



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA GEOMETRÍA NEUTRAL Y
SUS INTERPRETACIONES EN MODELOS EUCLIDIANOS E HIPERBÓLICOS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Elizabeth de Gante Coronel

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Agustín Contreras Carreto

PUEBLA, PUE.

JUNIO 2016

Agradecimientos

Gracias a Dios que me ha puesto en este camino con sus alegrías, sorpresas y dificultades, pero sobre todo por nunca dejarme sola.

A mis padres Silvia Coronel Nájera y Abel de Gante Sánchez por ser mi fuerza para seguir adelante, por su apoyo y sus consejos, siempre preocupándose porque sea una persona de bien. Mis hermanos Arturo, Abel y Emmanuel gracias por su cariño y más aún por la vida que he compartido con ustedes. Y los nuevos de la familia Raque, Turis y Lito le han agregado más alegrías a mi vida. A mi “tío Padre” (†) siempre estarás en mi corazón.

Al Dr. Agustín Contreras Carreto, mi más sincero agradecimiento por la orientación, el seguimiento y la supervisión, pero sobre todo por la motivación y apoyo recibido en este tiempo.

Mi jurado, Dr. David Herrera Carrasco, Dra. Patricia Domínguez Soto y Lic. María del Rocío Macías Prado por su tiempo, comentarios, correcciones y sugerencias, que hicieron mejorar este trabajo.

A todos mis amigos, gracias por comprenderme y no comprenderme.

A todos muchas gracias.

Introducción

Uno de los teoremas de Euclides más controvertido es el Teorema 4 del libro primero de los Elementos, denotado por EI.4 entre los historiadores. Este teorema se conoce actualmente como el “criterio Lado -Ángulo - Lado” (LAL) de congruencia de triángulos. El teorema señala que, si en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, las longitudes de los lados AB y AC del $\triangle ABC$ son iguales, respectivamente, a las longitudes de los lados $A'B'$ y $A'C'$ de $\triangle A'B'C'$, y que $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, entonces también el lado BC del $\triangle ABC$ es igual al lado $B'C'$ de $\triangle A'B'C'$ y $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ y $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ son congruentes. La demostración que dio Euclides consiste en mover uno de los triángulos hasta lograr superponerlo en el otro y ver que todos los lados y ángulos de uno coinciden con los respectivos del otro triángulo.

En otras palabras, usando un lenguaje moderno, a un triángulo se le aplica una traslación seguida de una rotación y en algunos casos, seguida de una reflexión, hasta obtener el otro. A pesar de que la demostración de Euclides es muy bella, la controversia surgió porque ninguna de estas transformaciones geométricas fueron definidas por Euclides, ni estableció su uso dentro de los axiomas de los Elementos.

Para no caer en el mismo “error” de Euclides, David Hilbert, usó una nueva colección de axiomas para la geometría euclidiana, más de acuerdo con la idea moderna de sistema axiomático, en el cual puso dicho resultado como un axioma (el axioma C6 en este texto), en vez de demostrarlo.

Un contemporáneo y amigo de Hilbert llamado Félix Klein, propuso una nueva forma de estudiar todas la geometrías a través de grupos de transformaciones geométricas. Él mostró que el uso de transformaciones geométricas es una herramienta muy poderosa para el estudio de la geometría en general.

En este trabajo, en su Capítulo 1, expondremos los axiomas de Hilbert para la Geometría Neutral Plana (GNP). Éste, es el sistema axiomático que consta de todos los axiomas de la Geometría Euclidiana Plana (GEP), excepto el quinto postulado. En GNP no se tiene el quinto postulado ni su negación. Así cualquier resultado que se obtenga de GNP es válido tanto en GEP como en GHP. Estableceremos definiciones y resultados de GNP que se utilizarán en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 2 trabajaremos modelos de GNP y en particular definiremos y estudiaremos propiedades de las principales transformaciones geométricas: dilataciones y simetrías como rotaciones, reflexiones, traslaciones. En este capítulo se aplicarán los resultados a los modelos de GEP como el usual o el de la geometría analítica.

Para el Capítulo 3 estudiaremos una transformación geométrica euclidiana muy bella: la inversión. Nos será de gran ayuda en un modelo hiperbólico.

Finalmente el Capítulo 4 construiremos dos modelos, modelo de Poincaré (M_{P_1}) y el modelo de Klein (M_K) que satisfacen los axiomas de GHP. Culminamos con el estudio de las reflexiones en M_K .

Índice general

Introducción	I
1. Geometría neutral	1
1.1. Sistema axiomático de la geometría neutral plana	1
1.2. Otros teoremas de la geometría neutral	12
2. Transformaciones geométricas	17
2.1. Automorfismos de planos neutrales	18
2.2. Isometrías y similitudes	20
2.3. Reflexiones	26
2.4. Rotaciones	31
2.5. Translaciones	35
2.6. Puntos ideales en el plano hiperbólico	39
2.7. Desplazamiento paralelo	43
2.8. Media vuelta	45
2.9. Deslizamientos	47
2.10. Clasificación de isometrías	48
2.11. Automorfismo de los modelos cartesianos	53
2.12. Rotaciones alrededor de un punto fijo	54
3. Inversión	59
3.0.1. Construcciones	64
3.1. Inversión en \mathbb{R}^3	77
4. Modelos de la geometría hiperbólica	81
4.1. Modelo de Klein M_K	81
4.2. Modelo de Poincaré M_{P_1}	85
4.3. Isomorfismo	90
4.4. Definición de ángulo en M_{P_1}	99

4.5. Definición de ángulo en M_K	102
4.6. Distancia en M_{P_1}	104
4.7. Reflexiones en M_{P_1}	115
4.8. Rotación en M_{P_1}	119
4.9. Distancia en M_K	123
4.10. Reflexiones en M_K	128
4.11. Homología armónica de cierto punto	130
4.12. Construcción del conjugado armónico	132

**TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LA
GEOMETRÍA NEUTRAL Y SUS
INTERPRETACIONES EN MODELOS
EUCLIDIANOS E HIPERBÓLICOS**

Elizabeth de Gante Coronel

Junio 2016

Capítulo 1

Geometría neutral

Un sistema axiomático consta de un conjunto de términos indefinidos, un conjunto de relaciones indefinidas y un conjunto de axiomas que establecen las propiedades básicas que deben cumplir dichos términos y relaciones. Para este capítulo se puede consultar [3] y [4].

1.1. Sistema axiomático de la geometría neutral plana

(a) Terminos indefinidos:

1. Puntos.

Al conjunto de los puntos de GNP los denotaremos por $\Pi(GNP)$.

2. Rectas.

Al conjunto de las rectas de GNP los denotaremos por $\Lambda(GNP)$.

(b) Relaciones indefinidas:

1. Relación de incidencia entre puntos y rectas.

Si $P \in \Pi(GNP)$ y $l \in \Lambda(GNP)$, a la proposición “ P incide con l ” (también se puede leer “ l incide con P ”), se le notará con PIl o lIP .

2. Relación de orden entre ternas de puntos.

Si $A, B, C \in \Lambda(GNP)$, la proposición “ B está entre A y C ” se denotará

por $A * B * C$.

3. Relaciones de congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.

Dados los segmentos AB y CD , la proposición “ AB es congruente con CD ” se denotará por $AB \cong CD$ y dados los ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DEF$, la proposición “ $\sphericalangle ABC$ es congruente con $\sphericalangle DEF$ ” se denotará con $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$.

(c) Axiomas:

Axiomas de Incidencia

Axioma I1. Para cada punto P y cada punto Q , con $P \neq Q$, existe una única recta que incide con P y Q . A esta recta la denotaremos \overleftrightarrow{PQ} .

Axioma I2. Para cada recta, existen al menos dos puntos diferentes que inciden con ella.

Axioma I3. Existen tres puntos distintos con la propiedad de que ninguna recta incide con los tres.

Definición 1.1. (a) Diremos que tres o más puntos distintos son colineales, si existe un recta que incide con todos ellos al mismo tiempo.

(b) Dos o más rectas son concurrentes si existe un punto que incide con todas ellas al mismo tiempo.

(c) Diremos que dos rectas l y m son paralelas si $l = m$ o $l \neq m$ y l y m no son concurrentes y lo denotaremos por $l \parallel m$.

Axiomas de Orden

Axioma O1. Si $A * B * C$, entonces A , B y C son tres puntos distintos y colineales, además $C * B * A$.

Axioma O2. Dados cualesquiera dos puntos distintos B y D , existen puntos A , C y E que inciden con \overleftrightarrow{BD} tal que $A * B * D$, $B * C * D$ y $B * D * E$.

Axioma O3. Si A , B y C son puntos distintos y colineales, entonces una y sólo una de las proposiciones siguientes se cumple: $A*B*C$, $B*A*C$ o $A*C*B$.

Denotaremos por $\{\overleftrightarrow{AB}\}$ al conjunto de puntos que inciden con \overleftrightarrow{AB} .

Definición 1.2. Dados dos puntos A y B distintos, el segmento AB se define como el conjunto de todos los puntos de la recta \overleftrightarrow{AB} que están entre A y B junto con los puntos finales A y B . El rayo \overrightarrow{AB} se define como el conjunto de todos los puntos en AB junto con los puntos C tal que $A*B*C$.

Definición 1.3. Sean l una recta cualquiera, A y B puntos que no inciden con l . Si $A = B$ o si el segmento AB no contiene puntos que incidan con l , decimos que A y B están en el mismo lado de l , mientras si $A \neq B$ y el segmento AB tienen puntos que inciden con l , decimos que A y B están en lados opuestos de l , véase Figura 1.1.

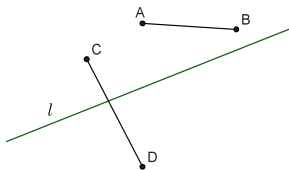


Figura 1.1

Axioma O4. Para cada recta l y para cualesquiera tres puntos A , B y C que no incidan con l se tiene:

- (a) Si A y B están en el mismo lado de l y si B y C están en el mismo lado de l , entonces A y C están en el mismo lado de l , véase Figura 1.2.

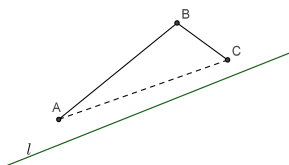


Figura 1.2

- (b) Si A y C están en lados opuestos de l y si C y B están en lados opuestos de l , entonces A y B están del mismo lado de l , véase Figura 1.3.

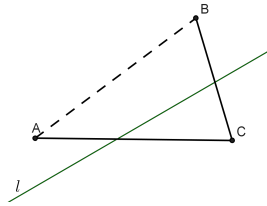


Figura 1.3

- (c) Si A y B están en lados opuestos de l y si B y C están del mismo lado de l , entonces A y C están en lados opuestos de l , véase Figura 1.4.

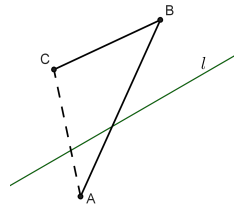


Figura 1.4

Definición 1.4. Una relación \sim en un conjunto \mathcal{S} se llama relación de equivalencia si satisface:

- (a) $a \sim a$ (reflexiva).
- (b) Si $a \sim b$ entonces $b \sim a$ (simétrica).
- (c) Si $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $a \sim c$ (transitiva).

para todo a, b y c que están en \mathcal{S} .

Definición 1.5. Sean l una recta cualquiera y S el conjunto de puntos que no inciden con l , para A y B elementos de S , decimos que A está relacionado con B si y sólo si A y B están del mismo lado de l . Lo denotaremos $A \sim B$.

Observación 1.1. Por la Definición 1.3 y el Axioma O_4 esta relación \sim es de equivalencia.

Definición 1.6. Sean l una recta y A un punto que no incide con l . A la clase de equivalencia de A respecto a la relación \sim , es decir, al conjunto de puntos que están del mismo lado de l con respecto a l , se le llama el lado o semi-plano de la recta l determinado por A y se denota como $S(A, l)$.

Definición 1.7. Si l es una recta, A, B, C son puntos que inciden con l y $B * A * C$, se dice que \overrightarrow{AB} es el rayo opuesto \overrightarrow{AC} y que \overrightarrow{AC} es el rayo opuesto a \overrightarrow{AB} .

Definición 1.8. Si \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} dos rayos que no son iguales ni opuestos entre sí, entonces:

- (a) El ángulo $\sphericalangle BAC$ es el conjunto $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. También es denotado $\sphericalangle CAB$.
- (b) Dado el ángulo $\sphericalangle BAC$, A es el vértice del ángulo, y \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son los lados del ángulo.
- (c) El interior del ángulo $\sphericalangle BAC$ es el conjunto $S(C, \overleftarrow{AB}) \cap S(B, \overleftarrow{AC})$, véase Figura 1.5.

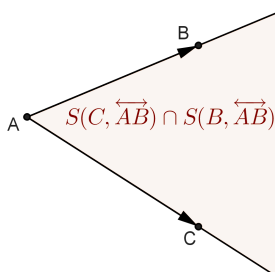


Figura 1.5

Definición 1.9. El rayo \overrightarrow{AD} está entre los rayos \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AB} , si \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} no son rayos opuestos ni iguales (es decir se forma $\sphericalangle CAB$) y D está en el interior a $\sphericalangle CAB$.

Axiomas de Congruencia

Axioma C1. Si A y B son puntos distintos y si A' es cualquier punto, entonces para cada rayo r que emana de A' , existe un único punto B' sobre r tal que $B' \neq A'$ y $AB \cong A'B'$.

Axioma C2. La relación de congruencia de segmentos es una relación de equivalencia.

Axioma C3. Si $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, entonces $AC \cong A'C'$.

Axioma C4. Dado cualquier ángulo $\sphericalangle BAC$ y dado cualquier rayo $\overrightarrow{A'B'}$ que emana del punto A' , entonces en cada lado de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe un único rayo $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$.

Axioma C5. La relación de congruencia de ángulos es una relación de equivalencia.

Definición 1.10. (a) *Un triángulo es un conjunto de tres puntos no colineales.*

(b) *Si $\{A, B, C\}$ es un triángulo, denotaremos a dicho conjunto con $\triangle ABC$.*

(c) *El interior $\triangle ABC$ es la intersección de los interiores de los ángulos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle BAC$.*

(d) *En $\triangle ABC$ los vértices son los puntos A , B y C , y los lados son AB , BC y AC .*

(e) *Los ángulos interiores o internos de un $\triangle ABC$ son los ángulos $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle BAC$.*

(f) *Un punto exterior de $\triangle ABC$ es un punto que no está en el interior de $\triangle ABC$ ni en alguno de los lados del $\triangle ABC$.*

Definición 1.11. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos.

(a) *Una congruencia o correspondencia entre $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ es una función biyectiva:*

$$\varphi : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$$

tal que si $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ y $C' = \varphi(C)$, entonces $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ y $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$ y $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$.

- (b) Si φ es una congruencia entre dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, y si $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$, diremos que, respecto a la correspondencia φ , A' es el vértice correspondiente a A , B' es el correspondiente a B , C' es el correspondiente a C , $\sphericalangle A'B'C'$ es el ángulo correspondiente a $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle A'C'B'$ es el ángulo correspondiente a $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle B'A'C'$ es el ángulo correspondiente a $\sphericalangle BAC$.
- (c) Diremos que $\triangle ABC$ es congruente con $\triangle DEF$ si existe una congruencia:

$$\varphi : \{A, B, C\} \longrightarrow \{D, E, F\}$$

- (d) Escribiremos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ para indicar que existe una congruencia ρ de $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ tal que $D = \rho(A)$, $E = \rho(B)$ y $F = \rho(C)$, donde D , E y F son los vértices correspondientes (respecto a ρ) a los vértices A , B y C , respectivamente.

Axioma C6. (Criterio Lado Ángulo Lado - LAL) Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos tales que $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$, $AB \cong DE$ y $BC \cong DF$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Axioma de Continuidad

El siguiente axioma es el último de los axiomas de la geometría neutral plana (GNP) y está inspirado en la construcción que hizo Dedekind de los números reales usando las cortaduras de números racionales que llevan su nombre.

Definición 1.12. Una recta l con cortadura de Dedekind es una pareja (Σ_1, Σ_2) tal que:

- (a) Σ_1 y Σ_2 son subconjuntos no vacíos de $\{l\}$.
- (b) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{l\}$.
- (c) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.
- (d) Ningún punto de Σ_1 está entre dos puntos de Σ_2 y ningún punto de Σ_2 está entre dos puntos de Σ_1 .

Axioma de Dedekind (Continuidad) Si l es una recta y (Σ_1, Σ_2) es una cortadura de l , entonces existe un único punto O que incide con l tal que uno de los subconjuntos es igual a un rayo de l que emana de O y el otro subconjunto es igual al complemento.

A continuación presentamos algunas consecuencias de estos terminos, relaciones y axiomas, que no demostraremos, pero cuya demostración puede consultar el lector en la referencia [3].

Teorema 1.1. *Para cualesquiera dos puntos A y B distintos se tiene:*

$$(a) \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB.$$

$$(b) \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}.$$

$$(c) \text{ Si } B' \in \overrightarrow{AB} - \{A\}, \text{ entonces } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}.$$

Teorema 1.2 (Propiedad de Separación de Planos por Rectas). *Si l es una recta existen puntos A y B que no inciden con l y están en lados opuestos de ella y además todo punto que no incide con l está en $S(A, l)$ o en $S(B, l)$ y $S(A, l) \cap S(B, l) = \emptyset$. Es decir, Cada recta determina exactamente dos semi-planos, los cuales no tienen ningún punto en común.*

Teorema 1.3. *Si $A * B * C$ y $A * C * D$, entonces $B * C * D$ y $A * B * D$.*

Corolario 1.1. *Si $A * B * C$ y $B * C * D$, entonces $A * B * D$ y $A * C * D$.*

Teorema 1.4 (Propiedad de separación de rectas por puntos). *Si $C * A * B$ y l es la recta que incide con A , B y C (Axioma O1), entonces para cada punto $P \in \{l\}$, $P \in \overrightarrow{AB}$ o $P \in \overrightarrow{AC}$.*

Teorema 1.5 (Propiedad de Pasch). *Si A , B y C son puntos no colineales y l es cualquier recta que interseca a AB sin los extremos, entonces l también interseca a AC o bien a BC , véase Figura 1.6. Si C no está sobre l , entonces l no interseca a AC y a BC al mismo tiempo.*

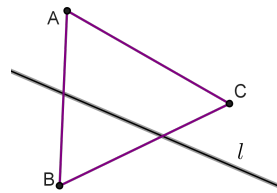


Figura 1.6

Teorema 1.6. *Si $A * B * C$, entonces $AC = AB \cup BC$ y B es el único punto en común a los segmentos AB y BC .*

Teorema 1.7. Si $A * B * C$, entonces B es el único punto en común a los rayos \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} , y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Teorema 1.8. Si el ángulo $\sphericalangle CAB$, entonces $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BAC$ y si C' es un punto en \overrightarrow{AC} y B' es un punto en \overrightarrow{AB} , entonces $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'AB'$.

Teorema 1.9. Si un ángulo $\sphericalangle CAB$ y un punto D que incide con la recta \overleftrightarrow{CB} , entonces D está en el interior de $\sphericalangle CAB$ si y sólo si $B * D * C$.

Teorema 1.10. Si un punto D que está en el interior de $\sphericalangle CAB$, entonces

- (a) También lo es cualquier otro punto del rayo \overrightarrow{AD} , excepto A .
- (b) Ningún punto en el rayo opuesto a \overrightarrow{AD} está en el interior de $\sphericalangle CAB$.
- (c) Si $C * A * E$, entonces el punto B está en el interior de $\sphericalangle DAE$, véase Figura 1.7.

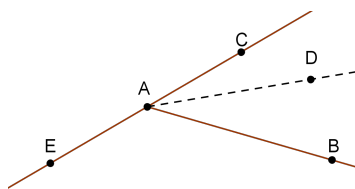


Figura 1.7

Teorema 1.11 (Teorema de Cruce de "Barras"). Si \overrightarrow{AD} está entre \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AB} , entonces \overrightarrow{AD} intersecta al segmento CB .

Teorema 1.12. (a) Si un rayo r que emana de un punto exterior del $\triangle ABC$ intersecta al lado AB , entonces r también intersecta al lado AC o al lado BC .

(b) Si un rayo emana de un punto interior de $\triangle ABC$, entonces éste intersecta a sólo uno sus de los lados del triángulo, y si no, pasa a través de un vértice.

Corolario 1.2 (Corolario de C6). Dado $\triangle ABC$ y los segmentos $DE \cong AB$, hay un único punto F sobre un lado de la recta \overleftrightarrow{DE} tal que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Convenio 1. Dado un triángulo $\triangle ABC$ usaremos la notación $\sphericalangle A$ para referirnos al ángulo $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle B$ para referirnos al ángulo $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle C$ para referirnos al ángulo $\sphericalangle ACB$.

Teorema 1.13 (E1.5). *Si en $\triangle ABC$ se tiene $AB \cong AC$, entonces $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$.*

Teorema 1.14. *Si $A*B*C$, $D*E*F$, $AB \cong DE$, y $AC \cong DF$, entonces $BC \cong EF$.*

Teorema 1.15. *Si $AC \cong DF$, entonces para cualquier punto B entre A y C existe un único punto E entre D y F tal que $AB \cong DE$.*

Definición 1.13. *$AB < CD$, significa que existe un punto E entre C y D tal que $AB \cong CE$.*

Definición 1.14. (a) *Dos ángulos $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle DAE$ son opuestos por el vértice, si el rayo \overrightarrow{AB} es opuesto al rayo \overrightarrow{AD} y el rayo \overrightarrow{AC} es opuesto al rayo \overrightarrow{AE} .*

(b) *Dos ángulos $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle CAD$ son suplementarios si tienen un lado en común \overrightarrow{AC} y los lados \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} son rayos opuestos. También se dice que cada uno de estos ángulos es un suplemento del otro.*

Teorema 1.16. *Dados cualesquiera segmentos, AB , CD y EF ,*

(a) *Exactamente una de las siguientes tres condiciones se cumple: $AB < CD$, $AB > CD$ ó $AB \cong CD$.*

(b) *Si $AB < CD$ y $CD \cong EF$, entonces $AB < EF$.*

(c) *Si $AB > CD$ y $CD \cong EF$, entonces $AB > EF$.*

(d) *Si $AB < CD$ y $CD < EF$, entonces $AB < EF$.*

Teorema 1.17. *Suplementos de ángulos congruentes son congruentes.*

Teorema 1.18. *Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Observemos que dos suplementos de un ángulo dado, son opuestos por el vértice y por lo tanto son congruentes.

Definición 1.15. (a) *Un ángulo es recto si es congruente a cualquiera de sus suplementos.*

(b) *Una recta l es perpendicular a la recta m si inciden en un punto A y los cuatro ángulos que se forman son rectos. Se denotará como $l \perp m$ y al punto A se le conoce como el pie de la perpendicular.*

Teorema 1.19. *Un ángulo congruente a un ángulo recto es un ángulo recto.*

Teorema 1.20. Para cada recta l y cada punto P existe una recta diferente de l , que pasa por P y es perpendicular a l .

Teorema 1.21 (Criterio Ángulo Lado Ángulo - ALA). Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$, $\sphericalangle C \cong \sphericalangle F$ y $AC \cong DF$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Teorema 1.22 (El.6). Si en el $\triangle ABC$ tenemos $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$, entonces $AB \cong AC$ y $\triangle ABC$ es isosceles.

Teorema 1.23. Si \overrightarrow{BG} entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{EH} entre \overrightarrow{ED} y \overrightarrow{EF} , $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$ y $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HED$, entonces $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$.

Teorema 1.24. Si \overrightarrow{BG} entre \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{EH} entre \overrightarrow{ED} y \overrightarrow{EF} , $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle EFH$ y $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$, entonces $\sphericalangle GBA \cong \sphericalangle HED$.

Definición 1.16. Diremos $\sphericalangle ABC$ es menor que $\sphericalangle DEF$ (o que $\sphericalangle DEF$ es mayor $\sphericalangle ABC$) y escribiremos $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$ (o que $\sphericalangle DEF > \sphericalangle ABC$), si hay un rayo \overrightarrow{EG} entre \overrightarrow{ED} y \overrightarrow{EF} tal que $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle GEF$.

Teorema 1.25. Dados cualesquiera ángulos, $\sphericalangle LMN$, $\sphericalangle PQR$ y $\sphericalangle STU$,

- (a) Se cumple exactamente una de las siguientes tres condiciones: $\sphericalangle LMN < \sphericalangle PQR$, $\sphericalangle LMN \cong \sphericalangle PQR$ ó $\sphericalangle LMN > \sphericalangle PQR$.
- (b) Si $\sphericalangle LMN < \sphericalangle PQR$ y $\sphericalangle PQR \cong \sphericalangle STU$, entonces $\sphericalangle LMN < \sphericalangle STU$.
- (c) Si $\sphericalangle LMN > \sphericalangle PQR$ y $\sphericalangle PQR \cong \sphericalangle STU$, entonces $\sphericalangle LMN > \sphericalangle STU$.
- (d) Si $\sphericalangle LMN < \sphericalangle PQR$ y $\sphericalangle PQR < \sphericalangle STU$, entonces $\sphericalangle LMN < \sphericalangle STU$.

Teorema 1.26 (Criterio Lado Lado Lado (LLL)). Si $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ y $AC \cong DF$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Teorema 1.27 (IV Postulado de Euclides). Cualesquiera dos ángulos rectos son congruentes.

Definición 1.17. Un ángulo es agudo es menor que un recto, y un ángulo es obtuso es mayor que uno recto.

Observación 1.2. De la propiedad de separación de rectas por puntos (Teorema 1.4) se concluye que si l es una recta y $A, B, C \in \{l\}$ y $B * A * C$, entonces el rayo $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \{A\})$ y $(\overrightarrow{AB} - \{A\}, \overrightarrow{AC})$ son cortaduras de l .

De manera coloquial está propiedad señala que todo punto en un recta determina por lo menos un cortadura de Dedekind. El Axioma de continuidad es una especie de recíproco (toda cortadura de una recta l determina exactamente un punto en ella).

Definición 1.18. *Dados un segmento AB y un punto O tenemos:*

- (a) *El círculo (o circunferencia) con centro en O y radio AB es el conjunto de puntos P tales que $OP \cong AB$.*
- (b) *Si γ es el círculo con centro en O y radio AB , el interior de γ es todos los puntos R tales que $OR < AB$.*
- (c) *Si γ es el círculo con centro en O y radio AB , los puntos fuera de γ son todos los puntos Q tales que $OQ > AB$.*

Teorema 1.28 (Principio de Continuidad Círculo-Círculo). *Si un círculo γ tiene un punto R en el interior otro círculo γ' y un punto Q fuera de γ' , entonces los dos círculos se intersectan en dos puntos.*

Teorema 1.29 (Principio de Continuidad Recta-círculo). *Si una recta pasa por un punto dentro de un círculo, la recta intersecta a la circunferencia en dos puntos.*

Teorema 1.30 (Principio de Arquímedes). *Si CD un segmento y \overrightarrow{AB} un rayo, entonces para cualquier punto $E \neq A$ que incide con \overrightarrow{AB} existe un número n natural tal que $nCD = AE$ y $B = E$ ó $A * B * E$.*

Teorema 1.31 (Principio de Aristóteles). *Dados un ángulo agudo $\sphericalangle ABC$ y cualquier segmento DE , existe un punto Y en \overrightarrow{BA} tal que si X es el pie de la perpendicular de \overrightarrow{BC} bajada desde Y , $XY > DE$.*

1.2. Otros teoremas de la geometría neutral

Definición 1.19. *Si l, l' y t son rectas distintas, entonces*

- (a) *A la terna (l, l', t) se le llama una configuración, si t concurre con l y con l' .*
- (b) *Si (l, l', t) es una configuración, t concurre con l en B y concurre con l' en B' , y si A y C son puntos en $\{l\}$ y A' y C' son puntos en $\{l'\}$ tales que $A * B * C$ y $A' * B' * C'$, entonces $\sphericalangle A'B'B, \sphericalangle ABB', \sphericalangle C'B'B, \sphericalangle CBB'$ son llamados ángulos interiores, y los dos pares de ángulos $(\sphericalangle ABB', \sphericalangle C'B'B)$ y $(\sphericalangle A'B'B, \sphericalangle CBB')$ son llamados pares de ángulos interiores alternos, véase Figura 1.8.*

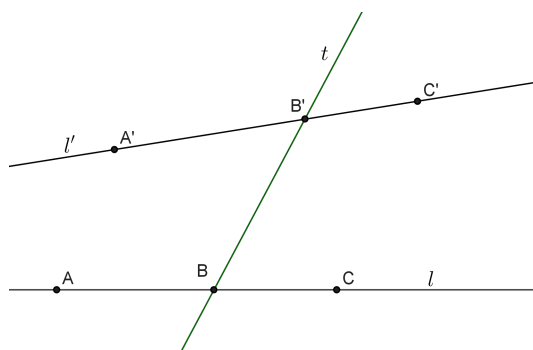


Figura 1.8

Teorema 1.32 (Ángulo Alterno Interno (EI.28)). *Si dos rectas cortadas por una transversal tiene un par de ángulos interiores congruentes con respecto a esa transversal, entonces las dos rectas son paralelas.*

Corolario 1.3. *Dos rectas perpendiculares a la misma recta son paralelas. Así que, la perpendicular trazada desde un punto P a una recta l es única, P no está en l .*

Corolario 1.4. *Si l es cualquier recta y P es cualquier punto que no está en l , existe al menos una recta m que pasa por P paralela a l .*

Definición 1.20. *Un ángulo suplementario a un ángulo de un triángulo es llamado ángulo exterior de ese triángulo. Los otros dos ángulos del triángulo son llamados ángulos interiores remotos a ese ángulo exterior.*

Teorema 1.33 (Ángulo exterior). *Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de sus ángulos interiores remotos.*

Corolario 1.5. *Si un triángulo tiene ángulo recto u obtuso, los otros dos ángulos son agudos.*

Teorema 1.34. *Si $AC \cong DF$, $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ y $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Definición 1.21. (a) *AD es bisectriz del ángulo $\sphericalangle BAC$, si D es un punto en el interior del ángulo y $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle DAC$.*

(b) *BD es mediatriz a AC , si $BD \perp AC$ y $AB \cong BC$.*

Definición 1.22. *Si un ángulo $\sphericalangle A$ de un triángulo $\triangle ABC$ es recto, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. A los lados AB y AC de $\triangle ABC$ son llamados catetos y el lado CB es la hipotenusa.*

Teorema 1.35. *Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto son congruentes.*

Teorema 1.36. *Cada segmento tiene un único punto medio.*

Teorema 1.37. (a) *Cada ángulo tiene una única bisectriz.*

(b) *Cada segmento tiene una única mediatriz.*

Teorema 1.38. *En un triángulo $\triangle ABC$, el ángulo mayor se encuentra frente al lado mayor y el lado mayor frente al ángulo mayor, es decir, $AB > BC$ si y sólo si $\sphericalangle ACB > \sphericalangle BAC$.*

Teorema 1.39. *Dado $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ si tenemos $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $\sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'$ si y sólo si $AC < A'C'$.*

Teorema 1.40 (Medidas de Ángulos y Segmentos). *Hay una única manera de asignar la medida en grados $(\sphericalangle A)^\circ$ a cada ángulo tal que las siguientes propiedades se cumplen:*

(a) $(\sphericalangle A)^\circ$ es un número real tal que $0 < (\sphericalangle A)^\circ < 180^\circ$.

(b) $(\sphericalangle A)^\circ = 90^\circ$ si y sólo si $\sphericalangle A$ es un ángulo recto.

(c) $(\sphericalangle A)^\circ = (\sphericalangle B)^\circ$ si y sólo si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$.

(d) Si \overrightarrow{AC} es interior a $\sphericalangle DAB$, entonces $(\sphericalangle DAB)^\circ = (\sphericalangle DAC)^\circ + (\sphericalangle CAB)^\circ$.

(e) Para cada número real x , que está entre 0 y 180 existe un ángulo $\sphericalangle A$ tal que $(\sphericalangle A)^\circ = x^\circ$.

(f) Si $\sphericalangle B$ es suplementario de $\sphericalangle A$, entonces $(\sphericalangle A)^\circ + (\sphericalangle B)^\circ = 180^\circ$.

(g) $(\sphericalangle A)^\circ > (\sphericalangle B)^\circ$ si y sólo si $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Hay una única manera de asignar una longitud \overline{AB} para cada segmento AB tal que las siguientes propiedades se cumplen:

(h) \overline{AB} es un número real positivo y $\overline{OI} = 1$, donde OI es llamado segmento unitario.

(i) $\overline{AB} = \overline{CD}$ si $AB \cong CD$.

(j) $A * B * C$ si y sólo si $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

(k) $\overline{AB} < \overline{CD}$ si y sólo si $AB < CD$.

(m) Para cada número real positivo x , existe un segmento AB tal que $\overline{AB} = x$.

Definición 1.23. Si $(\sphericalangle B)^\circ + (\sphericalangle C)^\circ = 90^\circ$, entonces $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ son llamados complementarios el uno del otro y se dicen ángulos complementarios.

Corolario 1.6 (Consecuencia del Teorema del Ángulo Exterior). La suma de la medida de grados de cualesquiera dos ángulos de un triángulo es menor de 180° .

Desigualdad triangular Si \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} son longitudes de los lados de un triángulo $\triangle ABC$ entonces $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.

Corolario 1.7. El recíproco a la desigualdad del triángulo es equivalente al Principio de Continuidad Círculo-Círculo. Por lo tanto, lo opuesto a la desigualdad del triángulo se cumple en planos euclidianos.

Capítulo 2

Transformaciones geométricas

Como dijimos en el Capítulo 1, un sistema axiomático cuenta con un conjunto de términos indefinidos, un conjunto de relaciones indefinidas y un conjunto de axiomas que establecen las propiedades básicas que deben cumplir dichos términos y relaciones. En el caso de la geometría neutral plana (GNP) los términos indefinidos son punto y recta, y las relaciones indefinidas son: incidencia, orden, congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.

De manera general, si tenemos cualquier sistema de axiomas, podemos interpretar los términos indefinidos y las relaciones indefinidas de alguna manera, es decir, dar a los términos indefinidos y a las relaciones indefinidas un significado particular. Llamamos a esto una interpretación del sistema. Entonces podemos preguntarnos si los axiomas, así interpretados, son afirmaciones correctas; si lo son, llamaremos a esta interpretación un modelo [2].

Ejemplo: le llamaremos sistema axiomático de Geometría de Incidencia Plana (GIP) a aquél cuyo términos indefinidos son punto y recta y cuya única relación indefinida es la relación de incidencia entre puntos y rectas. Si P es un punto de GIP y l es una recta de GIP, la proposición “ P incide con l ” y se escribe $P\mathcal{I}l$; se considera como una relación simétrica, es decir, para nosotros será lo mismo decir “ P incide con l ” que “ l incide con P ”. Los axiomas de este sistema axiomático son los tres axiomas de incidencia de la geometría neutral GNP .

Una interpretación de GIP es un terna $\mathcal{M} = (\Pi, \Lambda, \mathcal{I})$ cuyos elemntos de Π son los puntos de nuestra interpretación \mathcal{M} , Λ son las rectas de \mathcal{M} e \mathcal{I} es una relación entre los elementos de \mathcal{M} y de Λ . Por ejemplo podríamos escoger: $\Pi_1 = \{A, B, C\}$,

$\Lambda_1 = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$ y definir: $P \in \Pi_1$ y $l \in \Lambda_1$, $P\mathcal{I}l$ si y sólo si $P \in l$. La terna $\mathcal{M} = (\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1)$ es una interpretación los puntos de GIP como los elementos de Λ , que son conjuntos de puntos; la relación de incidencia como la relación de pertenencia, es decir, $P\mathcal{I}l$ si y sólo si $P \in l$.

Lo más interesante de una interpretación \mathcal{M} de un sistema axiomático \mathcal{S} es que los términos indefinidos de \mathcal{S} y las relaciones indefinidas de \mathcal{S} en \mathcal{M} , satisfagan los axiomas de \mathcal{S} interpretados en \mathcal{M} . Sólo en este caso se podrá decir que \mathcal{M} es un modelo de \mathcal{S} . Análogamente, la interpretación $\mathcal{M}_\epsilon = (\Pi_2, \Lambda_2, \mathcal{I}_2)$ en donde $\Lambda_2 = \{a, b, c\}$, $\Pi_2 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, y si $p \in \Pi_2$ y $l \in \Lambda_2$, entonces $P\mathcal{I}l$ si y sólo si $P \in l$ (o sea un punto incide con una recta si ¡la recta pertenece al punto!) es un modelo de GIP. También, la interpretación geométrica en donde los puntos son marcas de lápiz sobre el papel, las rectas son las trazadas con la regla y la incidencia de un punto con una recta se da si la recta pasa por el punto, es modelo de GIP.

Otro modelo de GIP es el usado en geometría analítica. En él los puntos son parejas ordenadas de números reales, las rectas son conjunto de estilo: $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, donde a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 > 0$, un punto (x_0, y_0) incide con una recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ si y sólo si $ax_0 + by_0 + c = 0$. Se puede consultar [2], [3] y [4] para este capítulo.

2.1. Automorfismos de planos neutrales

Definición 2.1. *Un modelo de la geometría neutral plana GNP es una quinteta $\mathcal{M} = (\Pi, \Lambda, \mathcal{I}, *, \cong)$ en donde Π es un conjunto cuyos elementos son puntos de \mathcal{M} , Λ es un conjunto cuyos elementos son las rectas de \mathcal{M} , \mathcal{I} es una relación entre puntos y rectas, $*$ es una relación entre ternas de puntos y \cong es una relación entre segmentos y también una relación entre ángulos y todos ellos cumplen con los axiomas de GNP.*

Los últimos dos ejemplos de GIP, son también modelos de GNP si definimos de la manera usual, en cada uno de ellos, las relaciones de orden ($*$) y congruencia (\cong).

Definición 2.2. *Supongamos que $\mathcal{M}_1 = (\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1, *_1, \cong_1)$ y $\mathcal{M}_2 = (\Pi_2, \Lambda_2, \mathcal{I}_2, *_2, \cong_2)$ son dos modelos de GNP. Entonces:*

- (a) *Un isomorfismo entre \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 es una función biyectiva $\varphi : \Pi_1 \longrightarrow \Pi_2$ que conservan la incidencia, el orden y la congruencia, es decir:*

1. Para cualesquiera dos puntos distintos A y B en Π_1 , se tiene:

$$PT_1 \overleftrightarrow{AB} \text{ si y sólo si } \varphi(P) \overleftrightarrow{\mathcal{I}_2 \varphi(A) \varphi(B)}.$$

2. Si A, B y C en Π_1 , entonces $A *_1 B *_1 C$ si y sólo si $\varphi(A) *_2 \varphi(B) *_2 \varphi(C)$.

3. Si A, B, C, D en Π_1 con $A \neq B$ y $C \neq D$, entonces $\overline{AB} \cong_1 \overline{CD}$ si y sólo si $\varphi(A)\varphi(B) \cong_2 \varphi(C)\varphi(D)$.

4. Dados los ángulos en $\mathcal{M}_1 \triangleleft ABC$ y $\triangleleft DEF$, tenemos:

$$\triangleleft ABC \cong_1 \triangleleft DEF \text{ si y sólo si } \triangleleft \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \cong_2 \triangleleft \varphi(D)\varphi(E)\varphi(F).$$

(b) Si $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ y $\varphi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ es un isomorfismo, entonces se dice que φ es un automorfismo de \mathcal{M}_1 .

Definición 2.3. (a) El sistema axiomático de la Geometría Euclidiana Plana (GEP) consta de los mismos términos y relaciones indefinidas, los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad que GNP, con un axioma más:

La Propiedad Euclidiana de las Paralelas (PEP), dados una recta l y un punto P que no incide con l , existe una única recta m que incide con P y es paralela a l .

(b) El sistema axiomático de la Geometría Hiperbólica Plana (GHP) consta de los mismos términos y relaciones indefinidas y los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad que GNP, pero con un axioma más:

La Propiedad Hiperbólica de las Paralelas (PHP), dados una recta l y un punto P que no incide con l , existen por lo menos dos rectas n y m que inciden con P y que son paralelas a l .

Definición 2.4. (a) A un modelo de GNP se le llama plano neutral.

(b) A un modelo de GEP se le llama plano euclidiano.

(c) A un modelo de GHP se le llama plano hiperbólico.

Se sabe que PHP es equivalente, en GNP, a la negación de PEP. Su demostración no es sencilla (véase [3], Página 187-188 ó [4], Página 250-251). Una consecuencia de esta observación es la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Cualquier plano neutral es euclidiano o es hiperbólico.*

Si tenemos dos automorfismos R y T de un plano neutral $\mathcal{M} = (\Pi, \Lambda, \mathcal{I}, *, \cong)$, a la composición de R y T como funciones de Π a Π , se le denotará $R \circ T$.

Proposición 2.2. *El conjunto Θ de todos los automorfismos de un plano neutral $\mathcal{M} = (\Pi, \Lambda, \mathcal{I}, *, \cong)$, con la composición de funciones de Π a Π , forman un grupo, es decir, cumplen con las siguientes propiedades:*

- (a) *R y $T \in \Theta$, entonces $R \circ T \in \Theta$.*
- (b) *Existe un elemento neutro en Θ , es decir, existe $I \in \Theta$ tal que $I \circ T = T = T \circ I$, para todo $T \in \Theta$ (de hecho I es la identidad de Π).*
- (c) *$T \in \Theta$, entonces $T^{-1} \in \Theta$, donde T^{-1} es la inversa de T .*
- (d) *$R \circ (T \circ U) = (R \circ T) \circ U$ para toda $R, T, U \in \Theta$ (ley asociativa).*

El grupo Θ de automorfismo de \mathcal{M} es abeliano si para cualesquiera R y T en Θ se tiene la propiedad $R \circ T = T \circ R$.

2.2. Isometrías y similitudes

Convenio 2. Apartir de ahora y en el resto del capítulo $\mathcal{M} = (\Pi, \Lambda, \mathcal{I}, *, \cong)$ será un plano neutral y Θ su grupo de automorfismos.

Convenio 3. Como regla general, si $T : \Pi \rightarrow \Pi$ es una función biyectiva, le llamaremos transformación de \mathcal{M} y, para cualquier $P \in \Pi$ denotaremos por P' a $T(P)$.

Definición 2.5. *Sea $T : \Pi \rightarrow \Pi$ una función biyectiva. T es llamada isometría o movimiento de \mathcal{M} si la longitud es invariante bajo T . En otras palabras, para cada segmento AB , $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (o equivalentemente $AB \cong A'B'$).*

Convenio 4. Si $P \in \Pi$ y $l \in \Lambda$, en vez de decir P incide con l , usaremos expresiones más usuales (aunque no necesariamente correctas desde el punto de vista formal) como: P está en l , l pasa por P , P es un punto de l , etc.

Proposición 2.3. (a) *Toda isometría de \mathcal{M} es un automorfismo de \mathcal{M} .*

(b) *El Conjunto de isometrías de \mathcal{M} es un subgrupo del Θ .*

Demostración.

(a) Sea T una isometría de \mathcal{M} .

Si $AB \cong CD$, entonces $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{C'D'}$, así que $A'B' \cong C'D'$. También T conserva el orden de puntos. Por Teorema 1.40 (j) $A * B * C$ si y sólo si $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$, por lo tanto $A' * B' * C'$. Ahora bien, si A, B son elementos de Π y $A \neq B$, se tiene:

$$\begin{aligned} P \overleftrightarrow{IAB} &\Leftrightarrow P \in \{A, B\} \vee P * A * B \vee A * B * P \vee A * P * B \\ &\Leftrightarrow P' \in \{A', B'\} \vee P' * A' * B' \vee P' * B' * A' \vee A' * P' * B' \\ &\Leftrightarrow P' \overleftrightarrow{IAB}. \end{aligned}$$

Entonces T conserva la incidencia. Por último demostraremos que T conserva la congruencia de ángulos. Por el Teorema 1.40 basta demostrar que T conserva las medidas angulares. Primero que nada, como T conserva incidencia y orden, T conserva ángulos, es decir, $T(\sphericalangle ABC) = \sphericalangle A'B'C'$; además $T(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$ y como $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (por Teorema 1.26), entonces $(\sphericalangle ABC)^\circ = (\sphericalangle A'B'C')^\circ$. Por todo esto T es un automorfismo de \mathcal{M} .

(b) 1. La composición de isometrías es una isometría:

Sean h_1, h_2 isometrías de \mathcal{M} y $A, B \in \Pi$ tales que $h_1(A) = A_1, h_2(A_1) = A_2, h_1(B) = B_1$ y $h_2(B_1) = B_2$, entonces $h_2 \circ h_1(A) = A_2$ y $h_2 \circ h_1(B) = B_2$. Falta ver que $\overline{A_2B_2} = \overline{AB}$, pero $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ y $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}$, ya que h_1 y h_2 son isometrías, por lo tanto $\overline{AB} = \overline{A_2B_2}$.

2. La identidad es una isometría.

Definimos $I : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que, para cada A elemento de Π $I(A) := A$. Sean A y B elementos de Π entonces $I(A) = A, I(B) = B$, pero sabemos que $AB \cong AB$ lo cual implica $\overline{AB} = \overline{AB}$.

3. Por último h_1^{-1} es inversa de h_1 .

Definimos $h_1^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que para todo A y B que están en Π $h_1^{-1}(A) = A'$ y $h_1^{-1}(B) = B'$. Veamos que $A'B' = AB$.

$$A'B' = h^{-1}(A)h^{-1}(B) = h_1 \circ h_1^{-1}(A)h_1 \circ h_1^{-1}(B) = AB.$$

Por lo tanto las isometrías son un subgrupo del grupo de automorfismos. \square

Como acabamos de ver, toda isometría de \mathcal{M} es un automorfismo de \mathcal{M} . Pero hay automorfismos de \mathcal{M} que no son isometrías de \mathcal{M} .

Por ejemplo si M es un plano euclidiano, O está en Π y $k > 0$ entonces la dilatación con centro O y radio k es la función $T : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que si P está en Π , entonces $T(P) = P'$ es el único punto sobre el rayo \overrightarrow{OP} y tal que

$$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}.$$

Se puede demostrar que T es un automorfismo de \mathcal{M} pero, si $k \neq 1$ T no es isometría. Sabemos ya, por la demostración de la proposición anterior que toda isometría conserva medidas angulares.

Vamos a demostrar que no sólo las isometrías conservan medidas angulares, si no cualquier automorfismo de \mathcal{M} , también lo hace:

Proposición 2.4. *Si T es un automorfismo de un plano neutral, entonces T conserva medida de ángulos.*

Demostración.

Dado T un automorfismo de \mathcal{M} , si \mathcal{A} es el conjunto de ángulos de \mathcal{M} , definimos la función

$$m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo ángulo $\sphericalangle A \in \mathcal{M}$ tenemos $m(\sphericalangle A) = [\sphericalangle T(A)]^\circ$. Dado $\sphericalangle BAC$, se tiene que $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$. En efecto, veamos primero que $\overrightarrow{A'B}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ no son los mismos ni son opuestos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'C'} &\Rightarrow A' * B' * C' \vee A' * C' * B' \\ &\Rightarrow A * B * C \vee A * C * B \\ &\Rightarrow C \in \overrightarrow{AB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \text{ lo cual es una contradicción.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \overrightarrow{A'B} \text{ y } \overrightarrow{A'C'} \text{ son opuestos} &\Rightarrow C' * A' * B' \\ &\Rightarrow C * A * B \\ &\Rightarrow C \in \overrightarrow{AB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AB} \text{ son opuestos, que es una contradicción.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overrightarrow{A'B}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ si forman un ángulo. Ahora probaremos que las propiedades, respecto a las medidas en grados, del Teorema 1.40, las satisface la función m :

- (a) $m(\sphericalangle A) = [\sphericalangle T(A)]^\circ \in (0^\circ, 180^\circ)$.
- (b) $m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Leftrightarrow [\sphericalangle A']^\circ = 90^\circ$
 $\Leftrightarrow \sphericalangle A'$ es recto
 $\Leftrightarrow \sphericalangle A'$ es congruente a uno de su suplemento, $\sphericalangle C'A'D'$
 $\Leftrightarrow \sphericalangle A$ es congruente con su suplemento $\sphericalangle CAD$
 $\Leftrightarrow \sphericalangle A$ es recto.
- (c) $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B \Leftrightarrow \sphericalangle A' \cong \sphericalangle B'$ por ser T automorfismo
 $\Leftrightarrow [\sphericalangle A']^\circ = [\sphericalangle B']^\circ$
 $\Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B)$.
- (d) Si \overrightarrow{AD} está en el interior de $\sphericalangle BAC \Rightarrow B * D * C$ sin pérdida de generalidad sobre D
 $\Rightarrow \overrightarrow{B'D'} * \overrightarrow{D'C'}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{A'D'}$ está entre $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A'C'}$
 $\Rightarrow [\sphericalangle B'A'C']^\circ = [\sphericalangle B'A'D']^\circ + [\sphericalangle D'A'C']^\circ$
Teorema 1.40
 $\Rightarrow m(\sphericalangle B'A'C') = m(\sphericalangle B'A'D') + m(\sphericalangle D'A'C')$.
- (e) Si $\theta \in (0, 180)$, existe $\sphericalangle A$ tal que $[\sphericalangle A]^\circ = \theta^\circ$. Si $\sphericalangle A' = T^{-1}(\sphericalangle A)$, entonces $T(\sphericalangle A') = \sphericalangle A$ y por lo tanto $m(\sphericalangle A') = [T(\sphericalangle A')]^\circ = [\sphericalangle A]^\circ = \theta^\circ$.
- (f) Si $\sphericalangle A$ es suplemento de $\sphericalangle B$, entonces $\sphericalangle A'$ es suplemento de $\sphericalangle B'$, por lo que $[\sphericalangle A']^\circ + [\sphericalangle B']^\circ = 180^\circ$, pero $[\sphericalangle A']^\circ = m(\sphericalangle A)$ y $[\sphericalangle B']^\circ = m(\sphericalangle B)$.
- (g) Si $\sphericalangle BAC < \sphericalangle YXZ$, por definición existe un rayo \overrightarrow{XG} entre \overrightarrow{XY} y \overrightarrow{XZ} tal que $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle YXG$. Pero como T es automorfismo (preserva incidencia, orden y congruencia), entonces también existe un rayo $\overrightarrow{X'G'}$ entre $\overrightarrow{X'Y'}$ y $\overrightarrow{X'Z'}$ tal que $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle Y'X'G'$. Y por lo tanto $\sphericalangle B'A'C' < \sphericalangle Y'X'Z'$. Hemos demostrado que si $\sphericalangle BAC < \sphericalangle YXZ$, entonces $\sphericalangle B'A'C' < \sphericalangle Y'X'Z'$, para demostrar la implicación recíproca basta aplicar a los ángulos de la derecha el automorfismo T^{-1} , luego:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAC < \sphericalangle YXZ &\Leftrightarrow \sphericalangle B'A'C' < \sphericalangle Y'X'Z' \\ &\Leftrightarrow [\sphericalangle B'A'C']^\circ < [\sphericalangle Y'X'Z']^\circ \text{ aplicando } T^{-1} \\ &\Leftrightarrow m(\sphericalangle BAC) < m(\sphericalangle YXZ). \end{aligned}$$

Por lo tanto m es la función que satisface las propiedades (a)-(g) del Teorema 1.40. Pero dicho Teorema asegura que la medida en grados es la única función con

estas propiedades. Entonces m es esa medida en grados, es decir, para cada ángulo $\sphericalangle A$, $m(\sphericalangle A) = [\sphericalangle A]^\circ$. Por lo tanto para cada ángulo $\sphericalangle A$, $m(\sphericalangle A) = [\sphericalangle T(A)]^\circ [\sphericalangle A']^\circ$. \square

Definición 2.6. Decimos que el triángulo $\triangle ABC$ es semejante al triángulo $\triangle A'B'C'$ si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. Lo denotaremos como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Solo cuando hablamos de \sim en triángulo nos referimos a la semejanza, no confundir con la relación.

Corolario 2.1. Si \mathbf{M} es un plano euclidiano y $T : \Pi \rightarrow \Pi$ es biyectiva, entonces son equivalentes:

- (a) T es un automorfismo de \mathbf{M} .
- (b) Para cada triángulo $\triangle ABC$ de \mathbf{M} , entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
- (c) Existe $k \in \mathbb{R}$, tal que para cada segmento ED de \mathbf{M} , se tiene que $k\overline{E'D'} = \overline{ED}$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b) Si $\triangle A'B'C'$ es la imagen de $\triangle ABC$ bajo T , entonces T conserva medidas de ángulos; por lo tanto los ángulos correspondientes en ambos triángulos son congruentes.

(b) \Rightarrow (c) Sean $\triangle ABC$ un triángulo fijo cualquiera y $\triangle A'B'C'$ su imagen bajo T . Entonces como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, entonces

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Sea $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$. Entonces k es un real positivo. Ahora demostraremos que, para cualquier otro segmento ED , $\overline{ED} = k\overline{E'D'}$, véase Figura 2.1.

Como $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ se tiene que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k. \quad (1)$$

Además $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$, entonces

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}.$$

Por (1), tenemos $\frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}} = k$, por lo tanto $k\overline{E'D'} = \overline{ED}$.

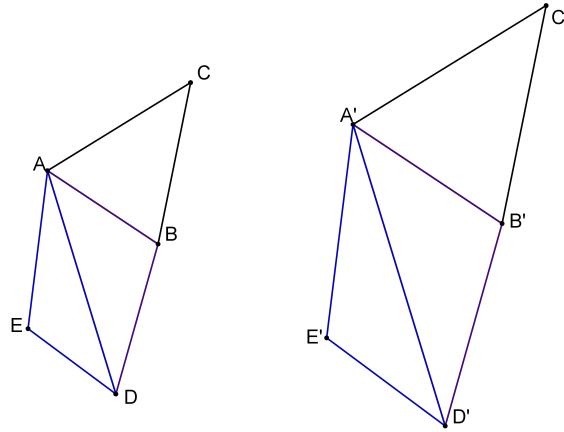


Figura 2.1

(c) \Rightarrow (a) Supongamos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para cualquier segmento CD en M , se tiene $\overline{CD} = k\overline{C'D'}$. Demostraremos que T conserva orden, congruencia e incidencia.

$$\begin{aligned}
 \text{Si } A * B * C &\Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \\
 &\Leftrightarrow k\overline{A'C'} = k\overline{A'B'} + k\overline{B'C'} \\
 &\Leftrightarrow \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} \\
 &\Leftrightarrow A' * B' * C'.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se conserva el orden.

Para la incidencia. Sean P y l una recta, entonces existen dos puntos distintos A y B que inciden con l y $\overleftrightarrow{AB} = l$. Supongamos que $P \notin l$, tenemos dos casos:

1. Si $P \in \{A, B\}$, así que $P' \in \{A', B'\} \subseteq \overleftrightarrow{A'B'}$. Entonces $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$.
2. Si $P \notin \{A, B\}$. Como $P \in l = \overleftrightarrow{AB}$, entonces A, B y P son colineales y distintos, por lo que $A * B * P$ o $A * P * B$ o $B * A * P$. Y Como T conserva el orden $A' * B' * P'$ o $A' * P' * B'$ o $B' * A' * P'$.

En cualquier caso A', B' y P' son colineales y distintos. Por lo tanto $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$.

Congruencia se tiene dos casos:

Para segmentos: supongamos $AB \cong CD$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$, lo cual implica

$\frac{1}{k}\overline{AB} = \frac{1}{k}\overline{CD}$ y por (c) $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$. Por lo tanto $A'B' \cong C'D'$.
Para ángulos: sea $\sphericalangle ABC$ un ángulo, entonces por (c):

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{k}\overline{AB}, \quad \overline{A'C'} = \frac{1}{k}\overline{AC} \quad y \quad \overline{B'C'} = \frac{1}{k}\overline{BC}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad y \quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},$$

así $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y con ello $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$.

Por lo tanto T es un automorfismo. □

Por el Corolario 2.1, a los automorfismos de \mathcal{M} se les llaman también similitudes. En el caso de los planos hiperbólicos, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Cada automorfismo de un plano hiperbólico es una isometría.*

En realidad también es un corolario de la Proposición 2.4 y del hecho de que la semejanza y la congruencia son las mismas que en la geometría hiperbólica (para su demostración véase el Teorema 6.2 en [3]).

2.3. Reflexiones

Definición 2.7. *Dada una recta m en el plano neutral \mathcal{M} , la reflexión a través de la recta m es la función $R_m : \Pi \rightarrow \Pi$ que deja fijos a los puntos que incidan con m y transforma a un punto A que no incida con m de la siguiente manera:*

*Sea M el pie de la perpendicular de A a m . Entonces por definición $R_m(A)$ es el único punto A' tal que $A' * M * A$ y $AM \cong A'M$. Suele denotarse A^m .*

Observación 2.1. $R_m \circ R_m = I$, es decir, $R_m = (R_m)^{-1}$.

Definición 2.8. *Una transformación de \mathcal{M} , distinta de la igualdad y que es igual a su propia inversa se llama involución.*

Definición 2.9. *Un punto fijo de una transformación T es un punto A tal que $A' = A$.*

Así, los puntos fijos de una reflexión R_m son los puntos que están en m .

Proposición 2.6. *Toda reflexión es una isometría.*

Demostración.

Sean m una recta y R_m la reflexión. Sean A y B dos puntos distintos cualesquiera. Probaremos que si $R_m(A) = A'$ y $R_m(B) = B'$, entonces $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Un primer caso no trivial es cuando uno de los dos puntos, digamos A está en m y el otro no. En este caso $A' = A$.

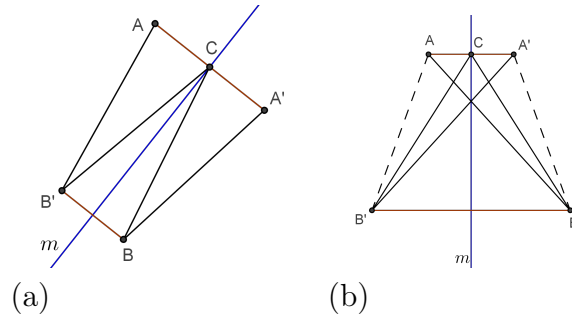


Figura 2.2

Entonces como m es la mediatriz del segmento $\overline{BB'}$, si el punto M es el punto medio del segmento BB' se tiene que $\triangle ABM \cong \triangle AB'M$ (Axioma C6). Por lo tanto $AB \cong A'B'$. Ahora supongamos que ni A ni B están en m . Sea C el punto medio del segmento AA' . Si A y B están del mismo lado de m , véase Figura 2.2 (a). Entonces $CB' \cong CB$, $CA' \cong CA$ y $\sphericalangle A'CB' \cong \sphericalangle ACB$, luego $\triangle CA'B' \cong \triangle CAB$, por lo que $A'B' \cong AB$. Si A y B están de lados opuestos de m , véase Figura 2.2 (b), lo que implica $CB' \cong CB$, $CA' \cong CA$ y $\sphericalangle ACB' \cong \sphericalangle A'CB$. Así $\triangle ACB' \cong \triangle A'CB$ con $\sphericalangle CAB' \cong \sphericalangle CA'B$ y $AB' \cong A'C$, entonces $\triangle B'AA' \cong \triangle BA'A$, donde $B'A' \cong BA$. □

Lema 2.1. *Si un automorfismo T fija dos puntos A y B , entonces es una isometría y fija cada punto de la recta \overleftrightarrow{AB} .*

Demostración.

Por el inciso (c) del Corolario 2.1 existe una constante $k > 0$ tal que, para todo segmento \overline{CD} , $\overline{CD} = k\overline{C'D'}$, como $\overline{AB} = k\overline{A'B'}$ la constante es igual a 1. Por lo tanto T es una isometría. Sea C un tercer punto que incide con \overleftrightarrow{AB} , consideremos

el caso que $A * B * C$; entonces $A * B * C'$ y $\overline{AC} = \overline{AC'}$. Por Axioma C1, se tiene $C = C'$. Los demás casos son análogos. □

Lema 2.2. *Si un automorfismo fija tres puntos no colineales, entonces es la identidad.*

Demostración.

Si A, B, C son fijos, entonces por Lema 2.1 también lo son los puntos en las rectas que unen a esos tres puntos. Vamos a demostrar que si D no está en esas tres rectas, entonces D es fijo también. Elegimos cualquier E entre A y B .

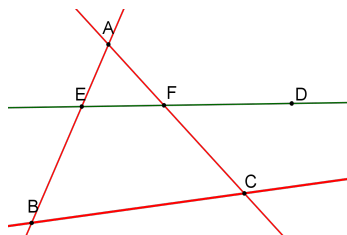


Figura 2.3

Por el Teorema de Pasch, la recta \overleftrightarrow{DE} interseca con el otro lado del $\triangle ABC$ en un punto F , véase Figura 2.3. Luego E y F son fijos por el Lema 2.1. Por lo tanto todos los puntos de la recta \overleftrightarrow{EF} son fijos, en particular D lo es. □

Proposición 2.7. *Si un automorfismo fija dos puntos A, B y no es la identidad, entonces es la reflexión a través de la recta \overleftrightarrow{AB} .*

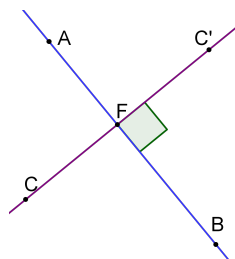


Figura 2.4

Demostración.

Por Lema 2.1 aseguramos que cada punto de \overleftrightarrow{AB} es fijo. Sea C cualquier punto fuera de \overleftrightarrow{AB} y sea F el pie de la perpendicular desde C a \overleftrightarrow{AB} . Un automorfismo conserva perpendicularidad, entonces C' debe estar en \overleftrightarrow{CF} , véase Figura 2.4. El Lema 2.2 asegura que $C \neq C'$, y ya que $\overline{CF} = \overline{C'F}$ (Lema 2.1), por lo tanto C' es la reflexión de C respecto de \overleftrightarrow{AB} .

□

Proposición 2.8. *Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) si, y sólo si existe una única isometría T tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. Además esta isometría se puede escribir como una composición de a lo más tres reflexiones (consideramos a la identidad como una composición de cero reflexiones y a cada reflexión como una composición de una reflexión).*

Demostración.

Si existe una isometría T de \mathcal{M} tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$, entonces T manda el $\triangle ABC$ sobre un triángulo congruente $\triangle A'B'C'$ (LLL).

Para demostrar la suficiencia, supongamos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Queremos demostrar que hay una única isometría T tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. La unicidad es fácil de demostrar, porque si T' fuera otra isometría tal que $T'(A) = A'$, $T'(B) = B'$ y $T'(C) = C'$, entonces $T^{-1} \circ T'$ fija esos tres puntos ($T^{-1} \circ T'(A) = A$, $T^{-1} \circ T'(B) = B$ y $T^{-1} \circ T'(C) = C$). Por lo tanto por Lema 2.2, $T^{-1} \circ T' = I$ y con ello $T = T'$. Ahora construiremos la isometría. Si $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, entonces la identidad I es la isometría que buscamos.

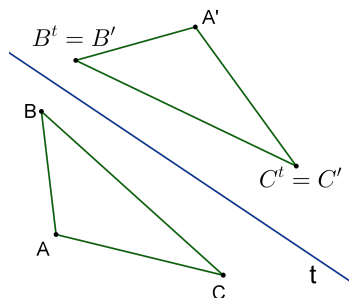


Figura 2.5

Podemos suponer que $A \neq A'$ y sea t la mediatriz de AA' , véase Figura 2.5. Luego la reflexión a través de t manda A a A' y B, C a los puntos B^t, C^t . Si $B^t = B'$ y

$C^t = C'$, hemos terminado: R_t es la isometría que buscamos.

Supongamos que si $B' \neq B^t$. Tenemos $A'B' \cong AB \cong A'B^t$. Sea u la mediatriz de $B'B^t$, así que R_u manda B^t a B' . Esta reflexión fija A' porque, si A', B^t, B' son colineales, A' es el punto medio de $B'B^t$ y está sobre u , véase Figura 2.6.

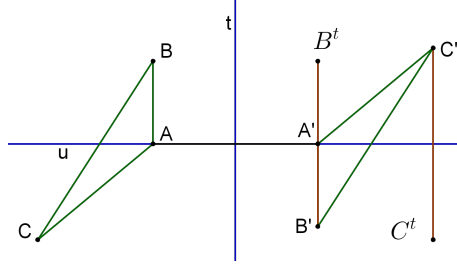


Figura 2.6

Si A', B^t, B' no son colineales, u es la mediatriz de la base del triángulo isósceles $\triangle A'B^tB'$ y u pasa a través del vértice A' , véase Figura 2.7 (a). Por lo tanto $R_t(A) = A'$, $R_u(A') = A'$, $R_t(B) = B^t$, $R_u(B^t) = B'$ y $R_t(C) = C^t$. Entonces $R_u \circ R_t(A) = A'$ y $R_u \circ R_t(B) = B'$. Si también $R_u(C^t) = C'$, hemos terminado: $R_u \circ R_t$ es la isometría buscada. Si, Por el contrario $R_u \circ R_t(C) = C' \neq C''$, entonces $A'C' \cong AC \cong A'C''$ y $B'C' \cong BC \cong B'C''$, véase Figura 2.7 (b). Así que $\triangle A'B'C' \cong \triangle A'B'C''$. Un argumento con triángulos congruentes muestra que C' es la reflexión de C'' a través de $v = \overleftrightarrow{A'B'}$. Entonces $R_v \circ R_u \circ R_t$ es la isometría que buscamos. □

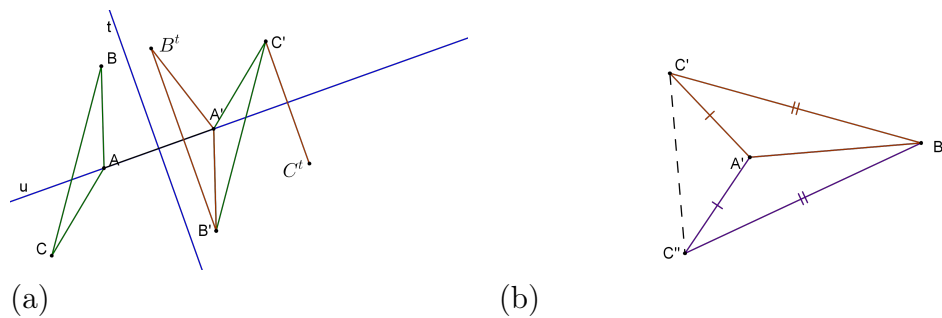


Figura 2.7

Corolario 2.2. *Cada isometría es una composición de a lo más de tres reflexiones.*

Demostración.

Supongamos que F es isometría. Entonces, existen tres puntos no colineales A , B y C . Si $F(A) = A'$, $F(B) = B'$ y $F(C) = C'$, se tiene que $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ y por la Proposición 2.8, existe una única isometría T tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. Por consiguiente $F = T$. Además T , y por tanto F , se puede escribir como una composición de a lo más tres reflexiones. □

2.4. Rotaciones

En toda esta sección seguiremos usando los convenios establecidos anteriormente.

Definición 2.10. *Si l y m dos rectas que inciden en un punto A . Entonces se dice que la transformación $T = R_l R_m$ es una rotación alrededor de A .*

Definición 2.11. *Una recta $\overleftrightarrow{AB} \in \Lambda$ es invariante bajo una transformación T de \mathcal{M} , si $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{A'B'}$ (aunque no todos los puntos de \overleftrightarrow{AB} son fijos bajo T).*

Proposición 2.9. *Si l perpendicular a m , A el punto de intersección de l y m y $T = R_l \circ R_m$, entonces para cualquier punto $B \neq A$, A es el punto medio de BB' .*

Demostración.

Si B incide con m , entonces $T(B) = R_l \circ R_m(B) = R_l(B) = B'$, como m es invariante bajo l , B' está en m , véase Figura 2.8. Así, B , A y B' son colineales.

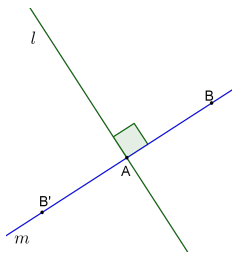


Figura 2.8

Y como $\overline{AB} = \overline{AB'}$, por ser T una isometría, A es el punto medio de BB' . Análogamente si $B \in l$.

Ahora suponemos que B no incide con m ni con l . Sea C el pie de la perpendicular de B a m , entonces B' está del lado opuesto de l y m con respecto de B (ya que B y B^m están del mismo lado de l y B^m y B' están de lados opuestos de l , también B y B^m están en lados opuestos de m y B^m y B' están del mismo lado de m), y C' está en el lado opuesto de l respecto de C , véase Figura 2.9.

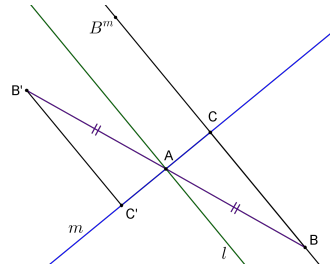


Figura 2.9

Como T es una composición de dos reflexiones, T conserva congruencia de ángulos, lo que implica $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'AC'$ y deducimos que deben ser ángulos opuestos por el vértice, por lo tanto A , B y B' son colineales. Así $AB \cong AB'$, entonces A es el punto medio de BB' .

□

Definición 2.12. La isometría T de la Proposición 2.9 describe la rotación de 180° sobre A , también llamada la media vuelta alrededor de A , se denota H_A . La imagen de un punto P bajo H_A se denotará P^A .

Corolario 2.3. H_A es una involución y sus rectas invariantes son las rectas que pasan por A .

Demostración.

Sean $H_A(B) = B'$, por demostrar que $H_A(B') = B$. Sea $H_A(B') = \widehat{B}$, por la Proposición 2.9 A es el punto medio de $B\widehat{B}$ y de BB' , así que $\overleftrightarrow{AB'} = \overleftrightarrow{A\widehat{B}}$, por lo tanto \widehat{B} incide con $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB'}$, es decir, A , B , B' y \widehat{B} son colineales. Por Axioma C1, en el rayo opuesto a $\overleftrightarrow{AB'}$, existe un único punto X tal que $AX \cong AB'$, pero B y \widehat{B} están en el rayo opuesto a $\overleftrightarrow{AB'}$, entonces $AB \cong AB'$ y $A\widehat{B} \cong AB'$, por lo tanto $B = \widehat{B}$. También por Proposición 2.9 las rectas que pasan por A son rectas invariantes.

□

Proposición 2.10. *Una isometría $T \neq I$ es una rotación si y sólo si T tiene exactamente un punto fijo.*

Demostración.

Supongamos que T tiene solo un punto fijo A y elegimos $B \neq A$. Sea l la mediatriz de BB' . Como $AB \cong AB'$, A está sobre l y $R_l \circ T$ es la isometría que fija a los puntos A y B . Si $R_l \circ T = I$, entonces $T = R_l$, lo cual contradice la hipótesis de que T tiene un punto fijo. Por lo tanto $R_l \circ T \neq I$ y $m = \overleftrightarrow{AB}$, la Proposición 2.7 implica que $R_l \circ T = R_m$, así que $T = R_l \circ R_m$ y T es una rotación alrededor de A , véase Figura 2.10.

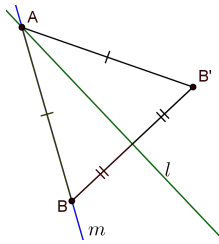


Figura 2.10

Sea $T = R_l \circ R_m$ una rotación alrededor de A . Supongamos que $B \neq A$ es otro punto fijo. Entonces $R_l(B^m) = R_l \circ (R_m(B)) = B$. Así que l es mediatriz de BB^m . Pero m también es mediatriz de BB^m , luego $m = l$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto T tiene un punto fijo. □

Proposición 2.11. *Si T es una rotación alrededor de A y m es cualquier recta a través de A , entonces existe una única recta l que pasa por A tal que $T = R_l \circ R_m$. Si l no es perpendicular a m , entonces para cualquier punto $B \neq A$, $[\angle BAB']^\circ = 2d$, donde d es el número de grados del ángulo agudo hecho por la intersección de las rectas l y m .*

Demostración.

A es el único punto fijo de T . Sean $B \neq A$, l la mediatriz de BB' y $m = \overleftrightarrow{AB}$. Como en la demostración de la Proposición 2.10, se puede probar que $T = R_l R_m$ es una rotación alrededor de A . En Figura 2.10, se puede ver que $[\angle BAB']^\circ = 2d$. □

Por la Proposición 2.11, si T es la rotación $R_l \circ R_m$ y d es la medida en grados del ángulo agudo formado por las rectas l y m , suele decirse que T es la rotación alrededor de A en un ángulo de $2d$ grados.

Observación 2.2. *No es lo mismo $R_l \circ R_m$ y $R_m \circ R_l$, una es la rotación a la derecha y la otra es rotación a la izquierda. Para un argumento más riguroso, notar que:*

$$(R_m \circ R_l) \circ (R_l \circ R_m) = R_m \circ (R_l^2) \circ R_m = R_m \circ I \circ R_m = R_m^2 = I.$$

Por lo que la inversa de $R_m \circ R_l$ es $R_l \circ R_m$.

Proposición 2.12. *Dado un punto A , el conjunto de rotaciones alrededor de A es un grupo conmutativo.*

Demostración.

La identidad es una rotación alrededor de A por definición y, por la Observación 2.2 se demuestra que la inversa es una rotación alrededor de A .

Demostraremos que la composición de dos rotaciones $T \circ T'$ alrededor de A es una rotación. Sea $T' = R_l \circ R_m$, por Proposición 2.11, existe una única recta k a través de A tal que $T = R_k \circ R_l$, entonces

$$T \circ T' = (R_k \circ R_l) \circ (R_l \circ R_m) = R_k \circ (R_l^2) \circ R_m = R_k \circ I \circ R_m = R_k \circ R_m,$$

la cual es una rotación alrededor de A .

Para la conmutatividad aplicamos la Proposición 2.11 nuevamente para obtener una única recta n tal que $T^{-1} = R_n \circ R_m$. Entonces $T = R_m \circ R_n$ y

$$T' \circ T = (R_l \circ R_m) \circ (R_m \circ R_n) = R_l \circ (R_m^2) \circ R_n = R_l \circ R_n.$$

Como $T \circ T' = R_k \circ R_m$,

$$R_k \circ (T \circ T') \circ R_m = R_k \circ (R_k \circ R_m) \circ R_m = R_k^2 \circ R_m^2 = I \circ I = I$$

y también

$$R_k \circ (T' \circ T) \circ R_m = R_k \circ (R_l \circ R_n) \circ R_m = (R_k \circ R_l) \circ (R_n \circ R_m) = T \circ T^{-1} = I.$$

Por lo tanto, cancelando por la derecha R_m y por la izquierda R_k , $T \circ T' = T' \circ T$. □

2.5. Translaciones

Definición 2.13. Si l y m dos rectas paralelas con una perpendicular en común t . Entonces se dice que la transformación $T = R_l R_m$ es una translación a lo largo de t .

Proposición 2.13. Sean $l \perp t$ en A , $m \perp t$ en B , y $T = R_l \circ R_m$, Sean P, Q puntos cualesquiera tales que:

- (a) Si Q está sobre t , entonces $\overline{QQ'} = 2(\overline{AB})$.
- (b) Si P no está sobre t , entonces $P' \in S(P, l)$. En el plano euclidiano $\overline{PP'} = 2(\overline{AB})$ y en el hiperbólico $\overline{PP'} > 2(\overline{AB})$.

Demostración.

Supongamos que Q está sobre t y $A * B * Q$, véase Figura 2.11. Si $\overline{BQ} < \overline{AB}$, entonces $A * Q^m * B$. Y

$$\begin{aligned} \overline{QQ'} &= \overline{Q'A} + \overline{AB} + \overline{BQ} \\ &= \overline{AQ^m} + \overline{AB} + \overline{BQ^m} \\ &= (\overline{AQ^m} + \overline{BQ^m}) + \overline{AB} \\ &= \overline{AB} + \overline{AB} \\ &= 2(\overline{AB}). \end{aligned}$$

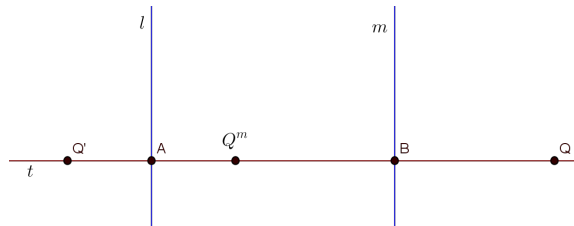


Figura 2.11

Si $\overline{BQ} = \overline{AB}$, entonces $Q' = A$ y $\overline{QQ'} = 2(\overline{AB})$. Si $\overline{BQ} > \overline{AB}$ tenemos que $Q^m * A * B$ y $\overline{Q^m A} = \overline{Q^m B} - \overline{AB} = \overline{BQ} - \overline{AB}$, véase Figura 2.12. Así también se tiene que $Q^m * A * Q' * Q$, lo cual resulta en:

$$\begin{aligned}
 2(\overline{BQ}) &= \overline{QQ^m} \\
 &= \overline{QQ'} + 2\overline{Q^m A} \\
 &= \overline{QQ'} + 2(\overline{BQ} - \overline{AB}) \\
 2(\overline{BQ}) &= \overline{QQ'} + 2\overline{BQ} - 2\overline{AB} \\
 \overline{QQ'} &= 2\overline{AB}.
 \end{aligned}$$

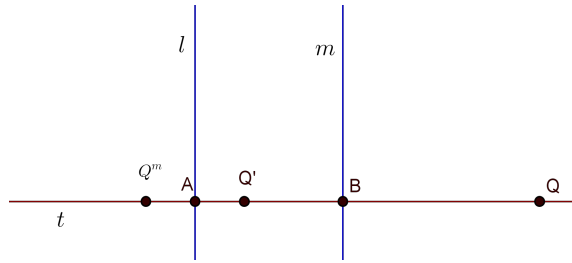


Figura 2.12

Supongamos que $P \notin t$; entonces P y P^m están en una recta perpendicular a m y por lo tanto paralela a t , así que están del mismo lado de t . Similarmente, P^m y P' están en el mismo lado de t y, por Axioma O4, P y P' están del mismo lado de t .

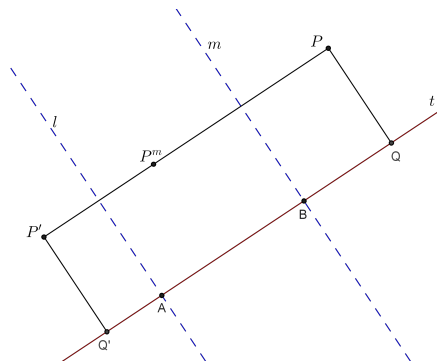


Figura 2.13

Sea Q el pie de la perpendicular de P a t , véase Figura 2.13. Puesto que T preserva perpendicularidad, Q' es el pie de la perpendicular de P' a t y, como T es una isometría, $\square PQQ'P'$ es cuadrilátero de Saccheri (ver [3], Páginas 154-155). En la geometría euclidiana este es un rectángulo y sus lados opuestos son congruentes, así que $\overline{PP'} = \overline{QQ'} = 2\overline{AB}$. En la geometría hiperbólica, la cima es más grande que

la base por lo que $\overline{PP'} > \overline{QQ'} = 2\overline{AB}$ (ver [3], Lema 6.2). □

Por la Proposición anterior, a la traslación $R_l \circ R_m$ se le suele llamar la traslación en la dirección del vector \overrightarrow{BA} , en el plano euclidiano.

Corolario 2.4. *Si una traslación tiene un punto fijo, entonces es la identidad.*

Demostración.

Sea $T = R_l \circ R_m$ una traslación, donde l y m son rectas con una perpendicular común t . Sean A y B los puntos en donde t corta a l y a m , respectivamente. Entonces para cualquier punto P , $\overline{PP'} \geq 2\overline{AB}$. Si P es fijo, entonces $P = P'$ y $\overline{P'P} = 0$, luego $\overline{AB} = 0$, es decir $A = B$. Lo que implica $l = m$, por lo tanto $R_l \circ R_m = I$. □

Proposición 2.14. *Si T es una traslación a lo largo de t y m es cualquier recta perpendicular a t , entonces existe una única recta $l \perp t$ tal que $R_l \circ R_m = T$*

Demostración.

Supongamos que m corta a t en Q y sea l la mediatriz de QQ' , entonces $R_l T$ fija Q .

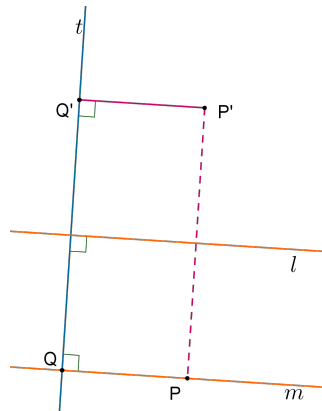


Figura 2.14

Sea P cualquier otro punto en m . $\square PQQ'P'$ es un cuadrilátero de Saccheri; luego l mediatriz de QQ' y l también es mediatriz a la cima $\overline{PP'}$, véase Figura 2.14. P es la reflexión de P' a través de l (ver Lema 6.2 de [3]). Entonces $R_l \circ T$ fija cada punto en m , así que $R_l \circ T = R_m$ y $T = (R_l)^2 \circ T = R_l \circ (R_l \circ T) = R_l \circ R_m$.

La unicidad, si $T = R_k \circ R_m$, entonces $R_l = T \circ R_m = R_k$ y por lo tanto $l = k$. □

Proposición 2.15. *Dada una recta t , el conjunto de las translaciones a lo largo de t es un grupo conmutativo.*

Demostración.

Sean m y l rectas con una perpendicular común t . La identidad está demostrada con el Corolario 2.4. La inversa es la misma que en la Observación 2.2: si $T = R_l \circ R_m$, entonces $T^{-1} = R_m \circ R_l$. Falta demostrar que la composición TT' de translaciones a lo largo de t es otra translación a lo largo de t . Sea $T' = R_l \circ R_m$, por Proposición 2.14, existe una única recta $k \perp t$ tal que $T = R_k \circ R_l$. Entonces

$$T \circ T' = (R_k \circ R_l) \circ (R_l \circ R_m) = R_k \circ (R_l^2) \circ R_m = R_k \circ I \circ R_m = R_k \circ R_m$$

es una translación a lo largo de t . Para la conmutatividad aplicamos la Proposición 2.14 de nuevo para obtener una única recta n tal que $T^{-1} = R_n \circ R_m$. Entonces $T = R_m \circ R_n$ y

$$T' \circ T = (R_l \circ R_m) \circ (R_m \circ R_n) = R_l \circ (R_m^2) \circ R_n = R_l \circ R_n.$$

Luego $T \circ T' = R_k \circ R_m$ y

$$R_l \circ (T \circ T') \circ R_m = R_k \circ (R_k \circ R_m) \circ R_m = R_l^2 \circ R_m^2 = I \circ I = I,$$

también

$$R_k \circ (T' \circ T) \circ R_m = R_k \circ (R_l \circ R_n) \circ R_m = (R_k \circ R_l) \circ (R_n \circ R_m) = T \circ T^{-1} = I.$$

Por lo tanto $T \circ T' = T \circ T'$. □

Proposición 2.16. *Sea $T = R_l \circ R_m \neq I$ una translación a lo largo de t . En el plano euclidiano, las rectas invariantes de T son t y todas las líneas paralelas a t . En el plano hiperbólico, t es la única recta invariante.*

Demostración.

Sea P un punto en t , entonces $\overleftrightarrow{PP^m} \perp m$, de igual manera $\overleftrightarrow{P^m P'} \perp l$. Pero, por definición de translación, t es una perpendicular común a l y m y P está en t , así que $\overleftrightarrow{PP'} = t$, es decir, $P' \in t$. Por lo tanto t es invariante.

En el caso euclidiano, si $u \parallel t$, entonces T también es una translación a lo largo de u ; porque u es perpendicular común a l y a m . Así u es invariante. Para ambos casos (euclidiano e hiperbólico), si u y t concurren en A , entonces A' está sobre t y

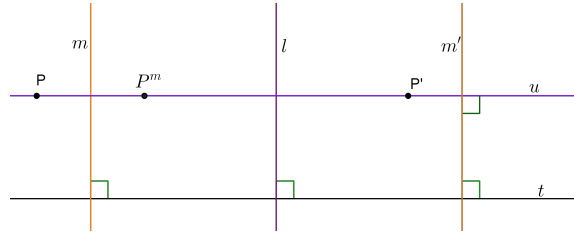


Figura 2.15

$A \neq A'$, así $A' \notin u$ y u no es invariante.

Caso hiperbólico. Supongamos que u es invariante y paralela a t , pero distinta de t . Elegimos cualquier punto P en u , entonces $u = \overleftrightarrow{PP'}$, pero sabemos que P y P' son equidistantes desde t , por lo cual u y t tienen una perpendicular común m (ver Teorema 6.4 de [3]). Ya que m no es invariante y T preserva perpendicularidad, m' también es perpendicular a $t = t'$ y $u = u'$, véase Figura 2.15. Esto contradice la unicidad de la perpendicularidad común en la geometría hiperbólica (ver Teorema 6.5 de [3]).

□

Proposición 2.17. Sean una isometría T , una recta t y un punto B en t . T es una translación a lo largo de t si y sólo si existe un único punto A en t tal que T es la composición de medias vueltas $H_A \circ H_B$.

Demostración.

Supongamos que T es una translación a lo largo de t . Sea m la perpendicular de t que pasa por B . Si T es una translación a lo largo de t , entonces por la Proposición 2.14, existe una única recta l perpendicular a t tal que $T = R_l \circ R_m$. Si l corta a t en A , entonces $H_A \circ H_B = (R_l \circ R_t) \circ (R_t \circ R_m) = R_l \circ R_t^2 \circ R_m = R_l \circ I \circ R_m = R_l \circ R_m = T$.

Ahora supongamos que existe un único punto A en t tal que $T = H_A \circ H_B$. Demostraremos que T es una translación a lo largo de t . Sean n y k las rectas perpendiculares a t en B y A respectivamente. Entonces $T = H_A \circ H_B = (R_k \circ R_t) \circ (R_t \circ R_n) = R_k \circ I \circ R_n = R_k \circ R_n$.

□

2.6. Puntos ideales en el plano hiperbólico

En esta sección supondremos que \mathbf{M} es un plano hiperbólico

Definición 2.14. Los rayos no opuestos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son paralelos límites a una recta l que no incide con A , si dichos rayos son paralelos a l y cualquier rayo \overrightarrow{AR} , en el interior del ángulo $\sphericalangle BAC$, corta a l , véase Figura 2.16.

Observación 2.3. Se puede demostrar que dados una recta l y un punto A que no incide con l , hay exactamente dos rayos que emanan de A y que son paralelos límite a l (por el Modelo de Klein, Página 127, inciso (d)) . A estos dos rayos se les llama rayos paralelos límite respecto de A y l . También se puede probar que estos dos rayos son simétricos (véase Teorema 6.6 de [3], Páginas 196-197) con respecto a la perpendicular t bajada de A sobre l y con pie en Q , en el sentido de que $\sphericalangle BAC$ es bisectada por el rayo \overrightarrow{AQ} , véase Figura 2.16.

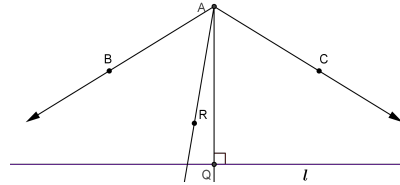


Figura 2.16

Definición 2.15. (a) Un rayo \overrightarrow{AB} es paralelo límite a una recta l , que no incide con A , si \overrightarrow{AB} es uno de los rayos paralelos límite respecto a A y l .

(b) Dos rayos, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son rayos paralelos límite, si \overrightarrow{AB} es el rayo paralelo límite respecto a A y \overrightarrow{CD} que está en el semiplano $S(\overleftrightarrow{AA'}, D)$, donde A' es el pie de la perpendicular bajada de A en \overleftrightarrow{CD} , véase Figura 2.17.

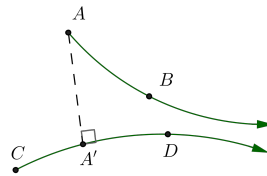


Figura 2.17

Observación 2.4. La relación $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ es de equivalencia en el conjunto de rayos de \mathbf{M} si y sólo si $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$ o \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son rayos límite.

Definición 2.16. Un punto ideal Ω de \mathbf{M} es una clase de equivalencia de rayos, bajo la relación anterior, es decir, $\Omega := [r]$, donde $[r]$ es la clase de equivalencia del rayo r , véase Figura 2.18.

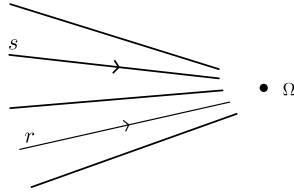


Figura 2.18

Definición 2.17. Sea T una isometría de \mathbf{M} , $\Omega := [r]$, un punto ideal de \mathbf{M} . Si $T(r) = r'$, se define $T[r] := [r']$, o sea, $T(\Omega) = \Omega'$. Se dice que Ω es un punto ideal fijo de T , si $T(\Omega) = \Omega$.

Observación 2.5. Esta última definición no depende del representante. En efecto supongamos que $[s] = [r]$, entonces $T([s]) = [s']$, donde $T(s) = s'$, pero $[s] = [r]$, así s y r son rayos paralelos límite y como T es isometría $[s'] = [r']$, por lo que $T[s] = T[r]$.

Definición 2.18. Dados una recta t , un rayo r en t y su rayo opuesto r' . Entonces los puntos ideales $\Omega := [r]$ y $\Sigma := [r']$ se llaman los puntos finales de t , véase Figura 2.19. Y t se puede denotar por $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma}$.

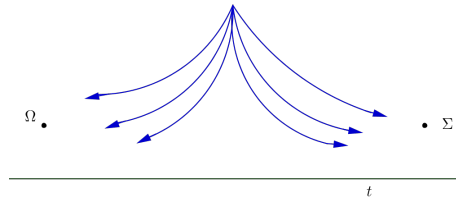


Figura 2.19

Observación 2.6. Dado $\sphericalangle BAC$ en \mathbf{M} , si $\Omega = [\overrightarrow{BA}]$ y $\Sigma = [\overrightarrow{BC}]$, entonces existe una única recta l en \mathbf{M} tal que \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} son los rayos paralelos límite respecto a A y l . A esta recta se le llama la recta de cerradura de $\sphericalangle BAC$. De hecho es la recta $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma}$.

Definición 2.19. Decimos que Ω y Σ están en el mismo lado de la recta t , si ninguno de ellos es un punto final de t y si la recta $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma}$ es paralela a t .

Proposición 2.18. (a) Los puntos finales Ω y Σ de una recta m son los únicos puntos ideales fijos de la reflexión R_m y de cualquier translación (diferente de I) a lo largo de m .

(b) Si una rotación tiene un punto ideal fijo, entonces es la identidad.

(c) Si (Ω, Σ, Δ) y $(\Omega', \Sigma', \Delta')$ son dos ternas de puntos ideales, entonces existe una única isometría T de M mandando una terna en otra ($T(\Omega) = \Omega'$, $T(\Sigma) = \Sigma'$ y $T(\Delta) = \Delta'$).

Demostración.

(a) Existen rayos opuestos r y s de m , tales que $\Omega := [r]$ y $\Sigma := [s]$. Como $r \subseteq m$ y $r' \subseteq m$, si T es una translación a lo largo de m o $T = R_m$, y $T(r) = r'$ y $T(s) = s'$, entonces $[r] = [r']$ y $[s] = [s']$, es decir $T(\Omega) = \Omega$ y $T(\Sigma) = \Sigma$. Supongamos que cualquier otro punto ideal Δ es fijo; entonces la recta $\overleftrightarrow{\Sigma\Delta} = \alpha$ sería invariante, pero si T es una translación a lo largo de m , T no tiene rectas invariantes aparte de m (Proposición 2.16) y las únicas rectas invariantes bajo R_m son m y las perpendiculares a m , pero m y α no son perpendiculares. Por lo tanto $\alpha = m$, es decir, $\Delta = \Omega$.

(b) Supongamos que una rotación T alrededor de un punto A , tiene un punto ideal fijo Ω . Entonces existe un rayo $r \in \Omega$ tal que r emana de A . Si $r' = T(r)$, implica que r' también emana de A y $[r'] = [r]$. Por lo tanto $r' = r$. Pero por las Proposiciones 2.9 y 2.11, $r \neq T(r) = r'$, a menos que T se la identidad.

(c) Hay un único punto B en $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ tal que $\sphericalangle\Delta B\Omega$ es un ángulo recto. Sea B' el punto en $\overleftrightarrow{\Sigma'\Omega'}$ tal que $\sphericalangle\Delta'B'\Omega'$ es un ángulo recto. Sea A cualquier punto diferente de B sobre $\overleftrightarrow{B\Delta}$ y sea C cualquier punto diferente de B sobre $\overleftrightarrow{B\Omega}$. Por Axioma C1, existe un único punto A' sobre $B'\Delta'$ y C' sobre $B'\Omega'$ tales que $AB \cong A'B'$ y $CB \cong C'B'$. Entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ y por la Proposición 2.8, existe una única isometría T que manda (Ω, Σ, Δ) a $(\Omega', \Sigma', \Delta')$. Inversamente, cualquier isometría T debe mandar (Ω, Σ, Δ) a $(\Omega', \Sigma', \Delta')$ y por la Proposición 2.8, T es única.

□

2.7. Desplazamiento paralelo

Definición 2.20. m y l son asintóticamente paralelas si no tienen perpendicular común y existen dos rayos $\overrightarrow{AB} \in m$ y $\overrightarrow{CD} \in l$ que son rayos paralelos límite (ver [3], Página 198 o Modelo de Poincare, Página 126, inciso (c)).

Definición 2.21. Si l y m son asintóticamente paralelas en dirección de un punto ideal Ω , una transformación $T = R_l \circ R_m$ de \mathbf{M} es un desplazamiento paralelo alrededor de un punto ideal Σ .

Proposición 2.19. Dado un desplazamiento paralelo $T = R_l \circ R_m$ alrededor del punto ideal Σ , entonces

- (a) T no tiene punto fijos.
- (b) Sea k cualquier recta a través de Σ y A cualquier punto en k , entonces Σ se encuentra en la mediatriz h de AA' y $T = R_h \circ R_k$.
- (c) T no tiene rectas invariantes.
- (d) El único punto ideal fijo de T es Σ .
- (e) El conjunto de desplazamientos paralelos sobre Σ es un grupo conmutativo.
- (f) Una isometría con exactamente un punto ideal fijo es un desplazamiento paralelo.

Demostración.

- (a) Supongamos que A es fijo. Entonces $A^m = A^l$ y la recta $\overleftrightarrow{AA^m}$ es perpendicular a l y a m , contradiciendo la hipótesis.
- (b) Sea k cualquier recta a través de Σ y A cualquier punto en k . Notar que Σ se encuentra sobre las dos mediatrices l y m del $\triangle AA^m A'$. Entonces se puede demostrar que también Σ está sobre la tercera mediatriz h (véase [3], Páginas 198-200). Como k pasa por Σ , el rayo de k que emana de A en la dirección de Σ , véase Figura 2.20. Entonces $R_h \circ T$ fija A y Σ . Por la Proposición 2.18 (b), $R_h \circ T$ no puede ser una rotación alrededor de A ; si lo fuera $R_h \circ T = I$ y $T = R_h$, lo cual es una contradicción al inciso (a). Como $R_h \circ T$ deja a $\Sigma = [r]$ fijo, si \hat{r} es el rayo que emana de A y asintóticamente paralelo a r , entonces $R_h \circ T(\hat{r})$ también es asintóticamente paralelo a r pero, como A es un rayo fijo de $R_h \circ T$ y esta transformación manda rayos en rayos, $R_h \circ T(\hat{r}) = \hat{r}$. Por la Proposición 2.7, $R_h \circ T = R_k$, con $k = \overleftrightarrow{A\Sigma}$, por lo tanto $T = R_h \circ R_k$.

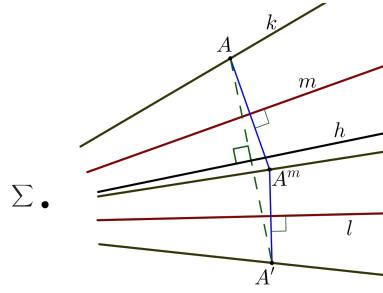


Figura 2.20

- (c) Supongamos que la recta t es invariante bajo T . Eligimos cualquier punto A sobre t y sea h y k como en (b). Entonces $h \perp t = \overleftrightarrow{AA'}$, así t también es invariante bajo R_h . Luego t es invariante bajo $R_k = R_h \circ T$, lo cual significa que $t \perp k$ o $t = k$. Pero las líneas paralelas asintóticamente h y k no pueden tener una perpendicular común o ser perpendiculares entre si. Por lo tanto t no es invariante bajo T .
- (d) Si T tiene otro punto ideal fijo Ω , entonces la recta $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ es invariante, lo cual es una contradicción por (c). Más explícitamente, sea $l = \overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ (si $\Omega = \overrightarrow{AB}$) y $\Sigma = \overrightarrow{AC}$, entonces l es la recta de cerradura de $\sphericalangle BAC$. Sean $P \in l$ y \overrightarrow{PE} y \overrightarrow{PD} en l tales que $\overrightarrow{PD} \in \Omega$ y $\overrightarrow{PE} \in \Sigma$. Como Ω y Σ son invariantes bajo T , $T(\overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{T(P)T(D)} \in \Omega$ y $T(\overrightarrow{PE}) = \overrightarrow{T(P)T(E)} \in \Sigma$. Además T respeta orden, así $D * P * E$, luego $T(D) * T(P) * T(E)$, pero $\overrightarrow{T(P)T(D)} \subseteq \Omega$ y $\overrightarrow{T(P)T(E)} \subseteq \Sigma$. Entonces Σ y Ω son los puntos finales de $\overrightarrow{T(P)T(D)}$, lo que implica $\overrightarrow{T(P)T(D)} = \overleftrightarrow{\Sigma\Omega} = l$ y por lo tanto $T(P) \in l$.
- (e) Es claro que si $T = R_l \circ R_m$, es un desplazamiento tal que $T^{-1} = R_m \circ R_l$, también es un desplazamiento alrededor de Σ . Vamos a demostrar que la composición $T \circ T'$, dos desplazamientos paralelos alrededor de Σ es desplazamiento paralelo. Sea $T' = R_k \circ R_m$, por (b) $T = R_h \circ R_k$, por ser k una recta a través de Σ y si A está en k , h es la bisectriz de AA' . Entonces $T \circ T' = (R_h \circ R_k) \circ (R_k \circ R_m) = R_h \circ (R_k^2) \circ R_m = R_h \circ R_m = R_h R_m$, es un desplazamiento paralelo alrededor de Σ . Observemos:

$$R_h \circ (T \circ T') \circ R_m = R_h \circ (R_h \circ R_m) \circ R_m = I. \quad (1)$$

Pero también, aplicando (b), existe una recta n tal que $T^{-1} = R_n \circ R_m$, por lo que $T = R_m \circ R_n$ y $T' \circ T = (R_k \circ R_m) \circ (R_m \circ R_n) = R_k \circ R_n$. Entonces:

$$R_h \circ (T' \circ T) \circ R_m = R_h \circ (R_k \circ R_n) \circ R_m = T \circ T^{-1} = I. \quad (2)$$

Por (1) y (2), $T \circ T' = T' \circ T$ y la conmutatividad se cumple.

(f) La prueba es de la Proposición 2.23, que se verá más adelante. □

2.8. Media vuelta

Proposición 2.20. *En el plano euclidiano, la composición $H_A \circ H_B \circ H_C$ de tres medias vueltas es una media vuelta. En el plano hiperbólico, la composición de tres medias vueltas es media vuelta solo cuando A , B y C son colineales. Si no lo son, la composición puede ser una rotación, una translación o un desplazamiento paralelo.*

Demostración.

Para ambos planos, suponemos que A , B y C son colineales y están en t . Sean l , m y n las respectivas perpendiculares a t a través de esos puntos. Entonces:

$$\begin{aligned} H_A \circ H_B \circ H_C &= (R_l \circ R_t) \circ (R_t \circ R_m) \circ (R_n \circ R_t) \\ &= R_l \circ (R_t^2) \circ R_m \circ (R_n \circ R_t) \\ &= (R_l \circ R_m \circ R_n) \circ R_t \\ &= (R_l \circ R_m) \circ (R_n \circ R_t). \end{aligned}$$

Pero $R_l \circ R_m$ es una translación a lo largo de t . Por la Proposición 2.14, existe una recta k , perpendicular a t , tal que $R_l \circ R_m = R_k \circ R_n$. Por lo tanto, $H_A \circ H_B \circ H_C = (R_k \circ R_n) \circ (R_n \circ R_t) = R_k \circ R_t$. Si k corta a t en D , tenemos que $H_A \circ H_B \circ H_C = H_D$.

Ahora supongamos que A , B y C no son colineales, $t = \overleftrightarrow{AB}$, $l \perp t$ en A y $m \perp t$ en B , véase Figura 2.21. Asumimos que $C \in m$ (de lo contrario reemplazamos B por el pie de la perpendicular desde C a t y reemplazamos A por el punto que se obtiene usando la Proposición 2.17). Sea u la perpendicular a m en C , entonces $H_A \circ H_B \circ H_C = (R_l \circ R_t) \circ (R_t \circ R_u) = R_l \circ R_u$.

En el caso euclidiano, l corta a u en un punto D y $l \perp u$, así $H_A \circ H_B \circ H_C = H_D$. Caso hiperbólico, l y u pueden cortarse, ser paralelas divergentemente, o ser paralelas

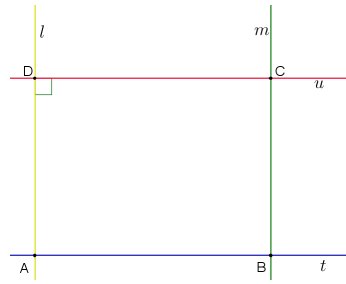


Figura 2.21

asíntoticamente (véase [3], Páginas 198-200). Si ellas se cortan en el punto D , entonces $H_A \circ H_B \circ H_C$ es la rotación alrededor de D , pero no es una media vuelta porque $\sphericalangle D$ es el cuarto ángulo de un cuadrilátero de Lambert (véase [3], Páginas 160, 194) y no es ángulo recto.

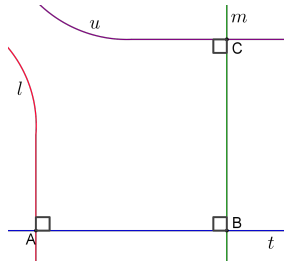


Figura 2.22

Si u y l son paralelas con una perpendicular en común (divergentes), entonces $H_A \circ H_B \circ H_C$ es una translación, véase Figura 2.22. Si u y l son paralelas asíntoticamente, entonces $H_A \circ H_B \circ H_C$ es un desplazamiento paralelo. □

Corolario 2.5. *En un plano euclidiano, la composición de dos translaciones a lo largo de diferentes rectas es otra vez una translación, y el conjunto de todas las translaciones a lo largo de todas las rectas es un grupo conmutativo. Es un subgrupo del grupo de isometrías de \mathcal{M} .*

Demostración.

Sean $T = R_l \circ R_m$ una translación a lo largo de t y $T' = R_n \circ R_k$ una translación a lo largo de s . Como l y m son perpendiculares a t , entonces $R_l = H_A$ y $R_m = H_B$, donde A es el punto de intersección de l y t y B el punto de intersección de m y t . Análogo para $R_n = H_C$ y $R_k = H_D$. Por lo que

$$\begin{aligned}
T' \circ T &= (R_l \circ R_m) \circ (R_n \circ R_k) \\
&= (H_A \circ H_B) \circ (H_C \circ R_D) \\
&= (H_A \circ H_B \circ H_C) \circ R_D
\end{aligned}$$

Pero por Proposición 2.20, $H_A \circ H_B \circ H_C = H_E$ tal que E incide con s , así que $T' \circ T = H_E \circ H_D$ y por Proposición 2.17 $H_E \circ H_D$ es una translación a lo largo de s . \square

2.9. Deslizamientos

Definición 2.22. Un deslizamiento-reflexión con eje t , o a lo largo de la recta t es una composición $T' = R_t \circ T$ de una translación T (diferente de la identidad) a lo largo de t , seguida de una reflexión a través de t .

Proposición 2.21. Si $l \perp t$ en A , $m \perp t$ en B , $T = R_l \circ R_m$, $T' = R_t \circ T$, véase Figura 2.23. Entonces:

- (a) $T \circ R_t = T'$.
- (b) $H_A \circ R_m = T' = R_l \circ H_B$.
- (c) T' manda cada lado de t sobre el lado opuesto.
- (d) T' no tiene puntos fijos.
- (e) La única recta invariante de T' es t .
- (f) Inversamente, dado un punto B y la recta l , sea t la perpendicular a l a través de B . Entonces $R_l \circ H_B$ es un deslizamiento-reflexión a lo largo de t , si B no está sobre l , y coincide con R_t si B está sobre l .

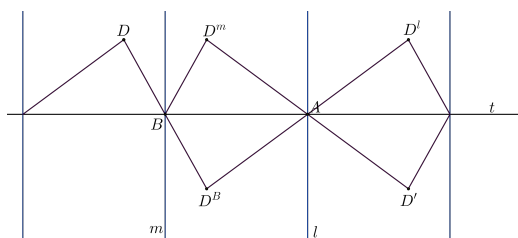


Figura 2.23

Demostración.

Sea $H_A = R_l \circ R_t = R_t \circ R_l$, por ser $l \perp t$ en A y $H_B = R_m \circ R_t = R_t \circ R_m$, por ser $m \perp t$ en B .

- (a) $T \circ R_t = (R_l \circ R_m) \circ R_t = R_l \circ (R_m \circ R_t) = R_l \circ (R_t \circ R_m) = (R_l \circ R_t) \circ R_m = (R_t \circ R_l) \circ R_m = R_t \circ (R_l \circ R_m) = R_t \circ T = T'$.
- (b) $H_A \circ R_m = (R_l \circ R_t) \circ R_m = (R_t \circ R_l) \circ R_m = R_t \circ (R_l \circ R_m) = R_t \circ T = T' = T \circ R_t = (R_l \circ R_m) \circ R_t = R_l \circ (R_m \circ R_t) = R_l \circ (R_t \circ R_m) = R_l \circ H_B$.
- (c) Sea un punto D que no está en t . La imagen $T(D) = D''$ está en $S(t, D)$ pero $R_t(D'')$ está del lado opuesto de $S(t, D)$.
- (d) Supongamos que W es un punto fijo, es decir, $T'(W) = W$. Entonces $T'(W)$ y W están en el mismo lado de t . Esto contradice al inciso c).
- (e) Sea C un punto que está sobre t , entonces $T(C)$ está sobre t y $R_t(C)$ lo deja fijo, por lo tanto t es invariante.
- (f) Si $B \in l$ y $t \perp l$ en B , entonces $H_B = R_l \circ R_t$, así $R_l \circ H_B = R_l \circ (R_l \circ R_t) = R_l^2 \circ R_t = I \circ R_t = R_t$. Si $B \notin l$, $m \neq l$ y $m \perp t$ en B , así tenemos $T = R_l \circ R_m \neq I$, y $R_l \circ H_B = R_l \circ (R_m \circ R_t) = (R_l \circ R_m) \circ R_t = T \circ R_t$.

□

2.10. Clasificación de isometrías

Definición 2.23. *Le llamamos haz de rectas a:*

- (a) *Todas las rectas que pasan a través de un punto P .*
- (b) *Todas las rectas perpendiculares a una recta t .*
- (c) *Todas las rectas a través de un punto ideal Ω dado (sólo para el caso hiperbólico).*

Observación 2.7. *Dos rectas l y m determinan un único haz si convergen en un punto P , l y m son paralelas con una perpendicular en común t o l y m son paralelas asintóticas, entonces existen rayos $r \subseteq t$, $r' \subseteq m$ paralelas asintóticamente tales que $[r] = [r'] = \Omega$ punto ideal. Entonces l y m determinan el haz de rectas a través de Ω . Si A es cualquier punto y se tiene un haz de rectas, existe una recta n en ese haz a través de A tales que para los tres tipos de haz, n es:*

- (1) La recta \overleftrightarrow{AP} si $A \neq P$.
- (2) Perpendicular a t a través de A .
- (3) La recta que contiene a $\overleftrightarrow{A\Sigma}$.

Proposición 2.22. Sea $T = R_l \circ R_m \circ R_n$.

- (a) Teorema de las tres reflexiones. Si l , m y n pertenecen a un haz, entonces T es una reflexión en una única recta de ese haz.
- (b) Si l , m y n no pertenecen a un haz, entonces T es un deslizamiento-reflexión.

Demostración.

- (a) Primer caso. Si l , m y n pertenecen a un haz de rectas que emergen en un punto A , véase Figura 2.24. Entonces por Proposición 2.11 existe una única recta \tilde{n} tal que $R_A = R_l \circ R_{\tilde{n}}$, donde R_A es la rotación $R_m \circ R_n$. Por lo tanto, $(R_l \circ R_m \circ R_n) = R_l \circ R_A = R_l \circ R_l \circ R_{\tilde{n}} = R_{\tilde{n}}$.

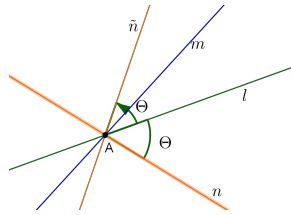


Figura 2.24

Segundo caso. Si l , m y n pertenecen al segundo tipo de haz. Sea $R_m \circ R_n = T_{\vec{v}}$ es una translación a lo largo de una recta t . Por la Proposición 2.14, existe una recta \tilde{n} perpendicular a t tal que $T_{\vec{v}} = R_l \circ R_{\tilde{n}}$, véase Figura 2.25. Entonces $(R_l \circ R_m \circ R_n) = R_l \circ T_{\vec{v}} = R_l \circ R_l \circ R_{\tilde{n}} = R_{\tilde{n}}$.

Tercer caso. Si l , m y n pertenecen al tercer tipo de haz. Sea Σ el punto ideal de l , m , n . Como $F := R_m \circ R_n$ es un desplazamiento paralelo en la dirección de Σ y l es otra recta en el mismo haz, por la Proposición 2.19 (b), existe una recta \tilde{n} , también en el haz, tal que $F^{-1} = R_{\tilde{n}} \circ R_l$, es decir, $F = R_l \circ R_{\tilde{n}}$. Por lo tanto $(R_l \circ R_m \circ R_n) = R_l \circ R_l \circ R_{\tilde{n}} = R_{\tilde{n}}$.

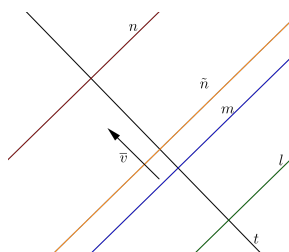


Figura 2.25

- (b) Ahora supongamos que las rectas no pertenecen a un haz. Sean A cualquier punto de l , m' la recta que pasa por A y que pertenece al haz determinado por m y n . Entonces por (a), existe una recta n' de ese haz tal que $R_{m'}R_mR_n = R_{n'}$. Sea B el pie de la perpendicular k a n' que pasa por A . Luego l , m' y k pasan a través de A , así existe una recta h tal que $R_lR_{m'}R_k = R_h$. B no está en h porque si estuviera, entonces n' pasaría por A , véase Figura 2.26.

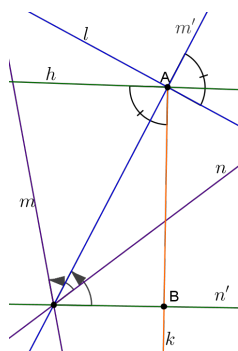


Figura 2.26

Como n' es una recta del haz determinado por m y n , entonces $n' = m'$. Esto implica que $R_{m'} \circ R_m \circ R_n = R_{m'}$, es decir, $R_m \circ R_n = I$, por lo que $m = n$ y esto diría que l , m , n son solo dos rectas pertenecientes a un haz, contradiciendo la hipótesis. Por la Proposición 2.21 (f), $R_h \circ H_B$ es un deslizamiento-reflexión a lo largo de la perpendicular a h a través de B . Pero

$$\begin{aligned}
R_h \circ H_B &= R_h \circ (R_k \circ R_{n'}) \\
&= R_l \circ R_{m'} \circ R_k \circ R_k \circ R_{m'} \circ R_m \circ R_n \\
&= R_l \circ R_m \circ R_n \\
&= T.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.6. *l y m determinan una haz de rectas en el punto A. Cada composición $R_l \circ R_m \circ H_A$ es igual a una composición $R_h \circ R_k$.*

Demostración.

Sea n una recta que pasa por A en el haz determinado por l y m . Sean h una recta tal que $R_l \circ R_m \circ R_n = R_h$ y k la perpendicular a n que pasa por A . Entonces $R_l \circ R_m H_A = R_l \circ R_m \circ R_n \circ R_k = R_h \circ R_k$.

□

Observación 2.8. *La Proposición 2.22 junto con el Corolario 2.2, nos ofrecen una clasificación completa de las isometrías de un plano neutral.*

Definición 2.24. *Si T una isometría de \mathcal{M} . Entonces T es:*

- (a) *Isometría directa (o propia o que conserva orientación) si se trata de una composición de dos reflexiones o bien es la identidad.*
- (b) *Isometría opuesta (o impropia o que invierte orientación) si se trata de una reflexión o un deslizamiento-reflexión.*

Proposición 2.23. (a) *Cada isometría es directa o inversa pero no ambas.*

(b) *El conjunto de isometrías directas es un grupo.*

(c) *La composición de dos isometrías opuestas es directa.*

(d) *La composición de una isometría directa y una opuesta es opuesta.*

Demostración.

- (a) Por Corolario 2.2 cada isometría es una composición de a lo más tres reflexiones y por Proposición 2.22 cada isometría es directa u opuesta. Las isometrías opuestas se caracterizan por tener una recta invariante cuyos lados son intercambiados.
- (b) Dada una composición $(R_k \circ R_l) \circ (R_m \circ R_n)$ de isometrías directas. Si l, m y n pertenecen a un haz, entonces por Proposición 2.22 (a), $R_l \circ R_m \circ R_n = R_h$ y $(R_k \circ R_l) \circ (R_m \circ R_n) = R_k \circ R_h$, que es directa. Si l, m y n no pertenecen a un haz $R_l \circ R_m \circ R_n = R_h \circ H_B$ (Proposiciones 2.22 y 2.21 b) y el Corolario 2.6 nos dice $R_k \circ (R_h \circ H_B)$ es directa. Además la identidad I es directa por definición. Por otra parte $(R_l \circ R_m)^{-1} = R_m \circ R_l$, entonces la inversa de una isometría directa es directa. Por lo tanto las isometrías directas forman un grupo.
- (c) La composición de dos reflexiones es una isometría directa. La composición de una reflexión y un deslizamiento-reflexión es una composición de cuatro reflexiones, por (b) se reduce a una composición de dos reflexiones; de igual manera la composición de dos deslizamientos-reflexiones es una composición de seis reflexiones, aplicando dos veces (b) se reduce a dos reflexiones. Por lo tanto la composición de dos isometrías opuestas es una isometría directa.
- (d) Sea R una reflexión, D una isometría directa y T' un deslizamiento-reflexión. La composición $D \circ R = R$ si $D = I$, entonces $D \circ R$ es opuesta; análogamente para $D \circ T' = T'$. Si $D = R_l \circ R_m$, $D \circ R = R_l \circ R_m \circ R$, por Proposición 2.22, $D \circ R$ es una reflexión o es deslizamiento-reflexión, así $D \circ R$ es isometría opuesta. Si $D = R_l \circ R_m$, entonces

$$\begin{aligned} D \circ T' &= R_l \circ R_m \circ T' \\ &= R_l \circ R_m \circ R_c \circ R_d \circ R_e \\ &= R_l \circ R_h \circ R_k \quad \text{por (b)} \end{aligned}$$

y por Proposición 2.22 es una isometría opuesta. □

La idea intuitiva detrás de nuestra clasificación de isometrías, es que al plano se le pueden dar dos orientaciones distintas de tal forma que, por ejemplo, los vértices de un $\triangle ABC$ se puedan ordenar en una dirección “en el sentido de las manecillas del reloj”. Cuando el triángulo se mueve por una rotación, translación o desplazamiento paralelo, la orientación de $\triangle A'B'C'$ sigue siendo en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que, bajo una reflexión o un deslizamiento-reflexión, la orientación se torna en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

2.11. Automorfismo de los modelos cartesianos

Ahora nuestro objetivo es describir rápidamente los grupos de isometrías en modelo cartesiano de la GEP. Las translaciones son las transformaciones más fáciles de describir. La prueba de la Proposición 2.13 nos muestra que una translación mueve a cada punto a una distancia y dirección fija, la cual representaremos por un vector de longitud $2\overline{AB}$ emanando del origen de nuestro sistema de coordenadas apuntando en la dirección dada.

Proposición 2.24. *En el modelo cartesiano del plano euclidiano, las translaciones forman un grupo conmutativo isomorfo al grupo de los vectores bajo adición.*

Demostración.

Si las coordenadas del punto final del vector de translación son (e, f) , entonces por la suma de vectores, véase Figura 2.27, la translación es:

$$T(x, y) = (x, y) + (e, f) = (x + e, y + f) = (x', y').$$

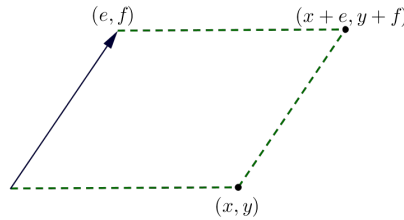


Figura 2.27

Aplicando la segunda translación T' respecto al vector con el punto final (e', f') , entonces la imagen (x'', y'') de (x, y) bajo $T'T$ es

$$\begin{aligned} (x'', y'') &= (x', y') + (e', f') = (x + e + e', y' + f + f') \\ &= (x, y) + (e + e', f + f') = (x, y) + ((e, f) + (e', f')). \end{aligned}$$

En pocas palabras, si \mathcal{F} es el grupo de translaciones de \mathbb{R}^2 , por lo que la función

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ T &\longmapsto (e, f) \end{aligned}$$

donde (e, f) es el vector de la dirección de T , es el isomorfismo de grupos. Entonces $T \circ T'$ es la translación por la suma de vectores determinado por T y T' .

Definición 2.25. Decimos que las traslaciones forman un grupo de dos parámetros si dependen de dos variables reales (e, f) .

Proposición 2.25. En el modelo cartesiano del plano euclidiano, las traslaciones a lo largo de una recta fija forman un grupo con un parámetro isomorfo al grupo de los números reales bajo la adición.

Demostración.

Sea (l_0, f_0) un vector paralelo unitario a la recta fija l . Entonces el vector correspondiente a la traslación T a lo largo de l tiene la forma:

$$T_t(l_0, f_0) = T(tl_0, tf_0) = t(l_0, f_0),$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $|t|$ es la distancia que se trasladó el vector unitario y t es positivo o negativo de acuerdo si la dirección de la traslación es de la misma que (l_0, f_0) u opuesta, véase Figura 2.28. Si T' corresponde al vector $t'(l_0, f_0)$, entonces $T' \circ T$ corresponde al vector:

$$t(e_0, f_0) + t'(e_0, f_0) = (t + t')(e_0, f_0).$$

Por lo tanto asignando el parámetro t a T obtenemos el isomorfismo deseado. □

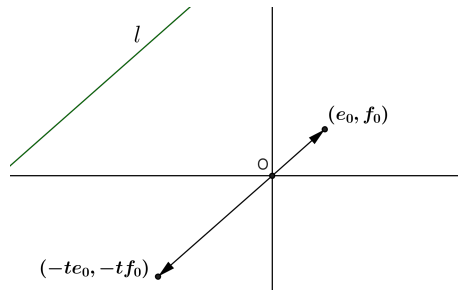


Figura 2.28

2.12. Rotaciones alrededor de un punto fijo

En seguida discutiremos las rotaciones alrededor de un punto fijo A . Nuestro primer paso es reducir al caso en donde A es el origen O del sistema cartesiano. Sea T la traslación a lo largo de \overleftrightarrow{AO} en la dirección de A a O . Entonces por la Proposición

2.14, $T = R_m \circ R_l = R_{l^*} \circ R_m$, donde m es la mediatriz de \overline{AO} , l es perpendicular a \overleftrightarrow{AO} en A y l^* es perpendicular a \overleftrightarrow{AO} en O .

Una rotación R alrededor de A , puede escribirse como $R = R_l \circ R_k$, donde k pasa a través de A por Proposición 2.11. Sea k^* la reflexión de k a través de m . Entonces $R^* = R_{k^*} \circ R_{l^*}$, es una rotación alrededor de O y para cada punto P , si $P^m = R_m(P)$, entonces $R_{k^*}(P^m) = R_m \circ (R_k(P))$. Por lo tanto, $R_m \circ R_{k^*} \circ R_m = R_k$, véase Figura 2.29. Así, $T^{-1} \circ R^* \circ T = (R_l \circ R_m) \circ (R_{k^*} \circ R_{l^*}) \circ (R_{l^*} \circ R_m)$

$$\begin{aligned} &= R_l \circ R_m \circ R_{k^*} \circ (R_{l^*})^2 \circ R_m \\ &= R_l \circ (R_m \circ R_{k^*} \circ R_m) \\ &= R_l \circ R_k \\ &= R. \end{aligned}$$

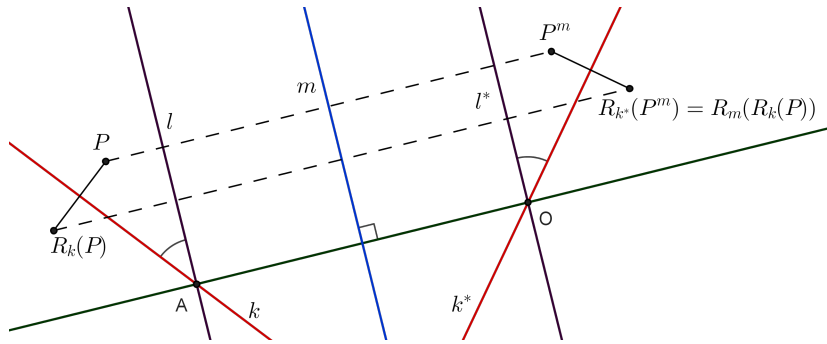


Figura 2.29

Esto demuestra que la rotación R alrededor de A está determinada únicamente por la rotación R^* sobre O . Por otra parte $R^* \rightarrow T^{-1} \circ R^* \circ T$ es un isomorfismo del grupo de las rotaciones alrededor de O en el grupo de las rotaciones alrededor de A . Por lo tanto, podemos suponer que $A = O$.

$$\begin{aligned} \alpha : R(O) &\longrightarrow R(A) \\ R^* &\longrightarrow T^{-1} \circ R^* \circ T_{\overleftrightarrow{OA}}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.11, la rotación dada alrededor de O puede escribirse como $R = R_l \circ R_m$, donde m es el eje X . Si $l \perp m$, entonces R está representada, en coordenadas complejas, como

$$z \longrightarrow -z.$$

De otra manera, si el ángulo agudo formado de m y l tiene la medida en radianes de $\frac{\theta}{2}$, con $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, entonces R esta representada en coordenadas complejas como:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow e^{i\theta} z, & \text{si } l \text{ tiene pendiente positiva} \\ z &\longrightarrow e^{-i\theta} z, & \text{si } l \text{ tiene pendiente negativa.} \end{aligned}$$

(Recordar que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$).

Combinando estos dos casos vemos que las rotaciones alrededor de O está unívocamente representadas, por las transformaciones:

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z \quad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

Como $e^{i\varphi}(e^{i\theta} z) = (e^{i\varphi} e^{i\theta}) z$ la composición de dos rotaciones alrededor de O corresponde a la composición $e^{i\varphi} e^{i\theta}$ de números complejos de módulo 1, obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.26. *En el modelo cartesiano del plano euclidiano, el grupo de rotaciones alrededor de un punto fijo es isomorfo al grupo S^1 multiplicativo con un parámetro de números complejos $e^{i\theta}$ de módulo 1 (θ es el parámetro real).*

Proposición 2.27. *El grupo de isometrías directas del modelo cartesiano del plano euclidiano es isomorfo al grupo de tres parámetros dado en coordenadas complejas por*

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z + z_0.$$

Demostración.

Si un punto tiene coordenadas compleja z , trasladándolo por un vector (e_0, f_0) es lo mismo que sumar a z el número complejo $z_0 = e_0 + if_0$, ya que la suma de números complejos es la misma que la suma de vectores. Si T es cualquier isometría directa y T mueve el origen O al punto O' con coordenadas complejas z_0 , al componer T con la translación en la dirección de $-z_0$ obtenemos una isometría directa que deja fijo al origen, entonces por la Proposición 2.10, es una rotación alrededor de O y tiene la forma:

$$z \longmapsto e^{i\theta} z.$$

Así la isometría directa T , tiene la forma $T(z) = e^{i\theta} z + z_0$ con parámetro $(e^{i\theta}, z_0)$ (son parámetros reales porque $z_0 = e_0 + if_0$ depende de dos parámetros reales).

Podemos establecer una función biyectiva φ entre el conjunto \mathcal{M} de movimientos directos del modelo cartesiano de GEP y el conjunto de parámetros

$$\mathcal{P} := \{(e^{i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R} \text{ y } z_0 \in \mathbb{C}\}$$

de la siguiente manera: si $T \in \mathcal{M}$, entonces como acabamos de ver, existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = e^{i\theta}z + z_0$. Sea $\varphi(T) = (e^{i\theta}, z_0)$. □

Corolario 2.7. *Si T es una isometría opuesta del modelo cartesiano \mathbb{R}^2 ($\approx \mathbb{C}$) de GEP, entonces existen $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que, para toda $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = e^{i\theta}\bar{z} + z_0$*

Demostración.

Por la Proposición 2.23, todas las isometrías opuestas se obtienen al componer todas las isometrías directas con una isometría opuesta, que se puede elegir como la reflexión a través del eje X $z \rightarrow \bar{z}$. Debido a que $e^{i\bar{\theta}} = e^{-i\theta}$, el conjugado de $e^{i\theta}z + z_0$ es $e^{-i\theta}\bar{z} + \bar{z}_0$ y, reescribiendo $-\theta$ por θ y \bar{z}_0 por z_0 , llegamos al resultado. □

Capítulo 3

Inversión

Estudiaremos las isometrías en modelos específicos de GHP. Para construirlos, necesitamos estudiar una transformación geométrica muy importante: La inversión geométrica. Se puede consultar [1] y [5].

Definición 3.1. Sea \mathcal{E} un plano euclidiano y sea \mathcal{C} una circunferencia cualquiera en \mathcal{E} con centro en un punto O y radio $r > 0$. Entonces la inversión en \mathcal{C} es la función:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}: \mathcal{E} - \{O\} \longrightarrow \mathcal{E} - \{O\}$$
$$P \longmapsto P'$$

tal que $P' \in \overrightarrow{OP}$ y $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$, véase Figura 3.1.

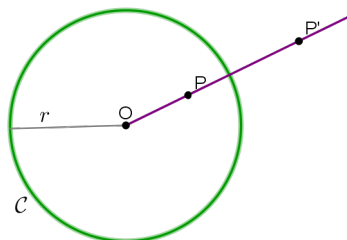


Figura 3.1

Definición 3.2. Dos circunferencias \mathcal{D} y \mathcal{C} en un plano euclidiano \mathcal{E} son ortogonales si en cada punto de intersección las tangentes son perpendiculares, véase Figura 3.2.

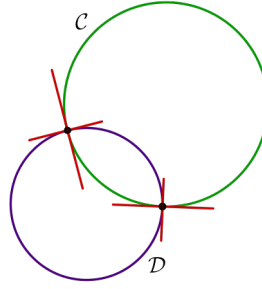


Figura 3.2

Observación 3.1. Si \mathcal{C} y $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ son como en la definición 3.1, $P \in \mathcal{E} - \{O\}$ y $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, entonces $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow P' = P$.

En efecto: $P \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{OP} = r$

$$\Rightarrow P' \in \overrightarrow{OP} \quad \text{y} \quad \overline{OP'} = \frac{r^2}{r} = r = \overline{OP}$$

$\Rightarrow P'$ es el único punto en el rayo \overrightarrow{OP} tal que $\overline{OP'} = \overline{OP}$

$\Rightarrow P' = P$ (Axioma de C1 de GN).

Y si $P' = P \Rightarrow \overline{OP'} = \overline{OP}$

$$\Rightarrow \overline{OP} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$$

$$\Rightarrow \overline{OP}^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \overline{OP} = r$$

$$\Rightarrow P \in \mathcal{C}.$$

Es decir \mathcal{C} es un conjunto invariante puntual bajo $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$.

Observación 3.2. $\mathcal{I}_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{I}_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{E} - \{O\}}$, es decir, si $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P') = P$.

En efecto, si $P'' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P')$, entonces P'' es el único punto de $\overrightarrow{OP'}$ (también igual a \overrightarrow{OP}) tal que $\overline{OP''} = \frac{r^2}{\overline{OP'}}$, pero $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$, así que:

$$\overline{OP''} = \frac{r^2}{\frac{r^2}{\overline{OP}}} = \overline{OP}.$$

$YP \in \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP''}$, lo que implica que P es el único elemento de $\overrightarrow{OP'}$ tal que $\overline{OP} = \frac{r^2}{\overline{OP'}}$, esto es $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P') = P$.

Por esta propiedad ($\mathcal{I}_{\mathcal{C}}^2 = I_{\mathcal{E} - \{O\}}$), se dice que $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ es **idempotente**.

Definición 3.3. Le llamaremos interior de \mathcal{C} , $\text{int } \mathcal{C}$, y exterior de \mathcal{C} , $\text{ext } \mathcal{C}$, a los siguientes conjuntos:

$$\text{int } \mathcal{C} := \{Q \in \mathcal{E} \mid \overline{OQ} < r\},$$

y

$$\text{ext } \mathcal{C} := \{R \in \mathcal{E} \mid \overline{OR} > r\}.$$

Observación 3.3. Decimos que $P \in \text{int } \mathcal{C}$ si y sólo si $P' \in \text{ext } \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, si } P \in \text{int } \mathcal{C} &\Rightarrow \overline{OP} < r \\ &\Rightarrow \frac{1}{\overline{OP}} > \frac{1}{r} \\ &\Rightarrow \overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}} > \frac{r^2}{r} = r \\ &\Rightarrow P' \in \text{ext } \mathcal{C}. \\ \text{Si } P \in \text{ext } \mathcal{C} &\Rightarrow \overline{OP} > r \\ &\Rightarrow \frac{1}{\overline{OP}} < \frac{1}{r} \\ &\Rightarrow \overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}} < \frac{r^2}{r} = r \\ &\Rightarrow P' \in \text{int } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Observación 3.4. Si l es una recta que pasa por O , entonces l es un conjunto invariable global bajo $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, es decir:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(l - \{O\}) = l - \{O\} \quad (*)$$

o bien equivalentemente, para cada punto $P \in l - \{O\}$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) \in l - \{O\} \quad (**).$$

Nota: (***) basta para tener (*), pues:

$$\begin{aligned} (***) &\Rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(l - \{O\}) \subseteq l - \{O\} \\ &\Rightarrow l - \{O\} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}^2(l - \{O\}) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(l - \{O\}) \subseteq l - \{O\} \\ &\Rightarrow P - \{O\} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(l - \{O\}). \end{aligned}$$

Probaremos (**): Si $P \in l - \{O\}$, entonces $\overrightarrow{OP} \subseteq l$, pues l pasa por O , véase Figura 3.3. Por lo tanto, $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) \in \overrightarrow{OP} \subseteq l$ y $P' \neq O$; así $P' \in l - \{O\}$.

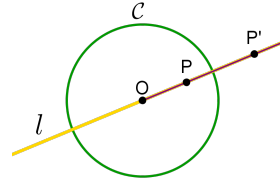


Figura 3.3

Observación 3.5. \mathcal{I}_C tiene propiedades análogas a las de la reflexión R_l respecto a una recta l . Por ejemplo:

- (a) R_l deja invariable a l puntualmente e \mathcal{I}_C deja invariable a C puntualmente.
- (b) $R_l \circ R_l = I_{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{I}_C \circ \mathcal{I}_C = I_{\mathcal{E} - \{O\}}$ o sea, ambas son idempotente.
- (c) l divide a $\mathcal{E} - \{l\}$ en dos semi-planos y R_l los intercambia. C divide a $\mathcal{E} - \{C \cup \{O\}\}$ en dos regiones $\text{int } C$ y $\text{ext } C$; y \mathcal{I}_C las intercambia.
- (d) R_l deja invariable globalmente a cualquier recta perpendicular a l .
 \mathcal{I}_C deja invariable globalmente a cualquier recta perpendicular a C .
- (e) Si \mathcal{D} es una circunferencia ortogonal a l , entonces l pasa por el centro de \mathcal{D} y por lo tanto \mathcal{D} es simétrica respecto a l , lo que implica que $R_l(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, es decir, también las circunferencias ortogonales a l son invariantes globales a R_l . Análogamente, si \mathcal{D} es una circunferencia ortogonal a C , entonces \mathcal{D} es invariante global de \mathcal{I}_C .

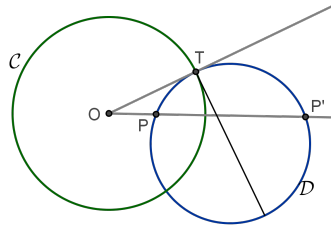


Figura 3.4

En efecto: como \mathcal{D} es ortogonal a C , l la tangente a \mathcal{D} en T , uno de los puntos en los que se intersecta con C , pasa por O . Entonces, si $P \in \mathcal{D}$, el rayo \overrightarrow{OP} intersecta a \mathcal{D} en el punto P' y por el Lema 3.1, que probaremos más adelante, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2 = r^2$.

Por lo tanto, $P' \in \overrightarrow{OP}$ y $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$, es decir, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) = P' \in \mathcal{D}$, véase Figura 3.4.

A la inversión respecto a una circunferencia \mathcal{C} se le puede llamar reflexión respecto a \mathcal{C} o bien, a la reflexión respecto a una recta \mathcal{C} , se le puede llamar la inversión con respecto a \mathcal{C} .

Ahora supongamos que $P \in \mathcal{E} - \{O\}$ y $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$. Si A es el punto de intersección de \overrightarrow{OP} con \mathcal{C} , entonces $\overline{AP} = r - \overline{OP}$ y $\overline{AP'} = \overline{OP'} - r$, lo que implica $\overline{AP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}} - r = \frac{r^2 - r\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r(r - \overline{OP})}{\overline{OP}} = \frac{r}{\overline{OP}} \overline{AP}$, véase Figura 3.5. Dejemos fijos a P y A , $r \rightarrow \infty$, o sea O se aleja de A . De modo que $\overline{OA} \rightarrow \infty$.

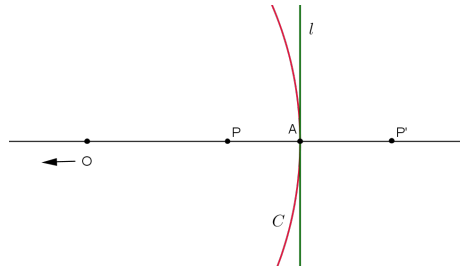


Figura 3.5

Por una parte tenemos: $\frac{r}{\overline{OP}} = \frac{r}{r - \overline{AP}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{AP}}{r}}$, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\overline{OP}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\overline{AP}}{r}} = 1.$$

En el límite, $\overline{AP} = \overline{AP'}$ y \mathcal{C} tiende a convertirse en la perpendicular en A a la recta \overleftrightarrow{OA} y los puntos P y P' son simétricos respecto a l , es decir, uno es la imagen del otro bajo R_l . Por lo tanto R_l es el caso límite de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ cuando el radio de \mathcal{C} tiende a ∞ .

En Conclusión, podemos considerar a las rectas en \mathcal{E} como circunferencias de radio infinito y entonces $R_l = \mathcal{I}_l$.

Definición 3.4. Sean \mathcal{C} una circunferencia (o una recta) en \mathcal{E} y T una transformación de \mathcal{E} . Diremos que T es la simetría respecto a \mathcal{C} (o en \mathcal{C}) si $T = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, en el caso en que \mathcal{C} sea una circunferencia, o $T = R_{\mathcal{C}}$, en el caso en que \mathcal{C} sea una recta.

3.0.1. Construcciones

Veamos dos métodos para construir la inversión de un punto. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O y radio $r > 0$ en un plano euclidiano \mathcal{E} y P un punto.

- (a) Trazamos \overrightarrow{OP} y su perpendicular en P . T la intersección de la perpendicular a \overrightarrow{OP} en P y \mathcal{C} . Trazamos la tangente de \mathcal{C} en T . Así obtenemos P' que es la intersección de la tangente con \overrightarrow{OP} , véase Figura 3.6.

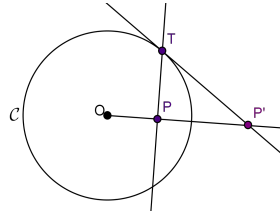


Figura 3.6

La justificación de la construcción: Notemos que $\triangle OTP' \sim \triangle OPT$, ya que son triángulos rectángulos y tienen en común al ángulo $\sphericalangle O$. Entonces $\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'}$ lo que implica que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2 = r^2$, véase Figura 3.7.

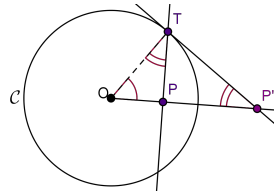


Figura 3.7

- (b) La segunda construcción la haremos con el uso exclusivo del compás. Trazamos la circunferencia \mathcal{D} con centro en P y radio \overline{PO} . Obtenemos los puntos A y B de la intersección de \mathcal{C} con la circunferencia \mathcal{D} . Ahora trazaremos las circunferencias con centro A y radio \overline{AO} ; la otra con centro en B y radio \overline{BO} . De la intersección de estas circunferencias obtenemos P' .
Justificación: Los triángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OP'A$ son isósceles ($\overline{PO} = \overline{PA}$ y $\overline{AO} = \overline{AP'}$). Como $\sphericalangle AOP$ es común, $\triangle OAP \sim \triangle OP'A$. Por lo tanto $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}}$. Así, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA}^2 = r^2$, véase Figura 3.8. Este método tiene una desventaja:

Si P está muy cerca de O , la circunferencia \mathcal{D} es muy pequeña y no alcanza a intersectar a \mathcal{C} en los puntos A y B véase [1], Página 32-33.

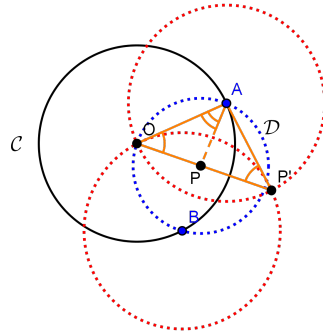


Figura 3.8

Lema 3.1. Sea \mathcal{F} una circunferencia en \mathcal{E} y $O \in \text{ext } \mathcal{F}$. Sean l y m dos rectas que pasan por O tales que l corta a \mathcal{F} en T y m corta \mathcal{F} en los puntos P y Q . Entonces son equivalentes:

(a) l es tangente a \mathcal{F} en T .

(b) $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OT}^2$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b) En los triángulos $\triangle OPT$ y $\triangle OTQ$, el ángulo $\sphericalangle TOP$ ($= \sphericalangle TOQ$) es común, y $(\sphericalangle OTP)^\circ = (\sphericalangle OQT)^\circ$, véase Figura 3.9. Por lo tanto, $\triangle OPT \sim \triangle OTQ$ y, con ello, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}}$. Así, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OT}^2$.

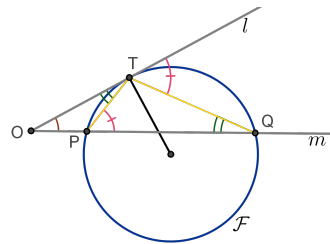


Figura 3.9

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que l intersecta a \mathcal{F} en T y T' . Sea n una tangente a \mathcal{F} en L , véase Figura 3.10. Por la implicación (a) \Rightarrow (b), tenemos:

$$\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = \overline{OL}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ},$$

pero $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OT}^2$, entonces $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = \overline{OT}^2$ y con ello, $\overline{OT'} = \overline{OT}$. Como T y $T' \in \overline{OT}$, $T = T'$. Así l toca a \mathcal{F} sólo en el punto T y por lo tanto es tangente a \mathcal{F} en T . □

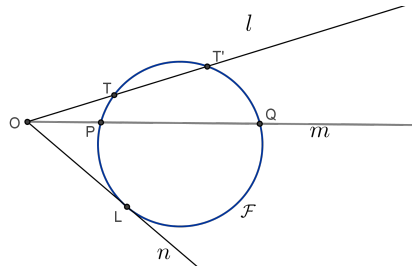


Figura 3.10

Proposición 3.1. Si \mathcal{C} es una circunferencia cualquiera en \mathcal{E} , con centro en O y radio r y si $A, B \in \mathcal{E}$, con O, A y B no colineales. Sea $A' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)$ y $B' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)$, entonces O, A' y B' no son colineales y $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$.

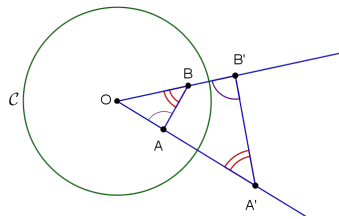


Figura 3.11

Demostración.

Como $A' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)$ y $B' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)$, entonces $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.
Por lo tanto:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} \quad \text{y} \quad \sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$$

Por el criterio *LAL* de semejanza se tiene que $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, véase Figura 3.11.

□

Con este resultado podemos calcular la distancia entre las imágenes A' y B' de los puntos A y B bajo \mathcal{I} :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{r^2}{\overline{OA}} \cdot \frac{1}{\overline{OB}}.$$

Por lo tanto, $\overline{A'B'} = \frac{r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \overline{AB}$. Establezcamos esto como un corolario:

Corolario 3.1. Si \mathcal{C} es una circunferencia cualquiera en \mathcal{E} , con centro en O y radio r y si $A, B \in \mathcal{E}$, $A' = \mathcal{I}(A)$ y $B' = \mathcal{I}(B)$ con O, A y B no colineales, entonces

$$\overline{A'B'} = \frac{r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \overline{AB}.$$

Proposición 3.2. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O y radio r . Sea \mathcal{D} una circunferencia que pasa por O y con centro en D . Si A es el punto de intersección de \overrightarrow{OD} con \mathcal{D} diferente de O , $A' = \mathcal{I}(A)$ y l es la recta perpendicular a \overrightarrow{OD} que pasa por A' , entonces $\mathcal{I}(\mathcal{D} - \{O\}) = l$.

Demostración.

Sean $P \in \mathcal{D} - \{O\}$ y $P' = \mathcal{I}(P)$. Tenemos dos casos:

- (a) Si $P = A$, entonces $\mathcal{I}(P) = A' \in l$, véase Figura 3.12.

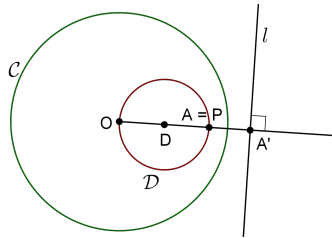


Figura 3.12

- (b) Si $P \neq A$, entonces O, P, A no son colineales y por Proposición 3.1, $\triangle OPA \sim \triangle OA'P'$ y $\sphericalangle OPA$ es recto, porque \overline{OA} es diámetro de \mathcal{D} , véase Figura 3.13. Como $\sphericalangle OA'P' \cong \sphericalangle OPA$, entonces $\sphericalangle OA'P'$ es recto y $P' \in l$, por lo tanto $\mathcal{I}(\mathcal{D} - \{O\}) \subseteq l$.

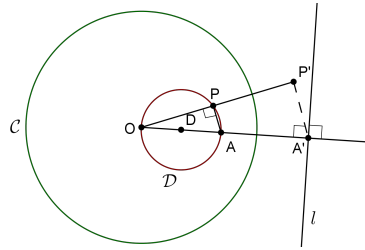


Figura 3.13

Ahora tomemos $Q \in l$ y $Q' = \mathcal{I}_C(Q)$. Si $Q = A'$, entonces $Q' = \mathcal{I}_C(Q) = \mathcal{I}_C(A') = A \in \mathcal{D} - \{O\}$. Si $Q \neq A'$, el $\triangle OA'Q$ es un triángulo rectángulo con $\sphericalangle OA'Q$ recto. Pero $\triangle OQ'A \sim \triangle OA'Q$, entonces $\sphericalangle OQ'A \cong \sphericalangle OA'Q$, luego $\sphericalangle OQ'A$ es un ángulo recto y Q' está en la circunferencia con diámetro OA , véase Figura 3.14. Esto implica que $\mathcal{I}_C(l) \subseteq \mathcal{D} - \{O\}$ y así $l = \mathcal{I}_C \circ (\mathcal{I}_C(l)) \subseteq \mathcal{I}_C(\mathcal{D} - \{O\})$. Por lo tanto $\mathcal{I}_C(\mathcal{D} - \{O\}) = l$.

□

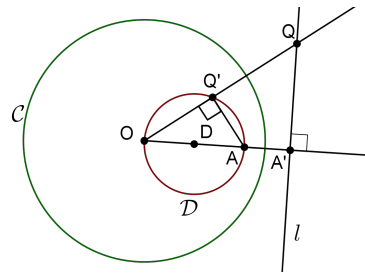


Figura 3.14

Observar que l es una recta que no pasa por O pero que es paralela a la tangente a \mathcal{D} que pasa por O .

Corolario 3.2. Si l es una recta que no pasa por O , entonces $\mathcal{I}_C(l)$ es una circunferencia tangente a la paralela a l en O .

Demostración.

Sea l una recta que no pasa por O . Desde O bajamos una perpendicular a l con el pie en $A' \in l$. Sea $A = \mathcal{I}_C(A')$ y \mathcal{D} la circunferencia con diámetro \overline{OA} , véase Figura 3.15. Ya vimos que $\mathcal{I}_C(\mathcal{D} - \{O\}) = l$. Por lo tanto $\mathcal{I}_C(l) = \mathcal{D} - \{O\}$.

□

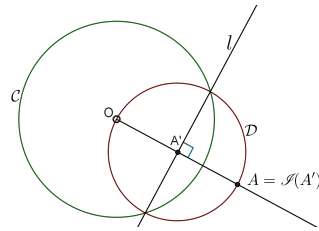


Figura 3.15

El siguiente es un Teorema muy famoso en la historia de la geometría. Estrictamente hablando, no es necesario para nuestra teoría, pero presentamos una demostración muy elegante de él, como una aplicación de las proposiciones anteriores acerca de la inversión.

Recordar: Un cuadrilátero convexo es aquél en que sus diagonales se intersectan y un concíclico es un cuadrilátero cuyos vértices se encuentran en una circunferencia. Suponemos que \overrightarrow{AC} está entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} .

Teorema 3.1 (Ptolomeo). *Si un cuadrilátero convexo $\square ABCD$ es concíclico, entonces $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.*

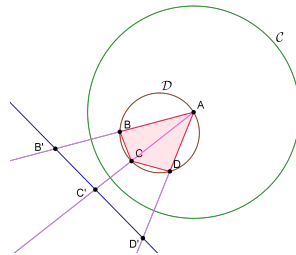


Figura 3.16

Demostración.

Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo y cuyos vértices A, B, C, D están en una circunferencia \mathcal{D} . Sea \mathcal{C} cualquier circunferencia con centro en A . Como $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ manda a \mathcal{D} en una recta, por lo Proposición 3.2, se tiene que B', C' y D' son colineales, véase Figura 3.16. Por la convexidad se tiene $B' * C' * D'$ entonces $\overline{B'C'} + \overline{C'D'} = \overline{B'D'}$. Lo que implica $\frac{r^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \overline{BC} + \frac{r^2}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} \overline{CD} = \frac{r^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}} \overline{BD}$.

Si multiplicamos todo por $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}{r^2}$, entonces $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$. \square

Proposición 3.3. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O y radio $r > 0$ en un plano euclidiano \mathcal{E} y \mathcal{D} una circunferencia que no pasa por O , con centro en $D \neq O$ y radio s . Sean A y B los puntos de intersección de \overleftrightarrow{OD} en \mathcal{D} y $A' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)$ y $B' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B)$. Entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$, donde \mathcal{F} es la circunferencia con diámetro $\overline{A'B'}$.

Demostración.

Veamos primero $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{F}$. Demostraremos que para cualquier punto $P \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) = P' \in \mathcal{F}$. Si $P \in \{A, B\}$ entonces, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) \in \{A', B'\} \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que P es diferente de A y de B , por tanto lo A , B y P forman un triángulo rectángulo con $\sphericalangle APB$ recto. Sea $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, por Proposición 3.1 $\triangle OA'P' \sim \triangle OAP$, luego $\sphericalangle OA'P' \cong \sphericalangle OPA$ y $\sphericalangle OP'A' \cong \sphericalangle OAP$. De igual forma por Proposición 3.1 $\triangle OP'B' \sim \triangle OPB$, entonces $\sphericalangle OB'P' \cong \sphericalangle OPB$ y $\sphericalangle OP'B' \cong \sphericalangle OBP$, véase Figura 3.17.

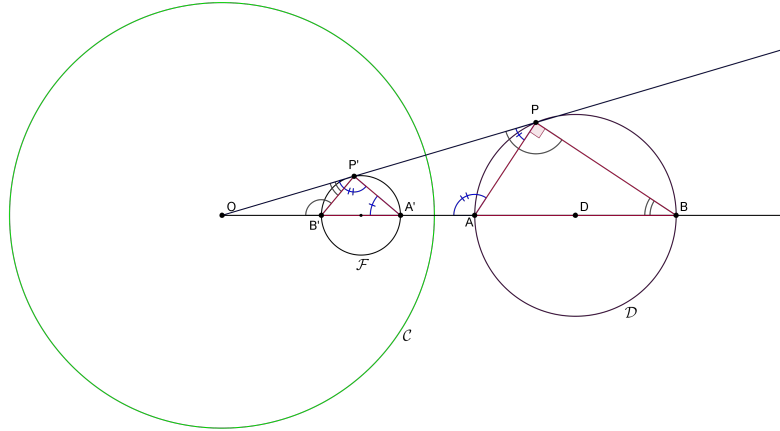


Figura 3.17

Por lo tanto $(\sphericalangle B'P'A')^\circ = (\sphericalangle OP'A')^\circ - (\sphericalangle OP'B')^\circ = (\sphericalangle OAP)^\circ - (\sphericalangle OBP)^\circ$, pero $\sphericalangle OAP$ es un ángulo exterior del $\triangle APB$ y $\sphericalangle OAP}^\circ = (\sphericalangle APB)^\circ + (\sphericalangle ABP)^\circ = 90^\circ + (\sphericalangle OBP)^\circ$ así, $90^\circ = (\sphericalangle OAP)^\circ - (\sphericalangle OBP)^\circ$. Entonces $\sphericalangle B'P'A'$ es recto y P' está en la circunferencia con diámetro $\overline{A'B'}$ o sea en \mathcal{F} . Lo que implica que $P' \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{F}$.

Ahora veremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Observemos que \mathcal{F} también es una circunferencia que no pasa por O y que $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A') = A$ y $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B') = B$, por la primera parte de la

demostración tenemos que $\mathcal{I}_C(F)$ está contenido en la circunferencia con diámetro \overline{AB} pero ésta es \mathcal{D} , es decir, $\mathcal{I}_C(F) \subseteq (\mathcal{D})$ aplicando a ambos lados \mathcal{I}_C :

$$\mathcal{I}_C \circ (\mathcal{I}_C(F)) \subseteq \mathcal{I}_C(\mathcal{D})$$

pero $\mathcal{I}_C \circ (\mathcal{I}_C(F)) = F$ entonces $F \subseteq \mathcal{I}_C(\mathcal{D})$. Por lo tanto $\mathcal{I}_C(\mathcal{D}) = F$. □

Definición 3.5. Sea O un punto y $k \in \mathbb{R}_+$. La dilatación con centro O y radio k es la transformación del plano euclidiano que fija O y mapea a $P \neq O$ al único punto P' en \overrightarrow{OP} tal que $\overline{OP'} = k(\overline{OP})$. La denotaremos como $D(O; k)$.

Observación 3.6. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O , radio r y \mathcal{G} otra circunferencia con centro en O y radio s , con $s > r$. Si $\mathcal{I}_C(P) = P'$ y $\mathcal{I}_G(P') = P''$ se cumple:

$$OP' = \frac{r^2}{OP}$$

y

$$OP'' = \frac{s^2}{OP'} = \frac{s^2}{r^2} \overline{OP} = D(O; \frac{s^2}{r^2})(P),$$

donde $D(O; \frac{s^2}{r^2})$ es la dilatación con centro en O y constante $\frac{s^2}{r^2}$ (ver Página 22). Pero la composición $\mathcal{I}_G \circ \mathcal{I}_C = D(O; \frac{s^2}{r^2})$, entonces $\mathcal{I}_G = D(O; \frac{s^2}{r^2}) \circ \mathcal{I}_C$, véase Figura 3.18 (a).

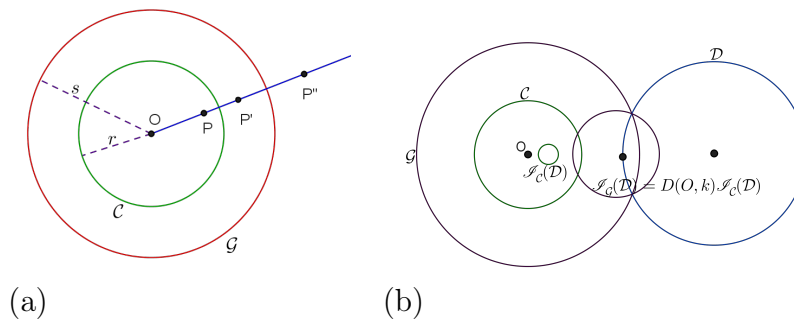


Figura 3.18

Si \mathcal{D} es una circunferencia que no pasa por O , entonces $\mathcal{I}_G(\mathcal{D}) = D(O, k) \circ \mathcal{I}_C(\mathcal{D})$, es también una circunferencia que no pasa por O , véase Figura 3.18 (b).

Observación 3.7. Si D es una circunferencia que no pasa por O pero que intersecta a C en los puntos P y Q , entonces $\mathcal{I}_C(D) = \overleftrightarrow{PQ}$, véase Figura 3.19.

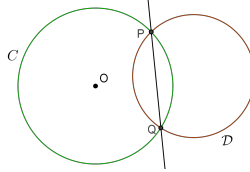


Figura 3.19

Observación 3.8. Si l es una recta que no pasa por O pero intersecta a C en puntos P y Q , entonces $\mathcal{I}_C(l)$ es una circunferencia que pasa por O, P y Q , véase Figura 3.20.

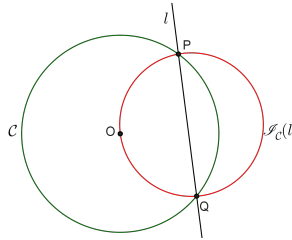


Figura 3.20

Proposición 3.4. (a) Sea D una circunferencia ortogonal a C , entonces $\mathcal{I}_C(D) = D$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{E} - \{O\}$, entonces $\mathcal{I}_C(A) = B$ si y sólo si cualquier circunferencia D que pasa por A y B es ortogonal a C .

Demostración.

(a) Véase la Observación 3.5 (e).

(b) Sean $A, B \in \mathcal{E} - \{O\}$ tales que $\mathcal{I}_C(A) = B$. Sea D cualquier circunferencia que pasa por A y B , así que \overleftrightarrow{OA} intersecta a D en dichos puntos. A está en $\text{int } C$ si y sólo si B está en $\text{ext } C$, entonces D intersecta a C en puntos T_1 y T_2 . Como $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2 = \overline{OT_1}^2$, el radio $\overline{OT_1}$ de C es tangente a D en T_1 . Por lo tanto, D es ortogonal a C , véase Figura 3.21.

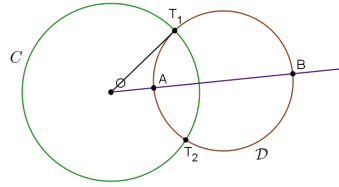


Figura 3.21

Inversamente, supongamos que \mathcal{D} es ortogonal a \mathcal{C} . Entonces si T es uno de los puntos de intersección de \mathcal{D} y \mathcal{C} , entonces \overleftrightarrow{OT} es tangente a \mathcal{D} en T . Por el Lema 3.1 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OT}^2 = r^2$.

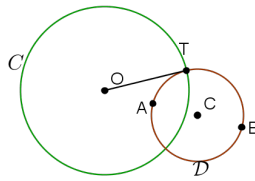


Figura 3.22

Por lo tanto $\overline{OB} = \frac{r^2}{\overline{OA}}$ y con ello $B = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A)$, véase Figura 3.22. □

Observación 3.9. Si l_1 y l_2 son dos rectas distintas, concurrentes en un punto A , pero no perpendiculares, existen rayos \overrightarrow{AB} en l_1 y \overrightarrow{AC} en l_2 tal que $\sphericalangle BAC$ es agudo. Denotaremos por $\sphericalangle(l_1, l_2)$ a $\sphericalangle BAC$.

Lema 3.2. Si C_1 es una curva, $P \in C_1$, $C'_1 = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(C_1)$, $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, t_1 es la tangente a C_1 en P , s_1 es la tangente a C'_1 en P' , y si $\theta = [\sphericalangle(\overleftrightarrow{OP}, t_1)]^\circ$, entonces $\theta = [\sphericalangle(\overleftrightarrow{OP'}, s_1)]^\circ$.

Demostración.

Sea $Q \in C_1 - \{P\}$, $\alpha = \overleftrightarrow{PQ}$, $Q' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(Q)$, entonces t_1 es la posición del límite de las rectas α , cuando Q tiende a P y s_1 es la posición del límite de las rectas $\overleftrightarrow{P'Q'}$, cuando Q' tiende a P' . Luego $\theta = (\sphericalangle(\overleftrightarrow{OP}, t_1))^\circ = \lim_{Q \rightarrow P} (\sphericalangle(\overleftrightarrow{OP}, \alpha))^\circ = \lim_{Q \rightarrow P} (\sphericalangle OPQ)^\circ$.

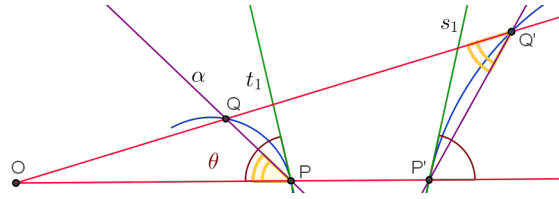


Figura 3.23

Pero como $\triangle OPQ \sim \triangle OP'Q'$, entonces $(\sphericalangle OPQ)^\circ = (\sphericalangle OQ'P')^\circ = (\sphericalangle(\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{OQ'}))^\circ$, véase Figura 3.23. Por lo tanto $\theta = \lim_{Q \rightarrow P} (\sphericalangle OPQ)^\circ = \lim_{Q' \rightarrow P'} (\sphericalangle OQ'P')^\circ = \lim_{Q' \rightarrow P'} \sphericalangle(\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{OQ'})$. Y la posición del límite de las rectas $\overrightarrow{OQ'}$, cuando Q' tiende a P' es igual a $\overrightarrow{OP'}$. Por lo tanto, $\theta = (\sphericalangle(s_1, \overrightarrow{OP'}))^\circ$. □

Corolario 3.3. Sean C_1 y C_2 dos curvas que se intersectan en un punto P y sean $C'_1 = \mathcal{I}(C_1)$, $C'_2 = \mathcal{I}(C_2)$ y $P' = \mathcal{I}(P)$. Entonces C'_1 y C'_2 se intersectan en P' . Supongamos que las tangentes t_1 y t_2 a C_1 y C_2 en P forman un ángulo θ y sean las tangentes s_1 y s_2 a C'_1 y C'_2 en P' . Se cumple que $|\sphericalangle(s_1, s_2)| = \theta$, véase Figura 3.24.



Figura 3.24

Demostración.

Por Lema 3.2 tenemos $(\sphericalangle(\overrightarrow{PP'}, t_1))^\circ = (\sphericalangle(\overrightarrow{PP'}, s_1))^\circ$ y $(\sphericalangle(\overrightarrow{PP'}, t_2))^\circ = (\sphericalangle(\overrightarrow{PP'}, s_2))^\circ$, pero $\overrightarrow{PP'}$ es secante común a las curvas en los puntos P y P' , además el ángulo entre dos curvas es la suma algebraica de los ángulos que forman con la secante común, por lo tanto $(\sphericalangle(t_1, t_2))^\circ = (\sphericalangle(s_1, s_2))^\circ$. □

Observación 3.10. Si l es una recta, R_l también conserva ángulos en magnitud.

Corolario 3.4. La simetría respecto a un círculo o a una recta conserva ángulos.

Demostración.

Por el Corolario 3.3 se conservan los ángulos respecto a un círculo y la Proposición 2.4 muestra que también se conservan ángulos respecto a una recta. \square

En particular manda círculos o rectas ortogonales, en círculos o rectas ortogonales.

Observación 3.11. *Si \mathcal{C} es una circunferencia en el plano euclidiano \mathcal{E} , y O es su centro, entonces, para cualquier $P \in \mathcal{E} - \{O\}$, si $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, entonces $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$. Si P se acerca más y más a O , entonces $\overline{OP'}$ se aleja de O de modo que $\lim_{P \rightarrow O} \overline{OP'} = \infty$.*

Conviene añadir a \mathcal{E} un punto especial, el punto al infinito, que denotaremos por ∞ y extender la definición de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{E} \cup \{\infty\}$, como:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}} : \mathcal{E} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathcal{E} \cup \{\infty\}$$

es tal que $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{E} \cup \{\infty\}} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, la que definimos; y $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(O) = \infty$, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\infty) = O$. También, las rectas son circunferencias que pasan por ∞ . Esta nomenclatura nos permite simplificar el siguiente principio que es muy importante:

Principio de Simetría *Supongamos que \mathcal{C} es una circunferencia con centro en O (o bien una recta). Sean \mathcal{D} una circunferencia (o una recta), A y B dos puntos simétricos respecto a \mathcal{D} . Si la simetría respecto a \mathcal{C} manda \mathcal{D} a \mathcal{D}' , A a A' , B a B' , entonces A' y B' son simétricos respecto a \mathcal{D}' .*

Demostración.

Cuando \mathcal{D} es circunferencia. Sean α y β circunferencias que pasan por A y por B . Como A y B son simétricos respecto a \mathcal{D} , α y β son ortogonales a \mathcal{D} . Dado que la simetría respecto a \mathcal{C} manda α y β a α' y β' , respectivamente, entonces, por el Corolario anterior, α' y β' son ortogonales a \mathcal{D}' . Como A' y B' están en α' y β' , entonces A' y B' son simétricos respecto a \mathcal{D}' , véase Figura 3.25. En particular, si \mathcal{D} es circunferencia, entonces $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(A) = \mathcal{I}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(B))$. Si $D = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(\infty)$, D es centro de \mathcal{D} e $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(D) = \mathcal{I}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\infty)) = \mathcal{I}_{\mathcal{D}'}(O)$. En otras palabras el centro de \mathcal{D} no va a dar, bajo $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, en el centro de su imagen \mathcal{D}' , sino que va a dar el inverso de O bajo $\mathcal{I}_{\mathcal{D}'}$.

Cuando \mathcal{D} es una recta el argumento es similar, puesto que, si A y B son simétricos respecto a \mathcal{D} , entonces cualesquiera dos circunferencias que pasen por A y B son ortogonales. Por lo tanto A' y B' son simétricos. \square

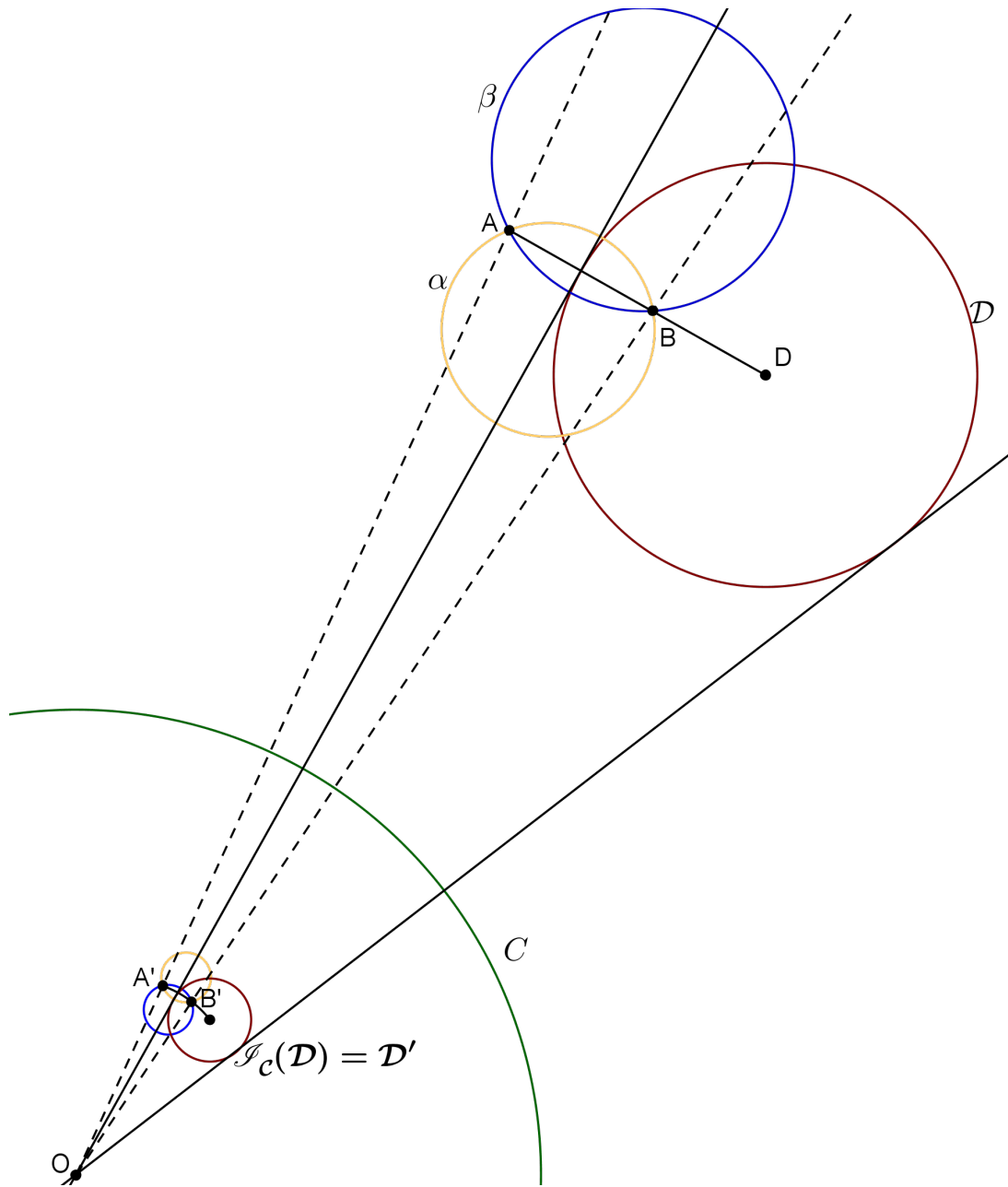


Figura 3.25

3.1. Inversión en \mathbb{R}^3

Definición 3.6. Sea \mathcal{A} una esfera con centro en Q y radio r . La *inversión respecto a \mathcal{A}* es la función:

$$\mathcal{I}_Q: \mathbb{R}^3 - \{Q\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{Q\}$$

$$P \longmapsto P'$$

es tal que $P' \in \overrightarrow{QP}$ y $\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{QP}}$, (véase Figura 3.26).

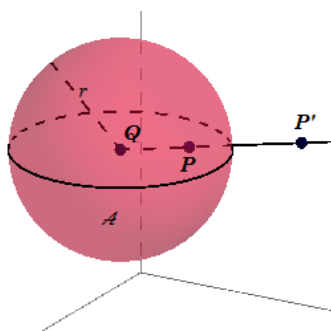


Figura 3.26

Para las siguientes observaciones supongamos que si Π es un plano que pasa por Q y \mathcal{C} es la circunferencia de intersección de Π y \mathcal{A} , entonces Π es un plano euclidiano y $\mathcal{I}_C: \Pi - \{Q\} \longrightarrow \Pi - \{Q\}$, es tal que $\mathcal{I}_C = \mathcal{I}_Q|_{\Pi}$, véase Figura 3.27.

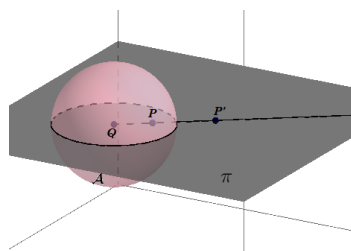


Figura 3.27

Observación 3.12. Bajo la inversión en una esfera centrada en Q , un plano Σ tal que no contiene a Q es transformado en una esfera que contiene a Q y cuyo plano tangente en Q es paralelo a Σ , véase Figura 3.28. Inversamente, una esfera que contiene a Q se transforma en un plano que no pasa por Q y que es paralelo al plano tangente de esa esfera en Q .

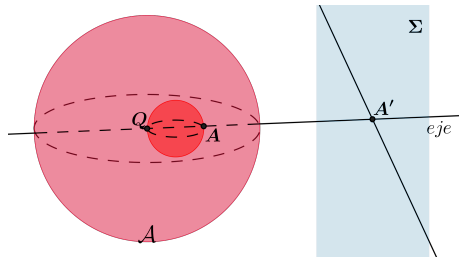


Figura 3.28

Observación 3.13. *Bajo la inversión de una esfera con centro en Q , la imagen de una esfera que no contiene a Q es otra esfera que no contiene a Q , véase Figura 3.29.*

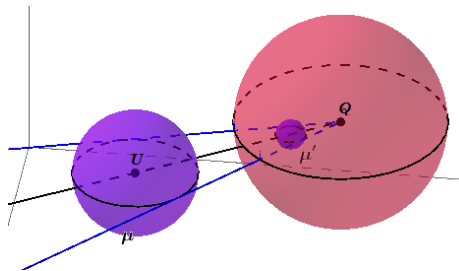


Figura 3.29

Observación 3.14. *Bajo la inversión en una esfera \mathcal{A} con centro en Q , la imagen de un círculo \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 que no pasa por Q es otro círculo que no pasa por Q , véase Figura 3.30. Si \mathcal{C} pasa por Q y su imagen bajo la inversión en una esfera \mathcal{A} con*

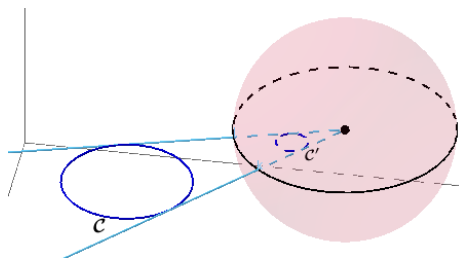


Figura 3.30

centro en Q , es una recta que pasa por Q , paralela a la tangente de \mathcal{C} en Q , véase Figura 3.31.

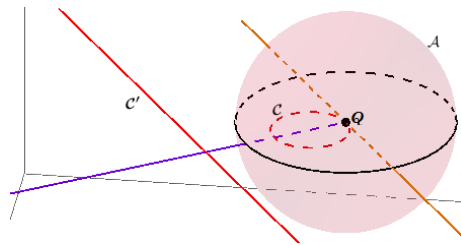


Figura 3.31

Observación 3.15. *Bajo inversión, una esfera \mathcal{A} se transforma en si misma.*

Observación 3.16. *Si \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son esferas que se intersectan, \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son sus intersecciones con un plano Π que pasa por los centros de las esferas. \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son ortogonales si y sólo si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son ortogonales, véase Figura 3.32.*

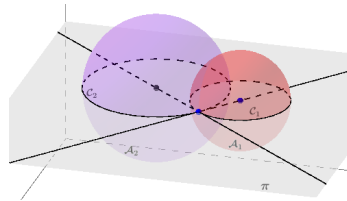


Figura 3.32

De las Observaciones 3.15 y 3.16 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *Si A y B son inversos respecto a una esfera \mathcal{A} y α es otra esfera que pasa por A y B , entonces α es ortogonal a \mathcal{A} .*

Capítulo 4

Modelos de la geometría hiperbólica

Hemos mencionado anteriormente que la Geometría Hiperbólica Plana (GHP) consta de los mismos términos y relaciones indefinidas y los axiomas de GNP; más la Propiedad Hiperbólica de las Paralelas. En este capítulo estudiaremos dos maneras de interpretar GHP, es decir, el modelo de Klein (M_K) por el matemático Felix Klein (1849-1925) y el modelo de Poincaré por el matemático Henri Poincaré (1854-1912), véase las referencias [3], [4] y [5].

4.1. Modelo de Klein M_K

Sea \mathcal{E} un plano euclidiano cualquiera y sea γ un circunferencia cualquiera en \mathcal{E} con centro en O y radio r . Los puntos del interior de γ son los puntos de M_K , definidos de la siguiente manera:

Definición 4.1. Π_K es el conjunto de todos los puntos del interior de γ , es decir:

$$\Pi_K = \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} < r\}.$$

Observación 4.1. Si A y B son puntos distintos en γ , entonces existe una única recta l en \mathcal{E} que pasa por A y B . Consideraremos de la recta l , la cuerda abierta AB que está en el interior de γ y la denotaremos por $A)(B$. Es decir, $A)(B = l \cap \text{int } \gamma$, véase Figura 4.1.

Definición 4.2. Λ_K es el conjunto de rectas de M_K , definido como:

$$\Lambda_K = \{A)(B : A \text{ y } B \text{ son puntos distintos en } \gamma\}.$$

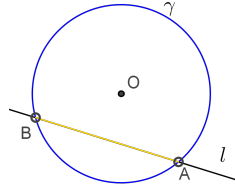


Figura 4.1

Definición 4.3. Si $m = A)(B \in \Lambda_k$, a A y B se les llaman puntos ideales de m .

Definición 4.4. Sea \mathcal{I}_K la incidencia en la interpretación de Klein, como la euclidiana o sea, si $P \in \Pi_K$ y $l \in \Lambda_K$, entonces $P\mathcal{I}_K l$ si y sólo si $P\mathcal{I}_\mathcal{E} \overleftrightarrow{AB}_\mathcal{E}$, donde $\mathcal{I}_\mathcal{E}$ es la incidencia en el plano euclidiano \mathcal{E}

Definición 4.5. $*_K$ es la relación de orden entre ternas de puntos: si $A, B, C \in \Pi_K$, entonces

$$A *_K B *_K C \Rightarrow A *_\mathcal{E} B *_\mathcal{E} C,$$

donde $*_\mathcal{E}$ es la relación de orden en el plano euclidiano \mathcal{E} .

Por como está definida \mathcal{I}_K es fácil corroborar que $(\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K)$ cumple los axiomas de incidencia de la geometría neutral, o sea:

- I1)** Para todo $P, Q \in \Pi_K$ con $P \neq Q$, existe una única recta $A)(B \in \Lambda_K$ tal que $P\mathcal{I}_K A)(B$. Sean $P, Q \in \Pi_K$ tales que $P \neq Q$. A y B los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{PQ}_\mathcal{E}$ con $\text{int } \gamma$ (A y B existen pues en \mathcal{E} se cumple el axioma de Dedekind). Sea $l = \Pi_K \cap \overleftrightarrow{PQ}_\mathcal{E} = A)(B$. Por lo tanto $Q\mathcal{I}_K l$, $P\mathcal{I}_K l$ y $l \in \Lambda_K$.

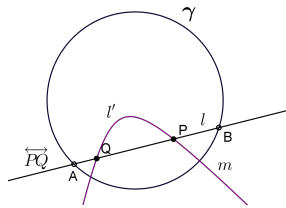


Figura 4.2

La unicidad. Si $l' \in \Lambda_k$, $Q\mathcal{I}_K l'$ y $P\mathcal{I}_K l'$, entonces existiría una recta euclidiana m tal que $m \cap \Pi_K = l'$, lo que implica $Q\mathcal{I}_\mathcal{E} m$ y $P\mathcal{I}_\mathcal{E} m$, entonces $\overleftrightarrow{PQ}_\mathcal{E} = m$ y por lo tanto $l' = m \cap \Pi_K = \overleftrightarrow{PQ}_\mathcal{E} \cap \Pi_K = l$, véase Figura 4.2.

- I2)** Para todo $A)(B = l \in \Lambda_K$, existe $P, Q \in \Pi_K$ tal que $P \neq Q$ y $PT_K l$ y $QT_K l$.
 Sea $l = A)(B \in \Lambda_K$, entonces $A \neq B$ en \mathcal{E} y en la recta euclidiana $\overleftrightarrow{AB}_\mathcal{E}$ se tienen puntos R, S y T tales que $R *_\mathcal{E} A *_\mathcal{E} B$, $A *_\mathcal{E} S *_\mathcal{E} B$ y $A *_\mathcal{E} B *_\mathcal{E} T$, véase Figura 4.3. Pero como $S \neq B$ en $\overleftrightarrow{AB}_\mathcal{E}$, existen por lo menos un punto U tal que $S *_\mathcal{E} U *_\mathcal{E} B$, por lo tanto $S, U \in \Pi_K$ y $S, U \in \overleftrightarrow{AB}_\mathcal{E} \cap \Pi_K = A)(B = l$.

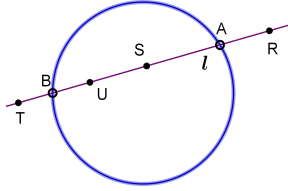


Figura 4.3

- I3)** Existe 3 puntos en Π_K no colineales. Basta tomar una recta euclidiana m que no pase por O pero que si interseccione al int γ entonces $m \cap \Pi_K = A)(B$. Sean $P, Q \in A)(B$ por lo tanto O, P y Q no son colineales, véase Figura 4.4.

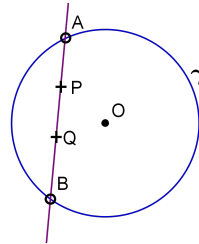


Figura 4.4

Así $(\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K)$ es un modelo de la geometría de incidencia plana (G.I.P).

Relación de Orden.

Vamos a ver que $(\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K, *_K)$ es modelo de GIPO (Geometría de Incidencia Plana con el Orden).

- O1)** Para todo $A, B, C \in \Pi_K$ y $A *_K B *_K C$ si, y sólo si A, B, C son k -colineales y distintos.

En efecto, $A *_K B *_K C \Rightarrow A *_E B *_E C$
 $\Rightarrow A, B, C$ son distintos y \mathcal{E} -colineales
 $\Rightarrow A, B, C$ son distintos y existe una \mathcal{E} -recta m tal
que $AI_{\mathcal{E}}m \wedge BI_{\mathcal{E}}m \wedge CI_{\mathcal{E}}m$
 \Rightarrow existe una \mathcal{E} -recta m tal que $A, B, C \in m \cap \Pi_K \in \Lambda_K$
y son distintos
 $\Rightarrow A, B, C$ son K -colineales y distintos.

- O2)** Para todo $A, B \in \Pi_K$, si $A \neq B$, entonces existe $C, D, E \in \Pi_K$ tal que $C *_K A *_K B \wedge A *_K D *_K B \wedge A *_K B *_K E$.

Sean $A, B \in \Pi_K$ y supongamos que $A \neq B$. Entonces sean P y Q los puntos ideales de $\overleftrightarrow{AB}_K$, con P más cerca de A que de B y Q más cerca de B que de A , o sea $\overleftrightarrow{AB}_K = P)(Q$. En $\overleftrightarrow{AB}_{\mathcal{E}}$ existen \mathcal{E} -puntos C, D y E , tales que C está entre A y P , D entre A y B y E entre B y Q . Pero estos puntos están en Π_K y cumplen $C *_K A *_K B \wedge A *_K D *_K B \wedge A *_K B *_K E$.

- O3)** Para cualesquiera $A, B, C \in \Pi_K$, si A, B, C son K -colineales y distintos, entonces

$$A *_K B *_K C \vee A *_K C *_K B \vee B *_K A *_K C.$$

Sean $A, B, C \in \Pi_K$. Si A, B, C son k -colineales y distintos, entonces A, B, C \mathcal{E} -colineales y distintos, así que

$$A *_E B *_E C \vee A *_E C *_E B \vee B *_E A *_E C.$$

Por ello:

$$A *_K B *_K C \vee A *_K C *_K B \vee B *_K A *_K C.$$

- O4)** Si $l \in \Lambda_K$, $A, B, C \in \Pi_K$ y A, B, C no K -inciden con l , se tiene:

- (a) Si A y B están en el mismo lado de l y B y C están en el mismo lado de l , entonces A y C están en el mismo lado de l .

- (b) Si A y B están de lados opuestos de l y B y C están de lados opuestos de l , entonces A y C están en el mismo lado de l . Notar que el K -semiplano $S_K(l, A)$ (determinado por l y A) es la intersección de \mathcal{E} -semiplano $S_{\mathcal{E}}(m, A)$ con Π_K , donde m es la recta euclidiana tal que $l = m \cap \Pi_K$.

Justificación:

- (a) A y B están del mismo lado de l , entonces $B \in S_K(l, A) \subseteq S_{\mathcal{E}}(m, A)$, así que A y B están del mismo lado de m en \mathcal{E} , véase Figura 4.5. Análogamente, si B y C están del mismo lado de l , entonces B y C están del mismo lado de m en \mathcal{E} . Como se cumple O4 en \mathcal{E} entonces A y C están del mismo lado de m en \mathcal{E} .

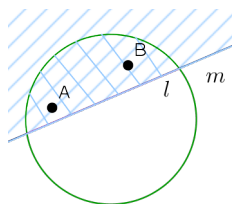


Figura 4.5

- (b) Finalmente $C \in S_{\mathcal{E}}(m, A) \cap \Pi_K = S_K(l, A)$, entonces A y C están del mismo lado de l .

Ya hemos corroborado que $M_K = (\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K, *_K)$ es un modelo de GIPO. Para convertirlo en un modelo de GN, debemos crear en M_K interpretaciones de las relaciones indefinidas de congruencia de segmentos y de congruencia de ángulos y mostrar que, junto con las relaciones \mathcal{I}_K y O_K , satisfacen todos los axiomas de GN. Para ello será conveniente que construyamos otro modelo de GIPO, el modelo de Poincaré M_{P_1} , que resultará isomorfo, como modelo de GIPO, a M_K . En M_{P_1} , será mucho más fácil definir las relaciones de congruencia que luego, con isomorfismos, pasaremos a M_K . Finalmente se verificará que ambos son modelos isomorfos de GN.

4.2. Modelo de Poincaré M_{P_1}

Sea \mathcal{E} un plano euclidiano cualquiera y sea γ una circunferencia cualquiera en \mathcal{E} con centro en O y radio r .

Definición 4.6. Π_1 es el conjunto de todos los puntos del interior de γ , es decir:

$$\Pi_1 = \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} < r\}$$

Definición 4.7. (a) Λ'_1 es el conjunto de los diámetros abiertos de γ , es decir las intersecciones de \mathcal{E} -rectas con Π_1 y que pasan por O , véase Figura 4.6. A los elementos de Λ'_1 , los llamaremos P_1 -rectas del primer tipo.

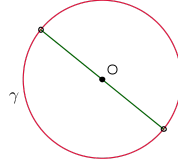


Figura 4.6

(b) Λ''_1 es el conjunto de intersecciones de \mathcal{E} -circunferencias ortogonales a γ con Π_1 , véase Figura 4.7. A los elementos de Λ''_1 les llamaremos P_1 -rectas del segundo tipo.

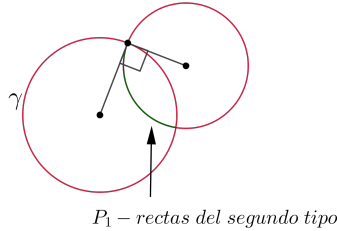


Figura 4.7

(c) $\Lambda_1 := \Lambda'_1 \cup \Lambda''_1$. A los elementos de Λ_1 les llamaremos P_1 -rectas.

Definición 4.8. Sean $P \in \Pi_1$ y $l \in \Lambda_1$. Si l es del primer tipo de Λ_1 , entonces existe una \mathcal{E} -recta m que pasa por O y tal que $l = m \cap \Pi_1$, véase Figura 4.8 (a). Así que definimos la incidencias \mathcal{I}_1 como:

$$P\mathcal{I}_1 l \Leftrightarrow P\mathcal{I}_{\mathcal{E}} m.$$

Si $l \in \Lambda''_1$ (segundo tipo), entonces existe una \mathcal{E} -circunferencia δ que es ortogonal a γ y $l = \delta \cap \Pi_1$, véase Figura 4.8 (b). Así que definimos la incidencias \mathcal{I}_1 como:

$$P\mathcal{I}_1 l \Leftrightarrow P \in \delta.$$

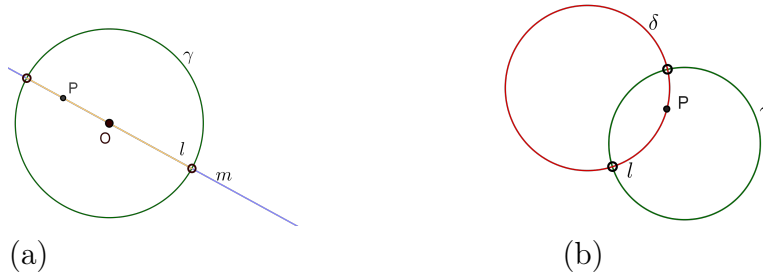


Figura 4.8

Lema 4.1. Si δ es una circunferencia en \mathcal{E} , ortogonal a γ , entonces O está en el exterior de δ . (Este lema ya se usó en la observación 5 (e), de la Página 62).

Ahora veamos que $(\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1)$ es un modelo de GIP.

I1) Si $A, B \in \Pi_1$ y con $A \neq B$, entonces existe una única recta $l \in \Lambda_1$ tal que $A\mathcal{I}_1l$ y $B\mathcal{I}_1l$.

Caso 1) Si O, A y B son \mathcal{E} -colineales y distintos. Sea m la \mathcal{E} -recta que pasa por O, A y B , y sea $l = m \cap \Pi_1$. Entonces $O\mathcal{I}_1l, A\mathcal{I}_1l, B\mathcal{I}_1l$ y $l \in \Lambda_1$, por lo tanto l es del primer tipo, véase Figura 4.9. Para demostrar la unicidad, supongamos que $l' \in \Lambda_1$ y A y B P_1 -inciden con l' .

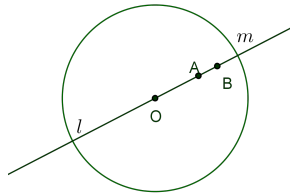


Figura 4.9

Como O, A y B son \mathcal{E} -colineales, l' es del primer tipo. Si l' fuera del segundo tipo, existiría una \mathcal{E} -circunferencia δ ortogonal a γ y tal que $\delta \cap \Pi_1 = l'$, véase Figura 4.10, pero $A \in \delta$ y $B \in \delta$ y $O \notin \delta$ por el Lema 4.1. Así que existe una \mathcal{E} -recta m' tal que $m' \cap \Pi_1 = l'$. Entonces m' es la única \mathcal{E} -recta que incide con A y B . Por lo tanto, $m' = m$ y $l' = m' \cap \Pi_1 = m \cap \Pi_1 = l$.

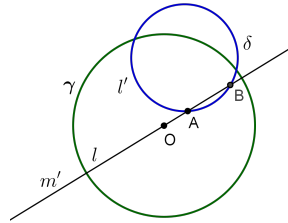


Figura 4.10

- Caso 2) Si O, A y B son \mathcal{E} -colineales y sin pérdida de generalidad $A = O$. Sea m la \mathcal{E} -recta que pasa O y B , entonces $l = m \cap \Pi_1 \in \Lambda_1$ y OI_1l y BI_1l . Si $l' \in \Lambda_1$ y OI_1l' y BI_1l' , por el Lema 4.1, l' es del primer tipo y existe una \mathcal{E} -recta m' tal que pasa por O y $l' = m' \cap \Pi_1$, pero entonces m' pasa por O , y $OI_{\mathcal{E}}m'$ y $BI_{\mathcal{E}}m'$. Por lo tanto $m = m'$ y $l' = m' \cap \Pi_1 = m \cap \Pi_1 = l$.
- Caso 3) O, A y B no son \mathcal{E} -colineales; en particular $O \neq A$ y $O \neq B$. Sea $A' = \mathcal{I}_{\gamma}(A)$. Como O, A y A' son \mathcal{E} -colineales (pues $A' \in \overrightarrow{OA}$), $A' \neq B$, y A, A' y B no son \mathcal{E} -colineales, por lo tanto existe una \mathcal{E} -circunferencia δ que pasa por A, A' y B , véase Figura 4.11 (a). Como δ pasa por A y A' , son simétricos respecto a γ , δ es ortogonal a γ , por Lema 3.1. Por lo tanto $l := \delta \cap \Pi_1$ es una P_1 -recta del segundo tipo tal que AI_1l y BI_1l .

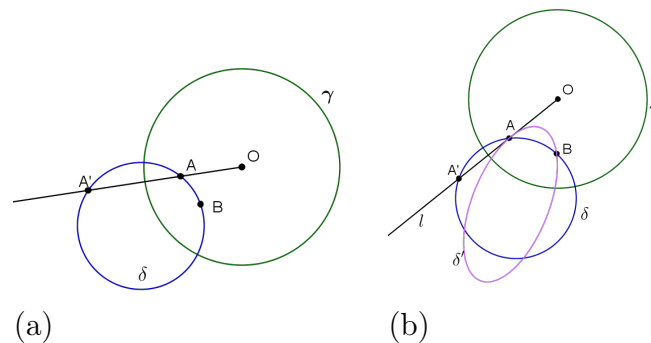


Figura 4.11

La unicidad, supongamos que $l' \in \Lambda_1$, AI_1l y BI_1l' . Si l' fuera del primer tipo, existiría una \mathcal{E} -recta m' tal que $l' = m' \cap \Pi_1$ y m' pasaría por O, A y B , por lo que éstos serían \mathcal{E} -colineales, lo que contradiría nuestra hipótesis. Si, l' es del segundo tipo, existe una circunferencia δ' ortogonal a γ tal que $\delta' \cap \Pi_1 = l'$,

por lo tanto δ' sería una circunferencia que pasa por A, A' y B ; y $\delta = \delta'$ y por lo tanto $l' = \delta' \cap \Pi_1 = \delta \cap \Pi_1 = l$, véase Figura 4.11 (b).

- I2)** Si $l \in \Lambda_1$, entonces existe $A, B \in \Pi_1$ con $A \neq B$ tal que AL_1l y BL_1l . Si l es del primer tipo, existe una \mathcal{E} -recta m tal que $l = m \cap \Pi_1$. Sean P y Q los puntos de intersección de m con γ , véase Figura 4.12. Entre P y Q (o sea en $\overrightarrow{PQ} \cap \Pi_1$) existen por lo menos dos puntos distintos en la \mathcal{E} -recta m . Sean A y B dichos puntos (por el Axioma O2 en \mathcal{E}).

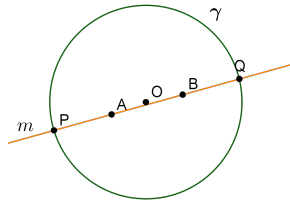


Figura 4.12

Por lo tanto $A, B \in m \cap \Pi_1 = l$, AL_1l y BL_1l . Si l es del segundo tipo. Entonces existe una \mathcal{E} -circunferencia δ ortogonal a γ y tal que $\delta \cap \Pi = l$. Sean P y Q los puntos de intersección de δ y γ . En el \mathcal{E} -segmento \overrightarrow{PQ} existen por lo menos dos puntos distintos R y S que no son P y Q (o sea R y $S \in \Pi_1$) los \mathcal{E} -rayos \overrightarrow{OR} y \overrightarrow{OS} intersectan a δ en puntos $A, B \in \Pi_1$ y son distintos véase Figura 4.13.

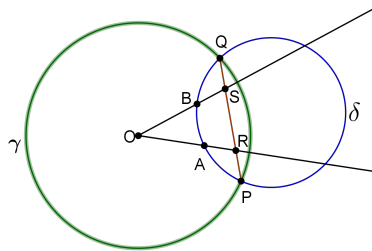


Figura 4.13

- I3)** Existen tres P_1 -puntos no colineales. Sea $A \neq O, A \in \Pi_1$ y m la \mathcal{E} -recta que pasa por O y A ; y $B \in \Pi_1$ que no está en m , véase Figura 4.14. Por lo que O, A y B no son colineales, entonces la P_1 -recta \overleftrightarrow{AB} es del segundo tipo. Así que no pasa por O . Por lo tanto A, B y O no son P_1 -colineales.

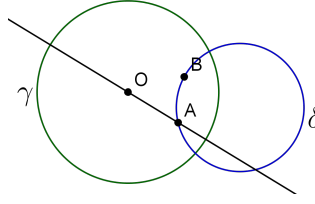


Figura 4.14

Hemos demostrado que $\mathcal{M}_{P_1} := (\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1)$ es un modelo de GIP. A este modelo se le llama modelo de Poincaré M_{P_1} o modelo de Poincaré del disco. Usando el modelo de Klein de GIPO, $\mathcal{M}_K := (\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K, *K)$, trataremos de dar un orden en \mathcal{M}_{P_1} , vía un isomorfismo de modelos de GIP.

4.3. Isomorfismo

Sean $\mathcal{M} = (\Pi_{\mathcal{M}}, \Lambda_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}})$ y $\mathcal{N} = (\Pi_{\mathcal{N}}, \Lambda_{\mathcal{N}}, \mathcal{I}_{\mathcal{N}})$ dos modelos de GIP.

Definición 4.9. *Un isomorfismo de modelos de GIP entre \mathcal{M} y \mathcal{N} es una pareja (f, g) donde:*

$$f: \Pi_{\mathcal{M}} \longrightarrow \Pi_{\mathcal{N}}$$

y

$$g: \Lambda_{\mathcal{M}} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{N}}.$$

funciones biyectivas, tales que para todo $P \in \Pi_{\mathcal{M}}$ y para todo $l \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, $P\mathcal{I}_{\mathcal{M}}l$ si, y sólo si $f(P)\mathcal{I}_{\mathcal{N}}g(l)$.

Observación 4.2. *Obtenemos un isomorfismo entre \mathcal{M} y \mathcal{N} si $F: \Pi_{\mathcal{M}} \longrightarrow \Pi_{\mathcal{N}}$ una función biyectiva tal que F es colineación, es decir, para todo $A, B, C \in \Pi_{\mathcal{M}}$ son \mathcal{M} -colineales si, y sólo si $F(A), F(B)$ y $F(C)$ son \mathcal{N} -colineales.*

Demostración.

F ya es una función biyectiva entre los puntos. Definimos $g: \Lambda_{\mathcal{M}} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{N}}$ como: si $l \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, por Axioma I2 existen $A, B \in \Pi_{\mathcal{M}}$ y $A \neq B$ tales que $A\mathcal{I}_{\mathcal{M}}l$ y $B\mathcal{I}_{\mathcal{M}}l$, por lo tanto $l = \overleftrightarrow{AB}$, $g(l) := \overleftrightarrow{F(A)F(B)}$.

Comprobaremos que (F, g) es un isomorfismo entre \mathcal{M} y \mathcal{N} . g esta bien definida, ya que si $A', B' \in \Pi_{\mathcal{M}}$ puntos distintos tales que $l = \overleftrightarrow{A'B'}$. Debemos ver

que $\overleftarrow{F(A)F(B')} = \overleftarrow{F(A)F(B)}$, pero $\overleftarrow{A'B'} = l = \overleftarrow{AB}$, entonces A', A , y B son \mathcal{M} -colineales y también lo son B', A , y B . Como F es colineación $F(A') \in \overleftarrow{F(A)F(B)}$ y $F(B') \in \overleftarrow{F(A)F(B)}$, luego $\overleftarrow{F(A')F(B')} = \overleftarrow{F(A)F(B)}$. Y $F^{-1} : \Pi_{\mathcal{N}} \rightarrow \Pi_{\mathcal{M}}$ también es colineación, porque F es biyectiva y si $C' = F(C)$, $A' = F(A)$ y $B' = F(B)$ están en $\Pi_{\mathcal{N}}$, entonces A', B' y C' son \mathcal{N} -colineales si, y sólo si A, B y C son \mathcal{M} -colineales si, y sólo si $F^{-1}(A'), F^{-1}(B')$ y $F^{-1}(C')$ son \mathcal{M} -colineales. Así la función $h : \Lambda_{\mathcal{N}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{M}}$ es tal que si $l' = \overleftarrow{A'B'} \in \Lambda_{\mathcal{N}}$, entonces $h(l') = \overleftarrow{F^{-1}(A')F^{-1}(B')}$, esta bien definida. Pero si $l = \overleftarrow{AB} \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, implica que $g(l) = \overleftarrow{F(A)F(B)}$, luego $h \circ (g(l)) = \overleftarrow{F^{-1}(A')F^{-1}(B')} = \overleftarrow{AB} = l$; análogamente para cada $l' \in \Lambda_{\mathcal{N}}$, $g \circ (h(l')) = l'$. Por lo que h es la función inversa de g , entonces g es biyectiva. Además si $P \in \Pi_{\mathcal{M}}$ y $l \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, existen $A, B \in \Pi_{\mathcal{M}}$ diferentes tales que $AL_{\mathcal{M}}l$ y $BL_{\mathcal{M}}l$.

Por lo tanto $l = \overleftarrow{AB} \Leftrightarrow P\mathcal{I}_{\mathcal{M}}\overleftarrow{AB}$

- $\Leftrightarrow P, A$ y B son \mathcal{M} -colineales.
- $\Leftrightarrow F(P), F(A)$ y $F(B)$ son \mathcal{N} -colineales.
- $\Leftrightarrow F(P)\mathcal{I}_{\mathcal{N}}\overleftarrow{F(A)F(B)}$
- $\Leftrightarrow F(P)\mathcal{I}_{\mathcal{N}}g(l)$
- $\Leftrightarrow (F, g)$ es un isomorfismo de modelos de GIP entre \mathcal{M} y \mathcal{N} . □

Ahora estableceremos un isomorfismo del modelo de GIP entre $\mathcal{M}_{P_1} = (\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1)$ y $\mathcal{M}_K = (\Pi_K, \Lambda_K, \mathcal{I}_K)$. Para ello necesitamos hablar de la proyección estereográfica. Llamemos a

$$\mathcal{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, -1 \leq X \leq 1, -1 \leq Y \leq 1\},$$

la esfera con centro en O y radio 1, $N = (0, 0, 1) \in \mathcal{S}^2$ el polo norte de \mathcal{S}^2 y $S = (0, 0, -1) \in \mathcal{S}^2$ el polo sur de \mathcal{S}^2 . Daremos una asociación de cada punto en el plano $XY \cong \mathbb{C}$ con un punto en \mathcal{S}^2 . Sean $\widehat{P} = (X, Y, Z) \in \mathcal{S}^2 - \{N\}$ y

$$\Pi_N : \mathcal{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$$

tales que $\Pi_N(\widehat{P}) = P$, donde $P = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$.

Visto geoméricamente, P es la intersección del rayo $\overrightarrow{N\widehat{P}}$ con el plano complejo, véase figura 4.15. Sea P' la proyección perpendicular del punto \widehat{P} sobre el plano XY ,

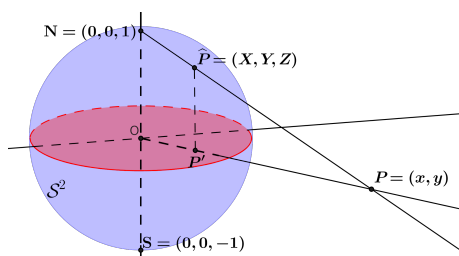


Figura 4.15

entonces $P' = (X, Y) = X + iY$. Sea Σ el plano determinado por el eje Z y el punto \widehat{P} . En Σ están N, O, P, P' y \widehat{P} , véase la Figura 4.16. Así se tiene $\triangle NZ\widehat{P} \sim \triangle NOP$ y

$$\frac{|P|}{|P'|} = \frac{1}{1-Z}. \quad (*)$$

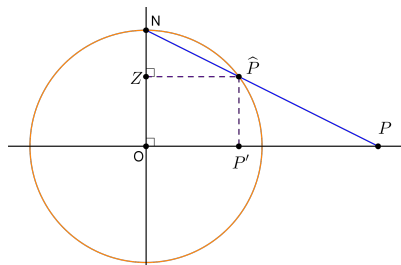


Figura 4.16

Por otro lado los vectores unitarios $\frac{P}{|P|}$ y $\frac{P'}{|P'|}$ son iguales, entonces

$$P = \frac{|P|}{|P'|} P' = \frac{1}{1-Z} P' \quad \text{por } (*)$$

así que

$$P = \frac{P'}{1-Z} \quad (**)$$

sustituyendo \widehat{P} y P , tenemos

$$(x, y) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right) \quad (***)$$

por lo tanto

$$\Pi_{\mathbb{N}}(X, Y, Z) = \left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right),$$

con $Z < 1$ ya que $(X, Y, Z) \neq \mathbb{N}$ y $\Pi_{\mathbb{N}}(\mathbb{S}) = (0, 0)$.

Ahora veamos la inversa. Como $P' = (X, Y)$, entonces $|P'|^2 = X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$, porque $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Por (***) tenemos:

$$\begin{aligned} |P|^2 &= \frac{|P'|^2}{|1-Z|^2} = \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} \\ &= \frac{(1-Z)(1+Z)}{(1-Z)^2} \\ |P|^2 &= \frac{1+Z}{1-Z}. \end{aligned}$$

Despejando Z se tiene:

$$\begin{aligned} (1-Z)|P|^2 &= 1+Z \\ |P|^2 - |P|^2 Z &= 1+Z \\ |P|^2 - 1 &= Z(|P|^2 + 1) \\ Z &= \frac{|P|^2 - 1}{|P|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 1-Z &= 1 - \frac{|P|^2 - 1}{|P|^2 + 1} \\ &= \frac{|P|^2 + 1 - |P|^2 + 1}{|P|^2 + 1} \\ &= \frac{2}{|P|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Entonces, por (***)

$$(X, Y) = (1-Z)(x, y) = \left(\frac{2x}{|P|^2 + 1}, \frac{2y}{|P|^2 + 1} \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Pi_N^{-1}(x, y) &= \left(\frac{2x}{|P|^2 + 1}, \frac{2y}{|P|^2 + 1}, \frac{|P|^2 - 1}{|P|^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

$$\text{y } \Pi_N^{-1}(0, 0) = (0, 0, -1) = S.$$

Construyamos el isomorfismo entre \mathcal{M}_K y \mathcal{M}_{P_1} , tenemos:

$\mathcal{S}^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$, $\mathcal{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y $\Pi_K = \Pi_1$ es el interior de \mathcal{S}^1 , o sea $\Pi_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

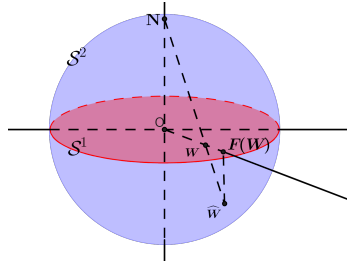


Figura 4.17

Sea $F : \Pi_1 \rightarrow \Pi_K$ tal que si $W = (x, y) \in \Pi_1$, entonces $\Pi_N^{-1}(x, y) = \widehat{W} \in \mathcal{S}^2$, luego proyectaremos verticalmente el punto \widehat{W} sobre el plano XY y eso nos origina otro punto, $F(W)$ en el interior de \mathcal{S}^1 , véase Figura 4.17. Explícitamente, como

$$\Pi_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + |W|^2}, \frac{2y}{1 + |W|^2}, \frac{|W|^2 - 1}{|W|^2 + 1} \right)$$

por lo tanto

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + |W|^2}, \frac{2y}{1 + |W|^2} \right),$$

es decir

$$F(W) = \frac{2W}{1 + |W|^2}.$$

Observar que $F(W)$, W y O son colineales (es más $F(W)$ está en el rayo \overrightarrow{OW}) y además $F(O) = O$, véase Figura 4.18. De hecho, se cumple lo siguiente: Si l es una P_1 -recta que incide con W y con puntos ideales P y Q , entonces $F(W)$ está

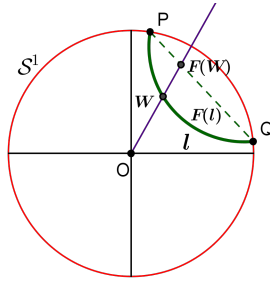


Figura 4.18

en la K -recta $P)(Q$, es decir, F manda la P_1 -recta en la K -recta $P)(Q$. ¡Es una colineación! y, por lo tanto, es un isomorfismo de modelos. Para esto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1. F es colineación.

Demostración.

Supongamos que $A, B, D \in \Pi_1$ y son P_1 -colineales. Sin pérdida de generalidad A, B y D son puntos distintos, si dos de ellos coinciden sus imágenes también coincidirán y $\{F(A), F(B), F(D)\}$ sería un conjunto de a lo más dos puntos que, por Axioma I2, serían colineales. Sea $l = \overleftrightarrow{AB}$ y supongamos que DI_1l .

- (a) Si l es del primer tipo, entonces l pasa por O . Notar que O, A y $F(A)$ son \mathcal{E} -colineales, $O, B, F(B)$ son \mathcal{E} -colineales y $O, D, F(D)$ son \mathcal{E} -colineales. Por hipótesis O, A y B son \mathcal{E}_1 -colineales, así que $O, F(A), F(B)$ y $F(D)$ son \mathcal{E} -colineales. Por lo tanto $F(A), F(B)$ y $F(D)$ están en l , es decir, $F(A), F(B)$ y $F(D)$ son P_1 -colineales.
- (b) Si l es del segundo tipo, existe una \mathcal{E} -circunferencia δ ortogonal a \mathcal{S}^1 y tal que $\delta \cap \text{int } \mathcal{S}^1 = l$. Sean C el centro de δ y P y Q los puntos de intersección de δ y \mathcal{S}^1 . Entonces P y Q están en la intersección de \mathcal{S}^1 con la circunferencia que tiene a \overline{OC} como diámetro, véase Figura 4.19. Si $C = (C_1, C_2)$, la ecuación de tal circunferencia se escribe como:

$$\left(x - \frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{C_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{2}\right)^2$$

Esto es,

$$x^2 - C_1x + \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + y^2 - C_2y + \left(\frac{C_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{2}\right)^2;$$

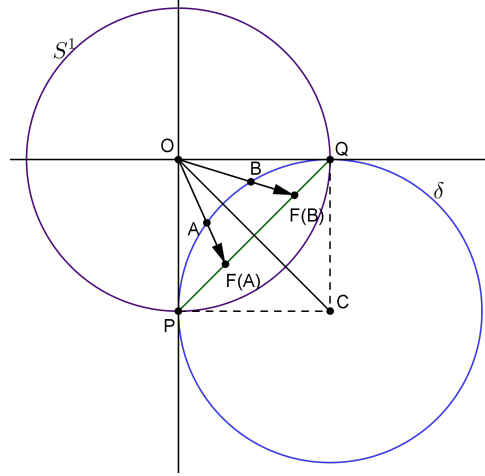


Figura 4.20

Pero la ecuación \overleftrightarrow{PQ} era $C_1x + C_2y = 1$, así que

$$C_1 \left(\frac{a_1}{C_1a_1 + C_2a_2} \right) + C_2 \left(\frac{a_2}{C_1a_1 + C_2a_2} \right) = \frac{C_1a_1 + C_2a_2}{C_1a_1 + C_2a_2} = 1.$$

Por lo tanto $F(A)$ satisface la ecuación de \overleftrightarrow{PQ} , lo cual implica que $F(A) \in \overleftrightarrow{OA} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, véase Figura 4.20. En particular $F(A) \in \overleftrightarrow{PQ}$. Con esto se tiene $F(A) \in P)(Q$ y D, A, B son P_1 colineales entonces:

$$\begin{aligned} D\mathcal{I}_1\overleftrightarrow{AB} &\Rightarrow D \in \delta \cap \text{int } \mathcal{S}^1 \\ &\Rightarrow F(D) \in P)(Q = \overleftrightarrow{F(A)F(B)}. \end{aligned}$$

De hecho esto caracteriza la función F . □

Ahora definamos la relación de orden en $M_{P_1} = (\Pi_1, \Lambda_1, I_1)$.

Definición 4.10. Si A, B y C tres puntos en Π_1 , entonces $A *_1 B *_1 C \Leftrightarrow F(A) *_K F(B) *_K F(C)$, donde $F : \Pi_1 \rightarrow \Pi_K$ es el isomorfismo de modelos de GIP entre M_{P_1} y M_K .

Veamos que $\Pi_1, \Lambda_1, I_1, *_1$ es un modelo de GIPO.

O1)

$$\begin{aligned}
A *_1 B *_1 C &\Leftrightarrow F(A) *_K F(B) *_K F(C) \\
&\Leftrightarrow F(A), F(B) \text{ y } F(C) \text{ son } K\text{-colineales, distintos y} \\
&\quad F(C) *_K F(B) *_K F(A) \\
&\Leftrightarrow A, B \text{ y } C \text{ } P_1\text{-colineales, distintos y} \\
&\quad C *_1 B *_1 A.
\end{aligned}$$

O2) Supongamos que $A \neq B$ son P_1 -puntos, por lo tanto

$$\begin{aligned}
F(A) \neq F(B) &\Rightarrow \text{Existen } C, D, E \in \Pi_K : C *_K F(A) *_K F(B) \\
&\quad \wedge F(A) *_K D *_K F(B) \wedge F(A) *_K F(B) *_K E \\
&\Rightarrow F^{-1}(C), F^{-1}(D), F^{-1}(E) \in \Pi_1 \wedge F^{-1}(C) *_1 A *_1 B \\
&\quad \wedge A *_1 F^{-1}(D) *_1 F(B) \wedge A *_1 B *_1 F^{-1}(E).
\end{aligned}$$

O3) Supongamos que A, B y $C \in \Pi_1$, son P_1 -colineales y distintos.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(A), F(B) \text{ y } F(C) \in \Pi_K, \text{ son } K_1\text{-colineales y distintos} \\
&\Rightarrow F(A) *_K F(B) *_K F(C) \vee F(B) *_K F(A) *_K F(C) \vee F(A) *_K F(C) *_K F(B) \\
&\Rightarrow A *_1 B *_1 C \vee B *_1 A *_1 C \vee A *_1 C *_1 B.
\end{aligned}$$

Observación 4.3. A la proposición “ P no P_1 -incide con l ” lo denotaremos $A \not\mathcal{I}_1 l$, de igual manera para “ Q no K -incide con l ” lo denotamos $A \not\mathcal{I}_K l$.

O4) Sean $l \in \Lambda_1$ y $A, B, C \in \Pi_1$ tales que $A \not\mathcal{I}_1 l, B \not\mathcal{I}_1 l, C \not\mathcal{I}_1 l$, entonces $F(l) \in \Lambda_K$ y $F(A), F(B), F(C) \in \Pi_K$ son tales que $F(A) \not\mathcal{I}_K F(l), F(B) \not\mathcal{I}_K F(l)$ y $F(C) \not\mathcal{I}_K F(l)$. Por demostrar:

- (a) A y B están del mismo lado de l , B y C están del mismo lado de l , entonces A y C están del mismo lado de l .
- (b) A y B están de lados opuestos de l , B y C están de lados opuestos de l , entonces A y C están del mismo lado de l .

Para este axioma, necesitamos las siguientes observaciones:

Observación 4.4. Sean $(AB)_1 = \{P \in \Pi_1 : A *_1 P *_1 B\} \cup \{A, B\}$ y $(CD)_K = \{Q \in \Pi_K : D *_K Q *_K C\} \cup \{C, D\}$. Entonces $R \in (AB)_1$ si, y sólo si $F(R) \in ((F(A)F(B))_K$ y $F((AB)_1) = (F(A)F(B))_K$.

Observación 4.5. *Dados $l \in \Lambda_1$, $A, B \in \Pi_1 - \{l\}$. A y B están del mismo lado de l si, y sólo si no existen P_1 -puntos en $(AB)_1$ que P_1 -incidan con l si, y sólo si no existen K -puntos en $(F(A)F(B))_K$ que K -incidan con $F(l)$ si, y sólo si $F(A)$ y $F(B)$ están del mismo lado de $F(l)$ en M_K .*

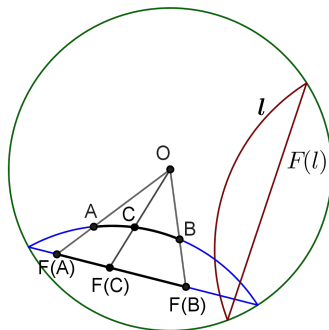


Figura 4.21

Regrasando a O4:

- (a) $F(A)$ y $F(B)$ están del mismo lado de $F(l)$ y $F(B)$, $F(C)$ están del mismo lado de $F(l)$. Así que $F(A)$ y $F(C)$ están del mismo lado de $F(l)$, por lo tanto A y C están del mismo lado de l , véase Figura 4.21.
- (b) Si $F(A)$ y $F(B)$ están en lados opuestos de $F(l)$, es decir, hay un punto en $(F(A)F(B))_K$ que K -incide con $F(l)$. $F(B)$ y $F(C)$ están de lados opuestos de l , lo que implica $F(A)$ y $F(C)$ están del mismo lado de $F(l)$. Por lo tanto A y C están del mismo lado de l .

Hemos visto que $M_{P_1} = (\Pi_1, \Lambda_1, \mathcal{I}_1, *_1)$ es un modelo de GIPO, por la manera en que definimos $*_1$, es claro que $F : \Pi_1 \rightarrow \Pi_K$ es ahora un isomorfismo de modelos de GIPO.

4.4. Definición de ángulo en M_{P_1}

Definición 4.11. *Sea $\sphericalangle ABC$ un P_1 -ángulo. La P_1 -medida en grados de $\sphericalangle ABC$ es la medida en grados del ángulo euclidiano formado por los rayos euclidianos que emanan de B y que son tangentes en B euclidianamente con la misma dirección que los P_1 -rayos \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} , véase Figura 4.22. A la medida en grados del P_1 -ángulo se le denotará por $(\sphericalangle ABC)_1^\circ$.*

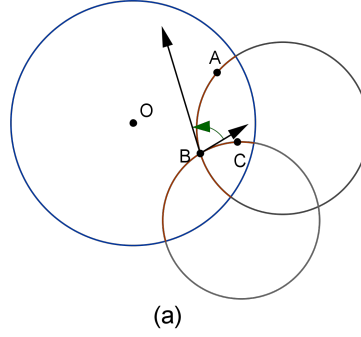


Figura 4.22

Definición 4.12. Si $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle DEF$ son P_1 -ángulos, entonces $\sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle DEF$ si, y sólo si $(\sphericalangle ABC)_1^\circ = (\sphericalangle DEF)_1^\circ$.

Proposición 4.2. La congruencia de P_1 -ángulos (\cong_1) es una relación de equivalencia.

Demostración.

- (a) $\sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle ABC \Leftrightarrow (\sphericalangle ABC)_1^\circ = (\sphericalangle ABC)_1^\circ$ y esta afirmación es, evidentemente, verdadera.
- (b) $\sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle DEF \Rightarrow (\sphericalangle ABC)_1^\circ = (\sphericalangle DEF)_1^\circ$
 $\Rightarrow (\sphericalangle DEF)_1^\circ = (\sphericalangle ABC)_1^\circ$
 $\Rightarrow \sphericalangle DEF \cong_1 \sphericalangle ABC$.
- (c) $\sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle DEF \wedge \sphericalangle DEF \cong_1 \sphericalangle GHI \Rightarrow (\sphericalangle ABC)_1^\circ = (\sphericalangle DEF)_1^\circ$
 $\wedge (\sphericalangle DEF)_1^\circ = (\sphericalangle GHI)_1^\circ$
 $\Rightarrow (\sphericalangle ABC)_1^\circ = (\sphericalangle GHI)_1^\circ$
 $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle GHI$.

□

Ahora presentaremos una construcción auxiliar.

Dados una circunferencia γ una cuerda euclidiana l de γ . Construir una circunferencia ortogonal a γ y tangente a l en un punto dado $P \in l$.

Solución:

Sean P' el inverso de P respecto a γ y m la mediatriz de $\overline{PP'}$. Sean $t \perp l$ en P y C la intersección de m y t . Entonces si δ es la circunferencia con centro en C y radio

\overline{CP} , δ es ortogonal a γ (porque pasa por P y P') y es tangente a l en P (por tener su centro en t), véase Figura 4.23. Si l es el diámetro de γ , entonces δ es igual a m .

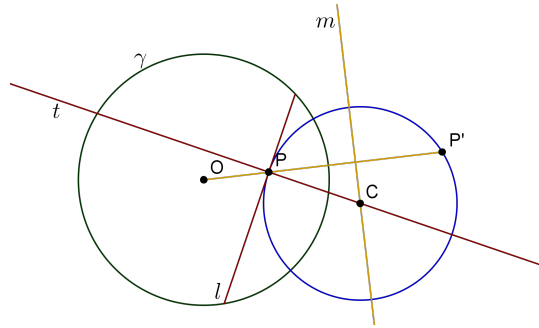


Figura 4.23

Estamos listos de para demostrar **C4)** en M_{P_1} . Recordar el Axioma C4 de GNP: Dado cualquier ángulo $\sphericalangle BAC$ y dado cualquier rayo $\overrightarrow{A'B'}$, entonces hay un único rayo $\overrightarrow{A'C'}$ sobre un lado de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$.

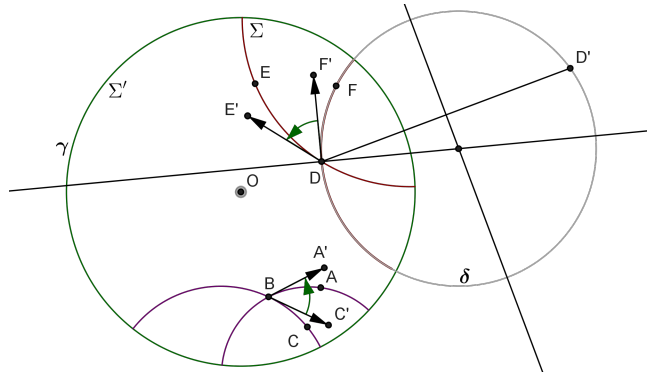


Figura 4.24

Demostración.

Sean $\sphericalangle ABC$ un P_1 -ángulo, \overrightarrow{DE} un P_1 -rayo y $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{BC'}$ y $\overrightarrow{DE'}$ los rayos euclidianos tangentes a los P_1 -rayos \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{DE} en la misma dirección que estos P_1 -rayos, respectivamente. Así Σ' es el P_1 -semiplano determinado por la P_1 -recta \overleftrightarrow{DE} y el punto E' y Σ el otro plano determinado por la P_1 -recta \overleftrightarrow{DE} y que no este E' . Entonces dados el \mathcal{E} -ángulo $\sphericalangle A'BC'$ y el \mathcal{E} -rayo $\overrightarrow{DE'}$ en Σ' , por C4 aplicado en \mathcal{E} existe un único

\mathcal{E} -rayo $\overrightarrow{DF'}$ tal que $\sphericalangle F'DE' \cong_{\mathcal{E}} \sphericalangle A'BC'$. Por la construcción auxiliar, existe δ una circunferencia ortogonal a γ y que es tangente a la \mathcal{E} -recta $\overleftrightarrow{DF'}$ en D , véase Figura 4.24. Escogemos el P_1 -rayo $\overrightarrow{DF'}$ contenido en δ en la misma dirección que $\overrightarrow{DF'}$ (o sea el contenido en Σ), entonces $(\sphericalangle EDF)_1^{\circ} = (\sphericalangle F'DE')_{\mathcal{E}}^{\circ} = (\sphericalangle A'BC')_{\mathcal{E}}^{\circ} = (\sphericalangle ABC)_1^{\circ}$, por lo tanto $\sphericalangle EDF \cong_1 \sphericalangle ABC$. □

4.5. Definición de ángulo en M_K

Definición 4.13. (a) La medida en grados de K -ángulo $\sphericalangle ABC$ es la medida en grados del P_1 -ángulo $\sphericalangle F^{-1}(A)F^{-1}(B)F^{-1}(C)$ donde $F : \Pi_1 \rightarrow \Pi_K$ es el isomorfismo de GIPO entre M_{P_1} y M_K , véase Figura 4.25. Al K -ángulo $\sphericalangle ABC$ se denotará como $(\sphericalangle ABC)_K^{\circ}$.

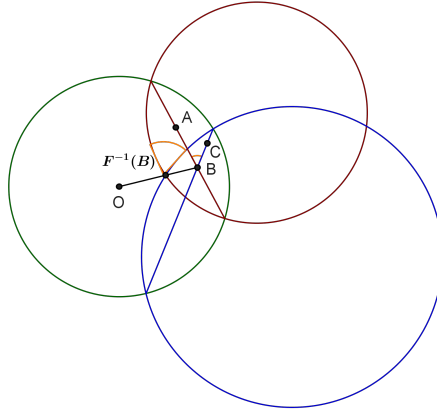


Figura 4.25

(b) Los K -ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle A'B'C'$ son K -congruentes si $(\sphericalangle ABC)_K^{\circ} = (\sphericalangle A'B'C')_K^{\circ}$.

Con esta definición es claro que M_K cumple los axiomas **C4** y **C5**. Recordemos que si \mathcal{C} es una circunferencia euclidiana y si P y Q son dos puntos de ellas, entonces el polo de la \mathcal{E} -cuerda PQ , respecto a \mathcal{C} , es la intersección de las tangentes a \mathcal{C} en los puntos P y Q . Lo denotaremos por $P(PQ, \mathcal{C})$.

Proposición 4.3. Si γ una \mathcal{E} -circunferencia, $P, Q \in \gamma$ y $D = P(PQ, \gamma)$. Entonces la circunferencia δ , con centro en D y radio \overline{DP} , es ortogonal a γ , véase Figura 4.26.

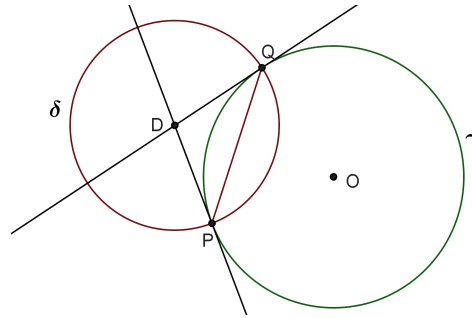


Figura 4.26

Regresemos al modelo M_K .

Proposición 4.4. Sean $l = P)(Q$ y $l' = P')(Q'$ dos K -rectas. l y l' son K -perpendiculares si, y sólo si la \mathcal{E} -recta $\overleftrightarrow{P'Q'}$ pasa por $D = P(PQ, \gamma)$.

Demostración.

Supongamos que $\overleftrightarrow{P'Q'}$ pasa por D . Sea B el K -punto de la intersección de l' y l , δ la \mathcal{E} -circunferencia ortogonal a γ y con centro D y ϵ la \mathcal{E} -circunferencia ortogonal a γ con centro $D' = P(P'Q', \gamma)$ y radio $\overline{D'P'}$. Entonces $F^{-1}(l) = \delta \cap \text{int } \gamma$ y $F^{-1}(l') = \epsilon \cap \text{int } \gamma$. Demostraremos que: $F^{-1}(l)$ y $F^{-1}(l')$ son P_1 -perpendiculares, es decir, que δ y ϵ son ortogonales. δ es ortogonal a γ y $\overline{DQ'}$ corta a γ en los puntos Q' y P' , por lo tanto $\mathcal{S}_\delta(Q') = P'$. Como ϵ pasa por estos dos puntos inversos respecto a δ , ϵ es ortogonal a δ , véase Figura 4.27.

Ahora, supongamos que l y l' son K -perpendiculares, entonces $F^{-1}(l)$ y $F^{-1}(l')$ son P_1 -perpendiculares, en particular δ y ϵ son ortogonales. Por lo tanto \overline{PQ} pasa por el polo de $\overleftrightarrow{P'Q'}$. Así, ϵ y γ son ortogonales a δ y por ende se intersectan en puntos inversos respecto a δ , es decir, $\mathcal{S}_\delta(P') = Q'$. Por lo tanto Q' está $\overline{DP'}$ y con ello $\overleftrightarrow{P'Q'}$ pasa por D . Análogamente, \overleftrightarrow{PQ} , pasa por D' , véase Figura 4.27. □

Lema 4.2. Dados una circunferencia γ en \mathcal{E} con centro en O y un punto Q en el interior de γ , distinto de O . Existe una circunferencia σ ortogonal a γ tal que $\mathcal{S}_\sigma(Q) = O$.

Demostración.

Sea $Q' = \mathcal{S}_\gamma(Q)$. Desde Q' trazamos una tangente a γ que la tocará en un punto T . Sea σ la circunferencia con centro en Q' y radio $\overline{Q'T}$, véase Figura 4.28. Entonces

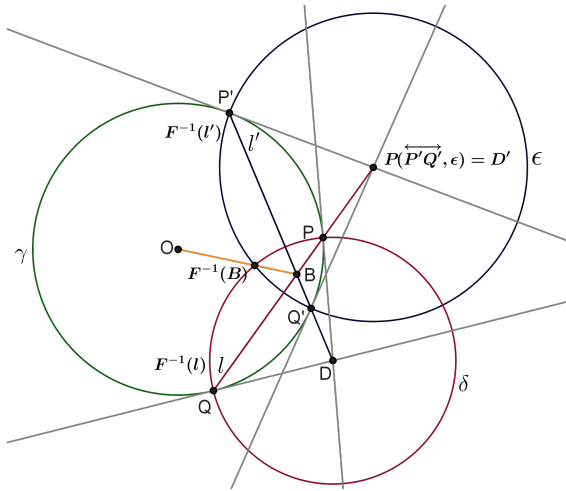


Figura 4.27

σ es ortogonal a γ y $\mathcal{I}_\sigma(Q') = \infty$, es decir, Q' e ∞ son simétricos respecto a σ . Por el principio de simetría, $\mathcal{I}_\gamma(Q')$ e $\mathcal{I}_\gamma(\infty)$ son simétricos respecto a γ . Es decir, $\mathcal{I}_\gamma(Q) = O$.

□

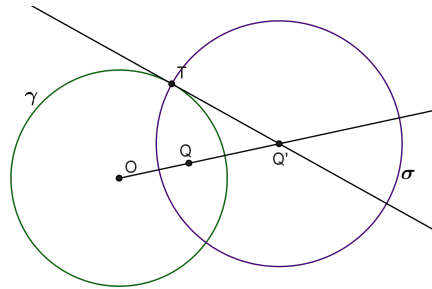


Figura 4.28

4.6. Distancia en M_{P_1}

Definición 4.14. Sea γ una circunferencia en el plano euclidiano \mathcal{E} . Sean A, B puntos distintos en el interior de γ y P, Q los puntos ideales de la P_1 -recta \overleftrightarrow{AB} , véase Figura 4.29. Entonces:

(a) La razón cruzada (AB, PQ) esta dada por:

$$(AB, PQ) = \frac{\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}}{\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}},$$

donde \overline{AP} , \overline{PB} , \overline{AQ} y \overline{QB} son las longitudes euclidianas de los \mathcal{E} -segmentos AP , PB , AQ y QB , respectivamente.

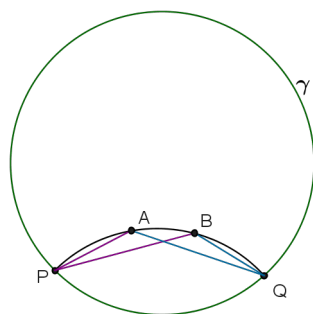


Figura 4.29

(b) La longitud del P_1 -segmento AB en el modelo de M_{P_1} es $d_1(AB) = | \log(AB, PQ) |$, donde:

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

es la función logaritmo natural usual.

Observación 4.6. Como \overline{AP} , \overline{PB} , \overline{AQ} y \overline{QB} son reales positivos, $(AB, PQ) > 0$ y se puede aplicar el logaritmo natural.

Observación 4.7. $d_1(AB)$ no depende del orden en que se tomen P y Q .
En efecto:

$$\begin{aligned} (AB, PQ) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}} \\ (AB, QP) &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} \\ &= \frac{1}{(AB, PQ)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log(AB, QP) &= \log \frac{1}{(AB, PQ)} \\ &= \log 1 - \log(AB, PQ) \\ &= -\log(AB, PQ), \end{aligned}$$

así que

$$| \log(AB, QP) | = | \log(AB, PQ) | .$$

Observación 4.8. $d_1(AB) = d_1(BA)$. En efecto:

$$\begin{aligned} (AB, PQ) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}} \\ (BA, PQ) &= \frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{BQ}} \\ &= \frac{1}{(AB, PQ)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\log(BA, PQ) = -\log(AB, PQ),$$

así que

$$d_1(BA) = | \log(BA, PQ) | = | \log(AB, PQ) | = d_1(AB).$$

Observación 4.9. Si $A = B$, entonces $d_1(AB) = 0$.

$$\begin{aligned} A = B &\Rightarrow (AB, PQ) = 1 \\ &\Rightarrow \log(AB, PQ) = 0 \\ &\Rightarrow d_1(AB) = 0 \end{aligned}$$

Observación 4.10. Recíprocamente, $d_1(AB) = 0$, entonces $A = B$.

$$\begin{aligned} d_1(AB) = 0 &\Rightarrow | \log(AB, PQ) | = 0 \\ &\Rightarrow \log(AB, PQ) = 0 \\ &\Rightarrow (AB, PQ) = 1. \end{aligned}$$

Falta demostrar que $A = B$. Supongamos que $A \neq B$ y sean P y Q los puntos ideales de $\overrightarrow{(AB)}_1$; si está P más cerca de A que de B . Entonces

$$\overline{AP} < \overline{PB} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 1 \quad (1)$$

$$\overline{AQ} > \overline{BQ} \Rightarrow \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} > 1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}} < 1,$$

lo que implica que $(AB, PQ) < 1$, que es una contradicción, por lo tanto $A = B$.

Definición 4.15. Sean AB y CD dos P_1 -segmentos. Diremos que AB y CD son P_1 -congruentes si $d_1(AB) = d_1(CD)$. La proposición AB y CD son P_1 -congruentes se denotará $AB \cong_1 CD$.

Lema 4.3. Si $A *_1 C *_1 B$, entonces $d_1(AB) = d_1(AC) + d_1(CB)$.

Demostración.

Si $A *_1 C *_1 B$, así que A , C y B son P_1 -colineales y distintos. Sean P y Q los puntos ideales de $\overrightarrow{(AB)}_1$, donde P está más cerca de B que de A , véase Figura 4.30. Entonces:

$$\begin{aligned} (AC, PQ) &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} > 1 \Rightarrow \log(AC, PQ) > 0 \\ &\Rightarrow d_1(AC) = \log(AC, PQ). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (CB, PQ) &= \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} > 1 \Rightarrow \log(CB, PQ) > 0 \\ &\Rightarrow d_1(CB) = \log(CB, PQ). \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} d_1(AC) + d_1(CB) &= \log(AC, PQ) + \log(CB, PQ) \\ &= \log(AC, PQ)(CB, PQ) \\ &= \log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}}\right) \\ &= \log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}}\right) \\ &= d_1(AB). \end{aligned}$$

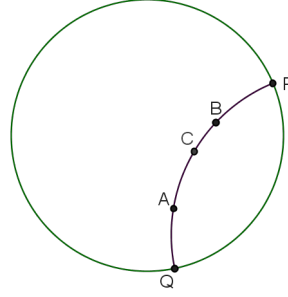


Figura 4.30

□

Vamos a comprobar que está relación de congruencia de segmento en M_{P_1} cumple **C2** y **C3**.

C2) \cong_1 es relación de equivalencia.

(a) Para todo P_1 -segmento AB se cumple que $AB \cong_1 AB$.

En efecto, ya que $d_1(AB) = d_1(AB)$.

(b) $AB \cong_1 CD$, entonces $CD \cong_1 AB$.

Tenemos que $d_1(AB) = d_1(CD)$, lo que es igual a $d_1(CD) = d_1(AB)$.

(c) $AB \cong_1 CD$ y $CD \cong_1 EF$, entonces $AB \cong_1 EF$.

Se cumple que $d_1(AB) = d_1(CD)$ y $d_1(CD) = d_1(EF)$, así que $d_1(AB) = d_1(EF)$.

C3) Si $A *_1 B *_1 C$, $A' *_1 B' *_1 C'$, $AB \cong_1 A'B'$ y $BC \cong_1 B'C'$, entonces $AC \cong_1 A'C'$.

Por el Lema 4.3, si $A *_1 B *_1 C$ se cumple $d_1(AC) = d_1(AB) + d_1(BC)$ y si $A' *_1 B' *_1 C'$, así que $d_1(A'C') = d_1(A'B') + d_1(B'C')$, donde $d_1(AB) = d_1(A'B')$ y $d_1(BC) = d_1(B'C')$. Por lo tanto $d_1(AC) = d_1(A'C')$, es decir, $AC \cong_1 A'C'$.

Seguimos suponiendo que \mathcal{E} es un plano euclidiano, γ es una circunferencia en \mathcal{E} , con radio r y centro O y $\Pi_1 = \text{int } \gamma$.

Lema 4.4. Si $B \in \Pi_1$ y $d = d_1(OB)$, entonces $\overline{OB} = r \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$ y $e^d = \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}}$, donde \overline{OB} es la longitud euclidiana del \mathcal{E} -segmento OB .

Demostración.

Sea l la P_1 -recta \overleftrightarrow{OB} la cual es del primer tipo. Sean P y Q los puntos ideales de l tales que $Q *_\mathcal{E} O *_\mathcal{E} B *_\mathcal{E} P$, véase Figura 4.31. Entonces $d = |\log(OB, PQ)|$. Pero

$$(OB, PQ) = \frac{\overline{OP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{OQ}}, \text{ donde } \frac{\overline{OP}}{\overline{PB}} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{QB}}{\overline{OQ}} > 1.$$

Por lo que $(OB, PQ) > 1$, luego $\log(OB, PQ) > 0$, así que $\log(OB, PQ) = d$. Por lo

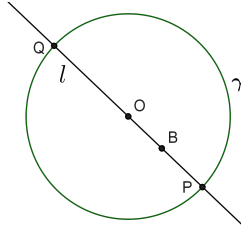


Figura 4.31

tanto $e^d = (OB, PQ) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{r}{r} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}}$. Entonces:

$$\begin{aligned} e^d(r - \overline{OB}) &= r + \overline{OB} \\ e^d r - e^d \overline{OB} &= r + \overline{OB} \\ r(e^d - 1) &= \overline{OB}(1 + e^d) \\ \overline{OB} &= r \frac{e^d - 1}{e^d + 1}. \end{aligned}$$

□

Corolario 4.1. Si $l \in \Lambda_1$, $P \not\in l$, Q es el pie de la P_1 -perpendicular bajada de P a l , α es la medida en radianes del ángulo de paralelismo en M_{P_1} de (P, l) y $d = d_1(PQ)$, entonces $e^{-d} = \tan(\frac{\alpha}{2})$.

Demostración.

- (a) Suponemos que l es una recta del primer tipo y que $Q = O$. Sea Σ uno de los puntos ideales de l , entonces el \mathcal{E} -triángulo $\triangle PO\Sigma$ es un triángulo rectángulo. El P_1 -rayo \overleftrightarrow{PA} es la intersección con $\text{int } \gamma$ y de la \mathcal{E} -cicunferencia δ que pasa por P que es tangente a l en Σ . Sea R el punto de intersección de l con la

\mathcal{E} -tangente a δ en P , luego el \mathcal{E} -triángulo $\triangle RP\Sigma$ es isósceles (pues $\overline{R\Sigma}$ y \overline{RP} son las longitudes de los segmentos de las tangentes trazadas de R a δ) y los \mathcal{E} -ángulos $\sphericalangle R\Sigma P$ y $\sphericalangle RP\Sigma$ son congruentes, véase Figura 4.32. Sea β la medida en grados de cualquiera de estos dos ángulos. Entonces $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, porque el \mathcal{E} -triángulo $\triangle OPR$ triángulo rectángulo y $\sphericalangle PRO$ es un ángulo exterior de $\triangle PR\Sigma$, por lo tanto $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

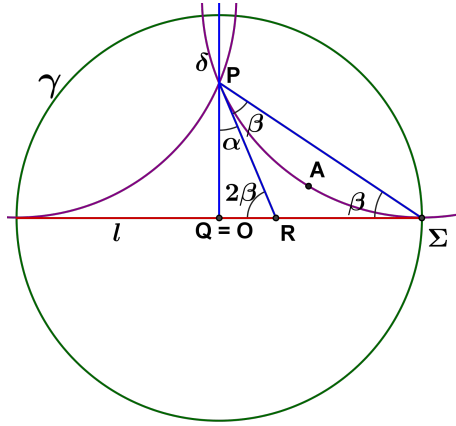


Figura 4.32

Aplicando el Lema 4.4:

$$\begin{aligned}
 e^d &= \frac{r + \overline{OP}}{r - \overline{OP}} \\
 &= \frac{1 + \frac{\overline{OP}}{r}}{1 - \frac{\overline{OP}}{r}} \\
 &= \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} \\
 &= \frac{1 + \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} z \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Por (*) se tiene que

$$\begin{aligned} e^d &= \frac{1 + \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{2}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $e^{-d} = \tan \frac{\alpha}{2}$.

(b) Ahora supongamos que l es una recta del segundo tipo.

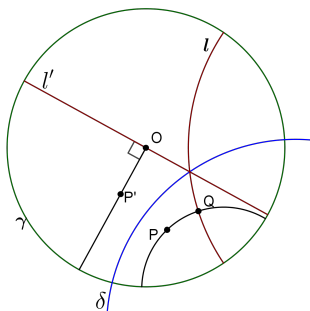


Figura 4.33

Como ya vimos en Lema 4.2, existe una circunferencia δ , ortogonal a γ , tal que $\mathcal{I}_\delta(Q) = O$ y también $\mathcal{I}_\delta(l) = l'$, $\mathcal{I}_\delta(P) = P'$ que están en la situación

del caso (a), véase Figura 4.33. Como la medida en grados (o radianes) de los ángulos es invariante bajo la inversión en circunferencias, si α' es la medida en radianes del ángulo de paralelismo de (P', l') , entonces $\alpha = \alpha'$. Así tendríamos:

$$e^{-d'} = \tan \frac{\alpha'}{2}.$$

Para ver que $-d' = -d$, bastará con aplicar el siguiente Lema:

Lema 4.5. Sean A y B P_1 -puntos, l una P_1 -recta que pasa por A y B , P y Q los puntos ideales de l . Si A' , B' , P' y Q' los inversos de A , B , P y Q respectivamente, respecto de una circunferencia δ ortogonal a γ . Entonces $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$, véase Figura 4.34.

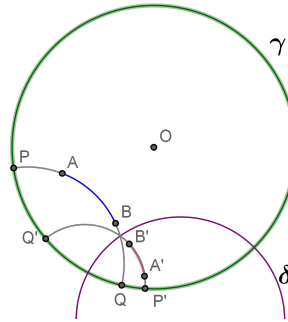


Figura 4.34

Demostración.

La razón cruzada $(AB, PQ) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}$ y la razón cruzada de $(A'B', P'Q') = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{P'B'}} \cdot \frac{\overline{Q'B'}}{\overline{A'Q'}}$. Como $\triangle DAQ \sim \triangle DQ'A'$, véase Figura 4.35, se tiene $\frac{\overline{DA}}{\overline{DQ'}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{A'Q'}}$, entonces $\overline{AQ} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DQ'}} \cdot \overline{A'Q'}$. Análogamente $\overline{AP} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DP'}} \cdot \overline{A'P'}$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} &= \frac{\frac{\overline{DA}}{\overline{DP'}} \cdot \overline{A'P'}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{DQ'}} \cdot \overline{A'Q'}} \\ &= \frac{\overline{DQ'}}{\overline{DP'}} \cdot \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}}. \end{aligned}$$

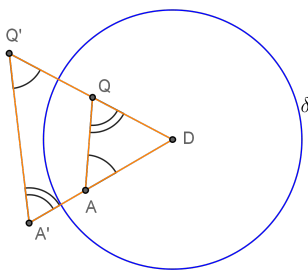


Figura 4.35

Lo mismo para $\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{DP'}}{\overline{DQ'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{B'P'}}$. Por lo tanto:

$$(AB, PQ) = \frac{\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}}{\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}} = \frac{\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}}}{\frac{\overline{B'P'}}{\overline{B'Q'}}} = (A'B', P'Q').$$

□

Corolario 4.2. La P_1 -longitud es invariante bajo la inversión respecto a circunferencias ortogonales a γ , es decir, si A y B son cualquiera P_1 -puntos, δ es una circunferencia ortogonal a γ , y $A' := \mathcal{I}_\delta(A)$ y $B' := \mathcal{I}_\delta(B)$, entonces $d_1(AB) = d_1(A'B')$.

Demostración.

Por Lema 4.5 $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$, entonces $|\log(AB, PQ)| = |\log(A'B', P'Q')|$, por lo tanto $d_1(AB) = d_1(A'B')$.

□

Lema 4.6. Sea δ una circunferencia ortogonal a γ . Entonces:

- (a) $\mathcal{I}_\delta(\gamma) = \gamma$.
- (b) $\mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma) = \text{int } \gamma$.
- (c) \mathcal{I}_δ conserva la P_1 -incidencia, el P_1 -orden y la P_1 -congruencia.

Demostración.

Sea D el centro de δ y s el radio de δ .

- (a) Se cumple por ser δ ortogonal a γ .

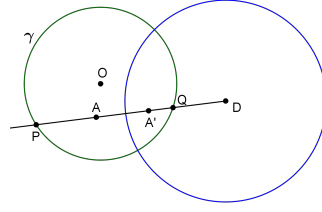


Figura 4.36

- (b) Sean $A \in \text{int } \gamma$, $A' = \mathcal{I}_\delta(A)$. Sean P y Q puntos de intersección de \overrightarrow{DA} con γ de tal forma que $P *_{\mathcal{E}} A *_{\mathcal{E}} Q *_{\mathcal{E}} D$, entonces $\overline{DA} \cdot \overline{DA'} = s^2 = \overline{DP} \cdot \overline{DQ}$ (esta última por ser δ y γ ortogonales), véase Figura 4.36.

$$\begin{aligned}
 \text{Se tiene: } \overline{DQ} < \overline{DA} < \overline{DP} &\Rightarrow \frac{1}{\overline{DQ}} > \frac{1}{\overline{DA}} > \frac{1}{\overline{DP}} \\
 &\Rightarrow \frac{s^2}{\overline{DQ}} > \frac{s^2}{\overline{DA}} > \frac{s^2}{\overline{DP}} \\
 &\Rightarrow \overline{DP} > \overline{DA'} > \overline{DQ} \\
 &\Rightarrow P *_{\mathcal{E}} A' *_{\mathcal{E}} Q *_{\mathcal{E}} D \\
 &\Rightarrow A' \in \text{int } \gamma.
 \end{aligned}$$

Así que $\mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma) \subseteq \text{int } \gamma$. Además $\text{int } \gamma = \mathcal{I}_\delta \circ (\mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma)) \subseteq \mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma)$. Por lo tanto $\mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma) = \text{int } \gamma$.

- (c) Probaremos primero que \mathcal{I}_δ manda P_1 -rectas en P_1 -rectas. Sea l una P_1 -recta, entonces existe una \mathcal{E} -recta m o una \mathcal{E} -circunferencia m tal que $m \cap \text{int } \gamma = l$ y m es ortogonal a γ , así que $\mathcal{I}_\delta(m)$ es o bien una \mathcal{E} -recta ortogonal a $\mathcal{I}_\delta(\gamma) = \gamma$ o bien una \mathcal{E} -circunferencia ortogonal a $\mathcal{I}_\delta(\gamma) = \gamma$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_\delta(l) &= \mathcal{I}_\delta(m \cap \text{int } \gamma) \\
 &= \mathcal{I}_\delta(m) \cap \mathcal{I}_\delta(\text{int } \gamma) \\
 &= \mathcal{I}_\delta(m) \cap \text{int } \gamma \text{ que es una } P_1\text{-recta.}
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que \mathcal{I}_δ conserva la P_1 -incidencia. Por el corolario 3.3, \mathcal{I}_δ conserva la congruencia de ángulos. El corolario 4.2 prueba que \mathcal{I}_δ conserva la P_1 -congruencia de segmentos y, con ello el Lema 4.3, se demuestra que \mathcal{I}_δ conserva el P_1 -orden. \square

Observar que los tres incisos del Lema anterior se cumplen si δ es una recta euclidiana que pasa por O y en vez de \mathcal{S}_δ tomamos la \mathcal{E} -reflexión en la \mathcal{E} -recta $\delta : R_\delta$.

Nos falta demostrar que M_{P_1} satisface los axiomas **C1** y **C6**. Para ello, será útil analizar las propiedades de las reflexiones en P_1 -rectas.

4.7. Reflexiones en M_{P_1}

Observemos que, aunque la definición de reflexión en una recta la hemos hecho en planos neutrales (ver Definición 2.7), en M_{P_1} se tiene relaciones de congruencia de segmentos y de ángulos que nos permiten definir la reflexión en una P_1 -recta y trabajar con las propiedades de esta transformación, que nos ayudará a culminar la prueba de que M_{P_1} es de GIPO en un plano neutral. Como veremos a continuación, la P_1 -reflexión en una P_1 -recta del primer tipo coincide con la reflexión euclidiana en la recta euclidiana \hat{l} que la contiene, pero restringida a $\text{int } \gamma$, mientras que la P_1 -reflexión en una P_1 -recta del segundo tipo es la inversión en la circunferencia euclidiana δ que la contiene, pero restringida a $\text{int } \gamma$. El Lema 4.6, como es de esperarse, será de un inestimable valor en todo esto. Veamos las reflexiones en P_1 -rectas. Sea l una P_1 -recta.

(a) Supongamos que l es una P_1 -recta del primer tipo, entonces l está contenida en una \mathcal{E} -recta \hat{l} que pasa por O . Sea A un P_1 -punto, si $A \in l$, implica $(R_l)_1(A) = A$. Supongamos que A no está en l . Sea $A' = (R_{\hat{l}})_\mathcal{E}(A)$. A' es un P_1 -punto (pues $\text{int } \gamma$ es simétrico respecto a $R_{\hat{l}}$), comprobaremos que $A' = (R_l)_1(A)$. Sea M el punto de intersección de la P_1 -recta $\overleftrightarrow{AA'}$ con l .

1. Si A y A' son colineales con O .

La P_1 -recta $\overleftrightarrow{AA'}$ es del primer tipo, entonces $M = O$ y si $d = d_1(AO)$ y $d' = d_1(A'O)$ pero,

$$e^d = \frac{r + \overline{OA}}{r - \overline{OA}} = \frac{r + \overline{OA'}}{r - \overline{OA'}} = e^{d'}.$$

Así que $d = d'$, por lo tanto tenemos que $d_1(AO) = d_1(A'O)$, además $\overleftrightarrow{(AA')_1}$ yace sobre la recta euclidiana $\overleftrightarrow{AA'}$, que es \mathcal{E} -perpendicular a \hat{l} , porque $A' = (R_{\hat{l}})_\mathcal{E}(A)$ y $\overleftrightarrow{(AA')_1}$ es P_1 -perpendicular a l , véase Figura 4.37. Por otro lado $A *_1 O *_1 A'$, pues en la \mathcal{E} -recta $\overleftrightarrow{AA'}$ se tiene $A *_\mathcal{E} O *_\mathcal{E} A'$. Por lo tanto $(R_l)_1(A) = A'$.

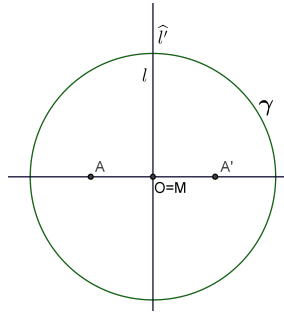


Figura 4.37

2. Supongamos que A y A' no son \mathcal{E} -colineales con O . Entonces la P_1 -recta $\overleftrightarrow{AA'}$ es del segundo tipo (y automáticamente A , A' y O tampoco son P_1 -colineales pues ninguna circunferencia ortogonal a γ pasa por O). Sea δ la circunferencia ortogonal a γ que contiene a $\overleftrightarrow{(AA')_1}$. Como $A, A' \in \delta$ y \hat{l} es mediatriz del \mathcal{E} -segmento AA' , entonces \hat{l} pasa por el centro de δ . En pocas palabras \hat{l} y δ son ortogonales en M y por lo tanto $\overleftrightarrow{(AA')_1}$ es P_1 -perpendicular a l . Sean η la circunferencia ortogonal a γ tal que $\mathcal{I}_\eta(M) = O$ y $\mathcal{I}_\eta(\overleftrightarrow{(AA')_1}) = m$, donde m es una P_1 -recta del primer tipo y $\mathcal{I}_\eta(\hat{l}) = \hat{l}$, pues M y O están en \hat{l} y son simétricos respecto a δ , lo que implica que \hat{l} pasa por $E = \mathcal{I}_\eta(M)$, véase Figura 4.38. Por lo tanto, m es perpendicular a \hat{l} . Sean $\hat{A} = \mathcal{I}_\eta(A)$ y $\hat{A}' = \mathcal{I}_\eta(A')$. En el plano \mathcal{E} :

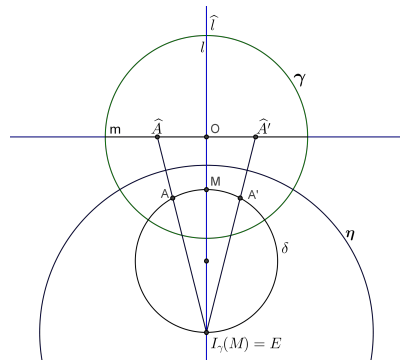


Figura 4.38

$\overline{EA} = \overline{EA'}$, porque E está en \hat{l} que es mediatriz de $\overline{AA'}_{\mathcal{E}}$. Así que $\triangle EAA'$ es isósceles y como \hat{l} es mediatriz de $\overline{AA'}$ (la base), entonces \hat{l} es bisectriz

de $\sphericalangle AEA'$. Por lo tanto \widehat{l} es bisectriz de $\sphericalangle \widehat{A}E\widehat{A}'$. Además, si p es el radio de η se cumple:

$$\overline{E\widehat{A}} = \frac{p^2}{EA} = \frac{p^2}{EA'} = \overline{E\widehat{A}'}$$

Entonces $\triangle \widehat{A}E\widehat{A}'$ es isósceles y por lo tanto l es mediatriz de $\widehat{A}\widehat{A}'$, así que $\overline{O\widehat{A}} = \overline{O\widehat{A}'}$. Si $d = d_1(O\widehat{A})$ y $d' = d_1(O\widehat{A}')$, se tiene

$$e^d = \frac{r + \overline{O\widehat{A}}}{r - \overline{O\widehat{A}'}} = \frac{r + \overline{O\widehat{A}'}}{r - \overline{O\widehat{A}'}} = e^{d'}$$

de lo cual $d = d'$. Como $\mathcal{S}_\eta(O\widehat{A}) = (AM)_1$ y $\mathcal{S}_\eta(\widehat{A}'O) = (A'M)_1$, entonces $d_1((AM)_1) = d_1(\widehat{A}O) = d_1(\widehat{A}'O) = d_1((A'M)_1)$.

Conclusión, la reflexión en P_1 -rectas del primer tipo coinciden con la reflexión euclidiana restringida a $\text{int } \gamma$. Más precisamente: Si l es una P_1 -recta del primer tipo que yace en una recta euclidiana \widehat{l} , entonces $(R_l)_1 = R_{\widehat{l}}$ restringida al $\text{int } \gamma$.

- (b) Supongamos que l es del segundo tipo. Sean λ la circunferencia ortogonal a γ que contiene a l , L el centro de λ y $A' = \mathcal{S}_\lambda(A)$. Comprobaremos que $A' = (R_l)_1(A)$. Sea M la intersección de l con $(AA')_1$ y η la circunferencia ortogonal a γ tal que $\mathcal{S}_\eta(M) = O$; A y A' son simétricos respecto a λ . Por lo tanto $\mathcal{S}_\eta(A) = \widehat{A}$ y $\mathcal{S}_\eta(A') = \widehat{A}'$ son simétricos respecto a $\mathcal{S}_\eta(\lambda) = m$. Sea δ la \mathcal{E} -

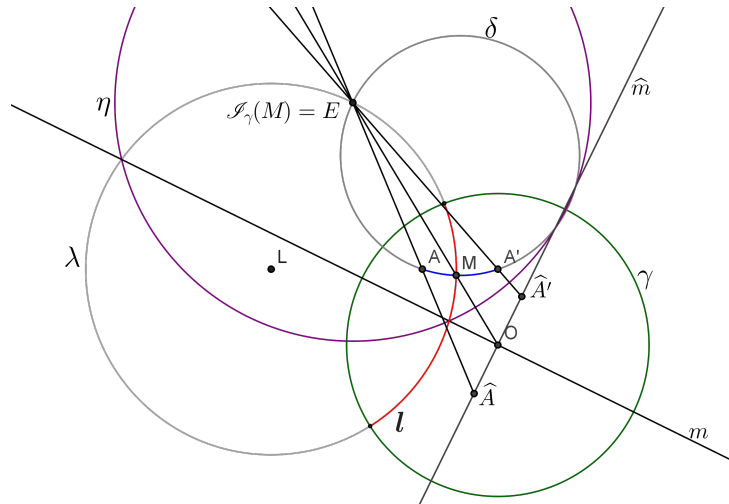


Figura 4.39

$S(\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC'})$ y $R \circ S \circ R((\overrightarrow{AB})_1) = R \circ S((\overrightarrow{OC})_1) = R((\overrightarrow{OC'})_1) = (\overrightarrow{AB'})_1$. Si $A = O$, los P_1 -rayos $(\overrightarrow{AB})_1$ y $(\overrightarrow{AB'})_1$ son del primer tipo y, si S es la reflexión en la P_1 -recta del primer tipo que es la P_1 -bisectriz (y también la \mathcal{E} -bisectriz) del P_1 -ángulo $\sphericalangle BAB'$ (\mathcal{E} -ángulo), entonces $S((\overrightarrow{AB})_1) = (\overrightarrow{AB'})_1$. □

Veamos que se cumple **C1**: Dados un segmento AB y un rayo \overrightarrow{CD} , existe un único $E \in \overrightarrow{CD}$, tal que $CE \cong AB$.

Demostración.

Sea AB un P_1 -segmento y \overrightarrow{CD} un P_1 -rayo. Por (a) del Lema 4.7, existe una composición T de a lo más dos reflexiones en P_1 -rectas, tal que $T(A) = C$. Si $B' := T(B)$, es claro que $T((AB)_1) = (CB')_1$. Por (b) del Lema 4.7, existe una composición S de a lo más tres P_1 -reflexiones en P_1 -rectas, tal que $S((CB')_1) = (\overrightarrow{CD})_1$. Si $E = S(B')$, entonces $S((CB')_1) = (CE)_1$, lo que implica $S \circ T((AB)_1) = (CE)_1$ y, como $S \circ T$ es la composición de un número finito de P_1 -rectas y cada una de ellas conserva la P_1 -longitud de segmentos, así que $d_1(AB) = d_1(CE)$ y, por lo tanto, $AB \cong_1 CE$, véase Figura 4.41. □

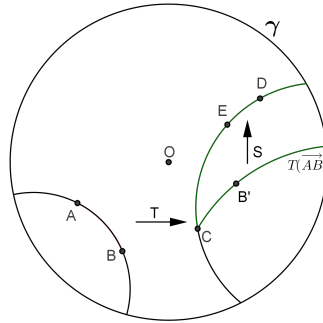


Figura 4.41

4.8. Rotación en M_{P_1}

En el Capítulo 2 definimos la rotación T en un plano neutral, alrededor de un punto A como la composición de dos reflexiones en rectas l y m que inciden en A . Pero en M_{P_1} la P_1 -reflexión en una P_1 -recta del primer tipo coincide con la reflexión

en \mathcal{E} , así pues la P_1 -rotación será la composición de dos P_1 -reflexiones en P_1 -rectas del primer tipo que inciden en el centro de O de la circunferencia γ , restringida al int γ y conserva la P_1 -congruencia, P_1 -incidencia y P_1 -orden. Observemos que también es válida la Proposición 2.11, la cual dice que si l y m no son perpendiculares pero inciden en O y d es la medida en grados del ángulo agudo que forman las rectas, entonces T rotará cada punto distinto de O , en un ángulo con medida $\theta = 2d$, alrededor de O , véase Figura 4.42. Si l y m son perpendiculares, $R_m \circ R_l$ es una media vuelta.

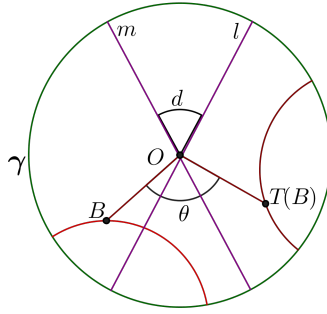


Figura 4.42

Ahora probaremos el axioma de congruencia 6 para M_{P_1} .

C6: Supongamos que en la circunferencia γ con centro en O , los P_1 -triángulos $\Delta_1 ABC$ y $\Delta_1 A'B'C'$, son tales que $AB \cong_1 A'B'$, $AC \cong_1 A'C'$ y $\sphericalangle BAC \cong_1 \sphericalangle B'A'C'$. Entonces $\Delta_1 ABC \cong_1 \Delta_1 A'B'C'$.

Demostración.

Por Lema 4.2 podemos llevar un punto cualquiera al punto O mediante una inversión. Sean pues δ y δ' circunferencias ortogonales a γ tal que $\mathcal{I}_\delta(A) = O$ y $\mathcal{I}_{\delta'}(A) = O$, así mismo $\mathcal{I}_\delta(B) = \widehat{B}$, $\mathcal{I}_\delta(C) = \widehat{C}$, $\mathcal{I}_{\delta'}(B') = \widehat{B}'$, $\mathcal{I}_{\delta'}(C') = \widehat{C}'$. Como la inversión no cambia la longitud hiperbólica, entonces $d_1(AB) = d_1(O\widehat{B})$ y $d_1(A'B') = d_1(O\widehat{B}')$, pero $d_1(AB) = d_1(A'B')$, así que $d_1(O\widehat{B}) = d_1(O\widehat{B}')$. Análogo para $d_1(OC) = d_1(OC')$. Por lo tanto $O\widehat{B} \cong_1 O\widehat{B}'$ y $O\widehat{C} \cong_1 O\widehat{C}'$. De igual manera la magnitud de ángulos se conserva, por lo que $(\sphericalangle BAC)_1^\circ = (\sphericalangle \widehat{B}O\widehat{C})_1^\circ$ y $(\sphericalangle B'A'C')_1^\circ = (\sphericalangle \widehat{B}'O\widehat{C}')_1^\circ$, además sabemos $(\sphericalangle BAC)_1^\circ = (\sphericalangle B'A'C')_1^\circ$, lo que implica $(\sphericalangle \widehat{B}O\widehat{C})_1^\circ = (\sphericalangle \widehat{B}'O\widehat{C}')_1^\circ$. Por lo tanto $\sphericalangle \widehat{B}O\widehat{C} \cong_1 \sphericalangle \widehat{B}'O\widehat{C}'$. Así pues obtenemos dos P_1 -triángulos con uno de sus vértices en O y dos de sus lados partes de rectas euclidianas, es decir, triángulos casi euclidianos, véase Figura 4.43. Consideremos dos triángulos euclidianos $\Delta O\widehat{B}\widehat{C}$

y $\triangle O\widehat{B}'\widehat{C}'$ con $O\widehat{B} \cong_{\mathcal{E}} O\widehat{B}'$, $O\widehat{C} \cong_{\mathcal{E}} O\widehat{C}'$ y $\sphericalangle \widehat{B}O\widehat{C} \cong_{\mathcal{E}} \sphericalangle \widehat{B}'O\widehat{C}'$, entonces por C6 en \mathcal{E} se tiene que $\triangle O\widehat{B}\widehat{C} \cong_{\mathcal{E}} \triangle O\widehat{B}'\widehat{C}'$. Luego existen T una rotación en \mathcal{E} con centro en O y si es necesario seguida de R_3 una reflexión en una \mathcal{E} -recta que pasa por O , tales que $R_3 \circ T(\triangle O\widehat{B}\widehat{C}) = \triangle O\widehat{B}'\widehat{C}'$; pero como dijimos una rotación en \mathcal{E} es composición de dos reflexiones en rectas que pasan por O , por lo que:

$$R_3 \circ T(\triangle O\widehat{B}\widehat{C}) = R_3 \circ R_2 \circ R_1(\triangle O\widehat{B}\widehat{C}) = \triangle O\widehat{B}'\widehat{C}'$$

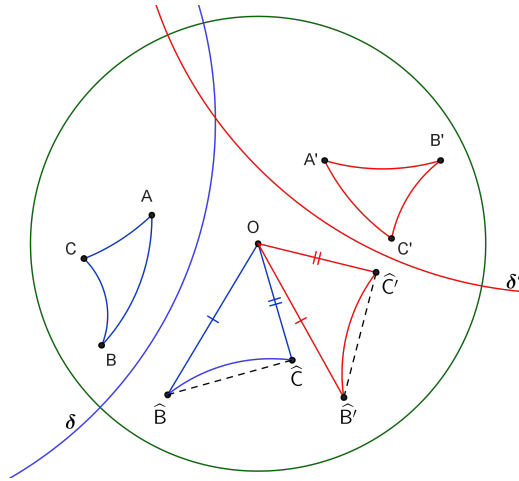


Figura 4.43

O sea se necesitan a lo más tres reflexiones en \mathcal{E} en rectas que pasan por O para mandar el $(\triangle O\widehat{B}\widehat{C})$ al $(\triangle O\widehat{B}'\widehat{C}')$. Ahora bien la P_1 -reflexión en P_1 -rectas del primer tipo coincide con la reflexión en \mathcal{E} y la P_1 -reflexión en P_1 -rectas del segundo tipo coincide con la inversión en circunferencias ortogonales a γ , por lo tanto \mathcal{J}_δ , $\mathcal{J}_{\delta'}$, R_1 , R_2 y R_3 son P_1 -reflexiones, en otras palabras lo que hemos hecho anteriormente es:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\delta'} \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1 \circ \mathcal{J}_\delta(\triangle ABC) &= \mathcal{J}_{\delta'} \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1(\triangle O\widehat{B}\widehat{C}) \\ &= \mathcal{J}_{\delta'}(\triangle O\widehat{B}'\widehat{C}') \\ &= \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Y para concluir que $\triangle_1 ABC \cong_1 \triangle_1 A'B'C'$, véamos el siguiente Lema:

Lema 4.8. Sean $\triangle_1 ABC$ y $\triangle_1 A'B'C'$ triángulos en M_{P_1} . Sea $T = R_n, \dots, R_2, R_1$ la composición de las reflexiones R_1, R_2, \dots, R_n en las P_1 -rectas y si $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. Entonces $\triangle_1 ABC \cong_1 \triangle_1 A'B'C'$.

Demostración.

Como cada reflexión R_1, R_2, \dots, R_n conserva la P_1 -distancia, entonces T conserva la P_1 -distancia y por lo tanto:

$$\begin{aligned} d_1(AB) = d_1(A'B') &\Rightarrow \overline{AB} \cong_1 \overline{A'B'}. \\ d_1(AC) = d_1(A'C') &\Rightarrow \overline{AC} \cong_1 \overline{A'C'}. \\ d_1(BC) = d_1(B'C') &\Rightarrow \overline{BC} \cong_1 \overline{B'C'}. \end{aligned}$$

También cada reflexión R_1, R_2, \dots, R_n conserva la medida angular, entonces:

$$\begin{aligned} (\sphericalangle ABC)^\circ = (\sphericalangle A'B'C')^\circ &\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong_1 \sphericalangle A'B'C'. \\ (\sphericalangle ACB)^\circ = (\sphericalangle A'C'B')^\circ &\Rightarrow \sphericalangle ACB \cong_1 \sphericalangle A'C'B'. \\ (\sphericalangle BAC)^\circ = (\sphericalangle B'A'C')^\circ &\Rightarrow \sphericalangle BAC \cong_1 \sphericalangle B'A'C'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\triangle ABC \cong_1 \triangle A'B'C'$.

□

Teorema 4.1. *Si l es una recta, P es un punto que no incide con l , Q es el pie de la perpendicular bajado de P a l y \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} son los rayos paralelos límite de (P, l) , entonces $\sphericalangle APQ \cong \sphericalangle BPQ$. En pocas palabras \overrightarrow{PQ} es bisectriz de $\sphericalangle APB$.*

Demostración.

La demostración la haremos en MP_1 . Sea γ una circunferencia en el plano euclidiano \mathcal{E} . Tomemos $\Pi_1 = \text{int } \gamma$.

- (a) Supongamos que la P_1 -recta l es del primer tipo y que Q coincide con el centro O de γ , véase Figura 4.44. Entonces la P_1 -perpendicular a l bajada desde P , es también una P_1 -recta del primer tipo: es parte del diámetro euclidiano de γ que pasa por P y con respecto al cual las dos \mathcal{E} -circunferencias ortogonales a γ y que contienen a los P_1 -rayos \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} , son simétricos. Por tal motivo $(\sphericalangle APQ)_1^\circ = (\sphericalangle BPQ)_1^\circ$. Entonces la P_1 -recta \overrightarrow{PQ} es la P_1 -bisectriz del P_1 -ángulo $\sphericalangle APB$.

- (b) Cualquier otro caso lo podemos llevar al caso (a) ocupando el Lema 4.2.

□

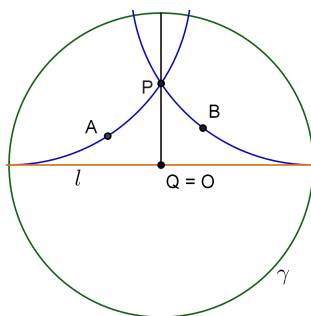


Figura 4.44

4.9. Distancia en M_K

Definición 4.16. (a) Sean A y $B \in \Pi_K$. Si $A \neq B$, la longitud del K -segmento AB denotada por $d_K(AB)$ y se define como $d_K(AB) = d_1(F^{-1}(A), F^{-1}(B))$, donde

$$F : M_{P_1} \longrightarrow M_K$$

es el isomorfismo de modelos de GIPO, véase Figura 4.45.

(b) Diremos que los K -segmentos AB y $A'B'$ son K -congruentes si $d_K(AB) = d_K(A'B')$.

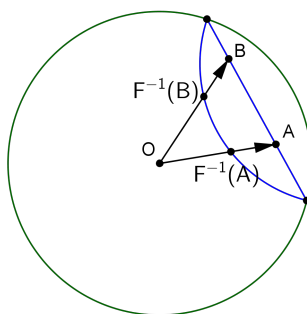


Figura 4.45

Con esta relación de congruencia se prueban fácilmente todos los axiomas **C1-C6**, por lo tanto M_{P_1} y M_K satisfacen los axiomas de incidencia, orden y congruencia de GNP. Veamos que el axioma de Dedekind se cumple en M_K . Recordemos su enunciado:

Axioma de Dedekind Sea l una recta. Si $\{l\} := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde

- (a) Σ_1 y Σ_2 son subconjuntos no vacíos de $\{l\}$.
- (b) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.
- (c) Ningún punto de Σ_1 está entre dos puntos de Σ_2 y ningún punto de Σ_2 está entre dos puntos de Σ_1 (o sea (Σ_1, Σ_2) es una cortadura de Dedekind de l).

Entonces existe un único punto $O \in \{l\}$ tal que uno de los subconjuntos Σ_1 o Σ_2 es igual a un rayo de l que emana de O y el otro subconjunto es el complemento de $\{l\}$.

Demostración.

Sea $l = P)(Q$ una K -recta. Supongamos que $l = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde Σ_1 y Σ_2 cumple con (a), (b) y (c) del Axioma de Dedekind. Si \widehat{l} es la \mathcal{E} -recta que contiene a l , $\widehat{\Sigma}_1$ es la unión de Σ_1 con el \mathcal{E} -rayo opuesto a \overrightarrow{QP} y $\widehat{\Sigma}_2$ es la unión de Σ_2 con el \mathcal{E} -rayo opuesto a \overrightarrow{PQ} , véase Figura 4.46. Por Axioma de Dedekind en \mathcal{E} , existe un único $O \in \{\widehat{l}\}$ tal que uno de los subconjuntos $\widehat{\Sigma}_1$ ó $\widehat{\Sigma}_2$, es igual a un rayo de \widehat{l} que emana de O y el otro subconjunto es el complemento. En particular si $A \in \Sigma_2 \subseteq \widehat{\Sigma}_2$ y $B \in \Sigma_1 \subseteq \widehat{\Sigma}_1$, entonces $A * O * B$, así que O está en el interior de γ .

□

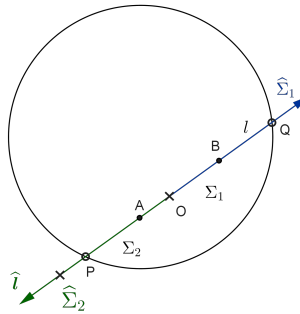


Figura 4.46

Mediante el isomorfismo F^{-1} podemos probar el Axioma de Dedekind se cumple en M_{P_1} . Así los dos modelos, M_{P_1} y M_K son ya de G.N. Más aún, son modelos de GHP pues es fácil probar que se cumple la propiedad hiperbólica de las paralelas en cada uno de los ellos.

Una vez que hemos demostrado que M_{P_1} y M_K son modelos de la geometría Hiperbólica (GHP), podemos usarlos para demostrar teoremas de dicha geometría, porque este sistema axiomático es categórico, es decir, cualesquiera los modelos de

GHP son isomorfos, ver [3]. Esto implica que cualquier proposición P , verdadera en un modelo \mathcal{M} de GHP, es un teorema de GHP. Esto se debe a que si P no fuera un teorema de GHP, existiría un modelo \mathcal{N} de dicho sistema axiomático en donde no se cumpliría P . Pero como todos los modelos de GHP son isomorfos, P tampoco se cumpliría en \mathcal{M} , contradiciendo nuestra suposición. Así P es teorema de GHP, entonces podemos demostrar con nuestros modelos M_{P_1} y M_K , algunos teoremas de GHP que hemos usado en el Capítulo 2 y cuya demostración no mencionamos.

- (a) Dadas dos rectas cualesquiera l y m , pueden ser paralelas de dos distintas maneras:
1. Paralelas con perpendicular común. En M_K serían dos K -rectas que no se intersectan ni en γ ni en el interior de γ y su perpendicular común es $\overleftrightarrow{P(l)P(m)}$, los polos de m y l respectivamente, véase Figura 4.47 (a).
 2. Paralelas sin perpendicular común. En M_K serán dos K -rectas que, como cuerdas en \mathcal{E} , se intersectan en un punto Ω de γ . Este Ω es un punto ideal de l y de m , véase Figura 4.47 (b).

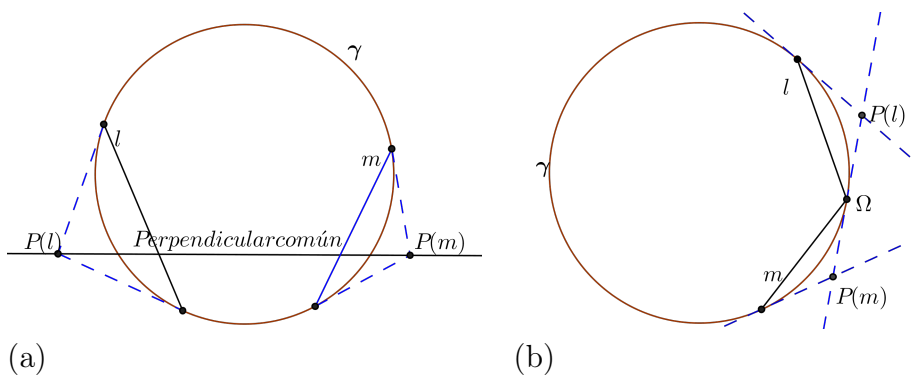


Figura 4.47

- (b) Si l y m son paralelas con perpendicular común t , tal perpendicular es única. Si P y Q son los puntos donde t corta a l y m respectivamente, entonces la longitud del segmento PQ es el mínimo de las distancias de un punto de l a m o de un punto de m a l .

En el modelo de M_{P_1} , demosremos la afirmación en el caso especial en que $Q = O$. Entonces m y t son P_1 -rectas del primer tipo y l es una P_1 -recta del

segundo tipo pero ortogonal a t , es decir, si \widehat{t} fuera la \mathcal{E} -recta que contiene a t , por lo que \widehat{t} pasaría por el centro de la \mathcal{E} -circunferencia que contiene a l . Sean P' un punto de l diferente de P y Q' el pie de la P_1 -perpendicular bajada de P' a m . Sea δ la \mathcal{E} -circunferencia ortogonal a γ que contiene a P' y Q' . Sea η la circunferencia ortogonal a γ tal que $\mathcal{S}_\eta(Q') = O$. El centro de η es el punto $\widehat{Q}' = \mathcal{S}_\gamma(Q')$. Entonces $\mathcal{S}_\eta(\delta) = t$, pero $\mathcal{S}_\eta(P') = \widehat{P}'$ tal que en la \mathcal{E} -recta \widehat{t} se tiene $O * P * \widehat{P}'$, véase Figura 4.48. Por lo tanto $OP' > OP$, como longitudes euclidianas, pero esto significa, como ya sabemos, que $d_1(OP') > d_1(OP)$. Por lo tanto, $d_1(Q'P') = d_1(OP') > d_1(OP) = d_1(QP)$, por eso a las rectas paralelas con perpendicular común se les llama paralelas divergentes.

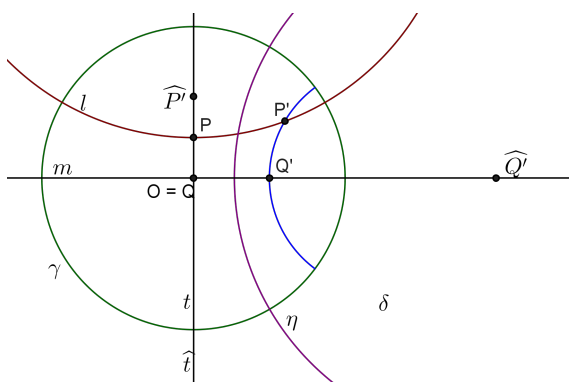


Figura 4.48

- (c) Si l y m son paralelas sin perpendicular común, entonces existen rayos \overrightarrow{AB} en l y \overrightarrow{CD} en m , tales que \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son rayos paralelos límite con punto ideal Ω (uno de los puntos finales, tanto de l como de m). Además, en la dirección de Ω , la distancia entre l y m tiende a cero. Por esta razón a las paralelas sin perpendicular común se le suele llamar paralelas convergentes o asintóticas.

La demostración de este teorema se puede hacer en el modelo M_{P_1} , en donde, de nuevo, se puede suponer que m es una P_1 -recta del primer tipo, contenida en una \mathcal{E} -recta \widehat{m} , l es una P_1 -recta del segundo tipo, contenida en una \mathcal{E} -circunferencia δ tangente a \widehat{m} en un punto Ω de γ . Si P es un punto cualquiera de l , Q es el pie de la perpendicular bajada de P a m , $Q' = \mathcal{S}_\gamma(Q)$ y η es la circunferencia ortogonal a γ con centro en Q' , entonces como sabemos, $\mathcal{S}_\eta(Q) = O$ y la P_1 -perpendicular $t = (\overrightarrow{PQ})_1$ es enviada a la P_1 -recta $t' = (\overrightarrow{P'O})_1$ perpendicular a m , así que t' es del primer tipo, véase Figura 4.49.

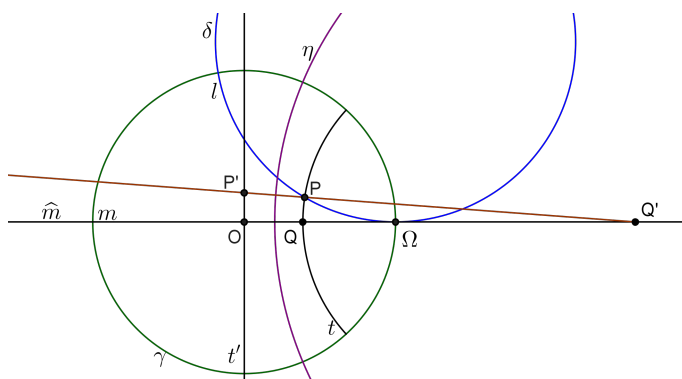


Figura 4.49

Como \mathcal{S}_η deja invariante la distancia en M_{P_1} , $d_1(PQ) = d_1(P'O)$. Si tomamos el punto P muy cerca de Ω , también lo estarán Q , así que el \mathcal{E} -rayo $\overrightarrow{Q'P}$, secante a δ , se parecerá mucho a la tangente a δ en Ω , es decir, casi contenida en \widehat{m} , lo que implica que el punto P' donde corta a t' estará muy cerca de O . Entre más acerquemos P a Ω , P' se acercará más a O , de tal forma que podemos asegurar que, cuando P tiende a Ω la \mathcal{E} distancia $\overline{P'O}$ tiende a cero y con ello, la $d_1(P'O)$ también tiende a cero. Por lo tanto:

$$\lim_{P \rightarrow \Omega} d_1(PQ) = 0.$$

- (d) Dado un ángulo $\sphericalangle ABC$, existe una única recta m tal que \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} son los rayos paralelos límite de m respecto de b .

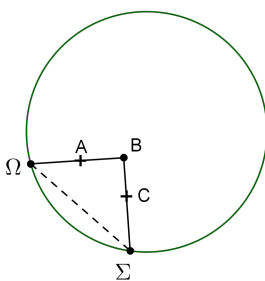


Figura 4.50

Esto puede demostrarse fácilmente en el modelo de M_K , en donde basta considerar la K -recta $\Omega(\Sigma)$, donde Ω es el punto ideal del K -rayo $(\overrightarrow{BA})_K$ y Σ es el punto ideal del K -rayo $(\overrightarrow{BC})_K$ véase Figura 4.50.

4.10. Reflexiones en M_K

Veamos una construcción para la K -reflexiones respecto de una K -recta.

Sean m una K -recta, A un K -punto que no incide con m y P el polo de m . \overleftrightarrow{AP} la \mathcal{E} -recta y $t = \overleftrightarrow{AP} \cap \text{int } \gamma$, entonces t es la recta K -perpendicular a m por A . Sean M la intersección de t con m , Q el polo de t ; Σ y Σ' las intersecciones de la \mathcal{E} -recta \overleftrightarrow{QA} con γ ; $l = \overleftrightarrow{QA} \cap \text{int } \gamma = \Sigma(\Sigma')$; Ω el punto de intersección de γ con la \mathcal{E} -recta $\overleftrightarrow{\Sigma'M}$. A' y Ω' las intersecciones de la \mathcal{E} -recta $\overleftrightarrow{Q\Omega}$ con t y con γ , respectivamente, véase Figura 4.51. Entonces A' es la reflexión en M_K de A , respecto a m . También las \mathcal{E} -rectas $\overleftrightarrow{\Sigma'\Omega'}$ y $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ se cortan en P .

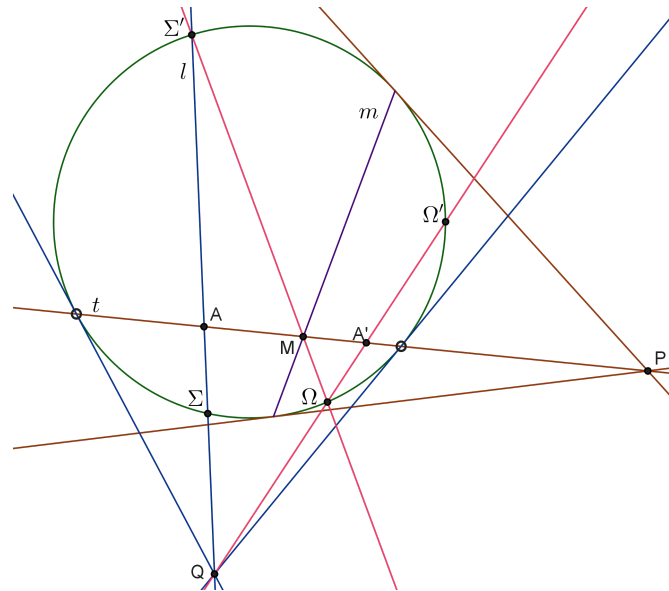


Figura 4.51

Ahora daremos una justificación a esta construcción de la K -reflexión.

Lema 4.9 (GHP). Sean l y n rectas paralelas divergentes y AA' el segmento perpendicular común l y n . Sean Ω y Ω' los puntos finales de l y Σ y Σ' los puntos ideales de n . Si M el punto medio de AA' y m la perpendicular a $\overleftrightarrow{AA'}$ que pasa por M . Entonces:

- (a) $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma'}$ y $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega'}$ se intersectan en M .
- (b) m es perpendicular a $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma}$ y a $\overleftrightarrow{\Omega'\Sigma'}$.

Demostración.

- (a) Sean $n = \Sigma'$ ($\Sigma, l = \Omega'$) (Ω paralelas divergentes y t su K -perpendicular común. Sean $A = t \cap n$, $A' = t \cap l$ y M el K -punto medio del segmento AA' . Por Proposición 4.4, si t pasa por $P(n)$, entonces n pasa por $P(t)$; de igual manera, si t pasa por $P(l)$, l pasa por $P(t) = Q$, por lo que n y l inciden en $P(t)$. Sea m la K -perpendicular a t en M , luego el rayo $\overrightarrow{M\Sigma'}$ es paralelo límite a n . Si reflejamos a través de m , n es llevada a la recta que pasa por A' y que es K -perpendicular a t , es decir, la K -recta l . De manera que:

$$(R_m)_K(\overrightarrow{A\Sigma'}) = \overrightarrow{A'\Omega'},$$

por lo tanto

$$(R_m)_K(\Sigma') = (R_m)_K([\overrightarrow{A\Sigma'}]) = [\overrightarrow{A'\Omega'}] = \Omega',$$

donde $[\overrightarrow{A\Sigma'}]$ y $[\overrightarrow{A'\Omega'}]$ son clases de equivalencia de Σ' y Ω' respectivamente. En particular, como $(R_m)_K(M) = M$, entonces $(R_m)_K(\overrightarrow{M\Sigma'}) = \overrightarrow{M\Omega'}$. De igual forma, si reflejamos a través de t , tenemos $(R_t)_K(\overrightarrow{M\Omega'}) = \overrightarrow{M\Omega}$. Pero dos reflexiones sucesivas en rectas K -perpendiculares m y t es una rotación de 180° alrededor de M ; por lo tanto $\overrightarrow{M\Omega}$ es el rayo opuesto a $\overrightarrow{M\Omega'}$, véase Figura 4.52. Análogamente, el rayo $\overrightarrow{M\Sigma}$ es opuesto al rayo $\overrightarrow{M\Omega'}$, entonces como $(R_m)_K$ manda Σ' a Ω' y Σ a Ω , $\overleftrightarrow{\Sigma'\Omega'}$ y $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ deben ser K -perpendiculares a m (las extensiones euclidianas $\overleftrightarrow{\Sigma\Omega}$ y $\overleftrightarrow{\Sigma'\Omega'}$ pasan por $P(m) = P$).

- (b) Si m es diámetro de γ , P es un punto al infinito. Por lo que t sería la K -recta \overleftrightarrow{AP} y es \mathcal{E} -perpendicular a m en A . Así que la K -reflexión de A en m coincide con la reflexión de euclidiana.

□

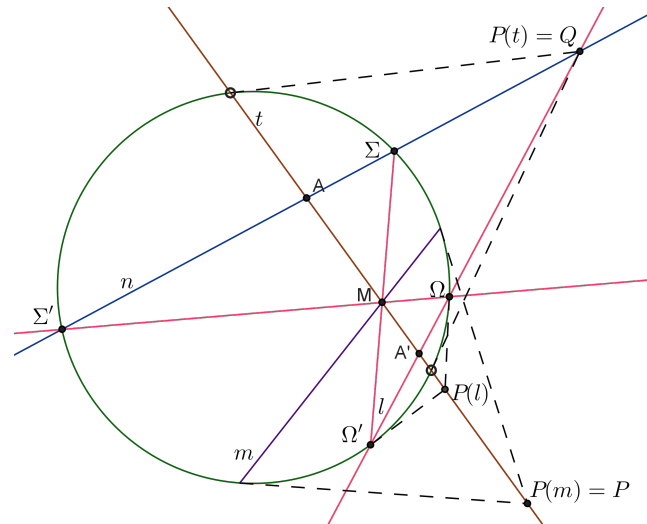


Figura 4.52

Con esto la justificación de la construcción es ya muy sencilla.

Definición 4.17. Si P es el punto ideal del rayo \overrightarrow{AB} y T es el movimiento en M_K , entonces $T(P) = \overrightarrow{T(A)T(B)}$.

4.11. Homología armónica de cierto punto

Interpretemos la reflexión de las rectas de M_K como cierto tipo de transformación euclidiana que se llama homología.

Definición 4.18. Sea \mathcal{E} un plano euclidiano y sean A, B, C, D 4 puntos en \mathcal{E} , distintos y colineales.

(a) La razón cruzada de AB respecto de CD es:

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}.$$

(b) C y D son conjugados armónicos con respecto a AB si $(AB, CD) = 1$.

Observaciones: Si A, B, C y D cuatro puntos \mathcal{E} -colineales y dintintos. Entonces

(a) $(A, B, C, D) = 1$ si, y sólo si C y D dividen a AB en la misma razón, es decir,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

(b) C y D son conjugados armónicos con respecto a AB si, y sólo si A y B son conjugados armónicos respecto a CD . En pocas palabras $(AB, CD) = 1$ si, y sólo si $(CD, AB) = 1$. En efecto

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \text{ si, y sólo si } \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

(c) Como C y D son puntos distintos, si $(AB, CD) = 1$, entonces uno de los puntos C o D está en el segmento AB y el otro está fuera y suele decirse que C y D dividen interna y externamente a AB en la misma razón.

(d) Supongamos $(AB, CD) = 1$, $A * C * B$ y que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k$. Entonces:

1. Si $k < 1$, entonces D es el único punto tal que $D * A * B$ y $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{1-k}$.
2. Si $k > 1$, entonces D es el único punto tal que $A * B * D$ y $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{k-1}$.

En efecto:

1. Si $D * A * B$, $k < 1$ y $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{1-k}$, como $\overline{DB} = \overline{AD} + \overline{AB}$, entonces

$$\overline{AD} = \overline{DB} - \overline{AB} = \overline{AB} \left(\frac{1}{1-k} - 1 \right) = \overline{AB} \left(\frac{1-1+k}{1-k} \right) = \overline{AB} \left(\frac{k}{1-k} \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB} \left(\frac{k}{1-k} \right)}{\overline{AB} \left(\frac{1}{1-k} \right)} = k.$$

2. Si $A * B * D$, $k > 1$ y $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{k-1}$, entonces $\overline{DB} = \overline{AD} - \overline{AB}$, luego

$$\overline{AD} = \overline{DB} + \overline{AB} = \overline{AB} \left(\frac{1}{k-1} + 1 \right) = \overline{AB} \left(\frac{k-1+1}{k-1} \right) = \overline{AB} \left(\frac{k}{k-1} \right)$$

así que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB} \left(\frac{k}{k-1} \right)}{\overline{AB} \left(\frac{1}{k-1} \right)} = k.$$

- (e) Si $k = 1$, D está indeterminado. En efecto, no hay punto D fuera de AB tal que $\frac{AD}{AB} = 1$. Entonces el punto medio M de AB no tiene conjugado armónico respecto a AB . Se podría decir, en este caso, que el conjugado armónico de M respecto a AB es el punto al infinito de \overleftrightarrow{AB} .

4.12. Construcción del conjugado armónico

Sean \mathcal{E} un plano euclidiano y I, J puntos en \mathcal{E} , colineales con C pero no en \overleftrightarrow{AB} .

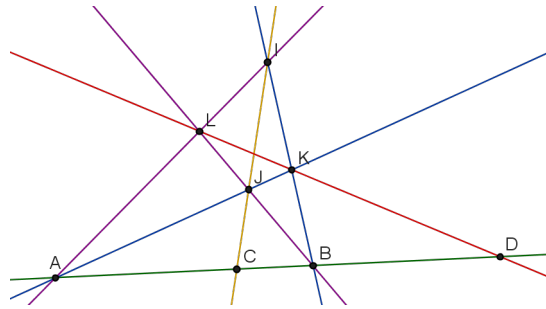


Figura 4.53

- Trazamos \overleftrightarrow{AJ} y \overleftrightarrow{IB} para obtener K como la intersección de dichas rectas.
- Trazamos \overleftrightarrow{AI} y \overleftrightarrow{BJ} para obtener L como la intersección de dichas rectas.
- Por último trazamos \overleftrightarrow{LK} para obtener $D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{LK}$, véase Figura 4.53.

Como I y J se pueden escoger arbitrariamente, la construcción siempre se puede hacer; excepto cuando C es el punto medio de AB . Si C fuera el punto medio de AB , sea J cualquier punto que no incida con \overleftrightarrow{AB} y sean l y m rectas paralelas a \overleftrightarrow{CJ} que pasen por A y por B , respectivamente. Las \mathcal{E} -rectas l , m y \overleftrightarrow{CJ} son paralelas que se cortan en el punto al infinito I . Si $K = \overleftrightarrow{AJ} \cap m$ y $L = l \cap \overleftrightarrow{BJ}$, entonces $\square ABKL$ es un paralelogramo. Es decir, $D := \overleftrightarrow{LK} \cap \overleftrightarrow{AB}$ es el punto al infinito de \overleftrightarrow{AB} , su conjugado armónico, véase Figura 4.54.

Definición 4.19. Sean m una recta \mathcal{E} -recta y P un punto que no incide con m . La homología armónica con centro P y eje m es la función: $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que

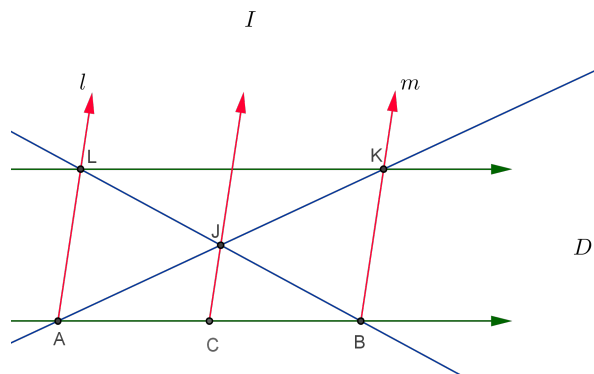


Figura 4.54

- (a) Para cualquier punto $A \in m$, $H(A) = A$.
- (b) $H(P) = P$.
- (c) Si $B \notin M$ y $B \neq P$, entonces $H(B) = B'$, donde B' es el conjugado armónico de B respecto al segmento MP , donde M es el punto de intersección de la recta m con $\overleftrightarrow{PB} = t$.

Teorema 4.2. Sea m una K -recta que no es diámetro de γ y sea P su polo, entonces la K -reflexión respecto a m es la restricción al interior de γ de la homología armónica con centro en P y con el eje la recta euclidiana que contiene a M . Si m es un diámetro de γ , entonces la K -reflexión respecto a M es la \mathcal{E} -reflexión respecto a M pero restringida al interior de γ .

Demostración.

Notar que la construcción que dimos del reflejado de un punto A respecto a una K -recta m no es sino la construcción del conjugado armónico de A respecto al segmento PM . Renombrando:

$$\begin{array}{ll} \Sigma' \longrightarrow I & P \longrightarrow A \\ \Sigma \longrightarrow J & M \longrightarrow B \\ \Omega \longrightarrow K & A \longrightarrow C \\ \Omega' \longrightarrow L & A' \longrightarrow D \end{array}$$

□

Definición 4.20. Sean l y n dos rectas y P no incide con ninguna de ellas. Entonces la perspectividad de l a n desde P es la función:

$$\underset{\wedge}{\overset{P}{\equiv}} : l \longrightarrow n$$

tal que si $A \in l$, entonces $\underset{\wedge}{\overset{P}{\equiv}}$ manda a A al punto A' que es la intersección de \overleftrightarrow{PA} con n , lo denotaremos $A \underset{\wedge}{\overset{P}{\equiv}} A'$. Si \overleftrightarrow{PA} es la paralela a n entonces, $\underset{\wedge}{\overset{P}{\equiv}}$ manda a A al punto infinito de n . P es llamado el centro de la perspectividad.

Lema 4.10. Toda perspectividad conserva la razón cruzada de cuatro puntos colineales. Más precisamente: si A, B, C y D son los cuatro puntos en una recta l y A', B', C' y D' son sus imágenes sobre una recta n , bajo la perspectividad con centro en P , entonces $(AB, CD) = (A'B', C'D')$, véase Figura 4.55.

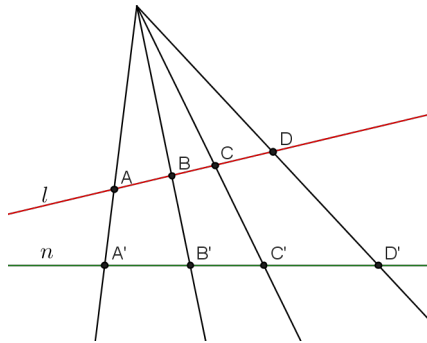


Figura 4.55

Demostración.

Por leyes de senos y teniendo en cuenta que $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP$ y $\sphericalangle BDP = \sphericalangle ADP$ tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP} \left(\frac{\text{sen } \sphericalangle APC}{\text{sen } \sphericalangle ACP} \right)}{\overline{BP} \left(\frac{\text{sen } \sphericalangle BPC}{\text{sen } \sphericalangle BCP} \right)} = \frac{\overline{AP} \text{sen } \sphericalangle APC}{\overline{BP} \text{sen } \sphericalangle BPC}$$

y

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP} \left(\frac{\text{sen } \sphericalangle BPD}{\text{sen } \sphericalangle BDP} \right)}{\overline{AP} \left(\frac{\text{sen } \sphericalangle APD}{\text{sen } \sphericalangle ADP} \right)} = \frac{\overline{BP} \text{sen } \sphericalangle BPD}{\overline{AP} \text{sen } \sphericalangle APD}$$

Por lo tanto

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\text{sen } \sphericalangle APC \text{ sen } \sphericalangle BPD}{\text{sen } \sphericalangle BPC \text{ sen } \sphericalangle APD}.$$

Análogamente

$$(A'B', C'D') = \frac{\text{sen } \sphericalangle A'PC' \text{ sen } \sphericalangle B'PD'}{\text{sen } \sphericalangle B'PC' \text{ sen } \sphericalangle A'PD'}.$$

Pero $\text{sen } \sphericalangle APC = \text{sen } \sphericalangle A'P'C'$, $\text{sen } \sphericalangle BPC = \text{sen } \sphericalangle B'P'C'$, $\text{sen } \sphericalangle BPD = \text{sen } \sphericalangle B'P'D'$ y $\text{sen } \sphericalangle APD = \text{sen } \sphericalangle A'P'D'$. Por lo tanto $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. □

Con lo anterior daremos una justificación para la construcción del conjugado armónico.

Sea N el punto de intersección de \overleftrightarrow{LK} con \overleftrightarrow{IJ} y aplicamos

$$\frac{I}{\wedge}, \frac{J}{\wedge} : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overleftrightarrow{LK},$$

es decir $ABCD \stackrel{I}{\wedge} LKND$ y $ABCD \stackrel{J}{\wedge} KLMD$, entonces por Lema 4.10:

$$(AB, CD) = (LK, ND) = \frac{\overline{LN}}{\overline{NK}} \cdot \frac{\overline{DK}}{\overline{LD}}$$

y

$$(AB, CD) = (KL, ND) = \frac{\overline{KN}}{\overline{NL}} \cdot \frac{\overline{DL}}{\overline{KD}},$$

por Observación 4.7 tenemos:

$$(KL, ND) = \frac{1}{\overline{LK, ND}} = (AB, CD).$$

Así que

$$(AB, CD) = \frac{1}{(AB, CD)},$$

entonces

$$(AB, CD)^2 = 1.$$

Lo que implica $(AB, CD) = 1$. Por lo tanto C y D son conjugados armónicos respecto a AB , véase Figura 4.56. □

Así que mediante una P_1 -rotación adecuada (composición de P_1 -reflexiones), podemos suponer que $(\overleftrightarrow{ZW})_1$ esta sobre el eje X, es decir $z, w \in \mathbb{R}$, entonces

$$(ZW, PQ) = \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-w}{1+w}$$

y

$$(AB, PQ) = (F(z)F(w), PQ) = \frac{1+F(z)}{1-F(z)} \cdot \frac{1-F(w)}{1+F(w)}.$$

Pero

$$1 - F(z) = 1 - \frac{2z}{1+|z|^2} = \frac{1-2z+|z|^2}{1+|z|^2}$$

y

$$1 + F(z) = \frac{1+2z+|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Así que

$$\frac{1+F(z)}{1-F(z)} = \frac{1+2z+|z|^2}{1-2z+|z|^2}.$$

Como z es real, $z = \pm |z|$ (o sea $z^2 = |z|^2$), luego

$$\frac{1+F(z)}{1-F(z)} = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

Análogamente para w

$$\frac{1-F(w)}{1+F(w)} = \left(\frac{1-w}{1+w} \right)^2.$$

Por lo tanto

$$(AB, PQ) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \left(\frac{1-w}{1+w} \right)^2 = (zw, PQ)^2 = (ZW, PQ)^2.$$

Y por propiedades de logaritmo $\log(AB, PQ) = 2 \log(ZW, PQ)$, por lo que concluimos:

$$d_K(AB) = d_1(ZW) = |\log(zw, PQ)| = \frac{1}{2} |\log(AB, PQ)|.$$

Bibliografía

- [1] H. Barry, E. *Introducción a las transformaciones geométricas*. México. Compañía Editorial Continental.
- [2] Delong, H. (1971). *A Profile of Mathematical Logic. Second Printing*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [3] Greenberg, M. J. (1994.) *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History, third edition*. New York. W. H. Freeman and Company.
- [4] Greenberg, M. J. (2008). *Euclidean an Non-Euclidean Geometries: Development and History, Fourth Edition*. New York: W. H. Freeman and Company.
- [5] Needham, T, (2000). *Visual Complex Analysis, First Edition*. Oxford Clarendon Press.