BENEMÉRITAUNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Análisis y clasificación de errores en la reducción de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la F.C.F.M"

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Emmanuel Caballero Juárez

Director:

Dr. José Antonio Juárez López

INDICE

INTRODUCCIÓN v

1. ANTECEDENTES Y MARCO DE REFERENCIA 1

1.1 MARCO DE REFERENCIA 2

1.1.1 DIFICULTADES EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA HACIA EL ÁLGEBRA 2

1.1.2 DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LAS VARIABLES 4

1.1.3 ERRORES EN LA MANIPULACIÓN ALGEBRAICA 7

1.1.4 CLASIFICACIÓN DE ERRORES 11

2. JUSTIFICACIÓN 17

2.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 17

3. METODOLOGÍA 19

3.1 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN ESTUDIADA 20

3.2 INSTRUMENTO 22

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS 24

4.1 ERRORES DETECTADOS 24

4.2 ESTRATEGIAS 46

4.3 ANÁLISIS CUALITATIVO 49

5. CONCLUSIONES 62

5.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CUANTITATIVO 62

5.2 CONCLUSIONES DEL ANALISIS CUALITATIVO 65

BIBLIOGRAFIA 67

ANEXO 69

INTRODUCCIÓN

Una materia de gran importancia en el estudio de las matemáticas en la educación media superior es el álgebra, ya que esta materia es la base para poder entender de una mejor manera las materias de matemáticas que se estudian posteriormente, tales como: cálculo diferencial, cálculo integral, razonamiento matemático, entre otras. Sin embargo, esta materia no resulta ser de fácil comprensión ya que los maestros esperan que los estudiantes se apropien de reglas de manera casi inmediata, sin darles la oportunidad a que las entiendan, y esto podría estar originando que apliquen dichas reglas sin razonar, por lo que los estudiantes solo las repiten y en algunos casos apliquen dichas reglas en ejercicios en los cuales no debían ser utilizadas. Sin embargo, muchos factores podrían estar afectando el aprendizaje del estudiante.

En el transcurso del estudio de las matemáticas, se busca que los estudiantes vayan adquiriendo el conocimiento necesario para la resolución de los ejercicios o problemas a los que se les va enfrentando. Sin embargo, en muchos de los casos los estudiantes tienen muchas dificultades cuando se enfrentan a las variables y esto podría estar generando que los estudiantes le den un diferente uso.

Este estudio fue realizado con estudiantes que ingresaban a la universidad, es decir, con estudiantes que tuvieron varios cursos que tienen que ver con el área de matemáticas, con los cuales pudieron obtener una vasta experiencia para darle el tratamiento adecuado a la variable. Sin embargo, este estudio solo se centró en saber qué tan capaces son los estudiantes cuando se enfrentan a la manipulación algebraica, es decir, saber si son capaces de reconocer a la variable como un número general.

Ursini (1994), afirma que, para que los estudiantes sean capaces de reconocer a la variable como número general, entre otras cosas, deben ser capaces de poder manipular el símbolo (en este caso la variable) para poder simplificar o desarrollar

expresiones algebraicas. Para esta investigación nos hemos centrado en conocer qué tipos de errores se cometen cuando los estudiantes se encuentran con ejercicios en donde tienen que manipular a la variable, poniendo a prueba los conocimientos previamente adquiridos en el bachillerato, lo cual sirvió para tratar de conocer cómo es que se originan tales errores.

En este trabajo se presentan los resultados de un estudio cuantitativo, el cual consistió en la aplicación de un cuestionario de catorce ejercicios, estos ejercicios se trataban de simplificación de fracciones algebraicas, tal cuestionario fue aplicado a los estudiantes de nuevo ingreso en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Posteriormente, se realizó un estudio cualitativo de las respuestas del cuestionario a través de entrevistas clínicas a algunos de los estudiantes que previamente habían contestado el cuestionario.

El contenido de este trabajo está organizado con los siguientes capítulos: En el primer capítulo se hace una revisión de literatura relacionada con las dificultades en la transición de la aritmética hacia el álgebra, diferentes interpretaciones de las variables, errores en la manipulación algebraica y clasificación de errores.

En el segundo capítulo, se hace una breve justificación acerca de la investigación propuesta para esta tesis. Se escriben los objetivos y las preguntas que guiarán esta investigación.

En el tercer capítulo, se realiza una descripción de la población que se estudió, además se revisan los planes de estudio de algunos bachilleratos y se describe el instrumento que se utilizó para realizar el estudio cuantitativo.

En el cuarto capítulo, se presenta la clasificación de los errores detectados con el cuestionario. Además, se presentan las estrategias que usaron los estudiantes y por último se realiza un análisis de corte cualitativo de algunos errores que se presentaron.

En el quinto capítulo se presentan, tanto las conclusiones del análisis cuantitativo, como las conclusiones del análisis cualitativo.

1. ANTECEDENTES Y MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se hace una revisión de investigaciones que abarcan desde las dificultades que tienen los alumnos al inicio del álgebra, hasta investigaciones acerca de los diferentes usos (interpretaciones o concepciones) de la variable, así como también sobre manipulación algebraica y sobre clasificación de errores al realizar tareas algebraicas.

A través del tiempo ha surgido la necesidad de responder por qué los estudiantes tienen problemas con el aprendizaje de las matemáticas, y es por eso que muchos investigadores se han dado a la tarea de identificar cuáles son las dificultades, o errores, sin embargo, no es algo fácil de hacer ya que podrían estar involucrados muchos factores.

Varios investigadores han encontrado que muchos de los problemas que los estudiantes tienen al estudiar álgebra, se deben a que no se les da la maduración adecuada en los primeros cursos de álgebra.

En este tipo de investigaciones se ha encontrado que la generalización que se da a partir de la aritmética, no es fácil para los estudiantes, porque les cuesta trabajo entender que las letras (en el álgebra) representan números, (Kieran y Filloy, 1989; Kieran y Chalouh, 1993; Phillip y Schaphelle, 1999).

Además, las dificultades podrían presentarse porque no asimilan los conceptos adecuadamente o por no comprender el significado de los símbolos (Booth, 1988; Matz, 1980)

El concepto de variable, dentro del álgebra, es un concepto difícil de entender para los estudiantes que empiezan su estudio, ya que dependiendo del contexto en el que se encuentre, es el uso que se le puede dar (Küchemann, 1980; Usiskin, 1988; Ursini, 1994)

Si los estudiantes no son capaces de reconocer el significado de las variables, esto les podría traer consecuencias al querer manipularlas, lo cual se reflejaría en el

inadecuado uso de fórmulas, leyes, axiomas, etc. o podrían crear una fórmula ellos mismos, a partir de las que existen (Matz, 1980; Muñoz, 2002; Wong, 1997).

Es decir, los estudiantes terminarían cometiendo muchos errores, ya sea que éstos mismos se estén dando a causa de los primeros cursos de álgebra en los cuales no entienden la transición, de uno a otro; porque la misma variable puede estar representando diferentes cosas; por el significado que estas mismas pueden adquirir, de acuerdo a lo que se necesite; por una mala manipulación, la cual podría deberse a la malformación de reglas.

Lo anterior nos podría guiar a otras investigaciones que se han realizado, las cuales podrían ser de mucha utilidad, dado que, en estas investigaciones, clasifican los errores y nos dicen de qué se tratan cada uno de esos errores, (Cerdán, 2010; García, 2010).

Todas las investigaciones que se realizan en torno a la enseñanza, aprendizaje de las matemáticas son relevantes, pues en ellas podríamos encontrar herramientas, las cuales ayudarán a reforzar la educación de los estudiantes y éstos a su vez lo reflejen en sus estudios.

1.1 MARCO DE REFERENCIA

No podemos desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: profesor, alumno, tipos de aprendizaje, creencias, entre otras.

Cuando los alumnos comienzan el estudio de las expresiones algebraicas se ven obligados a no seguir interpretándolas como operaciones aritméticas sobre algún número sino que deben aprender muy rápidamente a considerarlas como objetos en sí mismos, con los cuales se realizan operaciones de distinto nivel de dificultad.

1.1.1 DIFICULTADES EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA HACIA EL ÁLGEBRA

Los estudiantes, al inicio en el estudio del álgebra traen conocimiento y sentido, el cual utilizaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una

generalización de la aritmética. El aprender álgebra no es simplemente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética (Kieran y Filloy, 1989).

La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder usarlos de forma sencilla es, precisamente, lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, sin embargo, los alumnos no siempre llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque desconocen su relación con lo que denotan.

Kieran y Filloy (1989) afirman que: "*El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones*" (p. 229).

A su vez Kieran y Chalouh (1993) mencionan que en la mayoría de los cursos de álgebra rara vez se concede un enlace entre el uso de los números en aritmética y el uso de letras en el álgebra, con lo cual los alumnos no tienen la oportunidad de crear conexiones entre éstos.

Por otra parte, Phillip y Schaphelle (1999) opinan que, para que los estudiantes puedan ver el álgebra como aritmética generalizada, deben crear una relación entre el álgebra y la aritmética, la cual debe estar establecida en sus mentes.

Por su parte, Booth (1988) describe errores comunes cometidos por los estudiantes los cuales pueden atribuirse a:

1. *La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras*. Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. El reconocer el significado de los símbolos hará comprender como operar con éstos y se podrá interpretar los resultados, con lo cual se podrá trasladar el conocimiento que se adquirió en aritmética hacia el álgebra.
2. *El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra.* La mayoría de los estudiantes suponen que en el álgebra solo se les pide una única solución y además que ésta tiene que ser numérica.
3. *La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.* La mayoría de las dificultades que aparecen al inicio del álgebra surgen como problemas sin

corregir en la aritmética. Los errores que se cometen en aritmética hacen ver las dificultades al adquirir el conocimiento o la falta de percepción.

4. *El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.* Los errores se deben al uso incorrecto de fórmulas o reglas, las cuales las adaptan erróneamente a una nueva situación.

Los estudiantes al enfrentarse a ciertas tareas algebraicas, ponen en juego su conocimiento aritmético previo, el cual en ocasiones, les impide asimilar la transición que se presenta al pasar de la aritmética al álgebra; ocasionándoles dificultades.

De acuerdo con Matz (1980), dichas dificultades se deben a que los estudiantes no asimilan los cambios conceptuales en el paso de la aritmética al álgebra, por lo que, en ocasiones, se ven forzados a resolver una nueva situación con lo que saben, cometiendo así errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.

Además, Filloy, Rojano y Solares (2004) sostienen que los estudiantes no tienen la suficiente manipulación sintáctica de la variable y que tampoco son capaces de distinguir entre sus diferentes usos.

En específico, en la escuela secundaria surgen por primera vez las letras (como variables) y se espera que los estudiantes aprendan a usarlas de manera muy rápida, pero como no logran un buen entendimiento de éstas, los estudiantes no las usan adecuadamente, y le dan diferentes tipos de interpretaciones.

1.1.2 DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LAS VARIABLES

Un concepto de gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de difícil comprensión entre los estudiantes lo es, en particular, el concepto de variable.

El concepto de variable es considerado básico en la educación matemática, en el sentido de que está colocado en los cimientos de la matemática escolar. Muchos profesores e incluso quienes diseñan los libros de texto, consideran al concepto de

variable como algo “ya dado”, en algunos textos no se encuentra una definición explícita y algunos profesores creen que es un concepto trivial y por tanto no requiere un tratamiento específico para ser asimilado por los estudiantes.

Muchas de las dificultades que los estudiantes encuentran con las variables se relacionan con su incapacidad para reconocer el papel que juegan en un contexto dado. El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se torna frecuentemente en un obstáculo que bloquea el aprendizaje de la matemática.

Por ejemplo, en la investigación que realizó Küchemann (1980), identificó 6 interpretaciones diferentes que hacen estudiantes de secundaria con las literales, las cuales son:

1. Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico.
2. Letra no utilizada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado
3. Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviatura del nombre de un objeto o como un objeto en sí.
4. Letra como incógnita específica: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
5. Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de a sumir distintos valores.
6. Letra como variable: Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

Küchemann afirma que los resultados encontrados en su investigación muestran dos tipos de niveles de comprensión en los estudiantes, en los cuales, el primero abarca las tres primeras categorías en donde reflejan un bajo nivel de respuesta, mientras que en el segundo abarca las tres categorías restantes, en esta categoría los estudiantes muestran un acercamiento al álgebra. Además, el mismo autor propone un orden de dificultad creciente para las seis categorías encontradas.

En otra investigación, realizada por Usiskin (1988), se encontró que las diferentes concepciones del álgebra están relacionadas con los diferentes usos de la variable, lo cual se muestra en la Tabla 1.

Concepción del álgebra	Usos de la variable
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones
Procedimientos para resolver problemas	Incógnitas, constantes
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros
Estudio de estructuras	Marcas arbitrarias en el papel

Tabla 1. Concepciones del álgebra y sus usos

Por su parte Ursini (1994), en su investigación, cuyo propósito fue saber cuáles eran los diferentes usos de la variable, encontró los siguientes:

1) Variable como número general
2) Variable en una relación funcional
3) Variable como incógnita específica

Estos resultados muestran que la interpretación dada por los alumnos no siempre es la apropiada y que frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas. Primero, esto puede deberse de alguna manera al multifacético uso de los símbolos literales, llegando éste a opacar las diferentes caracterizaciones de la variable y causar confusión en los alumnos, y segundo, que las variables son fáciles de usar pero difíciles de entender.

Lamentablemente, las dificultades que se presentan en el álgebra no solo se deben a las interpretaciones de la variable o a que no se les enfatiza la transición entre la aritmética y el álgebra. En este sentido, Ursini (1994) menciona también que, para que un estudiante tenga un buen manejo de la variable como número general debe poder manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

1.1.3 ERRORES EN LA MANIPULACIÓN ALGEBRAICA

Los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, tales como: no recordar o aplicar parcialmente una fórmula, errar al simplificar o desarrollar expresiones algebraicas, omitir signos o literales, suponer que dos expresiones son equivalentes. Muchas veces son problemas de fácil solución, que el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno. No obstante, otras veces se observan problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores.

En el esfuerzo para solucionar ejercicios con expresiones algebraicas es común que los estudiantes los resuelvan sin reflexionar, lo cual los lleva a transformar las expresiones por medio de reglas algebraicas mal utilizadas e ignorando su significado, sin embargo, es necesario tener la capacidad de recordar los significados de dichas expresiones cuando sea requerido.

Booth (1988), por su parte, investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto, aplicando la siguiente regla: “Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha, a menos que el contexto especifique que debe realizarse previamente otra operación”. Según esta regla, un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro.

Linchevski y Herscovics (1994) señalan algunas de las dificultades y errores concretos que manifiestan los estudiantes al transformar expresiones algebraicas tales como: la necesidad de clausura que muestran los alumnos, la particularización de expresiones algebraicas donde les dan valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o la ausencia de paréntesis, la concatenación de igualdades, el fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, la sobre-generalización de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a la operación multiplicación, la falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones y la separación de un número del signo operacional que le precede.

En algunas situaciones los estudiantes son más proclives a cometer errores en expresiones algebraicas cuando éstas involucran números. Wong (1997) afirma que algunos errores pueden ser cometidos si las expresiones algebraicas que involucran números dependen del grado de complejidad de las expresiones o también por el conocimiento algebraico de cada uno de los estudiantes.

Es muy común que los errores en el álgebra aparezcan durante el trabajo con variables. Por ejemplo, Matz (1980) realizó en su estudio un catálogo de los errores que los estudiantes cometen con mayor regularidad, a continuación se muestran algunos ejemplos de ellos:

1. Simplificando 3+23*(S-4)* como 26*(S-4)*

2. Simplificando 3*xy* + 4*yz* como 7*xyz*

3. Calculando $(A+B)^2$ como $A^2 + B^2$

4. Simplificando $\frac{Ax+By}{x+y}$ como A+B

5. Simplificando $\frac{X+3Z}{2X+Y}$ como $\frac{3Z}{2+Y}$

6. Simplificando $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ como 2xy

7. a) Calculando 2(X + 3) como 2X + 3.

   b) Calculando -(3X -W) como -3X -W.

Además de hacer el catálogo de errores ella plantea un modelo de competencia algebraica para explicar por qué se dan estos errores, en el cual afirma que estos errores son provocados por alguna de las dos técnicas de extrapolación, las cuales son: linealidad y generalización.

La linealidad: sucede cuando el estudiante al trabajar con un objeto, lo descompone y trata de manera independiente cada una de sus partes. Los errores de extrapolación lineal se clasifican en errores de distribución generalizada, de aplicación repetida y en los de la regla de reconocimiento.

Distribución generalizada. En general, estos errores se producen cuando expresiones algebraicas son descompuestas mediante la distribución, en las partes que más se pueda, a través de partes de la expresión.

Aplicación repetida. Esta estrategia de extrapolación común es simplemente iterar el operador en donde se podría estar usando una regla.

Regla de reconocimiento. Los errores que resultan de una suposición lineal pueden ser clasificados de acuerdo a la fase en el proceso de resolución de los problemas, si se guía la abstracción de una regla a partir de un problema resuelto. Como en las dos puntos anteriores. Se podrá proporcionar una manera de extender la aplicabilidad de una regla existente.

La generalización: los estudiantes utilizan un puente entre las reglas conocidas y los conocimientos nuevos, generalizan reglas a partir de una regla conocida u optan por otras bajo la suposición de la aplicación.

En la investigación realizada por Muñoz (2002) sobre la valoración de los errores, nos dice:

> *"El tipo de errores que un alumno puede cometer es casi tan grande como el número de alumnos, puede cometer errores que ni siquiera nos imaginamos, pero si se entiende lo que hizo mal y cuáles son los puntos clave que el alumno no domina entonces puede ayudársele con mayor eficacia" (p.1253).*

En su estudio, el mismo autor encontró que hay tres tipos de errores, los cuales pueden ser vistos como:

1. **Errores no graves**: Estos errores no se cometen por falta de conocimiento de los estudiantes, sino que se deben a la falta de concentración, por ejemplo, al tratar de resolver un sistema de ecuaciones, el cual es:

   $x - 1 = y + 1;\ \ x - 3 = 3y - 7$

   donde el estudiante empezó a resolver como:

   $x + y = 1 + 1;\ x - 3y = -7 + 3$

   el error está desde el inicio, porque el debería de haber empezado como:

   $x - y = 1 + 1;\ x - 3y = -7 + 3$

   el error se debió a que aplicó erróneamente la propiedad del inverso aditivo en un término.

2. **Errores por respuestas incompletas.** En este tipo de errores los estudiantes llegan a respuestas superficiales, las cuales no son totalmente incorrectos, pero tampoco corresponde con lo que se les pidió, por ejemplo:

   Al hacer la simplificación se llega al resultado siguiente:

   $$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}$$

   Varios de los estudiantes llegaron al siguiente resultado:

   $$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

3. **Errores graves y muy graves.** Si el estudiante durante la resolución de un problema constantemente utiliza incorrectamente las propiedades, confunde términos, realiza erróneamente las operaciones algebraicas, entonces se tratan de errores graves o muy graves

Rico (1994), por otro lado, propone cuatro líneas de investigación actual en torno a los errores,

1) Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
2) Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
3) Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
4) Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

El mismo Rico señala también varias propuestas para la categorización de los errores. Cada una está inspirada en un modelo particular del procesamiento de información. Hay también algunas clasificaciones que son resultados de investigaciones empíricas sobre los errores.

1.1.4 CLASIFICACIÓN DE ERRORES

La identificación de las diversas clases de errores nos permitió dirigir la atención hacia los diferentes aspectos que los generan, además permitiría elaborar un diagnóstico más efectivo para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades así como en la falta de sentido de los objetos matemáticos.

Por lo anterior, varios autores han hecho categorizaciones de errores, para poder conocer qué es lo que están haciendo incorrectamente y saber cómo se les puede ayudar a corregirlo.

A continuación se presentan algunas categorizaciones y/o clasificaciones realizadas por diferentes autores teniendo en cuenta distintos enfoques.

Socas (2003), por ejemplo, considera tres ejes que permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

1) Obstáculos: conocimientos adquiridos que demuestran su efectividad en ciertos contextos pero no válidos en otros.

2) Ausencia de sentido: relacionado en las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma.

3) Actitudes afectivas y emocionales: Los errores que tienen su origen en *actitudes afectivas y emocionales* tienen distinta naturaleza: falta de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

García (2010), hizo una clasificación de los diferentes errores detectados en su investigación, los cuales son:

1. **Eliminación incorrecta de denominadores**: En este error el alumno reconoce que para eliminar un denominador debe multiplicar toda la expresión por un múltiplo del denominador pero omite multiplicar todos los elementos de la misma, alterando de esta forma el resultado final.

2. **Errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas:** Dentro de esta clasificación encontramos aquellas respuestas en las que aparentemente se sigue un procedimiento de resolución coherente pero se comete un error al realizar alguna de las operaciones básicas aritmético-algebraicas.

3. **Procedimiento inconcluso:** En este tipo de errores, el procedimiento estaba parcialmente correcto pero no se terminó o se interpretaba de manera incorrecta el resultado.

4. **Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas:** Se identificaron errores en los cuales los alumnos utilizaban algún tipo de procedimiento en el que hacen inferencias no válidas de reglas parcialmente recordadas, errores al transcribir datos, aplicación de métodos de tanteo y otras operaciones que aparentemente se realizan por el simple hecho de desarrollar algún procedimiento.

5. **Aplicación parcial de regla de factorización por factor común:** Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes pero no recuerda el paso siguiente del procedimiento dejando inconclusa la operación

o no verifica la validez del factor común o por no respetar las reglas de los exponentes del citado factor.

6. **Asociación incorrecta de productos notables:** En este caso los alumnos intentan asociar las formas y fórmulas de productos notables para resolver la operación.
7. **Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra:** El alumno intenta resolver la expresión algebraica como una operación aritmética, ya sea suma, resta o multiplicación de los coeficientes y exponentes de la misma.
8. **Error en la determinación de la potencia de otra potencia:** Este error se encuentra en algunas pruebas en las cuales el alumno desarrolla la fórmula para el binomio al cubo pero se equivoca al aplicar la regla de multiplicación de los exponentes al parecer por una omisión al multiplicar los mismos.
9. **Resolución aditiva de la potencia de un binomio:** En estos casos los alumnos multiplican los exponentes de cada uno de los elementos de la expresión algebraica ignorando la fórmula correcta de resolución.
10. **Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio:** Este error se presenta cuando el estudiante intenta aplicar la fórmula correspondiente pero al parecer no es capaz de recordarla de manera correcta aunque en algunos casos los procedimientos posteriores tengan coherencia.
11. **Error al realizar productos de polinomios:** En este error el alumno descompone la expresión algebraica en factores simples pero se equivoca al multiplicarlos para encontrar el resultado.
12. **Error de cálculo simple:** Este error se presenta cuando el alumno se equivoca al realizar alguna de las operaciones básicas de la aritmética y por lo tanto obtiene un valor incorrecto que sigue utilizando sin detectar el error.

Por otra parte, Rico (1994) en su investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática, y de acuerdo con la metodología propuesta

determinó seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

a) **Datos mal utilizados.** Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno.

b) **Interpretación incorrecta del lenguaje**. Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

c) **Inferencias no válidas lógicamente.** Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.

d) **Teoremas o definiciones deformados.** Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.

e) **Falta de verificación en la solución.** Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

f) **Errores técnicos**. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados.

Ortigoza y Dueñas (2013) analizaron los errores de estudiantes que se obtuvieron tras aplicar una prueba diagnóstico, mediante las categorías de errores que eligieron para su estudio, las cuales son:

1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.
4. Error al operar algebraicamente.
5. Errores técnicos.

Keller, Shreve y Remmers (1940) hacen una clasificación de los errores que cometen los estudiantes de nuevo ingreso en la Universidad de Purdue, al resolver una prueba diagnóstico, la cual involucra realizar operaciones básicas con expresiones algebraicas, los errores que ellos encuentran son:

1. Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo positivo.
2. Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo.
3. Error en el signo, en la adición de términos.
4. Error numérico, en la adición de términos.
5. Fallar al combinar términos semejantes para simplificar una expresión.
6. Fallar al distribuir la multiplicación.
7. Omitir un término o un símbolo.
8. Fallar al remover un paréntesis para simplificar.
9. Multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada.
10. Multiplicar términos donde la adición está indicada.
11. Sumando donde la multiplicación está señalada.
12. Error al copiar.
13. Errores en el entendimiento, al leer o confundiendo términos u operaciones.
14. Multiplicando polinomios “término a término”.
15. Error al distinguir entre símbolos diferentes.
16. Combinando términos diferentes.
17. Errores numéricos en la multiplicación.
18. Errores en exponentes en la multiplicación.
19. Error al multiplicar por una regla incorrecta o formula equivocada.
20. Errores en los signos de los factores.
21. Error numérico en la factorización o error en el exponente en los factores.
22. Factorizando “término a término”.
23. Factorizando por una formula incorrecta.

24. Error al no factorizar completamente.
25. Al afirmar que la expresión no se puede factorizar.
27. Cambiando de signos arbitrariamente.
31. Error al no cancelar factores comunes.
32. Multiplicación cruzada injustificada.
33. Al dividir por una fracción, al no invertir el divisor.
34. Arbitrariamente multiplicando todas las partes de la fracción.
35. Omitir el denominador o un factor del denominador, de una fracción.
36. Error al añadir o restar partes de una fracción.
37. Sumando numeradores y denominadores indiscriminadamente al combinar fracciones.
38. Cancelando factores diferentes del polinomio del numerador y denominador
39. Cancelación término a término.
40. Miscelánea de errores o errores en los que el trabajo del estudiante es incomprensible.
41. Respuesta omitida

No obstante que la investigación hecha por Keller et al (1940) fue realizada hace mucho tiempo, el interés por estudiar los errores que cometen los estudiantes en el álgebra sigue siendo actual.

2. JUSTIFICACIÓN

Con lo mencionado anteriormente, se tiene la preocupación de que los estudiantes tienen muchos problemas al emplear el álgebra y tienen muchos errores los cuales pueden ser por diferentes razones, sin embargo, nuestra preocupación es que a los estudiantes les es difícil la manipulación algebraica.

En la investigación que hacen Vega, Molina, y Castro (2012), nos hacen ver los errores que los estudiantes tienen al resolver ejercicios que son de reducción de fracciones algebraicas. Sin embargo, existen muy pocas investigaciones que se centran en el estudio de suma y resta de fracciones algebraicas, por lo que nos interesa saber qué errores exhiben los estudiantes al trabajar con este tipo de ejercicios, por lo que surge la pregunta:

¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes, cuando realizan la suma o resta de fracciones algebraicas?

Otra pregunta a tratar de responder será:

¿Cuáles son las estrategias que los estudiantes usarán para resolver los ejercicios?

Lo que nos lleva a nuestros objetivos en la investigación.

2.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Lo que va a guiar esta investigación será nuestro objetivo general, el cual es: ***Identificar los errores que cometen los estudiantes cuando reducen fracciones algebraicas***. Sin embargo, esto no sólo es lo que se pretende en esta investigación, además también se buscará identificar las estrategias que se emplearon para resolver los ejercicios.

Y a su vez, se buscará hacer una clasificación de los errores que cometieron los estudiantes al resolver el cuestionario, por lo que otro objetivo específico será: ***Hacer una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes de nuevo ingreso al intentar resolver ejercicios de suma y resta de fracciones algebraicas.***

3. METODOLOGÍA

Para poder realizar esta investigación se tomó en cuenta a todos los alumnos de nuevo ingreso en la FCFM de la BUAP. En total se aplicaron 309 pruebas, sin embargo, solo se tomaron en cuenta 273 pruebas, y esto se debe a que 36 de ellas eran de estudiantes que ya habían cursado el primer semestre, es decir, llevaban uno o dos años en la facultad, y consideramos que esto podría ser una ventaja por las materias que han cursado en la universidad.

Además, cabe señalar que los estudiantes son de diferentes carreras que se encuentran en la F.C.F.M; es decir, se aplicaron cuestionarios a los estudiantes que estaban estudiando las siguientes carreras:

1. Matemáticas.
2. Matemáticas Aplicadas.
3. Física.
4. Física aplicada.
5. Actuaría.

Cabe señalar que del total (273) de cuestionarios que se tomaron en cuenta, 68 son de estudiantes de Física, 44 son de Física Aplicada, 43 son de estudiantes de Matemáticas, 42 son de estudiantes de Matemáticas Aplicadas y 76 son de estudiantes de Actuaría.

En este capítulo se describe las características de los participantes y el instrumento que fue utilizado con el propósito de averiguar cuáles son los errores que cometen los estudiantes de nuevo ingreso en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Se aplicó un cuestionario que constó de 14 ejercicios (ver anexo), posteriormente, se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas a este cuestionario. Por último, se realizaron entrevistas a 6 estudiantes y se realizó el análisis e interpretación de las mismas.

3.1 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN ESTUDIADA

En esta parte se realiza una descripción de las materias del área de matemáticas que llevan algunos de los bachilleratos y/o preparatorias, a lo largo de los 3 años que los estudiantes cursan. La inclusión de las materias de álgebra que cursan los estudiantes en el bachillerato o preparatoria nos permitirá determinar si son capaces de resolver el cuestionario, el cual nos sirvió para cumplir los objetivos de la investigación.

Los bachilleratos y/o preparatorias que se van a tomar en cuenta para realizar la comparación son:

1. BACHILLERATO GENERAL ESTATAL
2. COBAEP
3. PREPARATORIAS BUAP

En la tabla 2 se describen las materias que llevan, por semestre, los Bachilleratos Generales y COBAEP, mientras que en la tabla 3, se muestran las materias que cursan las preparatorias BUAP por año.

SEMESTRE	BACHILLERATO GENERAL ESTATAL	COBAEP
1	ÁLGEBRA	MATEMÁTICAS I
2	GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA	MATEMÁTICAS II
3	GEOMETRÍA ANALÍTICA Y FUNCIONES	MATEMÁTICAS III

4	CÁLCULO INTEGRAL	MATEMÁTICAS IV
5	ESTADÍSTICA	CÁLCULO DIFERENCIAL MATEMÁTICAS FINANCIERA I PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I
6	RAZONAMIENTO MATEMÁTICO MODELOS MATEMÁTICOS	CÁLCULO INTEGRAL MATEMÁTICAS FINANCIERA II PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

Tabla 2. Materias del área de matemáticas por semestre de BGE y COBAEP

AÑO	PREPARATORIAS BUAP
1	MATEMÁTICAS I INFORMÁTICA I
2	MATEMÁTICAS II INFORMÁTICA II
3	CÁLCULO ESTADÍSTICA INFORMÁTICA III

Tabla 3. Materias del área de matemáticas por año de las Preparatorias BUAP

Como se puede ver en las tablas anteriores esas son las materias que llevan a lo largo de los tres años del bachillerato o preparatoria según sea el caso, pero lo que nos interesa saber es en qué materias se estudian los temas que se necesitan para resolver el cuestionario, por lo que a continuación se describirán brevemente cada una de las materias donde se abordan los temas de álgebra:

Bachillerato General Estatal

Álgebra: Unidad II. Leyes de los exponentes, operaciones con polinomios, productos notables y factorización.

COBAEP

Matemáticas I: Bloque IV. Ejecuta sumas, restas y multiplicaciones con polinomios. Comprende las diferentes técnicas de factorización. Utiliza los productos notables de diferencia de cuadrados.

Preparatorias BUAP

Matemáticas I: El tema central de esta asignatura es el álgebra elemental, se entiende como el estudio del cálculo simbólico y de la resolución de ecuaciones, polinomios, expresiones racionales y ecuaciones algebraicas elementales.

Con lo anterior, se trató de abarcar la mayoría de los planes de estudio del área de matemáticas, de las diferentes escuelas, y se puede decir que pese a tener diferentes materias, las materias antes señaladas contienen temas similares, los cuales se localizan en Álgebra I, Matemáticas I. Estos temas son: reducción de términos semejantes, productos notables, factorización, binomio al cuadrado, entre otros temas que se necesitan para poder resolver el cuestionario.

De acuerdo con lo expuesto en este apartado, supusimos que con los temas mencionados los estudiantes de nuevo ingreso en la FCFM deberían de ser capaces de resolver los ejercicios de álgebra que se presentan en el cuestionario.

3.2 INSTRUMENTO

El cuestionario que se propuso para la investigación (ver anexo), está planteado para que los estudiantes lo resuelvan con la estrategia que utilizaban en aritmética, es decir, que la estrategia que utilicen sea la que utilizaban al resolver fracciones con solo números. Además, también utilizando los temas que aprendieron en el bachillerato.

Como se mencionó anteriormente, el cuestionario consta de 14 ejercicios los cuales fueron extraídos de diferentes libros de álgebra que a continuación se mencionan:

I. Elementos de álgebra. (1917) Wentworth, J. y Smith, D. E; Ginn y compañía.
II. Curso de álgebra. (1959) Anfossi, A; Editorial Progreso.
III. Primeras nociones de álgebra. (s.f.) Boyer, J.B; Editorial enseñanza.
IV. Álgebra. (1998). Rees, P. y Sparks, F; Reverté ediciones.

En la tabla siguiente se describe de qué libros fueron seleccionados los ejercicios que se tomaron en cuenta para el cuestionario, el cual nos sirvió para realizar la investigación:

Número de ejercicio	**Nombre del libro**
2,4,5,6	Elementos de álgebra
11,12,13	Curso de álgebra
9,10	Primeras nociones de álgebra
7, 8,14	Álgebra

Tabla 4. Ejercicios seleccionados por libro

En la tabla anterior se puede ver claramente cuántos y cuáles ejercicios son los que se tomaron de cada libro para el cuestionario; sin embargo, en la tabla no aparecen los ejercicios 1 y 3, los cuales son un derivado de los ejercicios 2 y 4 respectivamente (ver anexo). Estos ejercicios son muy parecidos, solo difieren en el signo de alguno de los denominadores, por lo que se buscaba saber si los estudiantes se darían cuenta de esta diferencia.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este capítulo describiremos los errores que los estudiantes cometieron al intentar resolver el cuestionario que se les aplicó. Además, se detallan las características de los principales errores cometidos.

Inicialmente se examinaron cada uno de los cuestionarios que se están tomando en cuenta, con el fin de distinguir cada uno de los errores que se produjeron al contestar dicho cuestionario, después se fueron clasificando de acuerdo con las características similares que podrían presentar en cada uno de los ejercicios o entre las demás pruebas y por último se fueron clasificando tomando en cuenta las tipologías previamente revisadas.

En la exhibición de tales errores se hace una breve discusión de lo que realizaron los estudiantes, además de localizar estos errores en las tipologías antes descritas. También se ponen imágenes las cuales pueden servir de ejemplo para resaltar lo que se menciona de dicho error. Cabe señalar que en el título de cada una de las imágenes se hace mención del número de la prueba de donde se obtuvo tal imagen, y el número del ejercicio. Esto se indica con un paréntesis, por ejemplo, (18,3) significa que la imagen corresponde a la prueba 18 ejercicio 3.

4.1 ERRORES DETECTADOS

Procedimiento inconcluso. En estos errores los estudiantes realizan todas las operaciones correctamente, sin embargo, no llegan a simplificar completamente el ejercicio y no llegan a la respuesta, esto se puede ver en la Figura 1.

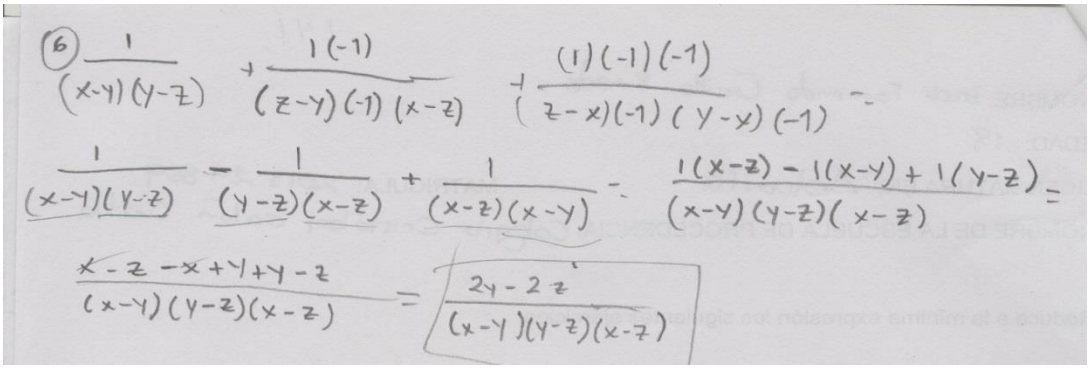

Figura 1. Procedimiento inconcluso. (141,6)

En este ejercicio se puede ver que todo lo que hace es correcto, sin embargo, le faltó factorizar un 2 en el numerador para llegar a una expresión más simplificada.

Muñoz (2002) sugiere que este tipo de errores son debidos a respuestas incompletas, puesto que los estudiantes llegan a una respuesta superficial, la cual no es errónea, sin embargo, no es lo que se les pide. Por otra parte, García (2010) llama a este tipo de errores como errores de procedimiento inconcluso, ya que el estudiante realiza bien todos los cálculos pero no termina el ejercicio.

Este error lo cometieron aproximadamente el 63% de los estudiantes que respondieron el cuestionario. El porcentaje de esta categoría es muy alto y esto podría deberse a que los estudiantes no supieron qué más hacer para reducir el ejercicio o simplemente no les dio tiempo para contestar el cuestionario.

Errores debidos a la confusión de términos. Estos errores son generados porque los estudiantes escriben los símbolos o literales de manera muy parecida a otros.

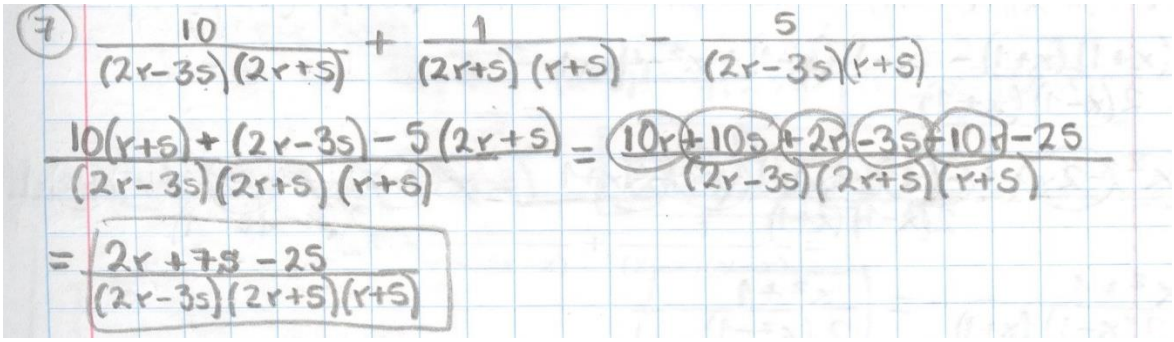

Figura 2. Errores debidos a la confusión de términos. (213,7)

En la Figura 2, se puede ver un ejemplo de este tipo de error, se puede interpretar como un error de distracción, en el cual el estudiante cambia la literal “S” por un “5”.

Muñoz (2002) afirma que este tipo de errores son del tipo de errores no graves**,** es decir, este tipo de errores no se cometen por falta de conocimiento, sino que se deben a la falta de concentración. Keller et al (1940), entre los errores que ellos reportan, sostienen que este tipo de errores son: Errores en el entendimiento, al leer o confundiendo términos. Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes que respondieron el cuestionario.

Errores por Multiplicación cruzada. En este tipo de errores se encuentran aquellos en donde los estudiantes resuelven los ejercicios como si fueran de división, como se muestra en la Figura 3. En los dos casos se realizó mediante una multiplicación cruzada.

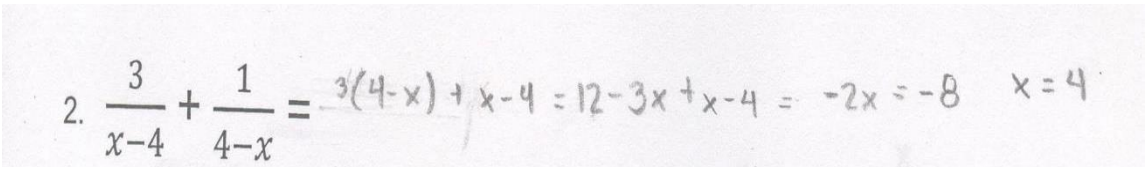

Figura 3. Error por multiplicación cruzada. (152,2)

En este error, se puede ver cómo el estudiante para resolver este ejercicio multiplica las fracciones de forma cruzada, sin tomar en cuenta si se trata de una suma o resta de fracciones algebraicas. Además de cometer este tipo de error el estudiante resuelve el ejercicio como si se tratara de una ecuación, por lo que al último le queda un valor para la “x” como se puede apreciar en la imagen anterior.

Booth (1988) menciona que este error puede atribuirse al uso inapropiado de fórmulas o reglas, dado que el estudiante aplica parcialmente la regla para sumar fracciones. Para Keller et al (1940) este tipo de errores son clasificados como multiplicación cruzada injustificada.

Por otro lado, Matz (1980), menciona que este tipo de errores (ver Figura 3) son errores de ejecución más que errores conceptuales, ya que, al intentar llevar acabo un procedimiento se ejecuta parcialmente. Este error lo apodan como “denominador común perdido”, ya que aparece el fragmento como si el estudiante hubiera aplicado la transformación:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \text{AD+CB}$$

Este error lo cometieron aproximadamente el 10% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Errores por omitir un término o un símbolo. En este tipo de errores se encuentran aquellos en donde se les olvida poner algún dato necesario para la solución del ejercicio.

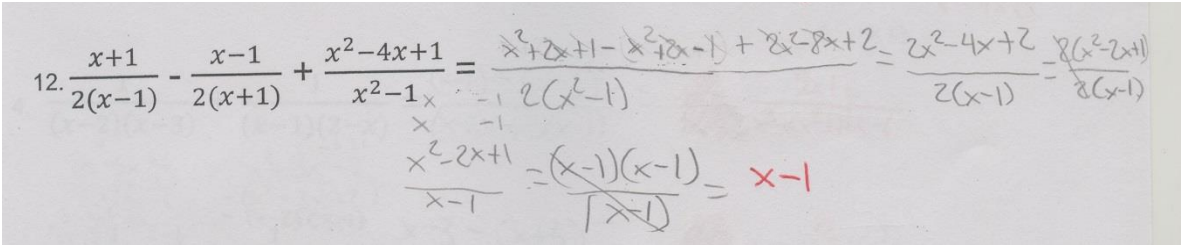

Figura 4. Error por omitir un término o un símbolo. (135,12)

Se aprecia en la Figura 4, que todo el procedimiento fue realizado correctamente, sin embargo el estudiante omitió un exponente (en el denominador) lo que le generó un resultado erróneo. Por lo que este error también podría ser provocado por una falta de concentración como afirma Muñoz (2002), y sería un error de tipo no grave. A su vez Keller et al (1940) afirman que este tipo de errores son causados por la omisión de un término o un símbolo.

Este error lo cometieron aproximadamente el 12% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Errores por una mala interpretación de la variable. En esta categoría entran los ejercicios en los que los estudiantes intentaron despejar la variable o los estudiantes le asignan un número específico a la variable, como se aprecia en la Figura 5.

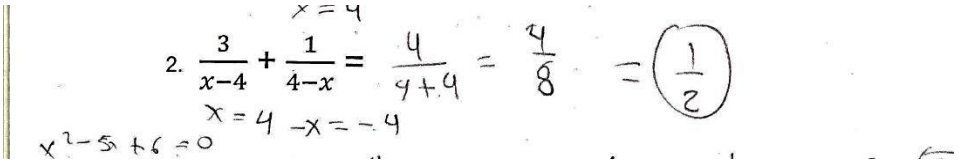

Figura 5. Error por una mala interpretación de la variable. (39,2)

De acuerdo con Küchemann (1980) este tipo de error se da como una forma en la que los estudiantes evitan operar las letras como números desconocidos, en este caso al dar un valor numérico a la letra.

Este error lo cometieron aproximadamente el 4% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Asociación incorrecta de productos notables. Estos errores se deben a que los estudiantes intentan asociar las formas y reglas de los productos notables de forma errónea.

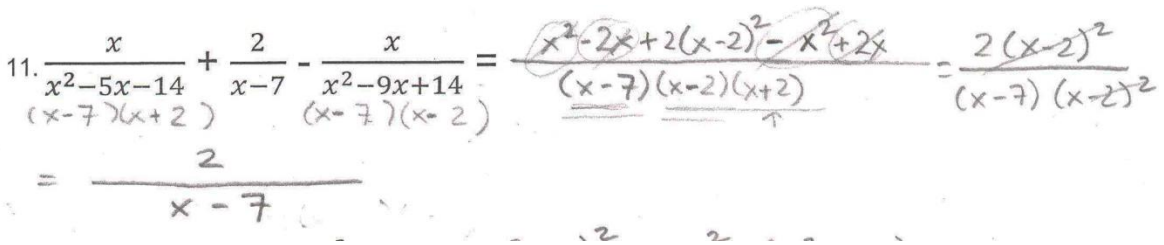

Figura 6. Asociación incorrecta de productos notables. (73,11)

Como se observa en la Figura 6, el estudiante confunde la regla de la diferencia de cuadrados, con la del binomio al cuadrado. García (2010) llama a este tipo de errores como 'asociación incorrecta de productos notables'. Para Rico (1994) entraría en su categoría de teoremas o definiciones deformadas, ya que este error se produce por una deformación de una regla identificable. A su vez Keller et al (1940), sostienen que estos errores son causados por el hecho de multiplicar mediante una regla incorrecta o la utilización de una fórmula equivocada.

Este error lo cometieron aproximadamente el 8% de los estudiantes que respondieron el cuestionario.

Errores al combinar términos diferentes. En este tipo de errores los estudiantes no respetan la forma en la que se reducen términos semejantes, combinan tanto las variables como los exponentes, como se observa en la Figura 7.

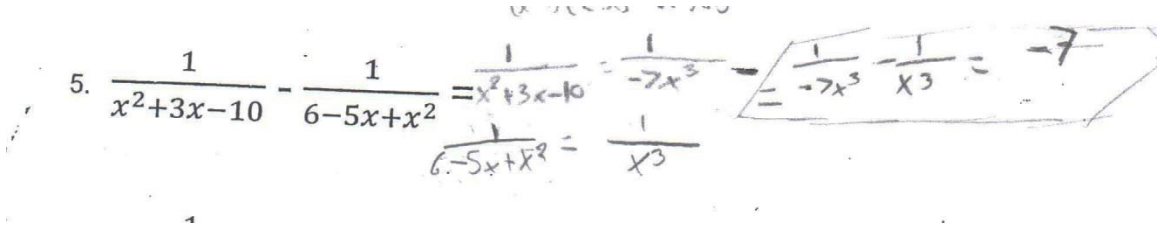

Figura 7. Error al combinar términos diferentes. (252,5)

Como ejemplo de este tipo de error, en la imagen se puede ver como el estudiante maneja por separado cada una de las fracciones, lo que hace es sumar

los coeficientes, después suma los exponentes de las literales y multiplica las variables, con lo cual obtiene un resultado parcial, en cada una de las fracciones, después estos resultados parciales los coloca de acuerdo a como iba cada una de las fracciones en la resta, después lo que hace es eliminar las fracciones, haciendo a un lado el único coeficiente y este es lo único que le queda.

Ortigoza y Dueñas (2013), llaman a este tipo de errores **"**Error al operar algebraicamente**"**, ellos señalan que este error puede ser provocado por una sobregeneralización de propiedades. Para Keller et al (1940) estos errores son causados por la combinación de términos diferentes. En la clasificación de García (2010), estos errores entran en la categoría de uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra.

Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Errores por descomponer la fracción. En este tipo de errores lo que hacen los estudiantes es descomponer la fracción en el mismo número de elementos que tiene el denominador, un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la Figura 8.

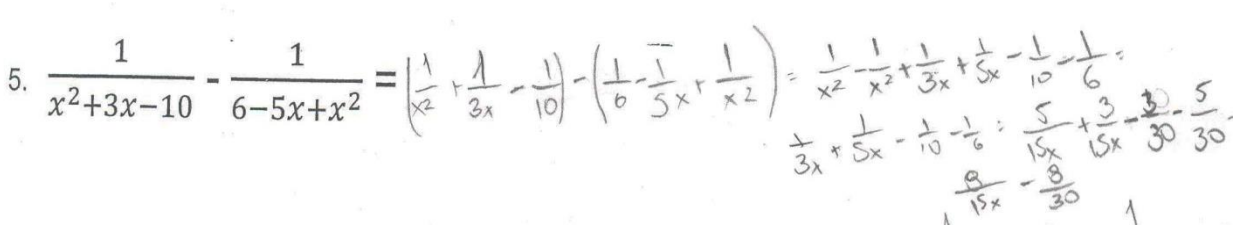

Figura 8. Error por descomponer la fracción. (240,5)

En la figura anterior, se puede ver claramente lo que hizo el estudiante, descompuso cada una de las fracciones en tantas como el número de sumandos que tiene el denominador de cada fracción; es decir, descompone la fracción en varias fracciones, para después reagruparlas de forma que en que los denominadores se parezcan.

En este caso, Matz (1982) sostiene que este tipo de errores se puede dar por una técnica de extrapolación llamada linealidad, la descomposición lineal es una de las clases más frecuentes de errores. En general, estos errores se producen cuando expresiones algebraicas son descompuestas mediante la distribución, en las partes que más se pueda, a través de partes de la expresión.

Este error de la fracción puede ser construido invirtiendo la regla del numerador y denominador de la regla correcta la cual es:

$$\frac{B+C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$$

En otras palabras, la regla incorrecta es un análogo simétrico de la regla correcta, la cual puede estar formada al invertir las fracciones en la regla correcta. Esto puede ocurrir si un estudiante no ve ninguna razón para tratar el denominador de una fracción de forma diferente que el numerador.

Este error lo cometieron aproximadamente el 6% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Errores al distribuir la multiplicación. En esta categoría los estudiantes realizan parcialmente la regla de la distribución, un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la Figura 9.

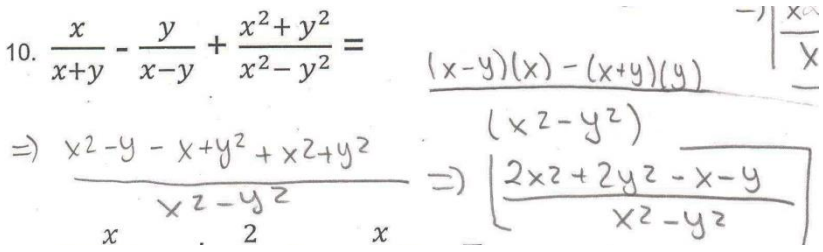

Figura 9. Error al distribuir la multiplicación. (54,10)

En la figura anterior, se puede ver claramente que el estudiante no aplica correctamente la regla de la distribución del producto respecto a la suma, es decir:

$$c(a+b) = ca + cb$$

Lo que hizo fue realizar el producto parcialmente. En este caso el estudiante solo distribuyó la variable que se encuentra afuera de los paréntesis a un sólo término, sin embargo esto lo repite en la siguiente multiplicación que se encuentra señalada en el mismo numerador. Este tipo de errores podrían evitarse si los estudiantes realizan una comprobación, es decir, revisar que la expresión que les resulta es una expresión similar a la que tenían.

En la clasificación de Keller et al (1940) este error entraría en los errores por "fallar al distribuir la multiplicación". Para Matz (1982), errores de la forma 2(x+3) = 2x+3, son considerados comúnmente para ser un tipo de error de ejecución parcial.

Este error lo cometieron aproximadamente el 15% de los estudiantes que respondieron el cuestionario.

Error en el signo, en la adición de términos. En esta categoría aparecen los errores donde los estudiantes dejan un signo menos afuera de una suma de fracciones como se puede ver en la Figura 10.

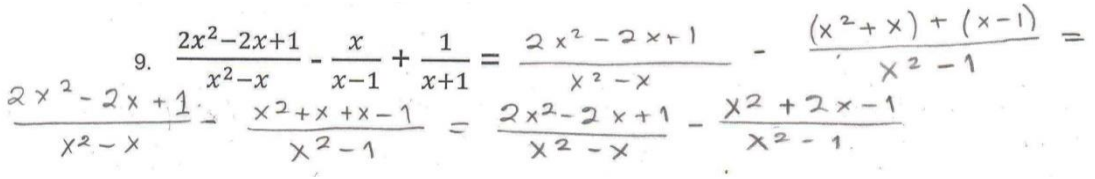

Figura 10. Error en el signo, en la adición de términos. (49,9)

En este tipo de error, el estudiante no es capaz de reconocer que el signo "-" (menos), sólo está afectando al segundo término del ejercicio, por lo que cuando intenta sumar los dos últimos sumandos, el sujeto sigue dejando el signo menos

afuera de la suma que realiza, sin que se de cuenta de que también ese signo está afectando ahora a ambos miembros lo que lo lleva a una respuesta errónea. Este error estaría en “error en el signo, en la adición de términos” de Keller et al (1940).

Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al distinguir entre términos diferentes. Dentro de esta categoría se encuentran aquellas respuestas en las que se toman algunos elementos como si fueran iguales, cuando no lo son como se observa en la Figura 11.

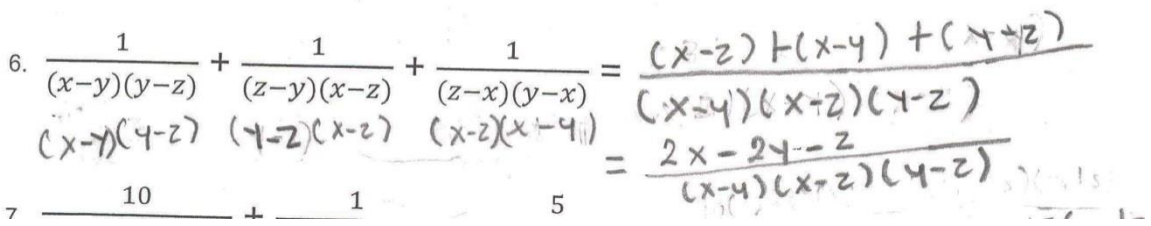

Figura 11. Error al distinguir entre términos diferentes. (50,6)

En este error el estudiante supone que algunos binomios de los denominadores son iguales, es decir, no toma en cuenta que los binomios tienen signos diferentes, con lo cual él llega a una respuesta incorrecta. Para Keller et al (1940) este tipo de error estaría en “error al distinguir entre símbolos diferentes”.

Este error lo cometieron aproximadamente el 6% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada. Este tipo de errores se presenta al realizar una multiplicación de unos polinomios cuando lo que se debe hacer es una suma de los mismos polinomios, un ejemplo de esto se puede ver en la Figura 12.

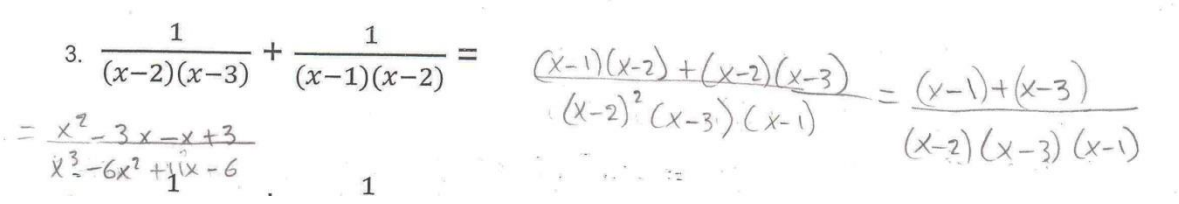

Figura 12. Error por multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada. (66,3)

Este error podría deberse a una desatención de parte del estudiante, porque en lugar de realizar una suma de dos binomios, lo que hace es una multiplicación con estos binomios, con lo cual llega a una respuesta errónea. Para Keller et al (1940), estaría en la categoría de errores por “multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada”.

Este error lo cometieron aproximadamente el 2% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error en el mínimo común múltiplo (m.c.m.). Este tipo de errores se encuentran en aquellos estudiantes que intentan sacar el m.c.m de una forma errónea o en donde los estudiantes confunden el M.C.D con el m.c.m. Un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la siguiente figura.

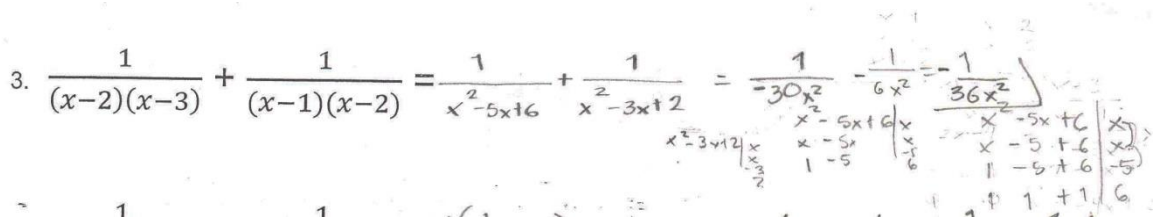

Figura 13. Error en el mínimo común múltiplo. (68,3)

En la Figura 13, se puede observar que el estudiante sabe cómo sacar el mínimo común múltiplo con expresiones algebraicas, sin embargo, no sabe utilizarlo para poder resolver el ejercicio correctamente, ya que no se tenía que sacar en la

forma que lo hizo, si él hubiera sacado el m.c.m. con los denominadores que están desde el inicio podría haber llegado a la respuesta.

Este error lo cometieron aproximadamente el 1% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Multiplicando polinomios "término a término". Dentro de los errores que se encuentran en esta categoría los estudiantes realizan parcialmente la multiplicación de polinomios. Un ejemplo de ello se puede ver en la Figura 14.

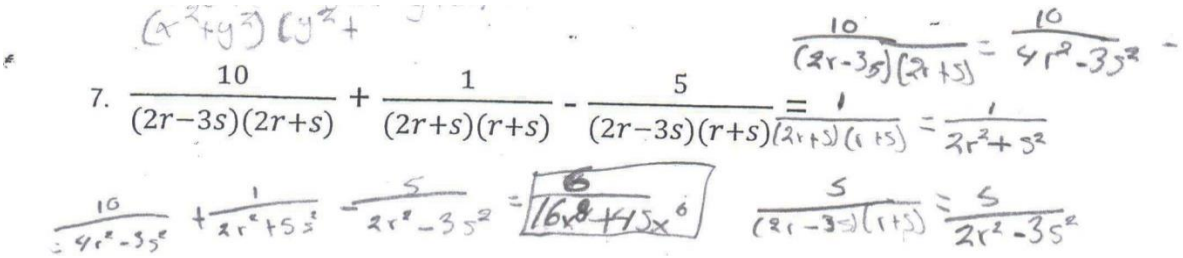

Figura 14. Multiplicando polinomios término a término. (252,7)

En este ejemplo se puede ver claramente cómo es que el estudiante multiplica los polinomios que están en cada uno de los denominadores término a término, sin embargo, este mismo método lo repite para obtener el denominador en la fracción que da por respuesta. Este tipo de errores también se encuentran en la categoría "multiplicando polinomios termino a término" de Keller et al (1940). Por otro lado, Matz (1980) asegura que este tipo de errores se deben a la técnica de extrapolación lineal, dado que el estudiante maneja de manera independiente los términos, en este caso el estudiante combina términos iguales o lo que es también término a término, lo cual conduce a errores de multiplicación como:

$$(AX + B)(CX + D) \rightarrow ACX^2 + BD$$

El estudiante ignora las interacciones entre las partes y simplemente multiplica los “términos iguales”, olvidando realizar los productos cruzados. Este error lo cometieron aproximadamente el 7% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al realizar la adición donde la multiplicación está indicada. En esta categoría se encuentran los errores en los cuales los estudiantes omiten la multiplicación señalada y realizan la adición de los binomios. En la figura 15, se puede notar lo que los estudiantes realizan con los polinomios que están en cada uno de los denominadores.

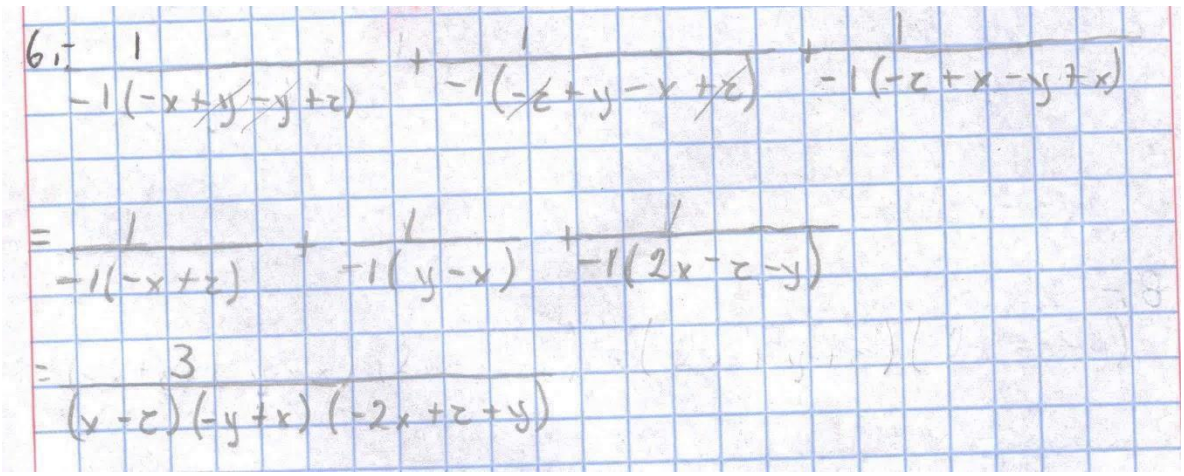

Figura 15. Error al realizar la adición donde la multiplicación está indicada. (197,6)

En la figura anterior, se puede ver que en cada uno de los denominadores el estudiante realiza una suma con todos los términos de cada uno de los binomios, en cada una de las fracciones, sin embargo, este estudiante no prestó atención en que cada uno de los binomios estaban multiplicando. Este error se encuentra en la clasificación de “sumando donde la multiplicación está señalada” de Keller et al (1940).

Este error lo cometieron aproximadamente el 2% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al factorizar un término. En esta categoría se encuentran todos los errores en los cuales los estudiantes intentan factorizar un término, cuando no todos los elementos contienen el término que se intenta factorizar, un ejemplo de este error se puede notar en la Figura 16.

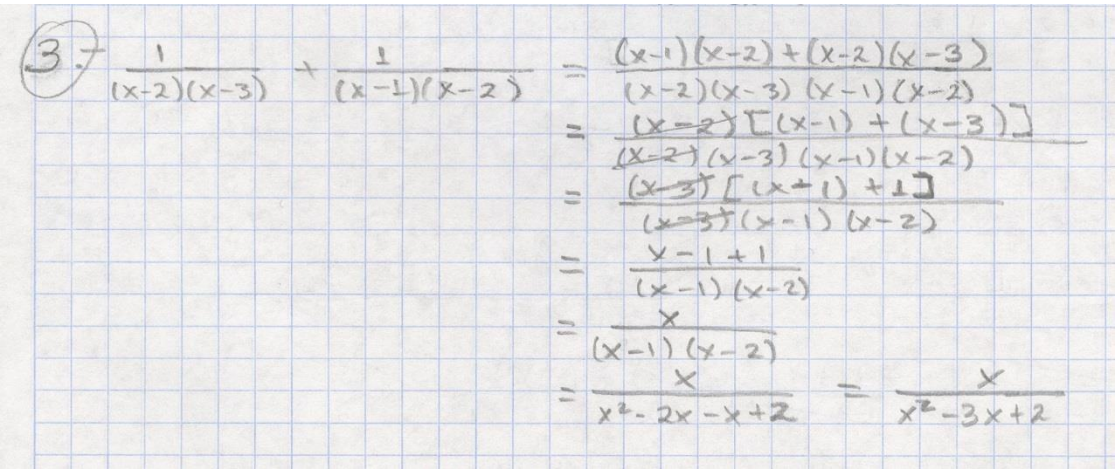

Figura 16. Error al factorizar un término. (165,3)

En la Figura 16, se puede apreciar cómo un estudiante intenta factorizar un término en la tercera igualdad, con el cual procede a cancelar un término en el denominador, en este caso el término que intenta factorizar es (x-3), pero como se puede observar en la imagen este término no está en todos los términos de la suma, llevándolo a efectuar una factorización errónea y a no tener la respuesta correcta..

Este error lo cometieron aproximadamente el 5% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error por hacer suma directa en el numerador y denominador. Dentro de esta categoría están los errores en donde los estudiantes suman directamente tanto numerador como el denominador. Un ejemplo de este error se puede ver en la Figura 17.

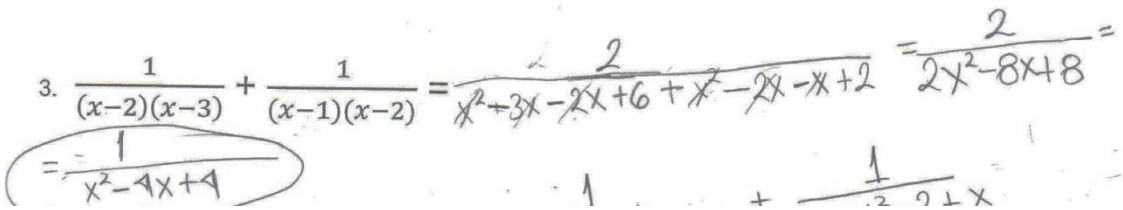

Figura 17. Error por hacer suma directa en el numerador y denominador. (8,3)

Como se puede observar en la figura anterior, el estudianteno respetó la forma en la que se realizan ejercicios que tienen que ver con suma de fracciones, ya que este estudiante suma directamente los elementos que se encuentran en el numerador, en el denominador realiza lo mismo sin embargo previamente realiza el producto de los binomios que se encuentran ahí.

En este tipo de casos los estudiantes podrían estar ignorando completamente la forma en la que se deben de realizar este tipo de ejercicios, o tal vez no encuentran una razón para relacionar este tipo de ejercicios con las fracciones que se realizan en aritmética, y lo que hacen es sumar directamente todos los elementos que están en cada numerador además realizan lo mismo con los elementos que se encuentran en los denominadores.

Para Keller et al (1940) este tipo de errores están en la clasificación de “sumando numeradores y denominadores indiscriminadamente al combinar fracciones”.

Este error lo cometieron aproximadamente el 25% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al factorizar término a término. En este tipo de errores los estudiantes realizan una factorización errónea, en la Figura 18, se puede ver cómo uno de los estudiantes trató de hacer la factorización.

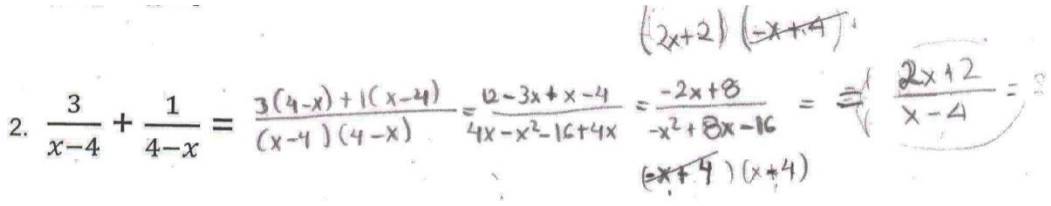

Figura 18. Error al factorizar término a término. (44,2)

En la Figura anterior, se puede ver que el estudiante trata de factorizar los elementos que se encuentran en el numerador de la tercera igualdad, de una manera incorrecta. Lo que intenta realizar es una factorización término a término como lo dicen Keller et al (1940).

Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al cancelar términos. Dentro de esta categoría se encuentran los errores en donde los estudiantes eliminan términos tanto en el numerador como en el denominador, cuando esto no se podía realizar.

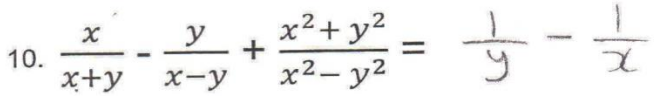

Figura 19. Error al cancelar términos. (9,10)

En la Figura 19, lo que hace el estudiante es eliminar la “x” del numerador y denominador en el primer sumando, en el segundo sumando elimina (de la misma forma que en el primer sumando) la “y”, además en el tercer sumando elimina cada uno de los elementos, sin importarle el signo menos. Para Keller et al (1940) estos errores están en la categoría “cancelación termino a término”. Pero para Matz (1980) estos errores se deben a una técnica de extrapolación por iteración, los errores de cancelación de la forma:

$$\frac{Ax+By}{x+y} \longrightarrow \text{A + B}$$

Como en la tercera fracción, puede ser reproducido con la estrategia de extrapolación por iteración. En donde la regla base (iterada) es probablemente:

$$\frac{Ax}{x} \longrightarrow \text{A}$$

Esto les lleva a descomponer linealmente la expresión, cancelar repetidamente y luego simplemente sumar los resultados parciales. Este error lo cometieron aproximadamente el 35% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al multiplicar unos polinomios. En esta categoría se encuentran todos los errores que se pueden derivar al multiplicar los polinomios tales como error en algún exponente, en algún coeficiente o algún signo, etc. Un ejemplo se puede apreciar en la Figura 20.

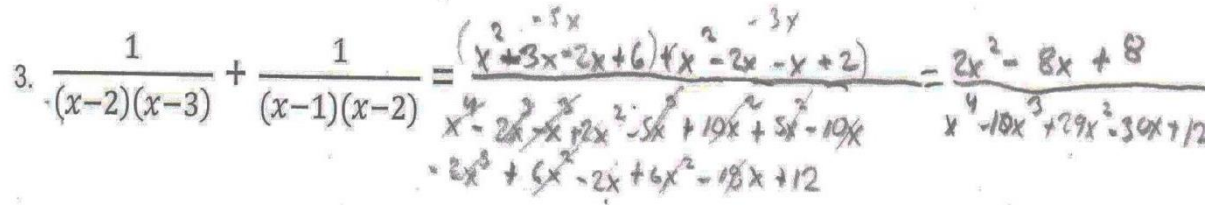

Figura 20. Error al multiplicar unos polinomios. (5,3)

En la figura anterior, el estudiante que realiza la prueba número 5, el error que comete es cuando multiplica los polinomios de la forma en la que aparecen en el numerador, pero en la parte de arriba hace la reducción de los términos semejantes, por lo que al multiplicar mezcla tanto los términos que aparecen como el número que escribe arriba.

El error mostrado en la figura 20 entraría en la clasificación “error al multiplicar por una regla incorrecta” de Keller et al (1940). Por otra parte, en la investigación que realizó García (2010), este error se encontraría en “error al realizar productos de

polinomios", puesto que el estudiante intenta descomponer la expresión en factores más simples, sin embargo, el estudiante se equivoca al realizar la multiplicación.

Este error lo cometieron aproximadamente el 40% de los estudiantes que contestaron el cuestionario. El porcentaje tan alto en esta categoría se debe principalmente a que la mayoría de los estudiantes cuando multiplicaron los polinomios, que se encuentran en los denominadores, no escribieron todas las cuentas que realizaron o las rhacen en otra hoja aparte y no la entregaron, razón principal del nombre de esta categoría.

Error al intentar factorizar un trinomio. En este tipo de errores están los intentos fallidos por factorizar un trinomio de segundo grado. En la Figura 21 se encuentra un ejemplo.

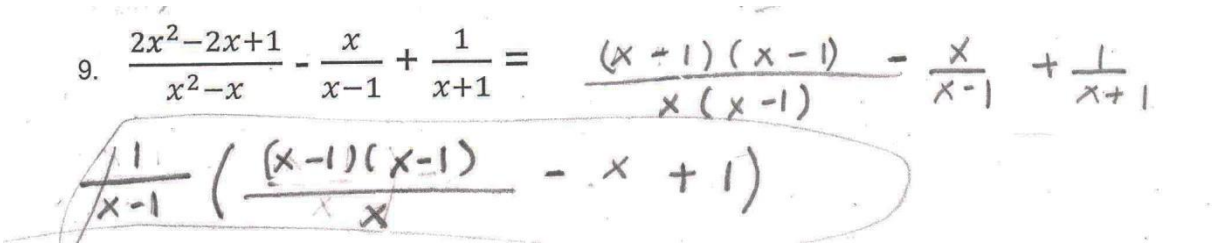

Figura 21. Error al intentar factorizar un trinomio. (48,9)

En la figura anterior, se puede ver cómo el estudiante intenta factorizar el trinomio de segundo grado que está en el primer sumando. En este caso no se percató de que lo hizo erróneamente, tal vez si hubiera comprobado se hubiera dado cuenta que no estaba correcto lo que hizo, además también realiza una incorrecta factorización de un término en los denominadores. Para Keller et al (1940), este error estaría en la categoría de "factorizando por una formula incorrecta".

Este error lo cometieron aproximadamente el 10% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo. En este tipo de errores se encuentran aquellos en los cuales quitan los

paréntesis sin distribuir el signo menos en cada uno de los elementos, también aquellos en donde no quitan los paréntesis solo realizan la suma o resta sin tomar en cuenta el signo menos fuera del paréntesis, por ejemplo.

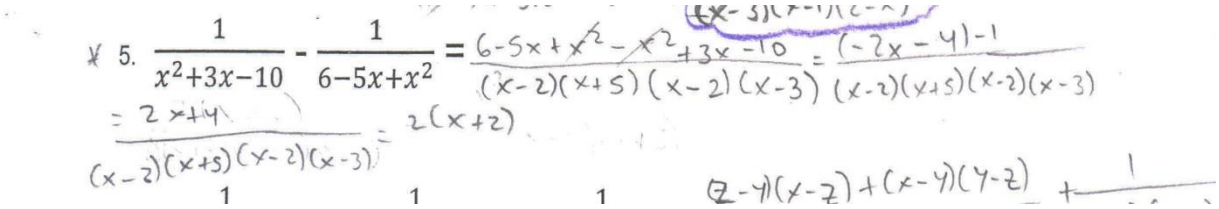

Figura 22. Error en los signos, en la eliminación paréntesis precedidos por un signo negativo. (18,5)

Se puede apreciar en la Figura 22, que el estudiante no distribuye el signo menos en cada uno de los términos, o que simplemente el estudiante puso el signo menos pero no colocó los paréntesis, lo cual lo condujo a una respuesta errónea.

En este tipo de errores la mayoría de los estudiantes hace caso omiso del paréntesis como si se tratara del mismo caso cuando se encuentra un signo más antes del paréntesis, o simplemente quitan el paréntesis como si no estuviera afectando a la expresión que se encuentra dentro, o en otros casos, como se aprecia en la Figura 22, los estudiantes solo cambian el signo del primer término que se encuentra dentro de los paréntesis, en cada uno de los casos anteriores, los signos de cada uno de los términos no son los correctos al eliminar o quitar los paréntesis.

Este tipo de errores entrarían en la categoría "Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo" de Keller et al (1940).

Este error lo cometieron aproximadamente el 15% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al emplear su estrategia. Aquí se encuentran aquellos errores en los cuales aplican una estrategia de una forma inadecuada, por ejemplo.

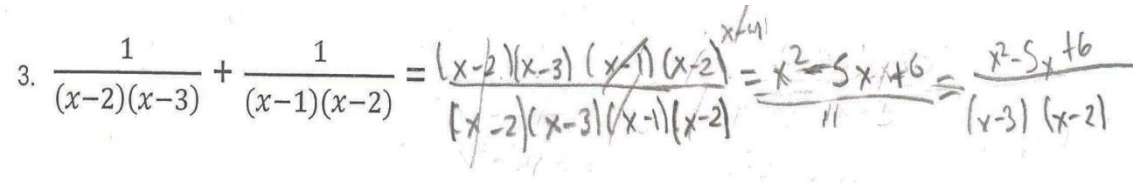

Figura 23. Error al emplear su estrategia. (6,3)

En la Figura 23, se puede observar que el estudiante intentó realizar este ejercicio multiplicando los denominadores pero omitió el signo más, con lo cual obtiene lo mismo tanto en el numerador como en el denominador.

En esta categoría también se encuentran aquellos errores que al utilizar la estrategia de sumar fracciones con diferente denominador, el estudiante escribe de forma correcta los términos que van en el numerador sin embargo no escriben todos los términos que deberían de estar en el denominador. También se encuentran aquellos errores en donde el estudiante suma los numeradores pero multiplica los denominadores, en este caso a los estudiantes les faltaría escribir algunos términos en el numerador.

En la clasificación realizada por García (2010) este tipo de error entraría en la categoría de procedimientos propios e inferencias no válidas, dado que utiliza un procedimiento no válido de una regla parcialmente recordada.

Este error lo cometieron aproximadamente el 46% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al reducir términos semejantes. En esta categoría se encuentran los errores producidos por no tomar en cuenta los signos o por sumar erróneamente los coeficientes. Un ejemplo se puede ver en la figura siguiente.

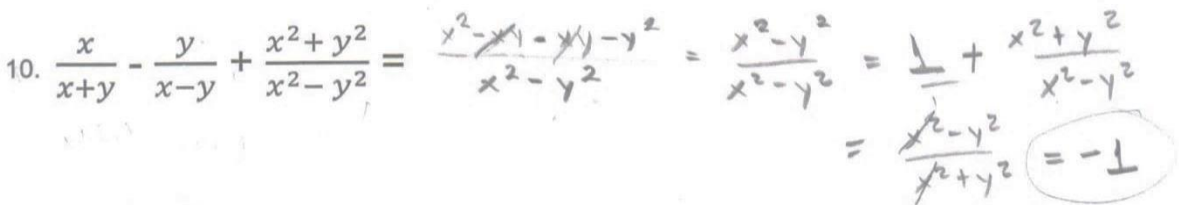

Figura 24. Error al reducir términos semejantes. (41,10)

En la Figura 24 se puede ver cómo el estudiante intenta realizar la resta de las primeras dos fracciones, sin embargo, al reducir los términos semejantes en el numerador elimina unos términos, cuando éstos no se eliminaban entre sí. Además, también se puede ver que el estudiante realiza otro tipo de error, ya que cancela términos en donde no se podía.

Este tipo de errores se podría deber a que los estudiantes a veces no toma en cuenta los signos, es decir, cuando reducen los términos semejantes omiten el signo del primer término, también podrían deberse a que muchas de las veces al estar realizando los ejercicios, éstos los hacen lo más rápido posible sin percatarse del error.

En la investigación realizada por Rico (1994) este error entraría en la categoría de “errores técnicos” ya que podría deberse a un error de cálculo. Por otro lado, para García (2010) este error entraría en la categoría de “error de cálculo simple”, ya que el estudiante se equivoca al realizar una operación básica de donde obtiene un valor incorrecto que se sigue utilizando sin percatarse.

Este error lo cometieron aproximadamente el 19% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Miscelánea de errores. Es esta categoría entran los errores en los que es difícil comprender lo que trataron de hacer los estudiantes, es decir, aun tratando de sumar, restar, multiplicar, dividir o al combinar operaciones, no es posible saber cómo obtuvieron el resultado. Algunos de estos ejemplos se pueden ver en las Figuras 25,26,27.

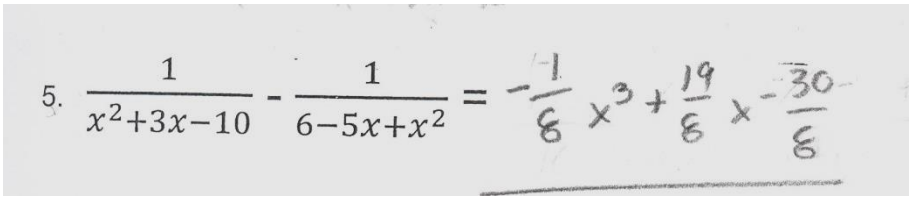

Figura 25. Miscelanea de errores. (199,5)

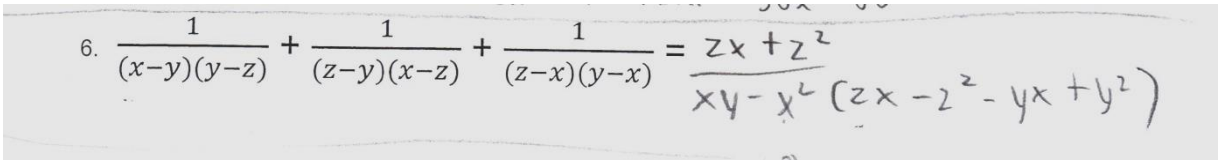

Figura 26. Miscelanea de errores. (181,6)

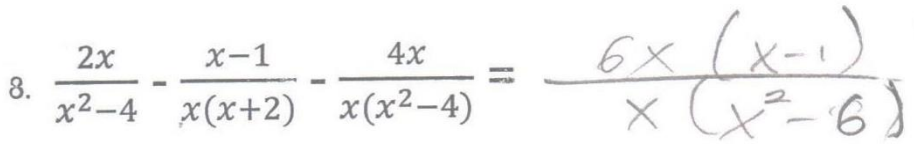

Figura 27. Miscelanea de errores. (24,8)

El estudiante que realizó la prueba 199, en el ejercicio 5 (véase la Figura 25), se puede ver claramente que le quedan como resultado tres fracciones, en las cuales es difícil saber cómo se obtuvieron. Mientras que en la Figura 26, no se puede saber cómo obtuvo los términos que puso como resultado.. Por otro lado, en la Figura 27, es difícil saber de donde obtuvo el denominador que puso como respuesta.

Los errores en esta categoría entrarían en la clasificación con el mismo nombre de Keller et al (1940). Este error lo cometieron aproximadamente el 31% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

Error al cambiar de signo o de número. En esta clase de errores se encuentran aquellos en los cuales los estudiantes cambian algún signo o número en la realización del ejercicio, un ejemplo aparece enseguida.

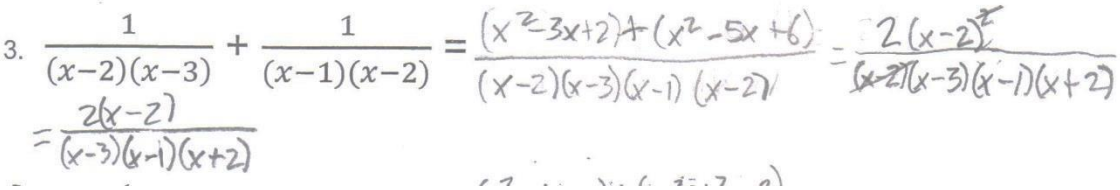

Figura 28. Error al cambiar de signo o de número. (159,3)

En la Figura 28, se observa que el estudiante realiza correctamente todas las operaciones, sin embargo, en el denominador de la segunda igualdad le cambia el signo a uno de los binomios, con lo cual llega a una respuesta incorrecta. Algunos de los errores de esta categoría entrarían en la categoría de Keller et al (1940), “cambiando de signos arbitrariamente”.

Este error lo cometieron aproximadamente el 7% de los estudiantes que contestaron el cuestionario.

4.2 ESTRATEGIAS

Con la intención de llegar a otro de nuestros objetivos, en esta sección se analizarán y se describirán las estrategias que los estudiantes utilizaron para contestar el cuestionario.

Factorización de uno o varios signos menos. En esta estrategia lo que hicieron es factorizar uno o varios signos menos en el denominador para poder tener algún elemento en común en los denominadores, como se puede ver en la Figura 29.

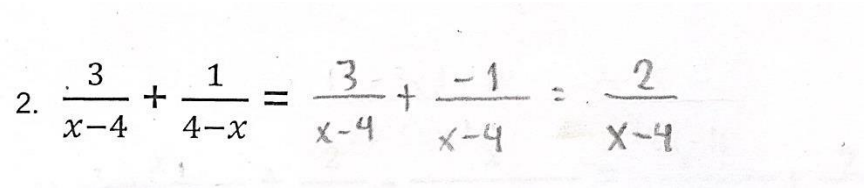

Figura 29. Factorización de uno o varios signos menos. (162,2)

En esta estrategia, el estudiante se da cuenta de que el denominador de las fracciones se parecen, solo que los signos de los denominadores son diferentes (o están cambiados); por lo que le cambia el signo al denominador y al numerador, con

lo cual obtiene el mismo denominador en las fracciones que se van a sumar; además esto genera que no tenga que realizar tantas operaciones y así poder simplificar más fácilmente el ejercicio.

Regla para sumar fracciones. Esta estrategia es la que se utiliza en aritmética, y se emplea cuando tienen denominadores diferentes; sin embargo también se puede emplear para resolver este tipo de fracciones.

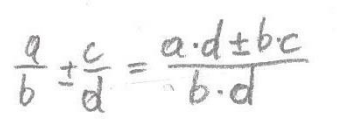

Figura 30. Regla para sumar fracciones. (185)

En la Figura 30 se puede observar que el estudiante quien contesto el cuestionario número 185, señala la estrategia que utiliza para poder sumar fracciones. Esta estrategia se esperaba que la utilizaran, ya que si no se acordaban como sumar este tipo de fracciones al menos podían operarlas como fracciones numéricas.

Multiplicar por algún término a alguna fracción del ejercicio. En esta estrategia lo que hacen los estudiantes es multiplicar, tanto el denominador como el numerador, por una cantidad para poder obtener el mismo denominador. Un ejemplo de cómo se utilizó esta estrategia se puede ver en la Figura 31.

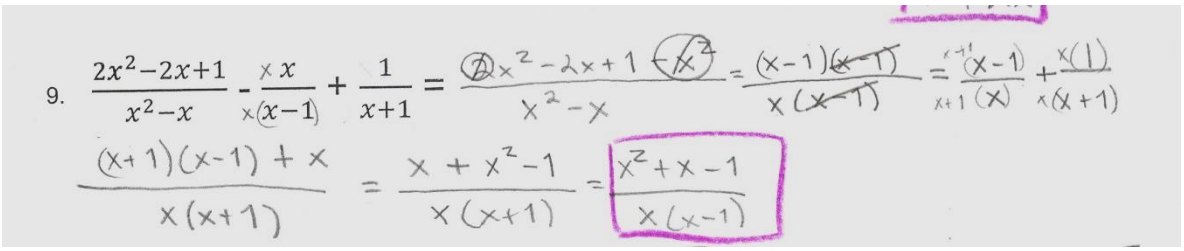

Figura 31. Multiplicar por algún término a alguna fracción del ejercicio. (180,9)

En la imagen anterior se puede observar que este estudiante suma los dos primeros términos de la suma, pero para poder hacerlo, al segundo sumando lo multiplica por x/x para poder obtener el mismo denominador que el primer sumando, reduce términos semejantes, después factoriza y cancela unos términos. Después, para poder sumar el tercer sumando, multiplica a cada fracción (al numerador y denominador) por el denominador de la otra fracción, con esto puede realizar operaciones más sencillas y llegar al resultado.

Factorización de algún elemento del denominador. En este tipo de estrategia los estudiantes se dan cuenta de que las cuentas se simplifican si factorizan algún término de algunos denominadores, se puede observar cómo factorizan un elemento en la Figura 32.

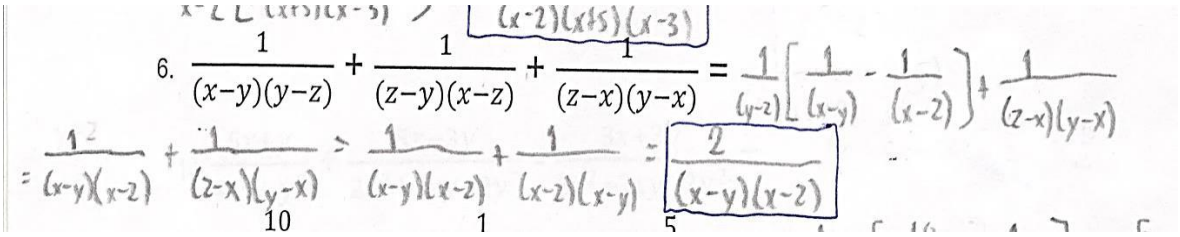

Figura 32. Factorización de algún elemento del denominador. (162,6)

Este tipo de estrategia requiere un mejor manejo del álgebra, ya que para aplicarla tuvo que cambiarle el signo a un binomio del segundo denominador, con esto logró tener un elemento en común entre los dos primeros denominadores, el

cual le sirve para factorizar y hacer las fracciones más pequeñas. Dentro de los corchetes aplica además la siguiente regla:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Después de realizar todo el procedimiento, el término que había factorizado es cancelado por un término en el numerador (no escribe todas las cuentas pero es así como se podría eliminar ese término). Por último, lo que hizo fue cambiarle los signos para tener (en las fracciones que quedan) el mismo denominador y hacer solo la suma en el numerador.

Utilizar un cambio de variable. En esta estrategia se observa que para evitar hacer todas las operaciones, los estudiantes renombran a uno o varios polinomios de otra forma, se ve claramente cómo fue que lo hicieron en la Figura 33.

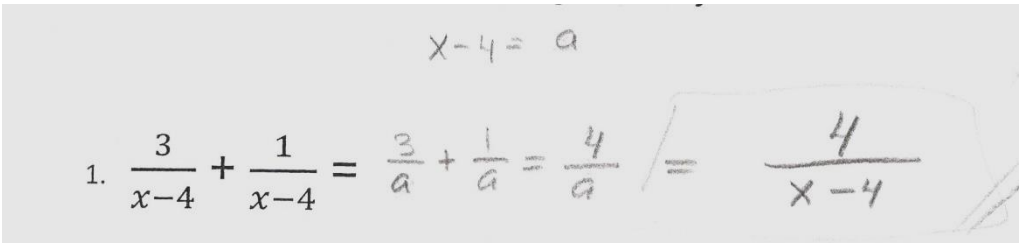

Figura 33. Utilizar un cambio de variable. (194,1)

Con el fin de realizar un mejor análisis de algunos de los errores y estrategias que cometieron los estudiantes durante los ejercicios que resolvieron, se entrevistó a algunos estudiantes que contestaron el cuestionario.

4.3 ANÁLISIS CUALITATIVO

.

Después de haber aplicado el cuestionario propuesto para esta investigación y, posteriormente, el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a cada uno de los ejercicios, se seleccionaron 6 estudiantes al azar para realizarles una entrevista. Además, cabe señalar que dichos cuestionarios se seleccionaron de acuerdo con una estratificación: estrato alto, estrato medio y estrato bajo. Esta estratificación se basó en la que propuso Filloy (1999), y se adaptó para este estudio.

La estratificación se creó a partir del número máximo de respuestas correctas al resolver el cuestionario. Cabe mencionar que el número de ejercicios resueltos correctamente va de 0 hasta 11, por lo que cada uno de los estratos quedó como sigue: el estrato bajo se encuentra de 0 a 3 ejercicios correctos; el estrato medio se encuentra de 4 a 7 ejercicios correctos; y el estrato alto se encuentra de 8 a 11 ejercicios correctos. Una vez definidos los intervalos de cada estrato, se procedió a seleccionar en cada uno de los estratos a dos personas al azar, para realizarles las entrevistas.

Se trabajó con una entrevista semiestructurada (Clement, 2000; Goldin, 2000; Piaget, 2001), ya que el cuestionario (que se utilizó para la entrevista) era el mismo para todos, sin embargo, cada uno de los estudiantes contestó con los conocimientos adquiridos previamente y además dependiendo de lo que contestaron en cada una de las preguntas de la entrevista, se podría cambiar la siguiente pregunta, es decir, la entrevista fue desarrollada a partir de las respuestas que dieron los estudiantes al resolver el cuestionario y fue modificándose dependiendo de lo que respondieran.

Las entrevistas se realizaron individualmente y se video grabaron con el consentimiento de cada uno de los estudiantes. Por otra parte, las entrevistas fueron realizadas en un ambiente agradable y tranquilo, esto permitió que se les escuchara, durante el tiempo que tardaran en responder, con paciencia para así formular la siguiente pregunta, sin tratar de sugerir ningún tipo de respuesta mientras se desarrollaba la entrevista.

A fin de investigar más acerca de los procedimientos, pero sobre todo conocer cómo es que se dieron algunos de los errores realizados en el cuestionario, a

continuación se presentan algunos fragmentos de los diálogos de las entrevistas entre un estudiante y el entrevistador; en donde Ei denota a cada uno de los entrevistados, es decir:

E1: es el primer estudiante entrevistado. Estrato medio.

E2: es el segundo estudiante entrevistado. Estrato medio.

E3: es el cuarto estudiante entrevistado. Estrato alto.

E4: es el quinto estudiante entrevistado. Estrato bajo

E5: es el sexto estudiante entrevistado. Estrato bajo

E6: es el séptimo estudiante entrevistado. Estrato alto.

Y el entrevistador lo denotaremos como I.

A continuación se presenta un fragmento entre el diálogo que se tuvo durante la entrevista entre un estudiante y el entrevistador:

I: ¿Me podrías decir que fue lo que hiciste en el ejercicio 12?

E2: En el ejercicio 12… (Revisa el ejercicio y se toma unos segundos para pensar). En primer lugar cambié de orden las cosas para que apareciera primero el término donde está $\frac{x^2-4x+1}{x^2-1}$ y al mismo tiempo, bueno y después dejé el que aparecía primero y al final dejé el de la resta, no me gusta que estén al principio las restas.

I: ¿Por qué no te gusta que estén al principio?

E2: Es que siento que me confunden, no sé si tenga que ver porque soy derecho o no sé, ese menos no me gusta ahí, entonces lo dejo hasta el final, que primero sean los positivos y al final los negativos.

En este caso, el estudiante reagrupa los términos de izquierda a derecha, empezando a poner los términos con signo positivo para después poner los que tienen signo menos, aunque sólo es un término el que tiene signo negativo, para después poder realizar la suma de los términos con signo positivo y después restarle el término con signo negativo.

En otro caso, en un ejercicio parecido un estudiante respondió a la misma pregunta de la siguiente forma:

I: ¿Me podrías decir que fue lo que hiciste en el ejercicio 9?

E4: Umm… (Se toma unos segundos para pensar). Ok en el ejercicio 9, lo que hice primero fue el primer, la primera fracción restarla con… (Se queda pensando)

I: ¿Restarla con qué?

E4: Bueno aquí, creo que… (Piensa unos segundos), uju primero realice ehh, sume la segunda fracción y la tercera fracción […] sumando la segunda y tercera fracción y ya después le restaría la primera fracción […]

I: Es decir, lo que realizaste fue sumar el segundo y tercer sumando y eso se lo restaste a la primera fracción, ¿eso fue lo que realizaste?

E4: uju, sí.

En el anterior fragmento de la entrevista queda más claro que el estudiante restó todo lo que estaba del lado derecho del signo menos (ver el ejercicio 9 del anexo), a lo que estaba del lado izquierdo, es decir, no pudo ver que el signo menos solo estaba afectando al segundo término, como lo hizo E2, al darse cuenta de que había dos términos con signo positivo y uno con el signo negativo.

Las respuestas que los estudiantes dieron a los ejercicios de adición de fracciones fueron variadas, en algunas de esas respuestas los estudiantes descomponían las fracciones. El siguiente fragmento de entrevista ilustra lo anterior.

I: ¿Me podrías decir que fue lo que hiciste en el ejercicio 5?

E5: uju, bueno se supone que es… es que no me acuerdo que hice, (se queda pensando unos segundos) este… apliqué, como es fracción este de, se divide entre el primer termino de abajo, entre el segundo y el tercero, igual la otra fracción luego sumé, bueno hice la suma […]

I: Antes de que continúes, entonces ¿cambiaste a tres fracciones?

E5: aja, si fue esa más que nada mi idea.

En este caso, lo que realizó el estudiante fue partir cada una de las fracciones del ejercicio 5 (ver anexo) al mismo número de términos que tenía el denominador de cada fracción. De acuerdo con Matz (1980) este error es provocado porque los estudiantes le dan el mismo tratamiento tanto al numerador como el denominador, es decir, el estudiante no ve razón alguna para utilizar de forma diferente al denominador y esto hace que el estudiante le dé el mismo tratamiento que el numerador.

Por otro lado, hay estudiantes que pueden cambiar una fracción a una suma de forma correcta. El siguiente fragmento ilustra mejor lo anterior.

I: ¿Me podrías decir que fue lo que hiciste en el ejercicio 9?

E2: En el ejercicio 9, ajá, pues lo primero que hice fue factorizar, factoricé en el primer miembro de la ecuación ehhh… el numerador se factoriza y abajo también se factoriza […]

I: […]

E2: […]

I: hay cuatro términos y el ejercicio original sólo tiene tres términos (señalándole la igualdad siguiente del ejercicio), ¿de dónde salió el otro término?

E2: si hay cuatro términos… déjame ver… uju… ahhh ya, si ya vi es que nada mas factoricé, separé estos dos que están acá (señalando los dos primeros términos de los cuatro que él puso), bueno más bien, el primer término de la ecuación o del polinomio más bien, este (señalando el primer numerador) lo separé en $2x^2$-x^2 sobre x^2-x y aparte el 1 sobre x^2-x .

En este caso, el estudiante puede descomponer una fracción en dos fracciones de manera correcta, sin embargo, a pesar de que realizó esto adecuadamente no le ayudó de mucho para llegar a la respuesta correcta, ya que después no supo qué hacer con las fracciones que le resultaron de separar la primera fracción.

En algunos ejercicios los estudiantes supusieron que algunos elementos de los denominadores eran iguales, en unos casos se podría deber a que tenían el signo contrario, sin embargo, otros suponían que los denominadores eran iguales "después" de desarrollar el producto que se marcaba en los denominadores, en el siguiente fragmento de una entrevista se nota lo anterior.

I: ¿Me podrías explicar lo que realizaste en el ejercicio 7?

E5: En el 7… (Después de pensar unos segundos), bueno aquí… me parece que resolví los dos binomios de abajo, la multiplicación (refiriéndose a los binomios de los denominadores).

I: ¿A qué te refieres con resolví?

E5: Ah bueno, no sería, este hice la operación que marcaba aquí y ya me quedaban las siguientes fracciones y luego… me parece que quedaban los dos divisores iguales y esos los sumé, que son los de la segunda y tercera fracción.

I: Es decir, ¿que cuando tú hiciste las operaciones que marcaban los paréntesis te quedaban los denominadores iguales?

E5: Me quedaban dos fracciones con divisores iguales, fue eso, y ya en la siguiente igualdad pues quedó ese […]

En este caso, después de realizar el producto que se marcaba en el denominador de la segunda y de la tercera fracción, y a pesar de que algunos de los binomios de los denominadores son diferentes, le dio como resultado que los denominadores son iguales, esto podría ser por realizar de forma inadecuada el producto y también podría haberse evitado si se hubiera percatado de que los binomios no eran iguales.

En otro tipo de error, los estudiantes intentan factorizar un trinomio pero lo hacen de una manera incorrecta. El fragmento siguiente de una entrevista, hará más claro lo anterior.

I: ¿me podrías decir cómo realizaste el ejercicio5?

E4: umm… (Se toma unos segundos para pensar), ok, en el ejercicio 5, primero factoricé el polinomio en ambos lados de la resta y luego… multipliqué igual para sacar el factor común y después dividí en ambos lados […]

I: ¿realizaste lo mismo que el ejercicio 2?

E4: Si, solo factorizando primero.

I: Y la factorización, ¿cómo la realizaste? o ¿Cómo la empezaste hacer?

E4: Bueno primero veo cual es la, el… el valor que se repite, por decirlo así, que sería en este caso “x” y luego encontrar dos valores que multiplicados me den el ultimo valor y que restados o sumados me den el segundo.

En el anterior fragmento de la entrevista el estudiante explica cómo realizar la factorización de un trinomio, pero cuando realiza dicha factorización no se da cuenta de que la realizó erróneamente, aun cuando después deja el trinomio de la forma en la que estaba inicialmente, es decir, multiplicó el par de binomios que le quedaron al

realizar la factorización, su error podría haberse evitado si se hubiera dado cuenta de que no le quedó lo mismo, antes y después de factorizar.

Otro tipo de errores en los cuales se podrían haberse evitado solo con revisar paso a paso lo que hacían, serian como se muestra en el siguiente dialogo.

I: ¿Me podrías decir lo que realizaste en el ejercicio 12?

E1: Ajá, pues este (señalando el denominador de la tercera fracción) es lo mismo que la multiplicación de (x+1)(x-1) entonces se queda como común múltiplo y el 2 también, lo multiplicaba por lo que sobrará, por lo de arriba luego hice las restas y sumas correspondientes.

I: En la segunda igualdad ¿Cómo fue que la obtuviste? Después de esta (señalándole la segunda igualdad) ¿Qué fue lo que hiciste?

E1: […]

I: Pero en el denominador, ahí mismo ¿qué pasó?

E1: Umm… me comí el x^2

I: ¿A qué te refieres con “me comí”?

E1: Ahh bueno le quité el cuadrado, perdón.

I: ¿Lo quitaste?

E1: Ajá, no lo pase de aquí para acá (señalando)

En este caso, solo hubiera bastado checar cada uno de los pasos que realizó para que el mismo estudiante se pudiera dar cuenta de que faltaba un elemento importante para poder llegar a la respuesta, sin embargo, no lo hizo y eso le provocó una respuesta errónea.

Además, cabe señalar que en esta sección no solo nos vamos a fijar en los errores que se cometieron, sino que además, como en la sección anterior, haremos

notar algunas de las estrategias “correctas” que tuvieron los estudiantes al resolver el cuestionario, con el objetivo de saber cómo es que lo realizaron. En el siguiente fragmento de la entrevista, un estudiante explica con qué método realizó el ejercicio.

I: ¿Cómo fue que realizaste el ejercicio 9?

E3: Umm… (Piensa unos segundos), ahh ya igual (refiriéndose a un ejercicio que se le pregunto anteriormente), lo mismo, lo que hice fue que al m.c.m. de los denominadores, lo iba dividiendo entre cada uno de los denominadores y los multiplicaba por el numerador y al final solo hice un poco de aritmética, eso creo.

I: Me has comentado acerca del m.c.m. ¿Sabes encontrar el m.cm. con expresiones algebraicas?

E3: No entiendo, ¿Cómo de este tipo?

I: Si, de este tipo.

E3: Si, no. (Afirmando que si puede).

I: ¿Podrías sacar el m.c.m. con los denominadores del ejercicio 3?

E3: El 3, ¿no importa que me tarde mucho?

I: No, pero si lo vas diciendo mientras lo haces, mejor.

E3: […]

I: […]

E3: […]

I: […]

E3: Bueno yo diría que a la primera expresión como el factor x-2 es común entre las dos expresiones amm… bueno es obvio que el m.c.m. debe contener a ese factor entonces solo lo que podemos hacer es multiplicar el x-3 y el x-1para obtener el m.c.m. […]

En este caso, el estudiante explica la forma de cómo encontrar el m.cm. lo cual le podría haber ayudado para realizar de forma más corta el ejercicio y le podría haber ahorrado tiempo para resolver el ejercicio 3, sin embargo, no hizo el ejercicio por este método. Ahora bien, cabe señalar que en el fragmento de la entrevista anterior, el estudiante menciona que realiza aritmética, cuando lo que realizó fueron operaciones algebraicas.

Otro tipo de estrategias que utilizaron para realizar menos cuentas fue factorizar alguno de los términos del denominador. El siguiente fragmento de entrevista deja más claro lo que se trata de decir con factorizar un término del denominador.

I: Me podrías decir lo que realizaste en el ejercicio 6?

E6: En el 6… permíteme (Piensa unos segundos)… bueno pues son 3, hay 3, bueno son 3 factores, son 3 puedo decir, son 3 amm… como lo digo, fracciones.

I: Si, son 3 fracciones.

E6: Entonces, me di cuenta que en dos puedo sacar como factor común $\frac{1}{y-z}$

I: ¿Cómo fue que lo sacaste si…?

E6: Por cómo, multiplicando y dividiendo una… es que una está al revés? Bueno, no es y-z precisamente, es z-y.

I: Si.

E6: Multiplicando ambos, ambos… numerador y denominador de esa fracción por -1.

I: Y con eso ¿qué hiciste?

E6: lo saqué como factor común y-z, entonces, ya queda como una resta y pues el otro lo dejé expresado como estaba

En este caso, el estudiante es capaz de reconocer que algunos de los binomios (de los denominadores del ejercicio) se parecen, es decir, los binomios tienen signos

diferentes, por lo cual el estudiante se ve en la necesidad de cambiarle los signos a algunos binomios, lo que le permite tener por lo menos un binomio en común en los denominadores, el cual le sirve para poder factorizarlo y además le sirve para reducir operaciones.

Además, a cada uno de los entrevistados se les realizó una pregunta con el fin de saber si eran capaces de reconocer cuáles de los temas vistos en álgebra fueron los que utilizaron para resolver el cuestionario, es decir, se buscaba saber si los estudiantes eran capaces de reconocer algunos de los temas siguientes; reducción de términos semejantes, productos de polinomios, factorización, productos notables, ley de los signos, mínimo común múltiplo con expresiones algebraicas, leyes de los exponentes, simplificación y/o operaciones de fracciones algebraicas.

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no fueron capaces de reconocer todo lo que utilizaron, esto se hará más explícito en el siguiente fragmento de la entrevista con un estudiante.

I: ¿Qué temas vistos en el bachillerato fueron los que utilizaste para contestar el cuestionario?

E6: Umm… saber manejar fracciones, álgebra.

I: Algebra, a que te refieres ¿podrías ser más específico?

E6: Bueno me refiero a saber realizar operaciones con, que no sean números, letras (haciendo una seña de comillas con los dedos).

I: ¿a qué te refieres con letras?

E6: pues a eso, hacer operaciones que no sean con números, no específicamente, saber factorizar, reducir términos, umm… que más, pues creo que ya.

I: ¿Eso fue todo lo que utilizaste?

E6: “mueve la cabeza diciendo si”

En este caso nos podemos percatar de que el entrevistado solo menciona factorizar y reducción de términos, además, también dice que se debe saber manejar fracciones y saber realizar operaciones con letras. Con lo anterior podemos notar que el estudiante no es capaz de reconocer todo lo que utilizó.

Sin embargo, en la mayoría de los estudiantes (al menos todos los estudiantes entrevistados) no son capaces de reconocer los temas que utilizaron para contestar el cuestionario. Otro ejemplo es el siguiente fragmento de entrevista.

I: ¿Qué temas vistos en el bachiller fueron los que utilizaste para resolver el cuestionario?

E2: ¿Qué temas?, pues… por ejemplo, factorización que es lo más obvio, este… suma y resta de fracciones, este… ah por ejemplo, es que no me acuerdo si es parte como de productos notables, eso de saber x^2- 1 para partirlo, creo que es lo mismo factorización, solo fue eso.

I: ¿Solo eso?

E2: Si, no hay nada más

.

En este otro caso, el estudiante menciona que utilizó la factorización y productos notables. También indica que emplea suma y resta de fracciones, sin embargo, no sólo utilizó eso, solo que como todos los alumnos entrevistados, no fue capaz de identificar cada una de las cosas que utilizó para resolver el cuestionario.

Por otra parte, existen estudiantes que aun después de revisar, con calma y con tiempo para contestar qué fue lo que hicieron en los ejercicios, no podían darse cuenta de que lo que habían realizado estaba incorrecto, un ejemplo de esto es el estudiante entrevistado E5, el cual contestó que su idea fue separar las fracciones del ejercicio 5, para convertir cada fracción en tres diferentes y después sumarlas con las que tenían el mismo denominador, algunos estudiantes después de revisar con calma (puesto que se les dio el tiempo necesario para revisar su prueba), y

aunado con que se encontraban cursando las primeras materias de su carrera, no fueron capaces de darse cuenta por sí mismos de que no estaban respetando las reglas, fórmulas, las cuales habían “aprendido” con anterioridad.

5. CONCLUSIONES

La investigación que se hizo para esta tesis consistió de un estudio cuantitativo basado en un cuestionario de 14 ejercicios. Con las respuestas de los estudiantes se hizo una clasificación de los errores cometidos.

Posteriormente se hizo un estudio cualitativo, que consistió en la realización de 6 entrevistas a estudiantes que previamente habían contestado el cuestionario. Lo anterior se hizo con el fin de conocer cómo es que los estudiantes hicieron los ejercicios y así poder conocer más a fondo cómo es que justificaban sus respuestas.

5.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CUANTITATIVO

Se pudo observar que los estudiantes que ingresan a la universidad traen consigo un pobre conocimiento del álgebra, es decir, los estudiantes tienen grandes problemas cuando intentan manipular expresiones algebraicas, ya que en muchos de los casos los estudiantes tienden a olvidar reglas o en el peor de los casos tienden a deformar las reglas.

Además, de que un gran número de estudiantes que realizaron estos ejercicios, los efectuaron sin considerar de que se tratan de un tipo de fracciones, es decir, no respetaban la forma básica de sumar o restar fracciones, la cual, es enseñada desde la primaria en aritmética, por lo que los estudiantes pudieron haber cometido el mismo error que los niños hacen al inicio del aprendizaje de las fracciones, el cual es; sumar directamente los numeradores y denominadores.

Se encontró que un gran porcentaje de estudiantes al desarrollar los ejercicios llegaban a una respuesta parcial, sin embargo, no era la respuesta que se les pedía y esto pudo haberse generado porque la mayoría de los estudiantes desarrollaron

todas las multiplicaciones de los polinomios, generando una expresión demasiado grande, la cual ya no sabían cómo reducirla.

Otro de los errores que más se comete cuando se realizan ejercicios de fracciones algebraicas, es la cancelación de elementos que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, en donde los estudiantes no son capaces de reconocer que para cancelar dichos términos, éstos deben de estar en cada uno de los términos del numerador y del denominador. Si los estudiantes pudieran ser capaces de factorizar de forma correcta podrían darse cuenta de este error.

También se encontró que un gran número de estudiantes cometían el error de sumar los elementos que se encontraban en el numerador y denominador directamente con los otros elementos que se encontraban en los otros numeradores y denominadores, respectivamente.

Por otro lado, un problema que tienen los estudiantes es que cuando intentan utilizar alguna estrategia para resolver el ejercicio (como por ejemplo, la regla para la adición de fracciones), es que aplican la estrategia de forma parcial o en su caso la aplican de forma incorrecta.

Cabe mencionar que de los 273 estudiantes que contestaron el cuestionario solo 44 de estos lo pudieron terminar, sin embargo, en la mayoría de estos casos no llegaron ni a la mitad de las respuestas correctas. Además, en promedio cada uno de los 274 estudiantes cometió 4 tipos de errores.

En cuanto a los objetivos de la investigación, en la clasificación que se propuso en este trabajo se detectaron 26 tipos de errores, los cuales fueron extraídos de las respuestas que dieron los estudiantes al contestar el cuestionario, la clasificación quedó de la siguiente manera:

- Procedimiento inconcluso.
- Debidos a la confusión de términos.
- Multiplicación cruzada.
- Omitir un término o un símbolo.
- Una mala interpretación de la variable.

- Asociación incorrecta de productos notables.
- Combinar términos diferentes.
- Descomponer la fracción.
- Distribuir la multiplicación.
- En el signo, en la adición de términos.
- Distinguir entre términos diferentes.
- Multiplicar polinomios donde la adición está indicada.
- En el mínimo común múltiplo.
- Multiplicando término a término.
- Realizar la adición donde la multiplicación esta indicada.
- Factorizar un término.
- Hacer suma directa en el numerador y denominador.
- Factorizar término a término.
- Cancelar términos.
- Multiplicar unos polinomios.
- Intentar factorizar un trinomio.
- En los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo.
- Al emplear su estrategia.
- Reducir términos semejantes.
- Miscelánea de errores.
- Cambiar de signo o de número.

Por otro lado, para nuestro segundo objetivo se encontraron cinco estrategias que fueron utilizadas en la realización de los ejercicios, estas estrategias son:

- Factorización de uno o varios signos.
- Regla para sumar fracciones.
- Multiplicar por algún término a alguna fracción del ejercicio.
- Factorización de algún elemento del denominador.
- Utilizar un cambio de variable.

5.2 CONCLUSIONES DEL ANALISIS CUALITATIVO

Mediante la realización de este estudio pudimos darnos cuenta de que algunos estudiantes tienen grandes problemas con el signo negativo, por ejemplo, en el ejercicio 9 (ver anexo), algunos de los estudiantes que hicieron este ejercicio restan todo lo que se encuentra al lado derecho del signo menos, es decir, no fueron capaces de darse cuenta que este signo solo está afectando a la primera fracción y esto ocasiona que resten todo como si tuviera paréntesis.

Sin embargo, también hay estudiantes que reacomodan los términos por los signos. Es decir, en primer lugar ponen los términos que tienen signos positivos y posteriormente ponen los términos que tienen signos negativos, esto lo hacen con la intención de efectuar la suma de los términos que tienen el mismo signo.

Existen errores que se cometieron por una mala ejecución de alguna regla que claramente identifican y que hasta la describen, porque al preguntar cómo lo realizaron detallan de forma correcta, la forma en cómo realizan la parte en donde se encuentra el error, pero no se dan cuenta que tuvieron una ejecución errónea.

Otra de las cosas que nos pudimos percatar en este estudio, es que todos los estudiantes entrevistados no fueron capaces de reconocer cuáles temas de álgebra utilizaron en la resolución de los ejercicios, esto mismo podría estarse presentando en la mayoría de los estudiantes que contestaron el cuestionario, por lo que podríamos suponer que ésta es una de las razones por las cuales los estudiantes no son capaces de realizar los ejercicios.

Sin embargo, pocos estudiantes muestran tener la suficiente madurez para manipular a la variable cuando intenta resolver ejercicios en los cuales tienen que echar mano de las cosas que “aprendieron” en cursos anteriores. Y esto se ve reflejado en los estudiantes que tuvieron el estrato más alto, ya que estos estudiantes fueron más capaces de darse cuenta de cuál fue su error y hasta son capaces de corregirlo en el momento que se les preguntó, además detallan claramente todo el procedimiento que desarrollaron.

Este trabajo exhibe una gran deficiencia en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en el aprendizaje del álgebra básica, esto podría deberse al bajo aprovechamiento de esta materia en el bachillerato o por algunos otros factores.

En general, en esta investigación nos pudimos percatar de que los estudiantes muestran una gran dificultad cuando intentan hacer ejercicios que tienen que ver con la adición de fracciones, además de que algunos de los errores presentados en este trabajo pueden ser la causa del bajo aprovechamiento que tienen los estudiantes en el estudio de las matemáticas, ya que los mismos estudiantes podrían estar trayendo consigo estos mismos errores desde que iniciaron su estudio del álgebra, y que los maestros no les dan la importancia adecuada para poder solucionar tales errores.

Por último, se espera que este trabajo de investigación sirva para tratar de comprender de mejor manera lo que los estudiantes realizan cuando tienen que manipular o trabajar con expresiones algebraicas, y no necesariamente nos referimos al tipo de ejercicios que se propusieron en esta investigación, ya que, estos ejercicios involucraban diversos temas de álgebra tales como: reducción de términos semejantes, leyes de los exponentes, ley de los signos, multiplicación de polinomios, factorización, productos notables, adición de fracciones algebraicas, mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas, eliminación de paréntesis precedidos de un signo negativo.

Además, se pretende que los resultados de este estudio sirvan para que los maestros de nivel medio y medio superior puedan intentar dar una solución a los errores que comúnmente cometen los estudiantes y que de esta manera traten de evitar estas deficiencias que se generan en el aprendizaje del álgebra básica y que siguen teniendo en sus estudios posteriores.

BIBLIOGRAFIA

Anfossi, A. (1959). *Curso de Álgebra*. Distrito Federal, México: Editorial Progreso.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra*. The Ideas of Algebra, K-12*. 20-32. NCTM.

Boyer, J. B. (sin fecha). *Primeras Nociones de Algebra con Numerosos ejercicios.* Distrito Federal, México: Editorial Enseñanza.

Cerdán, F. (2010). *Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. PNA*, *4*(3).

Clement, J. (2000). Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). London, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2004). *Arithmetic/Algebraic Problem-Solving and the Representation of the Two Unknown Quantities*. In *Proceedings of the 28th Conference of the International* (Vol. 2, pp. 391-398).

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, J. S. (2010). *Análisis de Errores y Dificultades en la Resolución de Tareas Algebraicas por Alumnos de Primer Ingreso en Nivel Licenciatura.* "Tesis de Maestría no publicada". Universidad de Ganada, Granada, España.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). London, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Keller, M. W., Shreve, D. R., y Remmers, H. H. (1940). Diagnostic testing program in Purdue University: 1. Formal algebraic manipulations. *The American Mathematical Monthly, 47*(8), 544-548.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. *Algebraic Thinking, Grades K-12,* 59-70.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El Aprendizaje del Álgebra Escolar desde una Perspectiva Psicologica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children*, PhD Thesis, University of London.

Linchevski, L., y Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. En *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 176-183).

Matz, M. (1980). Towards a Computational Theory of Algebraic Competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3 (1), 93-166.

Muñoz, A. (2002). La Valoración de los Errores en el Aprendizaje de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 15(2).*1248-1254.

Ortigoza, A. B. R., y Dueñas, W. M. L. (2013). Diagnóstico Sobre Errores Algebraicos en Estudiantes que Ingresan a la Universidad.

Phillip, A. P. y Schaphelle, P.B. (1999). Algebra as Generalized Arithmetic: Starting with the Known for a Chance. *The Mathematics Teacher,* 92(4), 310-316.

Piaget, J. (2001). *La representación del mundo en el niño*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Rees, P. y Sparks, F. (1998). *Álgebra*. Distrito Federal, México: Reverté Ediciones.

Rico, L. (1995). Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática,* México: Grupo Editorial Iberoamérica, 69-108.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008), Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, K-12*. 8-19 NCTM.

Ursini, S. (1994). Los Niños y las Variables. *Educación Matemática, 6(3),* 90- 105.

Vega, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido Estructural de Estudiantes de Bachillerato en Tareas de Simplificación de Fracciones Algebraicas que Involucran Igualdades Notables. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa, 15(2),* 233-258.

Wentworth, J. y Smith, D. E. (1917). *Elementos de álgebra*. Nueva York: Estados Unidos: Ginn y Compañía.

Wong, M. P. (1997). Numbers Versus Letters in Algebraic Manipulation: Which is more difficult?. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-285). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.

ANEXO

NOMBRE:

EDAD:

CARRERA: MATRICULA

NOMBRE DE LA ESCUELA DE PROCEDENCIA:

Reduce a la mínima expresión los siguientes ejercicios:

1. $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{x-4} =$

2. $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{4-x} =$

3. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} =$

4. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(2-x)} =$

5. $\frac{1}{x^2+3x-10} - \frac{1}{6-5x+x^2} =$

6. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(z-y)(x-z)} + \frac{1}{(z-x)(y-x)} =$

7. $\frac{10}{(2r-3s)(2r+s)} + \frac{1}{(2r+s)(r+s)} - \frac{5}{(2r-3s)(r+s)} =$

8. $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x+2)} - \frac{4x}{x(x^2-4)} =$

9. $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} =$

10. $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} =$

11. $\frac{x}{x^2-5x-14} + \frac{2}{x-7} - \frac{x}{x^2-9x+14} =$

12. $\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x^2-4x+1}{x^2-1} =$

13. $\frac{2(x-3)}{x^2-2x} + \frac{3x-6}{x^2-3x} - \frac{4(x-1)}{x^2-5x+6} =$

14. $\frac{5x+y}{4x^2-y^2} + \frac{5x-3y}{2x^2+5xy+2y^2} - \frac{3x+3y}{2x^2-3xy-2y^2} =$