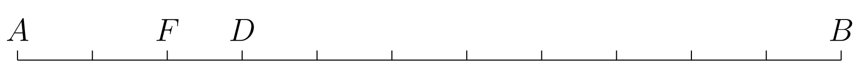


Cabe dos veces y sobra un segmento tan pequeño que, si los fines de la medición son de índole práctico se puede despreciar. También si el segmento es tan pequeño que los instrumentos de medición ya no lo perciben.

Por lo cual

$EB = 2FD.$

Así en la práctica se ha hallado un segmento $\overline{FD}$ que cabe un número entero de veces en $\overline{AB}$ y un número entero de veces en $\overline{CD}$



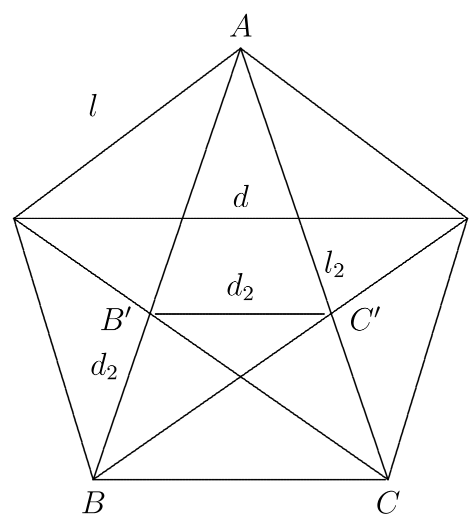
Y por consiguiente

$EB = 2FD$
$CD = EB + FD = 2FD + FD = 3FD$
$AB = 3CD + EB = 3(3FD) + 2FD = 11FD$

Como los Pitagóricos ya habían demostrado que el algoritmo de Euclides (aunque Euclides fue posterior, se llama "de Euclides" porque se conoció a través de los Elementos) siempre termina y por tanto siempre existe un divisor común de dos números naturales dados, esto les llevó a pensar que la antiphaeresis terminaba, es decir, que dados dos segmentos cualesquiera siempre existe otro segmento que cabe un número entero de veces en uno y un número de veces en el otro, es decir, que cualesquiera dos segmentos son conmensurables, lo que equivale a decir en lenguaje moderno, que la razón o cociente de cualesquiera dos longitudes siempre es racional. En nuestro ejemplo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{11\overline{FD}}{3\overline{FD}} = \frac{11}{3}.$$

Pero según cuenta la leyenda, Hipaso de Metaponto, un pitagórico que floreció 100 años después que Pitágoras (aproximadamente alrededor del 450 a. de C.) fue el culpable (si se me permite utilizar este calificativo) de desmentir esta conjetura. Al parecer Hipaso se planteó el problema teórico y no práctico de medir la diagonal de un pentágono utilizando el lado como unidad de medida. Por plantear el problema de la forma más simple posible, tomemos un pentágono regular de lado l. Mirando la hermosa estrella pentagonal que servía de símbolo a La Hermandad Pitagórica la pregunta que según parece se realizó Hipaso de Metaponto fue: ¿cuánto mide la diagonal de un pentágono regular usando como unidad su lado?



Teniendo en cuenta la condición de Pitagórico de Hipaso, es posible que él mismo esperara que la medida de esta diagonal pudiera expresarse como un número natural o una fracción, pero en realidad no fue así. Hipaso se dio cuenta de que esta medida no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción formada por números naturales. Interpretemos, en un lenguaje moderno, lo que pudo haber hecho Hipaso.

Sean l el lado del pentágono regular y d la diagonal del mismo.

Pongamos $l = l_1$ y $d = d_1$ y notemos que

$$\begin{array}{ll} d_1 = l_1 + d_2 \quad con \quad d_2 < l_1 & \\ l_1 = d_2 + l_2 \quad con \quad l_2 < d_2 & \qquad\qquad (1) \\ d_2 = l_2 + d_3 \quad con \quad d_3 < l_2 & \\ l_2 = d_3 + l_3 \quad con \quad l_3 < d_3 & \\ \vdots & \end{array}$$

Como se ve la antiphaeresis nunca acaba en este caso. Lo que demostraba esto, según los sacerdotes Pitagóricos, es que la antiphaeresis no servía para medir la diagonal de un pentágono regular utilizando el lado como unidad de medida, pero no que no pudiera hacerse por otro método. Empero, Hipaso, como el gran matemático y sabio que era, les respondió: "No su insolencia, perdón su excelencia; supongamos que existe u tal que $d_1 = m_1 u$ y $l_1 = n_1 u$ donde m_1 y n_1 son números naturales, $l_1 < d_1$ implica $n_1 < m_1$".
Entonces
$d_2 = d_1 - l_1 = m_1 u - n_1 u = (m_1 - n_1)u = m_2 u$,
para algún número natural m_2, con $m_2 < m_1$ y $m_2 < n_1$.

$l_2 = l_1 - d_2 = n_1 u - m_2 u = (n_1 - m_2)u = n_2 u$,
para algún número natural n_2, con $n_2 < n_1$ y $n_2 < m_2$.

$d_3 = d_2 - l_2 = m_2 u - n_2 u = (m_2 - n_2)u = m_3 u$,
para algún número natural m_3, con $m_3 < m_2$ y $m_3 < n_2$.

$\vdots$
$d_n = m_n u$
$\vdots$
De donde
$m_1 > m_2 > m_3 > \cdots > m_n > m_{n+1} > \cdots$
"Ahora dígame usted su señoría ¿es posible que exista una sucesión decreciente de números naturales que nunca termine?". Esto llenó de encono y rabia a los sumos sacerdotes diciéndose para sus adentros -¡maldito, traidor, hereje!- y motivó el asesinato del excelso Hipaso de Metaponto.

Se cree que así surgió el primer número irracional (ver [15]). Los Pitagóricos tenían la firme creencia de que todo el Universo podía ser explicado con números. Pero, ¿con qué números? Pues con números naturales, esto es, $1, 2, 3, \ldots$, y con las fracciones que pueden formarse con ellos, es decir, con números racionales. En cierto modo puede ser una creencia lícita y hasta cierto punto razonable (recordemos que estamos en la antigua Grecia) y por eso el descubrimiento de Hipaso significó una terrible crisis matemática (de hecho, filosófica).

Al menos esto cuenta la leyenda, que Hipaso fue el descubridor de este hecho. Lo que parece más cercano a la realidad fue que el propio Hipaso comunicó este descubrimiento fuera de la comunidad Pitagórica y esto fue lo que significó el final de Hipaso. Según algunas fuentes, los Pitagóricos lo arrojaron al mar por revelar fuera de la secta esta catástrofe pitagórica, aunque otras aseguran que lo que hicieron los Pitagóricos fue organizar un simulacro de funeral, con tumba incluida, que simbolizaba que para ellos Hipaso había muerto. Hasta se comenta que Hipaso podría haberse suicidado (hecho que podría cuadrar con la hipótesis del funeral simulado). Sea como fuere, la raíz de la muerte de Hipaso, ya fuera ideológica o real, fue esa diagonal del pentágono regular, ese número irracional, esa hecatombe Pitagórica (¿cómo se iba a poder explicar el Universo con números naturales y fracciones si ni siquiera puede medirse la diagonal de un pentágono regular con ellos?).

Para nosotros en estos tiempos en que manejamos los números reales y toda su álgebra, no es díícil demostrar que son equivalentes el que cualesquiera dos segmentos sean conmensurables y el que el cociente de cualesquiera dos longitudes sea un número racional. Por eso, lo que demostró Hipaso, traducido al lenguaje moderno, fue que existían números irracionales. Si aceptamos la hipótesis de que el descubrimiento de Hipaso fue hecho en el pentágono, entonces podemos preguntarnos: ¿cuál es ese primer número irracional que descubrió Hipaso?. Ahora sabemos que esta diagonal mide ϕ veces la longitud del lado, donde ϕ es el famoso número de oro o también llamado número dorado. Podemos ensayar una demostración de este hecho, a partir de lo realizado por Hipaso. Este ensayo es nuestro, por supuesto, porque no hubiera sido posible que Hipaso continuara con estas reflexiones, no porque pereció, sino por el lenguaje y el manejo de los números involucrados en el proceso, que nos llevará a las fracciones continuas.

Partiendo de las igualdades (1) tenemos:

$$d_1 = l_1 + d_2,$$

así

$$\frac{d_1}{l_1} = 1 + \frac{d_2}{l_1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{l_1}{d_2}}.$$

Similarmente,

$$l_1 = d_2 + l_2 \quad y \quad \frac{l_1}{d_2} = 1 + \frac{l_2}{d_2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{d_2}{l_2}},$$

$$d_2 = l_2 + d_3 \quad y \quad \frac{d_2}{l_2} = 1 + \frac{d_3}{l_2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{l_2}{d_3}},$$

$$l_2 = d_3 + l_3 \quad y \quad \frac{l_2}{d_3} = 1 + \frac{l_3}{d_3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{d_3}{l_3}},$$

$$\vdots$$

Notamos pues que este proceso se sigue indefinidamente. Obtenemos así la que sería la primera fracción continua si Hipaso hubiera podido continuar con sus investigaciones del modo como nosotros estamos procediendo:

$$\frac{d}{l} = \frac{d_1}{l_1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{l_1}{d_2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{d_2}{l_2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{l_2}{d_3}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{d_3}{l_3}}}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

¿Quién es este número? Podemos aproximarnos por medio de la suiguiente sucesión de números racionales:

$$1, \quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{8}{5}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}=\frac{13}{8},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}=\frac{21}{13}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}=\frac{34}{21}, \ldots$$

Observemos que esta sucesión es la sucesión de cocientes $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ que es la célebre sucesión $1, 1, 2{,}3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ que se define recursivamente de la suguiente manera :

$$f_n := \begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \quad \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

En cálculo se demuestra que si

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

entonces l satisfsace la ecuación

$$l^2 = l + 1,$$

puesto que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n-1}+f_n}{f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + 1 = \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}} + 1 \qquad (2),$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = l = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

tomando límite en (2) obtenemos

$$l = \frac{1}{l} + 1$$

es decir,

$$l^2 = l + 1.$$

resolviendo esta ecuación obtenemos la raíz positiva

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que es el número ϕ. por lo tanto nuestro número

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

es el número $\phi = \dfrac{d}{l}$.

Una forma geométrica de obtener este mismo resultado es regresando al pentágono de Hipaso. Allí observamos que $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ y por lo tanto

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{BC'} = \lambda,$$

o sea

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{l_1}{d_2} = \lambda.$$

Como $d_1 = d_2 + l_1$, entonces

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{d_2}{l_1} + 1$$

y por lo tanto

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{1}{\frac{l_1}{d_2}} + 1;$$

entonces,

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} + 1.$$

Y obtenemos de nuevo la ecuación $\lambda^2 = \lambda + 1$. y a su raíz positiva $\lambda = \dfrac{1+\sqrt[2]{5}}{2} = \phi$. ¿Por qué este número ϕ es irracional? Una respuesta posible es: porque expresado en fracción continua nunca termina. En efecto, como veremos en la sección siguiente, un número es racional si y sólo si su fracción continua es finita.

1.2. Fracciones continuas

Definición 1.1. *Una expresión de la siguiente forma se llama* ***fracción continua***

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}}}}} \qquad (3)$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ *y* $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}\} \cup \{x\}$ *es tal que,* $a_i \in \mathbb{N}$ *para* $1 \leq i < n$ *y* x *un número real positivo. La fracción continua* (3) *se denota por* $[a_0, a_1 \cdots, a_{n-1}, x]$. *Si* $\mathcal{F} = \emptyset$ *la fracción continua* (3) *se denota por* $[a_0]$.

Observaciones. Dada la fracción continua $[a_0, a_1 \cdots, a_{n-1}, x]$ se tiene:

(i) Si el último término x en $[a_0, \cdots, a_{n-1}, x]$ es un entero positivo $x = a_n$, entonces:

- (a) el número $[a_0, \cdots, a_n]$ es número racional.
- (b) $[a_0, \cdots, a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1, \cdots, a_n]}$

(ii) Para todo número $x > 0$, $[a_0, \cdots, a_{n-1}, x] = [a_0, \cdots, a_{n-1} + \frac{1}{x}]$.

La proposición inversa de la observación (i) dice que todo número racional se puede expresar como una fracción continua finita $[a_0, \cdots, a_n]$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ $1 \leq i \leq n$. A continuación trataremos de demostrar tal cosa. La fracción continua de un número racional se puede encontrar utilizando el algoritmo de la división:

Teorema 1.2. *(de la división). Para cualesquiera dos enteros* a *y* b *con* $b > 0$ *existen enteros* q *(el cociente) y* r *(el residuo) tales que* $a = bq + r$, *donde* $0 \leq r < b$.

Demostración. Existencia de q y r. Bastaría tomar q como un número entero tal que bq sea el mayor de los múltiplos de b menores o iguales que a, es decir tal

que $bq \leq a$. ($q = [\frac{a}{b}]$ la parte entera de $\dfrac{a}{b}$, es decir, $q = mín\ \{p \in \mathbb{Z} : p \leq \frac{a}{b}\}$)
Una vez obtenido el cociente q, podemos calcular el resto r sin más que hacer

$$r = a - bq$$

Por otra parte, si $bq \leq a$, entonces el siguiente múltiplo de q, $b(q+1)$, será estrictamente mayor que a, es decir,

$$bq \leq a < b(q+1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} bq \leq a < b(q+1) &\Rightarrow bq - bq \leq a - bq < b(q+1) - bq \\ &\Rightarrow 0 \leq a - bq < b \\ &\quad 0 \leq r < b \end{aligned}$$

Así pues, existen q y r, enteros tales que

$$a = bq + r, \quad donde \quad 0 \leq r < b$$

Unicidad de q y r:
Supongamos que no son únicos, es decir, supongamos que existen r_1, r_2, q_1 y q_2, enteros tales que verifican el teorema, o sea,

$$a = bq_1 + r_1, \quad donde \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$a = bq_2 + r_2, \quad donde \quad 0 \leq r_2 < b$$

Entonces,

$$bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow b|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$$

y al ser

$$0 \leq r_1, r_2 < b$$

será

$$0 \leq |r_2 - r_1| < b$$

luego,

$$b|q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| \quad y \quad |r_2 - r_1| < b$$

implica,

$$b|q_1 - q_2| < b \Rightarrow b(1 - |q_1 - q_2|) > 0$$

y al ser $b > 0$, tendremos que

$$1 - |q_1 - q_2| > 0$$

de donde sigue que

$$0 \leq |q_1 - q_2| < 1$$

y como q_1 y q_2 son enteros, tendrá que ser

$$|q_1 - q_2| = 0$$

por tanto,

$$q_1 = q_2$$

de donde se sigue también que

$$r_1 = r_2$$

□

Dados dos enteros positivos a, b, con $a < b$, aplicando repetidamente el algoritmo de la división, obtenemos una sucesión de igualdades de la siguiente manera (en el que escribimos $b = r_0$ para facilitar la notación)

$$a = r_0 q_0 + r_1, \ \ donde \ \ 0 \leq r_1 < r_0$$

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2, \ \ donde \ \ 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, \ \ donde \ \ 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \ \ donde \ \ 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$\vdots$$

Puesto que los (r_i) forman una sucesión decreciente de enteros no negativos, este proceso finalizará en un número finito de pasos. Es decir existe algún entero n tal que $r_n = 0$. Si sólo quisiéramos obtener el máximo común divisor de a y de b, bastaría con tomar como tal, el último residuo distinto de cero, es decir, r_{n-1}. Este es el Algotitmo de Euclides. Pero por ahora nuestro intéres es que podamos extraer la fracción continua de $\frac{a}{b}$, a partir del conjunto de igualdades que ya obtuvimos.

Para ver ésto, escribimos la familia de desigualdades como sigue.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r_0} = q_0 + \frac{r_1}{r_0}$$

$$\frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} \quad o \quad \frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} \quad o \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} \quad o \quad \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{q_{n-1}}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{r_0}{r_1}} = \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}} = \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \\
&\vdots \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}}
\end{aligned}$$

Es decir, $\frac{a}{b} = [q_0, q_1 \cdots, q_{n-1}, q_n]$. En resumen hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 1.3. *Cualquier número racional puede representarse como una fracción continua finita. Inversamente, toda fracción continua finita es un número racional.*

Entonces cada vez que podamos expresar un número real x mediante una "fracción continua que no termina" como ha sucedido con la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, podemos asegurar que dicho número x es irracional.

En el capítulo 4 demostraremos que, para todo número irracional x existen $a_0 \in \mathbb{Z}$ y una sucesión $a_0, a_1, ..., a_n$ de números naturales tales que $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, ..., a_n] = x$. Podrá entonces expresarse x como la fracción continua infinita $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$.

Proposición 1.4. *Para cada $n \in \omega : P(n)$, donde $P(n)$ es la proposición: para toda $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2n+1}$ y para cada x, $y \in \mathbb{R}$. Si $0 < x < y$ entonces*

(a) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, y] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, x]$.

(b) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, x] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, y]$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.
$P(0)$: para cada $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2(0)+1}$ y para toda x, $y \in \mathbb{R}$, tales que $0 < x < y$, entonces

$$(a) \quad [a_0, y] < [a_0, x] \quad y \quad (b) \quad [a_0, a_1, x] < [a_0, a_1, y].$$

La cual es verdadera pues, dados $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{N}$ y x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x < y$, implica

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x},$$

por lo que

$$a_0 + \frac{1}{y} < a_0 + \frac{1}{x},$$

es decir

$$[a_0, y] < [a_0, x].$$

Esto demuestra (a). Como x, $y \in \mathbb{R}$ son arbitrarios, se ha demostrado que para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, entonces $[a_0, y] < [a_0, x]$. En particular puesto que

$$a_1 + \frac{1}{y} < a_1 + \frac{1}{x},$$

es decir

$$[a_0, a_1 + \frac{1}{x}] < [a_0, a_1 + \frac{1}{y}],$$

pero esto es

$$[a_0, a_1, x] < [a_0, a_1, y].$$

Y se cumple (b). Así $P(0)$ es verdadera.

Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Demostraremos que $P(n+1)$ también es verdadera, es decir:
$P(n+1)$: para toda $(a_0, a_1, ..., a_{2n+2}, a_{2(n+1)+1}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2(n+1)+1}$ y para cada x, $y \in \mathbb{R}$. Si $0 < x < y$, entonces

(a) $[a_0, a_1, ..., a_{2(n+1)}, y] < [a_0, a_1, ..., a_{2(n+1)}, x]$

(b) $[a_0, a_1, ..., a_{2(n+1)+1}, x] < [a_0, a_1, ..., a_{2(n+1)+1}, y]$.

Fijemos $(a_0, a_1, ..., a_{2n+2}, a_{2n+3}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2n+3}$ y x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x < y$, tenemos

$$a_{2n+2} + \frac{1}{y} < a_{2n+2} + \frac{1}{x} \quad y \quad a_{2n+3} + \frac{1}{y} < a_{2n+3} + \frac{1}{x}.$$

Por hipótesis de inducción

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, x] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, y],$$

se cumple, por lo que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{y}] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{x}],$$

es decir,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, y] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, x] \quad (1).$$

Ahora veamos que

$$[a_0, a_1, ..., a_{2n+3}, x] < [a_0, a_1, ..., a_{2n+3}, y].$$

Usando (1) tenemos

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{x}] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{y}].$$

Por lo tanto

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}, x] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}, y].$$

Esto demuestra que $P(n+1)$ es verdadera. □

Corolario 1.5. *Para cada $n \in \omega$: $P(n)$, donde*
$P(n)$: para toda $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2n+1}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

(a) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, k+1] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, k]$ *y*

(b) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, k] < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, k+1]$.

Demostración. Basta con hacer $x = k$ y $y = k+1$ en la proposición 1.4. $\square$

Proposición 1.6. *Para cada $n \in \omega$: $P(n)$, donde $P(n)$: para toda $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^n$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{[a_0, a_1, \cdots, a_n, k] : k \in \mathbb{N}\}$ converge a $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.
$P(0)$: para toda $(a_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\lim_{k \to \infty} [a_0, k] = [a_0].$$

La cual es claramente cierta pues $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{1}{k} = 0$. Esto demuestra $P(0)$.

Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Demostraremos que $P(n+1)$ también es verdadera. Sea

$$(a_0, a_1, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{n+1},$$

por demostrar que

$$\lim_{k \to \infty} [a_0, a_1, ..., a_{n+1}, k] = [a_0, a_1, ..., a_{n+1}].$$

Notemos que

$$[a_0, a_1, ..., a_{n+1}, k] = a_0 + \frac{1}{[a_1, ..., a_{n+1}, k]}.$$

Pero

$$(a_1, a_2, ..., a_{n+1}, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^n,$$

por hipótesis de inducción

$$\lim_{k \to \infty} [a_1, a_2, ..., a_{n+1}, k] = [a_1, a_2, ..., a_{n+1}].$$

Luego

$$[a_0, a_1, ..., a_{n+1}, k] = a_0 + \frac{1}{[a_1, ..., a_{n+1}, k]}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{k \to \infty} [a_0, a_1, ..., a_{n+1}, k] = \lim_{k \to \infty} a_0 + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_{n+1}, k]} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_{n+1}]} = [a_1, a_2, ..., a_{n+1}].$$

Así $P(n+1)$ es verdadera.

$\square$

Proposición 1.7. *Para toda $n \in \omega$: $P(n)$, donde*
$P(n)$: para cualquier $(a_0, a_1, ..., a_{2n+1}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2n+1}$ y para cada x, $y \in \mathbb{R}$. Si $1 \leq x < y$, entonces

(a) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, x] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, y] \leq \dfrac{y-x}{xy+2n}$

(b) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, y] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, x] \leq \dfrac{y-x}{xy+2n+1}$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.
$P(0)$: para cada $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y para cada x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq x < y$, entonces

$$(a) \quad [a_0, x] - [a_0, y] = \frac{y-x}{xy} \quad y \quad (b) \quad [a_0, a_1, y] - [a_0, a_1, x] = \frac{y-x}{xy+1}.$$

Sean $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq x < y$.
Lo cual implica

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x} \quad y \quad a_1 + \frac{1}{y} < a_1 + \frac{1}{x}.$$

Así

$$[a_0, x] - [a_0, y] = a_0 + \frac{1}{x} - a_0 - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \quad (1).$$

Por otro lado

$$[a_0, a_1, y] - [a_0, a_1, x] = [a_0, a_1 + \frac{1}{y}] - [a_0, a_1 + \frac{1}{x}].$$

Por (1)

$$[a_0, a_1 + \frac{1}{y}] - [a_0, a_1 + \frac{1}{x}] = \frac{a_1 + \frac{1}{x} - a_1 - \frac{1}{y}}{(a_1 + \frac{1}{y})(a_1 + \frac{1}{x})} =$$

$$= \frac{\frac{y-x}{xy}}{{a_1}^2 + a_1(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{1}{xy}} \leq \frac{xy}{xy+1}$$

La última desigualdad es válida porque $a_1 \geq 1$ implica ${a_1}^2 \geq 1$ y $a_1(y+x) > 1$, por lo que $\dfrac{1}{{a_1}^2 xy + a_1(y+x) + 1} < \dfrac{1}{xy+1}$. Hemos demostrado $P(0)$.

Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Veamos que $P(n+1)$ también lo es, es decir $P(n+1)$: para cualquier $(a_0, a_1, ..., a_{2n+2}, a_{2(n+1)+1}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{(2n+1)+1}$ y para cada x,

$y \in \mathbb{R}$. Si $1 \leq x < y$, entonces

(a) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2(n+1)}, x] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2(n+1)}, y] \leq \dfrac{y - x}{xy + 2(n+1)}$

(b) $[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2(n+1)+1}, y] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2(n+1)+1}, x] \leq \dfrac{y - x}{xy + 2(n+1) + 1}$.

Sean $(a_0, a_1, ..., a_{2n+3}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{2n+3}$ y x, $y \in \mathbb{R}$. tales que $1 \leq x < y$. Se infiere que $a_{2n+2} + \dfrac{1}{y} < a_{2n+2} + \dfrac{1}{x}$ y $a_{2n+3} + \dfrac{1}{y} < a_{2n+3} + \dfrac{1}{x}$.

Notemos que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, x] = [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{x}]$$

y

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, y] = [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{y}].$$

Por hipótesis de inducción se deduce que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, x] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, y] =$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{x}] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2} + \frac{1}{y}] \leq$$

$$\leq \frac{(a_{2n+2} + \frac{1}{x}) - (a_{2n+2} + \frac{1}{y})}{(a_{2n+2} + \frac{1}{y})(a_{2n+2} + \frac{1}{x}) + 2n + 1} =$$

$$= \frac{a_{2n+2} + \dfrac{1}{y} - a_{2n+2} - \dfrac{1}{x}}{(a_{2n+2} + \dfrac{1}{x})(a_{2n+2} + \dfrac{1}{y}) + 2n + 1} =$$

$$= \frac{y - x}{a_{2n+2}^2 xy + a_{2n+2}(x + y) + (2n+1)xy} \leq \frac{y - x}{xy + 2n + 2}.$$

La última desigualdad se sigue de que $a_{2n+2}^2 \geq 1$ y $a_{2n+2}(y + x) > 1$, por lo que

$$a_{2n+2}^2 xy + a_{2n+2}(y + x) + (2n+1)xy > xy + 1 + (2n+1);$$

así

$$\frac{1}{a_{2n+2}^2 xy + a_{2n+2}(y + x) + (2n+1)xy} < \frac{1}{xy + 2n + 2}.$$

Por lo tanto

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, x] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, y] \leq \frac{y-x}{xy+2n+2} \quad (2).$$

Ahora consideremos

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3}, y] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3}, x] =$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{y}] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{x}].$$

Por (2) obtenemos

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{y}] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3} + \frac{1}{x}] \leq$$

$$\leq \frac{(a_{2n+3} + \frac{1}{x}) - (a_{2n+3} + \frac{1}{y})}{(a_{2n+3} + \frac{1}{y})(a_{2n+3} + \frac{1}{x}) + 2n + 2} =$$

$$= \frac{a_{2n+3} + \dfrac{1}{y} - a_{2n+3} - \dfrac{1}{x}}{(a_{2n+3} + \dfrac{1}{x})(a_{2n+3} + \dfrac{1}{y}) + 2n + 2} =$$

$$= \frac{y-x}{a_{2n+3}^2 xy + a_{2n+3}(x+y) + (2n+2)xy} \leq \frac{y-x}{xy+2n+3}.$$

Esto último dado que $a_{2n+2}^2 \geq 1$ y $a_{2n+2}(y+x) > 1$, por lo que

$$a_{2n+2}^2 xy + a_{2n+2}(y+x) + (2n+2)xy > xy + 1 + (2n+2);$$

de donde

$$\frac{1}{a_{2n+3}^2 xy + a_{2n+3}(y+x) + (2n+2)xy} < \frac{1}{xy+2n+3}.$$

Por consiguiente

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3}, y] - [a_0, a_1, \cdots, a_{2n+2}, a_{2n+3}, x] \leq \frac{y-x}{xy+2n+3}.$$

Hemos demostrado que $P(n+1)$ es verdadera. $\square$

Terminamos este capítulo con una proposición que será muy útil en el capítulo 4. Antes dos lemas.

Lema 1.8. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{P}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Entonces son equivalentes:*

(*a*) (*n es par y* $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1]$)
o
(*n es impar y* $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$)

(*b*) $(\cdots(((x - a_0)^{-1} - a_1)^{-1} - a_2)^{-1} - \cdots - a_{n-1})^{-1} - a_n \in (0, 1)$

Demostración. Demostraremos por inducción matemática sobre n que para cada $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera, donde $P(n)$ es la proposición siguiente:
$P(n)$: para cualesquiera $x \in \mathbb{P}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, se tiene (a) si y sólo sí (b).

Así, $P(1)$ es la proposición $P(1)$: Para cualesquiera $x \in \mathbb{P}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1 \in \mathbb{N}$, se tiene (a) $[a_0, a_1 + 1] < x < [a_0, a_1]$ y (b) $(x - a_0)^{-1} - a_1$.
La equivalencia de ambos casos se cumple para cualesquiera $x \in \mathbb{P}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1 \in \mathbb{N}$, ya que :

$$0 < \frac{1}{x - a_0} - a_1 < 1,$$

de donde

$$a_1 < \frac{1}{x - a_0} < a_1 + 1,$$

por lo que

$$\frac{1}{a_1 + 1} < x - a_0 < \frac{1}{a_1}$$

y puesto que $x \notin \mathbb{Q}$ tenemos que $[a_0, a_1 + 1] < x < [a_0, a_1]$.
Ahora supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que se cumple $P(n)$. Demostraremos que es verdadera $P(n + 1)$.

Sean $x \in \mathbb{P}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, ..., a_{n+1} \in \mathbb{N}$. Sólo demostraremos que si $n + 1$ es par, entonces :
$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_{n+1}] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_{n+1} + 1]$
si y sólo si
$(\cdots(((x - a_0)^{-1} - a_1)^{-1} - a_2)^{-1} - \cdots - a_n)^{-1} - a_{n+1} \in (0, 1)$.
El caso en el que $n + 1$ es impar es completamente análogo.

Para cada $j \in \{1, 2, ..., n + 1\}$, $b_{j-1} = a_j$. Se tiene :

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1} + 1]$$

Si y sólo si

$$a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}]} < x < a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} + 1]}$$

Si y sólo si

$$\frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}]} < x - a_0 < \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} + 1]}$$

Si y sólo si

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}] < \frac{1}{x - a_0} < [a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} + 1]$$

Si y sólo si

$$[b_0, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}] < \frac{1}{x - a_0} < [b_0, b_1, \cdots, b_n, b_{n+1} + 1].$$

Como n es impar por hipótesis de inducción aplicada al irracional $\dfrac{1}{x - a_0}$ y $b_0, ..., b_n \in \mathbb{N}$, esta última proposición equivale a

$$(\cdots(((x - a_0)^{-1} - b_0)^{-1} - b_1)^{-1} - \cdots - b_{n-1})^{-1} - b_n \in (0, 1),$$

que es lo mismo que :

$$(\cdots(((x - a_0)^{-1} - a_1)^{-1} - a_2)^{-1} - \cdots - a_n)^{-1} - a_{n+1} \in (0, 1).$$

□

Lema 1.9. *Para cada $x \in (0,1) \cap \mathbb{P}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$*

Demostración. Sean $x \in (0,1) \cap \mathbb{P}$ y $k = [\frac{1}{x}]$ la parte entera de $\dfrac{1}{x}$.

Como $0 < x < 1$, entonces $1 < \dfrac{1}{x}$, de donde $k \geq 1$, así $k \in \mathbb{N}$.

Además $k < \dfrac{1}{x} < k + 1$ implica $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ □

Proposición 1.10. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{P}$. Entonces*

(1) *Si n es par y $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1]$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k + 1] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k]$*

(2) *Si n es impar y $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k + 1]$*

Demostración. Sólo demostraremos (1) porque la prueba de (2) es análoga.

Supongamos que n es par y que $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1]$. Entonces por el Lema 1.8,

$$(\cdots(((x - a_0)^{-1} - a_1)^{-1} - a_2)^{-1} - \cdots - a_{n-1})^{-1} - a_n \in (0, 1).$$

Por el lema 1.9, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k+1} < (\cdots(((x-a_0)^{-1}-a_1)^{-1}-a_2)^{-1}-\cdots-a_{n-1})^{-1}-a_n < \frac{1}{k},$$

por lo tanto

$$k < ((\cdots(((x-a_0)^{-1}-a_1)^{-1}-a_2)^{-1}-\cdots-a_{n-1})^{-1}-a_n)^{-1} < k+1,$$

lo que implica que

$$0 < ((\cdots(((x-a_0)^{-1}-a_1)^{-1}-a_2)^{-1}-\cdots-a_{n-1})^{-1}-a_n)^{-1}-k < k+1$$

y nuevamente por Lema 1.8, esto equivale a

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k+1] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, k]$$

$\square$

Capítulo 2

ESPACIOS MÉTRICOS Y DIMENSIÓN CERO

Suponemos familiaridad con la teoría básica de los espacios métricos y en particular con el espacio de los números reales con la métrica usual. En este capítulo daremos dos nociones de dimensión cero, que pueden definirse en la clase de espacios topológicos, pero aquí lo haremos en la clase de los espacios métricos. Demostraremos que estas nociones son equivalentes en la clase de los espacios métricos separables.

2.1. Definiciones básicas

En esta sección introduciremos algo de notación y unas pocas definiciones básicas y recordaremos algunos teoremas que conciernen a los espacios métricos en general.

Definición 2.1. *Un par (X, d) se llama* ***espacio métrico*** *si X es un conjunto no vacío y d es una métrica, es decir, una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes tres propiedades para toda x, y, z en X:*

(i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdad del triángulo).*

Por ejemplo la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x - y|$, donde para cada $x \in \mathbb{R}$ $|x|$ es el valor absoluto, de $x \in \mathbb{R}$, es una métrica en $\mathbb{R}$, y es llamada la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Definición 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*
Si $x \in X$ y $r > 0$.

(i) El conjunto

$$N(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

se llama ***vecindad básica*** *de x de radio r.*

(ii) Un conjunto $U \subset X$ se llama ***abierto*** *si U es unión de vecindades básicas, es decir, para todo $x \in U$ existe $r = r(x) > 0$ tal que $N(x,r) \subset U$.*

(iii) Un conjunto $F \subset X$, se llama ***cerrado*** *(en X), si $X \setminus F$ es abierto en X.*

(iv) Decimos que un conjunto $A \subset X$ es ***ABC*** *o* ***cerrabierto*** *si es abierto y cerrado en X.*

(v) El conjunto $\mathcal{T}_d := T(x,d) := \{U \subset X : U \text{ es abierto}\}$ se llama ***topología de*** *(X,d), o* ***topología en X inducida por la métrica*** *d.*

Definición 2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, se llama* ***base*** *para la topología $\mathcal{T}_d$, si todo elemento de $\mathcal{T}_d$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Proposición 2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si A es un conjunto abierto en X y C es conjunto cerrado en X, entonces $A \setminus C$ es un conjunto abierto en X y $C \setminus A$ es un conjunto cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto abierto en X y C es un conjunto cerrado en X. Veamos que $A \setminus C$ es un conjunto abierto en X. Notemos que $A \setminus C = A \cap (X \setminus C)$, como C es cerrado en X entonces $X \setminus C$ es abierto en X, luego $A \cap (X \setminus C)$ es abierto en X por ser intersección de conjuntos abiertos; así $A \setminus C$ es abierto en X.
Por otro lado $C \setminus A = C \cap (X \setminus A)$, como A es abierto en X, entonces $X \setminus A$ es cerrado en X, luego $C \cap (X \setminus A)$ es cerrado en X. Por lo tanto $C \setminus A$ es cerrado en X. □

Definición 2.5. *Si (X,d) es un espacio métrico y $Y \subset X$, la métrica inducida en Y es $d|_{(Y \times Y)}$. Así $(Y, d|_{(Y\times Y)})$ es un espacio métrico y se llama un* ***subespacio métrico*** *de (X,d).*

Por ejemplo, el espacio métrico de los números irracionales, $\mathbb{P}$ con la métrica del valor absoluto, restringida a $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$, es un subespacio métrico del espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica usual. De igual modo, el espacio métrico usual de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$. En ambos conjuntos $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ existen muchos conjuntos que son cerrabiertos; estos conjuntos juegan un papel muy importante en estos espacios.

Sean (X,d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Si $y \in Y$ y $r > 0$, $N_Y(y,r)$ denota la vecindad básica de y en el espacio $(Y, d|_{(Y\times Y)})$ y $N_X(y,r)$ denota la vecindad básica de y en X. Entonces $N_Y(y,r) = N_X(y,r) \cap Y$.

Más aún, si $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_d$ de X, entonces $\mathcal{B}|_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_{d|_{(Y\times Y)}}$. De hecho, se tiene el siguiente conocido resultado:

Proposición 2.6. *Sean (X,d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Entonces, un conjunto $A \subset Y$ es **abierto en** $(Y, d|_{(Y\times Y)})$ (respectivamente **cerrado en** $(Y, d|_{(Y\times Y)})$) si, y sólo si existe un conjunto abierto (respectivamente cerrado) $U \in X$ tal que $A = U \cap Y$.*

Si $A \subset Y \subset X$, entonces A puede ser abierto (o cerrado) en Y sin ser abierto (o cerrado) en X.

Ejemplo 2.7. *Si $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$ entonces $A = (a,b) \cap \mathbb{P}$ es ABC en $\mathbb{P}$, pero no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.*

Veamos que A es ABC en $\mathbb{P}$. Notemos que (a,b) es abierto en $\mathbb{R}$ y que $[a,b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$. De donde $A = (a,b) \cap \mathbb{P}$ es abierto en $\mathbb{P}$ y $[a,b] \cap \mathbb{P} = (a,b) \cap \mathbb{P} = A$ es cerrado en $\mathbb{P}$. Ahora veamos que A no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$. Fijemos $x \in A$; si A fuera abierto en $\mathbb{R}$, existiría un intervalo abierto, digamos $(y-r, y+r)$, con $x \in (y-r, y+r) \subset A$; pero existe al menos un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (y-r, y+r)$, lo cual implica que $(y-r, y+r) \not\subseteq A$. De donde A no es abierto en $\mathbb{R}$. Por último, supongamos que A es cerrado en $\mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R}\setminus A = \mathbb{R}\setminus[(a,b)\cap\mathbb{P}] = [\mathbb{R}\setminus(a,b)]\cup\mathbb{Q}$ es abierto en $\mathbb{R}$. Fijemos $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset [\mathbb{R}\setminus(a,b)]\cup\mathbb{Q}$ y $(a, a+r) \subset (a,b)$. Sea $x \in \mathbb{P}$ con $x \in (a, a+r)$. Es claro que $x \in [\mathbb{R}\setminus(a,b)]\cup\mathbb{Q}$ pero también $x \in (a,b)\cap\mathbb{P}$ lo cual es imposible. Se infiere que $\mathbb{R}\setminus A$ no es abierto en $\mathbb{R}$ y por consiguiente A no es cerrado en $\mathbb{R}$

Definición 2.8. *Sea (X,d) un espacio métrico.*

*(i) Un conjunto $D \subset X$ se llama **denso** en X si todo conjunto abierto no vacío de X contiene un elemento de D.*

*(ii) X es **separable** si X tiene un conjunto denso numerable.*

*(iii) X es **segundo numerable** si tiene una base numerable.*

*(iv) X es de **Lindelöf** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*

$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual. En efecto, sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$; tenemos que $\mathbb{Q} \cap A \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}$ con la topología usual es separable, pues $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ con la topología usual es segundo numerable; basta considerar la familia $\mathcal{B} = \{(a, b) : a,\ \ b \in \mathbb{Q}\}$, la cual es una base numerable para $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ con la topología usual es de Lindelöf, como se deducirá del lema 2.21.

Por las observaciones que hicimos después de la Definición 2.5, la familia $\mathcal{B} = \{(a, b) \cap \mathbb{P} : a \text{ y } b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es base numerable para la topología de $\mathbb{P}$.

Lema 2.9. *Si D es un conjunto denso numerable de un espacio métrico (X, d), entonces $\mathcal{B} = \{N(p, 1/n) : p \in D, n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para la topología $\mathcal{T}_d$.*

Demostración. Sean A un conjunto abierto en X y $x \in A$; existe $r > 0$ para el cual $N(x, r) \subset A$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{r}{2}$. $N(x, 1/n)$ es un conjunto abierto y como $x \in \overline{D}$, existe p tal que $p \in D \cap N(x, 1/n)$. Así $d(x, p) < \dfrac{1}{n}$, por lo que $x \in N(p, 1/n)$. Por otro lado $p \in D$ de donde $N(p, 1/n) \in \mathcal{B}$. Resta demostrar que $N(p, 1/n) \subset A$. Sea $z \in N(p, 1/n)$, entonces $d(z, p) < \dfrac{1}{n}$. De modo que $d(z, x) \leq d(z, p) + d(p, x) < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} < \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2}$, es decir, $d(z, x) < r$, esto implica que $z \in N(x, r)$. Se deduce que $x \in N(p, 1/n) \subset N(x, r) \subset A$. Esto demuestra que $\mathcal{B}$ es una base para una topología para $\mathcal{T}_d$ de X.
Ahora para cada $d \in D$, sea $\mathcal{B}_d = \{N(d, 1/m) : m \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_d : n \in D\}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es unión numerable de conjuntos numerables. Hemos demostrado que $\mathcal{B}$ es una base numerable para $\mathcal{T}_d$. Por lo tanto X es segundo numerable. $\square$

Proposición 2.10. *Un espacio métrico es separable si, y sólo si es segundo numerable.*

Demostración. La necesidad es el lema anterior. Demostremos la suficiencia. Supongamos que (X, d) tiene una base numerable, $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, para la topología en τ_d. Fijemos $x_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; D es numerable. Veamos que D es denso. Sean $x \in X$ y A un conjunto abierto para el cual $x \in A$; existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset A$, es decir existe $x_n \in B_n$ tal que $x_n \in A$. Como $x_n \in D$, tenemos que $D \cap A \neq \emptyset$. Hemos demostrado que X es separable. $\square$

El estudio de los números irracionales implica la consideración de espacios que son idénticos en el sentido topológico al espacio de los números irracionales (por ejemplo, el espacio de Baire considerado en la próxima sección). Recordamos el concepto básico de homeomorfismo, que es la noción precisa de idéntico en el sentido topológico.

Definición 2.11. *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *espacios métricos y* $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *una función. Decimos que* f *es* ***continua*** *si* $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ *es un conjunto abierto en* X *para cada conjunto abierto* $V \subset Y$.

Definición 2.12. *Una función* $h : X \longrightarrow Y$ *se llama* ***homeomorfismo*** *(entre dos espacios métricos* (X, d) (Y, ρ) *) si cumple :*

(i) h *es biyección*

(ii) h *es continua*

(iii) h^{-1} *es continua*

También decimos que X *y* Y *son* ***homeomorfos*** *o* X *es* ***homeomorfo*** *a* Y *o* Y *es* ***homeomorfo*** *a* X *si existe un homeomorfismo* $h : X \longrightarrow Y$.

Ejemplo 2.13. *Sean* $X = (a, b)$ $Y = (c, d)$ *dos intervalos abiertos en* $\mathbb{R}$*, con la métrica usual, entonces* X *y* Y *son homeomorfos*

En efecto la función $h : X \longrightarrow Y$ definida por $h(x) = m(x - b) + d$ para cada $x \in X$, donde $m = \frac{d-c}{b-a}$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.14. *El espacio* $\mathbb{R}$ *es homeomorfo al intervalo abierto* $(-1, 1)$ *(y por tanto* $\mathbb{R}$ *es homeomorfo a todo intervalo abierto por 2.13)*

Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ definida por $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$, para cada x en $\mathbb{R}$. Para demostrar que h^{-1} es continua, notemos que $h^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $h^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, para cada x en $(-1, 1)$. Para una demostración alternativa, usar la función $\arctan x$ que manda a $\mathbb{R}$ sobre $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Una propiedad se llama *invariante bajo homeomorfismos* o *invariante topológica* si, para cualesquiera dos espacios homeomorfos, uno tiene la propiedad si, y sólo si el otro también tiene dicha propiedad. Hablando intuitivamente, una propiedad que puede establecerse en términos de conjuntos abiertos, sin mencionar la métrica, es un invariante topológico. Dos invariantes topológicos son: la compacidad y la separabilidad. Un ejemplo de una propiedad que no es un invariante topológico es la acotación, pues $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos, pero sólo uno es acotado.

Definición 2.15. *Si* X *es un conjunto* φ *y* ψ *son métricas en* X*, decimos que* φ *y* ψ *son* ***topológicamente equivalentes*** *si* $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_\psi$*, en otras palabras, si la función identidad en* X*,* $id_X : (X, \varphi) \to (X, \psi)$ *es un homeomorfismo.*

2.2. Dos nociones de dimensión cero

Concluimos este capítulo con una breve discusión de dos nociones de dimensión cero en espacios métricos. Primero recordaremos algunas definiciones.

Definición 2.16. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ dos familias de subconjuntos de X.*

*(i) Decimos que $\mathcal{V}$ **refina** a $\mathcal{U}$ (o que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{U}$) si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$ y cubre el mismo conjunto que $\mathcal{U}$, es decir, $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.*

*(ii) Decimos que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento abierto** de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$ y para cada V en $\mathcal{V}$, V es un conjunto abierto de X.*

*(iii) Una familia $\mathcal{U}$ se llama **ajena dos a dos**, si para cada U y $U' \in \mathcal{U}$, con $U \neq U'$, se tiene $U \cap U' = \emptyset$.*

Ejemplo 2.17. *La familia $\mathcal{U} = \{(n, n+1) \cap \mathbb{P} : n \text{ es un entero}\}$ es un ejemplo de una cubierta de conjuntos ABC, ajena dos a dos, de los números irracionales.*

En efecto, hemos visto que $(a, b) \cap \mathbb{P}$ tal que $a, b \in \mathbb{Q}$ es un conjunto ABC en $\mathbb{P}$, puesto que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ es claro que $(n, n+1) \cap \mathbb{P}$ es ABC para toda $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{P}$.
[$\supseteq$] Fijemos $x \in \bigcup \mathcal{U}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in (n, n+1) \cap \mathbb{P}$, esto implica que $x \in \mathbb{P}$.
[$\supseteq$] Sea $x \in \mathbb{P}$ y tomemos $n = \sup\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$

La familia $\mathcal{V} = \{(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}) \cap \mathbb{P} : n \text{ es un entero}\}$ es un ejemplo de una cubierta de conjuntos ABC, ajena dos a dos, tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$.

Definición 2.18. *Dado un espacio métrico (X, d). Diremos que (X, d):*

*(i) Es **cero dimensional** si para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, existe un conjunto ABC, U, tal que $x \in U \subset N(x, r)$.*

*(ii) Tiene **dimensión de cubierta cero** si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una cubierta abierta, ajena dos a dos, $\mathcal{V}$, de X tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$.*

Observación: Un espacio métrico (X, d) es cero dimensional, si y sólo si su topología $\mathcal{T}_d$ tiene una base formada por conjuntos ABC.

Proposición 2.19. *Todo espacio métrico (X, d) con dimensión de cubierta cero es cero dimensional.*

Demostración. Fijemos $x_0 \in X$ y $r > 0$. Consideremos la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{N(x, r/2) : x \in X\}$ de X; por hipótesis existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X, ajena dos a dos, que refina a $\mathcal{U}$. Como $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ existe $V_0 \in \mathcal{V}$ tal que $x_0 \in V_0$.

Además existe un $x_1 \in X$ para el cual $x_0 \in V_0 \subseteq N(x_1, r/2)$, puesto que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$. Como $x_0 \in N(x_1, r/2)$, entonces $d(x_0, x_1) < \frac{r}{2}$. Afirmamos que $N(x_1, r/2) \subset N(x_0, r)$; en efecto, si $y \in N(x_1, r/2)$ entonces $d(x_0, y) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, de donde $y \in N(x_0, r)$, por consiguiente $N(x_1, r/2) \subset N(x_0, r)$. Por lo que $x_0 \in V_0 \subset N(x_0, r)$
Sólo falta ver que V_0 es cerrado. Notemos que $X \backslash V_0 = \bigcup_{V \in \mathcal{V} \backslash \{V_0\}} V$ es un abierto en X entonces V_0 es cerrado. Hemos demostrado que todo espacio con dimensión de cubierta cero es cero dimensional. □

El inverso de la proposición 2.19 no se cumple. John Kulesza en [7] dió un ejemplo de un espacio métrico que es cero dimensional pero no tiene dimension de cubierta cero.

En vista de la Proposición 2.19, es más sencillo verificar si un espacio es cero dimensional, que si tiene dimensión de cubierta cero. Por ejemplo, los números irracionales y los números racionales, con su métrica usual, son cero dimensionales. En efecto, fijemos $x \in \mathbb{P}$ y $r > 0$. Notemos que para $x \in (y - r, y + r)$ existen p y $q \in \mathbb{Q}$ tales que $y - r < p < x < q < y + r$ (puesto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Consideremos $N = N(x, r) \cap \mathbb{P} = (y - r, y + r) \cap \mathbb{P}$, un abierto en $\mathbb{P}$; el conjunto $P = (p, q) \cap \mathbb{P}$ está contenido en N y hemos visto que P es un conjunto ABC en $\mathbb{P}$. En resumen $x \in P \subset N$. Esto demuestra que $\mathbb{P}$ es cero dimensional. Similarmente se demuestra que $\mathbb{Q}$ es cero dimensional. Ahora daremos una caracterización para ver que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ tienen dimensión de cubierta cero.

Lema 2.20. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $Y \subseteq X$. *Si* X *es separable entonces* Y *es separable.*

Demostración. Supongamos que X es separable, entonces X es segundo numerable. Sean $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ base numerable para la topología $\mathcal{T}_d$. Afirmamos que la familia $\mathcal{B}' = \{B_n \cap Y : B_n \in \mathcal{B}\}$ es base numerable para una topología en Y. Fijemos $y \in Y$ y $A = U \cap Y$ un conjunto abierto en Y con $y \in A$, como U es un conjunto abierto en X, existe un B_n en $\mathcal{B}$ tal que $y \in B_n \subset U$, por lo que $y \in B_n \cap Y \subset A$. Esto demuestra que $\mathcal{B}'$ es una base numerable para Y, así Y es segundo numerable. Hemos demostrado que Y es separable. □

Lema 2.21. (X, d) *es segundo numerable si, y sólo si* (X, d) *es de Lindelöf.*

Demostración. Demostremos la necesidad. Supongamos que X es segundo numerable. Sean $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ base numerable para la topología $\mathcal{T}_d$ de X y $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta de X. Para cada x en X seleccionemos $\lambda_x \in \Lambda$ y $n_x \in \mathbb{N}$ tales que $x \in B_{n_x} \subseteq A_{\lambda_x}$. Sea $N := \{n_x : x \in X\}$ como $N \subseteq \mathbb{N}$, es numerable. Ahora bien, si $m \in N$, existe $x_m \in X$ tal que $m = n_{x_m}$. Definamos la función $\varphi : N \longrightarrow \Lambda$ tal que $\varphi(m) = \lambda_{x_m}$ y sea $\Lambda_0 := \varphi(N)$.

Por consiguiente, $|\Lambda_0| = |\varphi(N)| \leq |N| \leq \aleph_0$ y para cada $m \in N$ tenemos que $B_m = B_{n_{x_m}} \subseteq A_{\lambda_{x_m}} = A_{\varphi(m)}$.

Demostraremos que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda$. Fijemos $x \in X$, entonces $x \in B_{n_x} \subseteq A_{\lambda_x}$ como $n_x \in N$, entonces $x \in B_{n_x} \subseteq A_{\varphi(n_x)} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda$. Por otro lado es claro que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda \subseteq X$. Hemos demostrado que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda$. Por lo tanto X es de Lindelöf.

La suficiencia. Supongamos que X es de Lindelöf. Para todo n en $\mathbb{N}$ sea $\mathcal{U}_n = \{N(x, 1/n); x \in X\}$. Como $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de X existe una subcubierta numerable $\mathcal{V}_n$ de $\mathcal{U}_n$. La familia $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es unión de familias numerables y por tanto numerable. Verifiquemos que es base para la topología $\mathcal{T}_d$ de X. Sean x en X y A un conjunto abierto en X con x en A. Existe $r > 0$ tal que $x \in N(x, r) \subseteq A$. Tomemos n en $\mathbb{N}$ para el cual $\frac{1}{n} < \frac{r}{4}$. Como $\mathcal{V}_n$ es una cubierta abierta de X existe V en $\mathcal{V}_n$ tal que x pertenece a V. Por la definición de $\mathcal{U}_n$, existe y en X tal que $V = N(y, 1/n)$. Fijemos z en V; puesto que $d(y, x) < \frac{1}{n}$ y $d(y, z) < \frac{1}{n}$ tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < r.$$

Por lo tanto $x \in V \subseteq N(x, r) \subset A$. Esto demuestra que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_d$ de$X$. Hemos demostrado que X es segundo numerable. $\square$

Lema 2.22. *Si (X, d) es segundo numerable, entonces toda base para la topología $\mathcal{T}_d$ de (X, d) generada por la métrica d, contiene un subconjunto numerable que también es base para la topología $\mathcal{T}_d$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \omega\}$ una base numerable para la topología $\mathcal{T}_d$ del espacio X. Para $i \in \omega$ definimos $\mathcal{B}_i = \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq B_i\}$. Como $\mathcal{B}$ es una base, tenemos que $\bigcup_{i \in \omega} \mathcal{B}_i = B_i$.

Como X es segundo numerable entonces cada subespacio B_i es segundo numerable y por tanto Lindelöf, de modo que la cubierta abierta $\mathcal{B}_i$ de B_i contiene una subcubierta numerable $\mathcal{B}_{0,i}$. La familia $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{B}_{0,i}$ es numerable y es una base para la topología $\mathcal{T}_d$ de X. En efecto fijemos $x \in X$ y A un abierto en X con $x \in A$; entonces existe $i \in \omega$ tal que $x \in B_i \subseteq A$. Luego existe $B_{0,i} \in \mathcal{B}_{0,i}$ tal que $x \in B_{0,i} \subseteq B_i \subseteq A$, esto implica que $B_{0,i} \in \mathcal{B}_0$ y $x \in B_{0,i} \subseteq A$. Por lo que $\mathcal{B}_0$ es una base para la topología $\mathcal{T}_d$ de X y es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. $\square$

Corolario 2.23. *Todo espacio métrico (X, d) cero dimensional y separable tiene una base numerable de conjuntos ABC para la topología $\mathcal{T}_d$ de X. En particular $\mathbb{P}$ tiene tal base.*

Demostración. Como la topología $\mathcal{T}_d$ de (X, d) tiene una base $\mathcal{B}$ formada por conjuntos ABC, entonces existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, numerable tal que $\mathcal{B}'$ también es base para $\mathcal{T}_d$ de (X, d). $\square$

Teorema 2.24. *Si (X, d) es un espacio métrico separable, entonces (X, d) es cero dimensional si, y sólo si (X, d) tiene dimensión de cubierta cero. En particular $\mathbb{P}$ tiene dimensión de cubierta cero.*

Demostración. Por la Proposición 2.19, sólo resta demostrar que si (X, d) es cero dimensional y separable, entonces tiene dimensión de cubierta cero. Por el Corolario 2.23, X tiene una base numerable $\mathcal{B}$ de conjuntos ABC. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y

$$\mathcal{W} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset U \ \ para \ \ un \ \ U \in \mathcal{U}\}$$

Puesto que $\mathcal{W}$ es numerable, pongamos $\mathcal{W} = \{B_n : n \in \omega\}$; es claro que $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, pero no es necesariamente ajena dos a dos. Definimos una sucesión de conjuntos abiertos por inducccción: Fijemos $V_0 = B_0$, y para $n \geq 1$ $V_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} B_i$. Afirmamos que $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ es una familia, ajena dos a dos, de conjuntos abiertos (y cerrados), cada uno de los cuales está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$. Para completar la demostración necesitamos ver que $\mathcal{V}$ cubre a X, y en efecto para cada $x \in X$ existe el mínimo $n \in \omega$ tal que $x \in B_n$ esto implica que $x \in V_n$. Hemos demostrado que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto, ajeno dos a dos y por lo tanto tiene dimensión de cubierta cero. $\square$

Capítulo 3

ESPACIO DE BAIRE Y ULTRAMÉTRICAS

Un espacio importante que es homeomorfo a los números irracionales $\mathbb{P}$ es el espacio de Baire $\mathbb{B}_1$. Puesto que podemos definir al espacio $\mathbb{B}_1$, por medio de una ultramétrica, estudiamos estas métricas en detalle. En particular, damos una caracterización topológica de las ultramétricas.

3.1. El espacio de Baire

Recordemos que ω denota al primer ordinal infinito. Sean A un conjunto no vacío y n en ω. Denotamos por A^n al conjunto de todas las sucesiones finitas $s = (s(0), ..., s(n-1)) = (s_0, ..., s_{n-1})$ de A de longitud n. La longitud de una sucesión finita n es denotada por $long(s)$. Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, denotamos $s|m = (s_0, ..., s_{m-1})$. Si s y t son sucesiones finitas de A, decimos que s es un *segmento inicial* de t y t es una *extensión* de s, si $s = t|m$ para algún $m \leq long(t)$ y lo denotamos por $s \subseteq t$. Dos sucesiones finitas son *compatibles* si una es un segmento inicial de la otra e *incompatibles* de otro modo. Usamos $s \perp t$ para indicar que s y t son incompatibles. Finalmente

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$$

es el conjunto de todas las sucesiones finitas de A. Sea A^ω el conjunto de todas las sucesiones $x = x((n)) = (x_n)$ de A. Si $x \in A^\omega$ y $n \in \omega$, $x|n = (x_0, ..., x_{n-1}) \in A^n$. Decimos que $s \in A^n$ es un segmento inicial de $x \in A^\omega$ si $s = x|n$. Escribimos $s \subseteq x$ si s es un *segmento inicial* de x.

ω^ω es el conjunto de todas las funciones $f : \omega \longrightarrow \omega$. Podemos considerar un punto en $f \in \omega^\omega$ como una sucesión de enteros no negativos $f = (f_0, ..., f_n, ...)$.

Definición 3.1. *Para* f *y* $g \in \omega^\omega$ *con* $f \neq g$, $k_1(f,g) :=$ *mín* $\{n \in \omega : f_n \neq g_n\}$ *y*

$$\varphi_1(f,g) := \begin{cases} \frac{1}{k_1(f,g)+1} & si \quad f \neq g \\ 0 & si \quad f = g \end{cases}$$

Lema 3.2. *La función* φ_1 *es una métrica en* ω^ω.

Demostración. Por definición, para cada f y $g \in \omega^\omega$, tenemos $\varphi_1(f,g) \geq 0$ y $\varphi_1(f,g) = 0$, si y sólo, si $f = g$.

Si f y $g \in \omega^\omega$ entonces $\varphi_1(f,g) = \frac{1}{k_1(f,g)+1} = \frac{1}{k_1(g,f)+1} = \varphi_1(g,f)$ ésto demuestra la simetría.

Resta demostrar que $\varphi_1(f,h) \leq \varphi_1(f,g) + \varphi_1(g,h)$. De hecho demostraremos que

$$\varphi_1(f,h) \leq \ max\{\varphi_1(f,g), \varphi_1(g,h)\}$$

Fijemos f y $g \in \omega^\omega$. Si $f = h$, $f = g$ o $g = h$, ésto es trivial. Supongamos que $f \neq g$, $f \neq h$ y $g \neq h$. Sean $k_1(f,h) = n$, $k_1(f,g) = m$ y $k_1(g,h) = q$. Es suficiente demostrar que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1}$ o $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{q+1}$; o equivalentemente, que $m \leq n$ o $q \leq n$. Supongamos que $m > n$; entonces $f_n = g_n$, como $k_1(f,h) = n$ tenemos que $h_n \neq f_n = g_n$. Pero esto diría que $k_1(g,h) \leq n$, puesto que n es el mínimo en ω que hace $h_n \neq g_n$. Así, $q \leq n$. □

Definición 3.3. *El espacio métrico* $\mathbb{B}_1 = (\omega^\omega, \varphi_1)$, *donde* φ_1 *está definida como en 3.5, se llama el* ***espacio de Baire***

Para cada $n \in \omega$, ω^n denota al conjunto de todas las funciones de n en ω, y $\omega^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$. Para cada $\sigma \in \omega^n$, $[\sigma] := \{f \in \omega^\omega : \sigma \subset f\}$. En el siguiente lema demostraremos que las vecindades básicas en $\mathbb{B}_1$ son los mismos conjuntos $[\sigma]$. Estos conjuntos $[\sigma]$, forman la base natural para la topología producto en $\mathbb{B}_1$. Podemos considerar a ω como un espacio topológico con la topología discreta, es decir, la topología en la cual todo subconjunto de ω es abierto. Este espacio es metrizable con la métrica $d(n,m) = 1$ si $n \neq m$ y $d(n,m) = 0$ si $n = m$. Por lo tanto ω^ω, visto como espacio producto, es metrizable por la métrica φ_1. Una base para una topología de ω^ω consiste de todos los conjuntos

$$N_f = \{g \in \omega^\omega : f \subseteq g\}$$

donde $f \in \omega^{<\omega}$. Esto demuestra que $\mathbb{B}_1$ es la potencia de Tychonoff ω^ω.

Para $f \in \omega^\omega$ y $m \in \omega$, usamos la notación $[f|m] = \{g \in \omega^\omega : f|m \subseteq g\}$, así $f|m \in \omega^m$.

Lema 3.4. *Sean $f \in \omega^\omega$ y $r > 0$. Si $r > 1$, entonces en $\mathbb{B}_1$, $N(f,r) = \omega^\omega$. Si $r \leq 1$, entonces $N(f,r) = [f|m-1]$, donde $m \geq 2$ es el mínimo en ω tal que $\frac{1}{m} < r \leq \frac{1}{m-1}$.*

Demostración.

Sabemos que $[f|m-1] = \{g \in \omega^\omega : (f_0, ..., f_{m-2}) \subseteq (g_0, ..., g_{m-2}, ...)\}$.

Fijemos $f \in \omega^\omega$ y $1 < r$. Veamos que $N(f,r) = \omega^\omega$.
[$\subseteq$] Es trivial puesto que si $g \in N(f,r)$ se tiene que $g \in \omega^\omega$ por definición. Tenemos que $N(f,r) \subseteq \omega^\omega$
[$\supseteq$] Si $g \in \omega^\omega$ entonces $\varphi_1(f,g) \leq 1 < r$. Por lo tanto $g \in N(f,r)$. Así $\omega^\omega \subseteq N(f,g)$. Hemos demostrado que si $r > 1$, entonces $N(f,r) = \omega^\omega$

Fijemos $f \in \omega^\omega$ y $r \leq 1$. Veamos que $N(f,r) = [f|m-1]$.
[$\subseteq$] Sea $g \in N(f,r)$ entonces $\varphi_1(f,g) < r$. Tenemos dos casos :

(i) Si $f = g$, entonces $g = f \in [f|m-1]$.

(ii) Si $f \neq g$, entonces $\varphi_1(f,g) = \frac{1}{k_1(f,g)+1} < r \leq \frac{1}{m-1}$; esto implica que $m-1 < k_1(f,g)+1$. Luego $m-2 < k_1(f,g)$. Esto significa que para todo $i \in \{0, ..., m-2\}$ $g_i = f_i$, por lo que $f|m-1 \subseteq g$ y por lo tanto $g \in [f|m-1]$. De modo que $N(f,r) \subseteq [f|m-1]$.

[$\supseteq$] Sea $g \in [f|m-1]$ entonces $f|m-1 \subseteq g$. Nuevamente dos casos:

(i) Si $f = g$ entonces $g \in N(f,r)$.

(ii) Si $f \neq g$, entonces $k_1(f,g) \geq m-1$, de donde $k_1(f,g)+1 \geq m$, así $\frac{1}{k(f,g)+1} \leq \frac{1}{m} < r$. Luego $\varphi_1(f,g) < r$. Por lo que $g \in N(f,r)$. Por consiguiente $[f|m-1] \subseteq N(f,r)$. Hemos demostrado que si $r \leq 1$, entonces $N(f,r) = [f|m-1]$
□

Queremos obtener una representación diferente del espacio de Baire (es decir otro espacio métrico homemorfo a él). $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ denota al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathbb{B}_2 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} = \{(z,h) : z \in \mathbb{Z},\ \ h \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}) \tag{3.1}$$

Un punto $p \in \mathbb{B}_2$ puede considerarse como una sucesión $(p_0, ..., p_n, ...)$ tal que $p_0 \in \mathbb{Z}$ y $p_n \in \mathbb{N}$ para $n \geq 1$. Si $p \neq q$ in $\mathbb{B}_2$ y si $p = (p_0, ..., p_n, ...)$ y $q = (q_0, ..., q_n, ...)$, entonces $k_2(p,q) := \textit{mín}\ \{n \in \omega : p_n \neq q_n\}$

Definición 3.5. *Para p y $q \in \mathbb{B}_2$, definimos*

$$\varphi_2(p,q) = \begin{cases} \frac{1}{k_2(p,q)+1} & si \quad p \neq q \\ 0 & si \quad p = q \end{cases}$$

Lema 3.6. *La función φ_2 es una métrica en $\mathbb{B}_2$*

Demostración. La demostracion es análoga a la del Lema 3.2 $\square$

Recordemos que una isometría entre dos espacios métricos es una función $h : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ que preserva distancias, es decir, $d_1(x, y) = d_2(h(x), h(y))$ para todo x y $y \in X$.

Proposición 3.7. *Si $h : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ es una isometría entonces:*

(i) h es inyectiva.

(ii) h es continua.

(iii) La inversa de h es una isometría, si h es sobreyectiva.

Demostración.
(i) Supongamos que $h : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ es una isometría. Si $h(x) = h(y)$ resulta que $d_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) = 0$, de aquí $x = y$.

(ii)Supongamos que $h : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ es una isometría. Veamos que h es continua; fijemos $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Sea $\delta := \epsilon$; entonces $d_1(x, x_0) < \delta$ implica que $d_1(x, x_0) = d_2(h(x), h(x_0)) < \epsilon$. Por lo que h es continua.

(iii) Supongamos que $h : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ es una isometría sobreyectiva. Entonces h es biyectiva y tiene inversa $h^{-1} : (Y, d_2) \to (X, d_1)$.

Veamos que $h^{-1} : (Y, d_2) \longrightarrow (X, d_1)$ es isometría. Fijemos y_1 y $y_2 \in Y$; existen x_1 y $x_2 \in X$ tales que $h^{-1}(y_1) = x_1$ y $h^{-1}(y_2) = x_2$.
Notemos que $d_1(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) = d_1(x_1, x_2) = d_2(h(x_1), h(x_2)) = d_2(y_1, y_2)$, lo que demuestra que h^{-1} es una isometría. $\square$

La Proposición 3.7 demuestra que toda isometría sobreyectiva es un homeomorfismo, pero no todo homeomorfismo es una isometría.Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}^2$ las métricas $d_1(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ y $d_2(a, b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. La función identidad $h : (\mathbb{R}^2, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ es una isometría, sin embargo no es un homeomorfismo.

Teorema 3.8. *$\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ son homeomorfos*

Demostración. Sean $\phi : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $\psi : \omega \to \mathbb{N}$ funciones biyectivas. Usando la notación $f = (f_0, ..., f_n, ...)$ para un punto en $\mathbb{B}_1$, definimos $\Psi : \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ por

$$\Psi(f) = (\phi(f_0), \psi(f_1), ..., \psi(f_n), ...).$$

Por el resultado anterior, basta demostrar que Ψ es una isometría sobreyectiva. Veamos que Ψ es una isometría; fijemos f y $g \in \omega^\omega$ con $f \neq g$, y $p = \Psi(f)$, $q = \Psi(g)$ entonces $\Psi(f) = (\phi(f_0), \psi(f_1), ..., \psi(f_n), ...)$ y $\Psi(g) = (\phi(g_0), \psi(g_1), ..., \psi(g_n), ...)$. Sea $k_1(f, g) = n_0$. Tenemos que:

(1) Si $n_0 = 0$ entonces $f_0 \neq g_0$; se infiere que $\phi(f_0) \neq \phi(g_0)$; luego, $k_2(p, q) = 0$.

(2) Si $n_0 \neq 0$ entonces $f_{n_0} \neq g_{n_0}$ y $f_n = g_n$ para toda $n \in \omega$ tal que $n < n_0$. Luego $\phi(f_0) = \phi(g_0)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_0$ tenemos que $\psi(f_n) = \psi(g_n)$ y además $\psi(f_{n_0}) \neq \psi(g_{n_0})$. Se infiere que $k_2(p, q) = n_0$.

Por lo tanto si $k_1(f, g) = n_0$ entonces $k_2(p, q) = k_2(\Psi(f), \Psi(g)) = n_0$.

Con esto;

$$\varphi_2(p, q) = \varphi_2(\Psi(f), \Psi(g)) = \frac{1}{k_2(\Psi(f), \Psi(g)) + 1} = \frac{1}{k_1(f, g) + 1} = \varphi(f, g).$$

Esto demuestra que Ψ es una isometría.

Demostremos que Ψ es sobreyectiva, es decir, $\Psi(\mathbb{B}) = \mathbb{B}_2$. Es claro que $\Psi(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}_2$. Resta mostrar que $\mathbb{B}_2 \subseteq \Psi(\mathbb{B})$. Sea $p \in \mathbb{B}_2$ entonces $p = (p_0, p_1, ..., p_n, ...)$ donde $p_0 \in \mathbb{Z}$ y $p_i \in \mathbb{N}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $\phi^{-1}(p_0) \in \omega$ y $\psi^{-1}(p_i) \in \omega$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
Sea $f = (\phi^{-1}(p_0), \psi^{-1}(p_1), ..., \psi^{-1}(p_n), ...)$ aplicando Ψ a f obtenemos $\Psi(f) = (\phi(\phi^{-1}(p_0)), \psi(\psi^{-1}(p_1)), ..., \psi(\psi^{-1}(p_n)), ...) = (p_0, p_1, ..., p_n, ...)$. Se infiere que $\mathbb{B}_2 \subseteq \Psi(\mathbb{B})$. Por lo que $\mathbb{B}_2 = \Psi(\mathbb{B})$. Hemos demostrado que Ψ es sobreyectiva.
Por lo tanto Ψ es un homeomorfismo entre $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}_2$. □

En el siguiente capítulo, demostraremos que $\mathbb{B}_2$ (y por tanto $\mathbb{B}_1$) es homeomorfo a los números irracionales. Usaremos el hecho de que las métricas φ_1 y φ_2 son ultramétricas, pero antes diremos qué significa esto.

3.2. Ultramétricas

Definición 3.9. *Una métrica φ en un conjunto X se llama una **ultramétrica** (o una **métrica no Arquimediana**) en X, si φ satisface : para todo x, y y $z \in X$,*

$$\varphi(x, z) \leq \ max\{\varphi(x, y), \varphi(y, z)\}$$

(conocida como, la desigualdad fuerte del triángulo).
*(X, φ) se llama un **espacio ultramétrico** (o **espacio no Arquimediano**) si φ es una ultramétrica en X.*

La desigualdad fuerte del triángulo puede llamarse la "la desigualdad del triángulo isósceles" porque implica que entre los tres lados de un triángulo $\triangle xyz$ al menos dos tienen la misma longitud, donde por la longitud de los lados del triángulo $\triangle xyz$, entendemos los números $\varphi(x, y)$, $\varphi(y, z)$ y $\varphi(z, x)$. Más formalmente.

Proposición 3.10. *Si (X, d) es un espacio ultramétrico y $x, y, z \in X$, entonces por lo menos dos de los números reales $\varphi(x, y)$, $\varphi(x, z)$,$\varphi(y, z)$, coinciden.*

Demostración. Si $\varphi(x, z) \neq \varphi(y, z)$ entonces, podemos suponer que $\varphi(x, z) > \varphi(y, z)$. Por lo tanto $\varphi(x, y) \leq \text{máx}\{\varphi(x, z), \varphi(y, z)\} = \varphi(x, z)$
y $\varphi(x, z) \leq \text{máx}\{\varphi(x, y), \varphi(y, z)\} = \varphi(x, y)$
pues no se puede que $\varphi(x, z) \leq \varphi(y, z)$. Por lo que $\varphi(x, y) = \varphi(x, z)$. $\square$

La demostración de 3.2, (y, por analogía, la de 3.6) muestra que la métrica φ_1 definida en $\mathbb{B}_1$, y la métrica φ_2 definida en $\mathbb{B}_2$ son ultramétricas; por lo que $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ son espacios ultramétricos. Notemos que la métrica usual en $\mathbb{P}$ (el subespacio de los irracionales), no es una ultramétrica (por ejemplo, tomemos $x = \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$ y $z = 3 + \sqrt{2}$). Por la Proposición 3.10, $|\ \ |$ no es una ultramétrica en $\mathbb{P}$. Los siguientes resultados demuestran cuán interesante es una ultramétrica.

Teorema 3.11. *Sea (X, φ) un espacio ultramétrico. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) *Para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, $N(x, r)$ es un conjunto ABC.*

(ii) *Si $N(x, r) \cap N(y, s) \neq \emptyset$ y $r \leq s$, entonces $N(x, r) \subseteq N(y, s)$. (Si dos vecindades básicas tienen un punto en común, entonces una está contenida dentro de la otra)*

(iii) *Si $N(x, r) \cap N(y, r) \neq \emptyset$, entonces $N(x, r) = N(y, r)$*

(iv) *Si $y \in N(x, r)$, entonces $N(x, r) = N(y, r)$. (Cada punto en una vecindad básica puede tomarse como su centro)*

(v) *Sea $S(y, r) = \{x \in X : \varphi(x, y) \leq r\}$. Si $x \in S(y, r)$ entonces $N(x, r) \subset S(y, r)$.*

(vi) *Cada intersección finita no vacía de vecindades básicas es una vecindad básica.*

(vii) *Todo conjunto abierto es unión de una familia de vecindades básicas ajenas dos a dos.*

(viii) *Cualquier unión de vecindades básicas del mismo radio es ABC.*

Demostración.
(i) Sabemos que $N(x, r)$ es un conjunto abierto. Para ver que $N(x, r)$ es cerrado, demostraremos que $X \setminus N(x, r)$ es abierto. Fijemos $y \in X \setminus N(x, r)$; entonces

$\varphi(x,y) \geq r$. Afirmamos que $N(x,r) \cap N(y,r) = \emptyset$. Si esto no es cierto, entonces existe un $z \in N(x,r) \cap N(y,r)$; por lo que $\varphi(z,x) < r$ y $\varphi(z,y) < r$. Por la desigualdad fuerte del triángulo tenemos

$$r \leq \varphi(x,y) \leq \; max\{\varphi(x,z), \varphi(z,y)\} < r$$

Pero esto es una contradicción. Por consiguiente $N(x,r) \cap N(y,r) = \emptyset$ y con ello $N(y,r) \subseteq X \setminus N(x,r)$. Se ha demostrado que $N(x,r)$ es cerrado.

(ii) Supongamos que $p \in N(x,r) \cap N(y,s)$ y $r \leq s$. Fijemos $z \in N(x,r)$; entonces $d(x,z) < r$. Notemos que $d(y,p) < s$ y $d(z,p) < r$ puesto que $d(z,p) \leq \max\{d(z,x), d(x,p)\} < r$. Luego $d(z,y) \leq \max\{d(z,p), d(p,y)\} < s$. ésto implica que $z \in N(y,s)$. Hemos demostrado que $N(x,r) \subseteq N(y,s)$.

(iii) y (iv) Se sigue inmediatamente del inciso (ii) (Como $r \leq r$ se sigue que $N(x,r) \subseteq N(y,r)$ y $N(y,r) \subseteq N(x,r)$).

(v) Supongamos que $x \in S(y,r) = \{x \in X : d(x,y) \leq r\}$. Fijemos $z \in N(x,r)$; entonces $d(z,x) < r$. Como $d(z,y) \leq \max\{d(z,x), d(x,y)\} \leq r$, tenemos que $d(z,y) \leq r$, por lo que $z \in S(y,r)$. Hemos demostrado que si $x \in S(y,r)$ entonces $N(x,r) \subset S(y,r)$.

(vi) Sea $\{N(x_i,r_i) : x_i \in X \;\; y \;\; r_i > 0, i \in \{1,...,n\}\}$ una familia de vecindades básicas. Pongamos $N = \bigcap_{i=1}^{n} N(x_i,r_i)$. Si $N \neq \emptyset$, fijemos $y \in N$; se infiere que $y \in N(x_i,r_i)$ para toda $i \in \{1,...,n\}$, por (iv) tenemos que $N(x_i,r_i) = N(y,r_i)$, de donde $N = \bigcap_{i=1}^{n} N(y,r_i)$. Sea $r = \min\{r_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ entonces, por (ii) $N(y,r) \subset N(y,r_i)$ para toda $i \in \{1,...,n\}$, por lo que $N(y,r) \subset N$. Es claro que $N \subset N(y,r)$. Por lo tanto $N = N(y,r)$. Esto demuestra que N es una vecindad básica.

(vii) Sean $U \in \mathcal{T}_d$, $x \in U$ y $A_x = \{n \in \mathbb{N} : N(x,1/n) \subseteq U\}$. $A_x \neq \emptyset$ pues como $U \in \tau_\varphi$, existe $r > 0$ tal que $N(x,r) \subseteq U$. Pero por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$, así que $N(x,1/n) \subseteq N(x,r) \subseteq U$. Por lo tanto $A_x \neq \emptyset$. Por el principio del Buen Orden, existe $i(x) := mín\ A_x$. Como $i(x) \in A_x$, entonces $N(x,1/i(x)) \subseteq U$.

Así, $U = \bigcup_{x\in U} N(x,1/i(x))$. Demostraremos que si x e $y \in U$ entonces

$$N(x,1/i(x)) \neq N(y,1/i(y))$$

implica que

$$N(x, 1/i(x)) \cap N(y, 1/i(y)) = \emptyset.$$

O equivalentemente, que

$$N(x, 1/i(x)) \cap N(y, 1/i(y)) \neq \emptyset,$$

implica

$$N(x, 1/i(x)) = N(y, 1/i(y)).$$

Supongamos entonces que $N(x, 1/i(x)) \cap N(y, 1/i(y)) \neq \emptyset$. Fijemos $z \in N(x, 1/i(x)) \cap N(y, 1/i(y))$; sin pérdida de generalidad $\dfrac{1}{i(x)} \leq \dfrac{1}{i(y)}$ y entonces $N(x, 1/i(x)) \subseteq N(y, 1/i(y))$ así, $x \in N(y, 1/i(y))$, por lo que, $N(x, 1/i(y)) = N(y, 1/i(y))$. Así, U es unión de vecindades básicas ajenas dos a dos.

$(viii)$ Sea $U = \displaystyle\bigcup_{i \in I} N(x_i, r)$ con $x_i \in X$ y $U \neq X$. Es claro que U es abierto por ser unión de abiertos.
Veamos que U es cerrado en X, es decir, $U = \overline{U}$.

Fijemos $p \in \overline{U}$, entonces $N(p, r) \cap U \neq \emptyset$, existe $i_0 \in I$ tal que $N(p, r) \cap N(x_{i_0}, r) \neq \emptyset$, de donde $N(p, r) = N(x_{i_0}, r)$; luego $p \in N(x_{i_0}, r)$ y por consiguiente $p \in U$. Así $\overline{U} \subset U$. Por lo tanto $U = \overline{U}$. Hemos demostrado que cualquier unión de vecindades básicas del mismo radio es ABC. $\square$

3.3. Ejemplos de Ultramétricas

Daremos un par de ejemplos de espacios ultramétricos. El primero es un ejemplo que surge de manera muy natural en la teoría de valuación; sin embargo la ultramétrica llamada distancia p-ádica, no induce la topología usal en $\mathbb{Q}$ (ver [2]).

Recordemos que, entre las propiedades de la función valor absoluto $|\ | : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ están las siguientes:

(i) $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = y$.

(ii) $|xy| = |x||y|$.

(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (desigualdad del triángulo).

Ahora construiremos una función de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ que satisfece estas condiciones. En realidad esta función va a satisfacer la desigualdad fuerte del triángulo. En vez de pesar el número racional x de acuerdo a su valor numerico $|x|$, ahora vamos a pesarlo en un cierto sentido de acuerdo con la presencia de un número primo fijo, p.

Sea $c \in \mathbb{R}$, donde $0 < c < 1$; c será fijo. También sea p un número primo fijo. Si x es cualquier número racional distinto de cero. Podemos escribir a x en la forma:

$$x = p^{\alpha} \frac{a}{b},$$

donde a y $b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$, $p \nmid b$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$.

En efecto sea $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ entonces existen r y $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $r > 0$ y $x = \frac{r}{s}$. Si $r = p^{n_1} a$, con $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $p \nmid a$, si $s = p^{n_2} a$, con $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $p \nmid b$, entonces

$$x = \frac{r}{s} = \frac{p^{n_1} a}{p^{n_2} b} = p^{n_1 - n_2} \frac{a}{b}.$$

Notemos que $\alpha = n_1 - n_2$ puede ser positivo, negativo o cero.

Ahora definimos

$$|x|_p = c^{\alpha}, \quad y \quad |0|_p = 0.$$

Se sigue inmediatamente de la definición que $|x| \geq 0$ y que $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$, pues si $x \neq 0$, entonces $|x|_p = c^{\alpha} \neq 0$. Además si $y = p^{\beta} \frac{a'}{b'}$, donde $p \nmid a'$, $p \nmid b'$ y $\beta \in \mathbb{Z}$, entonces

$$xy = (p^{\alpha} \frac{a}{b}) p^{\beta} \frac{a'}{b'} = p^{\alpha} p^{\beta} \frac{aa'}{bb'} = p^{\alpha+\beta} \frac{aa'}{bb'},$$

donde $p \nmid aa'$ y $p \nmid bb'$. De aquí,

$$|xy|_p = c^{\alpha+\beta} = |x|_p |y|_p$$

y

$$|x|_p = |\frac{x}{y} y|_p = |\frac{x}{y}|_p |y|_p,$$

lo que implica

$$|\frac{x}{y}|_p = \frac{|x|_p}{|y|_p}.$$

Finalmente, demostraremos que

$$|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}. \qquad (1)$$

Notemos que de (1), la función $|\ |_p$ satisface la condición (iii). En lugar de demostrar (1), demostraremos la siguiente condición equivalente:

$$|x|_p \leq 1 \Longrightarrow |1+x|_p \leq 1. \qquad (2)$$

Primero notemos que $|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$ es, en efecto, equivalente a $|x|_p \leq 1 \Longrightarrow |1+x|_p \leq 1$.

Supongamos que $|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$ se satisface; entonces, si $|x|_p \leq 1$,

$$|1+x| \leq max\{|x|_p, 1\} = 1,$$

y (2) se cumple.

Inversamente supongamos que $|x|_p \leq 1 \Longrightarrow |1+x|_p < 1$. Podemos suponer que $y \neq 0$, pues, si $y = 0$, (1) se satisface. Supongamos sin perdida de generalidad que $|x|_p \leq |y|_p$. Entonces $|\frac{x}{y}|_p \leq 1$ y, por hipótesis,

$$|1+\frac{x}{y}|_p \leq 1, \quad y \quad |x+y|_p \leq |y|_p = max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Hemos demostrado que (1) se cumple. Así, (1) y (2) se cumplen. Demostraremos entonces (2). Sea $x = (p^\alpha \frac{a}{b})$, con α, a, $b \in \mathbb{Z}$ y p un número primo tal que $p \nmid a$ y $p \nmid b$. Supongamos que $|x|_p \leq 1$.

Notemos que si $x = 0$, entonces $|1+x|_p = |1|_p$; como $1 = p_0 \frac{1}{1}$, tenemos que $|1|_p = c^0 = 1 \leq 1$.

Además si $x = -1$, entonces $|1+x|_p = |0|_p = 0 \leq 1$.

Y por último si $x \neq 0$ es tal que $|x|_p \leq 1$, entonces $\alpha \geq 0$. En efecto como $0 < c < 1$, tenemos que la gráfica de la función exponencial base c, $exp_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, donde $exp_c(\alpha) = c^\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es decreciente. Si $\alpha < 0$, entonces $c^\alpha = |x|_p > 1$. Por lo tanto $c^\alpha = |x|_p \leq 1$, implica que $\alpha \geq 0$.

Con las observaciones anteriores podremos escribir a x en la forma $x = \dfrac{n}{m}$, donde $(n,m) = 1$ y $p \nmid m$.

En efecto, recordemos que $x = p^\alpha \dfrac{a}{b}$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$, $p \nmid b$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pongamos $x = \dfrac{q}{b}$, donde $q = p^\alpha a \in \mathbb{Z}$. Si $l = (p,q)$, entonces existen n y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $q = ln$ y $b = lm$. Entonces $\dfrac{q}{b} = \dfrac{ln}{lm} = \dfrac{n}{m}$. Veamos que $(n,m) = 1$; supongamos que $e = (n,m)$, tenemos que $e|n$ y $e|m$, luego $n = er$ y $m = es$, de donde $q = ln = ler$

y $b = lm = les$, esto implica que $le|q$ y $le|b$. Por lo que $le|l$, así, $l = let$ para algún $t \in \mathbb{Z}$, entonces $et = 1$. Por consiguiente ($e = 1$ y $t = 1$) o ($e = -1$ y $t = -1$). Puesto que $e > 0$ tenemos que $e = 1$ y también $p \nmid m$, pues $p \nmid b$; si $p|m$, entonces $p|lm$ y por tanto $p|b$, una contradicción.

Veamos, ahora si, que $|1+x|_p \leq 1$. Sea $x = \dfrac{n}{m}$, donde $(n, m) = 1$ y $p \nmid m$. Como $x \neq -1$, $1 + x \neq 0$ y por lo que

$$1 + x = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}.$$

Pero $m + n = p^{\beta} r$, con $\beta \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid r$. Por lo tanto, $1 + x = p^{\beta}\dfrac{r}{m}$ y por lo tanto $|1 + x| = c^{\beta}$. Notemos que si $\beta < 0$ entonces $m + n = p^{\beta} r = \dfrac{r}{p^{-\beta}} \notin \mathbb{Z}$, Por lo que $\beta \geq 0$ y por lo tanto $|1 + x| \leq 1$.

Hemos visto que la función $|\ |_p$ satisface todas las condiciones de la función valor absoluto y además la desigualdad fuerte del triángulo. Haremos unas observaciones más de esta función. Definimos, en terminos de $|\ |_p$, una nueva función

$$\begin{aligned} d &: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ d(x, y) &= |x - y|_p. \end{aligned}$$

Veamos qué propiedades posee la función d. Claramente

$$d(x, y) \geq 0 \quad y \quad d(x, y) = 0 \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad x = 0.$$

Por otro lado

$$d(y, x) = |y - x|_p = |-1|_p |x - y|_p = |x - y|_p = d(x, y),$$

y

$$d(y, x) = d(x, y).$$

Finalmente

$$\begin{aligned} d(x, z) = |x - z|_p &= |(x - y) + (y - z)|_p \\ &\leq max\{|x - y|_p, |y - z|_p\} \\ &= max\{d(x, y), d(y, z)\}. \end{aligned}$$

Así,

$$d(x, z) \leq max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

De la desigualdad anterior se sigue que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Por lo tanto $\mathbb{Q}$ junto con la función $d(x,y) = |x-y|_p$, llamada la distancia p-ádica en $\mathbb{Q}$, es un espacio ultramétrico.

Ahora, nuestro segundo ejemplo de un espacio ultramétrico. Consideremos a $(\mathbb{Q}, d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$ como supespacio métrico del espacio métrico $\mathbb{R}$. Sean :
$\mathcal{B}_0 = \{\mathbb{Q}\}$.
$\mathcal{B}_1 = \{(\frac{m}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathcal{B}_2 = \{(\frac{m}{2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m+1}{2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathcal{B}_3 = \{(\frac{m}{2^3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m+1}{2^3} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathcal{B}_4 = \{(\frac{m}{2^4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m+1}{2^4} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}\}$.
$\vdots$
En general, si $i \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{B}_i = \{(\frac{m}{2^i} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m+1}{2^i} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap \mathbb{Q} : \quad m \in \mathbb{Z}\}$.

Notemos que:

(1) Cada $\mathcal{B}_i$ es una colección de conjuntos abiertos, ajenos dos a dos (es decir, cada $B \in \mathcal{B}_i$ es un conjunto abierto en $\mathbb{Q}$ y si B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}_i$ son elementos distintos, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$).

(2) $\mathcal{B}_i$ es una cubierta de $\mathbb{Q}$

(3) Si $B \in \mathcal{B}_i$, entonces $diam(B) < \frac{1}{i}$.

(4) $\mathcal{B}_{i+1}$ refina a $\mathcal{B}_i$.

De hecho, $\mathcal{B}_{i+1}$ resulta de subdividir cada intervalo en $\mathcal{B}_i$ en dos mitades. Para cada p y $q \in \mathbb{Q}$, con $p \neq q$ existe un primer entero positivo k, que depende de p y q, tal que p y q están en intervalos distintos de $\mathcal{B}_k$. En efecto consideremos el conjunto $Q(p,q) = \{i \in \mathbb{N} : p$ y q están en distintos intervalos de $\mathcal{B}_i\}$.

Veamos que $Q(p,q) \neq \emptyset$. Fijemos p y $q \in \mathbb{Q}$, con $p \neq q$, tenemos que $d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} > 0$, luego existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{i} < d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}(p,q)$. Como $\mathcal{B}_i$ es una cubierta de $\mathbb{Q}$ existen

B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}_i$ tales que $p \in B_1$ y $q \in B_2$. Puesto que $diam B_1 < \dfrac{1}{i} < d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$. Así, $p \notin B_2$, lo que implica que $B_1 \neq B_2$.

Hemos demostrado que $Q(p,q) \neq \emptyset$, por lo tanto existe el mínimo de $Q(p,q)$. Sea $D = \{(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : p = q\}$.

Definimos

$$k(p,q) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus D(p,q) \longrightarrow Q(p,q)$$
$$(p,q) \mapsto k(p,q) = minQ(p,q).$$

Veamos que $k(p,q)$ está bien definida. Sean $(p,q) = (p',q')$ en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus D(p,q)$ y $k(p,q) = k_0$, entonces existen intervalos distintos B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}_{k_0}$ tales que $p \in B_1$ y $q \in B_2$, luego $p' \in B_1$ y $q' \in B_2$, así que $k_0 \in Q(p',q')$. De donde $k(p',q') \leq k_0 = k(p,q)$. Análogamente $k(p,q) \leq k(p',q')$. Por lo tanto $k(p,q) = k(p',q')$. Esto demuestra que $k(p,q)$ está bien definida.

Para cualesquiera p, $q \in \mathbb{Q}$ definimos :

$$d(p,q) = \begin{cases} \frac{1}{k(p,q)} & \text{si} \quad p \neq q \\ 0 & \text{si} \quad p = q \end{cases}$$

Verificaremos que d es una ultramétrica. Es evidente que d satisface $d(p,q) \geq 0$, $d(p,q) = 0$ si y sólo si $p = q$ y $d(p,q) = d(q,p)$. Demostraremos la desigualdad fuerte del triángulo

$$d(p,r) \leq \ max\{d(p,q),\ d(q,r)\}.$$

Supongamos que $d(p,r) > \ max\{d(p,q),\ d(q,r)\}$. Sean p, q, $r \in \mathbb{Q}$, con $p \neq q \neq r$. Tenemos que $d(p,r) = \dfrac{1}{k}$, donde $k = minQ(p,r)$, por lo que existen intervalos distintos, B_1 y $B_2 \in \mathcal{B}_k$, tales que $p \in B_1$ y $r \in B_2$. Por otro lado como $p \neq q$ y $q \neq r$, entonces $d(p,q) = \dfrac{1}{n}$ y $d(q,r) = \dfrac{1}{m}$, donde $n = minQ(p,q)$ y $m = minQ(q,r)$. De $\dfrac{1}{k} = d(p,r) > d(p,q) = \dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{1}{k} = d(p,r) > d(q,r) = \dfrac{1}{m}$, se infiere que $n > k$ y $m > k$. Por lo tanto $q \in B_1$ y $q \in B_2$, lo cual es una contradicción puesto que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Hemos demostrado que $d(p,r) \leq \ max\{d(p,q),\ d(q,r)\}$.

Esta ultramétrica induce la topología usual de $\mathbb{Q}$. Esto se sigue de los siguientes dos resultados.

Lema 3.12. *Si $p \in \mathbb{Q}$ y $0 < r \leq 1$, entonces:*

(a) *Si* $r > 1$*, entonces* $N_d(p, r) = \mathbb{Q}$.

(b) *Si* $r \leq 1$*, entonces* $N_d(p, r) = B$*, donde* $i = min\{n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{1+i} < r \leq \dfrac{1}{i}\}$ *y* B *es el único conjunto en* $\mathcal{B}_i$ *que contiene a* p*.*

Demostración. Sean $i =$mín$\{n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{1+i} < r \leq \dfrac{1}{i}\}$ y B el único conjunto en $\mathcal{B}_i$ que contiene a p.

Demostraremos (a). Supongamos que $r > 1$ y fijemos $q \in \mathbb{Q}$; entonces $d(p, q) \leq 1 < r$, por lo tanto $q \in N_d(p, r)$. Esto demuestra que $\mathbb{Q} \subseteq N_d(p, r)$. Es claro que $N_d(p, r) \subseteq \mathbb{Q}$. Hemos demostrado que si $r > 1$, entonces $N_d(p, r) = \mathbb{Q}$.

Ahora demostraremos (b). Fijemos $q \in B$; entonces $k(p, q) > i$; luego $k(p, q) \geq i + 1$, por lo que $\dfrac{1}{k(p, q)} \leq \dfrac{1}{i+1} < r$. Por lo tanto $q \in N_d(p, r)$. Esto demuestra que $B \subseteq N(p, r)$.

Fijemos $q \in N_d(p, r)$, entonces $d(p, q) < r$. Si $p \neq q$ tenemos que $d(p, q) = \dfrac{1}{k(p, q)} < r < \dfrac{1}{i}$, de donde $i < k(p, q)$. Como $k(p, q) =$ mín$Q(p, q)$, p y q están en el mismo intervalo B de $\mathcal{B}_i$, es decir $q \in B$. Hemos demostrado que $N_d(p, r) = B$. $\square$

Lema 3.13. *Para* $i \in \mathbb{N}$*, si* $B \in \mathcal{B}_i$ *y* $p \in B$*, entonces* $B = N_d(p, 1/i)$*.*

Demostración. Sea $q \in B$, entonces $i < k(p, q)$ puesto que $k(p, q) = mínQ(p, q)$; luego

$$\frac{1}{k(p, q)} < \frac{1}{i},$$

así

$$d(p, q) < \frac{1}{i}.$$

Por lo que $q \in N_d(p, 1/i)$, esto demuestra que $B \subseteq N_d(p, 1/i)$.

Ahora fijemos $q \in N_d(p, 1/i)$ entonces tenemos dos casos:

(i) Si $p = q$, por hipótesis $q \in B$.

(ii) Si $p \neq q$, tenemos que $d(p, q) = \dfrac{1}{k(p, q)} < \dfrac{1}{i}$,
por lo que $i < k(p, q)$; como $k(p, q) = mínQ(p, q)$ entonces $y \in B$ $\square$

Corolario 3.14. *Si* $\mathcal{S} = \{N_d(p,r) : r > 0, p \in \mathbb{Q}\}$, *entonces* $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$

Demostración. Fijemos $N_d(p,q) \in \mathcal{S}$, por el Lema 3.12 tenemos dos casos.

(a) Si $r > 1$ entonces $N_d(p,r) = \mathbb{Q} \in \mathcal{B}_0$.

(b) Si $r \leq 1$, entonces $N_d(p,r) = B$, donde $i = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1+i} < r \leq \frac{1}{i}$ y B es el único conjunto en $\mathcal{B}_i$ tal que $x \in B$. Así $N_d(p,r) = B \in \mathcal{B}_i$, por lo tanto $\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$.

Sea $B \in \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$, entonces existe $i \in \omega$ tal que $B \in \mathcal{B}_i$; como $B \neq \emptyset$, sea $p \in B$, por Lema 3.13 tenemos que $B = N_d(p, 1/i) \in \mathcal{S}$. Por consiguiente $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{S}$. Hemos demostrado que $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$. □

Como sabemos $\mathcal{S}$ es una base para la topología usual de $\mathbb{Q}$ y por lo tanto tenemos :

Proposición 3.15. $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$ *es una base para la topología usual de* $\mathbb{Q}$

La construcción anterior puede aplicarse a otros espacios tales como los números irracionales $\mathbb{P}$ y el conjunto de Cantor K. Sin embargo, en el siguiente capítulo construiremos una sucesión de cubiertas abiertas, del espacio $\mathbb{P}$, con propiedades análogas a las de las $\mathcal{B}_i$, usando fracciones continuas.

3.4. Una caracterización de los espacios ultrametrizables

Llegamos ahora al resultado principal de este capítulo

Teorema 3.16. *(J. de Groot)Sea* (X,φ) *un espacio métrico. Las siguientes tres condiciones son equivalentes.*

(1) *Existe una ultramétrica* ρ *que es topológicamente equivalente a* φ

(2) (X,φ) *tiene dimensión de cubierta cero*

(3) *Existe una sucesión* $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ *de cubiertas abiertas de* X, *que satisfecen las siguientes 3 propiedades :*

(a) Para cada $i \in \omega$ $\mathcal{U}_i$ es una colección de conjuntos abiertos ajenos dos a dos.

(b) Para cada $i \in \omega$. Si $U \in \mathcal{U}_i$ entonces $diam(U) \leq 2^{-(i+1)}$.

(c) Para cada $i \in \omega$ $\mathcal{U}_{i+1}$ refina a $\mathcal{U}_i$.

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$] Sea ρ una ultramétrica en X tal que ρ y φ son topológicamente equivalentes. Fijemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ en X (puesto que ρ y φ son topológicamente equivalentes el término "abierto" no es ambiguo), es decir, los espacios (X, τ_ρ) y (X, τ_φ) son iguales. Si x está en X y $r > 0$ denotaremos por $N_\rho(x, r)$ a la vecindad básica $N(x, r)$ en (X, ρ). Necesitamos encontrar una cubierta abierta $\mathcal{V}$ ajena dos a dos tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$. Para cada $x \in X$ sea $A_x = \{i \in \mathbb{N} : \ \textit{existe } U \in \mathcal{U} \textit{ tal que } N_\rho(x, 1/i) \subseteq U\}$. Notemos que $A_x \neq \emptyset$ pues, como $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X, existe U en $\mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y por lo tanto, existe i en $\mathbb{N}$ tal que $N_\rho(x, 1/i) \subseteq U$; esta i es elemento de A_x. Para cada x en X sea $i(x) = \textit{mín } A_x$.

Pongamos $\mathcal{V} = \{N_\rho(x, 1/i(x)) : x \in X\}$. Claramente $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X que refina a $\mathcal{U}$, por lo que necesitamos únicamente mostrar que $\mathcal{V}$ es ajena dos a dos. Sean $N_\rho(x, 1/i(x))$ y $N_\rho(y, 1/i(y))$ elementos distintos de $\mathcal{V}$ y supongamos que no son ajenos. Entonces existe $z \in N_\rho(x, 1/i(x)) \cap N_\rho(y, 1/i(y))$. Por el Teorema 3.11 (ii), una de estas vecindades básicas está contenida en la otra, digamos $N_\rho(x, 1/i(x)) \subset N_\rho(y, 1/i(y))$. Por definicíon de $i(y)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $N_\rho(y, 1/i(y)) \subset U$. Ya que $x \in N_\rho(y, 1/i(y))$, puede ser el centro de la bola, es decir, $N_\rho(x, 1/i(y)) = N_\rho(y, 1/i(y))$. Así tenemos

$$N_\rho(x, 1/i(y)) = N_\rho(y, 1/i(y)) \subseteq U.$$

Por definición de $i(x)$, tenemos $i(x) \leq i(y)$, por lo que

$$N_\rho(x, 1/i(x)) \supseteq N_\rho(x, 1/i(y)) = N_\rho(y, 1/i(y)).$$

Por tanto $N_\rho(x, 1/i(x)) = N_\rho(y, 1/i(y))$ lo que contradice nuestra suposición que estos dos elementos de $\mathcal{V}$ son distintos.

[$2 \Rightarrow 3$] Construiremos la sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ inductivamente. Por hipótesis, (X, φ) tiene dimensión de cubierta cero. Sea $\mathcal{U}_0$ un refinamiento abierto ajeno dos a dos de $\{N(x, 1/4) : x \in X\}$. Notemos que para cada $U \in \mathcal{U}_0$, $diam(U) \leq \frac{1}{2}$. En efecto Si $U \in \mathcal{U}_0$ y $x \in X$ es tal que $U \subseteq N(x, 1/4)$, entonces, para cada y, $z \in U$, $\varphi(y, z) \leq \varphi(y, x) + \varphi(x, z) < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^{0+1}}$. Por lo tanto $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{0+1}}$.

Supongamos que hemos definido una cubierta abierta ajena dos a dos de X diagmos ,$\mathcal{U}_i$, para cada $i \leq n$ tal que las propiedades (a) (b) y (c) en *(3)* se cumplen para toda $i \leq n$. Construimos $\mathcal{U}_{n+1}$ de la manera siguiente

$$\mathcal{V} = \{N(x, 2^{-(n+3)}) : x \in X\} \ \ y \ \ \mathcal{W} = \{N \cap U : N \in \mathcal{V} \ \ y \ \ U \in \mathcal{U}_n\}.$$

Entonces $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X, así que, por hipótesis, existe un refinamiento abierto, ajeno dos a dos, de $\mathcal{W}$, digamos $\mathcal{U}_{n+1}$. Veamos que la sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ satisface los requisitos de (*3*).

Demostraremos por inducción matemática que, para cada $i \in \omega$ y para cada $U \in \mathcal{U}$, $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}}$ (1). Si $i = 0$, entonces para cada $U \in \mathcal{U}_0$, existe $x \in X$ tal que $U \subseteq N(x, 1/4)$.

Demostraremos que para cada $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{(i+1)+1}} = \dfrac{1}{2^{i+2}}$. Sea $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, entonces existen $V \in \mathcal{U}_i$ y $x \in X$ tales que $U \subseteq N(x, 2^{-(n+3)}) \cap V$. Para cada y, $z \in U$ $\varphi(y, z) \leq \varphi(y, x) + \varphi(x, z) < \dfrac{1}{2^{n+3}} + \dfrac{1}{2^{n+3}} = \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Por lo tanto $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Ahora demostraremos $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$. Pero por construcción para cada $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existen $V \in \mathcal{U}_n$ y $x \in X$ tales que $U \subseteq N(x, 2^{-(i+3)}) \cap V \subseteq V$.

[$3 \Rightarrow 1$] Sea $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X cada una ajenas dos a dos, que satisfacen las propiedades de (a), (b) y (c) de (*3*). Para cada x, $y \in X$, si $x \neq y$, entonces $\varphi(x, y) > 0$, así que existe $i \in \omega$ tal que $\dfrac{1}{2^{i+1}} < \varphi(x, y)$. Como $\mathcal{U}_i$ es cubierta abierta de X, existen U y $V \in \mathcal{U}_i$ tales que $x \in U$ e $y \in V$. Puesto que $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}} < \varphi(x, y)$, y no pertenece a V así, $U \neq V$. Entonces $A_{(x,y)} = \{i \in \omega : x \ e \ y \ \textit{se encuentran en distintos elementos de} \ \mathcal{U}_i\} \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $mín A_{(x,y)}$. Si $D = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$, entonces la función $k : X \times X \setminus D \longrightarrow \omega$ tal que para cada $(x, y) \in X \times X \setminus D$, $k(x, y) = mín A_{(x,y)}$ está bien definida, ya que si $(x, y) = (x', y') \in X \times X \setminus D$ y si $n_0 = k(x, y)$, entonces existen U y $V \in \mathcal{U}_{n_0}$ tales que $U \neq V$, $x \in U$ e $y \in V$. Pero entonces $x' \in U$ e $y' \in V$, así que n_0 está en $A(x', y')$ y $k(x', y') \leq n_0 = k(x, y)$. Similarmente $k(x, y) \leq k(x', y')$. Por lo que $k(x', y') = k(x, y)$.

Para cualesquiera x, $y \in X$ definimos (y comparamos con 3.1)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k(x,y)+1} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Tenemos que verificar primero que ρ es una ultramétrica y la única parte de la definición que no es evidente es la forma más fuerte de la desigualdad del triángulo.

Sean x, y, $z \in X$. Demostraremos que

$$\rho(x,y) \leq \ max\{\rho(x,z),\ \rho(z,y)\} \quad (2).$$

Si $x = y$ la demostración es trivial; por lo que suponemos que $x \neq y$. Sean $n = k(x,y)$, U y $U' \in \mathcal{U}_n$ tales que $U \neq U'$, $x \in U$ y $y \in U'$. Si $z \notin U$, entonces z y x están en elementos distintos de $\mathcal{U}_n$ lo que implica que $k(z,x) \leq n$; por eso $\rho(z,x) \geq 1/(n+1) = \rho(x,y)$, y la desigualdad (2) se cumple. Si z no está en U', entonces z y y están en elementos distintos de $\mathcal{U}_n$ así la desigualdad (2) se cumple. La única posibilidad restante es que $z \in U \cap U'$, pero esto es imposible porque $\mathcal{U}_n$ es una familia ajena dos a dos. Para finalizar la prueba tenemos que demostrar que ρ es topológicamente equivalente a la métrica original φ en X. Obsérvese que cualquier sucesión de cubiertas abiertas de (X,φ) que satisfacen (a) es una base para (X,φ), con más presición : Si $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ es una sucesión de cubiertas de X, cada una formada por conjuntos ajenos dos a dos y que satisfacen las condiciones (a), (b) y (c) de (3), entonces $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n \cup \{X\}$ es base para la topología $\mathcal{T}_\varphi$ de (X,φ). En efecto si A es un conjunto abierto en (X,φ) y $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $N(x,r)_\varphi \subseteq A$; pero existe $i > 0$ tal que $\dfrac{1}{2^{i+1}} < r$ y, como $\mathcal{U}_i$ es cubierta abierta de (X,φ), existe U en $\mathcal{U}_i$ tal que $x \in U$; como $diam(U) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}}$, para cada y en U $\varphi(x,y) < \dfrac{1}{2^{i+1}} < r$; entonces y está en $N(x,r) \subseteq A$. Por lo que $x \in U \subseteq A$. Por definición de la topología métrica, $\{N_\rho(x,r) : x \in X,\ \ y\ r > 0\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}_\rho$ de (X,ρ); así que para ver que $\tau(X,\varphi) = \tau(X,\rho)$ basta demostrar que

$$\{N_\rho(x,r) : x \in X,\ \ y\ \ r > 0\} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n \cup \{X\}. \tag{3.2}$$

Para este fin, sea $N = N_\rho(x,r)$. Si $r > 1$, entonces $N = X$. Si $r \leq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$. Puesto que $\mathcal{U}_{n-1}$ cubre a X, existe $U \in \mathcal{U}_{n-1}$ tal que $x \in U$. Afirmamos que $U = N$. Si $y \in U$, entonces x y y están en el mismo elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$ y por lo tanto, $k(x,y) \geq n$. Por consiguiente $\rho(x,y) \leq \frac{1}{n+1} < r$; luego $y \in N$. Inversamente, si $y \in N$, y $y \neq x$, entonces sea $m \in \omega$ tal que $k(x,y) = m$. Puesto que $y \in N$, tenemos que $\rho(x,y) = \frac{1}{m+1} < r \leq \frac{1}{n}$; luego $n < m+1$, entonces $n - 1 < k(x,y)$. Así x e y están en el mismo miembro de $\mathcal{U}_{n-1}$; por lo que $y \in U$.

Para completar la demostración de la igualdad (3.2), sean $n \in \omega$ y $U \in \mathcal{U}_n$. Afirmamos que $U = N_\rho(x, 1/(n+1))$ para cualquier $x \in U$; sea x en U; si $y \in U$, entonces x y y están en el mismo elemento de $\mathcal{U}_n$; así $k(x,y) \geq n+1$. Por consiguiente $\rho(x,y) \leq \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$; así $y \in N_\rho(x, 1/(n+1))$. Si $y \in N_\rho(x, 1/(n+1))$, entonces $\rho(x,y) < \frac{1}{n+1}$; luego $k(x,y) \geq n$. Por consiguiente x y y están en el mismo elemento de $\mathcal{U}_n$, lo que implica que $y \in U$. Esto completa la demostración del Teorema. $\square$

Como $\mathbb{P}$ tiene dimensión de cubierta cero (es cero dimensional y separable)el Teorema de de Groot implica que existe una ultramétrica ρ que induce la topología usual de $\mathbb{P}$ y que hay una sucesión de cubiertas de $\mathbb{P}$ que satisfacen las propiedades del inciso (3) del Teorema. Sin embargo en el siguiente capítulo haremos una construcción explícita de una sucesión tal porque será útil para demostrar que $\mathbb{P}$ es homeomorfo al espacio de Baire $\mathbb{B}_1$.

Capítulo 4

HOMEOMORFISMO DE LAS FRACCIONES CONTINUAS

En esta capítulo se discute el *homeomorfismo de las fracciones continuas* entre el espacio de Baire $\mathbb{B}_2$ y los números irracionales $\mathbb{P}$. Usamos las fracciones continuas para definir extremos de intervalos. Trabajando por inducción, los intervalos abiertos con estos extremos se coleccionan para formar una sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de los irracionales. A continuación, utilizaremos estas cubiertas abiertas para definir el homeomorfismo.

Estas cubiertas abiertas $\mathcal{U}_i$ son relativamente fáciles de visualizar. Cada cubierta se compone de una cantidad numerable intervalos abiertos, ajenos dos a dos y con extremos racionales. Para construir $\mathcal{U}_{i+1}$ de $\mathcal{U}_i$, tomamos cada intervalo $I = (a, b) \in \mathcal{U}_i$, y la partición numerable I_j $(j \in \omega)$ de intervalos de la siguiente manera. Construimos una sucesión de números racionales $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ que comienza con uno de los extremos ($p_0 = b$ cuando i es par; $p_0 = a$ cuando i es impar), y converge monotónamente a el otro extremo. Los números consecutivos racionales en esta sucesión se utilizan como los extremos de los intervalos de $\mathcal{U}_{i+1}$.

El uso de fracciones continuas introduce un poco de álgebra que no es necesaria para la topología (desde el punto de vista topológico, no importa cómo se define la sucesión $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, como puede deducirse del Teorema 3.16). Además nuestra construcción cin fracciones continuas nos permitirá demostrar el Teorema de Baire : que dice que $\mathbb{P}$ y el espacio de Baire $\mathbb{B}_1$ sin homeomorfos (ver4.6), pero esta construcción sirve como una introducción a las fracciones continuas, que es un tema de considerable interés en sí. Por otra parte, una serie de teoremas de la topología clásica se probó originalmente usando fracciones continuas de una manera parecida a la que aquí presentaremos. Por ejemplo, el Teorema de Sierpinski 4.7 al final de esta sección, y la caracterización topológica bien conocida de los irracionales, debida a Alexandroff y Urysohn [1].

4.1. La sucesión de cubiertas y sus propiedades

Ahora definiremos una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n < \omega\}$ de familias de intervalos abiertos con puntos finales racionales como hemos dicho en la introducción a esta sección. Pongamos :

$$\mathcal{U}_0 = \{(a_0, a_0 + 1) : a_0 \in \mathbb{Z}\}$$

Observemos que $\mathcal{U}_0$ es una cubierta de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{R}$ formada por intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, ajenos dos a dos y que la longitud de cada uno de ellos es 1.
Tomemos un elemento de $\mathcal{U}_0$, digamos $J = (a_0, a_0 + 1)$, con $a_0 \in \mathbb{Z}$.
Definamos

$$\mathcal{U}_1(J) = \{([a_0, k + 1], [a_0, k]) : k \in \mathbb{N}\}$$

Por la Proposición 1.4 la sucesión $\{[a_0, k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y por la prposición 1.6 converge a $[a_0]$; entonces su primer elemento $[a_0, 1] = [a_0 + 1]$ es su máximo y a_0 es su ínfimo, así que cada intervalo en $\mathcal{U}_1(J)$ está contenido en J. Más aún, la cerradura de cualquier intervalo de $\mathcal{U}_1(J)$, a excepción del intervalo $(a_0 + \frac{1}{2}, a_0 + 1)$ está contenido en J. Pero la cerradura de cualquier elemento de $\mathcal{U}_1(J)$ está contenida en $(a_0, a_1 + 1]$. En efecto si $x \in [[a_0, k + 1][a_0, k]]$, entonces $a_0 < [a_0, k + 1] \leq x \leq [a_0.k] \leq [a_0, 1]$

Además, si k, $k' \in \mathbb{N}$ y $k < k'$, entonces $k + 1 \leq k'$, lo que implica $\dfrac{1}{k'} \leq \dfrac{1}{k+1}$ y por consiguiente $a_0 + \dfrac{1}{k'} \leq a_0 + \dfrac{1}{k+1}$. Por lo tanto

$$(a_0 + \frac{1}{k'+1}, a_0 + \frac{1}{k'}) \cap (a_0 + \frac{1}{k+1}, a_0 + \frac{1}{k}) = \emptyset.$$

Así los elementos de $\mathcal{U}_1(J)$ son ajenos entre sí, pero todo irracional x en J está en algún elemento de $\mathcal{U}_1(j)$, pues si k es igual a la parte entera de $\dfrac{1}{x - a_0}$, entonces $k \leq \dfrac{1}{x - a_0} < k + 1$, por lo que $\dfrac{1}{k+1} < x - a_0 \leq \dfrac{1}{k}$ y puesto que $x \notin \mathbb{Q}$ tenemos que $x \in ([a_0, k + 1], [a_0, k])$. $\mathcal{U}_1(J)$ es entonces una cubierta de $(a_0, a_0 + 1) \cap \mathbb{P}$.

Por otro lado, la longitud de cada elemento de $\mathcal{U}_1(J)$ es menor o igual a $\dfrac{1}{2}$ que es la longitud del "más largo" de ellos o sea $([a_0, 2], [a_0, 1])$ (ver Proposición 1.7).
Si lo que hemos hecho para J lo hacemos para cada elemento de $\mathcal{U}_1$, obtenemos una cubierta de $\mathbb{P}$,

$$\mathcal{U}_1 := \bigcup_{J\in\mathcal{U}_0} \mathcal{U}_1(J),$$

formada por intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor o igual a $\frac{1}{2}$. Además $\mathcal{U}_1$ refina a $\mathcal{U}_0$ pues si $I \in \mathcal{U}_1$, existe $J \in \mathcal{U}_0$ tal que $I \in \mathcal{U}_1(J)$. Pero todos los elementos de $\mathcal{U}_1(J)$ están contenidos en J, como ya hemos visto. Por lo tanto $I \subseteq J$.

Antes de continuar con la construcción de las siguientes cubiertas, será útil recordar la siguiente definición :

Definición 4.1. *Sea(X, d) un espacio métrico. Entonces*

(1) Si $U \subseteq X$ el ***diámetro*** *de U es :*
$diam(U) := sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$

(2) Si $\mathcal{U}$ es una familia no vacía de subconjuntos de X la ***malla*** *de $\mathcal{U}$ es :*
$malla(\mathcal{U}) = sup\{diam(U) : U \in \mathcal{U}\}$

Tenemos entonces que $malla(\mathcal{U}_0) \leq 1$ y $malla(\mathcal{U}_1) \leq \frac{1}{2}$.

Ahora sea I un elemento cualquiera de $\mathcal{U}_1$; I es de la forma $([a_0, a_1 + 1], [a_0, a_1])$ para algún $a_0 \in \mathbb{Z}$ y algún $a_1 \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$\mathcal{U}_2(I) := \{([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k + 1]) : k \in \mathbb{N}\}$$

Por la Proposición 1.4, ahora la sucesión $\{[a_0, a_1, k]\}$ es creciente y por la Proposición 1.6 converge a $[a_0, a_1]$. Entonces su mínimo es su primer elemento, es decir, $[a_0, a_1, 1] = [a_0, a_1 + 1]$ y su supremo es $[a_0, a_1]$. Así que cada intervalo en $\mathcal{U}_2(I)$ está contenido en I. Más aún, la cerradura de cualquier intervalo de $\mathcal{U}_2(I)$, a excepción del intervalo $([a_0, a_1, 1], [a_0, a_1, 2])$ está contenido en I. Sin embargo la cerradura de cualquier elemento de $\mathcal{U}_2(I)$ está contenido en $[[a_0, a_1 + 1], [a_0, a_1])$.

En efecto sean $([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k + 1]) \in \mathcal{U}_2(I)$ y $x \in [[a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k + 1]]$. Entonces

$$[a_0, a_1, k] \leq x \leq [a_0, a_1, k + 1].$$

Pero

$$[a_0, a_1, 1] \leq [a_0, a_1, k]$$

y

$$[a_0, a_1, k + 1] < [a_0, a_1].$$

Por consiguiente

$$x \in [[a_0, a_1, 1], [a_0, a_1])$$

Sin embargo la cerradura de cada elemento de $\mathcal{U}_2(I)$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}_0(J)$. Ya que si $([a_0, a_1, 1], [a_0, a_1]) \in \mathcal{U}_1(J)$ y $x \in [[a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k + 1]]$, entonces

$$a_0 < [a_0, a_1, 1] \leq [a_0, a_1, k] \leq x \leq [a_0, a_1, k + 1] < [a_0, a_1] \leq a_0 + 1.$$

Es decir

$$[[a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1]] \subseteq [[a_0, a_1, 1], [a_0, a_1]) \subseteq [[a_0, a_1, 1], [a_0, a_1]] \subseteq (a_0, a_0 + 1]].$$

Por lo tanto $x \in (a_0, a_0 + 1])$.

Ahora demostraremos que los elementos de $\mathcal{U}_2(I)$ son ajenos entre sí. Sean k, $k' \in \mathbb{N}$ con $k < k'$ entonces $k + 1 \leq k'$, lo que implica $\dfrac{1}{k'} \leq \dfrac{1}{k+1}$ y por la Proposición 1.4, $[a_0, a_1, k+1] \leq [a_0, a_1, k']$. Por consiguiente

$$([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1]) \cap ([a_0, a_1, k'], [a_0, a_1, k'+1]) = \emptyset.$$

Ahora bien todo irracional x de I está en algún elemento de $\mathcal{U}_2(I)$. En efecto si $x \in \mathbb{P}$ y también $x \in I = ([a_0, a_1+1], [a_0, a_1])$. Entonces por la Proposición 1.10, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[a_0, a_1, k] < x < [a_0, a_1, k+1]$, es decir $x \in ([a_0, a_1, k], [a_0, a_1, k+1])$ que es un elemento de $\mathcal{U}_2(I)$. Por consiguiente $\mathcal{U}_2(I)$ cubre a $I \cap \mathbb{P}$.

La longitud de cada elemento de $\mathcal{U}_2(I)$ es menor o igual que $\frac{1}{3}$. En efecto como $k < k + 1$ por la Proposición 1.4 tenemos que

$$[a_0, a_1, k+1] - [a_0, a_1, k] < \frac{k + 1 - k}{k(k+1) + 1} < \frac{1}{3}$$

Si lo que hemos hecho para I lo hacemos para cada elemento de $\mathcal{U}_2$, obtenemos una cubierta de $\mathbb{P}$,

$$\mathcal{U}_2 := \bigcup_{I \in \mathcal{U}_1} \mathcal{U}_2(I),$$

formada por intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor o igual a $\frac{1}{3}$. Además $\mathcal{U}_2$ refina a $\mathcal{U}_1$ pues si $H \in \mathcal{U}_2$, existe $I \in \mathcal{U}_1$ tal que $H \in \mathcal{U}_1(I)$. Pero todos los elementos de $\mathcal{U}_1(I)$ están contenidos en I, como ya hemos visto. Por lo tanto $H \subseteq I$. Notemos que la $malla(\mathcal{U}_2) \leq \frac{1}{3}$

Sea $n \in \omega$ y supongamos que hemos construido una sucesión $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n$ de familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que satisfacen las siguientes propiedades :

(1) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, $V \in \mathcal{U}_j$ si y solo si V es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ de una de las siguientes formas :

  (i) si j es par, entonces $V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j + 1])$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_j$ son naturales.

  (ii) Si j es impar, entonces $V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j+1], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j])$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_j$ son naturales.

(2) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, los intervalos de $\mathcal{U}_j$ son ajenos dos a dos.

(3) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $\mathcal{U}_{j+1}$ refina a $\mathcal{U}_j$

(4) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$. Si j es impar y
$V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j]) \in \mathcal{U}_j$,
entonces $\overline{V} \subseteq ([a_0, a_1, \cdots, a_{j-2}, a_{j-1}], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-2}, a_{j-1} + 1]]$.
Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$. Si n es par y
$V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j + 1]) \in \mathcal{U}_j$,
entonces $\overline{V} \subseteq [[a_0, a_1, \cdots, a_{j-2}, a_{j-1} + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{j-2}, a_{j-1}])$

(5) Si para cada familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{U}}$ denota el conjunto $\{Cl_{\mathbb{R}}(U) : U \in \mathcal{U}\}$, entonces para cada $j \in \{0, 1, ..., n-2\}$, $\overline{\mathcal{U}}_{j+2}$ refina a $\mathcal{U}_j$.

(6) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathcal{U}_j$ es una cubierta abierta de $\mathbb{P}$

(7) Para cada $j \in \{0, 1, ..., n\}$, *malla* $(\mathcal{U}_j) < \dfrac{1}{j+1}$

Construiremos $\mathcal{U}_{n+1}$ de tal forma que la nueva sucesión de familias $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_{n+1}$ siga cumpliendo las propiedades $(1) - (7)$.

Haremos la construcción para el caso en que n es impar. El otro caso será completamente similar. Sea V un elemento cualquiera de $\mathcal{U}_n$; entonces es de la forma

$$([a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n])$$

para algún $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$.

Definamos a

$$\mathcal{U}_{n+1}(V) := \{([a_0, a_1, \cdots, a_n, k], [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1]) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Por el la Proposición 1.4, $\{[a_0, a_1, \cdots, a_n, k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente y por la Proposición 1.6 converge a $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$. Por lo tanto $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$ es el supremo de dicha sucesión y su primer término $[a_0, a_1, \cdots, a_n, 1] = [a_0, a_1, \cdots, a_n + 1]$ es su mínimo. Así cada intervalo en $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ está contenido en

$$([a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]) = V.$$

Más aún, la cerradura de cualquier intervalo de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ con excepción del intervalo $([a_0, a_1, \cdots, a_n + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_n + 2])$ está contenido en V. Sin embargo, la cerradura de cualquier elemento de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ está contenido en

$$W := [[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]).$$

En efecto, si $x \in [[a_0, a_1, \cdots, a_n, k], [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1]]$ entoces
$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k] \leq x \leq [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1]$,
pero

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1] < [a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

y

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, 1] \leq [a_0, a_1, \cdots, a_n, k].$$

Por consiguiente

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, 1] \leq x < [a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

Por lo que $x \in W$. Si $U \in \mathcal{U}_{n+1}(V)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$U = ([a_0, a_1, \cdots, a_n, k], [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1]),$$

por lo tanto $\overline{U} \subseteq W$. Pero $\overline{U} \subseteq W \subseteq \overline{W} = \overline{V}$. Por consiguiente

$$\overline{U} = \overline{V} \subseteq ([a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]].$$

Por (4); si $x \in \overline{U}$ tenemos que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k] \leq x \leq [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1],$$

pero

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}] < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1] \leq [a_0, a_1, \cdots, a_n, k]$$

y

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1] < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] \leq [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

De modo que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1],$$

por lo tanto

$$x \in ([a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]).$$

Entonces la cerradura de cualquier elelmento de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ está contenido en

$$([a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]) \in \mathcal{U}_{n-1}(V).$$

Ahora demostraremos que los elementos de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ son ajenos dos a dos entre sí. Sean k y $k' \in \mathbb{N}$ con $k < k'$, entonces $k + 1 \leq k'$. Por la Proposición 1.5,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1] \leq [a_0, a_1, \cdots, a_n, k'].$$

Por consiguiente

$$([a_0, a_1, \cdots, a_n, k], [a_0, a_1, \cdots, a_n, k+1]) \cap ([a_0, a_1, \cdots, a_n, k'], [a_0, a_1, \cdots, a_n, k'+1]) = \emptyset.$$

Ahora bien, todo irracional $x \in V$ está en algún elemento de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$, En efecto como

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n],$$

Por 1.10 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$([a_0, a_1, \cdots, a_n, k] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_n, k + 1].$$

Por lo tanto $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ cubre a $V \cap \mathbb{P}$.

La longitud de cada elemento de $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ es menor o gual a $\dfrac{1}{n+2}$. Puesto que $1 \leq k < k + 1$. Por la Proposición 1.7, tenemos que

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n, k + 1] - [a_0, a_1, \cdots, a_n, k] < \frac{k - 1 + k}{k(k + 1) + n} = \frac{1}{k^2 + k + n} \leq \frac{1}{n + 2}.$$

Esta última desigualdad se sigue de $2 + n \leq k^2 + k + n$.

Si lo que hemos hecho para V lo hacemos para cada elemento de $\mathcal{U}_{n+1}$, obtenemos una cubierta de $\mathbb{P}$

$$\mathcal{U}_{n+1} := \bigcup_{v \in \mathcal{U}_n} \mathcal{U}_{n+1}(V)$$

formada por intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, ajenos dos a dos y la longitud de cada uno de ellos es menor a $\frac{1}{n+2}$ y por consiguiente $malla(\mathcal{U}_{n+1}) < \frac{1}{n+2}$. Además $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$ y $\overline{\mathcal{U}}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_{n-1}$.
En resumen hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *La sucesión de familias $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades :*

(1) Para cada $n \in \omega$, $V \in \mathcal{U}_n$ si y solo si V es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ de una de las siguientes formas :

(i) si n es par, entonces $V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + 1])$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ son naturales.

(ii) Si n es impar, entonces $V = ([a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n+1], [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n])$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ son naturales.

(2) Para cada $n \in \omega$, los intervalos de $\mathcal{U}_n$ son ajenos dos a dos.

(3) Para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$

(4) Para cada $n \in \omega$, $\overline{\mathcal{U}}_{n+2}$ refina a $\mathcal{U}_n$.

(5) Para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de $\mathbb{P}$

(6) Para cada $n \in \omega$*, malla* $(\mathcal{U}_n) < \dfrac{1}{n+1}$

Corolario 4.3. *Para cada* x *número irracional, hay una sucesión*

$$\{a_i : \ a_0 \in \mathbb{Z} \ y \ a_j \in \mathbb{N}, \ \forall j \in \mathbb{N}\}_{i\in\omega},$$

tal que:

(1) x *es el único punto en*
$\bigcap\{([a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}], [a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n} + 1])\}_{n\in\omega}$

(2) x *es el único punto en*
$\bigcap\{([a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, a_{2n+1} + 1], [a_0, a_1, \cdots, a_{2n}, a_{2n+1}])\}_{n\in\omega}$

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{U}_n$ es la sucesión de cubiertas de $\mathbb{P}$ del teorema anterior. Sea x un número irracional. Puesto que para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta de $\mathbb{P}$, para cada $n \in \omega$ existe un único $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_n$.

(1) $\displaystyle\bigcap_{m\geq 1} U_{2m} \subseteq \bigcap_{m\geq 1} \overline{U}_{2m} \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_{2m-2} = \bigcap_{m\geq 1} U_{2m} \cap U_0 \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_{2m}.$

Por consiguiente $\displaystyle\bigcap_{m\in\omega} \overline{U}_{2m} = \bigcap_{m\in\omega} U_{2m}.$

Como para cada $m \in \omega$, tenemos que $\overline{U}_{2m} \subseteq U_{2m-2}$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \ diam(\overline{U}_{2m}) \leq \lim_{m\to\infty} \ diam(U_{2m-2}) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Por lo tanto $(\overline{U}_{2m})_{m\in\omega}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero y por consiguiente su intersección es un sólo punto, el cual es x.

(2) $\displaystyle\bigcap_{m\in\omega} U_{2m+1} \subseteq \bigcap_{m\in\omega} \overline{U}_{2m+1} \subseteq \bigcap_{m\in\omega} U_{2m-1} = \bigcap_{m\in\omega} U_{2m+1} \cap U_0 \subseteq \bigcap_{m\in\omega} U_{2m-1}.$

Polo tanto $\displaystyle\bigcap_{m\in\omega} \overline{U}_{2m+1} = \bigcap_{m\in\omega} U_{2m+1}$. Tenemos que $\overline{U}_{2m+1} \subseteq U_{2m-1}$ y por lo tanto $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \ diam(\overline{U}_{2m+1}) = 0$; entonces $(\overline{U}_{2m+1})_{m\in\omega}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero. Su intersección es un sólo punto, a saber x. □

Corolario 4.4. *Si* x *es irracional y* $\{a_i : \ a_0 \in \mathbb{Z} \ y \ a_j \in \mathbb{N}, \ \forall j \in \mathbb{N}\}_{i\in\omega,}$ *es la sucesión de la Proposición 4.3 entonces* $x = \lim_{n\to\infty}\{[a_0, a_1, ..., a_n]\}_{n\in\omega}$*. Denotaremos este límite por* $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$*.*

Demostración.

Para cada $n \in \omega$
$[a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}] < x < [a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}+1]$ y tomamdo limite obtenemos $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$. $\square$

4.2. El Homeomorfismo y el Teorema de Sierpiński

Observar que el Corolario 4.3 tiene un recíproco : Si $\{a_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión tal que $a_0 \in \mathbb{Z}$ y para cada $n \geq 1$ $a_n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\bigcap\{([a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}], [a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n+1}]) : n \in \omega\}$$

es un sólo punto y es irracional.

Definición 4.5. *Sea $\phi : (\mathbb{B}_2, \varphi_2) \longrightarrow \mathbb{P}$, la función tal que si $\{a_i\}_{i\in\omega}$, $\phi(\{a_i\}_{i\in\omega})$ es único irracional en $\bigcap\{([a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}], [a_0, a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}+1]) : n \in \omega\}$*

Teorema 4.6. *(Baire [3]). ϕ es un homeomorfismo de $\mathbb{B}_2$ en $\mathbb{P}$.*

Demostración.

ϕ es inyectiva. En efecto si $\{a_i\} \neq \{b_i\}$, entonces existe el mínimo $n \in \omega$ tal que $a_n \neq b_n$. Si $n = 0$, entonces $a_0 = b_0$ y los intervalos $(a_0, a_0 + 1)$ y $(b_0, b_0 + 1)$ son ajenos, por lo que $\phi(\{a_i\}) \neq \phi(\{b_i\})$. En caso de que $n > 0$, $n = 2m$ y $m \in \omega$ tenemos:

$$\phi(\{a_i\}) \in ([a_0, a_1, ..., a_{2m-1}, a_{2m})], [a_0, a_1, ..., a_{2m-1}, a_{2m} + 1)]$$
$$\phi(\{b_i\}) \in ([b_0, b_1, ..., b_{2m-1}, b_{2m})], [b_0, b_1, ..., b_{2m-1}, b_{2m} + 1)]$$

Puesto que $a_{2m} \neq b_{2m}$ estos intervalos son elementos distintos de $\mathcal{U}_{2m}$. Se deduce que $\phi(\{a_i\}) \neq \phi(\{b_i\})$. El caso para $n = 2m + 1$ es similar.
ϕ es sobreyectiva: Si $x \in \mathbb{P}$, entonces por el corolario anterior existe una sucesión $\{a_i\}$ tal que x es el único punto en

$$\bigcap\{([a_0, a_1, \cdots, a_{2m}], [a_0, a_1, \cdots, a_{2m} + 1])\}_{n\in\omega} = \phi(\{a_i\})$$

es decir, $\phi(\{a_i\}) = x$. Esto demuestra que ϕ es sobreyectiva. Por lo tanto ϕ es biyectiva.
Resta ver que ϕ es homeomorfismo. Para esto es suficiente demostrar que existe una base $\mathcal{B}$ para el espacio de Baire $\mathbb{B}_2$, y una base $\mathcal{U}$ para los números irracionales tales que ϕ manda a cada $B \in \mathcal{B}$ en algún $U \in \mathcal{U}$ y cada $U \in \mathcal{U}$ es la imagen de algún $B \in \mathcal{B}$. Consideremos a $\mathcal{B}$ como la base usual para la topología inducida por la métrica en $\mathbb{B}_2$, es decir, $\mathcal{N} = N(\{a_i\}, 1/n) : n \in \omega \;\; y \;\; \{a_i\} \in \mathbb{B}_2$.

Para los números irracionales consideremos $\mathcal{U} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{U}_i$, donde $\{\mathcal{U}_{i<\omega}\}$ es la sucesión de cubiertas de $\mathbb{P}$ construidas en 4.2. Como $\mathcal{U}$ satisface $3(a)$ de 3.16 es una base de $\mathbb{P}$.
Notemos que,

$$d_2(\{a_i\};\{b_i\}) < 1/n \quad si, \quad y \quad solo \quad si a_i \neq b_i \quad para \quad i < n$$

.

Ahora basta demostrar que para cada $\{a_i\} \in \mathbb{B}_2$ y para cada $B = N(\{a_i\}, 1/n) = \{\{b_i\} \in \mathbb{B}_2 : b_i = a_i; i < n\}$, tenemos:
(i) $\phi(B) = ([a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n], [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n + 1])$.
(i) $\phi(B) = ([a_0, a_1, ..., a_{2n-1}, a_{2n} + 1], [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_{2n}])$.

Demostración de (i) Para n par y por la definición de ϕ y la propiedad de los intervalos encajados, se deduce que $x \in \phi(B)$ si, y sólo si existe $\{b_i\} \in \mathbb{B}_2$, tal que $a_i \neq b_i$ para $i \leq n$ y $\phi(\{b_i\}) = x$
si, y sólo si

$$\bigcap \{([a_0, a_1, ..., a_{i-1}, a_i], [a_0, a_1, ..., a_{i-1}, a_{2i} + 1]) : i \quad es \quad par \quad \leq n\}$$

si, y sólo si

$$x \in ([a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n], [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_{2n} + 1]).$$

La demostración de (ii) es similar. □

Teorema 4.7. *(Sierpiński). Todo espacio métrico separable y cero dimensional es homeomorfo a un subconjunto de los números irracionales.*

Demostración.
Supongamos que X es un espacio métrico separable y cero dimensional. Basta demostrar que X es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{B}_1$. Como X es separable y cero dimensional, entonces tiene dimensión de cubierta cero y por el Teorema 3.16 existe una familia $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\omega}$ de cubiertas de X ajenas dos a dos tales que: Si $U \in \mathcal{U}_i$ entonces $diam(U) \leq 2^{-(i+1)}$ y $\mathcal{U}_{i+1}$ refina a $\mathcal{U}_i$ para todo $i \in \omega$.
Por la separabilidad de X, cada $\mathcal{U}_i$ es a lo sumo numerable. En efecto sean $D \subseteq X$ denso numerable e $i \in \omega$, para cada $U \in \mathcal{U}_i$ existe $x_U \in D$ tal que $x_U \in D \cap U$. Definimos $\varphi : \mathcal{U}_i \to D$ por $\varphi(U) = x_U$. φ es inyectiva fijemos U y $V \in \mathcal{U}_i$ con $U \neq V$, entonces $x_U \in U$ y $x_V \in V$, como $U \cap V = \emptyset$, se infiere que $x_U \neq x_V$. Por lo que $|\mathcal{U}_i| \leq |D|$. Supongamos que $\mathcal{U}_i$ tiene cardinalidad k_i, donde $k_i < \omega$. Así podemos escribir a los elementos de $\mathcal{U}_i$ como $\{U_{i,j}\}_{j<k_i}$. Para cada $x \in X$ y para cada entero i hay un único $U \in \mathcal{U}_i$ de modo que $x \in U$; por lo tanto, podemos elegir un único entero $f_x(i)$, tal que $x \in U_{i,f_x(i)}$. Esto define una funcion $f_x : \omega \longrightarrow \bigcup_{i\in\omega} k_i$ tal que

para cada $i \in \omega$, $f_x(i) \in k_i$, es decir:

$$f_x \in \prod_{i<\omega} k_i = \{f \in \mathbb{B}_1 : f(i) < k_i \ para \ todo \ i < \omega\}$$

Notemos que x es el único punto en $\bigcap_{i\in\omega} U_{i,f_x(i)}$. En efecto sea $y \in \bigcap_{i\in\omega} U_{i,f_x(i)}$, $x \neq y$, entonces $d(x,y) > 0$, por lo que existe $i \in \omega$ tal que $\dfrac{1}{2^{i+1}} < d(x,y)$. Como $x \in U_{i,f_x i}$ y el $diam(U_{i,f_x i}) \leq \dfrac{1}{2^{i+1}} < d(x,y)$, por lo que $y \notin U_{i,f_x i}$.

Afirmamos que la función $\phi : X \to \mathbb{B}_1$ definida como $\phi(x) = f_x$ es un homeomorfismo sobre la imagen de ϕ.
Demostraremos que ϕ es inyectiva. Sean $x \neq y$ en X, entonces $y \notin \bigcap_{i\in\omega} U_{i,f_x(i)}$, esto implica que existe $i_0 \in \omega$ tal que y no pertenece a $U_{i_0,f_x(i_0)}$, sin embargo $y \in U_{i_0,f_y(i_0)}$. Se infiere que $U_{i_0,f_x(i_0)} \neq U_{i_0,f_y(i_0)}$, así $f_x(i_0) \neq f_y(i_0)$, luego $f_x \neq f_y$. Por lo tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$. Hemos demostrado que ϕ es inyectiva.

Notemos que para $i, j \in \omega$, $\sigma(i,j) := \{f \in \mathbb{B}_1 : f(i) = j\} = \pi_i^{-1}(\{j\})$. Por la continuidad de π_i y puesto que $\{j\}$ es un conjunto abierto de k_i, tenemos que $\sigma(i,j)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{B}_1$. Además $\{\sigma(i,j) : i, j \in \omega\}$ es una subbase para la topología producto en $\mathbb{B}_1$. Por lo tanto la familia

$$\{\sigma(i,j) \cap \phi(X) : i \in \omega, j < k_i\}$$

forma una subbase para $\phi(X)$ puesto que $\phi(x) = f_x \in \prod_{i<\omega} k_i$. Ahora es suficiente demostrar que para todo conjunto U en la base $\cup\{\mathcal{U}_i : i < \omega\}$ para X, $\phi(X)(U)$ es subbásico de $\mathbb{B}_1$, y todo subbásico en $\mathbb{B}_1$ es la imagen de algún $U \in \cup\{\mathcal{U}_i : i < \omega\}$. Es suficiente ver que:

$$\phi(U_{i,j}) = \sigma(i,j) \cap \phi(X)$$

En efecto veamos que $\phi(U_{i,j}) \subseteq \sigma(i,j) \cap \phi(X)$. Para cada $x \in U_{i,j}$, $U_{i,j}$ es el único elemento de$\mathcal{U}_i$ tal que $x \in U_{i,j}$ con $j < k_i$, por lo que $j = f_x(i)$; por lo tanto $f_x(i) \in \sigma(i,j) \cap \phi(X)$. Por consiguiente $\phi(U_{i,j}) \subset \sigma(i,j) \cap \phi(X)$. Si $f \in \sigma(i,j) \cap \phi(X)$ entonces existe $x \in X$ tal que $f = \phi(x) = f_x$, se infiere que $f_x(i) = j$ con $j < k_i$ y $x \in U_{i,f_x(i)} = U_{i,j}$, luego $f \in \phi(U_{i,j})$. □

Definición 4.8. *Si P es una propiedad topológica y (X,τ) es un espacio topológico, diremos que (X,τ) es universal en la clase de los espacios topológicos que tienen la propiedad P si para todo espacio topológico (Y,σ) con la propiedad P existe una inmersión $\varphi : (Y,\sigma) \longrightarrow (X,\tau)$ (es decir, (Y,σ) es homeomorfo a un subespacio de (X,τ))*

Con esta definición el Terorema de Sierpiński se puede enunciar: $\mathbb{P}$ es universal en la clase de los espacios metrizables, separables y cero dimensionales.

Bibliografía

[1] PAUL ALEXANDROFF and PAUL URYSOHN, *Über nulldimensionale Punktmegen*, Math Annalen (1928) 89 - 106.

[2] G. BACHMAN *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press, NewYork 1964.

[3] R. BAIRE, *Sur la reprèsentation des fonctiones discontinues (deuxième partie)*, Acta Math. 32 (1909) 97 - 176.

[4] C. O. CHRISTENSON AND W. L. VOXMAN, *Apsects of Topology*, BCS Associates, Moscow, Idaho, 1998.

[5] J. DE GROOT, *Non-Arquimedean metrics in topology*, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956) 948 - 953.

[6] RYSZARD ENGELKING, *Dimension Theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

[7] JOHN KULESZA, *An Example in the dimension theory of metric space*, Topology and Appl. 35 (1990) no. 2-3, 108 - 120.

[8] J. R. MUNKRES, *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[9] ADAM OSTASZEWSKI, *A note on Prabir Roy's space*, Topology and Appl. 35 (1990) no. 2-3, 85 - 107.

[10] A. OSTROWSKI, *Über einige lösungen der funktionalgleichung*, Acta Math. 41 (1918) 271 - 284.

[11] PRABIR ROY, *Non equality of dimension for metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968) no. 2-3, 117 - 132.

[12] WACLAW SIERPIŃSKI, *Sur les ensambles connexes et non connexes*, Fund. Math. 2 (1921), 81 - 95.

[13] JERRRY E. VAUGHAN, *Examples of ultrametrics*, Amer. Math. Monthly 82 (1975) no. 7, 749 - 755.

[14] Jerrry E. Vaughan, *An Introduction to Images of the irrational numbers*, Notes for lectures presented to IV Taller de Investigación en topología, UNAM, México (1996).

[15] K. Von Fritz, *The discovery of inconmensurability by Hyppasus of Metaponto*, Ann. Math. (2) 46 (1945), 242 - 264.