BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
L I C E N C I A D A E N M A T E M Á T I C A S

P R E S E N T A

ELIZABETH BAÑUELOS AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS

M. C. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ

PUEBLA, PUE., MARZO 2021

ÍNDICE

PARTE II

(INTERVENCIÓN)

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal (AL) es una de las principales disciplinas matemáticas enseñadas en nivel universitario, que se imparte en las carreras de matemáticas, ingeniería y otras carreras de ciencias exactas, aunque es común que se le considere difícil de aprender a nivel formal. Algunos estudiantes se enfrentan a obstáculos durante el desarrollo de los procesos cognitivos y conceptuales que implican su estudio, situación que puede deberse al elevado grado de abstracción de sus temas. Siendo uno de ellos el de transformación lineal (TL), el cual puede parecer un concepto claro y sencillo, sin embargo, suele ser complejo para los estudiantes; piensan que muchas funciones son lineales.

A medida que el curso de AL avanza, los estudiantes en algún momento se confunden al pasar de $\mathbb{R}^n$ y matrices a trabajar en un Espacio vectorial abstracto, tienen dificultades con ejercicios donde se pide hacer demostraciones en cualquier espacio, es decir, que lo que parecía sencillo se vuelve inesperadamente complicado y abstracto. Además les resulta difícil captar el proceso de generalización, por ejemplo, pasar de un ejemplo particular en $\mathbb{R}^n$ a trabajar de manera abstracta: axiomas, definiciones, teoremas y su demostración.

El AL es una rama de las matemáticas que se considera importante en varias profesiones por sus múltiples aplicaciones a la solución de muy diversos problemas, es por eso que la mayoría de las universidades contienen en sus programas al menos un curso de esta disciplina. En este contexto, la forma de enseñar el AL de una manera más efectiva es obviamente un problema interesante, pues tiene implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. El trabajo del docente es guiar o facilitar al estudiante el acceso al mundo formal, consolidando las partes básicas sin olvidar que el estudiante puede consultar su libro. Es imposible que el docente explique todo, el alumno debe hacer trabajo independiente.

El principal propósito del presente trabajo fue realizar un estudio exploratorio de la comprensión del concepto de TL con un grupo de estudiantes para detectar las dificultades de comprensión del concepto TL en un curso de AL ofrecido en la Facultad Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (FCFM- BUAP).

En nuestra opinión, tal análisis no puede realizarse si se separan tajantemente los conocimientos previos de cursos anteriores y los libros usados como apoyo para impartir el curso. En nuestro caso en FCFM se imparte un curso previo de geometría analítica y un curso de teoría de ecuaciones (ver plan 2016 FCFM-BUAP). En todo caso se debe examinar si los alumnos tienen experiencia con vectores en R^3, de no ser así, se recomiendan libros como "Geometría vectorial" de Rene Benítez, "Geometría analítica moderna" de William Wooton o "Algebra Superior" de Humberto Cárdenas que ayudaran a reforzar el conocimiento previo de vectores y sistema de ecuaciones.

Nuestro objetivo es identificar las principales dificultades y errores que se presentan al resolver ejercicios típicos sobre TL basándonos en el trabajo de Rodríguez (2011). A partir de las dificultades encontradas y al hacer una revisión de los trabajos sobre didáctica del AL, en un segundo grupo se hace una intervención la cual consiste en realizar una sugerencia didáctica para subsanar algunos problemas de aprendizaje del concepto TL. Finalmente se comparan los resultados de ambos grupos.

El estudio de estos problemas se llevó a cabo a través del seguimiento de dos grupos de AL no seleccionados por ningún método. Con este trabajo buscamos mejorar la compresión del concepto TL mediante el diseño de una propuesta de enseñanza que ayude a los estudiantes a relacionar conceptos mediante el señalamiento explicito, de cómo a partir de ejemplos previos de espacio vectorial se generaliza de manera axiomática para dar la definición de espacio vectorial y otros conceptos, y que más adelante al resolver ejercicios el alumno deberá tener presente que hay muchos ejemplos concretos de espacio vectorial ($\mathbb{R}^3, polinomios, matrices$), donde puede aplicar las definiciones abstractas, con pequeños cambios, y esto no lo debe confundir.

La presentación del trabajo está dada en dos partes. En la primera parte, se presentan los resultados del diagnóstico realizado a un primer grupo y en la segunda parte la intervención correspondiente a un segundo grupo. A continuación, se da una descripción breve del contenido de los capítulos;

En el capítulo 1 *Planteamiento del problema*, se describe cual es el interés de esta investigación, se formula el problema, se dan a conocer los objetivos generales y específicos de los distintos momentos de la investigación.

Parte I (Diagnóstico):

En el capítulo 2 *Marco teórico,* describiremos los antecedentes, revisamos algunos trabajos de investigación relacionados con el aprendizaje del AL, particularmente sobre el tema de la TL, centrando nuestra atención en los obstáculos que los alumnos manifiestan. Se presenta además las bases teóricas y por último se analizan algunos libros de textos propuestos para un curso de AL indicando el enfoque didáctico de cada autor.

En el capítulo 3 *Método*, planteamos el tipo de investigación, la descripción de los participantes en cuestión, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, así como el análisis de cada uno de los ejercicios propuestos y la intención de cada pregunta según el instrumento.

En el capítulo 4 *Análisis de resultados de los exámenes*, Se presenta una clasificación del tipo de respuesta que dan los estudiantes del grupo 1 en la aplicación de los exámenes, se analizan los errores y se determinan las dificultades.

En el capítulo 5 *Conclusiones parciales*, se muestran los resultados obtenidos después de analizar las soluciones de los estudiantes en los exámenes y se observa que existe un conflicto cognitivo causado por la falta de conexión entre conceptos.

PARTE II (Intervención):

En el capítulo 6 T*eóricas complementarias,* se presenta la teoría en la que se basa esta parte del trabajo, aprendizaje, aprendizaje significativo, comprensión y taxonomía SOLO de John Biggs (2005). Planteamos la metodología empleada durante la puesta en escena de la secuencia didáctica.

En el capítulo 7 Met*odología*, se presenta el diseño de la intervención que se realizó a un segundo grupo, y se describe la secuencia diseñada haciendo énfasis en el uso de puente cognitivo con la idea clave de aprendizaje significativo.

En el capítulo 8 *Análisis y discusión de resultados*, se describe el nivel de comprensión del segundo grupo usando la teoría de taxonomía SOLO y se señalan algunas dificultades que fueron observadas durante el diseño y aplicación de la secuencia didáctica. Se explican las dificultades organizadas en cinco categorías que describen la procedencia de estas dificultades; dos asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las matemáticas y procesos de pensamiento matemático es decir a los procesos conceptuales del estudiante, la tercera y cuarta asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, y la quinta y última, está asociada a la aplicación de reglas o estrategias. Finalmente, se comparan a los dos grupos.

En el capítulo 9 *Conclusiones Generales*, se comenta que algunas dificultades del grupo 1 se preservan en el grupo 2 y algunas otras disminuyen, el alumno fracasa al tratar de comprender el concepto de TL porque no capta lo invariante. Por ello vale la pena rescatar el aprendizaje a través de los errores.

Capítulo 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El AL es considerada una de las disciplinas fundamentales en el tronco común del área de ciencias exactas, ya que por una parte cumple un rol esencial para el desarrollo posterior de otras materias, y, por otra, es una herramienta para resolver problemas de aplicación.

A pesar de su relevancia, el aprendizaje del AL a nivel universitario está considerada como una experiencia frustrante para los estudiantes, ya que les resulta una materia difícil, tanto cognitiva como conceptualmente. Algunas de las principales dificultades que se presentan en los cursos de AL son: el uso del formalismo, el agobio ante las nuevas definiciones, teoremas y demostraciones (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000).

En lo que se refiere a las causas de las dificultades para los estudiantes se distinguen dos: la naturaleza del AL (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para su comprensión (dificultades cognitivas). Frente a estas dificultades proponemos para un segundo grupo “crear puentes cognitivos” para facilitar el paso a la abstracción (Díaz, 2010).

1.2 Formulación del Problema

Día a día el docente de matemáticas se enfrenta a situaciones en las que el alumno olvida, comete errores o simplemente no posee un conocimiento previo, sea cual sea el nivel en donde se esté desarrollando la práctica docente. En el caso de AL presentar la definición de TL no ofrece ninguna dificultad comparado por ejemplo al explicar la definición formal de limite. Pero los alumnos no resuelven bien los ejercicios que vienen en los libros.

Es por ello que nuestra pregunta de investigación es la siguiente, ¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes de la FCFM-BUAP cuando realizan ejercicios donde hacen uso del concepto TL?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Generales

Realizar un diagnóstico en un primer grupo para identificar y analizar las dificultades presentes en los estudiantes para comprender el concepto de TL y a partir de sus resultados, realizar una propuesta didáctica para un curso de AL en FCFM- BUAP para disminuir los problemas de aprendizaje del concepto TL, pero trabajando con un segundo grupo.

Lo interesante y prioritario es determinar las acciones que deben tomarse para resolver esta situación o que vaya disminuyendo con el paso del tiempo. David Ausubel propone “identificar los conocimientos previos de los estudiantes y enseñar en consecuencia”.

1.3.2 Objetivos Específicos

Primer grupo:

1) Identificar los errores cometidos por los estudiantes, cuando se les formula ejercicios típicos y deben usar la definición y propiedades de TL. Y a su vez, se buscará hacer una clasificación de los errores que cometieron los estudiantes al resolver ejercicios.
2) Analizar libros de editoriales comerciales de AL con la finalidad de ver si favorecen el transito al pensamiento formal. Nosotros consideramos como textos comerciales aquellos que son fáciles de conseguir en las librerías y van dirigidas a un público amplio, en comparación con textos para estudiantes de matemáticas.

Segundo grupo:

3) Analizar la relevancia de ayudar al alumno a construir un puente entre la información previa y la nueva para hacer más eficiente el proceso de aprendizaje.
4) Se pretende que los alumnos vean el concepto de TL como lo invariante en la referencia de varias representaciones, es decir, reconocer el concepto TL al menos en dos representaciones diferentes. Tomando en cuenta que sin teoremas no se aprecia el concepto en toda su amplitud.

Es importante que el alumno sea capaz de identificar el concepto TL en diferentes espacios vectoriales para crear una mejor comprensión del concepto, así como la posibilidad de traducir entre diferentes representaciones. Así pues, es necesario considerar la extensión y las interacciones que tienen en cuenta diferentes conceptos del mismo objeto, en diferentes lenguajes matemáticos.

1.4 Justificación de la Investigación

Este trabajo surge luego de observar las dificultades que tienen los estudiantes universitarios, como se señala en nuestros antecedentes, en el aprendizaje de las definiciones y teoremas de los conceptos centrales de AL, dados de manera abstracta en una presentación formal. A nuestro juicio, es un área de especial interés, debido fundamentalmente a tres razones:

1. Es una materia con un elevado grado de abstracción para estudiantes que la cursan por primera vez, ya que es uno de los pilares del álgebra abstracta, lo cual provoca un elemento de especial dificultad para el estudiante: obstáculo del formalismo (Dorier, 2000).
2. Una de las asignaturas básicas de la mayor parte de las carreras en ciencias, ingenierías y algunas sociales.
3. La enseñanza-aprendizaje del AL esta frecuentemente asociada a una exposición lineal donde los procesos de aprendizaje no son contemplados. En un enfoque formal, basado en un libro de texto no hay problemas de aprendizaje todo transcurre en forma lineal sin problema alguno, pero es importante considerar el punto de vista de los alumnos.

PARTE I

(DIAGNOSTICO)

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la Investigación

En 1990, dada la problemática que se presentaba sobre el aprendizaje del AL, se forma una organización denominada Linear Algebra Curricular Study Group (LACSG), que realizó un taller nacional (USA) para discutir asuntos relacionados con los problemas de la enseñanza y aprendizaje del AL. A este taller asistieron principalmente matemáticos y representantes de otras profesiones donde se hace uso del AL. Uno de los productos de ese taller fue un conjunto de recomendaciones para mejorar el currículo de esta materia. LACSG fue conformado por: David Carlson, Charles R. Johnson, David C. Lay y A. Duane Porter, para mejorar el currículo de AL. Son ellos quienes recomiendan apartarse de la abstracción y acercarse a un curso más concreto, basado en matrices (Carlson, 1997). Dicho grupo tiene influencia en la redacción de los libros actuales, donde se nota claramente el enfoque hacia las aplicaciones de AL en muchas ramas de ciencias y la ingeniería.

La enseñanza del AL y, sobre todo, las dificultades de los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta disciplina han recibido la atención de varios investigadores que están trabajando sobre la didáctica del AL. Entre ellos un grupo francés integrado por Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet, Marc Rogalski, Michele Artigue, Marlene Alves Días, Ghislaine Chartier, un grupo canadiense con Anna Sierpinska y Joel Hillel, y en EEUU Guershon Harel y Ed Dubinsky. En los estudios iniciales, se encontró que, en la mayoría de las universidades, los cursos de AL no eran exitosos en términos del aprendizaje de los alumnos (Harel, 1989; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999; Sierpinska, 2000). Surgió de ahí el interés por formular propuestas didácticas específicas para el AL.

Varios estudios de diagnóstico dirigidos por Dorier, Robert, Robinet y Rogalski entre 1987 y 1994 apuntaron a un solo obstáculo bien definido, que aparece en todas las sucesivas generaciones de estudiantes y para casi todos los modos de enseñar, a saber, lo que llamaron el obstáculo del formalismo. La naturaleza abstracta del AL, los problemas con diseños didácticos y el uso de diferentes tipos de lenguajes son algunas de las fuentes de obstáculos que se identifican en estas investigaciones. No es sorprendente que AL sea abstracto y difícil para la mayoría de los estudiantes.

En 1997 Dubinsky publicó un artículo donde advertía que las dificultades que tienen los estudiantes con los conceptos de AL no pueden y no deben evitarse concentrándose en los aspectos computacionales de esta materia y eludiendo la abstracción. Dubinsky sostenía que la abstracción y el formalismo son la esencia de las matemáticas y, por tanto, se debe encontrar maneras de facilitar a los estudiantes experiencias agradables cuando se inician en la disciplina.

El LACSG elaboró una serie de recomendaciones para mejorar la enseñanza del AL en la universidad. Estas recomendaciones son las siguientes:

1. El programa y la presentación del primer curso de álgebra lineal debe responder a las necesidades de las disciplinas donde ésta se usa.
2. Los departamentos de matemáticas en las universidades deberían considerar hacer su primer curso de álgebra lineal un curso orientado hacia las matrices.
3. Los profesores deben considerar las necesidades e intereses de los estudiantes como aprendices.
4. Debe estimularse que los profesores usen las tecnologías en el primer curso de AL.
5. Por lo menos un segundo curso en teoría de matrices/AL debería tener una alta prioridad en todo currículo de matemáticas.

El LACSG generó este conjunto de recomendaciones para un primer curso de AL, tras su trabajo se celebraron numerosas reuniones nacionales (USA) sobre el aprendizaje y enseñanza del AL, y se escribieron varios libros con base a estas recomendaciones. Las recomendaciones de LACSG se basaron en la combinación de dos fuentes principales:

1. Conocimiento basado en la investigación de ¿cómo aprenden los estudiantes?, ¿cómo se debe enseñar? y ¿qué consideraciones pedagógicas y epistemológicas están involucradas en el aprendizaje- enseñanza del AL?
2. La experiencia que cada uno de los miembros de LACSG tenía en la enseñanza de AL.

Algunos libros que contrastan con estas recomendaciones son los de ediciones anteriores de libros como Serge Lang (1986 español), Stephen H. *Friedberg (1982)*, Ray Kunze (1971).

Tomando en cuenta lo anterior concluimos que los libros “viejitos” (antes de los 90’s) siguen el esquema: Espacios vectoriales, Transformaciones lineales como capítulos iniciales; hacen énfasis en el aprendizaje formal, igual que el programa oficial de FCFM- BUAP, mientras que los libros recientes van dirigidos a un público más amplio (después de los 90´s) que hacen mayor énfasis en las aplicaciones. Por ello conviene establecer claramente si nos preocupamos por un sector amplio o exclusivamente en estudiantes de matemáticas.

Los estudios que se relacionan a nuestro trabajo son los siguientes:

La investigación de Rodríguez (2011) realizada con profesores del departamento de Matemáticas, explica que una de las dificultades a tener en cuenta es la falta de interés de los estudiantes en el aprendizaje, como también el formalismo en cada definición que se les presenta. Tiene por objetivo realizar un diagnóstico sobre el curso AL desarrollado por la Universidad de los Andes, y a partir de este diagnóstico determinar cuáles eran las principales dificultades que se presentaban en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho curso.

Una de las principales dificultades en el aprendizaje de AL tiene que ver con la variedad de lenguajes de representación, puntos de vista y configuración a través del cual pueden representar los objetos de AL. Los estudiantes tienen que distinguir estas diversas maneras de representar objetos de AL, pero también necesitan traducir de uno a otro y, sin embargo, es importante no confundir los objetos con sus diferentes representaciones. Rodríguez afirma que los estudiantes tienen dificultades de tipos conceptuales; entre otras razones, el alto nivel del formalismo empleado por el docente.

El AL abstracta supone que el alumno es capaz de usar varios lenguajes y representaciones con facilidad. Los docentes y los libros de texto se mueven entre estos lenguajes y representaciones con fluidez, pero no se les da tiempo a los estudiantes comprender las definiciones, teoremas y demostraciones en un enfoque formal. Es un error suponer que los estudiantes comprenderán conforme pasa el curso, sin mayores contratiempos. En realidad, la mayoría de los estudiantes no tienen el marco cognitivo para realizar el cambio de representación con facilidad (Stewart, 2018). Por supuesto, los docentes y los autores de libros se mueven entre estas representaciones y modos, de manera muy natural y rápida, sin dar tiempo a los estudiantes para asimilar tanta información nueva (vectores en Rn, matrices, polinomios, funciones continuas).

Otra investigación que revisamos es la de Ulicab y Oktaç (2006) realizada con estudiantes que terminaron una licenciatura en enseñanza de las matemáticas que tiene por título “Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica” la cual tiene por objetivo principal observar las conexiones que los estudiantes desarrollan entre conceptos y su naturaleza. En su trabajo tratan de explicar por qué los estudiantes no tienen éxito en la resolución de problemas donde piden determinar una TL por medio de las imágenes de los vectores de una base, basándose en la experiencia y observación de los resultados que obtenían. Aquí, los investigadores utilizan como marcos teóricos de referencia: El pensamiento teórico versus el pensamiento práctico, definido por Sierpinska y el obstáculo del formalismo según Dorier y otros.

En Molina (2007), "concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico" se menciona que un rasgo característico del AL es el alto nivel de abstracción. Lo anterior se traduce en un problema para los estudiantes (por lo menos los considerados en la investigación, los cuales son estudiantes que habían terminado una licenciatura en enseñanza de las matemáticas), ellos tienden a olvidar dichos conceptos vistos desde un enfoque formal, como es el caso de las propiedades de la TL.

A pesar de la abundancia en investigación sobre el tema de TL, no se encuentran trabajos que se aboquen a los aspectos cognitivos relacionados con la TL en estudiantes de ciencias físico matemáticas en nuestro país, esta investigación pretende contribuir justamente en esta dirección. Los aspectos cognitivos muestran que los estudiantes tienen dificultades para entenderla, lo cual se puede expresar bajo la forma de mecanismos o interpretaciones personales que en muchos casos difieren de la interpretación que el AL pretende comunicar y, en algunos casos, obstaculizan su entendimiento formal (Sierpinska, 1996).

Además, se analizaron varios libros de AL donde autores como Howard Anton reconocen dificultades para el aprendizaje, en su prólogo (quinta edición) comenta que:

- ✓ Debería de haber una transición más suave hacia la abstracción: La transición de R^n a espacios vectoriales generales es traumática para casi todos los estudiantes, de modo que ha intentado suavizarla, analizando R^n en detalle, recalcando los conceptos geométricos subyacentes antes de proceder con el estudio de espacios vectoriales generales.
- ✓ Exposición temprana de transformaciones lineales.
- ✓ Mayor énfasis en la conceptualización.

Los Investigadores concluyen que cuando se recurre a aspectos geométricos y abstractos de conceptos, se tiene que buscar un equilibrio entre ambos, para que los estudiantes se apropien adecuadamente de los significados que involucran dichos conceptos. También, enfatizan la importancia de considerar problemas novedosos que permitan a los estudiantes poner en práctica sus conocimientos adquiridos, donde conceptos diferentes deberían articularse para solucionar los problemas que se les plantee.

Tomamos como guía dichos artículos y tesis de investigación ya que por un lado nos brindan un enfoque muy cercano de lo que suponemos en nuestra problemática, y por otro lado nos muestran la dificultad que tienen los alumnos en el tema de TL, sobre todo con el formalismo.

2.2 Bases teóricas

2.2.1 Concepto imagen

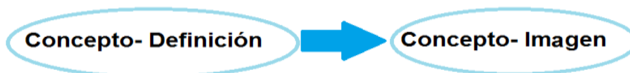
A principios de los años ochenta, Vinner y Tall (1981) introducen la terminología concepto-imagen y concepto-definición, estableciendo así una diferencia entre lo que un concepto matemático significa para los alumnos y la definición del concepto. Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Pero un estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, si no, que en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en el concepto-imagen.

Vinner y Tall (1991) se refieren al concepto-definición como la expresión verbal utilizada para especificar cualquier concepto (definición formal). Por otro lado, mencionan que el término concepto-imagen es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y, las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. (Traducción libre)

Por ejemplo cuando escuchamos la palabra “función”, podríamos asociar con la expresión $y = f(x)$, o bien, visualizar la gráfica de una función, pensado en funciones específicas tales como $y = x^2$ o $y = sen(x)$, etc. Es claro que un mismo estudiante puede reaccionar de manera diferente ante un mismo concepto en situaciones distintas. Tall y Vinner (1981) utilizan el término “imagen evocada del concepto” para describir lo que se recuerda en un contexto dado.

La enseñanza de un concepto matemático generalmente está dada por la presentación de la definición formal y se espera que la imagen de ese concepto se forme a partir de la misma. Es por ello, que la mayoría de los docentes, según afirma Vinner (1991) tienen la creencia (casi siempre errónea) de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan su razonamiento en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que sus imágenes tienen un papel secundario. Pero las cosas no ocurren así, durante el proceso de formación de conceptos, la relación entre imagen y definición del concepto es recíproca, teniendo en cuenta que el concepto-imagen se va llenando gradualmente, pero no necesariamente refleja todos los aspectos del concepto-definición. Sin embargo, lo que esperan algunos docentes es que ese sea el esquema habitual (Figura 1),

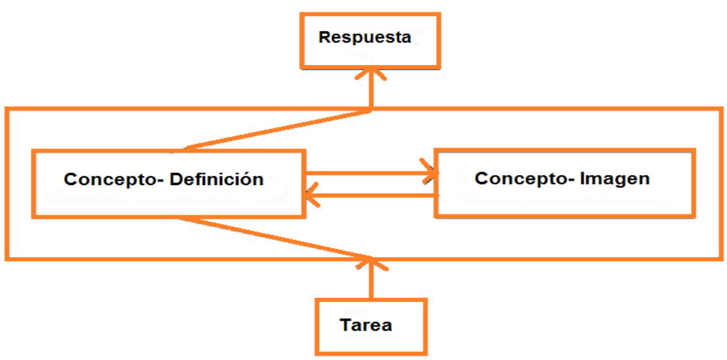
Figura 1. Proceso de formación de conceptos



es decir, que el concepto- imagen se forme en las mentes a partir del concepto definición y que esté completamente controlado por éste (Vinner, 1991). Lo que en realidad suele ocurrir es que coexisten ambas imágenes conceptuales que, además, pueden incluir aspectos contradictorios. Esas contradicciones sólo se manifiestan cuando sean recordadas por el estudiante simultáneamente.

El comportamiento deseable de complementariedad entre imagen y definición para producir una respuesta, (Vinner, 1991) seria (Figura 2):

Figura 2. Interacción entre definición e imagen



Sin embargo, es reemplazado cuando no existe una verdadera integración entre las imágenes conceptuales como se muestra en la Figura 3 y Figura 4:

Figura 3. Deducción según el pensamiento intuitivo

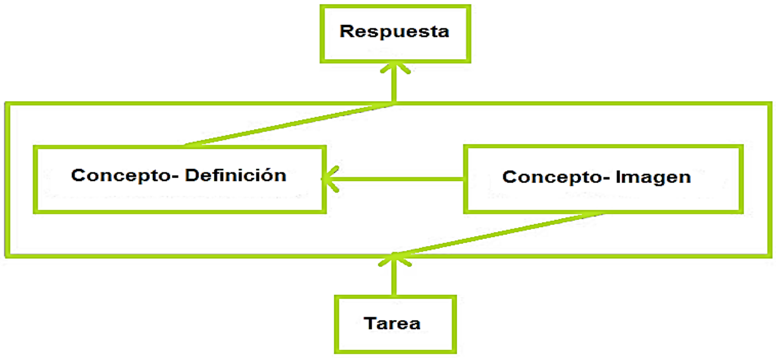
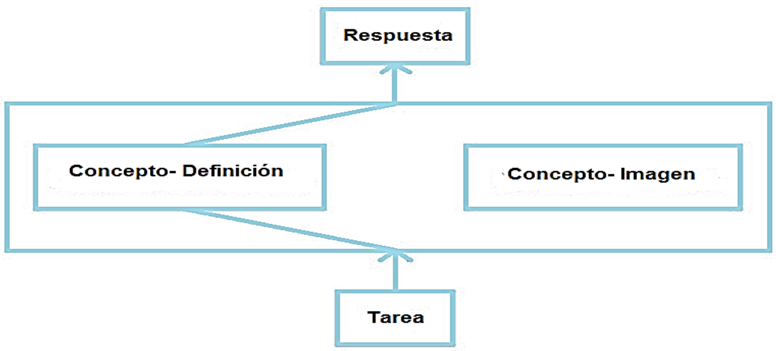
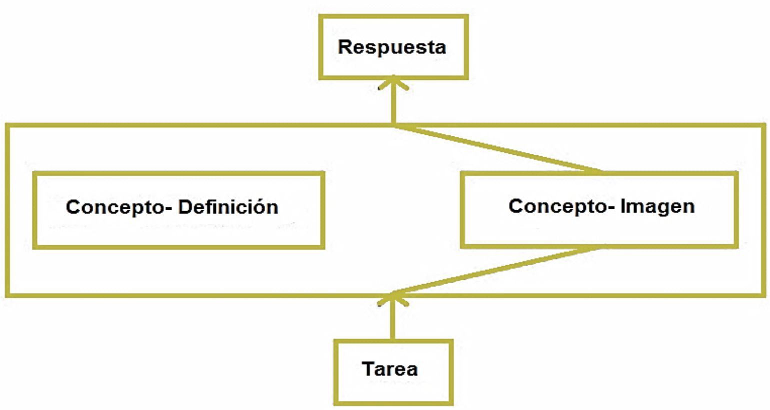


Figura 4. Deducción puramente Formal



La característica común a todos estos procesos ilustrados es que, reaccione como reaccione nuestro sistema de asociación, cuando se nos plantea un problema en un contexto técnico, se supone que no debemos formular nuestra solución antes de consultar la definición del concepto. Este es, por supuesto, el proceso deseable. Desafortunadamente, la práctica es diferente (Figura 5), ya que lo que realmente ocurre nos lo muestra la figura siguiente:

Figura 5. Respuesta intuitiva del estudiante



Aquí, lo que ocurre es que el concepto-definición existe, pero no es consultado durante el proceso de resolución de la tarea. Prevalecen los hábitos del pensamiento intuitivo, el estudiante no es consciente de la necesidad de consultar la definición una y otra vez.

El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto, tal como se ha puesto de manifiesto en algunos trabajos de investigación.

Por lo tanto, un sujeto adquiere un concepto cuando construye una imagen de él ya que se considera que conocer una definición, no garantiza la comprensión de dicho concepto (Vinner, 1991).

2.2.2 Análisis de libros de AL

El docente tiene que estar consciente del papel que el libro de texto recomendado ejerce en su clase. Es muy importante que sepa analizar y evaluar el libro que va a utilizar y que sepa reconocer si la propuesta pedagógica presentada en el libro reúne las condiciones esperadas para la formación del estudiante. El libro debe, presentar contenidos y actividades que ayuden al estudiante a alcanzar el conocimiento deseado. Ese conocimiento será adquirido por medio de la compresión y la resolución de ejercicios, propiciado por la observación y por el análisis de las tareas propuestas.

Como es frecuente, el docente planifica a partir de la estructura de la disciplina que enseña, secuenciando los contenidos y los temas como si tuvieran igual dificultad cada uno de ellos, pero se olvidan de los alumnos. El conocimiento que el docente transmite en una tarea de aprendizaje debe tener una doble estructuración, es decir, debe ser estructurado siguiendo el programa del curso y estructurado con respecto al conocimiento que posee el estudiante. Además de presentar y dar clase deben pensar cómo ayudar al alumno a estructurar su conocimiento.

La exposición tradicional el docente se apoya en uno o varios libros, pero hay que tener en cuenta que el alumno no comprende al mismo ritmo por ello es necesario que el alumno consulte en distintos libros recomendados por el docente (básico–avanzados). En el análisis de libros debemos observar su organización, estructura y todo lo que da sentido a su forma. Por lo tanto, es necesario identificar los rasgos principales que orientaron a los autores en la elaboración de sus libros.

Los libros de AL revisados, por el objetivo del autor y por las ventajas que ofrecen son:

1. **Introducción al algebra lineal** (tercera edición) por el autor Howard **Antón (1994)** donde comenta que su libro hace hincapié en presentar los fundamentos del AL de la manera más clara posible. El autor dice que "el aspecto pedagógico es lo más importante; el formalismo es secundario". Las ideas básicas se estudian por medio de ejemplos numéricos (más de 200) e interpretación geométrica. Otra idea importante del autor es que el profesor debe ir de lo familiar a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto; el ordenamiento de los capítulos ha tenido en cuenta este principio entonces la secuencia de temas que sigue el autor es la siguiente:
   1) Sistema de ecuaciones lineales y matrices.
   2) Determinantes.
   3) Vectores en los espacios Bidimensional y tridimensional.
   4) Espacios vectoriales
   5) Transformaciones lineales.
   6) Eigenvalores y eigenvectores.
   7) Aplicaciones.
   8) Introducción a los métodos numéricos del algebra lineal.

Ventajas del libro:

- Gran número de ejercicios. Cada conjunto de ejercicios se inicia con problemas rutinarios de "habilidad" y progresa hacia problemas más teóricos.
- El tratamiento de las demostraciones varía, aquellas que son elementales y tienen un contenido pedagógico significativo se presentan con precisión, en forma apropiada para los alumnos. Unas cuantas demostraciones que son más difíciles, pero pedagógicamente valiosas, aparecen al final de la sección y marcadas "opcional".

Una característica son las diferentes versiones del teorema resumen mismo que se va ampliando según se avanza (establece la relación entre conceptos). Hay ediciones más recientes disponibles en inglés.

2. **Linear Algebra a modern introduction** (cuarta edición) del autor **David Poole (2015)**. El autor comenta que desde un punto de vista pedagógico, no hay duda de que, para la mayoria de los alumnos, los ejemplos concretos deben anteceder a la abstraccion. Muchos alumnos encuentran dificultad al AL cuando el curso avanza de la realización (resolver sistemas de ecuaciones

lineales, manipulacion de vectores y matrices) de cálculos a lo teórico (espacios generadores, independencia lineal, subespacios bases y dimensión). Este libro introduce todos los conceptos clave del AL muy temprano, en un escenario concreto, antes de volver a visitarlos con total generalidad. La secuencia de temas que sigue el autor es la siguiente:

1) Vectores.
2) Sistema de ecuaciones lineales.
3) Matrices.
4) Eigenvalores y eigenvectores.
5) Ortogonalidad.
6) Espacios vectoriales.
7) Distancia y aproximación.

EL capitulo de espacios vectoriales contiene los temas de; espacios y subespacios vectoriales, independencia lineal y dimension, cambio de base, TL, kenel y el rango de una TL, la matriz de una TL y aplicaciones.

Ventajas del libro:

- Los ejercicios en cada sección están graduados y avanzan de lo rutinario a lo desafiante.
- Aparecen ejercicios adicionales en forma de repaso al final de cada capítulo.
- Existen 10 preguntas verdadero/ falso diseñadas para poner a prueba la comprensión conceptual, seguidas por 19 ejercicios de cálculo y teóricos que resumen los principales conceptos y técnicas de cada capítulo.

3. **Algebra línea I** (octava edición) del autor **Bernard Kolman (2006)** dice que su experiencia le ha enseñado que los conceptos abstractos deben presentarse de manera gradual y basarse en fundamentos firmes. Por lo tanto, comienza el estudio del algebra lineal con el tratamiento de las matrices como simples arreglos de números que surgen de manera natural en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, un problema familiar para el estudiante. El autor comenta que: “Cuando se construye una casa, lo primero que se coloca son los cimientos; el estudio del algebra lineal sigue el mismo principio, cada idea abstracta tiene como base una serie de conceptos desarrollados previamente, si alguno de tales conceptos le resulta confuso o sencillamente incomprensible, sus conocimientos serán insuficientes para entender las ideas subsecuentes”. Por lo que, organiza los temas de su libro de la siguiente forma:
   1) Ecuaciones lineales y matrices.
   2) Aplicaciones de ecuaciones lineales y matrices.

3) Determinantes.
4) Vectores en $\mathbb{R}^n$.
5) Aplicación de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$(opcional).
6) Espacios vectoriales reales.
7) Aplicaciones de espacios vectoriales reales (opcional):
8) Valores propios, vectores propios y diagonalización.
9) Aplicaciones de valores y vectores propios (opcional).
10) Transformaciones lineales y matrices.

Ventajas del libro:

- ❖ Al final de cada sección se tiene un listado de términos clave.
- ❖ En las preguntas de falso/ verdadero se pide al estudiante que justifique su respuesta, lo que da una oportunidad adicional para exploración y redacción.
- ❖ Al final de cada sección se da un repaso acumulativo.

4. En el libro **Algebra lineal** (séptima edición) de **Stanley I. Grossman (2012)** existe un gran número de temas de algebra lineal para una gran variedad de estudiantes que necesitan únicamente conocimientos firmes del algebra correspondientes a la enseñanza media superior. El autor expresa que los estudiantes aprenden matemáticas mediante ejemplos completos y claros contiene 350 ejemplos, cada uno de los cuales incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución. Además, el texto contiene 2750 ejercicios, al igual que en todos los libros de matemáticas, estos constituyen la herramienta más importante del aprendizaje, los problemas conservan un orden de acuerdo con su grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones.
El libro contiene los temas;
   1) Sistema de ecuaciones.
   2) Vectores y matrices.
   3) Determinantes.
   4) Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
   5) Espacios vectoriales.
   6) Espacios vectoriales con producto interno.
   7) Transformaciones lineales.
   8) Valores característicos, vectores característicos y formas canónicas.

Ventajas del libro:

- ❖ Los problemas conservan un orden de acuerdo con su grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones.
- ❖ Teorema resumen, que une temas que en apariencia no tienen nada en común dentro del estudio de matrices y transformaciones lineales.
- ❖ Problemas de autoevaluación diseñados para valorar si el estudiante comprende las ideas básicas de cada sección.

Los objetivos de la sección de transformación lineal son:

- ➢ Aprender la definición de las transformaciones lineales, que se puede interpretar como una generalización del concepto de funciones.
- ➢ Se estudió el concepto de núcleo e imagen de las transformaciones lineales, a partir de las cuales se caracteriza su comportamiento.
- ➢ Profundizar un tipo especial de isomorfismo.

5. **Algebra Lineal** (primera edición) de **Stephen H. Friedberg**, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence (1982) en su libro tienen como propósito esencial presentar cuidadosamente los principales temas del algebra lineal e ilustrar la utilidad de la materia a través de una amplia variedad de aplicaciones. Muestra la teoría básica de espacios vectoriales de dimensiones finitas, subespacios, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, bases y dimensiones, así como el desarrollo de las transformaciones lineales y sus relaciones con las matrices; ahí se discute el espacio vacío y el límite de una transformación lineal, representaciones matriciales de una transformación, isomorfismo y cambios de coordenadas, este libro está dividido en las siguientes secciones;
   1) Espacios vectoriales
   2) Transformaciones lineales y matrices
   3) Operaciones elementales en matrices y sistemas de ecuaciones lineales
   4) Determinantes
   5) Diagonalización
   6) Formas canónicas
   7) Espacios con producto interno.

Ventajas del libro:

- ❖ Introducción temprana de espacios vectoriales
- ❖ El libro ofrece un estudio formal y exhaustivo de los espacios vectoriales y sus transformaciones.
- ❖ Ejemplos con pocos detalles de solución que ayudan al estudiante a indagar por su parte y usar conocimientos que ya conoce.

6. **Elementary Linear Algebra** (séptima edición) de **Ron Larson** y David C. Falvo (2013) en su libro nos muestran que tienen como objetivo resaltar los conceptos clave cubiertos en cada capítulo para que sirvan como una guía para el aprendizaje de los estudiantes, el libro es recomendable ya que fue diseñado para ayudar a los estudiantes a desarrollar una compresión intuitiva de los conceptos y relaciones matemáticas. A continuación, se presenta el orden que siguen los autores en la presentación de capítulos;
   1) Sistema de ecuaciones lineales
   2) Matrices
   3) Determinantes
   4) Espacios vectoriales
   5) Espacios productos internos
   6) Transformaciones lineales
   7) Eigenvalores y eigenvectores
   8) Espacios de vector complejo
   9) Programación lineal
   10) Métodos numéricos

Ventajas:

- ❖ Contiene en cada capítulo un apartado de ¿verdadero o falso?, ejercicio que prueba los conocimientos de los conceptos básicos. Se les pide a los estudiantes que den ejemplos o justificaciones para apoyar sus conclusiones.
- ❖ Gráficos y énfasis geométricos: Las habilidades de visualización son necesarios para la comprensión de los conceptos matemáticos y la teoría.
  Los gráficos acompañan ejemplos, así como ilustraciones generadas por computadoras.
- ❖ Al final de cada capítulo aparece un examen acumulativo que ayuda a los estudiantes a sintetizar los conocimientos que han acumulado a lo largo del texto, así como a prepararse para los exámenes.

El revisar algunos libros de AL nos ayudó en la creación de nuestra secuencia didáctica y a entender la complejidad de enseñar AL a un amplio grupo de alumnos. Y si bien estamos realizando un estudio en FCFM donde nos interesa un enfoque formal, creemos que es recomendable auxiliarse de un libro de exposición formal, pero con variedad de ejemplos, además hay que tener en cuenta que la presentación del tema de TL abstracta y compacta se presenta en cursos posteriores, pero ahí la presentación es muy breve y no tienen interés en las aplicaciones entre ellos se encuentran los autores Herstein, Rotman, Fraleigh y otros del tipo "algebra moderna".

A través de la revisión de los libros que revisamos notamos que todos ellos toman en cuenta los mismos temas solo que cada autor sigue el orden que cree pertinente según su experiencia, por lo cual se recomienda que el docente seleccione el texto según los temas que pretende enseñar ya sea que tome todos los temas del mismo libro o varié dependiendo como maneje cada autor los temas en su libro. Además, observamos un manejo tradicional de los conceptos de TL, con un esquema fijo. Éste se caracteriza por establecer, en primer lugar, las definiciones y teoremas de AL y luego mostrar ejemplos y ejercicios prácticos (aplicación de propiedades directas), relacionados con el concepto de TL.

Es posible, que la forma tradicional de enseñar (definición-Teoremas- Demostraciones-Ejemplos-Ejercicios) y aprender haga que los estudiantes no puedan articular las diferentes representaciones que se pueden realizar con el concepto TL. Los conceptos matemáticos son difíciles por naturaleza es por eso que el docente debe ayudar a resaltar las relaciones entre lo previo y lo nuevo ayudándose de algún libro que facilite la comprensión de conceptos del AL. Por esa razón se considera que el profesor tiene un papel muy importante dentro del aprendizaje del AL, en la enseñanza el profesor pretende ir de lo familiar a lo desconocido, usando ejemplos de lo concreto a lo abstracto donde los conceptos abstractos deben presentarse de manera gradual basándose en fundamentos firmes resaltando los conceptos clave.

2.2.2.1 Comparación de libros en el tema TL

Se decide comparar los libros anteriores de AL para poder confirmar una ventaja de los libros de matemáticas, y es que, sin importar el lugar, las matemáticas son las mismas, algunos conceptos presentados de manera más abstracta que otros, pero en general las definiciones y teoremas coinciden. Como es en el caso del curso de AL que se imparte en el nivel superior, donde el concepto de TL se presenta como a continuación;

1. Sean V y W espacios vectoriales (sobre F). Una función $T: V \rightarrow W$ se llama transformación lineal de V en W si para todo $x, y \epsilon V$ y $c \in F$ tenemos que;
    a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$
    b) $T(cx) = cT(x)$

(Friedberg, 1982, p.63)

2. Si $F: V \to W$ es una función del espacio vectorial V hacia el espacio vectorial W, entonces F es una transformación lineal si,
   a) $F(u+v) = F(u) + F(v)$ para todos los vectores u y v en V
   b) $F(ku) = kF(u)$ para todos los vectores u en V y todos los escalares k.

(Anton, 1994, p.247)

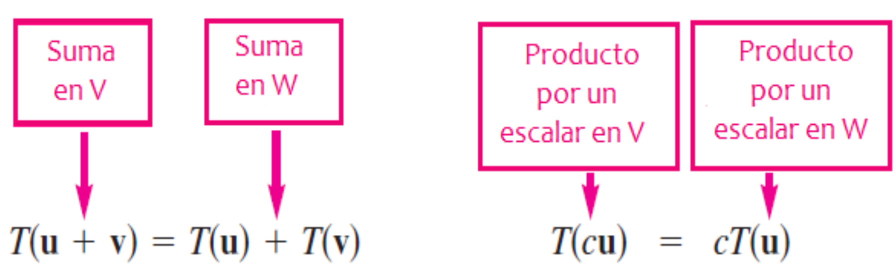
3. Sea V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,
   a) $T(u+v) = Tu + Tv$
   b) $T(\alpha v) = \alpha tv$

(Grossman.2008, p.460)

Como se observa en las definiciones de TL no hay diferencias esenciales en el concepto, solo varia la manera en cómo el autor la presenta sin embargo es importante resaltar las características del concepto para apoyar el aprendizaje del estudiante. Aunque las definiciones son de distintos libros, se observa que manejan los mismos conceptos como son los de espacio vectorial, función y las propiedades de suma y producto por un escalar.

La ventaja de sugerirle al estudiante varios libros de AL es que tiene la opción de elegir el que más se adapte a sus necesidades de aprendizaje, teniendo en cuenta que sin importar el libro que utilice, el concepto TL preserva la operación debido a que el mismo resultado se produce al realizar las operaciones de suma y producto por un escalar antes o después de aplicar la transformación. Aunque los mismos símbolos denotan las operaciones vectoriales en ambos, se debe tener en cuenta que las operaciones pueden ser diferentes, como se indica en los siguientes diagramas (Figura 6);

Figura 6. Forma en la cual el alumno debería comenzar a entender la definición



Lo que se pretende con el diagrama es que el estudiante lo tenga presente y lo aplique en los ejercicios de los distintos libros sin importar como se le presente el ejercicio.

Después de observar la estructura del concepto de TL, se realizó una comparación de los textos anteriores enfocándonos en los tipos de ejemplos y ejercicios que existen en cada uno de los libros propuestos para el curso, según el espacio vectorial (1,2,11,12), tipo de TL (3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,15), ejemplos y ejercicios que combinan diferentes conceptos de AL (16,17,18,19,20) y algunos otros que requieren demostración (21,22,23) como se muestra en la Tabla 1 y Tabla 2. Los principales ejemplos y ejercicios referentes al concepto de TL que se encuentran en libros de AL de autores como, Anton, Grossman, Larson, Friedberg, Kolman y Poole:

	Ejemplos	Anton	Grossman	Larson	Friedberg	Kolman	Poole
1	$\mathbb{R}^n \quad n \geq 1$		×	×	×	×	×
2	Matrices	×	×	×	×	×	×
3	T. Rotación	×	×	×	×	×	
4	T. Cero	×		×	×		×
5	T. Identidad	×		×	×		×
6	T. Dilatación	×				×	
7	T. Contracción					×	
8	T. Reflexión			×	×	×	×
9	T. Proyección Ortogonal		×	×	×	×	
10	T. Producto interior	×					
11	Polinomios		×	×		×	×
12	Funciones continuas		×	×		×	
13	T. Diferencial		×	×	×	×	×
14	T. Integral	×	×	×	×		×
15	T. Geométrica	×	×				
16	Imagen	×	×	×	×	×	×
17	Preimagen	×	×				
18	Dimensión	×	×	×	×		×

19	Núcleo	×	×	×	×	×	×
20	Nulidad	×	×	×	×		×
21	Rango	×	×	×	×		×
22	Inyectividad		×	×	×	×	×
23	Sobreyectividad		×	×	×	×	×
24	Isomorfismos		×	×	×		×
	Frecuencia de ejemplos	14	18	19	17	14	16

Tabla 1. Comparación de libros según los ejemplos de TL

Por los ejemplos observados en los distintos libros notamos que el autor Larson del libro Elementary Linear Algebra tiene gran variedad de ejemplos gráficos tiene énfasis geométrico respecto a los conceptos de TL, además existe un equilibrio entre teoría y práctica, los ejemplos y aplicaciones son de gran apoyo para el estudiante. Otra recomendación de libro por la cantidad de ejemplos es el libro de Grossman que contiene numerosos ejemplos, cada uno de los cuales incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución.

Después de comparar los ejemplos de los distintos libros, se cree que es oportuno analizar los ejercicios (Tabla 2) de los mismos libros para decidir qué libro tiene equilibrio entre ejemplos y ejercicios;

	Ejercicios	Anton	Grossman	Larson	Friedberg	Kolman	Poole
1	$\mathbb{R}^n \quad n \geq 1$	×	×	×	×	×	×
2	Matrices	×	×	×	×	×	×
3	T. Rotación	×	×	×	×	×	
4	T. Cero			×	×		×
5	T. Identidad			×	×		×
6	T. Dilatación	×				×	
7	T. Contracción	×				×	
8	T. Reflexión	×	×	×	×	×	
9	T. Proyección Ortogonal	×	×	×	×	×	
10	T. Producto interior			×			

11	Polinomios	×	×	×		×	×
12	Funciones continuas	×	×			×	
13	T. Diferencial		×	×	×	×	×
14	T. Integral		×	×	×		×
15	T. Geométrica	×	×	×			
16	Imagen	×	×	×	×	×	×
17	Preimagen	×	×	×		×	×
18	Dimensión	×	×	×	×	×	×
19	Núcleo	×	×	×	×	×	×
20	Nulidad	×	×	×			×
21	Rango	×	×	×		×	×
22	Inyectividad		×	×	×	×	×
23	Sobreyectividad		×	×	×	×	×
24	Isomorfismos		×	×			×
	Frecuencia de ejercicios	16	19	21	14	17	16

Tabla 2. Comparación de libros según ejercicios de TL

Por variedad de ejercicios el libro recomendable es del autor Larson nuevamente, el ejercicio de ¿verdadero o falso? Pone a prueba los conocimientos de los conceptos básicos. Al final de cada capítulo aparece un examen acumulativo que ayuda a los estudiantes a sintetizar los conocimientos, así como a prepararse para los exámenes. Este libro no exige tener conocimientos previos de cálculo o análisis matemático, y se puede estudiar con la perspectiva práctica, necesaria para todo aquel interesado en desarrollar conceptos abstractos.

Vinner (1997) señala que la solución de los problemas detectados en el aprendizaje y la enseñanza del AL va más allá de la elaboración de nuevos libros de texto y de reformar el currículo. Se requiere prestar atención a los procesos de pensamiento de los estudiantes. Las recomendaciones del grupo LAGCS influyen en los libros de ediciones recientes porque dan énfasis al enfoque matricial por ser apropiado para las aplicaciones.

Capítulo 3. MÉTODO

A pesar de que hay problemas de aprendizaje en el concepto de TL e investigaciones para erradicar o disminuir este problema, sigue faltando mayor conocimiento del fenómeno, en especial en nuestro contexto, por lo que consideramos conveniente abordar el problema como una investigación exploratoria, partiendo de la pregunta inicial que es ¿Cuáles son las dificultades de los alumnos en la FCFM-BUAP para comprender el concepto de TL?

Para ello se trabajó con un grupo de alumnos al que el docente presentó una secuencia de temas del programa pero tratando de suavizar los problemas de una presentación formal. Una actividad que se les pidió a los estudiantes fue consultar libros de AL y resolver ejercicios de la sección de TL principalmente, después se les aplicó un examen que tomamos del trabajo de Roa y Oktaç (2008) que se describirá en la sección 3.2. Las respuestas de los exámenes nos ayudan a detectar los errores, a mostrar en porcentajes que tipo de dificultad tienen los estudiantes y encontrar una manera de abordarlos.

3.1 Participantes

Los estudiantes participantes (Tabla 3) fueron alumnos de 4° semestre de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) seleccionados de una manera no probabilística la cual no pretende que los casos sean representativos de la BUAP, la selección de la muestra es por oportunidad o bien, estudiantes que se inscribieron en los cursos de AL lo que nos proporcionó una oportunidad extraordinaria para estudiarlos.

Participantes	Cantidad de alumnos que realizaron el examen
Curso I	45 estudiantes (1° examen)
	40 estudiantes (2° examen)

Tabla 3. Cantidad de estudiantes que participaron

Los estudiantes participantes son estudiantes de distintas carreras que se encuentran en FCFM; es decir, se aplicaron exámenes a los estudiantes que estaban estudiando las siguientes carreras:

1. Matemáticas
2. Matemáticas aplicadas
3. Física,
4. Física aplicada
5. Actuaria

Además, cabe señalar que los estudiantes ya tomaron materias previas útiles para un curso de AL tales como: matemáticas básicas, geometría analítica, cálculo diferencial, geometría analítica del espacio, teoría de ecuaciones e introducción a las estructuras algebraicas. Los cursos previos a AL cambian en cada universidad y carrera concreta. En nuestra opinión del curso previo de Teoría de ecuaciones, permite que el curso de AL inicie con espacios vectoriales, y las transformaciones lineales como capítulo 2 y por ello nuestro estudio exploratorio no puede aplicarse a otras universidades.

3.2 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

La técnica de recolección de datos es mediante la aplicación de un examen diseñado por Roa y Oktaç (2008) porque son ejercicios típicos de libros de AL, esto permitió concentrarnos en resolver ejercicios que aparecen casi en cualquier libro de AL. Cualquier docente tendría la oportunidad de resolver algunos o dejarlos de tarea. Sobre este material se podría juzgar la comprensión de los alumnos al analizar si lograban ver la TL en distintos espacios vectoriales, observando así las similitudes y diferencias entre las soluciones que dan los estudiantes a los ejercicios, con base en los resultados obtenidos al calificar los exámenes del curso I identificamos errores de comprensión del concepto TL.

Se usan dos instrumentos de recolección: El primero es un **Instrumento de observación de clase**, que fue utilizado para averiguar cuáles son los errores que cometen los estudiantes FCFM con el propósito de recolectar la mayor evidencia posible sobre lo que está pasando en la sesión de clase (orientaciones del docente, respuesta de los estudiantes, aclaración de dudas, entre otros). La observación fue de tipo no participativo, ya que el observador no interactuó con los estudiantes.

El segundo instrumento como se menciona anteriormente son los **exámenes para el estudiante (anexo 1 y anexo 2).** El propósito de este instrumento fue medir la compresión de los estudiantes en los conceptos de TL mediante las respuestas a los ejercicios de los exámenes y percibir así el tipo de errores que cometen. Cabe aclarar que los ejercicios de los exámenes son ejercicios típicos de los libros de AL que aparentemente no tienen nada en común. Dentro de estos ejercicios encontramos:

1. **Función de varias variables:** Son funciones con una relación entre varias variables. Invariante: **suma de funciones y producto por un escalar**

2. **Matrices:** Cualquier transformación lineal puede representarse mediante una matriz $T(x) = Ax$. Si $T: M_{n\times 1} \to M_{m\times 1}$ siendo $A \to M_{m\times n}$. Invariante al aplicar la TL: **suma de matrices y producto por un escalar**.
3. **Polinomios:** Están constituidos por un conjunto finito de variables y coeficientes, con las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación, así como también exponentes enteros positivos. Pueden ser de una o de varias variables. Invariante: **suma de polinomios y producto por una constante.**
4. **Imagen de los vectores:** Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y consideramos que V es un espacio de dimensión finita, y por ende, podemos decir que existen bases de dicho espacio. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de V, sobre la cuál tenemos definida la TL $T: V \to W$ por:

$$T(v_1) = w_1$$
$$\vdots$$
$$T(v_k) = w_k$$

   Donde $w_1, \ldots, w_k \in W$, pero tengamos en cuenta que no necesariamente son una base de W. Esta base puede ser canónica o fija.
5. **Preimagen de los vectores:** Dado un vector $y \in W$, $x \in V$ tales que $T(x) = y$ además $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = y$ es decir, escribimos a y como combinacion lineal del conjunto de generadores de la imagen de $T: \{w_1, \ldots, w_k\}$

El examen para el curso I se aplicó en dos etapas, la primera etapa la resolvieron en dos horas y la segunda en una hora con un total de 7 ejercicios. En la primera parte del (anexo 1) se resolvieron cuatro ejercicios, el primer ejercicio consistió en 5 incisos los cuales hacen énfasis a la definición y entendimiento de lo que es una TL, en el ejercicio 2 hablamos de matrices, consta de 2 incisos donde nuevamente se insiste en usar la definición de TL, el ejercicio 3 consistió en aplicar la definición de TL sobre polinomios como espacios vectoriales mientras que el ejercicio 4 se hace uso de la parte geométrica. Se pretende que los estudiantes asocien sus conocimientos previos de vectores, matrices, polinomios y geometría con el concepto TL.

En la segunda parte del examen (Anexo 2) del examen se resolvieron tres ejercicios, el primero ejercicio consta de tres incisos en los cuales se aplican las propiedades de TL, el segundo ejercicio pretende que el estudiante aplique un conocimiento con mayor grado de abstracción que es el de isomorfismo, el ejercicio pide comparar dos espacios vectoriales asociando el concepto de isomorfismo. Por último, el tercer ejercicio es un repaso de los teoremas que abarca el concepto de TL. El propósito de estos ejercicios es que el estudiante vincule los nuevos conocimientos de TL.

Una característica de los ejercicios propuestos en el examen es que se mueven entre 5 lenguajes (Tabla 4), con el propósito de que el estudiante note lo invariante dentro de ellos;

Tabla 4. Características de ejercicios teniendo en cuenta los 5 lenguajes

Lenguaje 1. El lenguaje de los sistemas de ecuaciones lineales.
El estudiante debe dominarlo para entender las transformaciones de unos sistemas de ecuaciones en otros que conserven el mismo conjunto de soluciones y también ciertos algoritmos que se emplean para resolverlos, como el de Gauss-Jordán o el de eliminación de Gauss.
Lenguaje 2. El lenguaje de las matrices.
El estudiante debe dominar la notación de matrices y debe comprender cómo se realizan las operaciones matriciales más comunes: suma de matrices, multiplicación de matrices por un escalar. El sistema anterior se convierte en una ecuación matricial.
Lenguaje 3. El lenguaje geométrico de rectas y de planos.
El estudiante debe aprender a interpretar los sistemas de ecuaciones lineales en términos geométricos, usando conocimientos en espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
Lenguaje 4. El lenguaje de los vectores
El estudiante debe comprender qué es un espacio vectorial y saber manejar su simbología El lenguaje de los espacios vectoriales es el que resulta más abstracto para el estudiante. Se espera de él que comprenda los conceptos subespacio vectorial, de espacio generado, de independencia lineal y de base de un espacio vectorial y otros semejantes.
Lenguaje 5. El lenguaje de las transformaciones lineales.
El estudiante debe saber manejar las nociones de núcleo e imagen de una TL. Además, debe saber calcular su rango y su nulidad, sus valores propios y sus espacios propios.

Capítulo 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LOS EXÁMENES

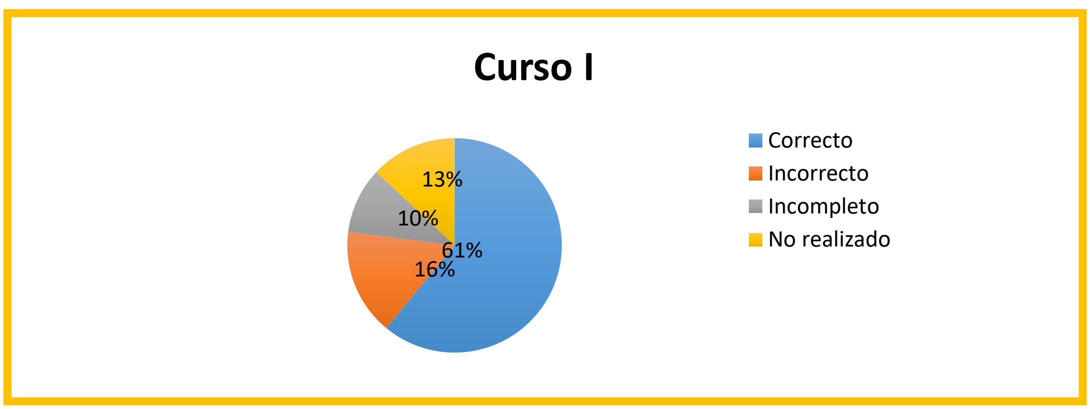
En el presente capítulo se presenta el análisis de los errores que los estudiantes cometieron al intentar resolver el examen que se les aplicó. Inicialmente se examinaron cada uno de los exámenes que se están tomando en cuenta, con el fin de distinguir cada uno de los errores que se produjeron al contestar dicho examen (Anexo 1), después se fueron clasificando de acuerdo con las características similares que podrían presentar en cada uno de los ejercicios o entre los demás exámenes. En la exhibición de tales errores se ponen imágenes las cuales pueden servir de ejemplo para resaltar lo que se menciona de dicho error.

Posterior a la aplicación de los exámenes y con base en la estrategia didáctica sobre la comprensión del concepto TL, se obtuvo que en el curso I, un 59% de los estudiantes comprenden y realizan correctamente los ejercicios, mientras que el 29% tuvo dificultades para realizar o completar con éxito el examen (anexo 1), mientras que los resultados de la segunda parte (anexo 2) nos muestran que un 63% de los estudiantes relaciona y comprende los conceptos relacionados al AL por lo que un 23% confunde conceptos. A continuación, se da una descripción de la clasificación de los resultados de los exámenes:

1. Correctos: Cuando los estudiantes aplican la estrategia correcta o realizan todas las operaciones correctamente,
2. Incorrectos: Uso de estrategia irrelevante o poco favorable para la solución del ejercicio.
3. Incompleto: Cuando los estudiantes realizan todas las operaciones correctamente, sin embargo, no concluyen correctamente.
4. No realizado: El estudiante no realizo el ejercicio.

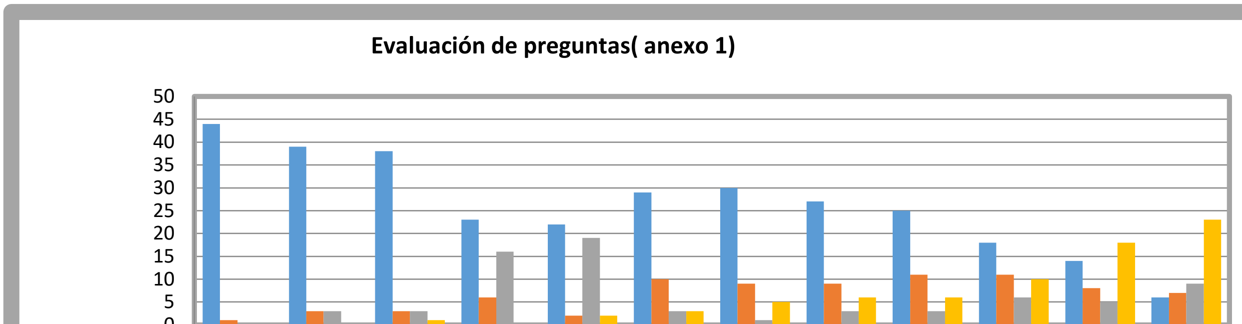
Al revisar los exámenes y usando la clasificación anterior se encuentra que (Figura 7):

Figura 7. Porcentajes del primer curso



El 87% de los estudiantes en la primera y segunda parte del examen realizaron los ejercicios con solución correcta, incorrecta e incompleta. Con un 4% aumentan las soluciones correctas e incorrectas en el segundo grupo, sin embargo, disminuye un 10% los ejercicios incompletos respecto a la primera parte. La solución de los ejercicios es importante para observar si hay o no dificultades de comprensión, por lo tanto, es necesario analizar cuidadosamente los ejercicios resueltos, de modo que, usando los mismos criterios de clasificación se evalúa cada pregunta de los exámenes y se presenta en tablas de frecuencia por pregunta (Figura 8);

Figura 8. Respuestas del primer grupo



	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b
Correctas	44	39	38	23	22	29	30	27	25	18	14	6
Incorrectas	1	3	3	6	2	10	9	9	11	11	8	7
Incompletas	0	3	3	16	19	3	1	3	3	6	5	9
Sin realizar	0	0	1	0	2	3	5	6	6	10	18	23

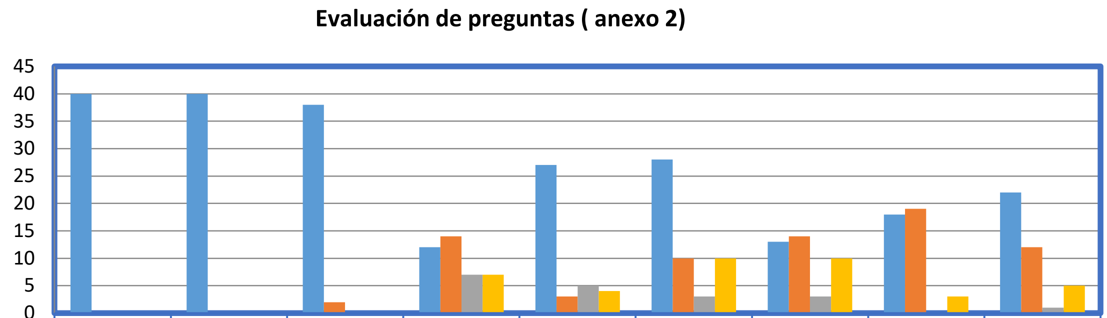
La solución incorrecta que tiene mayor frecuencia en los ejercicios resueltos son: 3b y 3c con un 24.4%, estos ejercicios están relacionados con polinomios, cometiendo problemas de adaptación a situaciones nuevas y a la falta de articulación en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

Con un 42.2% la frecuencia de solución incompleta está en el ejercicio 1e que le pide al alumno dar con sus propias palabras la definición de TL, con la intención de observar la coherencia entre sus argumentos de los incisos anteriores y las características de su definición. Sin en cambio, se observa insuficiente manejo de conceptos matemáticos y uso de procedimientos básicos de manera inapropiada.

Con un 40% y 51.1% los ejercicios 4a y 4b son los que con mayor frecuencia no se realizaron, estos tienen un enfoque geométrico que busca que los estudiantes determinen la forma de los vectores de S y su imagen bajo $T(S)$, permitiéndonos observar la relación que establecen entre los conjuntos presentados de manera algebraica y su representación geométrica.

En la segunda parte del examen se encuentro lo siguiente (figura 9);

Figura 9. Respuestas del primer grupo



	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c
Correctas	40	40	38	12	27	28	13	18	22
Incorrectas	0	0	2	14	3	10	14	19	12
Incompletas	0	0	0	7	5	3	3	0	1
Sin realizar	0	0	0	7	4	10	10	3	5

En la solución de la segunda parte del examen encontramos que con un 47.5% la frecuencia de solución incorrecta está en el ejercicio 3b. Aparentemente la dificultad del ejercicio está en que los alumnos no tienen presente con qué tipo de conceptos se está trabajando ni mucho menos la relación entre ellos, es decir, confunden y asocian los conceptos de dimensión del núcleo, imagen y dominio de la función de manera inadecuada.

La solución incompleta que tiene mayor frecuencia en los ejercicios resueltos es el ejercicio 2a, que se refiere a demostrar que un polinomio con grado menor o igual a 3 es isomorfo a una matriz 2×2. La dificultad en la solución del ejercicio está en que los alumnos tienen ausente el concepto de isomorfismo. Otra dificultad es que el alumno no relaciona sus conocimientos previos de TL como inyectividad y sobreyectividad.

Con un 25% los ejercicios 2c y 3a son los que con mayor frecuencia no se realizaron. La dificultad de los estudiantes radica en la falta de articulación entre conceptos y por no cumplir las condiciones necesarias mínimas bajo las cuales los procedimientos aplicados conducen a una respuesta válida.

Bajo la concepción que los errores no constituyen solamente un obstáculo para el aprendizaje de AL, sino que, si son previamente detectados y clasificados pueden convertirse en elementos disparadores de un aprendizaje significativo. Según Socas (1997), el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción. El cognitivismo sostiene que la mente del alumno no es una página en blanco: el estudiante tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento (puente cognitivo), pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. En la clasificación de los errores que realiza Socas se encuentran: Errores que tienen su origen en un obstáculo que surgen por el tipo de pensamiento necesario para estudiar AL y errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto asociadas con la naturaleza de los objetos del AL. Consideramos que tanto en uno como en otro caso hay una gran contribución de los distintos lenguajes y sus correspondientes modos de pensamiento en AL:

I. **Lenguaje geométrico:** el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
II. **Lenguaje aritmético:** usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc., y
III. **Lenguaje algebraico abstracto:** usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc. (Sierpinska, 1996). El alumno debe percibir que ya no se hace referencia a un espacio vectorial concreto.

Analizando los errores que habitualmente cometen los estudiantes, encontramos algunos factores que pueden explicar los mismos y que presentamos a continuación, basándonos en el trabajo de Rodríguez (2011) cuya clasificación de errores es la siguiente;

Errores conceptuales:

1. **ERRORES DEBIDOS A DIFICULTADES EN EL LENGUAJE:** se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.
2. **ERRORES DEBIDOS A UN APRENDIZAJE DEFICIENTE DE HECHOS, DESTREZAS Y CONCEPTOS PREVIOS:** son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.

Errores cognitivos:

3. **ERRORES DEBIDOS A ASOCIACIONES INCORRECTAS O A RIGIDEZ DEL PENSAMIENTO:** son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseverancia, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.

4. **ERRORES DEBIDOS A DIFICULTADES PARA OBTENER INFORMACIÓN ESPACIAL:** aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.
5. **ERRORES DEBIDOS A LA APLICACIÓN DE REGLAS O ESTRATEGIAS IRRELEVANTES:** son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Lo que se trata de hacer a continuación es evidenciar los procedimientos que realizan algunos estudiantes siguiendo la anterior clasificación de los errores.

3.1 Evidencias

Después de observar la clasificación de los resultados de los exámenes se presentan las soluciones de los alumnos del curso I, que mostraran las deficiencias, tales como el tipo de error asociado a cada dificultad. A continuación, algunas de las soluciones más interesantes a los ejercicios planteados en el curso I:

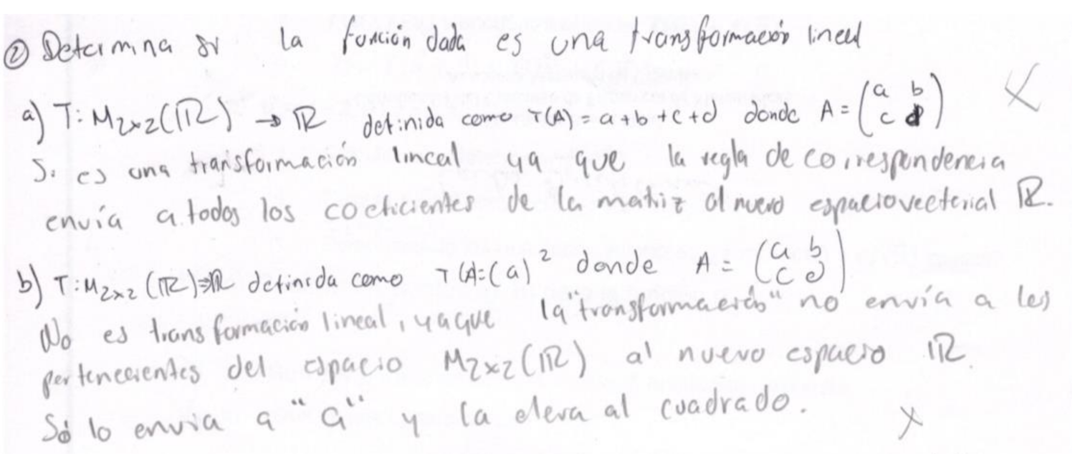
Pregunta 4 (Anexo 1). Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformacion lineal definida por $T(x, y) = (x, 4y)$

a) Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Determine la imagen de S bajo T
b) Describe en terminos geometricos S y su imagen.

Solucion:

TIPO 1: errores debidos a dificultades en el lenguaje; se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10. Ejemplo de una solución donde el estudiante comete un error del tipo 1


② Determina si la función dada es una transformación lineal

a) $T: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a+b+c+d$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Si es una transformación lineal ya que la regla de correspondencia envía a todos los coeficientes de la matriz al nuevo espacio vectorial $\mathbb{R}$.

b) $T: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = (a)^2$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

No es transformación lineal, ya que la "transformación" no envía a los pertenecientes del espacio $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ al nuevo espacio $\mathbb{R}$. Sólo lo envía a "a" y la eleva al cuadrado.

En este tipo de ejercicio se observa que el estudiante usa inadecuadamente el vocabulario matemático además de que se le dificulta el uso del lenguaje matemático y cuando intenta hacerlo, lo hace de manera inadecuada.

Pregunta 3 (Anexo 2). Indique, para cada una de las siguientes afirmaciones, si es cierta o si es falsa. Justifique su respuesta.

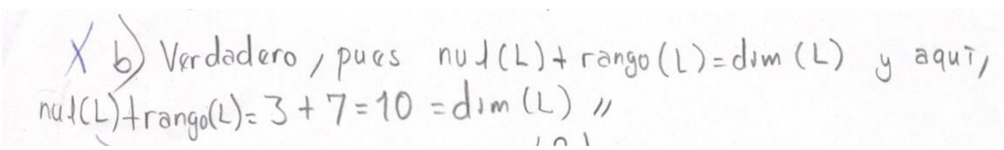
b)Sea $L: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ una transformacion lineal definida por $L(x) = Ax$ para x en $\mathbb{R}^6$. Si $nulidad(L) = 3$, entonces $rango(L) = 7$.

Solución:

TIPO 2: errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos previos: aquellos cometidos por;

1. Procedimientos básicos en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada (Figura 11).

Figura 11. Ejemplo de un estudiante donde comete un error del tipo 2



La solución al ejercicio anterior muestra que el estudiante es consiente que debe ocupar un teorema e intenta ocuparlo, pero en el trayecto, lo aplica equivocadamente.

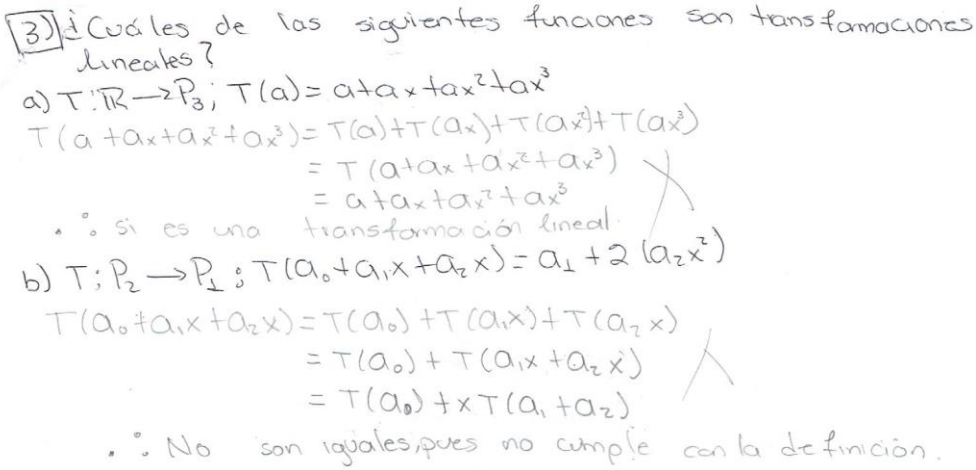
Pregunta 3 (Anexo 1): ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \rightarrow P_3; T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
b) $T: P_2 \rightarrow P_1; T(a_0 + a_1x + a_2x) = a_1 + 2a_2x$

Solución:

2. Deficiencias en el manejo de conceptos matemáticos (Figura 12):

Figura 12. Ejemplo de un estudiante que comete un error de tipo 2



$\boxed{3}$ ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

$T(a + ax + ax^2 + ax^3) = T(a) + T(ax) + T(ax^2) + T(ax^3)$

$= T(a + ax + ax^2 + ax^3)$

$= a + ax + ax^2 + ax^3$

$\therefore$ Si es una transformación lineal

b) $T: P_2 \to P_1$; $T(a_0 + a_1x + a_2x) = a_1 + 2(a_2x^2)$

$T(a_0 + a_1x + a_2x) = T(a_0) + T(a_1x) + T(a_2x)$

$= T(a_0) + T(a_1x + a_2x)$

$= T(a_0) + xT(a_1 + a_2)$

$\therefore$ No son iguales, pues no cumple con la definición.

En la solución al ejercicio anterior el estudiante aplica la linealidad sobre el Codominio, creyendo que cualquier objeto matemático lo cumple.

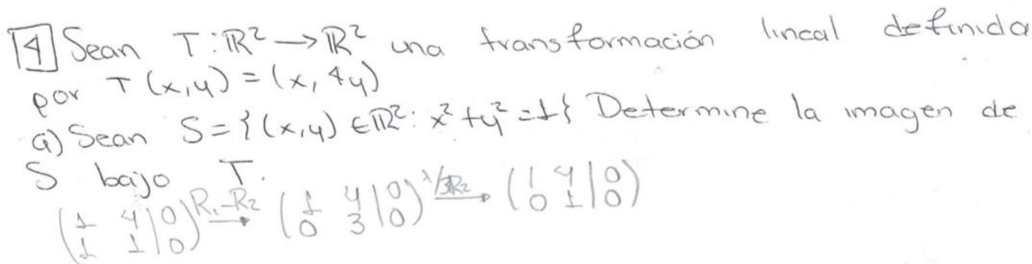
Pregunta 4 (Anexo 1): Sean $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformacion lineal definida por $T(x, y) = (x, 4y)$

a) Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Determine la imagen de S bajo T.

b) Describe en términos geométricos S y su imagen.

TIPO 3: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento; son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas o debidos a asociaciones incorrectas causados por la falta de articulación en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas (Figura 13);

Figura 13. Ejemplo de solución de un estudiante que comete un error del tipo 3



$\boxed{4}$ Sean $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $T(x, y) = (x, 4y)$

a) Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ Determine la imagen de S bajo T.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1/3 R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

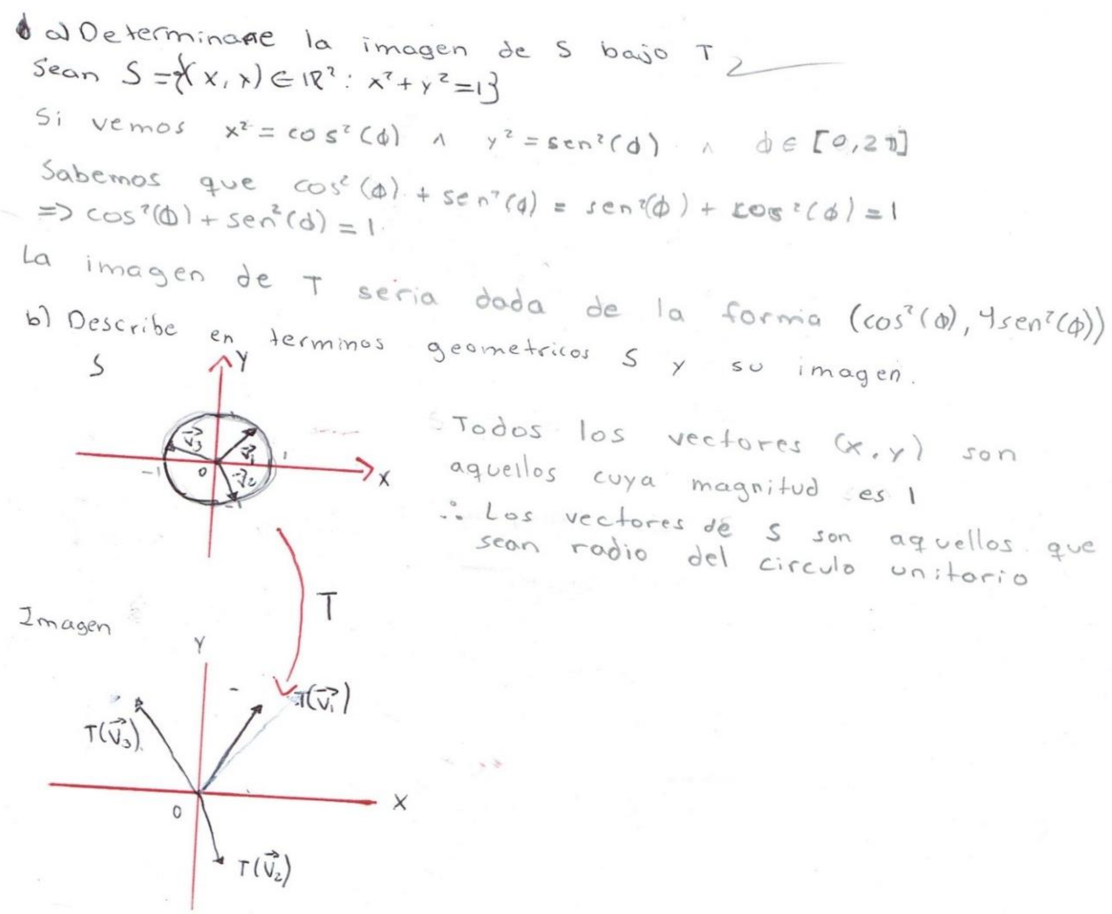
La solucion al ejercicio anterior es un ejemplo en el que el estudiante no se adapta a situaciones en las que usa conocimientos de otras materias adaptandolas a las nuevas situaciones.

Usando la misma pregunta 4 (Anexo 1), se muestran otros tipos de errores en la solucion del problema, como se muestra en el tipo de error 4 y 5.

TIPO 4: errores debidos a dificultades para obtener información espacial; aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.

i. Mala interpretación de lo algebraico a lo geométrico (Figura 14):

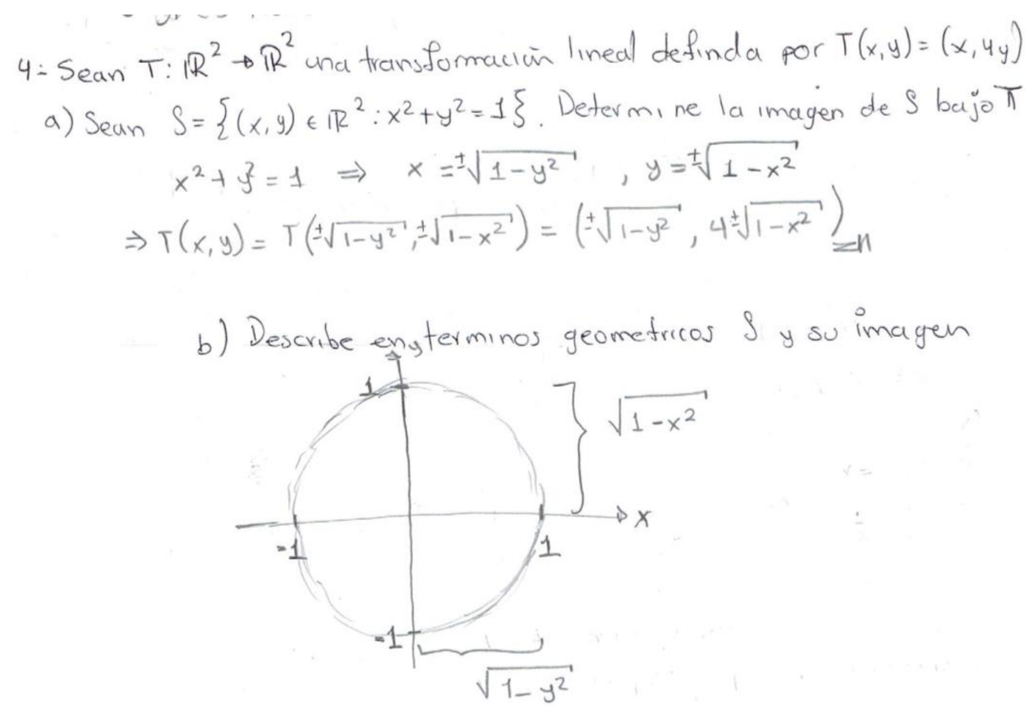
Figura 14. Ejemplo de un error de tipo 4



El ejercicio anterior pide describir la transformación en términos geométricos por lo que el error radica en que el estudiante no identifica como funciona una transformación en el aspecto geométrico.

ii. Deficiencia en relacionar conceptos geométricos (Figura 15).

Figura 15. Ejemplo de un error donde se muestra la dificultad para relacionar conceptos geométricos


4: Sean $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal defínida por $T(x,y) = (x, 4y)$

a) Sean $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$. Determine la imagen de S bajo T

$x^2+y^2=1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2}, \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

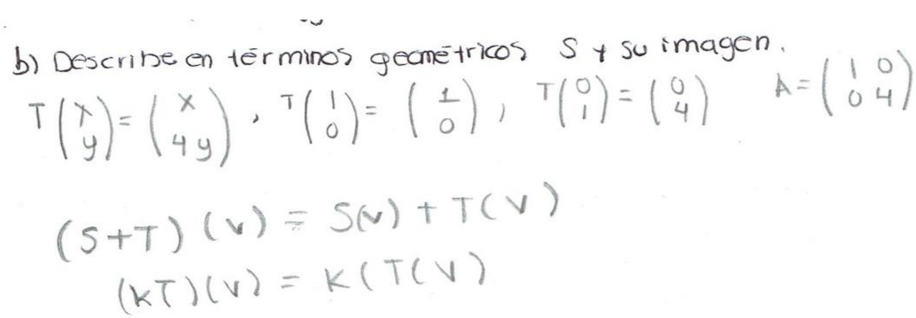
$\Rightarrow T(x,y) = T(\pm\sqrt{1-y^2}, \pm\sqrt{1-x^2}) = (\pm\sqrt{1-y^2}, 4\pm\sqrt{1-x^2})$

b) Describe en terminos geometricos S y su imagen

La dificultad radica en que el estudiante no interpreta los conceptos geométricos, intenta comprender como funciona la TL, pero se queda en el intento.

TIPO 5: errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes; son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes (Figura 16).

Figura 16. Ejemplo de solución con un error de tipo 5


b) Describe en términos geométricos S y su imagen.

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$(S+T)(v) = S(v) + T(v)$

$(kT)(v) = k(T(v))$

La solución anterior es un ejemplo de que el estudiante trata de aplicar algo que ya hizo en ejercicios anteriores, trata de solucionar el ejercicio como si fuera un ejercicio de encontrar imágenes o pre imágenes de vectores.

Estos ejemplos muestran que la articulación entre representaciones no se da de manera natural. La construcción inadecuada de un concepto se pudiera deber a una carencia de articulación entre diferentes lenguajes de representación o manera en la que el estudiante comprende el concepto, causando imágenes erróneas del concepto-definición. Después de evidenciar algunos resultados, mostraremos de manera general (porcentajes) la cantidad de estudiantes que cometen errores del mismo tipo según cada examen. Las tablas 5 y 6 muestran los porcentajes de estudiantes en cada tipo de error.

Tabla 5. Porcentajes y descripción de los errores del curso I en el primer examen (anexo 5)

Error	Porcentaje	Descripción
Tipo 1	5.9%	Dificultades en el lenguaje que se presentan en la utilización de conceptos y vocabulario matemático. No tienen presente con qué tipo de conceptos se está trabajando ni mucho menos la relación entre ellos.
Tipo 2	12.9%	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos previos aquellos cometidos por deficiencias en el manejo de conceptos matemáticos y procedimientos básicos en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento. Falta de fortaleza conceptual en los conceptos matemáticos previos.
Tipo 3	1.6%	Errores debidos a asociaciones incorrectas causados por la falta de articulación en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.
Tipo 4	5.4%	Errores debidos a dificultades en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico. Mala interpretación de lo algebraico a lo geométrico, deficiencia en relacionar conceptos geométricos.
Tipo 5	3.2%	Uso de estrategias poco favorables para la resolución de problemas que surgen por el tipo de pensamiento necesario para estudiar el concepto de transformación lineal.

Tabla 6. Porcentajes y descripción de los errores de los estudiantes del curso I en el segundo examen (anexo 5)

Error	Porcentaje	Descripción
Tipo 1	4.3%	Los estudiantes muestran dificultades al efectuar el cambio del lenguaje coloquial al lenguaje matemático. Los estudiantes saben que es lo requieren para

		realizar el ejercicio pero no como hacerlo.
Tipo 2	9.6%	Los estudiantes cometen errores de tipo conceptual debido a un aprendizaje deficiente de los conceptos previos que obstaculizan el paso del aprendizaje superficial al profundo.
Tipo 3	6.4%	Este tipo de error es debido principalmente al utilizar conceptos incorrectamente o innecesarios para la solución de ejercicios y por la falta de asociación de conocimientos.
Tipo 4	0%	No se pudo observar si los alumnos cometen errores de este tipo ya que ningún ejercicio de este examen requería el uso de información espacial.
Tipo 5	2.7%	Los estudiantes no analizan que estrategia de solución es la más apta, usan estrategias de solución irrelevantes o simplemente la aplican incorrectamente.

Mediante lo analizado en las tablas anteriores se identifica que el tipo de error que más comenten los estudiantes en la primera parte el curso I es del tipo conceptual mientras que en la segunda parte del examen abundan nuevamente los errores de tipo conocimientos previos seguidos del uso inapropiado de conceptos, tales errores nos ayudan a elegir el tipo de teoría necesaria para fortalecer algunos conceptos.

Capítulo 5. CONCLUSIONES PARCIALES

Los estudiantes del primer grupo están en un nivel básico de comprensión, esto se sabe por la aplicación de exámenes, y sus resultados mostrados en las tablas anteriores. Al analizar las soluciones de los exámenes se observa que existe un conflicto cognitivo causado por la falta de conexión entre conceptos, este conflicto es generado por adquirir un concepto y haber hecho una imagen inadecuadamente, respecto a otra del mismo concepto, se crea así un conflicto entre el concepto previo y el nuevo, que el estudiante creía correcto; esto sucede especialmente cuando la nueva imagen amplía límites de aplicabilidad del concepto o proporciona una versión más completa, generalmente por falta de comprensión y una errada interpretación.

Además, se observa que las limitaciones de los alumnos respecto a la comprensión del concepto de TL están relacionadas, muchas veces, con la ausencia de la noción del concepto, el excesivo hincapié en el cálculo algebraico y la falta de articulación entre conceptos. Las dificultades de los estudiantes para comprender el concepto TL se deben a su falta de flexibilidad al moverse entre lenguajes, ya que la mayoría de los estudiantes no tienen la estructura cognitiva para realizar el cambio.

Las dificultades anteriores nos proporcionan información sobre la situación de los estudiantes, así que es necesaria la detección y análisis de las dificultades para su utilización positiva en la realimentación del proceso de enseñanza para ayudar a buscar estrategias idóneas y contrastar los posibles problemas de aprendizaje del concepto TL, por lo cual el docente debe buscar estrategias metodológicas para disminuir sus consecuencias. Consideramos que lo que aprende el estudiante está fuertemente influenciado por la forma en la que se enseña y por el uso de libros de AL. En la actualidad existen muchos libros de AL con diversos enfoques, estos se distinguen por ser voluminosos y con muchas aplicaciones, pero esto no aplica a FCFM ya que el enfoque es mucho más formal, por lo que fue necesario evaluar el libro que se utilizó para la formación del estudiante.

A través de los resultados obtenidos y con la idea de utilizar los errores como oportunidades para aprender y enseñar, se estructura una intervención (parte II de este documento) en un segundo grupo, diseñando una secuencia didáctica con la cual se pretende aportar al análisis cognitivo del estudiante sobre el concepto TL que ayude a tener mejores resultados durante el aprendizaje de dicho concepto. Además, se considera a los exámenes como el instrumento para medir y la taxonomía Biggs como la medida.

PARTE II

(Intervención)

En esta parte se presenta la secuencia didáctica para el concepto TL en un segundo grupo y se hace una comparación de los resultados obtenidos de los exámenes de ambos grupos para saber si se está abordando las dificultades de la manera correcta o deficiente. Tomamos en cuenta la teoría taxonomía de Biggs para medir la comprensión del estudiante y la clasificación de Rodríguez para mostrar las dificultades. Por lo anterior nos apoyamos de otras teorías que consideramos apropiadas para complementar este trabajo, las cuales se presentan en el primer capítulo de este apartado.

Capítulo 6. TEORÍAS COMPLEMENTARIAS

Es frecuente que las orientaciones curriculares insistan en que el aprendizaje de las matemáticas debe ser significativo y que para conseguirlo “Los estudiantes deben aprender las matemáticas con comprensión, construyendo activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y los conocimientos previos” (NCTM, 2000, Principio de Aprendizaje).

6.1 Aprendizaje

El aprendizaje es un proceso de construcción, de intercambio activo entre un sujeto que intenta conocer y una realidad a descubrir o reinventar. Todo aprendizaje parte de una interrogante acerca de la realidad que le plantea al individuo un conflicto cognitivo. Podemos definir el aprendizaje como un proceso de cambio relevante permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia (Feldman, 2005). En primer lugar, aprendizaje supone un cambio conductual o un cambio en la capacidad conductual. En segundo lugar, dicho cambio debe ser perdurable en el tiempo. En tercer lugar, otro criterio fundamental es que el aprendizaje ocurre a través de la práctica o de otras formas de experiencia. El aprendizaje consiste en adquirir, procesar, comprender y, finalmente, aplicar una información que nos ha sido enseñada, es decir, cuando aprendemos nos adaptamos a las exigencias que los contextos nos demandan.

Según Moreno (2006): “El aprendizaje en el campo de la matemática, se basa en la asociación de conceptos abstractos, que se acumulan y definen en la medida de avance”. Esto implica que la enseñanza de la matemática deba fijarse metas progresivas, establecidas en función de un concepto concreto.

Para establecer un contexto mencionaremos teorías destacadas sobre el aprendizaje:

1. **Teorías conductistas:**
   El conductismo establece que el aprendizaje es un cambio en la forma de comportamiento en función a los cambios del entorno. Según esta teoría, el aprendizaje es el resultado de la asociación de estímulos y respuestas.
2. **Teorías cognitivas:**
   - ❖ **Aprendizaje por descubrimiento:** desarrollada por J. Bruner, atribuye una gran importancia a la actividad directa de los estudiantes sobre la realidad.
   - ❖ **Aprendizaje significativo:** (D. Ausubel, J. Novak) postula que el aprendizaje debe ser significativo no memorístico, y para ello los nuevos conocimientos deben relacionarse con los saberes previos que posee el alumno.
   - ❖ **Constructivismo:** Jean Piaget propone que para el aprendizaje es necesario un desfase óptimo entre los esquemas que el alumno ya posee y el nuevo conocimiento que se propone. “Cuando del objeto de conocimiento está alejado de los esquemas que dispone el sujeto, este no podrá atribuirle significación alguna y el proceso de enseñanza/ aprendizaje será incapaz desembocar”.
   - ❖ **Socio- constructivismo:** basado en ideas de Vygotsky, considera también los aprendizajes como un proceso personal de construcción de nuevos conocimientos a partir de los saberes previos, pero inseparable de la situación en la que se produce.
3. **Teorías del procesamiento de la información:**
   - ❖ **Teorías del procesamiento de la información:** influida por los estudios cibernéticos, presenta una explicación sobre los procesos internos que se producen durante el aprendizaje.
   - ❖ **Conectivismo:** Perteneciente a la era digital, explica el efecto que la tecnología ha tenido sobre la manera en que actualmente vivimos, nos comunicamos y aprendemos.

Pese a que existen varias teorías sobre el aprendizaje, preferimos apoyarnos del aprendizaje significativo en virtud de nuestra conveniencia, considerando los resultados de la primera parte de la investigación que nos muestra que existen problemas de uso de conocimientos previos.

6.1.1 Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo se conoce como teoría educativa y ésta fue planteada por David Paul Ausubel. Esta teoría pretende darle significado al conocimiento de manera que el ser humano pueda asociarlo con un significado que le permita retenerlo en la memoria a largo plazo (Bruner, 1969). Se plantea que la estructura cognitiva comprende el conjunto de conceptos, ideas y la forma en que estos están organizados. Para Ausubel, el aprendizaje es personal, ya que la significación de este depende de los recursos cognitivos del estudiante, la principal función del organizador previo es la de servir de puente entre lo que el estudiante ya sabe y lo que él debía saber con el fin de que el nuevo material pudiera ser aprendido de forma significativa. O sea, organizadores previos son útiles para facilitar el aprendizaje en la medida en que funcionan como “puentes cognitivos”.

La estructura mental se construye por medio de conceptos relacionados que facilitan la asimilación de nociones nuevas. Los llamados puentes cognitivos u organizadores previos descritos por Ausubel, favorecen la asimilación. Para crear ese puente, el educador debe traer a la conciencia de los alumnos las ideas que ya conocen y que se relacionan con el tema, estos pueden ser para dar conceptos, desterrar conceptos o activar conceptos tales como analogías, mapas conceptuales, organizadores previos u otras estrategias.

Ausubel propone que el aprendizaje escolar puede darse por recepción o por descubrimiento como estrategia de enseñanza, y puede lograr un aprendizaje significativo o memorístico y repetitivo. De acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva, esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos, pero es necesario que el estudiante se interese por lo que se le está mostrando, y así adquirir las ventajas del Aprendizaje Significativo, tales como:

- ✓ Producir una retención más duradera de la información.
- ✓ Facilitar el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriores, de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- ✓ La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- ✓ El estudiante es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte de sí mismo.

Para Ausubel el aprendizaje se puede dar en dos formas: el Aprendizaje Mecánico o Significativo. Esto dependerá de la interacción con la estructura previa que tiene el estudiante. El aprendizaje mecánico consiste en el almacenamiento de información de forma arbitraria y no se interactúa con el conocimiento preexistente, por otro lado, el aprendizaje puede darse por descubrimiento y por recepción, sin embargo, este puede ser aprendizaje mecánico o significativo. Esto depende de la estructura cognitiva previa existente.

Ausubel pretende que el estudiante no haga parte del público, si no que por el contrario sea protagonista en su propio proceso y esto se evidencia cuando dice "en el aprendizaje significativo se hace énfasis en la participación activa del estudiante y en la creación de ambientes de aprendizaje que estimulen a que los estudiantes hagan conexiones con el material aprendido" (Ausubel, 2007), es por esto que él afirma que para lograr un aprendizaje significativo se deben cumplir tres condiciones:

1. **Significatividad lógica del material**: es decir, que el material presentado tenga una estructura interna organizada, que sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados. Los conceptos que el profesor presenta, siguen una secuencia lógica y ordenada. Es decir, importa no sólo el contenido, sino la forma en que éste es presentado.
2. **Significatividad psicológica del material:** se refiere a la posibilidad de que el alumno conecte el conocimiento presentado con los conocimientos previos, ya incluidos en su estructura cognitiva. Los contenidos entonces son comprensibles para el alumno. El alumno debe contener ideas incluseras en su estructura cognitiva, si esto no es así, el alumno guardará en memoria a corto plazo la información para contestar un examen memorista, olvidando después y para siempre ese contenido.
3. **Actitud favorable del alumno:** se señaló anteriormente que el hecho de que el alumno quiera aprender no basta para que se dé el aprendizaje significativo, pues también es necesario que pueda aprender (significación lógica y psicológica del material). Sin embargo, el aprendizaje no puede darse si el alumno no quiere aprender.

El docente debe conocer los conocimientos previos del estudiante, o sea, debe asegurarse que el contenido a presentar pueda relacionarse con las ideas previas, ya que conocer lo que sabe el estudiante ayuda en la planificación y para organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, ya que no sólo importa el contenido, sino la forma en que se presenta a los estudiantes. La motivación es un factor fundamental para que el estudiante se interese por aprender; el hecho de que el estudiante tenga actitud favorable y buena relación con el docente.

6.2 Comprensión

Wittrock (1990) entiende por comprensión "una representación estructural o conceptual ordenada, de las relaciones entre las partes de la información que se debe de aprender, y entre dicha información e ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia". "Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado" (Skemp, 1980). El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones (de una red de representaciones). Una idea matemática, hecho o procedimiento se entiende completamente si está conectado con redes previas.

Richard Skemp (psicólogo y matemático) analizó la diferencia entre comprensión relacional (saber qué) y comprensión instrumental (saber hacer). Estos dos tipos de comprensión no siempre van unidos. Al preguntarse si un tipo de comprensión es preferible al otro, Skemp concluye a favor de la comprensión relacional. El conocimiento instrumental implica la aplicación de múltiples reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general, y por tanto puede fallar en cuanto la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar. Para las matemáticas relacionales Skemp citas las siguientes ventajas:

1. Son más adaptables a nuevas tareas. Al saber no sólo qué método funciona sino también por qué, el niño puede adaptar los métodos a los nuevos problemas, mientras que si sólo tiene comprensión instrumental necesita aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas.

2. Las matemáticas relacionales son más fáciles de recordar, aunque son más difíciles de aprender.

Para lograr la comprensión matemática, tenemos que responder a dos cuestiones básicas:

- ¿Qué comprender? ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que queremos que nuestros alumnos lleguen a dominar? La respuesta a estas preguntas es el eje descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender.
- ¿Cómo lograr la comprensión por parte de nuestros alumnos? La respuesta a esta pregunta es el eje procesual que indicará las fases o momentos necesarios para el logro de la comprensión.

Hay algunos autores que desarrollan teorías para medir la compresión de conceptos, algunos autores y teorías son: Van Hiele y sus niveles de razonamiento geométrico, Robert Marzano en el tema de comprensión, David Tall (2002) tres

Mundos matemáticos y la Teoría APOE que trata de cómo se aprenden los conceptos matemáticos, y finalmente J. Biggs y su Taxonomía SOLO por nombrar algunas. En nuestro caso consideramos la taxonomía SOLO como la conveniente ya que se adapta a lo que requerimos, más aún, cabe recalcar que a nosotros nos interesa el dibujo: por las etapas del conocimiento y por los niveles, porque lo que se intentó subir al nivel abstracto ayudándonos de puentes cognitivos, pero escalando o subiendo por los niveles de comprensión.

6.3 Taxonomía SOLO

Las investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes tienen dos corrientes como las más influyentes: el constructivismo y la fenomenología. El primero se centra sobre todo en las actividades de los estudiantes adecuados cuando en enfoque es profundo (aprendizaje para saber y comprender) e inadecuadas cuando conducen a un enfoque superficial (aprendizaje para aprobar). Con el modelo sistémico de 3P (pronóstico, proceso y producto) se estudian las tres premisas básicas: qué son los estudiantes, que hacen los profesores y qué hacen los estudiantes.

Los estudiantes que usan un enfoque *de procesamiento superficial* se concentran en memorizar los materiales de aprendizaje y no en entenderlos. Esos estudiantes suelen sentirse motivados por recompensas, calificaciones, estándares externos y por el deseo de que los demás los evalúen de manera positiva. Los individuos que tienen un *enfoque de procesamiento profundo* consideran que las actividades de aprendizaje son un medio para entender algunos conceptos o significados subyacentes; tienden a aprender por el gusto de hacerlo y se muestran menos preocupados por la evaluación de su desempeño. Desde luego, la situación puede fomentar un procesamiento profundo o superficial, aunque existe evidencia de que los individuos poseen la tendencia a enfocar las situaciones de aprendizaje en formas características (Biggs, 2001)

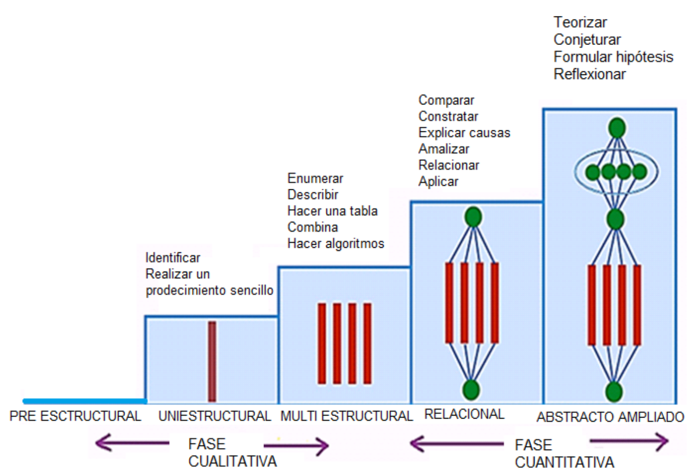
John Biggs (2005), basándose en la experiencia de Marton, desarrolló una manera de medir los resultados del aprendizaje, que pondría en práctica con grandes grupos de individuos con estas premisas nació la taxonomía SOLO (*Structure of the Observer Learning Outcome*, estructura del resultado observado del aprendizaje) que nos recuerda la importancia de prestar atención a los resultados observables del aprendizaje.

Biggs define los enfoques de aprendizaje como los procesos de aprendizaje que emergen de las percepciones que tiene el alumnado acerca de las tareas académicas, influidas por sus características personales. En otras palabras, el enfoque que un estudiante aplica a una tarea de aprendizaje es entendido en función de sus características personales y de las características de la situación específica en que se produce el aprendizaje (el contexto particular de aprendizaje).

La taxonomía SOLO jerarquiza cinco niveles de complejidad estructural ascendente (pre-estructural, uniestructural, multi-estructural, relacional y abstracto extendido), que describen esencialmente diferentes niveles en los cuales seleccionamos, procesamos y comunicamos la información, que van desde un nivel de insuficiencia (el estudiante no ha alcanzado el modo de funcionamiento requerido) hacia el nivel experto, en el que lo supera.

Biggs realiza un trabajo de clasificación que consistió en presentar al sujeto una serie de informaciones como, por ejemplo, un párrafo. El investigador debía realizar una pregunta muy genérica que el alumno tenía que responder de forma escrita. Posteriormente, dicha respuesta se puntuaría del 1 al 5 por los evaluadores. Las categorías de respuestas eran cinco: comenzando por el número uno, la pre estructural, que indica una respuesta que no está lógicamente relacionada al conjunto de informaciones; pasando por el número tres, la multiestructural, que contiene partes de la información; y, finalizando con el número cinco, que corresponde a una respuesta abstracta extendida que tiende a ir más allá de la información contenida en el conjunto, con el objetivo de alcanzar una conclusión lógicamente consistente. El siguiente esquema (Figura 17) ilustra perfectamente nuestra concepción, conforme se sube en la escalera el alumno es capaz de relacionar mejor los conceptos, axiomas, definición y teoremas.

Figura 17. Representa la taxonomía SOLO como una escalera, donde el estudiante conforme relaciona conceptos, sube. Tomada de Biggs, J. & Tang, C. (2011). Teaching for Quality Learning at University. p. 91



La taxonomía es un excelente medio para clasificar los aprendizajes esperados desde los niveles más concretos a los niveles más abstractos y complejos. En teoría nos ayudó a comprender una idea expresada por D. Perkins: la comprensión no es un asunto de todo o nada, sino que es gradual. Por tanto, nos permite evaluar la calidad del trabajo de nuestros estudiantes, en términos de su complejidad. La complejidad es clasificada en cinco niveles:

i. **Pre estructural (nivel 1)**: las respuestas pre estructurales son simplemente erróneas, no hay conexión, organización y no tienen sentido. El estudiante no identifica conceptos y no establece relaciones entre ellos.
ii. **Uni estructural (Nivel 2): En** este nivel las respuestas son el resultado de identificar y seguir un procedimiento sencillo. El estudiante responde a lo planteado, pero de forma limitada, raramente alcanza conclusiones; cuando concluye acerca de algo, lo hace precipitadamente. El estudiante no identifica varios conceptos a la vez e ignora las posibles incoherencias en los argumentos que sostiene.
iii. **Multi estructural (Nivel 3):** La respuesta requiere el uso de la combinación de varios procedimientos sencillos. Reconoce diferentes conceptos, aunque lo hace de manera aislada.
iv. **Relacional (Nivel 4):** Las respuestas permiten identificar la habilidad de relacionar y comparar conceptos. El estudiante enlaza e integra varios conceptos de modo coherente, los detalles son enlazados a la conclusión del ejercicio y su significado es entendido.
v. **Abstracto ampliado (Nivel 5):** La respuesta abarca el uso de conceptos más abstractos. El estudiante tiene la capacidad de generalizar la estructura mucho más allá de la información presentada al momento, puede ver un esquema teórico.

Esta forma de clasificar los resultados de aprendizaje según el nivel de complejidad, permite evaluar los resultados de aprendizaje en términos de calidad para conocer el nivel de comprensión alcanzado. En los niveles uniestructural y multiestructural, corresponderían a aquella fase cuantitativa, se centra en la cobertura de información, es decir, en cuanta es la información que logra manejar un estudiante, aunque con bajo nivel de profundidad. Por ultimo en el nivel relacional y abstracto ampliado, se aprecia una fase cualitativa cuyo énfasis está en la profundidad y la utilización de la información.

Para entender mejor la teoría, es recomendable ver los siguientes videos

Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=MKzqRPqIg-I

Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=R7Tgvct70pI

Capítulo 7. METODOLOGÍA

7.1 Diseño de Investigación

En esta parte del trabajo se tiene en cuenta la evaluación de la comprensión y tipo de error de solución respecto a los conceptos de TL de manera dependiente, debido a que las respuestas de los estudiantes están relacionadas con la enseñanza recibida y los libros de texto usados. De manera que a partir de los resultados obtenidos en el curso I, se decide diseñar una estrategia para un segundo grupo haciendo énfasis en el uso de puente cognitivo, es decir, se resalta la relación entre conceptos, mostrando como cada concepto abstracto, se logra definir al olvidar las diferencias en los ejemplos concretos, considerados previamente. Buscando un aprendizaje significativo que se produce cuando el alumno relaciona la nueva información con sus conocimientos previos.

Lo que primero se realizó para el segundo grupo fue seleccionar una secuencia de temas, en el que el docente expuso los principales contenidos del AL, pero ilustrando los diferentes conceptos con numerosos ejemplos típicos de libros comerciales para que los alumnos pudieran comprender en base a situaciones concretas los resultados generales, de modo que los estudiantes vincularan (puente cognitivo) los materiales más nuevos con sus conocimientos anteriores. Es recomendable que el docente de manera intencional haga observaciones de cómo se relacionan los ejemplos concretos de un concepto de AL con la definición abstracta del concepto, es decir, ayudar a aislar una propiedad concreta del ejemplo.

Una vez que se aplicó la secuencia didáctica que se presenta en la sección 7.2.1, se recaban datos obtenidos mediante un examen escrito, los datos recabados se analizan para saber que conceptos no comprenden o qué conocimientos le hacen falta al estudiante para comprender el tema. La recolección de datos es expresada en términos cualitativos y cuantitativos, usando los exámenes descritos en la sección de instrumentos de recolección de datos y presentadas en el anexo 3 de este documento.

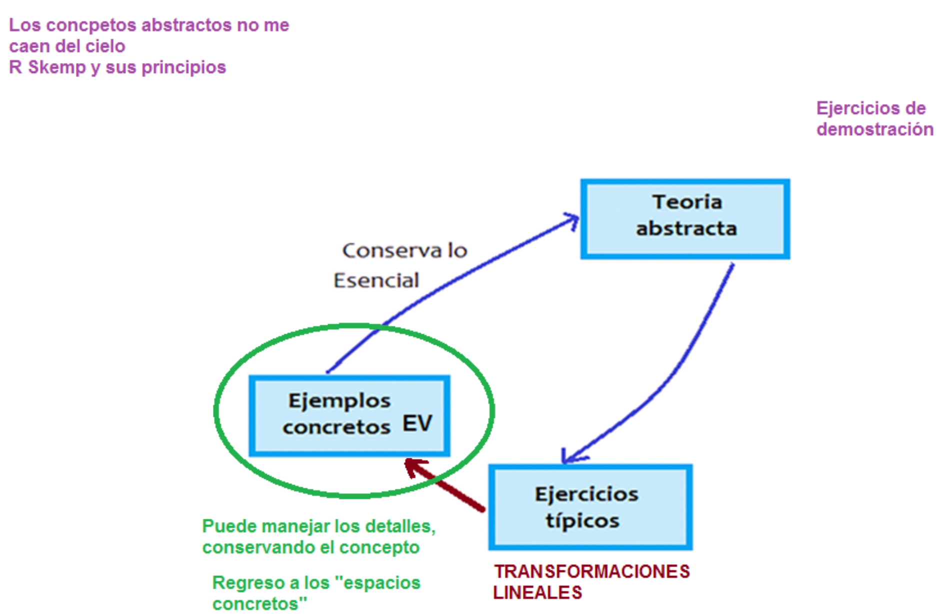
A partir de la recolección y el análisis de los datos, se trata de identificar soluciones, para clasificarlas en niveles de comprensión según la teoría de taxonomía Biggs donde en el primer nivel se encuentran los estudiantes que no comprenden lo que el ejercicio requiere para su solución, es ahí, donde se trata de identificar las dificultades presentes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el curso de AL. Después de analizar lo anterior, el siguiente paso consistió en mostrar los resultados obtenidos de manera cuantitativa (porcentajes) y compararlos con el primer grupo para determinar qué tan apta en la estrategia didáctica diseñada.

7.2.1 Diseño de la estrategia didáctica

La estrategia didáctica que consideramos apropiada se basó en implementar un curso de AL haciendo énfasis en relacionar los conceptos previos y las definiciones abstractas de espacio vectorial y TL. Es extremadamente difícil aislar un solo concepto y luego comprobar si se comprende (Orton, 2003), por lo cual se busca relacionar los nuevos conceptos con el conocimiento previo de los alumnos (Díaz, 2010). La estrategia didáctica que proponemos a continuación está basada en las ideas anteriores y en los resultados del primer grupo,

1. **Uso de múltiples sistemas de representación**; nos permite obtener una visión múltiple de los conceptos que se introducen en el ámbito del AL, permitiendo que los alumnos adquieran las abstracciones al reconocer lo que es **común (esencial)** a muchos ejemplos particulares (Figura 18).

Figura 18. Representación de cómo se pretende conservar y aplicar lo esencial



2. **Uso de puentes cognitivos (Figura 19)**; según Ausubel el uso de estos proporciona al alumno un puente entre el conocimiento previo que posee con el conocimiento nuevo que va a aprender, buscando articular los conceptos básicos de AL. El concepto que nos sirve de puente, es la resolución de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss, porque muchos ejercicios requieren resolver sistemas de ecuaciones (para hallar imágenes de una TL, como combinación lineal de imágenes dadas)

Figura 19. Representación del puente cognitivo

Por lo anterior se recomienda seguir la siguiente secuencia de temas que van relacionados para llegar al concepto de TL:

i. Espacios vectoriales
ii. Subespacios
iii. Combinación lineal
iv. Dependencia e independencia lineal
v. Base y dimensión
vi. TRANSFORMACIÓN LINEAL

3. **Se hace notar que la definición formal de TL** no incluye su efecto geométrico. Harel (2000) observa que cuando la geometría se introduce antes de que se formen los conceptos algebraicos, muchos estudiantes permanecen en el restringido mundo de vectores geométricos y no se mueven al caso general.

Es importante considerar algunos trabajos relacionados con el aprendizaje significativo que nos aportan una estructura de cómo abordar el conocimiento, como lo son:

a) Los siete principios del aprendizaje que establece el documento de la OCDE titulado “The nature of learning” específicamente en el principio 7. Un rasgo fundamental del aprendizaje es que las estructuras de conocimiento complejo se construyan a partir de piezas más básicas de conocimiento y de modo jerárquico. Si están bien construidas, estas estructuras proporcionan un conocimiento que puede transferirse a situaciones nuevas.

b) Los Lineamientos para la aplicación de las ideas en el procesamiento de conocimientos**;** estos lineamientos son pasos a seguir para una mejor comprensión de conceptos presentada por Annita Woolfolk (2010) los cuales se describen a continuación (Tabla 7):

Tabla 7.Descripción de los lineamientos sugeridos por Annita Woolfolk

Contar con la atención de los estudiantes.	
Ayudar a los estudiantes a separar los detalles "ESENCIALES" de los que no lo son y a concentrarse en la información más importante.	Relacionar el material que presenta con los objetivos que se enseña.
	Hacer notar un punto importante, enfatizando en la información.
Ayudar a los estudiantes a "RELACIONAR" la información nueva con lo que ya sabe.	Recordar la información necesaria para entender la información nueva.
	Hacer resumen o diagrama que muestre la relación entre conceptos.
	Tarea específica que exija el uso de la información nueva.
Procurar repetir y revisar la información.	Breve repaso de las tareas.
	Aplicación frecuente de exámenes cortos.
Exponga su material en forma clara y organizada.	Tener en claro el propósito de cada tema.
	Hacer un resumen a la mitad y final del tema.
Concéntrese en el significado, no en la memorización.	Al enseñar conceptos nuevos, ayudar a los estudiantes a asociarlos con otros.

7.3 Participantes

Los nuevos participantes a estudiar es un grupo de 37 estudiantes de la FCFM-BUAP seleccionados de una manera no probabilística, no se pretende que los casos sean representativos de la BUAP son estudiantes que se inscribieron en el curso de AL con matrículas 2015 y 2016 que están cursando el 4° semestre y que tiene características similares a los estudiantes del primer grupo.

7.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

La técnica de recolección de datos es mediante la aplicación de un examen diseñado por Roa y Oktaç (2008) con algunos cambios con base en los resultados obtenidos al calificar e identifican errores de comprensión en los exámenes del curso I. El instrumento de recolección de datos es un **examen para el estudiante (anexo 3)**, el propósito de este instrumento fue medir la comprensión de los estudiantes en los conceptos de TL mediante las respuestas a los ejercicios de los exámenes y percibir así el tipo de errores que cometen y el nivel de comprensión, usando la Taxonomía Biggs.

El examen para el curso II (Anexo 3) consta de 8 ejercicios, algunos ejercicios son similares a los de los exámenes del curso I, solo que reordenados. La distribución es la siguiente; en el ejercicio 1, se pretende que el estudiante dé a conocer cómo percibe el concepto de transformación lineal. Los ejercicios 2, 3, 4, 5, 6 son los mismos que en el examen del curso I, y el ejercicio 8 es para identificar si el estudiante sabe diferenciar entre imagen y pre imagen de una transformación lineal ya que el curso I presentaba dificultades al realizar este tipo de ejercicios en clase.

Lo que tienen en común este examen y el que presentaron los estudiantes del primer grupo es que siguen el mismo esquema de ejercicios como lo son: ejercicios con funciones de varias variables, matrices, polinomios, imagen y preimagen de vectores usando lenguajes de: sistema de ecuaciones, vectores y TL.

Es importante tener en cuenta el nivel de comprensión que requiere cada ejercicio ya que influye para determinar en qué nivel de comprensión se encuentra cada estudiante y con ayuda de la clasificación de la teoría Biggs se clasifican las preguntas de cada examen.

Capítulo 8. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

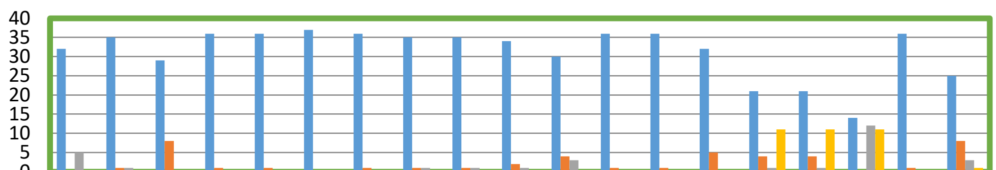
Posterior a la aplicación de los exámenes, se analizan los resultados del curso II usando la Taxonomía Biggs y se observa que los resultados del curso II son más satisfactorios que los del curso I, con un 84% los estudiantes comprenden los conceptos básicos que involucra el concepto de TL. Mientras que el 16% de los estudiantes tienen soluciones incorrectas (7%), incompletas (4%) o no realizaron el ejercicio (5%). La clasificación de los resultados de los exámenes es:

1. Correctos: Cuando los estudiantes aplican la estrategia correcta o realizan todas las operaciones correctamente,
2. Incorrectos: Uso de estrategia irrelevante o poco favorable para la solución del ejercicio.
3. Incompleto: Cuando los estudiantes realizan todas las operaciones
4. Correctamente, sin embargo, no concluyen correctamente.
5. No realizado: El estudiante no realizo el ejercicio.

Al revisar los exámenes y usando la clasificación anterior se evalúa cada pregunta del examen y se presenta en una tabla de frecuencia por pregunta (Figura 20).

Figura 20. Evaluación de preguntas del segundo grupo

Evaluación de preguntas (anexo 3)



	1a	2a	2b	2c	3d	3e	3f	4a	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b
Correctas	32	35	29	36	36	37	36	35	35	34	30	36	36	32	21	21	14	36	25
Incorrectas	0	1	8	1	1	0	1	1	1	2	4	1	1	5	4	4	0	1	8
Incompleta	5	1	0	0	0	0	0	1	1	1	3	0	0	0	1	1	12	0	3
Sin realizar	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	0	1

Los ejercicios 2b y 8b son los que con mayor frecuencia los estudiantes tienen una solución incorrecta (21.6%) debido a que realizan de forma inadecuada los cálculos algebraicos y no comprenden la diferencia entre imagen y preimagen, lo que significa que no ven a la TL como una función. El ejercicio que con mayor frecuencia los estudiantes no completan (32.4%) es el 7c debido a que no relacionan el concepto de isomorfismo y solo comprenden la mitad de lo que pide el ejercicio. Los únicos ejercicios que los estudiantes no realizaron son el 7a, 7b, 7c y 8b, pero los de mayor frecuencia son el 7a, 7b y 7c con un 29.7%.

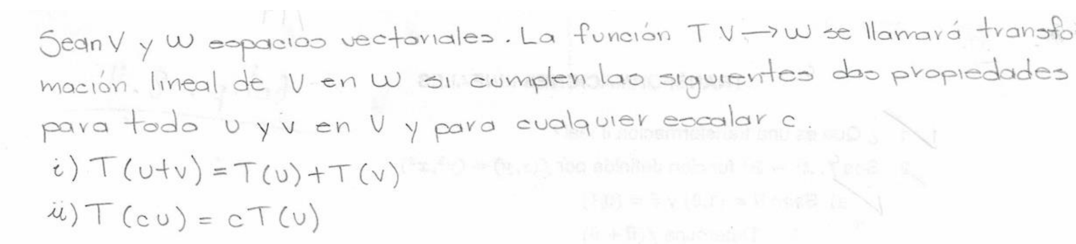
8.1 Evidencias

Después de observar las soluciones del curso II y clasificar los resultados de los exámenes mediante los niveles de la taxonomía Biggs, se presentan porcentajes de los resultados por pregunta obtenidos en el examen. A continuación, algunas soluciones del curso II

Pregunta 1. ¿ Qué es una transformación lineal?

Observamos que un 86.48 % de los alumnos comprenden que la transformación lineal es una **función** que tiene como **dominio** y **codominio** a **espacios vectoriales (Nivel de comprensión 3)**, aquí un ejemplo de ello (Figura 21)

Figura 21. Ejemplo de una solución de un estudiante



Sean V y W espacios vectoriales. La función T V→W se llamará transfor mación lineal de V en W si cumplen las siguientes dos propiedades para todo u y v en V y para cualquier escalar c.

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

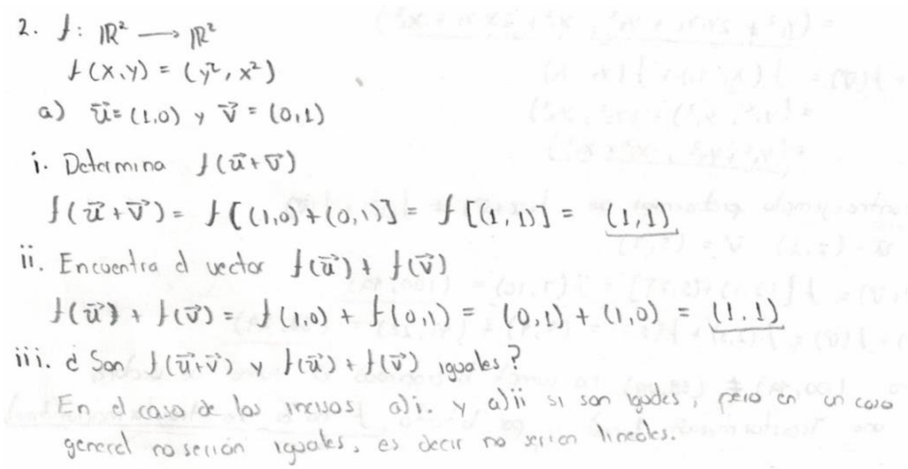
ii) $T(cu) = cT(u)$

Pregunta 2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funcion definida por $f(x, y) = (y^2, x^2)$

a) Sean $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{v} = (0,1)$
   i. Determina $f(\vec{u} + \vec{v})$
   ii. Encuentra el vector $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
   iii. ¿Son $f(\vec{u} + \vec{v})$ y $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ iguales?
b) $\vec{u} = (-2,0)$ y $c = 4$
   iv. Determinar $f(\overrightarrow{cu})$
   v. Encuentra el vector $cf(\vec{u})$
   vi. ¿son $f(\overrightarrow{cu})$ y $cf(\vec{u})$ iguales?
c) ¿Es f una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

Un 94.6% de los alumnos realiza correctamente el ejercicio 2a, determinan la suma de funciones, así como la aplicación de la función a la suma de vectores (Nivel de comprensión 2, debido a que el ejercicio solo requiere procedimientos simples) concluyendo satisfactoriamente, mientras que un 5.4% de los alumnos es incapaz de realizar o terminar satisfactoriamente el ejercicio como se muestra en la Figura 22.

Figura 22. Ejemplo de una solución de un estudiante



2. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (y^2, x^2)$

a) $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{v} = (0,1)$

i. Determina $f(\vec{u}+\vec{v})$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = f[(1,0)+(0,1)] = f[(1,1)] = \underline{(1,1)}$

ii. Encuentra el vector $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

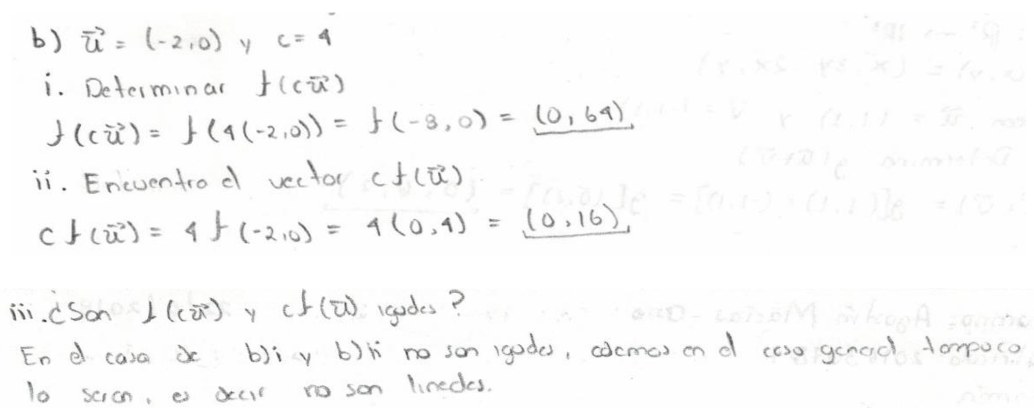
$f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(1,0) + f(0,1) = (0,1) + (1,0) = \underline{(1,1)}$

iii. ¿Son $f(\vec{u}+\vec{v})$ y $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ iguales?

En el caso de los incisos a) i. y a) ii si son iguales, pero en un caso general no serían iguales, es decir no serían lineales.

Un 78.38% realiza correctamente el ejercicio 2b (nivel de comprensión 2), aplicando correctamente la función. Por lo contrario un 21.62% no aplico la función correctamente es decir, no observaron a detalle cómo está definida la función F (Figura 23)

Figura 23. Ejemplo de solución de un estudiante que resuelve correctamente



b) $\vec{u} = (-2,0)$ y $c = 4$

i. Determinar $f(c\vec{u})$

$f(c\vec{u}) = f(4(-2,0)) = f(-8,0) = \underline{(0,64)}$

ii. Encuentra el vector $cf(\vec{u})$

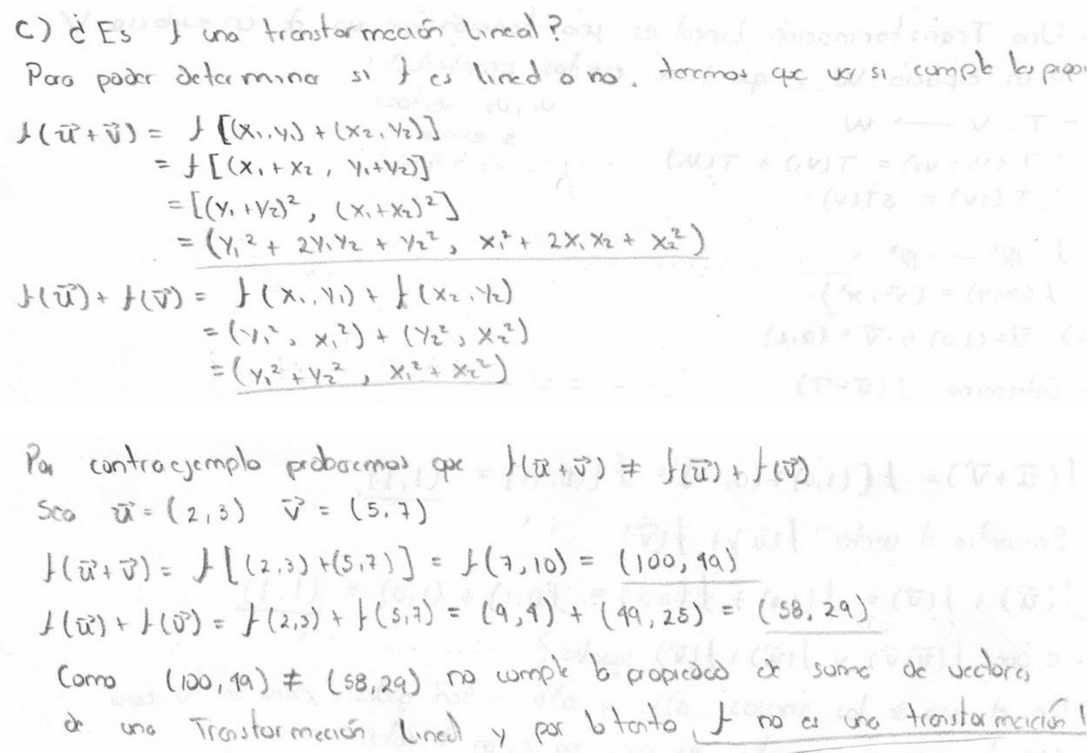
$cf(\vec{u}) = 4f(-2,0) = 4(0,4) = \underline{(0,16)}$

iii. ¿Son $f(c\vec{u})$ y $cf(\vec{u})$ iguales?

En el caso de b) i y b) ii no son iguales, además en el caso general tampoco lo serían, es decir no son lineales.

En el ejercicio 2c un 97.3% concluyen que F no es una transformación lineal, algunos con una mejor interpretación que otros como se muestra en la Figura 24. Vemos aquí un ejemplo de solución (Nivel de comprensión 3, debido a que describe la razón de lo que hace) de un estudiante que resuelve el ejercicio de manera acertada;

Figura 24. Ejemplo de una solución resuelta satisfactoriamente


c) ¿Es f una transformación lineal?

Para poder determinar si f es lineal o no, tenemos que ver si cumple la propi

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]$$
$$= f[(x_1+x_2,\ y_1+y_2)]$$
$$= [(y_1+y_2)^2,\ (x_1+x_2)^2]$$
$$= (y_1^2+2y_1y_2+y_2^2,\ x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)$$

$$f(\vec{u})+f(\vec{v}) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$
$$= (y_1^2,\ x_1^2)+(y_2^2,\ x_2^2)$$
$$= (y_1^2+y_2^2,\ x_1^2+x_2^2)$$

Por contraejemplo probaremos que $f(\vec{u}+\vec{v}) \neq f(\vec{u})+f(\vec{v})$

Sea $\vec{u}=(2,3)$ $\vec{v}=(5,7)$

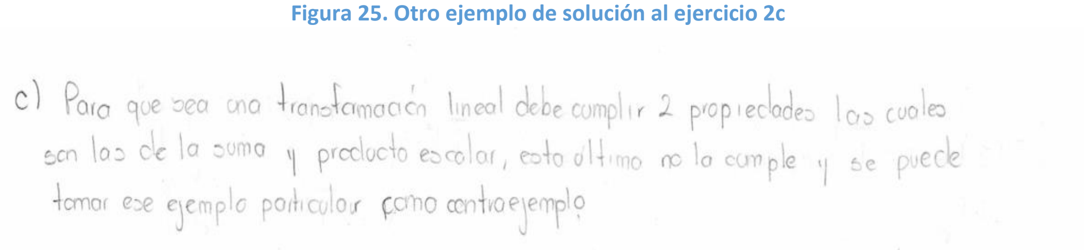
$f(\vec{u}+\vec{v}) = f[(2,3)+(5,7)] = f(7,10) = (100,49)$

$f(\vec{u})+f(\vec{v}) = f(2,3)+f(5,7) = (9,4)+(49,25) = (58,29)$

Como $(100,49) \neq (58,29)$ no cumple la propiedad de suma de vectores de una Transformación lineal y por lo tanto f no es una transformación!

El alumno A35 (Nivel de comprensión 3) concluye de la siguiente manera el mismo ejercicio (Figura 25):

Figura 25. Otro ejemplo de solución al ejercicio 2c


c) Para que sea una transformación lineal debe cumplir 2 propiedades las cuales son las de la suma y producto escalar, esto último no lo cumple y se puede tomar ese ejemplo particular como contraejemplo

Ambas respuestas miden la comprensión de los alumnos porque toman como casos particulares a los vectores que se proponen.

Pregunta 3. Sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funcion definida por $g(x,y) = (x, 3y-2x, y)$

d) Sean $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1)$

iv. Determina $g(\vec{u}+\vec{v})$

v. Encuentra el vector $g(\vec{u})+g(\vec{v})$

vi. ¿Son $g(\vec{u}+\vec{v})$ y $g(\vec{u})+g(\vec{v})$ iguales?

e) $\vec{u} = (-2,0)$ y $c = 2$

iv. Determinar $g(\overrightarrow{cu})$

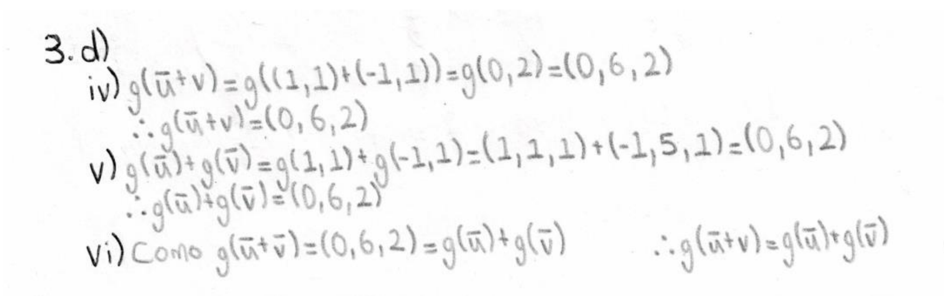
v. Encuentra el vector $cg(\vec{u})$

vi. ¿son $g(\overrightarrow{cu})$ y $cg(\vec{u})$ iguales?

f) ¿Es g una transformación lineal? Justifica tu respuesta.

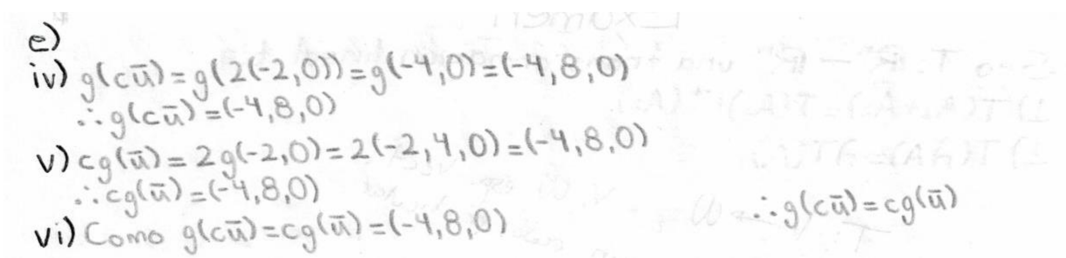
Un 97.3% de los alumnos realiza correctamente lo requerido en el ejercicio 3e, aplica sus conocimientos sobre suma de vectores para después aplicar la función, más aun, aplica la función a cada vector para después sumar las funciones, como es el caso de alumno A20 (Nivel de compresión 2, realiza procedimientos simples) (Figura 26);

Figura 26. Ejemplo de solución de un alumno que ocupa el nivel 2 de compresión)



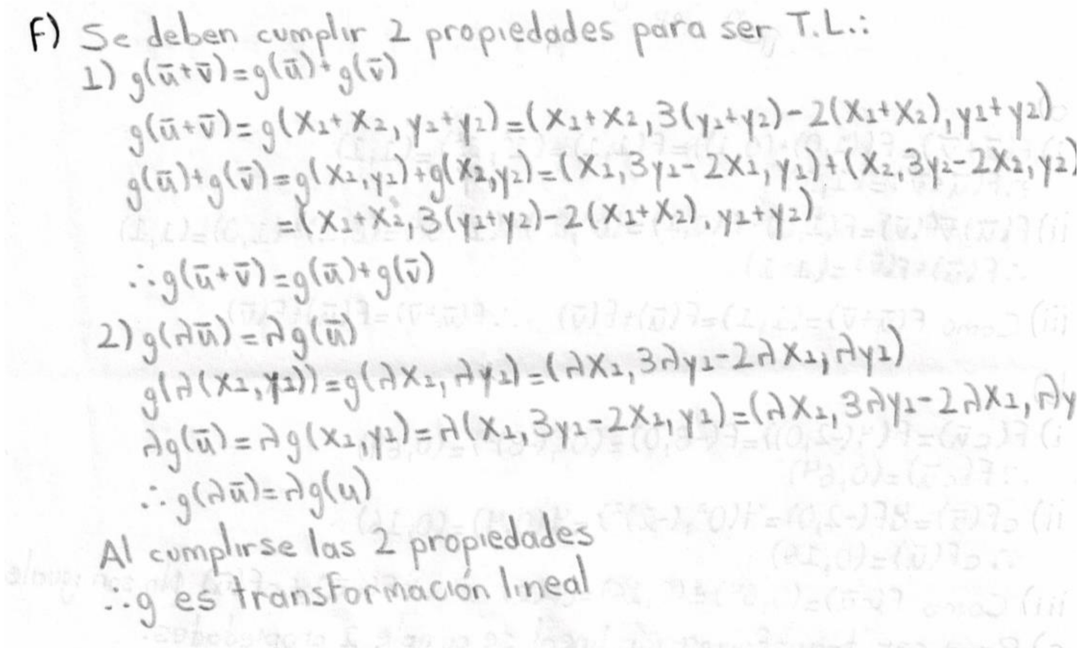
Los alumnos resuelven exitosamente el ejercicio 3d (Nivel de comprensión 2), se concluye que son capaces de relacionar los conceptos de producto de un vector por un escalar para después aplicar conocimientos sobre funciones, esto se observa mediante la solución (Figura 27):

Figura 27. Ejemplo de solución de un estudiante



En la solución del ejercicio 3f, un 97.3% comprende que el inciso 3d y 3e son casos particulares (Nivel de comprensión 3) como se muestra en la Figura 28, lo cual no significa que se cumpla para todo vector, entonces hacen una demostración más formal

Figura 28. Ejemplo de solución de un estudiante del curso 2



f) Se deben cumplir 2 propiedades para ser T.L.:

1) $g(\bar{u}+\bar{v})=g(\bar{u})+g(\bar{v})$

$g(\bar{u}+\bar{v})=g(x_1+x_2, y_1+y_2)=(x_1+x_2, 3(y_1+y_2)-2(x_1+x_2), y_1+y_2)$

$g(\bar{u})+g(\bar{v})=g(x_1,y_1)+g(x_2,y_2)=(x_1,3y_1-2x_1,y_1)+(x_2,3y_2-2x_2,y_2)$

$=(x_1+x_2, 3(y_1+y_2)-2(x_1+x_2), y_1+y_2)$

$\therefore g(\bar{u}+\bar{v})=g(\bar{u})+g(\bar{v})$

2) $g(\lambda\bar{u})=\lambda g(\bar{u})$

$g(\lambda(x_1,y_1))=g(\lambda x_1,\lambda y_1)=(\lambda x_1,3\lambda y_1-2\lambda x_1,\lambda y_1)$

$\lambda g(\bar{u})=\lambda g(x_1,y_1)=\lambda(x_1,3y_1-2x_1,y_1)=(\lambda x_1,3\lambda y_1-2\lambda x_1,\lambda y$

$\therefore g(\lambda\bar{u})=\lambda g(u)$

Al cumplirse las 2 propiedades

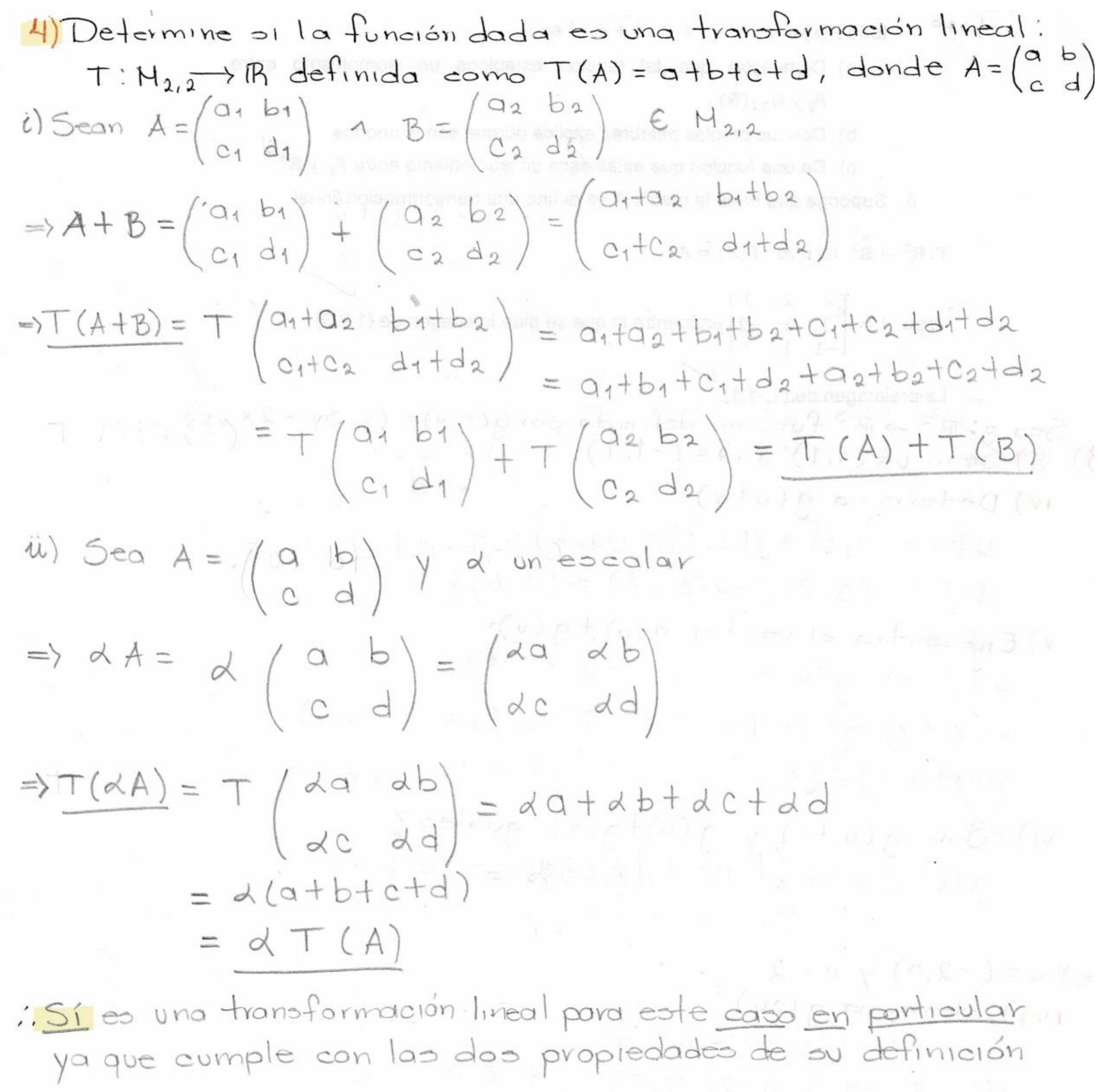
$\therefore g$ es transformación lineal

Pregunta 4. Determine si la funcion dada es una transformación lineal.

a) Si $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $T(A)=a+b+c+d$, donde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Un 2.7% de los estudiantes resuelve de manera errónea el ejercicio debido a la falta de asociación entre los conceptos que definen el concepto de transformación lineal, en un caso particular el alumno E8 sabe sumar matrices y multiplicar por un escalar concluyendo así que es una transformación lineal, es decir, no aplica la función, mientras que otro 2.7% de los estudiantes tiene el ejercicio incompleto solo demuestra la linealidad sin terminar el ejercicio. El 94.6% de los estudiantes determinan correctamente que la función proporcionada en el ejercicio 4 es una transformación lineal, claramente se observa que los estudiantes tienen conocimientos sobre suma de matrices y producto por un escalar, así como la noción de función, prueba de ello es la siguiente solución del alumno E17 (Nivel de comprensión 2) como se muestra en la Figura 29.

Figura 29. Ejemplo de solución de un alumno que ocupa correctamente la definición de TL usando matrices



4) Determine si la función dada es una transformación lineal:

$T: M_{2,2} \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a+b+c+d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

i) Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}$

$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{T(A+B)} = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2+d_1+d_2$

$= a_1+b_1+c_1+d_2+a_2+b_2+c_2+d_2$

$= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \underline{T(A) + T(B)}$

ii) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y α un escalar

$\Rightarrow \alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{T(\alpha A)} = T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d$

$= \alpha(a+b+c+d)$

$= \underline{\alpha T(A)}$

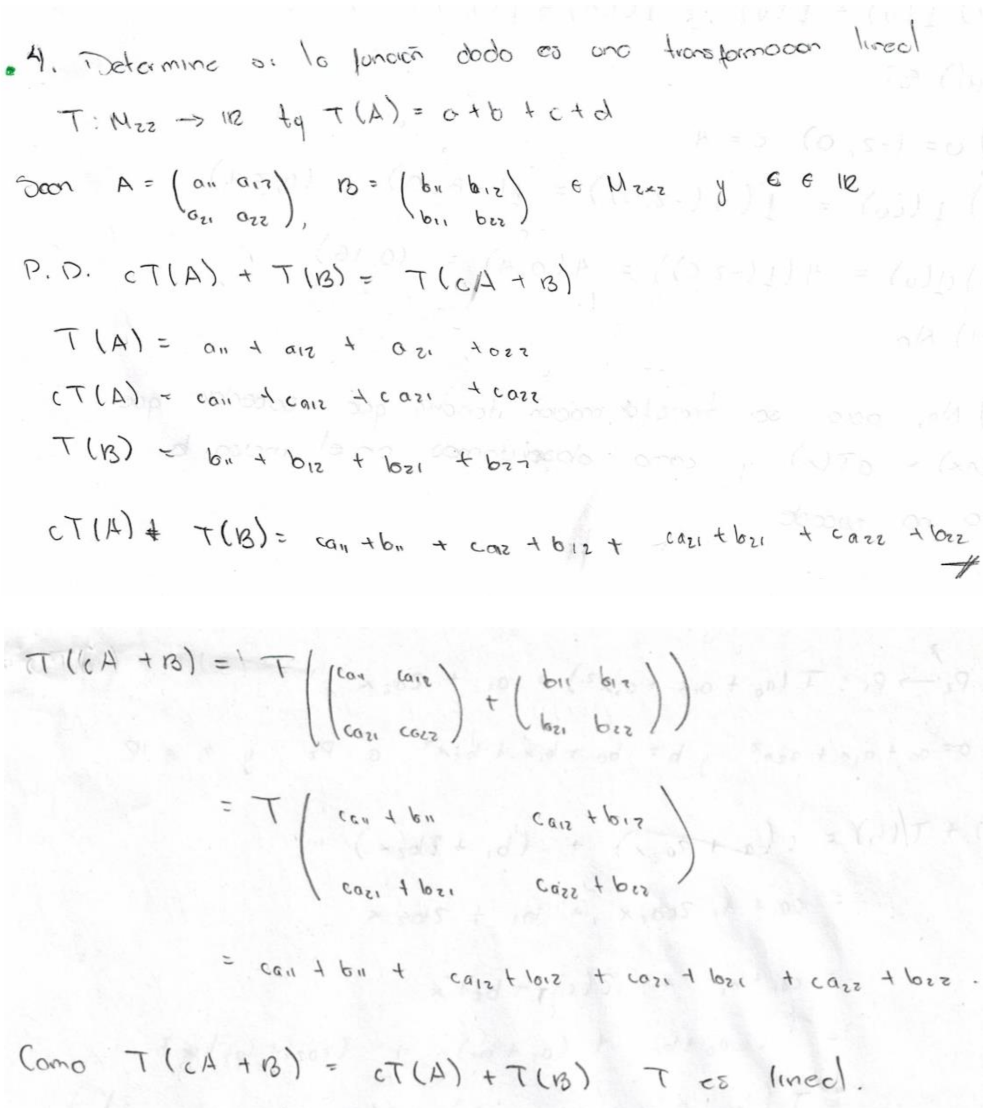
$\therefore$ Sí es una transformación lineal para este caso en particular ya que cumple con las dos propiedades de su definición

A continuación, en la Figura 30 se presenta la solución del alumno E5 (Nivel de comprensión 4, donde relaciona lo que el ejercicio le pide y lo que ha estudiado en algún libro), mostrado que la función es transformación lineal mediante el uso de la afirmación:

La función $T: V \to W$ con V y W espacios vectoriales tal que;

1. Si T es lineal, entonces $T(0) = 0$
2. T es lineal si y solo si $T(ax+y) = aT(x) + T(y)$ para toda $x, y \in V$ y $a \in F$.
3. T es lineal si y solo si para $x_1, \dots, x_n \in V$ y $a_1, \dots, a_n \in F$ tenemos que $T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$. (Friedberg, p.64)

Figura 30. Ejemplo de solución de un estudiante ocupando más recursos que la definición


4. Determine si la función dada es una transformación lineal

$T: M_{22} \to \mathbb{R}$ tq $T(A) = a + b + c + d$

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ y $c \in \mathbb{R}$

P.D. $cT(A) + T(B) = T(cA + B)$

$T(A) = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$

$cT(A) = ca_{11} + ca_{12} + ca_{21} + ca_{22}$

$T(B) = b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$

$cT(A) + T(B) = ca_{11} + b_{11} + ca_{12} + b_{12} + ca_{21} + b_{21} + ca_{22} + b_{22}$

$T(cA + B) = T\left(\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$

$= T\begin{pmatrix} ca_{11} + b_{11} & ca_{12} + b_{12} \\ ca_{21} + b_{21} & ca_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$

$= ca_{11} + b_{11} + ca_{12} + b_{12} + ca_{21} + b_{21} + ca_{22} + b_{22}$.

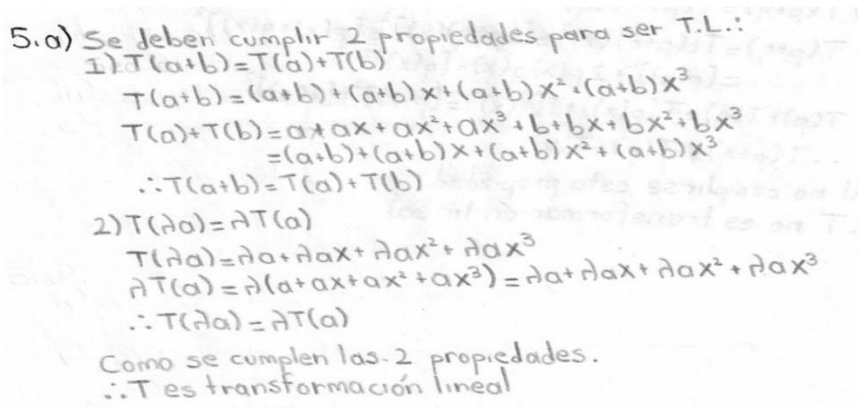
Como $T(cA + B) = cT(A) + T(B)$ T es lineal.

Pregunta 5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales (justifique)?

a) $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
b) $T: P_2 \to P_1$; $T(a_0 + a_1x + a_2x) = a_1 + 2a_2x$
c) $T[p(x)] = [p(x)]^2$.

La pregunta consta de tres incisos donde se hace uso de espacios vectoriales como el conjunto de números reales ($\mathbb{R}$), polinomios de grado 1, 2 y 4 (P_1, P_2 y P_4) se pretende que los alumnos reconozcan lo que es común (esencial) a muchos ejemplos particulares. Mediante las repuestas obtenidas, 5.4 % de los estudiantes no termina o responde incorrectamente el ejercicio 5a, cayendo en el error de que solo basta demostrar la linealidad de la función. Un 94.6% tiene presente que para que la función sea transformación lineal debe cumplir las dos propiedades señaladas en la definición al igual que aplicar la función a la suma de $\mathbb{R}$ así como la suma de funciones evaluadas en $\mathbb{R}$ (Nivel de comprensión 2), como se muestra en la Figura 31

Figura 31. Solución del estudiante 15 donde hace uso de conocimientos previos


5.a) Se deben cumplir 2 propiedades para ser T.L.:

1) $T(a+b)=T(a)+T(b)$

$T(a+b)=(a+b)+(a+b)x+(a+b)x^2+(a+b)x^3$

$T(a)+T(b)=a+ax+ax^2+ax^3+b+bx+bx^2+bx^3$

$=(a+b)+(a+b)x+(a+b)x^2+(a+b)x^3$

$\therefore T(a+b)=T(a)+T(b)$

2) $T(\partial a)=\partial T(a)$

$T(\partial a)=\partial a+\partial ax+\partial ax^2+\partial ax^3$

$\partial T(a)=\partial(a+ax+ax^2+ax^3)=\partial a+\partial ax+\partial ax^2+\partial ax^3$

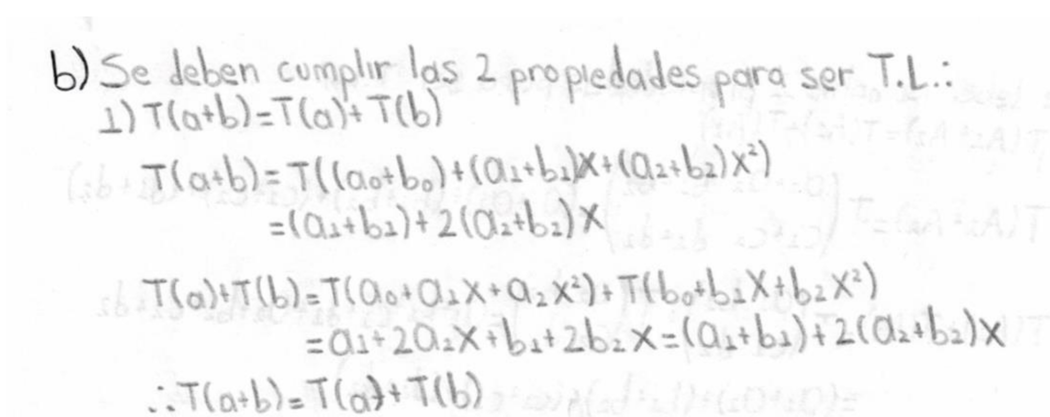
$\therefore T(\partial a)=\partial T(a)$

Como se cumplen las 2 propiedades.

$\therefore$ T es transformación lineal

Referente al ejercicio 5b se nota que 91.9% de los estudiantes que realizaron el examen comprenden que es lo que deben realizar para determinar si es una transformación lineal (Nivel de comprensión 2), es decir, demostrar las dos propiedades de la definición tomando en cuenta el tipo de espacio vectorial en el que está definida (Figura 32), un 5.4% no comprende lo anterior pues no relacionan conceptos previos como lo son suma de polinomios y aplicación de la función, por último 2.7% no demuestran las dos propiedades solo una de ellas, lo cual es inadecuado.

Figura 32. Ejemplo de solución de un alumno tomando en cuenta el tipo de espacio en el cual esta trabaando


b) Se deben cumplir las 2 propiedades para ser T.L.:

1) $T(a+b)=T(a)+T(b)$

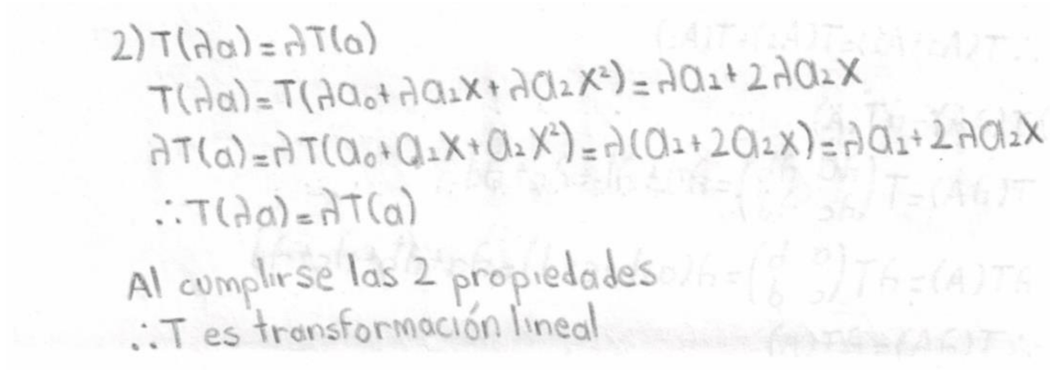
$T(a+b)=T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)$

$=(a_1+b_1)+2(a_2+b_2)x$

$T(a)+T(b)=T(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2)$

$=a_1+2a_2x+b_1+2b_2x=(a_1+b_1)+2(a_2+b_2)x$

$\therefore T(a+b)=T(a)+T(b)$



$$2)\ T(\lambda a) = \lambda T(a)$$
$$T(\lambda a) = T(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = \lambda a_1 + 2\lambda a_2 x$$
$$\lambda T(a) = \lambda T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \lambda(a_1 + 2a_2 x) = \lambda a_1 + 2\lambda a_2 x$$
$$\therefore T(\lambda a) = \lambda T(a)$$

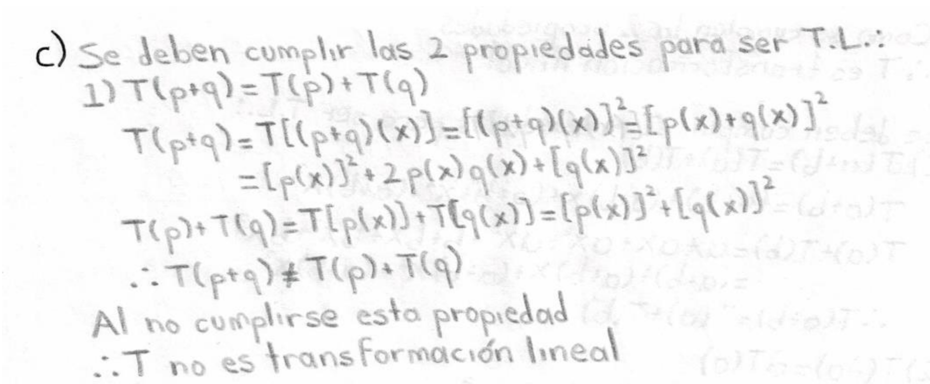
Al cumplirse las 2 propiedades

$\therefore$ T es transformación lineal

La definición de transformación lineal considera dos propiedades, si alguna de ellas falla no será necesario demostrar la otra, más aún se puede demostrar que no es transformación lineal mediante un contraejemplo. Un 10.8% de los estudiantes comprende que se debe demostrar dos propiedades, pero no hacen uso de conocimientos previos como operaciones con polinomios y exponentes, además de que cuando quieren demostrar la no linealidad mediante un contraejemplo no realizan con éxito el ejercicio por falta de conocimientos previos. Un 81% de los alumnos concluye que el ejercicio 5c no es una transformación lineal, para indicar que la función no es una transformación lineal se hizo uso de distintas estrategias de solución, entre ellas se encuentran las siguientes:

1) Mediante la definición del concepto (Figura 33); consiste en verificar que una propiedad de la definición no se cumple (Nivel de comprensión 3, combinan conocimientos)

Figura 33. Solución de un estudiante que ocupa conocimientos previos



c) Se deben cumplir las 2 propiedades para ser T.L.:

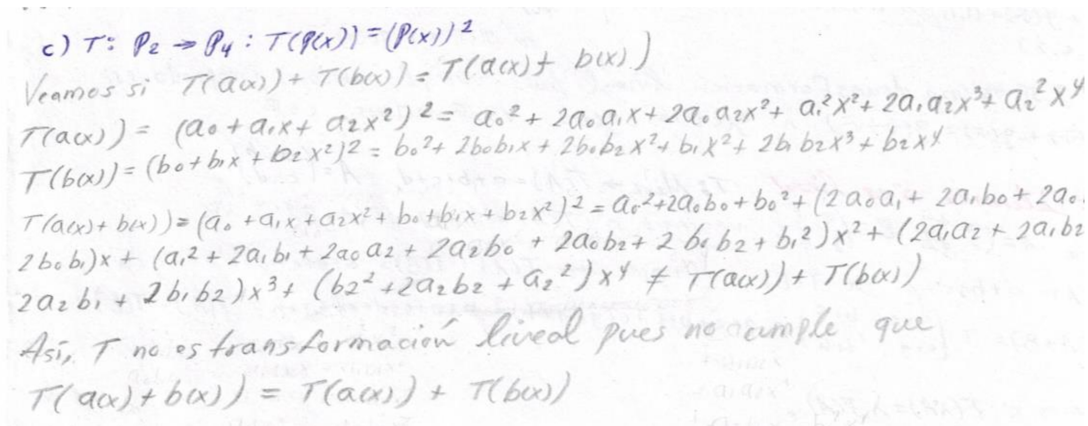
$$1)\ T(p+q) = T(p) + T(q)$$
$$T(p+q) = T[(p+q)(x)] = [(p+q)(x)]^2 = [p(x)+q(x)]^2$$
$$= [p(x)]^2 + 2p(x)q(x) + [q(x)]^2$$
$$T(p) + T(q) = T[p(x)] + T[q(x)] = [p(x)]^2 + [q(x)]^2$$
$$\therefore T(p+q) \neq T(p) + T(q)$$

Al no cumplirse esta propiedad

$\therefore$ T no es transformación lineal

2) Algunos otros alumnos prefieren hacer uso de otras maneras de demostración (Nivel 4), como lo muestra el alumno E9 en la Figura 34:

Figura 34. Solución de un estudiante usando otros recursos de la materia



c) $T: P_2 \to P_4 : T(p(x)) = (p(x))^2$

Veamos si $T(a(x)) + T(b(x)) = T(a(x) + b(x))$

$T(a(x)) = (a_0 + a_1x + a_2x^2)^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + 2a_0a_2x^2 + a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + a_2^2x^4$

$T(b(x)) = (b_0 + b_1x + b_2x^2)^2 = b_0^2 + 2b_0b_1x + 2b_0b_2x^2 + b_1x^2 + 2b_1b_2x^3 + b_2x^4$

$T(a(x) + b(x)) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2)^2 = a_0^2 + 2a_0b_0 + b_0^2 + (2a_0a_1 + 2a_1b_0 + 2a_0$

$2b_0b_1)x + (a_1^2 + 2a_1b_1 + 2a_0a_2 + 2a_2b_0 + 2a_0b_2 + 2b_0b_2 + b_1^2)x^2 + (2a_1a_2 + 2a_1b_2$

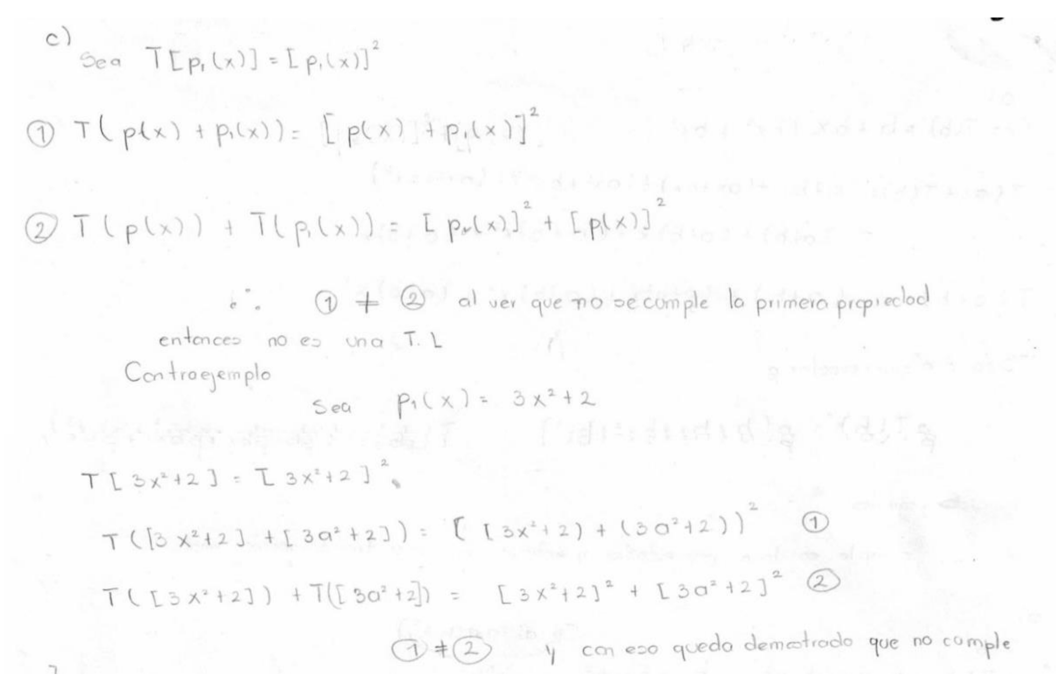
$2a_2b_1 + 2b_1b_2)x^3 + (b_2^2 + 2a_2b_2 + a_2^2)x^4 \neq T(a(x)) + T(b(x))$

Así, T no es transformación lineal pues no cumple que

$T(a(x) + b(x)) = T(a(x)) + T(b(x))$

3) Por contraejemplo (Nivel de comprensión 4) como se muestra en la figura 35:

Figura 35. Solución de un estudiante que demuestra mediante contraejemplo



c)

Sea $T[p_1(x)] = [p_1(x)]^2$

① $T(p(x) + p_1(x)) = [p(x) + p_1(x)]^2$

② $T(p(x)) + T(p_1(x)) = [p_1(x)]^2 + [p(x)]^2$

∴ ① ≠ ② al ver que no se cumple la primera propiedad

entonces no es una T. L

Contraejemplo

Sea $p_1(x) = 3x^2 + 2$

$T[3x^2+2] = [3x^2+2]^2$

$T([3x^2+2] + [3a^2+2]) = [(3x^2+2) + (3a^2+2)]^2$ ①

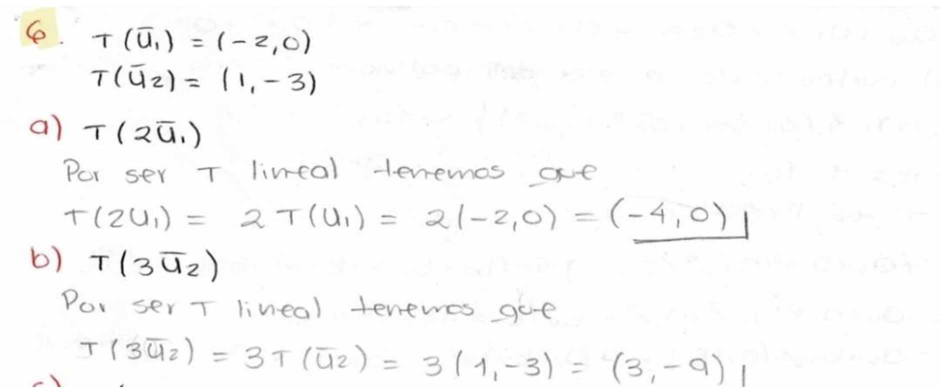
$T([3x^2+2]) + T([3a^2+2]) = [3x^2+2]^2 + [3a^2+2]^2$ ②

① ≠ ② y con eso quedo demostrado que no cumple

Pregunta 6. Sean U y V espacios vectoriales sobre$\mathbb{R}$ y T una transformacion lineal U en V. Si $T(\overrightarrow{u_1}) = (-2,0)$ y $T(\overrightarrow{u_2}) = (1,-3)$, determina:

a) $T(2\vec{u}_1)$
b) $T(3\vec{u}_2)$
c) $T(2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2)$

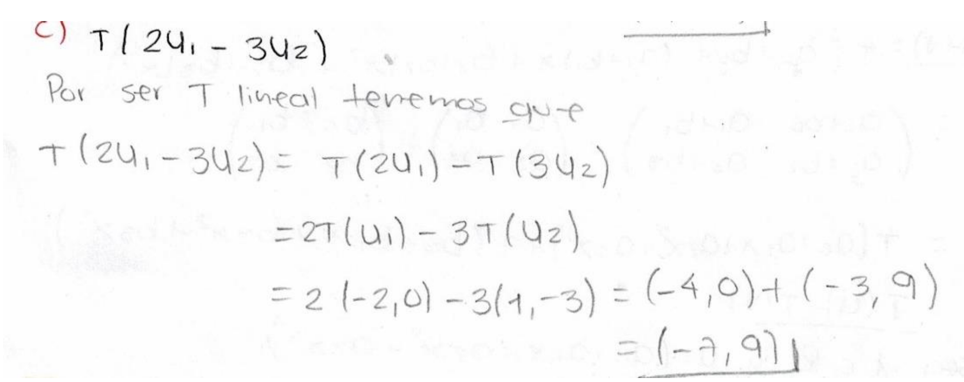
Las transformaciones lineales no siempre son presentadas en una forma general, sino que también en vectores particulares como es el caso de la pregunta 6 donde se pide determinar el valor de la transformación lineal, notando que un 97.3% comprende cómo funciona la transformación como función por lo menos en los incisos 6a y 6b (Nivel de comprensión 3 que describe una propiedad del concepto de transformación lineal) tal como en la figura 36,



6. $T(\bar{u}_1) = (-2,0)$
$T(\bar{u}_2) = (1,-3)$
a) $T(2\bar{u}_1)$
Por ser T lineal tenemos que
$T(2u_1) = 2T(u_1) = 2(-2,0) = (-4,0)$
b) $T(3\bar{u}_2)$
Por ser T lineal tenemos que
$T(3\bar{u}_2) = 3T(\bar{u}_2) = 3(1,-3) = (3,-9)$

Para realizar el ejercicio 6c se necesitan conceptos previos tal como producto de un vector por un escalar (Figura 37), siendo esto un obstáculo para el 13.5% de los alumnos que obtuvo un vector incorrecto por la aplicación errónea de conceptos previos, mientras que el 86.5% (Nivel de comprensión 3) relaciona conceptos de transformación lineal y producto por un escalar.

Figura 37. Solución de un estudiante usando conceptos de espacio vectorial



c) $T(2u_1 - 3u_2)$
Por ser T lineal tenemos que
$T(2u_1 - 3u_2) = T(2u_1) - T(3u_2)$
$= 2T(u_1) - 3T(u_2)$
$= 2(-2,0) - 3(1,-3) = (-4,0) + (-3,9)$
$= (-7,9)$

Pregunta 7. Sea $T: P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

para todo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ en P_3.

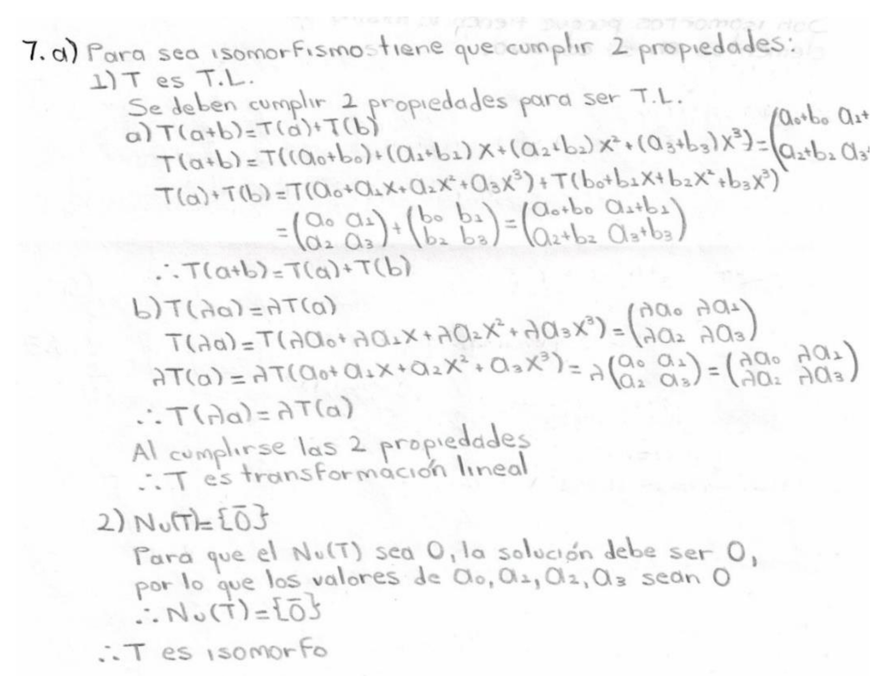
a) Demuestre que tal funcion establece un isomorfismo entre P_3 y $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
b) con tus propias palabras explica porque son isomorfos
c) Da una funcion que establesca un isomorfismo entre P_3 y $\mathbb{R}^4$

La pregunta 7 esta relacionada con el concepto de isomorfismo, aquí algunos teoremas que se utilizaron

1- **Teorema:** Una transformación lineal $T: V \to W$ es inyectiva si y solo si $Ker(T) = \{0\}$
2- **Teorema:** Una transformación lineal $T: V \to W$ es invertible si y solo si es 1-1 y sobreyectiva.
3- **Definicion:** Sea $T: V \to W$ una transformacion lineal entonces T es un isomorfismo si T es 1-1 y sobre.
4- **Teorema:** Si $dim\, V = dim\, W = n$ entonces una transformación lineal $T: V \to W$ es 1-1 si y solo si es sobreyectiva.
5- **Teorema:** Sea V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita (sobre el mismo campo de escalares). Entonces V es isomorfo a W si y solo si $dim\, V = dimW$.

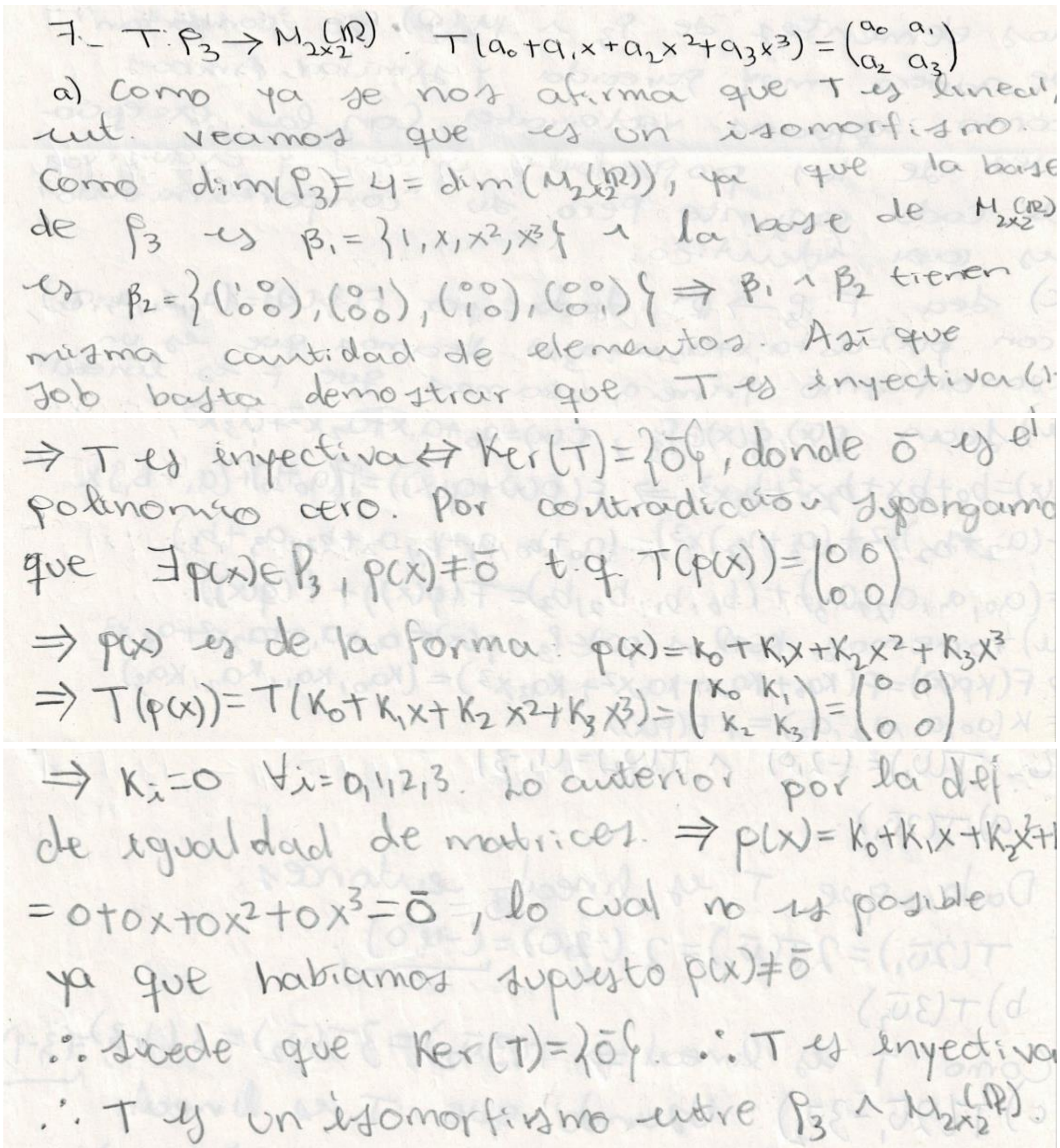
El 10.8% de los estudiantes usan estrategias irrelevantes para la demostración que perjudican concluir con lo requerido y un 29.7% de los estudiantes no realizan el ejercicio por falta de conocimientos sobre isomorfismo. Un 56.8% de los estudiantes demuestran el isomorfismo mediante la definición, mientras que algunos otros prefieren hacerlo mediante la ayuda de algún teorema. La Figura 38 muestra la solución por definición, primero se demuestra que T es una transformación lineal y después demuestran la inyectividad usando los teoremas anteriores (Nivel de comprensión 3, describen).

Figura 38. Solución de un estudiante que usa la definición de isomorfismo para demostrar


7. a) Para sea isomorfismo tiene que cumplir 2 propiedades:
1) T es T.L.
Se deben cumplir 2 propiedades para ser T.L.
a) $T(a+b)=T(a)+T(b)$
$T(a+b)=T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3)=\begin{pmatrix} a_0+b_0 & a_1+ \\ a_2+b_2 & a_3 \end{pmatrix}$
$T(a)+T(b)=T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+T(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)$
$=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0+b_0 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix}$
$\therefore T(a+b)=T(a)+T(b)$
b) $T(\lambda a)=\lambda T(a)$
$T(\lambda a)=T(\lambda a_0+\lambda a_1x+\lambda a_2x^2+\lambda a_3x^3)=\begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 \\ \lambda a_2 & \lambda a_3 \end{pmatrix}$
$\lambda T(a)=\lambda T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\lambda\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 \\ \lambda a_2 & \lambda a_3 \end{pmatrix}$
$\therefore T(\lambda a)=\lambda T(a)$
Al cumplirse las 2 propiedades
$\therefore$ T es transformación lineal
2) $Nu(T)=\{\bar{0}\}$
Para que el Nu(T) sea 0, la solución debe ser 0,
por lo que los valores de a_0, a_1, a_2, a_3 sean 0
$\therefore Nu(T)=\{\bar{0}\}$
$\therefore$ T es isomorfo

Algunos muestran solamente la inyectividad y sobreyectividad (Nivel de compresión 4, relacionan) debido a que el ejercicio ya da por hecho que es una transformación lineal como se muestra en la figura 39

Figura 39. Solución de un estudiante que ocupa las afirmaciones del enunciado



7._ $T: P_3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$. $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

a) Como ya se nos afirma que T es lineal, sut. veamos que es un isomorfismo.

Como $\dim(P_3) = 4 = \dim(M_{2\times2}(\mathbb{R}))$, ya que la base de P_3 es $\beta_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ ^ la base de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ es $\beta_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2$ tienen misma cantidad de elementos. Así que sólo basta demostrar que T es inyectiva (1-

$\Rightarrow$ T es inyectiva $\Leftrightarrow Ker(T) = \{\bar{0}\}$, donde $\bar{0}$ es el polinomio cero. Por contradicción supongamos que $\exists p(x) \in P_3$, $p(x) \neq \bar{0}$ t.q. $T(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p(x)$ es de la forma $p(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3$

$\Rightarrow T(p(x)) = T(k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3) = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

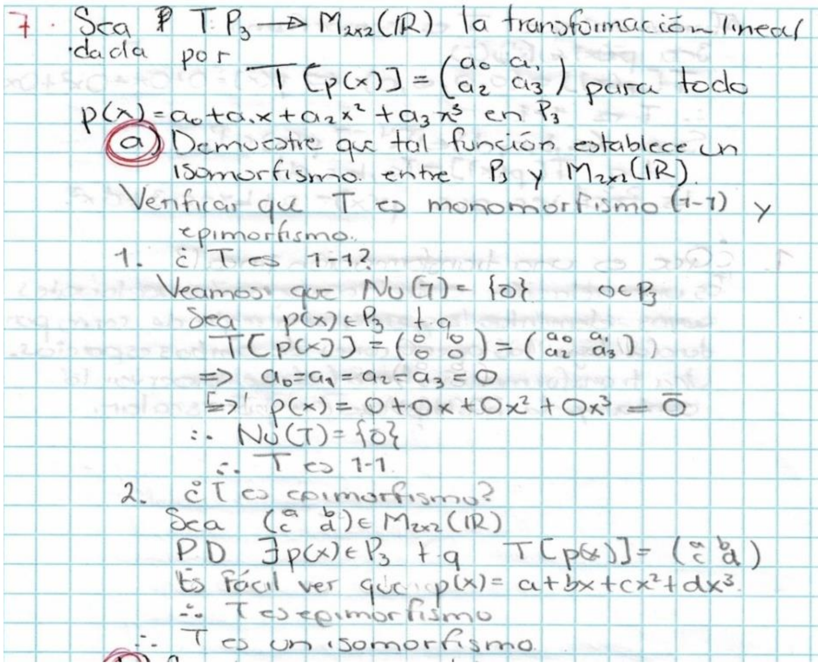
$\Rightarrow k_i = 0 \;\forall i = 0,1,2,3$. Lo anterior por la def de igualdad de matrices. $\Rightarrow p(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 +$
$= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \bar{0}$, lo cual no es posible ya que habiamos supuesto $p(x) \neq \bar{0}$

$\therefore$ sucede que $Ker(T) = \{\bar{0}\}$ $\therefore$ T es inyectiva

$\therefore$ T es un isomorfismo entre $P_3 \wedge M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

El alumno E7 es el único que responde como se muestra en la Figura 40, haciendo uso de otros conceptos (Nivel de comprensión 4, relacionan) que se relacionan con el concepto de isomorfismo;

Figura 40. Solución de un estudiante que usa concepto de otra asignatura pero que van relacionados


7. Sea $T: P_3 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ para todo $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ en P_3

a) Demuestre que tal función establece un isomorfismo entre P_3 y $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

Verificar que T es monomorfismo (1-1) y epimorfismo.

1. ¿T es 1-1?

Veamos que $Nu(T)=\{0\}$ $\quad 0 \in P_3$

Sea $p(x) \in P_3$ t.q

$T[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_0=a_1=a_2=a_3=0$

$\Rightarrow p(x)=0+0x+0x^2+0x^3=\bar{0}$

$\therefore Nu(T)=\{0\}$

$\therefore$ T es 1-1

2. ¿T es epimorfismo?

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

P.D $\exists p(x) \in P_3$ t.q $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

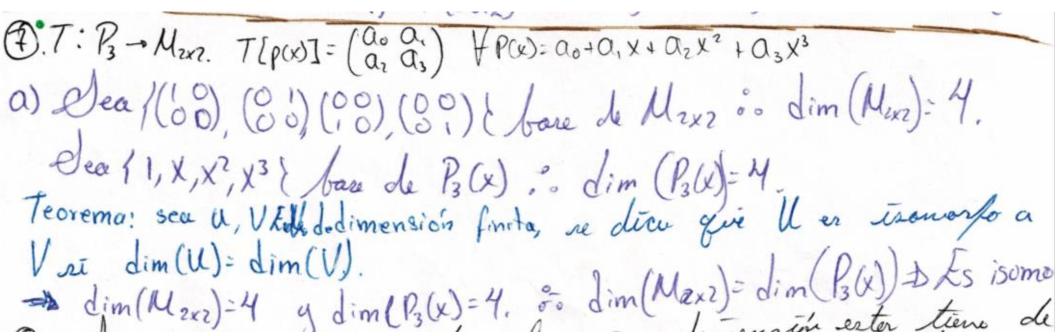
Es fácil ver que $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$\therefore$ T es epimorfismo

$\therefore$ T es un isomorfismo

Algunos otros lo demostraron mediante dimensiones (Figura 41) lo cual muestra otro nivel de comprensión sobre el concepto (Nivel de comprensión 5, uso de teoremas);

Figura 41. Solución de un estudiante que hace uso de teoremas que le facilitan la demostración


7. $T: P_3 \to M_{2x2}$. $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ $\forall P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

a) Sea $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de M_{2x2} $\therefore dim(M_{2x2})=4$.

Sea $\{1, x, x^2, x^3\}$ base de $P_3(x)$ $\therefore dim(P_3(x))=4$

Teorema: sea U, V de dimensión finita, se dice que U es isomorfo a V si $dim(U)=dim(V)$.

$\Rightarrow dim(M_{2x2})=4$ y $dim(P_3(x))=4$. $\therefore dim(M_{2x2})=dim(P_3(x)) \Rightarrow$ Es isomo

El ejercicio 7b pide explicar porque la función establece un isomorfismo entre el polinomio y la matriz para ello se requiere la comprension del concepto de isomorfismo (Figura 42 y 43), el mismo 56.8% (Nivel de comprensión 4, 5) que resolvio correctamente el inciso a) corresponde al que resolvio el 7b, tal que se presentan algunas respuestas;

Figura 42. El estudiante usa la definición de isomorfismo

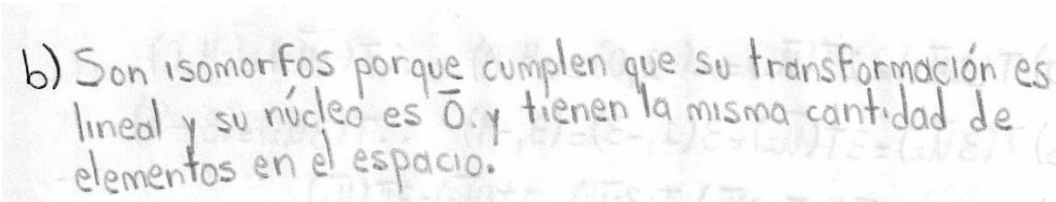
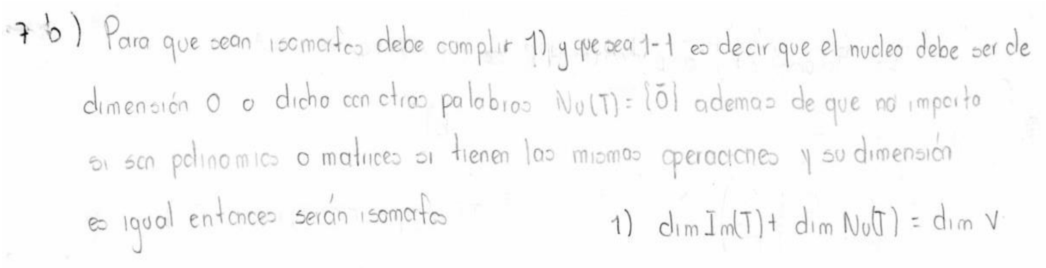

b) Son isomorfos porque cumplen que su transformación es lineal y su núcleo es $\bar{0}$ y tienen la misma cantidad de elementos en el espacio.

Figura 43. El estudiante usa un teorema debido a relaciona conceptos

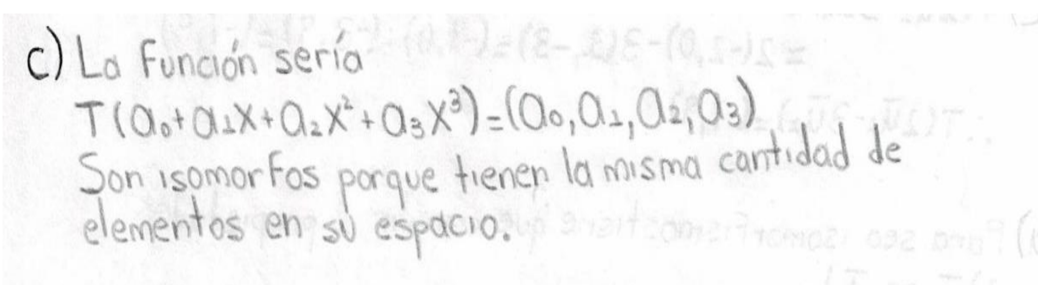

7 b) Para que sean isomorfos debe cumplir 1) y que sea 1-1 es decir que el nucleo debe ser de dimensión 0 o dicho con otras palabras $Nu(T) = \{\bar{0}\}$ ademas de que no importa si son polinomios o matrices si tienen las mismas operaciones y su dimensión es igual entonces serán isomorfos

1) $\dim Im(T) + \dim Nu(T) = \dim V$

El 32.4% tiene incompleto el ejercicio ya que solo presentan la función, pero no se dice el porqué de la elección de esa función y los mismos 29.7% que no realizaron el inciso a) y b) evidentemente tampoco realizaron el inciso c).

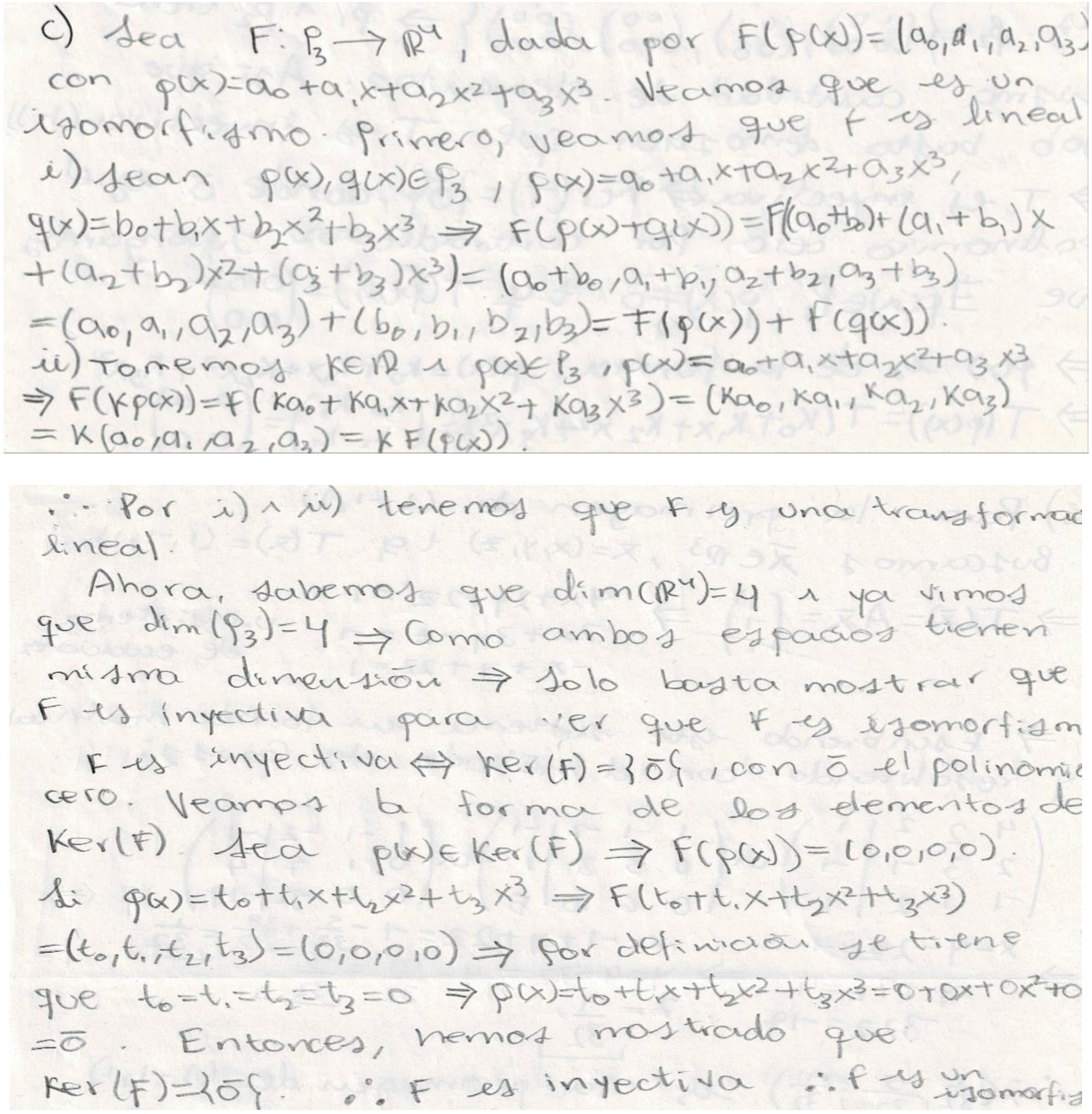
Un 37.8% define un isomorfismo entre un polinomio de grado 3 y $\mathbb{R}^4$ más aun lo demuestran como se muestra en la figura 44

Figura 44. Solución de un estudiante que demuestra el ejercicio usando un teorema (nivel 5 de comprensión)


c) La Función sería
$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=(a_0,a_1,a_2,a_3)$
Son isomorfos porque tienen la misma cantidad de elementos en su espacio.

La siguiente demostración es mediante el uso de la definición y teoremas de isomorfismo (Nivel 4, relaciona y explica) como se muestra en la Figura 45,

Figura 45. Solución de un estudiante que relaciona conceptos



c) Sea $F: P_3 \to \mathbb{R}^4$, dada por $F(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ con $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Veamos que es un isomorfismo. Primero, veamos que F es lineal

i) Sean $p(x), q(x) \in P_3$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \Rightarrow F(p(x) + q(x)) = F((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3) = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
$= (a_0, a_1, a_2, a_3) + (b_0, b_1, b_2, b_3) = F(p(x)) + F(q(x))$.

ii) Tomemos $k \in \mathbb{R}$ ∧ $p(x) \in P_3$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$\Rightarrow F(kp(x)) = F(ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + ka_3x^3) = (ka_0, ka_1, ka_2, ka_3)$
$= k(a_0, a_1, a_2, a_3) = kF(p(x))$.

∴ Por i) ∧ ii) tenemos que F es una transformac lineal.

Ahora, sabemos que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ ∧ ya vimos que $\dim(P_3) = 4 \Rightarrow$ Como ambos espacios tienen misma dimensión $\Rightarrow$ solo basta mostrar que F es inyectiva para ver que F es isomorfism

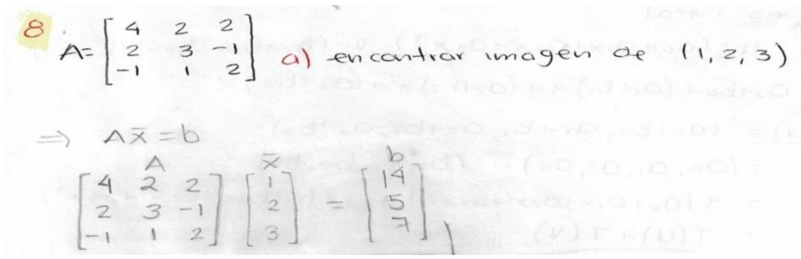
F es inyectiva $\Leftrightarrow Ker(F) = \{\bar{0}\}$, con $\bar{0}$ el polinomio cero. Veamos la forma de los elementos de Ker(F) sea $p(x) \in Ker(F) \Rightarrow F(p(x)) = (0,0,0,0)$.
Si $p(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 \Rightarrow F(t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3)$
$= (t_0, t_1, t_2, t_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow$ por definición se tiene que $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0 \Rightarrow p(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0$
$= \bar{0}$. Entonces, hemos mostrado que $Ker(F) = \{\bar{0}\}$ ∴ F es inyectiva ∴ F es un isomorfis

Pregunta 8. Suponga que dada la matriz **A** se define una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{X}) = A\vec{X}$. con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre:

a) La imagen de (1,2,3).
b) La preimagen de (1,-1,1).

Un 2.7% de los estudiantes que realizan el ejercicio 8a confunde ambos términos y 97.3% saben la diferencia entre la imagen y la preimagen, como en la Figura 46.

Figura 46. Solución de un estudiante que identifica y realiza un procedimiento aparentemente sencillo (Nivel 2)



21.6% de los estudiantes en el ejercicio 8b no aplican correctamente el método de Gauss y 67.6% obtiene la preimagen mediante distintas formas (Figura 47 y 48)

Figura 47. Solución de un estudiante que usa la matriz escalonada reducida

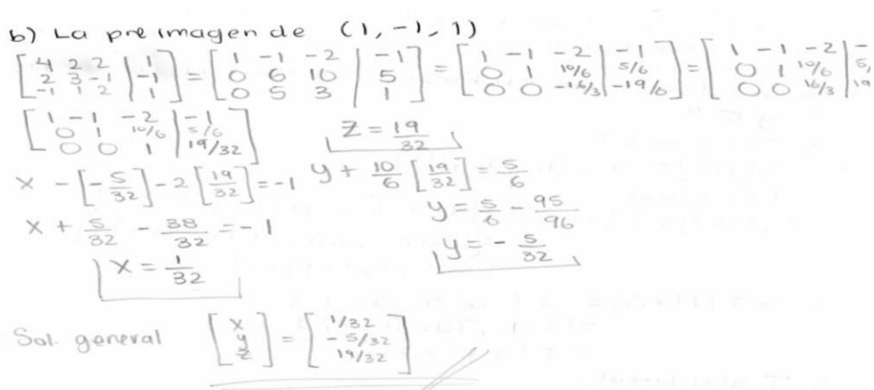
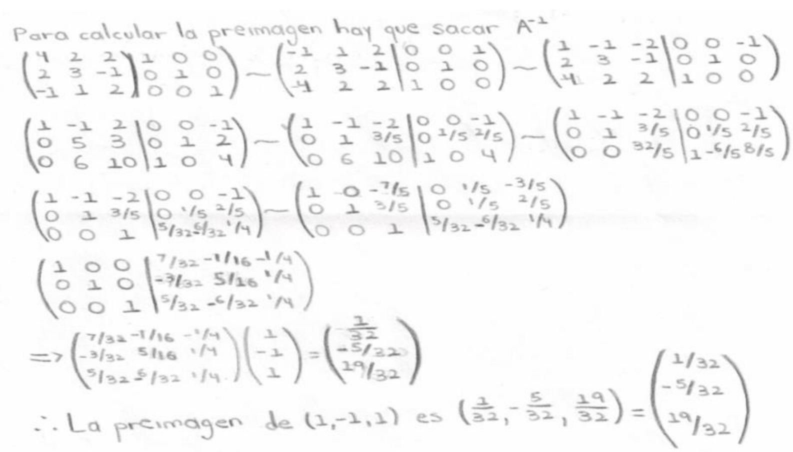


Figura 48. Solución de un estudiante que usa la matriz inversa para encontrar la preimagen



8.2 Resultados de aprendizaje

Posterior a la clasificación de respuestas, se usa la teoría de taxonomía SOLO (Biggs & Tang, 2007) que facilita de forma sistemática como aumenta la complejidad de la actuación de un estudiante cuando logra el dominio de muchas tareas referentes al concepto de TL. El modelo muestra las distintas etapas que componen el desarrollo de aprendizaje, llevándolo desde lo más superficial hacia lo más profundo. Esta forma de clasificar los resultados de aprendizaje según el nivel de complejidad, permite evaluar los resultados de aprendizaje en términos de calidad para conocer el nivel de comprensión alcanzado.

Para tratar de clasificar las respuestas a los ejercicios tomamos en cuenta que los ejercicios correctos forman parte de la aplicación de la teoría de taxonomía Biggs y los incorrectos e incompletos nos sirven para detectar las dificultades y a partir de ello ver qué porcentaje de esos alumnos tiene dificultades y cuales son (Tabla 8):

Ejercicios	Curso I	Curso II
Correcto	61%	84%
Incorrecto	16	7%
Incompleto	10%	4%
No realizado	13%	5%

Tabla 8. Comparación del curso I y II

En la tabla anterior muestra que es más alto el porcentaje de ejercicios correctos en el curso II y que por ende disminuyen los porcentajes en las otras opciones de la clasificación. Antes de presentar los niveles de comprensión del primer y segundo grupo se presentarán los errores del segundo grupo (Tabla 9)

Tabla 9. Porcentajes y descripción de los errores del curso II (Anexo 5)

Error	Porcentaje	Descripción
		Los estudiantes cometen errores de este tipo debido al uso de lenguaje habitual, el significado puede ser comunicado por alusión o asociación sin embargo el lenguaje de las matemáticas es más pre-

Tipo 1	3%	ciso.
Tipo 2	8%	Este error es debido a un aprendizaje deficiente de conceptos previos, cometidos por deficiencias en el manejo de procedimientos y conceptos matemáticos.
Tipo 3	0%	Sin presencia de este error.
Tipo 4	0%	Sin presencia de este error.
Tipo 5	0%	Sin presencia de este error.

A pesar de que se trata de ayudar al estudiante mediante el diseño de una propuesta de enseñanza, este fracasa al tratar de comprender el concepto de TL porque no capta lo invariante en los ejercicios. En la tabla 10 se observan los errores en %, que comenten los estudiantes del curso I (26%) y el curso II (11%)

Tabla 10. Comparación de porcentajes del curso I y II

Error	Curso I	Curso II
Tipo 1	5.1%	3%
Tipo 2	11.2%	8%
Tipo 3	4%	0%
Tipo 4	2.7%	0%
Tipo 4	3%	0%

Aparentemente los errores del tipo 2 siguen persistiendo en el segundo grupo, pero han disminuido un 3.2%, algo interesante es que los errores de tipo cognitivo han desaparecido, fortaleciendo la comprensión de los estudiantes. Cabe aclarar que los errores de tipo espacial no se pueden comparar con el segundo grupo ya que el examen que realizaron ellos, no contenía ningún ejercicio en el cual se podría manifestar las dificultades. Los resultados obtenidos al comparar la tabla, contribuyen a creer que se han tomado las decisiones correctas a la hora de elegir la secuencia didáctica.

Lo importante no es solo determinar si el estudiante comprende o no los conceptos de TL, si no, también determinar en el nivel de comprensión en el que se encuentran, por lo que en la tabla 11 y 12 se muestra el nivel de comprensión de ambos grupos, para que después se comparen.

Tabla 11. Porcentajes de nivel de comprensión de Curso I, examen 1

Comprensión	Porcentaje	Descripción
Nivel 1	20%	Los estudiantes no logran captar el objetivo de los ejercicios o recoger información necesaria para desarrollar lo que el ejercicio pide. Usan estrategias irrelevantes para la solución de ejercicios lo que implica que no comprende lo que el ejercicio requiere.
Nivel 2	44%	Los estudiantes identifican conceptos básicos para la solución de ejercicios, realizando procedimientos sencillos con conceptos previos al de transformación lineal. Las soluciones cumplen una parte del ejercicio, pasan por alto otros atributos importantes es decir las soluciones se quedan en terminología, solo memorizan conceptos.
Nivel 3	21%	Los estudiantes combinan conceptos para la solución de ejercicios así como desarrollan procedimientos sencillos para generar otro procedimiento dando una explicación del uso de la estrategia utilizada.
Nivel 4	3%	Los estudiantes son capaces de analizar el ejercicio y determinar que procedimiento o estrategia aplicar relacionando conceptos.
Nivel 5	0%	Ningún alumno alcanza este nivel debido al tipo de ejercicios propuestos en el anexo 1, a lo más que se acercan es a reflexionar sobre la solución.

Tabla 12. Porcentajes de nivel de comprensión de Curso I, examen 2

Comprensión	Porcentaje	Descripción
Nivel 1	30.2%	Las respuestas que proporcionan los alumnos ante los ejercicios propuestos en Anexo 2 son erróneas o inexistentes. No tienen conexión la respuesta con la solución al ejercicio. No resuelven la cuestión que el ejercicio requiere.

Nivel 2	31.5%	El resultado de los alumnos, pese a ser cierto, solo se centra en un determinado aspecto que, por otro lado, no tienen por qué ser relevantes. Hacen conexiones simples es decir realizan todas las operaciones correctamente pero su significado no es comprendido.
Nivel 3	10.2%	En este caso los alumnos son capaces de enumerar una serie de procedimientos correctos, pero no van más allá de realizar procedimientos simples obstruyendo el avance para realizar procedimientos más complejos indicando además la relación entre datos del ejercicio y los teoremas que usan.
Nivel 4	11.7%	Los alumnos no solo identifican varios procedimientos complejos, sino que también son capaces de relacionarlos entre sí. Utiliza un estilo explicativo para expresar la solución al ejercicio.
Nivel 5	6.2%	Es el nivel más complejo, en él, los alumnos cumplen con los niveles anteriores y, además, son capaces de ir más allá de lo preguntado para poder relacionarlo con otros sistemas ajenos al ejercicio, enriqueciendo la respuesta. Los estudiantes hacen conexiones no solo dentro del área determinada, sino también con otras.

La mitad de los estudiantes del curso I en el examen 1 y 2 se encuentran dentro del segundo nivel de comprensión desarrollando un aprendizaje más bien superficial, mientras que ninguno alcanza un nivel de comprensión avanzado en el examen 1, es decir, un aprendizaje profundo. Muy pocos estudiantes en el examen 2 logran encontrar el cambio conceptual hacia el nivel experto, en el que el estudiante alcanza el modo de funcionamiento requerido. La tabla 13 muestra los resultados del curso II

Tabla 13. Porcentajes de nivel de comprensión de Curso II

Compresión	Porcentaje	Descripción
Nivel 1	12.5%	El estudiante en este nivel no resuelve la cuestión planteada hace algunas asociaciones irrelevantes, no identifica conceptos y no establece relaciones entre ellos, utiliza únicamente una pequeña cantidad de información disponible a lo mucho, reproduce los contenidos memorizados.

Nivel 2	32.9%	El estudiante responde a lo planteado en el ejercicio, pero de forma limitada, apenas establece relaciones entre los conceptos de manera descriptiva. Cuando concluye acerca de algo, lo hace precipitadamente seleccionando una parte de la información para solucionar el ejercicio.
Nivel 3	31.9%	El estudiante utiliza dos o más conjuntos de conceptos normalmente llega a ordenarlos, pero no logra llegar a explicar el modo en que se relacionan a la vez ignora las posibles incoherencias en los argumentos que sostiene.
Nivel 4	10.5%	A diferencia de los estudiantes del nivel 3, en este nivel los estudiantes relacionan los conceptos de un modo coherente alcanzando conclusiones que responden a los conceptos disponibles, además de que ofrecen algunas explicaciones teóricas para justificar el modo de relacionar los conceptos. Algunos estudiantes utilizan conceptos más allá de la disponible.
Nivel 5	7.1%	En este nivel, el estudiante es capaz de manejar conceptos elaborados y considera diversas hipótesis ofreciendo distintas explicaciones plausibles, todas ella basadas en conceptos relevantes.

Un 17.6% de los estudiantes del curso II se encuentran en la fase cualitativa cuyo énfasis está en la profundidad y la utilización de conceptos, en estos dos últimos niveles se encuentra el cambio conceptual, que se refiere a la construcción activa de aprendizajes.

Cuando un estudiante se encuentra dentro de los tres primeros niveles, incluyendo el nivel pre-estructural, estaría desarrollando un aprendizaje superficial. Por esto, cuando un estudiante logra avanzar hacia los últimos niveles se puede definir que está desarrollando un aprendizaje profundo, tomando en cuenta esto, se podría decir que la mayoría de los estudiantes del primer y segundo grupo se encuentran dentro del aprendizaje superficial (78.5% y 67.3% respectivamente) mientras que un mínimo de estudiantes se encuentra en el aprendizaje profundo (10.5% y 17.7%) como lo muestra en la Tabla 14;

Tabla 14. Comparación de niveles de compresión entre el curso I yII

Compresión	Curso I	Curso II
Nivel 1	25.1%	12.5%
Nivel 2	37.8%	32.9%
Nivel 3	15.6%	31.9%
Nivel 4	7.4%	10.6%
Nivel 5	3.1%	7.1%

La mayor parte de los estudiantes del curso I se encuentra en el segundo nivel de comprensión con un 37.8% al igual que el curso II con un 32.9, a diferencia que el curso II tiene un 17.8% de estudiante en un aprendizaje profundo.

Se concluye que los estudiantes que no comprenden (nivel 1 de comprensión) comenten errores que tienen su origen en un obstáculo que surge por el tipo de pensamiento necesario para estudiar AL (Error tipo 1 y 2). El tipo de error que cometen más los estudiantes de este trabajo es de tipo 2 debidos a un aprendizaje deficiente y falta de fortaleza conceptual en los conceptos matemáticos previos.

Capítulo 9. CONCLUSIÓN GENERAL

La problemática de la comprensión de los alumnos es difícil, sin embargo, en nuestro caso indicamos que muchos autores opinan la falta de comprensión se debe al obstáculo del formalismo. Con la secuencia didáctica lo que se busco fue suavizar este problema, es decir, los alumnos perciben ejercicios en diferentes espacios vectoriales (polinomios, matrices) como muy diferentes, no distinguen que deben aplicar el mismo concepto de TL, en nuestro caso, únicamente cambian los detalles, pues claramente matrices y polinomios operan diferente.

Por otro lado, la definición de TL es sencilla en apariencia, con base en la taxonomía SOLO podemos darnos cuenta que la comprensión es gradual y lo que se persigue es relacionar un concepto como TL con otros, en nuestro caso con teoremas, y esto constituye un objeto deseable, pues no basta con repetir la definición. Los alumnos no aprenden al mismo ritmo de la exposición en clase, es necesario tender puentes entre los conceptos previos y una exposición formal, a la que los alumnos deben acceder en vista a estudios posteriores de AL.

Como puede verse al comparar el porcentaje en nivel 3,4 y 5 el segundo grupo mejora. Esto nos indica que hubo un efecto positivo con la estrategia didáctica implementada en el grupo 2. El uso de la estrategia didáctica propuesta, ayudo a los estudiantes a identificar el concepto TL en distintos espacios vectoriales debido a que captan lo invariante en estos espacios, esto se infiere al usar la taxonomía Biggs que nuestra el nivel de compresión de los alumno, además de que es importante tener en cuenta que lo que aprenden los estudiantes está fuertemente influido por la forma en que se enseña, el alto nivel del formalismo y del lenguaje empleado por el profesor en la clase representa una dificultad para que el estudiante aprenda AL, ya que no está familiarizado con algunos elementos como las demostraciones o elementos de la lógica matemática y por los libros de texto que se usan por lo que es recomendable revisar el tipo de lectura que los estudiantes del curso están usando.

En nuestro caso consultamos varios libros de álgebra lineal y usamos los ejercicios típicos que aparecen en la sección donde se presenta la definición de TL, pues la comprensión del concepto pasa por la solución a estos ejercicios, que de alguna manera recogen los diferentes aspectos de la definición y toman en cuenta diferentes espacios. Esto tiene un efecto positivo si tenemos en mente los teoremas que se presentan en las secciones subsecuentes.

Se observa que las dificultades que tienen los alumnos universitarios están en el aprendizaje de las definiciones, propiedades de estas, dadas de manera abstracta y formal en el área del AL, específicamente en las de TL. Cuando no se hace énfasis en la relación de conceptos se provoca que no exista una articulación entre conceptos. Cada una de estas dificultades y otras que pueden ser presentadas por los estudiantes que necesitan ser conocidas por el docente, para que implemente las estrategias metodológicas más apropiadas para disminuir el impacto en el aprendizaje de la matemática.

Vale la pena rescatar el aprendizaje a través de los errores. En ese sentido, se sugiere al docente indicar dónde se encuentran errores en el procedimiento que el estudiante sigue para resolver un ejercicio, y que sea el mismo estudiante o sus compañeros quienes descubran la naturaleza y justificación de ese error y lo corrijan.

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H., (1994). Introducción al álgebra lineal (5a ed). México: Limusa editores.

Anton, H., (2011). Introducción al álgebra lineal (3ª ed). México: Limusa editores.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1976) “Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo” México, 1976, Trillas.

Benítez R. (2015). Geometría vectorial. 3ª. Edición Trillas México

Biggs, J. B., Kember, D., & Leung, D. Y. P. (2001). The Revised Two Factor study Process Questionnaire. Bristish Journal of Educational Paychology, pp. 133-149.

Biggs, J.B., (2005) Calidad del aprendizaje universitario. Narcea.

Biggs, J. & Tang, C. (2011). Teaching for Quality Learning at University. USA: McGraw-Hill p. 91.

Bruner, J. S. (1969). Hacia una teoría de la instrucción. México: UTEHA

Cárdenas H., Raggi F., Luis E., Tomás T. (1995) Álgebra Superior 2ª. Edición Trillas México.

Carlson, D., Charles, J., Lay, D., Porter, A., & Duane, (1993): “The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra”. The College Mathematics Journal, Vol. 24, No. 1, pp. 41-46 Published by: Mathematical Association of America http://www.jstor.org/stable/2686430

Díaz, F., & Hernández, G. (2010). Estrategias de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos. En Estrategias docentes para un aprendizaje significativo (pp. 137- 226). México: McGraw Hill education.

Dorier, J., Robert. A, Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. The teaching of linear algebra (pp.85- 124). France.

Dorier, J. L. & Sierpinska, A. (2001). “Research into the teaching and learning of linear algebra”. Ed. D. Holton, The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, pp. 255–273, Dordrecht (Holanda) (pp. 255-273).

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: transformations, European research in mathematics education proceedings of the first conference of the European society in mathematics education (pp. 209–221). Osnabruck, Germany.

Dubinsky, E. (1997), On Learning Quantification, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, vol. 16, num2/3, pp. 335-362.

Dumont, H., Istance D., Benavides, F., (2010) The nature of learning. OCDE, disponible en www.oecd.org/edu/ceri/innovativelearningenvironments.htm

Feldman, R.S. (2005) "Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana". (Sexta edición) Mexico, MC – Grill Hill.

Fraleigh, J. B. (1988). Algebra Abstracta, primer curso. Mexico: Sistemas Tecnicos de Edicion, S.A de C.V.

Freddy Rojas Velásquez (junio de 2001). Enfoques sobre el aprendizaje humano(PDF) pág. 1. Consultado el 27 de febrero de 2019. "definición de aprendizaje".

Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (1982). Álgebra lineal. Illinois: Publicaciones cultural.

Grossman, S. & Flores, J.J. (2012). Álgebra lineal. MÉXICO: McGraw hill.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. in the teaching of linear algebra in question (pp. 177 —189). Netherlands: Kluwer academic publishers.

Harel, G. (2018). The learning and teaching of linear algebra through the lenses of intellectual need and epistemological justification and their constituents. challenges and strategies in teaching linear algebra (pp. 3-27). USA: Springer.

Herstein, I. N. (1996). Abstract Algebra. New Jersey: Prentice-Hall.

Hillel, J. (2000). "Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra". Ed. J.-L. Dorier, On the teaching of linear algebra, pp. 191–208, Dordrecht (Holanda).

Kolman, B.& Hill, D. (2006). Algebra lineal. MÉXICO: Pearson educación.

Kunze, R. & Hoffman, K. (1971). Linear Algebra (second ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ

Lang, S. (1986). Introduction to Linear Algebra (second ed). Springer- Verlag: New York.

Larson, R. (2013). Elementary linear algebra. USA: Cengage learning.

Molina, J. G & Oktac, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 2, pp. 241-273.

Moreno, L., Sriraman, B. & Waldegg, G. (2006). Mathematical Objects and the Evolution of Rigor. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education (pp.17- 28). http://mjrme.org/index.php/MJRME/about

Nacional Council of Teacher of Mathematics (2000), Principles and standards for school mathematics, Reston, NCTM.

Orton, A., (2003) Didáctica de las matemáticas, Morata España.

Perkins D. (2000) Aula inteligente. Gedisa - SEP Biblioteca para la actualización del maestro

Poole, D. (2015). Linear algebra a modern introduction. USA: Cengage learning

Roa, S., & Oktaç, A. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal. tesis de maestría, Cinvestav- Ipn.

Rodríguez H. C (2011). Diagnóstico de las dificultades de la enseñanza-aprendizaje en un curso de Álgebra Lineal. XIII CIAEM-IACME, disponible https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2359/711

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer A. P.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of student´s thinking in linear algebra. the teaching of linear algebra in question (pp. 209- 246). Netherlands: Kluwer academic publishers.

Skemp, R. (1980). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Morata.

Stewart, S. (2018). Moving between the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking with specific linear algebra tasks. Challenges and strategies in teaching linear algebra (pp. 51- 67). USA: Springer.

Socas, M. & Palarea, M. (1997): Las fuentes de significado, los sistemas de reprentacion y errores en el algebra escolar. Revista de Didactica de las Matematicas. Barcelona, editorial Grao, pp. 7-24.

Tall, D., Y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, (pp. 151-169).

Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. Mathematics Education Research Center. University of Warwick.

Uicab, R., & Oktac, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemáticas Educativa, 9, pp. 459-490.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. London: Academic Press Inc.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Advanced mathematical thinking, (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Wittrock, M. (1990): “Procesos de pensamiento en los alumnos”. En la investigación en la enseñanza III. Wittrock(ed.). Paidós Educador, Barcelona.

Woolfolk, A. (2010). Psicología Educativa. México: Pearson educación
Wooton, W., Beckenbach, E., Fleming, F. J. (1985) Geometría analítica moderna. Publicación cultural, México.

ANEXOS
Anexo 1

TRANSFORMACIONES LINEALES

(Parte 1)

1) Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funciones definidas por $f(x,y) = (y^2, x^2)$ y $g(x,y) = (x, 3y - 2x, y)$
   a) Sean $u = (1,0)$ y $v = (0,1)$
      i. Calcula $(u + v)$ y determina $f(u + v)$
      ii. $f(u), f(v)$ y encuentra el vector $f(u) + f(v)$
      iii. Comprobando los resultados anteriores, ¿son $f(u + v)$ y $f(u) + f(v)$ iguales?
   b) $u = (-2,0)$ y $c = 4$
      i. Calcular cu y determinar $f(cu)$
      ii. Calcula $f(u)$ y encuentra el vector $cf(u)$
      iii. Comprobando los resultados anteriores, ¿son $f(cu)$ y $cf(u)$ iguales?
   c) Realizar los puntos a), b) para la funcion g.
   d) ¿Son f y g transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.
   e) ¿ Que es una transformacion lineal?
2) Determine si la funcion dada es una transformación lineal:
   a) $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a + b + c + d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   b) Demostrar que la funcion siguiente, no es transformación lineal, donde;

      $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a^2$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3) ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?
   c) $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
   d) $T: P_2 \to P_1$; $T(a_0 + a_1x + a_2x) = a_1 + 2a_2x$
   e) $T: P_2 \to P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$
4) Sean $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformacion lineal definida por $T(x,y) = (x, 4y)$
   c) Sean $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Determine la imagen de S bajo T.
   d) Describe en términos geométricos S y su imagen.

Anexo 2

TRANSFORMACIONES LINEALES(Parte 2)

1. Sean U y V espacios vectoriales sobre el mismo K y T una transformacion lineal U en V. Si $T(u_1) = (-2{,}0)$ y $T(u_2) = (1, -3)$, determina:
   a) $T(2u_1)$
   b) $T(3u_2)$
   c) $T(2u_1 - 3u_2)$

2. Sea $T: P_3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ para todo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x$ en P_3.
   a) Demuestre que tal funcion establece un isomorfismo entre $P_3\ y\ M_{2,2}(\mathbb{R})$.
   b) Con tus propias palabras explica porque son isomorfos.
   c) Da una funcion que establesca un isomorfismo entre $P_3\ \ y\ \mathbb{R}^4$.

3. Indique, para cada una de las siguientes afirmaciones, si es cierta o si es falsa. Justifique su respuesta.
   a) Sea $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformacion lineal definida por $L(x) = Ax$. Entonces L es sobre si y solo si $det(A) \neq 0$
   b) Sea $L: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^{10}$ una transformacion lineal definida por $L(x) = Ax$ para x en $\mathbb{R}^6$. Si $nulidad(L) = 3$, entonces $rango(L) = 7$.
   c) Si $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformacion lineal definida por $L(x) = Ax$ para x en $\mathbb{R}^n$. Entonces A es sigular si y solo si $nucleo(L) = \{0_V\}$

Anexo 3

TRANSFORMACIONES LINEALES

1. ¿ Que es una transformacion lineal?
2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funcion definida por $f(x, y) = (y^2, x^2)$
   a) Sean $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{v} = (0,1)$
      iv. Determina $f(\vec{u} + \vec{v})$
      v. Encuentra el vector $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
      vi. ¿son $f(\vec{u} + \vec{v})$ y $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ iguales?
   f) $\vec{u} = (-2,0)$ y $c = 4$
      iv. Determinar $f(c\vec{u})$
      v. Encuentra el vector $cf(\vec{u})$
      vi. ¿son $f(c\vec{u})$ y $cf(\vec{u})$ iguales?
   g) ¿Es f una transformacion lineal? Justifica tu respuesta.
3. Sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funcion definida por $g(x, y) = (x, 3y - 2x, y)$
   h) Sean $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1)$
      vii. Determina $g(\vec{u} + \vec{v})$
      viii. Encuentra el vector $g(\vec{u}) + g(\vec{v})$
      ix. ¿son $g(\vec{u} + \vec{v})$ y $g(\vec{u}) + g(\vec{v})$ iguales?
   i) $\overline{u} = (-2,0)$ y $c = 2$
      vii. Determinar $g(c\vec{u})$
      viii. Encuentra el vector $cg(\vec{u})$
      ix. ¿son $g(c\vec{u})$ y $cg(\vec{u})$ iguales?
   j) ¿Es g una transformacion lineal? Justifica tu respuesta.
4. Determine si la funcion dada es una transformación lineal (justifique):
   b) Si $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $T(A) = a + b + c + d$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales (justifique)?
   d) $T: \mathbb{R} \rightarrow P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
   e) $T: P_2 \rightarrow P_1$; $T(a_0 + a_1x + a_2x) = a_1 + 2a_2x$
   f) $T: P_2 \rightarrow P_4$; $T[p(x)] = [p(x)]^2$.
6. Sean $U \, y \, V$ espacios vectoriales sobre$\mathbb{R}$ y T una transformacion lineal U en V. Si $T(\overrightarrow{u_1}) = (-2,0)$ y $T(\overrightarrow{u_2}) = (1,-3)$, determina:
   d) $T(2\vec{u}_1)$
   e) $T(3\vec{u}_2)$
   f) $T(2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2)$
7. Sea $T: P_3 \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal por $T[p(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ para todo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ en P_3.
   d) Demuestre que tal funcion establece un isomorfismo entre $P_3 \; y \; M_{2,2}(\mathbb{R})$.
   e) con tus propias palabras explica porque son isomorfos
   f) Da una funcion que establesca un isomorfismo entre $P_3 \;\; y \; \mathbb{R}^4$
8. Suponga que dada la matriz **A** se define una transofrmacion lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{X}) = A\vec{X}$. con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre:
   c) La imagen de (1,2,3).
   d) La preimagen de (1,-1,1).

Anexo 4

Las siguientes tablas muestran la clasificación de nivel de comprensión por estudiantes mediante la teoría Biggs

Alumnos	1ª	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	Comprensión
E1	2	2	2	2	3	2	3	3	3	4	0	0	2,3,4
E2	2	2	2	0	2	2	3	3	3	0	0	0	2,3
E3	2	2	2	2	3	2	3	1	1	1	1	0	1,2,3
E4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	0	2,3
E5	2	2	2	4	3	2	2	2	2	2	1	0	1,2,4
E6	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	1	1,2
E7	2	2	0	1	2	0	1	1	1	1	1	1	1,2
E8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
E9	2	2	2	1	0	2	2	2	2	0	0	0	1,2
E10	2	2	2	2	3	1	1	1	1	0	1	0	1,2
E11	2	2	2	1	3	2	3	2	2	2	2	3	1,2,3
E12	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	2
E13	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2,3
E14	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
E15	2	2	2	2	0	2	2	0	0	0	3	3	2,3
E16	2	2	2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	2
E17	2	2	2	2	2	0	0	2	2	0	0	0	2
E18	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	0	2,3
E19	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	1	1	1,2
E20	2	2	2	2	2	1	1	2	0	0	0	0	1,2
E21	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1,2,3
E22	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	1,2,3
E23	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	2
E24	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	2
E25	2	2	2	0	3	2	0	0		0	0	0	2
E26	2	2	2	2	2	2	3	0	0	0	0	0	2,3

E27	2	2	2	0	2	2	0	2	2	0	0	0	2
E28	2	2	2	2	2	1	2	0	0	0	3	0	1,2,3
E29	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	3	2	2,3
E30	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	0	2,3
E31	2	2	2	2	3	2	3	0	0	0	0	0	2,3
E32	2	2	2	2	3	0	0	1	1	1	1	0	1,2,3
E33	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	0	1,2
E34	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	3	2,3
E35	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2	0	2,3
E36	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	0	0	1,2
E37	2	2	2	2	3	2	3	2	2	3	0	0	2,3
E38	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	3	2,3,4
E39	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1,2
E40	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
E41	2	2	0	2	1	2	2	2	0	0	0	0	1,2
E42	2	2	2	1	2	2	0	2	2	2	3	2	1,2,3
E43	2	2	2	1	1	1	2	0	0	0	0	1	1,2
E44	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
E45	2	2	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	2

Curso I (1º parte)

Alumnos	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	Compresión
ES1	2	2	2	0	0	0	0	1	0	1
ES2	2	2	2	1	1	1	1	5	1	1,2,5
ES3	2	2	2	4	5	5	4	1	5	1,2,4,5
ES4	2	2	2	2	4	1	0	0	0	1,2,4
ES5	2	2	2	3	4	5	0	5	5	2,3,4,5
ES6	2	2	2	0	0	0	0	0	0	2
ES7	2	2	2	1	1	0	1	1	1	1,2

ES8	2	2	2	1	4	1	2	4	5	1,2,4,5
ES9	2	2	2	0	0	0	3	3	1	2,3
ES10	2	2	2	5	4	0	2	5	4	2,4,5
ES11	2	2	2	3	2	0	4	1	2	1,2,3,4
ES12	2	2	2	5	4	2	5	1	1	1,2,4,5
ES13	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1,2
ES14	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1,2
ES15	3	3	3	1	1	1	1	2	1	1,2,3
ES16	3	3	3	2	2	2	1	3	4	1,2,3,4
ES17	2	2	2	0	0	0	0	5	1	1,2,5
ES18	2	2	2	3	4	2	0	2	0	2,3,4
ES19	2	2	2	5	4	4	2	2	3	2,3,4
ES20	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1,2
ES21	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1,2
ES22	2	2	2	1	3	3	2	3	4	1,2,,3,4
ES23	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1,2
ES24	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1,2
ES25	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1,2
ES26	2	2	3	1	2	2	1	3	3	1,2,3
ES27	2	2	2	2	2	2	1	1	2	1,2
ES28	2	2	2	0	0	0	1	1	2	1,2
ES29	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1,2
ES30	2	2	2	1	2	2	2	1	1	1,2
ES31	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1,2
ES32	2	2	2	1	1	0	0	3	1	1,2
ES33	2	2	2	4	4	4	1	4	4	1,2,3,4
ES34	2	2	2	1	1	1	0	0	0	1,2
ES35	2	2	2	3	3	1	4	4	4	1,2,3,4
ES36	2	2	2	1	1	1	1	4	5	1,2,4,5

ES37	2	2	2	0	2	0	1	3	1	1,2,3
ES38	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1,2
ES39	2	2	2	1	1	2	1	1	2	1,2
ES40	2	2	2	3	2	0	3	3	4	2,3,4

Curso I (2º parte))

Alumno	1	2 a	2 b	2 c	3 d	3 e	3 f	4 a	5 a	5 b	5 c	6 ª	6 b	6 c	7 a	7 b	7 c	8 a	8 b	Com-prensión
A1	3	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2,3
A2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	5	5	5	2	3	2,3,5
A3	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	5	5	5	2	3	2,3,5
A4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5	5	5	2	3	2,3,5
A5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	3	2	3	1,2,3
A6	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	3	2	3	2,3,4
A7	3	2	1	2	2	2	2	3	3	3	4	2	2	1	1	1	1	2	1	1,2,3,4
A8	2	1	3	2	2	2	3	2	2	3	3	2	2	2	4	3	2	2	3	1,2,3,4
A9	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	4	3	4	2	4	2,3,4
A10	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2	4	2,3,4
A11	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	4	5	2	3	2,3,4,5
A12	3	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	3	2,3
A13	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2,3
A14	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	3	3	2	2	3	1,2,3
A15	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	1	1	1	0	0	0	2	3	1,2,3,4
A16	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	2	3	2,3
A17	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2,3
A18	3	2	2	4	2	2	4	2	2	3	2	2	2	2	2	2	1	2	4	1,2,3,4
A19	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	3	1,2,3
A20	3	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3	3	5	2	3	2,3,5
A21	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	0	0	0	2	3	1,2,3

A22	1	2	3	2	2	3	2	2	3	3	4	2	2	2	4	4	4	2	0	1,2,3,4
A23	2	2	2	2	2	2	2	1	2	3	3	1	1	1	0	0	0	2	3	1,2,3
A24	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	3	2,3
A25	3	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2	2	1	1	1	1	2	3	1,2,3
A25	4	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	0	0	0	2	2	2,3,4
A26	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	0	0	0	2	1	1,2
A27	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	1	1	2	3	1,2,3
A28	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	3	2,3
A29	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	0	0	0	2	2	2,,3,4
A30	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	0	0	0	2	2	2,3
A31	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2,3
A32	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5	5	5	2	3	2,3,5
A33	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2,3
A34	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	4	5	2	4	2,3,4,5
A35	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	5	5	5	2	2	2,3,5
A37	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	0	1	1	1	1	1,2,3

Curso II

Anexo 5

A continuación, se presenta la clasificación del tipo de error que cometen los estudiantes en este trabajo.

Alumnos	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	Errores
E1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E3	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	4	2,4
E4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E6	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E7	0	0	2	2	2	0	3	0	0	0	4	4	2,3,4
E8	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	5	4	1,2,4,5
E9	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
E10	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	0	0	5

E11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
E12	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
E14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
E15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E17	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
E18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E19	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	4	0	2,4
E20	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	2
E21	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0	1,2
E22	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	4	4	2,4
E23	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	4	0	2,4
E24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
E25	0	2	1	5	0	2	0	0	0	0	0	0	1,2,5
E26	0	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2
E27	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1,2
E28	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1,2
E29	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	2,4
E30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E31	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E32	0	0	0	2	0	2	2	5	5	5	5	0	2,5
E33	0	0	0	3	2	3	3	5	5	5	0	0	2,3,5
E34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E36	0	0	0	0	0	2	5	1	5	2	0	0	1,2,5
E37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E40	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	4	2,4
E41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E42	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E43	0	0	0	1	2	1	1	2	2	2	4	4	1,2,4
E44	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	4	4	2,4
E45	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0

Clasificación de errores de segundo examen para el curso I:

Alumno	1ª	1b	1c	2ª	2b	2c	3a	3b	3c	Errores

ES1	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2
ES2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES3	0	0	3	1	1	3	0	0	0	1,3
ES4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES5	0	0	0	0	0	3	0	0	0	3
ES6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES12	0	0	0	3	2	2	0	2	0	2,3
ES13	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
ES14	0	0	0	0	1	0	1	3	0	1,3
ES15	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
ES16	0	0	0	5	5	2	3	0	0	2,3,5
ES17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES19	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
ES20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES21	0	0	2	3	0	1	2	2	2	1,2,3
ES22	0	0	0	0	1	3	0	0	5	1,3,5
ES23	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2
ES24	0	0	0	0	0	2	0	1	5	1,2,5
ES25	0	0	0	0	0	1	2	2	3	1,2,3
ES26	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ES27	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2,3
ES28	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
ES29	0	0	0	2	0	0	2	3	2	2,3

ES30	0	0	0	0	0	0	5	2	3	2,3,5
ES31	0	0	0	2	2	0	2	2	0	2
ES32	0	0	0	5	1	0	0	0	1	1,5
ES33	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3
ES34	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
ES35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES36	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
ES37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ES38	0	0	0	2	2	0	0	2	2	2
ES39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Clasificación de errores de curso II:

Alumno	1	2a	2b	2c	3d	3e	3f	4a	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	Errores
A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	2
A6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
A7	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	2
A8	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
A9	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1,2
A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A15	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	2

A16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A18	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	1	1	0	0	1,2
A19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	2
A20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
A22	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
A23	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1,2
A24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	2	0	0	1,2
A26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A27	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	1,2
A28	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
A29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
A30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2
A34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
A35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A36	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1,2
A37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1,2