Módulos isoartinianos, isoneterianos e isosimples

Eduardo Iván Nava Rodríguez

Octubre de 2019

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Título de la tesis

Módulos isoartinianos, isoneterianos e isosimples

Tesis para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Eduardo Iván Nava Rodríguez

Director de tesis

Dr. César Cejudo Castilla

Octubre de 2019

Agradecimientos

> *¡Ay reata no te revientes! ¡Que es el último jalón!*
>
> — **Antiguo Proverbio Mexicano**

Estimado lector, tienes en tus manos mi último suspiro, mis patadas de ahogado, la conclusión, el cierre, el fin. En estas páginas que, como las de casi toda tesis de licenciatura, han de ser agraviadas por el polvo y los años, traducen en símbolos el esfuerzo continuo, la taquicardia de los desvelos, el hartazgo, la frustración y las lágrimas del deseo de abandono. Pero bueno, ya sin tanto drama, es importante que sepas que el mérito no es exclusivo, ya que, como dicen por ahí, mi barrio me respalda.

Atento aviso: Si eres un ávido lector y practicante de la buena redacción, notarás un exagerado uso de la palabra "Gracias" y, a decir verdad, no me importa, son agradecimientos. Hay tantas personas a quienes debo las gracias que quisiera haber hecho caso a cierto profesor de la facultad y haber consumido Omega 3 y comido muchas almendras, porque quizás así tendría la memoria inmaculada y con certeza no me faltaría mencionar un solo nombre, pero estoy tranquilo pues, si sabes que falta el tuyo, también sabes que se debe achacar a lo despistado que soy o a mi memoria, que no excede la de un ratón. Empezamos por el principio. Gracias *Don Moy*, *Doña Tere*, abuelitos. Gracias por haberme dado tanto cariño, por ser tan suaves conmigo, por haberme permitido crecer en un entorno en el que se observa como es la vida de bonita cuando se ponen a bailar un Rock

& Roll las virtudes, el esfuerzo, el amor y la empatía. Gracias *Doña Caro*, mamá. Gracias por traerme a este mundo y no adoctrinarme, por dejarme pensar lo que quiera y apoyarme incondicionalmente, por las oportunidades que me brindas y sobre todo, gracias por este pecho inflado de orgullo y estas ganas de inflar el tuyo. Gracias a mi familia, tan bonita. Gracias por soportarme, abrazarme, aconsejarme. Sobre todo gracias porque, pese a que la evidencia apuntara lo contrario, siempre creyeron que lo lograría. Gracias *Carmelita*, mi viejita. Gracias por aguantarme de pequeño, por irme a buscar al parque cuando ya eran las 5 y, sobre todo, por enseñarme que existe el amor infinito y dejarme sentirlo. Y ya que estamos hablando de tanto amor, es importante agradecer a las mujeres que me han acompañado en el viaje del amor romántico, el amor que quema las montañas, desborda los ríos y que hace que arda el pecho. Gracias por compartir la vida conmigo y haberme mostrado lo que está uno dispuesto a hacer por alguien que no es de tu familia. Para los entendidos de la luz de los hechos, de sobra está decir que, por respeto, omitiré sus nombres, ellas saben bien quienes son. Gracias amigos, sobre todo aquellos que me acompañaron estos dos últimos años de licenciatura. Gracias por reír conmigo en los buenos momentos y por aceptar la pesada y desagradable labor de recoger lo que quedaba de mí y ayudarme a reconstruirme cada que lo necesité. Gracias por aceptar trabajar conmigo aunque yo aprenda a paso de caracol y por no dejarme claudicar. Gracias *Cata, Toño, Mireya, Uriel, Fernando, Yansi, Itzel, Alba, David, Karina, Bruno* y *Coco*. Sería yo un pecho frío de no agradecer a mis profesores, de quienes recibí el conocimiento y quienes me auxiliaron a desarrollar mis habilidades. Gracias profesor *Ángel Contreras*, de quien aprendí a ser meticuloso y ordenado en mi labor y por enseñarme que el número de intentos es finito. Gracias profesor *Bulmaro Juárez* por mostrarme la belleza de la Probabilidad, enseñarme a soportar la Estadística y por sus buenos consejos. Gracias profesor *David Herrera*, por enseñarme a vencer la pereza y a no temer a los problemas, por difíciles que estos aparenten ser. Gracias a mis sinodales, los profesores *Fernando Vilchis* y *Mauricio Medina*, quienes leyeron el trabajo y amablemente

me ofrecieron sus consejos. Gracias a mi profesor (y sinodal) *Juan Angoa*, a quien debo el don de haberme dado cuenta de que las matemáticas son más divertidas que la física. Pero sobre todo, gracias a mi asesor, profesor *César Cejudo*, de quien aprendí casi toda el álgebra que hoy sé. Gracias por tanta paciencia, compresión y por sus clases tan emocionantes.

Índice general

1 Introducción

Como suele ocurrir en Matemáticas, la abstracción y la creación de nuevas teorías, comienza con sustitución de ciertas condiciones, o bien, con hipótesis más débiles. Así, en cuanto a las estructuras algebraicas, debe resultar natural cuestionar si, al reemplazar una igualdad por un isomorfismo, se obtendrán resultados interesantes. En esta tesis se estudian nuevas clases de anillos y módulos que fueron introducidos por Zahra Nazemian y Alberto Facchini en su artículo “Modules with chain conditions up to isomorphism” [1], las cuales, buscan generalizar los conceptos de módulos artinianos, neterianos y simples. Se dice que un R-módulo M es isoneteriano si dada cualquier cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq n$, $A_i \cong A_n$. Dualmente, M es isoartiniano si dada cualquier cadena descendente $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \cdots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq n$, $A_i \cong A_n$. Por último, M es un R-módulo isosimple si $M \neq 0$ y M es isomorfo a todos sus submódulos no cero. El objetivo es establecer las diferencias y similitudes entre la teoría clásica y los nuevos conceptos. Por ejemplo, se sabe que un R-módulo M es neteriano si y sólo si, todo conjunto no vacío de submódulos de M admite un elemento máximo y, dualmente, M es un R-módulo artiniano si y sólo si, todo conjunto no vacío de submódulos de M, admite un elemento mínimo. Se demuestran resultados análogos para módulos isoneterianos e isoartinianos. Se dice que R es un anillo isoartiniano derecho si R_R es isoartiniano, dualmente, R es isoneteriano derecho si R_R es isoneteriano. Un famoso teorema de Hopkins [2, Teorema 15.20] establece que un anillo artiniano derecho es neteriano derecho. En aras de pronunciar el interés en estos nuevos conceptos, se presenta un ejemplo de un anillo isoartiniano derecho que no es isoneteriano derecho. En el primer capítulo se enuncian las definiciones y resultados más elementales de las clases de anillos utilizadas. En el segundo capítulo, se traza una ruta teórica corta y comprensiva entre los conceptos más elementales y estos nuevos objetos de la teoría de R-módulos, terminando con una sección dedicada a la discusión de resultados sobre módulos uniformes, dimensión uniforme, módulos Hopfianos y Dedekind-finitos que son cruciales para la comprensión de algunas demostraciones de propiedades sobre estas nuevas clases de módulos. En el quinto capítulo se estudian los módulos isoartinianos, isoneterianos e isosimples y sus distintas características. Se observa el comportamiento de sus submódulos, así como condiciones suficientes para garantizar la cerradura bajo sumas directas. Más aún, se estudian los endomorfismos de un módulo isosimple para comprender la estructura de su anillo de endomorfismos. Finalmente, se incluye un apéndice con algunas proposiciones que son de utilidad para facilitar la lectura trabajo.

2 Preliminares de Teoría de Anillos

2.1 Definiciones Básicas

Definición 2.1.
*Un **anillo** es una estructura* $(R, +, \cdot, 0)$*, donde* R *es un conjunto no vacío,* $+$ *y* $\cdot$ *son operaciones binarias en* R *tales que:*

- $(R, +, 0)$ *es un grupo abeliano.*
- $\cdot$ *es asociativa.*
- $\cdot$ *se distribuye sobre* $+$ *a izquierda y derecha.*

Observación.
Naturalmente, $+$ *es llamada suma de* R *y* $\cdot$ *multiplicación de* R*. Como suele ser costumbre, la yuxtaposición de elementos de* R*, indicará multiplicación y, por simplicidad, nos referiremos a* $(R, +, \cdot, 0)$ *como* R*.*

Definición 2.2.
Sea R *un anillo.*

1. *Diremos que* R *es **conmutativo** si* $\cdot$ *es conmutativa.*
2. *Diremos que* R *es **anillo con uno** si existe* $1 \in R$ *tal que* $(R, \cdot, 1)$ *es un monoide.*

Definición 2.3.
Sea R *un anillo con uno.*

1. *Sea* $r \in R$*, diremos que* r *tiene **inverso multiplicativo izquierdo** si existe* $x \in R$ *tal que* $xr = 1$*.*

2. *Sea $r \in R$, diremos que r tiene* ***inverso multiplicativo derecho*** *si existe $y \in R$ tal que $ry = 1$.*
3. *Sea $r \in R$, diremos que r es una* ***unidad*** *si tiene inverso multiplicativo izquierdo e inverso multiplicativo derecho.*

Notación.

Adaptaremos la siguiente notación para el conjunto de unidades de un anillo: $R^* = \{r \in R \mid r \text{ es unidad}\}$.

Definición 2.4.

Sea R un anillo con uno.

1. *Diremos que R es un* ***anillo con división*** *si todo elemento no cero de R tiene inverso multiplicativo.*
2. *Diremos que R es un* ***campo*** *si es conmutativo y $R \setminus \{0\} = R^*$.*

Convención.

En el desarrollo subsecuente de esta tesis, todos los anillos tienen uno.

Definición 2.5.

Sean R un anillo e $I \subseteq R$ tal que $(I, +, 0)$ es un subgrupo de $(R, +, 0)$.

1. *Diremos que I es un* ***ideal izquierdo*** de R *si* $RI = \{ra \mid r \in R, a \in I\} \subseteq I$, *es decir, I* absorbe productos *por izquierda.*
2. *Diremos que I es un* ***ideal derecho*** de R *si* $IR = \{ar \mid r \in R, a \in I\} \subseteq I$,*es decir, I* absorbe productos *por derecha.*
3. *Diremos que I es un* ***ideal bilateral*** *(o simplemente ideal) de R si I es un ideal izquierdo y derecho.*

Sean R un anillo y $a \in R$. Es muy sencillo verificar que $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ es un ideal izquierdo de R y $aR = \{ar \mid r \in R\}$ es un ideal derecho de R.

Definición 2.6.

Sean R un anillo y $a \in R$.

1. *Al ideal Ra lo llamaremos* ***ideal principal izquierdo*** *generado por a.*

2. *Al ideal aR lo llamaremos* ***ideal principal derecho*** *generado por a.*

Observación.

Si R es conmutativo, $Ra = aR$.

Notación.

Si R es un anillo conmutativo, denotaremos el ideal principal generado por a como (a).

Definición 2.7.

Sean R un anillo e I un ideal izquierdo de R. Diremos que I es un ***ideal izquierdo máximo*** *de R si:*

- *$I \neq R$.*
- *Para todo ideal izquierdo $J \subseteq R$, si $I \subseteq J$, entonces $J = I$ ó $J = R$.*

Observación.

Notemos que la definición de ideales máximos "tiene lado", es decir, también existen ideales derechos máximos e ideales bilaterales máximos; la definición de éstos últimos es análoga a la definición anterior.

Definición 2.8.

Sean R un anillo conmutativo y P un ideal de R. Diremos que P es un ***ideal primo*** *de R, si:*

- *$P \neq R$.*
- *Para todos $a, b \in R$ tales que $ab \in P$, se tiene que $a \in P$ ó $b \in P$.*

Lema 2.9.

Sea R un anillo con uno. Todo ideal izquierdo (derecho) propio, está contenido en un ideal izquierdo (derecho) máximo.

Demostración

Sea J un ideal izquierdo propio de R y consideremos $\Gamma = \{I \subseteq R \mid I$ es un ideal izquierdo propio de R tal que $J \subseteq I\}$. Notemos que $\Gamma \neq \varnothing$, pues $J \in \Gamma$. Sea C una cadena en Γ y consideremos $\bigcup C$. Claramente, $\bigcup C$ es una cota superior de C. Luego, C es una cadena de ideales propios de R que contienen a J, de donde, $\bigcup C$ es un ideal propio de R que contiene a J. Así, por el Lema de Zorn, Γ admite un elemento máximo P, que es el ideal deseado. ∎

2.2 Anillos Von Neumann Regulares y Dominios de Ideales Principales

Definición 2.10.

Sean R un anillo y $r \in R$.

- *Diremos que r es un **divisor izquierdo del cero**, si existe $x \in R \setminus \{0\}$ tal que $rx = 0$.*
- *Diremos que r es un **divisor derecho del cero**, si existe $x \in R \setminus \{0\}$ tal que $xr = 0$.*
- *Diremos que r es un **divisor del cero**, si es divisor izquierdo del cero ó divisor derecho del cero.*

Definición 2.11.

*Sea D un anillo. Diremos que D es un **dominio** si 0 es el único divisor del cero en D y diremos que D es un **dominio entero**, si D es un dominio y es conmutativo.*

Definición 2.12.

Sea D un dominio.

1. *Diremos que D es un **dominio de ideales principales izquierdos** (DIPI) si todo ideal izquierdo de D, es un ideal principal izquierdo.*
2. *Diremos que D es un **dominio de ideales principales derechos** (DIPD) si todo ideal derecho de D, es un ideal principal derecho.*

Definición 2.13.

*Sea R un anillo. Diremos que R es **Von Neumann regular** (VNR) si para cada $a \in R$, existe $x \in R$ tal que $a = axa$.*

Observación.

Notemos que la noción de ser VNR ”no tiene lado", pues la definición es la misma para derecha e izquierda.

Proposición 2.14.

Sea R un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *R es Von Nuemann regular.*
2. *Todo ideal principal izquierdo (derecho) de R es generado por un elemento idempotente.*

Demostración

Basta demostrar la equivalencia para ideales principales izquierdos, ya que la demostración para ideales principales derechos, es simétrica.

$[\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}]$

Sea Ra un ideal principal izquierdo de R. Como R es VNR, existe $x \in R$ tal que $a = axa$. Luego, notemos que $(xa)(xa) = (x)(axa) = xa$, de modo que $e = xa$ es un elemento idempodente de R. Es claro que, como $e = xa$, entonces $e \in Ra$, en consecuencia $Re \subseteq Ra$; además, notemos que, como $ae = axa = a$, entonces $a \in Re$, así $Ra \subseteq Re$. Por lo tanto $Ra = Re$.

$[\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{1}]$

Sea $a \in R$ y consideremos Ra. Por hipótesis, existe $e \in R$ idempotente tal que $Ra = Re$, luego $a = xe$ y $e = ya$ para algunos $x, y \in R$. Finalmente, $aya = ae = xe^2 = xe = a$. ■

Definición 2.15.

Sea R un dominio. Diremos que R es un ***dominio de Ore derecho*** *si para todo $x, y \in R$, existen $r, s \in R$ tales que $xr = ys \neq 0$*

Observación.

Simétricamente se establece la definición de dominio de Ore izquierdo.

3 Preliminares de Teoría de R-Módulos

3.1 Definiciones Básicas

Definición 3.1.

*Sea R un anillo. Diremos que M es un **R-módulo izquierdo** si:*

1. *M es un grupo abeliano.*
2. *Existe una operación (ley de composición externa) $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ que satisface las siguientes condiciones:*
   a) *Para todas $r_1, r_2 \in R$ y toda $x \in M$, $(r_1 r_2) \cdot x = r_1(r_2 \cdot x)$.*
   b) *Para todas $r_1, r_2 \in R$ y toda $x \in M$, $(r_1 + r_2) \cdot x = r_1 \cdot x + r_2 \cdot x$.*
   c) *Para toda $r \in R$ y toda $x_1, x_2 \in M$, $r \cdot (x_1 + x_2) = r \cdot x_1 + r \cdot x_2$.*
   d) *Para toda $x \in M$, $1_R \cdot x = x$.*

Recordemos que, dado un grupo abeliano M, $\mathrm{End}(M) = \{f : M \to M \mid f \textit{ es un morfismo de grupos}\}$ es un anillo con uno al considerar la suma y producto naturales (suma y composición de funciones).

Definición 3.2.

*Sean R un anillo y M un grupo abeliano. Una **Representación de R** es un morfismo de anillos, $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$.*

Observación.

Sean M un grupo abeliano y R un anillo. Para cada $r \in R$ y $x \in M$ definimos $\rho_r : M \longrightarrow M$, definida por $x \longmapsto r \cdot x$, donde $\cdot$ es una función que satisface las condiciones de la Definición 3.1. Observemos que, por la condición (a), para *cada $r \in R$, $\rho_r \in \mathrm{End}(M)$. Consideremos $\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ definida por $r \longmapsto \rho_r$ y notemos que, por las condiciones (b), (c) y (d), ρ es un morfismo de anillos. Por lo tanto, ρ es una representación de R.*

Definición 3.3.

*Sea R un anillo. Diremos que (M, ρ) es un **R-módulo izquierdo** si:*

1. *M es un grupo abeliano.*
2. *$\rho : R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$, definida por $r \longmapsto \rho_r$, donde $\rho_r(x) = r \cdot x$, es una representación de R.*

Observación.

Simétricamente se define el concepto de R-módulo derecho.

Definición 3.4.

*Sean R y S anillos. Diremos que M es **R-S-bimódulo** (o simplemente R-S-módulo) si M es un R-módulo izquierdo y M es un S-módulo tal que para toda $r \in R$, toda $s \in S$ y toda $m \in M$, $r(ms) = (rm)s$.*

Notación.

Denotaremos a los R-módulos derechos por M_R, a los R-módulos izquierdos por ${}_RM$ y a los R-S-módulos por ${}_RM_S$.

3.2 Submódulos

Definición 3.5.

Sean M un R-módulo izquierdo y $\varnothing \neq N \subseteq M$.

1. *Diremos que N es un* ***submódulo*** *de M si, con la suma y ley de composición externa heredadas por M, N es un R-Módulo izquierdo.*
2. *Si $N \subsetneq M$, es un submódulo de M, diremos que N es un* ***submódulo propio de M.***

Si M es un R-módulo izquierdo, es muy sencillo comprobar que $\{0\}$ y M son submódulos de M.

Notación.

A la relación "N es un submódulo de M" la denotaremos como $N \leq M$ y a la relación "N es un submódulo propio de M" como $N \lneq M$. Al submódulo $\{0\}$ lo denotaremos simplemente como 0.

Proposición 3.6.

Sea M un R-módulo izquierdo y $\varnothing \neq N \subseteq M$, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *$N \leq M$.*
2. *N es un subgrupo de M y para todas $r \in R$ y $m \in N$, $rm \in N$.*
3. *Para todas $m, m_1, m_2 \in N$ y $r \in R$, $m_1 + m_2 \in N$ y $rm \in N$.*

Es muy sencillo verificar que si M es un R-módulo izquierdo y $m \in M$, entonces $Rm = \{rm \mid r \in R\}$ es un submódulo de M. Simétricamente, si M es un R-módulo derecho y $m \in M$, entonces $mR = \{mr \mid r \in R\}$, es un submódulo de M.

Definición 3.7.

Sea M un R-módulo izquierdo y $m \in M$. Al submódulo Rm le llamaremos ***submódulo cíclico generado por m.***

Definición 3.8.

Sea M un R-módulo izquierdo.

1. *Diremos que M es* ***cíclico*** *si existe $m_0 \in M$ tal que $M = Rm_0$.*
2. *Diremos que M es* ***simple*** *si $0 \neq M$ y para todo $N \leq M$, $N = 0$, ó $N = M$. Es decir, 0 y M son los únicos submódulos de M.*
3. *Sea $N \leq M$, diremos que N es un* ***submódulo mínimo*** *en M si, $0 \neq N$ y para todo $L \leq M$ tal que $L \lneq N$, se tiene que $L = 0$.*
4. *Sea $N \leq M$, diremos que N es un* ***submódulo máximo*** *en M si, $N \neq M$ y para todo $L \leq M$ tal que $N \lneq L$, se tiene que $L = M$.*

Lema 3.9.

Sea M un R-módulo izquierdo. M es simple si y sólo si, para toda $m \in M \setminus \{0\}$, $Rm = M$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Sean M un R-módulo simple y $m \in M \setminus \{0\}$. Observemos que $m = 1m \in Rm$, de donde $Rm \neq 0$, pero M es simple, por lo tanto $Rm = M$.

[$\Leftarrow$]

Sean M un R-módulo tal que para toda $m \in M \setminus \{0\}$, $Rm = M$ y $0 \neq N \leq M$. Sea $m \in N \setminus \{0\}$, entonces $Rm = M$, pero $Rm \leq N$, por lo tanto $N = M$. ■

Lema 3.10.

Sea M un R-módulo izquierdo y $\{N_\lambda \leq M \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de submódulos de M, entonces $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ es un submódulo de M.

Demostración

Sean $m_1, m_2 \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$, entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, $m, m_1, m_2 \in N_\lambda$. Como cada N_λ es un submódulo de M, $m_1 + m_2 \in N_\lambda$, de donde $m_1 + m_2 \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$. Análogamente se comprueba que si $r \in R$ y $m \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$, entonces $rm \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \leq M$. ■

Corolario 3.11.

Sea M un R-módulo izquierdo y $\{N_\lambda \leq M \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de submódulos de M. Entonces $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ es el mayor submódulo de M contenido en cada N_λ.

Demostración

Es claro que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq N_\lambda$. Ahora, si A es un submódulo de M tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $A \leq N_\lambda$ y $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq A$, entonces $A \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, pues es subconjunto de cada uno de los miembros de la intersección. Pero, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq A$, entonces $A = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. ■

Lema 3.12.

Sean M un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$, entonces

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\right\} & \textit{si } X \neq \varnothing \\ 0 & \textit{si } X = \varnothing \end{cases}$$

es un submódulo de M.

Demostración

Si $X = \varnothing$, el resultado es inmediato. Supongamos que $X \neq \varnothing$.

i) Sea $x \in X$. Observemos que, por la forma de definir $\mathbf{A}$, se tiene que $(-1)x, x \in \mathbf{A}$, así $x + (-x) = 0 \in \mathbf{A}$.

ii) Sean a_1, $a_2 \in \mathbf{A}$, entonces $a_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$ y $a_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i' x_i'$, en consecuencia, $a_1 + a_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{m} r_i' x_i' = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n + r_1'x_1' + \ldots + r_m'x_m' \in \mathbf{A}$.

iii) Sean $r \in R$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i = a \in \mathbf{A}$, entonces

$ra = r\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r(r_1x_1) + \ldots r(r_nx_n) = (rr_1)x_1 + \ldots + (rr_n)x_n \in \mathbf{A}$.

Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es un submódulo de M. ■

Definición 3.13.

Sea M un R-módulo izquierdo. Al submódulo definido en el lema anterior le llamaremos ***submódulo generado por X*** *y lo denotaremos por $(X]$.*

Proposición 3.14.

Sea M un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$, entonces $(X]$ es el menor submódulo de M que contiene a X. Más aún, $(X] = \bigcap\{A \leq M \mid X \subseteq A\}$.

Demostración

Observemos que si $X = \varnothing$, entonces $(X] = 0$ y las afirmaciones son evidentes. Supongamos que $X \neq \varnothing$ y observemos que, para toda $x \in X : 1x \in (X]$, de donde $X \subseteq (X]$. Sea $N \leq M$ tal que $X \subseteq N$, entonces, todas las sumas finitas de los elementos de la forma $r_i x_i$ con $x_i \in X, r_i \in R$ son elementos de N, de donde $(X] \leq N$. Luego, como $X \subseteq (X]$, entonces $X \subseteq N$. De modo que $(X]$ es, en efecto, el menor de los submódulos de M que contienen a X. Ahora, veamos la igualdad.

[$\subseteq$] Recordemos que $(X]$ y $\bigcap\{A \leq M \mid X \subseteq A\}$ son submódulos de M. Además, es claro que X está contenido en $\bigcap\{A \leq M \mid X \subseteq A\}$, pues está contenido en cada uno de sus elementos. Así $(X] \leq \bigcap\{A \leq M \mid X \subseteq A\}$.

[$\supseteq$] Como $X \subseteq (X]$ y $(X] \leq M$, entonces $(X] \in \{A \leq M \mid X \subseteq A\}$, de donde, $(X] \subseteq \bigcap\{A \leq M \mid X \subseteq A\}$. ■

Notación.

Si M es un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$, utilizaremos sin distinción las notaciones $(X]$ y RX.

Observación.

Si M es un R-módulo derecho y $X \subseteq M$, al submódulo generado por X lo denotaremos por $[X)$ y su definición es simétrica. Por otro lado, si M es un R-S-módulo y $(X] \subseteq M$, el submódulo generado por X se define como

$$RXS = (X) = \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i s_i \mid r_i \in R, x_i \in X, s_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\} & \text{si } X \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } X = \varnothing \end{cases}$$

Definición 3.15.

Sea M un R-módulo izquierdo.

1. *Diremos que $X \subseteq M$ es un **conjunto generador** de M si $M = (X]$.*
2. *Diremos que M es **finitamente generado** si existe un subconjunto finito $X \subseteq M$, tal que $(X] = M$.*
3. *Diremos que $X \subseteq M$ es **libre** si para todo subconjunto finito de X, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, se cumple que $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ con $r_i \in R$, se tiene que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r_i = 0$.*
4. *Diremos que $X \subseteq M$ es una **base** de M si X es libre y genera a M.*

Observación.

Si M es un R-módulo izquierdo con conjunto generador X, entonces dado $m \in M$ existen $x_1, \ldots x_n \in X$ y $r_1, \ldots, r_n \in R$ tales que $m = r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n$, pero puede que estos no sean únicos y que n no sea fijo.

Definición 3.16.

*Sean M un R-módulo izquierdo, $X \subseteq M$ un conjunto generador de M y $m \in M$. Diremos que m admite una **representación esencialmente única** con elementos de X si, dadas dos representaciones $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{i=1}^{n} r'_i x_i$, con $r_i, r'_i \in R, x_i \in X$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, se tiene que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r_i = r'_i$.*

Teorema 3.17.

Sea M un R-módulo izquierdo con conjunto generador X, entonces X es una base para M si y sólo si, todo elemento de M admite una representación esencialmente única con elementos de X.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Supongamos que $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{i=1}^{n} r'_i x_i$, entonces, $\sum_{i=1}^{n} (r_i - r'_i) x_i = 0$. Como X es libre, entonces para toda $i \in \{1, \ldots, n\}, r_i - r'_i = 0$. Por lo tanto, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r_i = r'_i$.

[$\Leftarrow$]

Como X es un conjunto generador de M, basta demostrar que X es libre. Sean $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ y $r_i \in R$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$. Observemos que $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i$, de donde, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i$. Así, como m admite representación esencialmente única, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $r_i = 0$. ■

Lema 3.18.

Sean M un R-módulo izquierdo y $\{A_i \leq M \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de M, entonces,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \begin{cases} \left\{\sum\limits_{i \in I'} a_i \mid a_i \in A_i,\ I' \subseteq I \text{ finito}\right\} & \text{si } I \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } I = \varnothing \end{cases}$$

Demostración

Si $I = \varnothing$, el resultado es inmediato. Supongamos que $I \neq \varnothing$.

[$\subseteq$]

Sea $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right]$, entonces $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$ con $x_i \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, $r_i \in R$ y $n \in \mathbb{N}$, de donde, existen $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ tales que para toda $j \in \{1, \dots, n\} : x_i \in A_{i_j}$. Notemos que, como cada $A_{i_j} \leq M$, entonces cada sumando $r_i x_i \in A_{i_j}$. Por lo tanto, $x \in \left\{\sum\limits_{i \in I'} a_i \mid a_i \in A_i,\ I' \subseteq I \text{ finito}\right\}$.

[$\supseteq$]

Sea $x \in \left\{\sum\limits_{i \in I'} a_i \mid a_i \in A_i,\ I' \subseteq I \text{ finito}\right\}$, entonces existe $I' \subseteq I$ finito tal que $x = \sum\limits_{i \in I'} a_i$ con $a_i \in A_i$ para toda $i \in I'$. Así poniendo cada x_i como $1 \cdot x_i$, se tiene que x tiene una representación como sumas finitas de elementos de los A_i. Por lo tanto, $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right]$. ■

Definición 3.19.

*Sean M un R-módulo izquierdo y $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de M. Definimos la **suma de los submódulos** A_i como $\sum\limits_{i \in I} A_i = (\bigcup\limits_{i \in I} A_i]$.*

Proposición 3.20.

Sean M un R-módulo izquierdo y $N \lneq M$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *N es submódulo máximo de M.*

2. *Para todo $m \in M \setminus \{0\}$, si $m \notin N$, entonces $M = Rm + A$.*

Demostración

[**1** $\Rightarrow$ **2**]

Sea $m \in M \setminus \{0\}$ tal que $m \notin A$, entonces, $A \lneq A + Rm$, pero A es un submódulo máximo de M, en consecuencia, $A + Rm = M$.

[**2** $\Rightarrow$ **1**]

Supongamos que existe $B \leq M$ tal que $A \lneq B$, luego existe $m \in B$ tal que $m \notin A$. Notemos que $m \neq 0$ ya que $0 \in A$, se sigue que $A + Rm = M$, pero $Rm \leq B$ y $A \lneq B$, entonces $M = Rm + A \leq B$, de donde $M = B$ y por lo tanto A es máximo. ■

Proposición 3.21.

Sea M un R-módulo izquierdo. Si M es finitamente generado, entonces todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M.

Demostración

Sea $\{m_1, \dots, m_t\} \subseteq M$ un conjunto generador de M y sea $N \lneq M$. Consideremos $\Phi = \{A \mid \ N \leq A \lneq M\}$. Observemos que $\Phi \neq \varnothing$, pues $N \in \Phi$. Es claro que $(\Phi, \subseteq)$ es un copo. Sea $\{A_j \mid j \in J\} = \Gamma \subseteq \Phi$ una cadena en Φ y pongamos $C = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$. Por construcción, C es cota superior de Γ. Vamos a demostrar que $C \in \Phi$, es decir, $N \leq C \lneq M$. Como $N \leq A_j$ para todo $j \in J$, entonces $N \subseteq C$. Ahora, notemos que $C \leq M$, pues si $m_1, m_2 \in C$ existen $A_{j_1}, A_{j_2} \in \Gamma$ tales que $m_1 \in A_{j_1}$ y $m_2 \in A_{j_2}$, luego, como Γ es una cadena, $m_1 + m_2 \in A_{j_1} \bigcup A_{j_2} \subseteq C$. Por otro lado, sean $r \in R$ y $m \in C$. Como $m \in C$, $m = a_j \in A_j$ para algún $j \in J$ y como $A_j \leq M$, $rm \in A_j$, de donde, $rm \in C$. Por lo tanto, $C \leq M$ y $N \leq C$. Luego, supongamos que $C = M$, entonces $\{m_1, \dots, m_t\} \subseteq C$, en consecuencia, existe $A_j \in \Gamma$, tal que $\{m_1, \dots, m_t\} \subseteq A_j$, se sigue que $M = (\{m_1, \dots, m_t\}] \leq A_j$, de donde, $A_j = M$, lo cual es una contradicción, pues $A_j \lneq M$. Por lo tanto, $C \in \Gamma$ es una cota superior de Γ. Así, por el Lema de Zorn, existe D elemento máximo en Φ. Finalmente, veamos que D es submódulo máximo de M. Sea $L \lneq M$ tal que $D \leq L$, como $N \leq D$, entonces $N \leq L \lneq M$, lo cual implica que

$L \in \Phi$ y $D \leq L$, en consecuencia $D = L$. Por lo tanto, D es un submódulo máximo de M que contiene a N. ■

Corolario 3.22.

Si M es un R-módulo izquierdo finitamente generado diferente de 0, entonces M admite un submódulo máximo.

Demostración

Aplicando la proposición anterior con $N = 0$ se sigue el resultado. ■

Lema 3.23.

Sea M un R-módulo izquierdo. M es finitamente generado si y sólo si, para toda familia $\{A_i \mid i \in I\}$ de submódulos de M tal que $M = \sum_{i \in I} A_i$, existe una subfamilia finita $\{A_i \mid i \in I'\} \subset \{A_i \mid i \in I\}$ tal que $M = \sum_{i \in I'} A_i$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Supongamos que M es finitamente generado, entonces existe $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ subconjunto de M, tal que $(X] = M$. Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de M tal que $M = \sum_{i \in I} A_i$, entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $I_j \subseteq I$ finito, tal que $x_j = \sum_{i \in I_j} a_{j_i}$, con $a_{j_i} \in A_{j_i}$. Sea $I' = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Es claro que I' es finito y además, $M = (X] \leq \sum_{i \in I'} A_i$.

[$\Leftarrow$]

La demostración se sigue inmediatamente de $M = \sum_{m \in M} Rm$. ■

Definición 3.24.

*Sea M un R-módulo izquierdo, diremos que M es **finitamente cogenerado** si para cada familia $\{A_i \leq M \mid i \in I\}$ de submódulos de M, tal que $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$, existe $I' \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i \in I'} A_i = 0$.*

Proposición 3.25 (Ley Modular).

Sean M un R-módulo izquierdo y $A, B, C \leq M$ tales que $B \leq C$, entonces $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) = (A \cap C) + B$.

Demostración

[$\subseteq$]

Sea $c \in (A+B) \cap C$, entonces $c \in C$ y $c = a+b$, para algunos $a \in A$ y $b \in B$. Luego, $a = c-b \in A$ y como $B \leq C$, $c-b \in C$ en consecuencia, $a \in A \cap C$ y $b \in B$. Por lo tanto $a+b \in (A \cap C) + B$.

[$\supseteq$]

Sea $d \in (A \cap C) + B$, entonces $d = a+b$ para algunos $a \in A \cap C$ y $b \in B$, y como $B \leq C$, se tiene $b \in C$, luego $a+b \in C$ y $a+b \in A+B$, es decir, $a+b \in (A+B) \cap C$. ∎

Definición 3.26.

Sean M un R-módulo izquierdo y $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M. Diremos que M es la ***suma directa interna*** *de la familia $\{B_i\}_{i \in I}$, lo cual denotaremos por $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$, si se cumplen las siguientes dos condiciones*

1. *$M = \sum_{i \in I} B_i$.*
2. *Para toda $i \in I$, $B_i \bigcap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} B_j = 0$.*

Definición 3.27.

Sea M un R-módulo izquierdo.

1. *Diremos que $N_1 \leq M$ es* ***sumando directo*** *de M si existe $N_2 \leq M$ tal que $M = N_1 \bigoplus N_2$.*
2. *Diremos que M es* ***inescindible*** *si los únicos sumandos directos son 0 y M.*
3. *Diremos que M* ***semisimple*** *si todo submódulo de M es un sumando directo.*

Proposición 3.28.

Sea M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$. El conjunto $\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$ es un R-módulo izquierdo con las siguientes operaciones.

1. *Para todas $m_1, m_2 \in M$, $(m_1 + N) + (m_1 + N) = (m_1 + m_2) + N$.*
2. *Para toda $r \in R$ y toda $m \in M$, $r(m+N) = rm + N$.*

Definición 3.29.

Sean M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$. Definimos el ***módulo cociente*** *(o módulo factor) de M con N como $\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$.*

Observación.

Sea R un anillo e I un ideal bilateral de R. Al igual que con los R-módulos, podemos construir el cociente $\frac{R}{I}$, de manera completamente análoga. En [3, Sección 3.2] el lector puede encontrar información sobre los morfismos de anillos y, en particular, sobre el epimorfismo canónico de anillos $\nu : R \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow R/I$.

Lema 3.30.

Sean R un anillo e I un ideal bilateral de R. M es un (R/I)-módulo izquierdo si y sólo si, M es un R-módulo izquierdo tal que $IM = 0$.

Demostración

[⇒]

Sea M un R/I-módulo izquierdo, entonces existe $\rho : R/I \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ representación de R/I. Consideremos el epimorfismo canónico de anillos $\nu : R \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow R/I$ y notemos que $\rho\nu : R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$, es una representación de R, así M es un R-módulo. Además, observemos que $\mathrm{Ker}\,\nu = I$, en consecuencia, si $r \in I$, $\nu(r) = 0$, de donde $\rho\,(\nu(r)) = 0$, es decir, para toda $m \in M$, $rm = 0$. Por lo tanto $IM = 0$.

[⇐]

Sea M un R-módulo anulado por I y sean $r_1, r_2 \in R$ tales que $r_1 \equiv r_2 \mod I$, entonces $r_1 - r_2 \in I$. Luego, si $m \in M$, $(r_1 - r_2)\,m = 0$, es decir, $r_1m = r_2m$. De modo que la ley de composición externa dada por $(r + I)\,m = rm$ está bien definida. Por lo tanto, M es un R/I-módulo. ■

3.3 Morfismos de R-módulos

Definición 3.31.

*Sean M y N R-módulos izquierdos y $f : M \longrightarrow N$ una función. Diremos que f es un **morfismo de R-módulos izquierdos** si, para todas $m_1, m_2 \in M$ y todas $r_1, r_2 \in R$, $f(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 f(m_1) + r_2 f(m_2)$.*

Observación.

Simétricamente se define el concepto de morfismo de R-módulos derechos.

Notación.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos. Al referirnos a la imagen de f, emplearemos sin distinción las notaciones $\operatorname{Im} f$ y $f[M]$. Si $A \leq M$, $f[A]$, denotará la imagen de A bajo f. Si $B \leq N$, $f^{-1}[B]$ denotará la preimagen de B bajo f.

Lema 3.32.

Sean M y N R-módulos izquierdos, $A \leq M$, $B \leq N$ y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos, entonces $f[A] \leq N$ y $f^{-1}[B] \leq M$.

Definición 3.33.

*Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos. Definimos el **kernel** (o núcleo) de f como $\operatorname{Ker} f = f^{-1}[0] = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$.*

Observación.

Es muy sencillo verificar que la composición de morfismos de R-módulos izquierdos es un morfismo de R-módulos izquierdos.

Definición 3.34.

Sean M y N R-módulos izquierdos. Definimos los siguientes conjuntos:

$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = \{f : M \to N \mid f \text{ es morfismo de } R\text{-módulos izquierdos}\}$.

$\mathbf{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}) = \{f : M \to M \mid f \text{ es morfismo de } R\text{-módulos izquierdos}\}$.

Observación.

Simétricamente, si M es un R-módulo derecho, podemos definir el conjunto $\mathrm{End}_R(M) = \{f : M \to M \mid f$ es morfismo de R-módulos derechos$\}$. En cualquier caso, $(\mathrm{End}(M), +, \circ)$ es un anillo no conmutativo con uno.

Definición 3.35.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos.

1. *Diremos que f es un **monomorfismo** si se puede cancelar por la izquierda, es decir, para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$, $fg_1 = fg_2$ implica que $g_1 = g_2$.*
2. *Diremos que f es un **epimorfismo** si se puede cancelar por la derecha, es decir, para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, C)$, $g_1 f = g_2 f$ implica que $g_1 = g_2$.*
3. *Diremos que f es un **bimorfismo** si es monomorfismo y epimorfismo.*
4. *Diremos que f es un **isomorfismo** si es invertible, es decir, existe $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ tal que $gf = 1_M$ y $fg = 1_N$.*

Teorema 3.36.

Sea f un morfismo de R-módulos izquierdos, entonces:

1. *f es monomorfismo si y sólo si, es inyectiva.*
2. *f es epimorfismo si y sólo si, es suprayectiva.*
3. *f es isomorfismo si y sólo si, es biyectiva, si y sólo si, es bimorfismo.*

Demostración

Ver [3, Teorema 3.1.5]. ■

Notación.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos.

- *Si f es monomorfismo, escribiremos $f \colon M \rightarrowtail N$.*
- *Si f es epimorfismo, escribiremos $f \colon M \twoheadrightarrow N$.*
- *Si f es isomorfismo, escribiremos $f \colon M \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow N$.*

Definición 3.37.

*Sean M y N R-módulos izquierdos. Diremos que M y N son **isomorfos** (o que N es una copia de M), si existe un isomorfismo $f : M \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow N$ y en dicho caso, escribiremos $M \cong N$.*

Observación.

La relación de ser isomorfo "$\cong$" es una relación de equivalencia en la clase de todos los R-módulos izquierdos $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{Mod}$.

Lema 3.38.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos, entonces:

1. *f es monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Ker} f = 0$.*
2. *Si $A \leq M$, entonces $f^{-1}[f[A]] = A + \operatorname{Ker} f$.*
3. *Si $B \leq N$, entonces $f[f^{-1}[B]] = B \cap \operatorname{Im} f$.*

Además, si $g : N \longrightarrow M'$, entonces:

1. *$\operatorname{Ker} gf = f^{-1}[\operatorname{Ker} g]$.*
2. *$\operatorname{Im} gf = g[\operatorname{Im} f]$.*

Demostración

Ver [3, Lema 3.1.8]. ■

Proposición 3.39.

Sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow L$ morfismos de R-módulos izquierdos.

1. *Si f y g son monomorfismos, gf es monomorfismo.*
2. *Si f y g son epimorfismos, gf es epimorfismo.*
3. *Si f y g son isomorfismos, gf es isomorfismo.*
4. *Si gf es monomorfismo, f es monomorfismo.*
5. *Si gf es epimorfismo, g es epimorfismo.*

Definición 3.40.

*Sean M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$. Al epimorfismo $v : M \rightarrowtail \frac{M}{N}$ definido por $m \longmapsto m + N$ le llamaremos **epimorfismo canónico**.*

Teorema 3.41. *[Primer Teorema de Isomorfismos]*

Si $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos, entonces existe un monomorfismo $\hat{f} : \frac{M}{\operatorname{Ker} f} \twoheadrightarrow N$ tal que $f = \hat{f}v$, es decir, tenemos el siguiente triángulo conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "v"'] & N \\
\dfrac{M}{\operatorname{Ker} f} \arrow[ur, dashed, tail, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Más aún, $\hat{f}$ es isomorfismo si y sólo si f es epimorfismo.

Demostración

Consideremos $\hat{f} : \frac{M}{\operatorname{Ker} f} \longrightarrow N$ definida por $\hat{f}\,(m + \operatorname{Ker} f) = f(m)$.

$(\boldsymbol{i})$ Veamos que $\hat{f}$ es función.

Sean $m_1, m_2 \in M$ tales que $m_1 + \operatorname{Ker} f = m_2 + \operatorname{Ker} f$, entonces $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} f$ es decir, existe $x \in \operatorname{Ker} f$ tal que $m_1 - m_2 = x$, de donde $m_1 = m_2 + x$. En consecuencia $\hat{f}\,(m_1 + \operatorname{Ker} f) = f(m_1) = f(m_2 + x) = f(m_2) + f(x) = f(m_2) + 0 = \hat{f}\,(m_2 + \operatorname{Ker} f)$.

$(\boldsymbol{ii})$ Veamos que $\hat{f}$ es un morfismo de R-módulos.

Sean $m_1, m_2 \in M$ y $r_1, r_2 \in R$, entonces $\hat{f}\,((r_1m_1 + \operatorname{Ker} f) + (r_2m_2 + \operatorname{Ker} f)) = \hat{f}\,((r_1m_1 + r_2m_2) + \operatorname{Ker} f) = f\,(r_1m_1 + r_2m_2) = *$. Pero f es morfismo de R-módulos, de donde $* = r_1f(m_1) + r_2f(m_2) = r_1\hat{f}\,(m_1 + \operatorname{Ker} f) + r_2\hat{f}\,(m_2 + \operatorname{Ker} f)$.

$(\boldsymbol{iii})$ Veamos que $\hat{f}$ es monomorfismo.

Sean $m_1, m_2 \in M$ tales que $\hat{f}\,(m_1 + \operatorname{Ker} f) = \hat{f}\,(m_2 + \operatorname{Ker} f)$, entonces, $\hat{f}\,(m_1 + \operatorname{Ker} f) - \hat{f}\,(m_2 + \operatorname{Ker} f) = 0$, de donde, $\hat{f}\,((m_1 - m_2) + \operatorname{Ker} f) = 0$. En consecuencia, $f(m_1 - m_2) = 0$, es decir, $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} f$. Por lo tanto, $m_1 + \operatorname{Ker} f = m_2 + \operatorname{Ker} f$.

$(\boldsymbol{iv})$ Veamos que $f = \hat{f}v$.

Si $m \in M$, entonces $v(m) = m + \operatorname{Ker} f$, de donde, $\hat{f}\,(v(m)) = \hat{f}\,(m + \operatorname{Ker} f) = f(m)$.

Finalmente, observemos que $\hat{f}$ es isomorfismo si y sólo si, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \hat{f} = N$, lo cual ocurre si y sólo si f es epimorfismo. ■

Teorema 3.42. *[Tercer Teorema de Isomorfismos]*

Sea A un R-módulo izquierdo y $C \leq B \leq A$, entonces, $\frac{A}{B} \cong (A/C)\,/\,(B/C)$.

Demostración

Consideremos los epimorfismos canónicos $v_1 : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \frac{A}{C}$ y $v_2 : \frac{A}{C} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (A/C)\,/\,(B/C)$. Luego, por la Proposición 3.39, $v_2 v_1$ también es epimorfismo. Así, por el Primer Teorema de Isomorfismos, $\frac{A}{\operatorname{Ker} v_2 v_1} \cong (A/C)\,/\,(B/C)$. Después, por el Lema 3.38, $\operatorname{Ker} v_2 v_1 = v_1^{-1}[\operatorname{Ker} v_2] = v_1^{-1}\left[\frac{B}{C}\right] = v_1^{-1}\left[v_1\left[B\right]\right] = B + \operatorname{Ker} v_1 = B + C = B$. ■

Lema 3.43.

Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow M$ y $h : A \longrightarrow M$ morfismos de R-módulos izquierdos tales que el siguiente triángulo es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Es decir, $h = gf$, entonces, $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = g^{-1}[\operatorname{Im} h]$ y $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = f[\operatorname{Ker} h]$.

Demostración

(i) Veamos que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = g^{-1}[\operatorname{Im} h]$.

Como $h = gf$, entonces $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} gf = g[\operatorname{Im} f]$, de donde $g^{-1}[\operatorname{Im} h] = g^{-1}\left[g\left[\operatorname{Im} f\right]\right] = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

(i) Veamos que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = f[\operatorname{Ker} h]$.

Como $h = gf$, entonces $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} gf = f^{-1}[\operatorname{Ker} g]$, de donde $f[\operatorname{Ker} h] = f\left[f^{-1}\left[\operatorname{Ker} g\right]\right] = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$. ■

Corolario 3.44.

Sean $f : A \longrightarrow B$*,* $g : B \longrightarrow M$ *y* $h : A \longrightarrow M$ *morfismos de* R*-módulos izquierdos tales que* $h = gf$*.*

1. *Si* h *es epimorfismo, entonces* $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = B$*.*
2. *Si* h *es monomorfismo, entonces* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = 0$*.*
3. *Si* h *es isomorfismo, entonces* $B = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$*.*

Demostración

Se sigue del lema anterior. ■

Definición 3.45.

Sea $f : M \longrightarrow N$ *un morfismo de* R*-módulos izquierdos.*

- *Si* f *es un monomorfismo, diremos que* f *se* ***escinde*** *si* $\operatorname{Im} f$ *es un sumando directo de* N*.*
- *Si* f *es un epimorfismo, diremos que* f *se* ***escinde*** *si* $\operatorname{Ker} f$ *es un sumando directo de* M*.*

Lema 3.46.

Sean $f : A \longrightarrow B$ *un monomorfismo de* R*-módulos y* $g : B \longrightarrow C$ *un epimorfismo de* R*-módulos.*

1. f *se escinde si y sólo si, es invertible a izquierda.*
2. g *se escinde si y sólo si, es invertible a derecha.*

Demostración

Ver [3, Corolario 3.4.11]. ■

3.4 Sucesiones Exactas Cortas

Definición 3.47.

*Sea $n \geq 3$ un número natural. Sean $M_1, \ldots, M_n$ R-módulos izquierdos y $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ morfismos. Consideremos la sucesión $\mathcal{C} : M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$. Diremos que la sucesión $\mathcal{C}$ es **exacta** si, para toda $i \in \{2, \ldots, n-1\}$,* $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$.

Observación.

Es sencillo comprobar que, si $f : 0 \longrightarrow M$ es un morfismo de R-módulos, entonces $\operatorname{Im} f = 0$. Simétricamente, si $f : M \longrightarrow 0$, es un morfismo de R-módulos, entonces $\operatorname{Ker} f = M$. En virtud de lo anterior, si el dominio o codominio de alguno de los morfismos de una sucesión exacta es el modulo cero, no etiquetaremos el morfismo.

Definición 3.48.

*Diremos que una sucesión exacta $\mathcal{C}$ es una **sucesión exacta corta** si es de la forma $\mathcal{C} : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$.*

Definición 3.49.

- *Diremos que una sucesión exacta corta es del **tipo $\mathcal{C}_1$** si es de la forma $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0$, donde $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de R-módulos.*
- *Diremos que una sucesión exacta corta es del **tipo $\mathcal{C}_2$** si es de la forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{v} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$, donde M es un R-módulo y $N \leq M$.*

Lema 3.50.

Toda sucesión exacta corta es, hasta isomorfismo, del tipo $\mathcal{C}_1$ y del tipo $\mathcal{C}_2$.

Demostración

Sea $\mathcal{C} : 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta.

(1)

Por la observación a la Definición 3.47, $M_3 = \operatorname{Im} \psi$, es decir, ψ es epimorfismo. Simétricamente, $0 = \operatorname{Ker} \varphi$, es decir, φ es monomorfismo, de donde, $M_1 \cong$

$\operatorname{Im} \varphi$, pero $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, en consecuencia, $\operatorname{Ker} \psi \cong M_1$. De modo que, hasta isomorfismo, $\mathcal{C}$ es del tipo $\mathcal{C}_1$.

(2)

Sea $N = \operatorname{Ker} \psi \leq M_2$. Por el Primer Teorema de Isomorfismos, $\operatorname{Im} \psi \cong \frac{M_2}{N}$, de modo que $\mathcal{C}$ también puede ser considerada, hasta isomorfismo, como del tipo $\mathcal{C}_2$. ■

3.5 Productos y Coproductos

Sea $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y consideremos su producto cartesiano $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{f : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in A_\lambda\}$, el cual, por el Axioma de Elección, es no vacío.

Notación.

Sean $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *y* $\gamma \in \Lambda$. *Diremos que* $f(\gamma) = a_\gamma \in A_\gamma$ *es la* ***γ-ésima componente*** *de* f. *Además adoptaremos la notación* $f = (a_\lambda)$.

Proposición 3.51.

Sea $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos y consideremos el conjunto producto cartesiano* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{f : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in M_\lambda\}$ *junto con las operaciones definidas a continuación:*

- *Si* $(a_\lambda), (b_\lambda) \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, *entonces* $(a_\lambda) + (b_\lambda) = (a_\lambda + b_\lambda)$.
- *Si* $r \in R$ *y* $(a_\lambda) \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, *entonces* $r \cdot (a_\lambda) = (r \cdot a_\lambda)$.

Entonces $\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, +, \cdot\right)$ *es un* R*-módulo izquierdo.*

Definición 3.52.

Sea $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos. Diremos que* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *es el* ***módulo producto directo*** *de la familia* $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Definición 3.53.

Sean $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* $R-$*módulos izquierdos y* $f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. *Definimos el* ***soporte de*** f *como* $\mathrm{Sop}(f) = \{\lambda \in \Lambda \mid f(\lambda) \neq 0\}$.

Proposición 3.54.

Sean $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* $R-$*módulos izquierdos y consideremos* $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid \mathrm{Sop}(f)$ *es finito*$\}$, *entonces* $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \leq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Demostración

(i) Primero, notemos que $\mathrm{Sop}\,[(0)] = \varnothing$ y $\varnothing$ es finito, entonces $0 \in \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

(ii) Sean $(a_\lambda), (b_\lambda) \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, entonces $\operatorname{Sop}[(a_\lambda)]$ y $\operatorname{Sop}[(b_\lambda)]$ son finitos. Luego, de la definición de la suma en el producto directo, tenemos la igualdad $\operatorname{Sop}[(a_\lambda)+(b_\lambda)] = \operatorname{Sop}[(a_\lambda+b_\lambda)] = \{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda + b_\lambda \neq 0\}$. Afirmamos que $\operatorname{Sop}[(a_\lambda+b_\lambda)] \subseteq \operatorname{Sop}[(a_\lambda)] \cup \operatorname{Sop}[(b_\lambda)]$. En efecto, si $\gamma \in \operatorname{Sop}[(a_\lambda+b_\lambda)]$, entonces $a_\gamma + b_\gamma \neq 0$, de donde $a_\gamma \neq 0$ ó $b_\gamma \neq 0$, así, $\gamma \in \operatorname{Sop}[(a_\lambda)] \cup \operatorname{Sop}[(b_\lambda)]$. Además, como la unión de conjuntos finitos es un conjunto finito, $\operatorname{Sop}[(a_\lambda)] \cup \operatorname{Sop}[(b_\lambda)]$ es finito. Por lo tanto $(a_\lambda)+(b_\lambda) \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

(iii) Sean $r \in R$ y $(a_\lambda) \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Afirmamos que $\operatorname{Sop}[(ra_\lambda)] \subseteq \operatorname{Sop}[(a_\lambda)]$. En efecto, si $\gamma \in \operatorname{Sop}[(ra_\lambda)]$, entonces $ra_\gamma \neq 0$, de donde $a_\gamma \neq 0$, en consecuencia, $\gamma \in \operatorname{Sop}[(a_\lambda)]$. Así, como $\operatorname{Sop}[(a_\lambda)]$ es finito, $\operatorname{Sop}[(ra_\lambda)]$ también lo es. Por lo tanto, $r(a_\lambda) \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. ■

Definición 3.55.

Sea $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de R-módulos izquierdos. Diremos que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es la ***Suma Directa Externa*** *(o coproducto) de la familia $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.*

Observación.

Si Λ es finito, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Definición 3.56.

Sean $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de R-módulos izquierdos y $\gamma \in \Lambda$. Definimos los siguientes morfismos:

1. *El morfismo $\pi_\gamma : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow M_\gamma$, dado por $(a_\lambda) \longmapsto a_\gamma$ es llamado* ***proyección sobre la γ-ésima componente****.*
2. *El morfismo $\iota_\gamma : M_\gamma \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, dado por $a_\gamma \longmapsto (\bar{a}_\gamma)$, donde*

$$(\bar{a}_\gamma)(\lambda) = \begin{cases} a_\gamma, & \text{si } \lambda = \gamma \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \gamma \end{cases}$$

   es llamado ***inclusión de la γ-ésima componente en el coproducto****.*
3. *El morfismo $\hat{\imath} : \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, dado por $(a_\lambda) \longmapsto (a_\lambda)$ es llamado la* ***Inclusión del coproducto en el producto****.*

Lema 3.57.

Sean $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos y* $\gamma, \delta \in \Lambda$*, entonces*

1. π_γ *y* $\pi_\gamma \cdot \hat{\imath}$ *son epimorfismos.*
2. ι_γ *y* $\hat{\imath} \cdot \iota_\gamma$ *son monomorfismos.*
3. $\pi_\delta \cdot \hat{\imath} \cdot \iota_\gamma = \begin{cases} 1_{M_\gamma}, & \text{si } \delta = \gamma \\ 0 & \text{si } \delta \neq \gamma \end{cases}$

Teorema 3.58.

Sea $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de* R*-módulos izquierdos, entonces* $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$*, donde, para toda* $\lambda \in \Lambda$*,* M'_λ *es un submódulo de* $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ *tal que* $M'_\lambda \cong M_\lambda$*. Es decir, la suma directa externa de una familia de* R*-módulos, no es más que una suma directa interna de copias de los elementos de la familia.*

Demostración

Sea $\gamma \in \Lambda$, como ι_γ es un monomorfismo, $M'_\gamma = \iota_\gamma [M_\gamma]$ es una copia de M_γ, tal que $M'_\gamma \leq \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, en consecuencia, $\sum_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda \leq \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Ahora veamos que $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq \sum_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$. Sea $0 \neq (a_\lambda) \in \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, entonces $\mathrm{Sop}\,[(a_\lambda)]$ es finito, digamos $\mathrm{Sop}\,[(a_\lambda)] = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Así, en la notación de la Definición 3.56, tenemos que $(a_\lambda) = (\bar{a}_{\lambda_1}) + \cdots + (\bar{a}_{\lambda_n}) = \iota_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) + \cdots + \iota_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \in \sum_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$. Por lo tanto, $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$. Finalmente, veamos que la suma es directa. Sea $(a_\lambda) \in M'_\delta \bigcap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\delta\}} M'_\lambda$, entonces $(a_\lambda) = (\bar{a}_\delta)$ y $(a_\lambda) = (\bar{a}_{\lambda_1}) + \cdots + (\bar{a}_{\lambda_n})$, donde, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i \neq \delta$, en consecuencia, $\bar{a}_{\lambda_1} = \cdots = \bar{a}_{\lambda_n} = 0$ y así $(a_\lambda) = 0$. Por lo tanto, $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M'_\lambda$. ■

Observación.

El teorema anterior justifica el por qué le llamamos "suma directa externa" al coproducto.

Teorema 3.59. *[Propiedad Universal del Producto]*

Si $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces, el producto directo $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tiene la siguiente propiedad universal: Para todo R-módulo izquierdo N y para toda familia de morfismos $\{f_\lambda : N \longrightarrow M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, existe un único morfismo $f : N \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[dd, dashed, "f"'] & \\
& M_\lambda \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, tail, two heads, "\pi_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración

Sean N un R-módulo izquierdo y $\{f_\lambda : N \to M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de morfismos.

[Existencia]

Consideremos $f : N \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ definida por $x \longmapsto (f_\lambda(x))$. Veamos que f es una función. Sean $x_1, x_2 \in N$ tales que $x_1 = x_2$, entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(x_1) = f_\lambda(x_2)$, de donde $(f_\lambda(x_1)) = (f_\lambda(x_2))$, es decir $f(x_1) = f(x_2)$. Ahora, veamos que es morfismo de R-módulos. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $x_1, x_2 \in N$, entonces $f(r_1x_1 + r_2x_2) = (f_\lambda(r_1x_1 + r_2x_2)) = (r_1 f_\lambda(x_1) + r_2 f_\lambda(x_2)) = r_1(f_\lambda(x_1)) + r_2(f_\lambda(x_2)) = r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)$. Luego, veamos que $\pi_\lambda f = f_\lambda$. Sean $\lambda \in \Lambda$ y $x \in N$, entonces $(\pi_\lambda f)(x) = \pi_\lambda(f(x)) = \pi_\lambda(f_\lambda(x)) = f_\lambda(x)$.

[Unicidad]

Supongamos que existe otro morfismo $g : N \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda g = f_\lambda$. Sea $x \in N$, entonces $g(x) = (x_\lambda) \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, así $f_\lambda(x) = \pi_\lambda g(x) = \pi_\lambda((x_\lambda)) = x_\lambda$, de donde $(x_\lambda) = (f_\lambda(x)) = f(x)$. ■

Teorema 3.60. *[Propiedad Universal del Coproducto]*

Si $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces, el coproducto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tiene la siguiente propiedad universal: Para todo R-módulo izquierdo N y para toda familia de morfismos $\{f_\lambda : M_\lambda \longrightarrow N\}$, existe un único morfismo $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow N$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N & \\
& M_\lambda \arrow[ul, "f_\lambda"'] \arrow[dl, tail, "\iota_\lambda"] \\
\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[uu, dashed, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Demostración

La demostración es dual a la del teorema anterior considerando el morfismo $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow N$, definido por $(a_\lambda) \longmapsto \sum_{\gamma\in \mathrm{Sop}[(a_\lambda)]} f_\gamma(a_\gamma)$. ■

Definición 3.61.

Sean $\{M_i \mid i \in I\}$, $\{N_i \mid i \in I\}$ familias de R-módulos izquierdos y $\{f_i : M_i \to N_i \mid i \in I\}$ una familia de morfismos. Definimos los siguientes morfismos:

1. $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$, *dado por $(a_i) \longmapsto (f_i(a_i))$ es llamado **Morfismo Producto Directo**.*
2. $\bigoplus_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$, *dado por $(a_i) \longmapsto (f_i(a_i))$, es llamado **Morfismo Suma Directa**.*

Proposición 3.62.

Sean $\{M_i \mid i \in I\}$, $\{N_i \mid i \in I\}$ familias de R-módulos izquierdos y $\{f_i : M_i \to N_i \mid i \in I\}$ una familia de morfismos, entonces:

1. $\prod_{i\in I} f_i$ *es monomorfismo si y sólo si, $\bigoplus_{i\in I} f_i$ es monomorfismo, si y sólo si, para toda $i \in I$, f_i es monomorfismo.*

2. $\prod_{i\in I} f_i$ *es epimorfismo si y sólo si,* $\bigoplus_{i\in I} f_i$ *es epimorfismo, si y sólo si, para toda* $i \in I$*,* f_i *es epimorfismo.*

3. $\prod_{i\in I} f_i$ *es isomorfismo si y sólo si,* $\bigoplus_{i\in I} f_i$ *es isomorfismo, si y sólo si, para toda* $i \in I$*,* f_i *es isomorfismo.*

Demostración

Se sigue de la cuidadosa aplicación de las definiciones anteriores. ■

3.6 Pullback y Pushout de R-módulos

Una de las construcciones más importantes en la teoría de módulos es la incorporación no trivial de dos morfismos de R-módulos con el mismo dominio, $g : A \longrightarrow B$ y $f : A \longrightarrow M$ en un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

de tal manera que cualquier otra "completación conmutativa" del cuadrado, pueda ser factorizada a través de β y ψ. Naturalmente, la incorporación de dos morfismos de R-módulos con el mismo codominio en un cuadrado conmutativo con la misma "universalidad", es de igual importancia.

Definición 3.63.

1. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow M$ morfismos de R-módulos izquierdos. Diremos que el par (α, β) es un **pushout** del par (g, f) si, para cada par de morfismos (α', β'), con $\alpha' : M \longrightarrow X$, $\beta' : B \longrightarrow X$, tales que, $\alpha' g = \beta' f$, existe un único morfismo $\delta : N \longrightarrow X$ tal que, $\alpha' = \delta\alpha$ y $\beta' = \delta\beta$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & N \arrow[dr, dotted, "\delta"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

2. *Sean $f : B \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow N$ morfismos de R-módulos izquierdos. Diremos que el par (φ, λ) es un* **pullback** *del par (g, f) si, para cada par de morfismos (φ', λ'), con $\varphi' : Y \longrightarrow M$, $\lambda' : Y \longrightarrow B$, tales que $g\varphi' = f\lambda'$, existe un único morfismo $\tau : Y \longrightarrow A$ tal que, $\varphi' = \varphi\tau$ y $\lambda' = \lambda\tau$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "\tau"] \arrow[drr, bend left, "\lambda'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi'"'] & & \\
& A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "f"] \\
& M \arrow[r, "g"'] & N
\end{tikzcd}$$

Observación.
Se puede verificar que el pullback y el pushout son únicos hasta isomorfismo.

Proposición 3.64.

1. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow M$ morfismos de R-módulos izquierdos. Sean $U = \{(g(a), -f(a)) \in M \oplus B \mid a \in A\}$, $N = \frac{M \oplus N}{U}$ y consideremos las los morfismos $\alpha : M \longrightarrow N$, definido por $m \longmapsto (m, 0) + U$ y $\beta : B \longrightarrow N$, definido por $b \longmapsto (0, b) + U$. Entonces, (α, β) es un pushout de (g, f).*
2. *Sean $f : B \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow N$ morfismos de R-módulos izquierdos. Sea $A = \{(m_1, m_2) \in M \oplus B \mid g(m_1) = f(m_2)\}$ y consideremos las restricciones de las proyecciones $\varphi : A \longrightarrow M$, dada por $(m_1, m_2) \longmapsto m_1$ y $\lambda : A \longrightarrow B$, dada por $(m_1, m_2) \longmapsto m_2$. Entonces, (φ, λ) es un pullback de (g, f).*

Demostración
(1) Esta demostración se encuentra en [3, Teorema 4.7.3 (1)] y es muy similar a la que escribiremos a continuación.
(2) Por construcción de A, es claro que $g\varphi = f\lambda$. Luego, sean $\varphi' : Y \longrightarrow M$ y $\lambda' : Y \longrightarrow B$ morfismos de R-módulos izquierdos tales que $g\varphi' = f\lambda'$.

Debemos demostrar que existe un único morfismo τ que haga conmutar el diagrama de la definición anterior.

Existencia

Consideremos $\tau : Y \longrightarrow A$, definida por $y \longmapsto (\varphi'(y), \lambda'(y))$. Es claro que τ es morfismo de R-módulos. Ahora, veamos que $\lambda' = \lambda\tau$ y $\varphi' = \varphi\tau$. Sea $y \in Y$, entonces $(\lambda\tau)(y) = \lambda((\varphi'(y), \lambda'(y))) = \lambda'(y)$. Simétricamente se comprueba que $(\lambda\tau)(y) = \varphi'(y)$.

Unicidad

Supongamos que existe $\tau_1 : Y \longrightarrow A$ tal que $\lambda' = \lambda\tau_1$ y $\varphi' = \varphi\tau_1$. Sea $y \in Y$, entonces $(\tau - \tau_1)(y) = (m_1, m_2) \in A$. Luego, por definición de φ, tenemos que $m_1 = \varphi((\tau - \tau_1)(y)) = \varphi(\tau(y)) - \varphi(\tau_1(y)) = \varphi'(y) - \varphi'(y) = 0$. Simétricamente, por definición de λ, se sigue que $m_2 = 0$, de donde $(\tau - \tau_1) = 0$, es decir, $\tau = \tau_1$. ■

Proposición 3.65.

1. *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow M$ morfismos de R-módulos izquierdos y sea (α, β) un pushout de (g, f).*
   a) *Si f es monomorfismo (epimorfismo), α es monomorfismo (epimorfismo).*
   b) *Si g es monomorfismo (epimorfismo), β es monomorfismo (epimorfismo).*
   c) *Si f es monomorfismo, entonces el monomorfismo α se escinde si y sólo si, existe $\kappa : B \longrightarrow M$ tal que, $g = \kappa f$.*
2. *Sean $f : B \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow N$ morfismos de R-módulos izquierdos y sea (φ, λ) un pullback de (g, f).*
   a) *Si f es monomorfismo (epimorfismo), entonces φ es monomorfismo (epimorfismo).*
   b) *Si g es monomorfismo (epimorfismo), entonces λ es monomorfismo (epimorfismo).*
   c) *Si g es epimorfismo, el epimorfismo λ se escinde, si y sólo si, existe $\kappa : M \longrightarrow B$ tal que, $f = g\kappa$.*

Demostración

$1(a)$, $1(b), 2(a)$ y $2(b)$ se siguen de la aplicación de las definiciones de monomorfismo, epimorfismo, pushout y pullback. Demostraremos $1(c)$, pues $2(c)$ se sigue dualmente.

[⇒]

Por $2(b)$, si g es un monomorfismo, α es monomorfismo. Supongamos que α se escinde, es decir $N = \operatorname{Im}\alpha \oplus N_0$. Sean $\alpha_0 = \alpha^{|\operatorname{Im}\alpha} : M \twoheadrightarrow \operatorname{Im}\alpha$ la restricción al codominio de α, $\pi : N \rightarrowtail \operatorname{Im}\alpha$ la proyección de N sobre $\operatorname{Im}\alpha$ y consideremos $\kappa = \alpha_0^{-1}\pi\beta$. Sea $a \in A$, entonces $(\kappa f)(a) = \left[\alpha_0^{-1}\pi\beta f\right](a) = \left[\alpha_0^{-1}\pi\alpha g\right](a) = \alpha_0^{-1}\pi\left((g(a), 0) + U\right) = \alpha_0^{-1}(g(a) + U) = g(a)$.

[⇐]

Supongamos que existe $\kappa : B \longrightarrow M$ tal que $g = \kappa f$. Sea $\epsilon : N \longrightarrow M$ definida por $(m, b) + U \longmapsto m + \kappa(b)$. Notemos que ϵ está bien definida, pues si $(g(a), -f(a)) \in U$, entonces $\epsilon\left((g(a), -f(a)) + U\right) = g(a) + \kappa(-f(a)) = g(a) - \kappa(f(a)) = g(a) - g(a) = 0$. Más aún, es claro que ϵ es un morfismo, pues κ lo es. Finalmente, observemos que $\epsilon\alpha(m) = \epsilon\left((m, 0) + U\right) = m + \kappa(0) = m$, es decir, $\epsilon\alpha = 1_M$. Así, por el Lema 3.46, α se escinde. ■

Corolario 3.66.

Sea (φ, λ) un pullback de (g, f). Si f y g son isomorfismos, entonces φ y α también son isomorfismos.

Demostración

Se sigue inmediatamente de la proposición anterior. ■

3.7 Módulos Inyectivos y Proyectivos

Definición 3.67.

Sean M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$.

1. *Diremos que N es un **submódulo superfluo en M** (o simplemente superfluo) si, para todo $A \leq M$ tal que $N + A = M$, se tiene que $A = M$. Denotaremos este hecho por $N \ll M$.*
2. *Diremos que N es un **submódulo esencial en M** (o simplemente esencial) si, para todo $A \leq M$ tal que $N \cap A = 0$, se tiene que $A = 0$. Denotaremos este hecho por $A \leq_{\text{es}} M$.*

Observación.

Sean M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$, entonces:

- *$N \ll M$ si y sólo si, para todo $A \lneq M$ se tiene que $N + A \lneq M$.*
- *$A \leq_{\text{es}} M$ si y sólo si, para todo $0 \neq A \leq M$ se tiene que $A \cap N \neq 0$.*
- *Los submódulos superfluos son propios.*
- *Los submódulos esenciales son no cero.*

Definición 3.68.

Sea $\alpha : M \to N$ un morfismo de $R-$módulos izquierdos.

1. *Diremos que α es un **morfismo superfluo** si $\operatorname{Ker}\alpha \ll M$.*
2. *Diremos que α es **morfismo esencial** si $\operatorname{Im}\alpha \leq_{\text{es}} M$.*

Teorema 3.69.

Las siguientes proposiciones son equivalentes para un $R-$módulo I.

1. *Todo monomorfismo $\xi : I \to B$, se escinde.*
2. *Para todo monomorfismo $f : A \rightarrowtail B$ y para todo morfismo $g : A \to I$, existe un morfismo $\kappa : B \to I$ tal que $g = \kappa f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dotted, "\kappa"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

Demostración

[**1** $\Rightarrow$ **2**]

Supongamos que todo monomorfismo con dominio I se escinde y sean $f : A \rightarrowtail B$ un monomorfismo y $g : A \to I$ un morfismo. Sea (α, β) un pushout de (g, f). Por 1 de la Proposición 3.65 tenemos que, como f es monomorfismo, α también es monomorfismo. Más aún, por hipótesis, α se escinde, de donde, existe $\kappa : B \longrightarrow I$, tal que $g = \kappa f$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dotted, "\kappa"] \arrow[d, "\beta"] \\
I \arrow[r, "\alpha"'] & N
\end{tikzcd}
$$

[**2** $\Rightarrow$ **1**]

Sea $\xi : I \longrightarrow B$ un monomorfismo y consideremos el isomorfismo $1_I : I \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow I$. Por hipótesis existe $\kappa : B \longrightarrow I$ tal que es siguiente triángulo es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, tail, "\xi"] \arrow[d, "1_I"'] & B \arrow[dl, dotted, "\kappa"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $1_I = \xi\kappa$. Así, por el Lema 3.46, ξ se escinde. ■

Definición 3.70.

Sea I un R-módulo, diremos que I es ***inyectivo****, si satisface las condiciones del teorema anterior.*

Definición 3.71.

Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que $(\eta, E(M))$ es una ***cápsula inyectiva*** de M, *si $\eta : M \rightarrowtail E(M)$ es un monomorfismo esencial y $E(M)$ es inyectivo.*

Lema 3.72.

Una cápsula inyectiva de un R-módulo simple, es inescindible.

Demostración

Ver [3, Corolario 6.63 (a)]. ■

Teorema 3.73.

Las siguientes proposiciones son equivalentes para un R-módulo izquierdo P.

1. *Todo epimorfismo $\zeta : B \to P$, se escinde.*
2. *Para todo epimorfismo $\beta : B \to C$ y para todo morfismo $\psi : P \to C$ existe un morfismo $\lambda : P \to B$ tal que $\beta\lambda = \psi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\psi"] \\
B \arrow[r, two heads, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración

Se sigue dualmente a la demostración del Teorema 3.69 usando 2 de la Proposición 3.65. ■

Definición 3.74.

Sea P un R-módulo izquierdo. Diremos que P es ***proyectivo*** *si satisface las condiciones del teorema anterior.*

Observación.

Si M es un R-módulos izquierdo inyectivo (proyectivo) y $N \cong M$, entonces N es inyectivo (proyectivo). Ver [3, Corolario 5.3.3].

Teorema 3.75.

Sean $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ y $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ familias de R-módulos izquierdos.

1. *$I = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es inyectivo si y sólo si, para cada $\lambda \in \Lambda$, I_λ es inyectivo.*
2. *$P = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ ó $P = \coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ es proyectivo si y sólo si, para cada $\lambda \in \Lambda$, P_λ es proyectivo.*

Demostración

1. $[\Rightarrow]$

Supongamos que $I = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es inyectivo. Sean $\lambda \in \Lambda$, $f : A \rightarrowtail B$ un monomorfismo y $g_\lambda : A \longrightarrow I_\lambda$ un morfismo. Como I es inyectivo, existe un morfismo $\kappa : B \longrightarrow I$, tal que $\kappa f = \hat{\iota}_\lambda g_\lambda$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g_\lambda"'] & B \arrow[ddl, dashed, "\kappa"] \\
I_\lambda \arrow[d, tail, "\hat{\iota}_\lambda"'] & \\
I &
\end{tikzcd}
$$

Ahora, consideremos la proyección $\pi_\lambda : I \twoheadrightarrow I_\lambda$ y recordemos que $\pi_\lambda \hat{\iota}_\lambda = 1_{I_\lambda}$. Sea $\kappa_\lambda = \pi_\lambda \kappa$ y notemos que $g_\lambda = 1_{I_\lambda} g_\lambda = (\pi_\lambda \hat{\iota}_\lambda)\, g_\lambda = \pi_\lambda\, (\hat{\iota}_\lambda g_\lambda) = \pi_\lambda \kappa f = \kappa_\lambda f$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g_\lambda"'] & B \arrow[ddl, dashed, "\kappa"'] \arrow[dddl, dashed, "\kappa_\lambda"] \\
I_\lambda \arrow[d, "\hat{\iota}_\lambda"'] & \\
I \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \\
I_\lambda &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, I_λ es inyectivo.

1. $[\Leftarrow]$

Supongamos que, para cada $\lambda \in \Lambda$, I_λ es inyectivo. Sean $f : A \rightarrowtail B$ un monomorfismo y $g : A \longrightarrow I$ un morfismo. Por hipótesis, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un morfismo $\kappa_\lambda : B \longrightarrow I_\lambda$, tal que $\pi_\lambda g = \kappa_\lambda f$. Ahora, por la Propiedad Universal del Producto, existe un único morfismo $\kappa : B \longrightarrow I$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda \kappa = \kappa_\lambda$. En consecuencia, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda g = \kappa_\lambda f = \pi_\lambda \kappa f$, es decir, $\pi_\lambda g = \pi_\lambda \kappa f$. Así, por la unicidad de κ, se tiene que $g = \kappa f$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \arrow[ddl, "\kappa_\lambda"] \\
I \arrow[d, tail, two heads, "\pi_\lambda"'] & \\
I_\lambda &
\end{tikzcd}
$$

2. [$\Leftrightarrow$]

En virtud de la observación a la Definición 3.74 y del Teorema 3.58, basta demostrar la equivalencia para el coproducto. Así, la demostración se sigue dualmente a la equivalencia anterior. ■

Teorema 3.76.

Un R-módulo izquierdo M es proyectivo si y sólo si es isomorfo a un sumando directo de un módulo libre.

Demostración

Ver [3, Teorema 5.4.1]. ■

3.8 Módulos Artinianos y Neterianos

Definición 3.77.

Sea M un R-módulo izquierdo.

1. *Diremos que M es* **neteriano** *si, para toda cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq n$, $A_i = A_n$.*
2. *Diremos que M es* **artiniano** *si, para toda cadena descendente $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \cdots$ de submódulos de M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq n$, $A_i = A_n$.*

Observación. *Simétricamente se definen los R-módulos neterianos y artinianos derechos.*

Definición 3.78.

Sea R un anillo.

- *Diremos que R es* **artiniano derecho** *(izquierdo) si R_R (${}_RR$) es artiniano.*
- *Diremos que R es* **neteriano derecho** *(izquierdo) si R_R (${}_RR$) es neteriano.*

Teorema 3.79.

Sean M un R-módulo izquierdo y $A \leq M$, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- *M es artiniano.*
- *A y $\frac{M}{A}$ son artinianos.*
- *Toda familia no vacía de submódulos de M admite un elemento mínimo.*
- *Todo módulo cociente de M es finitamente cogenerado.*

Demostración

Ver [3, Teorema 6.1.2]. ■

Teorema 3.80.

Sean M un R-módulo izquierdo y $A \leq M$, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- *M es neteriano.*
- *A y $\frac{M}{A}$ son neterianos.*
- *Toda familia no vacía de submódulos de M admite un elemento máximo.*
- *Todo submódulo de M es finitamente generado.*

Demostración

Ver [3, Teorema 6.1.2]. ■

Corolario 3.81.

La clase de R-módulos artinianos y la clase de R-módulos neterianos son cerradas bajo sumas directas finitas.

Demostración

Ver [3, Corolario 6.1.3]. ■

Lema 3.82.

Sean M un R-módulo neteriano y $f \in \mathrm{End}_R(M)$, entonces f es isomorfismo si y sólo si es epimorfismo.

Demostración

Sean M un R-módulo neteriano y $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Supongamos que f es epimorfismo y consideremos la cadena ascendente $\mathrm{Ker}\, f \leq \mathrm{Ker}\, f^2 \leq \mathrm{Ker}\, f^3 \leq \cdots$ de submódulos de M. Como M es neteriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq n$, $\mathrm{Ker}\, f^i = \mathrm{Ker}\, f^n$. En particular, se cumple que $\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^{2n}$. Afirmamos que $\mathrm{Ker}\, f^n \cap \mathrm{Im}\, f^n = 0$. En efecto, sea $x \in \mathrm{Ker}\, f^n \cap \mathrm{Im}\, f^n$, entonces $f^n(x) = 0$ y existe $y \in M$ tal que $x = f^n(y)$. Luego, $0 = f^n(x) = f^{2n}(y)$, de donde $y \in \mathrm{Ker}\, f^{2n} = \mathrm{Ker}\, f^n$, es decir $x = f^n(y) = 0$. Finalmente, como f es epimorfismo, $\mathrm{Im}\, f^n = M$, en consecuencia, $\mathrm{Ker}\, f^n = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}\, f = 0$, de donde, f es isomorfismo. ■

3.9 Dimensión de Krull

La dimensión de Krull de un R-módulo M se define como la desviación de la retícula de submódulos de M, vista como conjunto parcialmente ordenado. En el apéndice encontrará una sección dedicada al estudio de la desviación de un copo para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de esta sección.

Definición 3.83.
*Sea M un R-módulo izquierdo y $\delta(M)$ la retícula de submódulos de M. Si existe $\alpha = \operatorname{dev}(\delta(M))$, definimos la **dimensión de Krull** de M como el número ordinal α y escribimos $\operatorname{Kdim}(M) = \alpha$. Si $\delta(M)$ no tiene desviación, diremos que M no tiene dimensión de Krull.*

Teorema 3.84.
Sea M un R-Módulo izquierdo, entonces:

1. $\operatorname{Kdim}(M) = -1$ *si y sólo si* $M = 0$.
2. $\operatorname{Kdim}(M) = 0$ *si y sólo si* M *es artiniano y no cero.*
3. *Si* $\operatorname{Kdim}(M) = \alpha$ *y* $N \leq M$*, entonces existe* $\beta = \operatorname{Kdim}(N)$ *y* $\beta \leq \alpha$.
4. *Si M es neteriano, entonces M tiene dimensión de Krull.*

Demostración
Se siguen inmediatamente de las Definiciones 6.2, 6.4 y las Proposiciones 6.6, 6.7 y 6.9 incluidas en el apéndice. ■

Observación.
Si M y N son R-módulos isomorfos, entonces $\operatorname{Kdim}(M) = \operatorname{Kdim}(N)$, pues $\delta(M)$ y $\delta(N)$ son copos isomorfos.

Proposición 3.85.
Sean M un R-módulo izquierdo y $N \leq M$, entonces, $\operatorname{Kdim}(M)$ existe si y sólo si $\operatorname{Kdim}(N)$ y $\operatorname{Kdim}(\frac{M}{N})$ existen y, en dicho caso
$\operatorname{Kdim}(M) = \operatorname{mayor}\{\operatorname{Kdim}(N), \operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)\}$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Supongamos que existe $\mathrm{Kdim}(M)$. Observemos que $\delta(N)$ y $\delta\left(\frac{M}{N}\right)$ son subcopos de $\delta(M)$, así, por la Proposición 6.7, $\mathrm{Kdim}(N)$ y $\mathrm{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)$ existen y son menores o iguales que $\mathrm{Kdim}(M)$, de donde, $\mathrm{mayor}\{\mathrm{Kdim}(N), \mathrm{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)\} \leq \mathrm{Kdim}(M)$.

[$\Leftarrow$] [Por inducción transfinita]

Supongamos que N y $\frac{M}{N}$ tienen dimensión de Krull y sea $\alpha = \mathrm{mayor}\{\mathrm{Kdim}(N), \mathrm{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)\}$. Vamos a demostrar, por inducción transfinita sobre α, que $\mathrm{Kdim}(M) \leq \alpha$. Observemos que el caso $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos que $\mathrm{Kdim}(M) \leq \beta$, para todo ordinal $\beta < \alpha$. Sea $A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \cdots$ una cadena descendente de submódulos de M. Por demostrar que $\mathrm{Kdim}(M) \leq \alpha$, es decir, para casi toda i, $\mathrm{Kdim}\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) < \alpha$. Observemos los siguientes hechos.

(1)

$A_0 \cap N \geq A_1 \cap N \geq A_2 \cap N \geq \cdots$, es una cadena descendente de submódulos de N, de donde, para casi toda i, $\mathrm{Kdim}\left(\frac{A_i \cap N}{A_{i+1} \cap N}\right) < \mathrm{Kdim}(N)$.

(2)

$\frac{A_0+N}{N} \geq \frac{A_1+N}{N} \geq \frac{A_2+N}{N} \geq \cdots$ es una cadena de submódulos de $\frac{M}{N}$, de donde, para casi toda i, $\mathrm{Kdim}\left(\frac{A_i+N}{A_{i+1}+N}\right) \overset{*}{=} \mathrm{Kdim}\left(\frac{\frac{A_i+N}{N}}{\frac{A_{i+1}+N}{N}}\right) < \mathrm{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)$. Aquí la igualdad marcada con "$*$", es consecuencia del Tercer Teorema de Isomorfismos.

Consideremos el epimorfismo $\varphi : \frac{A_i}{A_{i+1}} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \frac{A_i+N}{A_{i+1}+N}$, definido por $a_i + A_{i+1} \longmapsto a_i + (A_{i+1} + N)$. Es sencillo calcular que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \frac{A_i \cap (A_{i+1}+N)}{A_{i+1}}$. Por otro lado, consideremos el epimorfismo $\psi : A_i \cap N \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \frac{A_i \cap (A_{i+1}+N)}{A_{i+1}}$, definido por $a_i \longmapsto a_i + A_{i+1}$. De nuevo, es sencillo verificar que, $\mathrm{Ker}\,\psi = A_{i+1} \cap N$. Así, por el Primer Teorema de Isomorfismos, tenemos el siguiente triángulo conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A_i \cap N \arrow[r, tail, two heads, "\psi"] \arrow[d, tail, two heads, "v"'] & \frac{A_i \cap (A_{i+1}+N)}{A_{i+1}+N} \\
\frac{A_i \cap N}{A_{i+1} \cap N} \arrow[ur, dashed, tail, two heads, "\hat{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior, tenemos que $\mathcal{C} : 0 \longrightarrow \frac{A_i \cap N}{A_{i+1} \cap N} \xrightarrow{\hat{\psi}} \frac{A_i}{A_{i+1}} \xrightarrow{\varphi} \frac{A_i + N}{A_{i+1}+N} \longrightarrow 0$, es una sucesión exacta corta. Así, por el Lema 3.50, $\mathcal{C}$ es, hasta isomorfismo, del tipo $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{v} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$. Finalmente, como la dimensión de Krull es invariante bajo isomorfismo, por lo anterior, es posible aplicar la hipótesis inductiva y, usando (1) y (2), tenemos que para casi todo i,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kdim}\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) &= \text{mayor}\left\{\operatorname{Kdim}\left(\frac{A_i \cap N}{A_{i+1} \cap N}\right), \operatorname{Kdim}\left(\frac{A_i + N}{A_{i+1} + N}\right)\right\} \\
&< \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Kdim}(M) \leq \alpha$. ■

Definición 3.86.

Sea $M \neq 0$ un R-módulo izquierdo y α un número ordinal.

1. *Diremos que M es **α-crítico** si $\operatorname{Kdim}(M) = \alpha$ y para todo $N \leq M$ con $N \neq 0$, $\operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right) < \alpha$.*
2. *Diremos que M es **crítico** si es α-crítico para algún ordinal α.*

Ejemplo 3.87.

${}_RM$ es un R-módulo simple si y sólo si, ${}_RM$ es 0-crítico.

Observación.

Es muy sencillo comprobar que la propiedad de ser α-crítico se preserva bajo isomorfismo.

Lema 3.88.

Sea M un R-módulo izquierdo. Si M es α-crítico, entonces todo submódulo no cero de M, también es α-crítico.

Demostración

Sean M un R-módulo α-crítico y $0 \neq N \leq M$.

(1) Sea $0 \neq N_1 \leq N$, entonces $\frac{N}{N_1} \leq \frac{M}{N_1}$, de donde $\operatorname{Kdim}\left(\frac{N}{N_1}\right) \leq \operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N_1}\right)$. Luego, como M es α-crítico, $\operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N_1}\right) < \alpha$. Así, $\operatorname{Kdim}\left(\frac{N}{N_1}\right) < \alpha$.

(2) Como M es α-crítico, $\operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right) < \alpha$. Luego, por la Proposición 3.85, $\alpha = \operatorname{mayor}\{\operatorname{Kdim}(N), \operatorname{Kdim}\left(\frac{M}{N}\right)\}$, en consecuencia, $\operatorname{Kdim}(N) = \alpha$.

Por lo tanto, N es α-crítico. ■

Teorema 3.89.

Todo R-módulo izquierdo no cero con dimensión de Krull admite un submódulo crítico.

Demostración [Por contradicción]

Presentaremos la demostración en tres partes. Primero, elegiremos un módulo. Luego haremos observaciones sobre los submódulos del módulo encontrado en la primer parte. Finalmente, construiremos la contradicción.

(1)

Supongamos que la clase $\mathcal{S}$, de los R-módulos no cero con dimensión de Krull tales que no admiten submódulos críticos, es no vacía. Sea $\mathcal{S}_K$ la clase de todos los números ordinales β, tales que $\beta = \operatorname{Kdim}(N)$, para algún $N \in \mathcal{S}$. Es claro que $\mathcal{S}_K \neq \varnothing$, en virtud de que $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Como la clase de todos los ordinales es bien ordenada por "$<$", existe $\alpha = \operatorname{menor} \mathcal{S}_K$. Sea $M \in \mathcal{S}$ tal que $\alpha = \operatorname{Kdim}(M)$. Notemos que $\alpha \geq 0$, pues $M \neq 0$.

(2)

Por el Teorema 3.84, todo submódulo no cero de M tiene dimensión de Krull menor o igual que α. Sin embargo, por construcción de α, todo submódulo no cero de M tiene dimensión de Krull exactamente α, pues de lo contrario, M tendría un submódulo con dimensión de Krull estrictamente menor que α, de donde, por la propiedad de α de ser el menor de su clase, M admitiría un submódulo crítico, lo cual es absurdo. En consecuencia, todo submódulo no cero de M tiene dimensión de Krull α y no admite submódulos críticos.

(3)

Definimos, recursivamente, la siguiente cadena descendente de submódulos de M: Sea $M_0 = M$. Si $M_n \neq 0$ ha sido definido, por la parte (2), $\mathrm{Kdim}(M_n) = \alpha$ y M_n no admite submódulos críticos. En particular M_n no es α-crítico. En consecuencia, existe $M_{n+1} \leq M_n$ con $M_{n+1} \neq 0$, tal que $\mathrm{Kdim}\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) = \alpha$. En conclusión, hemos construido la cadena descendente $M = M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \cdots$ de submódulos de M tal que, para toda $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Kdim}\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) = \alpha$, de donde $\mathrm{Kdim}(M) > \alpha$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 3.90.

*Diremos que un R-módulo izquierdo M es **monomorfo** si para todo $0 \neq N \leq M$ y todo morfismo $f : N \to M$, f es cero o un monomorfismo.*

Lema 3.91.

Todo R-módulo izquierdo α-crítico M, es monomorfo.

Demostración[Por contradicción]

Sea M un R-módulo α-crítico. Sean $0 \neq N \leq M$ y $f : N \to M$ un morfismo no cero. Supongamos que $\mathrm{Ker}\, f \neq 0$. Por el primer teorema de isomorfismos, $\frac{N}{\mathrm{Ker}\, f} \cong \mathrm{Im}\, f$. Luego, como M es α-crítico, por el Lema 3.88, N también lo es, de donde $\mathrm{Kdim}\left(\frac{N}{\mathrm{Ker}\, f}\right) < \alpha$. En consecuencia, $\mathrm{Kdim}\,(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Kdim}\left(\frac{N}{\mathrm{Ker}\, f}\right) < \alpha$, lo cual es absurdo, pues $\mathrm{Im}\, f \leq M$, también es α-crítico. Por lo tanto, M es monomorfo. ■

Definición 3.92.

*Diremos que un R-módulo izquierdo M es **compresible** si todos sus submódulos no cero, contienen una copia de M.*

Observación.

Simétricamente se definen los conceptos de R-módulo compresible derecho y R-módulo monomorfo derecho.

Proposición 3.93.

Sea M un R-módulo monomorfo derecho, entonces, $\operatorname{End}_R(M)$ es un dominio Ore derecho si y sólo si, la intersección de cada par de submódulos de M, isomorfos a M, contiene una copia de M.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Sean $f, g \in \operatorname{End}_R(M) \setminus \{0\}$. Como M es monomorfo, f y g son monomorfismos, de donde, $f[M] \cong C \cong g[M]$. Por hipótesis, existen $h, k \in \operatorname{End}_R(M)$ tales que $fh = gk \neq 0$. De nuevo, como h y k son monomorfismos, $fh[M] = gk[M] \cong M$. Finalmente, es claro que $fh[M] \subseteq f[M]$ y que $fh[M] = gk[M] \subseteq g[M]$. Por lo tanto, $M \cong fh[M] \subseteq f[M] \cap g[M]$.

[$\Leftarrow$]

Sean $f, g \in \operatorname{End}_R(M) \setminus \{0\}$. Como M es monomorfo, f y g son monomorfismos. Por hipótesis, existe $h \in \operatorname{End}_R(M) \setminus \{0\}$ tal que $N = h[M] \subseteq f[M] \cap g[M]$, de donde $f\left[f^{-1}[N]\right] = N \cap f[M] = N$ y $g\left[g^{-1}[N]\right] = N \cap g[M] = N$. Para demostrar que $\operatorname{End}_R(M)$ es Ore derecho, debemos hallar $j, k \in \operatorname{End}_R(M)$, tales que $fj = gk \neq 0$. Para mostrar la existencia de dichos morfismos, utilizaremos la técnica del pullback. Sean $f' = f_{|f^{-1}[N]}$ y $g' = g_{|g^{-1}[N]}$ y consideremos los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
 & f^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "f'"] \\
M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & g^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "g'"] \\
M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}$$

Para completar los cuadrados conmutativos, sean $A = \{(x_1, x_2) \in M \oplus f^{-1}[N] \mid h(x_1) = f'(x_2)\}$, $\alpha = \pi_{1|A}$ y $\varphi = \pi_{2|A}$, donde π_1 es la proyección de $M \oplus f^{-1}[N]$ sobre $f^{-1}[N]$ y π_2 es la proyección de $M \oplus f^{-1}[N]$ sobre M, entonces (φ, α) es un pullback de (h, f'). Simétricamente, si $B = \{(y_1, y_2) \in M \oplus g^{-1}[N] \mid h(y_1) = g'(y_2)\}$, β es la restricción a B de la proyección de $M \oplus g^{-1}[N]$ sobre $g^{-1}[N]$ y ψ es la restricción a B de la proyección de $M \oplus g^{-1}[N]$ sobre M, entonces (ψ, β) es un pullback de (h, g'). Más aún, por el Corolario 3.66, como h, f' y g' son isomorfismos, α, φ, β y ψ también lo son. Así, tenemos los siguientes diagramas conmutativos.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, two heads, "\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi"'] & f^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "f'"] \\
M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, two heads, "\beta"] \arrow[d, tail, two heads, "\psi"'] & g^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "g'"] \\
M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Sean $j = \alpha\varphi^{-1}$ y $k = \beta\psi^{-1}$. Afirmamos que $f'j = g'k$. En efecto, sea $m \in M$, como φ es un isomorfismo, es invertible, de donde $\varphi^{-1}(m) = m + x$, para algún $x \in f^{-1}[N]$. Luego, como α es la restricción de la proyección sobre la segunda entrada, $\alpha\,(m + x) = x$. Después, por definición de A, $f'(x) = h(m)$. En conclusión, $f'j(m) = h(m)$. Este procedimiento se puede observar en el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
m + x \arrow[rrr, mapsto, bend left, "\alpha"] & A \arrow[r, tail, two heads, "\alpha"] \arrow[d, tail, two heads, "\varphi"'] & f^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "f'"] & x \arrow[d, mapsto, "f'"] \\
m \arrow[u, mapsto, "\varphi^{-1}"] & M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N & f'(x) = h(m)
\end{tikzcd}
$$

Simétricamente, tenemos el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
m+y \arrow[rrr, mapsto, bend left, "\beta"] & B \arrow[r, tail, two heads, "\beta"] \arrow[d, tail, two heads, "\psi"'] & g^{-1}[N] \arrow[d, tail, two heads, "g'"] & y \arrow[d, mapsto, "g'"] \\
m \arrow[u, mapsto, "\psi^{-1}"] & M \arrow[r, tail, two heads, "h"'] & N & g'(y)=h(m)
\end{tikzcd}
$$

Así, $f'j(m) = g'k(m)$, de donde, $f'j = g'k$. Finalmente, veamos que $fj = gk$. Sea $m \in M$, entonces $j(m) \in f^{-1}[N]$, de donde, $f'(j(m)) = f(j(m))$. Simétricamente, $k(m) \in g^{-1}[N]$, entonces, $g'(k(m)) = g(k(m))$. Luego, como $f'j = g'k$, se sigue que $fj(m) = f'j(m) = g'k(m) = gk(m)$. Por lo tanto, $fj = gk \neq 0$, es decir, $\mathrm{End}_R(M)$ es Ore derecho. ■

Corolario 3.94.

El anillo de endomorfismos de un R-módulo derecho, monomorfo y compresible M es un dominio Ore derecho.

Demostración

Sea M un R-módulo monomorfo y compresible. Sean $A, B \leq M$ tales que $A \cong M \cong B$. Como M es compresible, $A \cap B$ contiene una copia de M. Así, por el lema anterior, como M es monomorfo, $\mathrm{End}_R(M)$ es un dominio Ore derecho. ■

Lema 3.95.

Un R-módulo derecho, compresible y con dimensión de Krull, es crítico y su anillo de endomorfismos es un dominio Ore derecho.

Demostración

Sea M un R-módulo compresible y con dimensión de Krull. Por el Teorema 3.89, M admite un submódulo crítico N, digamos, con dimensión de Krull α. Por otro lado, como M es compresible, existe $N_1 \leq N$ tal que $M \cong N_1$. Luego, como $N_1 \leq N$ y N es α-crítico, por el Lema 3.88, N_1 también es α-crítico y así, M es α-crítico. Finalmente como M es crítico, por el Lema 3.91, M es monomorfo. Así, por el corolario anterior, $\mathrm{End}_R(M)$ es un dominio Ore derecho. ■

Corolario 3.96.

Sea M un R-módulo derecho tal que $\delta(M) \setminus \{0\}$ es isomorfo a α^{op}, para algún ordinal con forma normal de Cantor $\alpha = \omega^{\lambda_1}n_1 + \cdots + \omega^{\lambda_t}n_t$, entonces $\mathrm{Kdim}(M) = \lambda_1$. Más aún, si M es λ_1- crítico, $\alpha = \omega^{\lambda_1}$.

Demostración

Se sigue del Lema 6.11. Ver [4, Sección 6.2.22]. ■

3.10 Algunos Resultados Auxiliares

Definición 3.97.

Sea M un R-módulo. Diremos que M es ***uniforme*** *si todo submódulo de M es esencial en M, es decir, si la intersección de todo par de submódulos no cero, es no cero.*

Proposición 3.98.

Si M es un R-Módulo neteriano, entonces todo submódulo de M contiene un submódulo uniforme.

Demostración

Como M es neteriano, entonces todos sus submódulos son finitamente generados, de modo que basta probar la proposición para los submódulos cíclicos. Sea $x \in M \setminus \{0\}$ y consideremos el submódulo $Rx \neq 0$. Como M es neteriano, $Rx \leq M$ también lo es. Ahora, consideremos la siguiente familia de submódulos de Rx.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{N \leq Rx \mid N \text{ interseca trivialmente a otro submódulo de } Rx\} \\ &= \{N \leq Rx \mid \text{existe } L \leq Rx \text{ tal que } L \cap N = 0\} \end{aligned}$$

Como Rx es neteriano, Γ admite un elemento $\subseteq$-máximo, digamos K. Observemos que, por definición de K, existe $U \leq Rx$, tal que $U \cap K = 0$.
Afirmamos que U es un submódulo uniforme de Rx.
En efecto: Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que existen $A, B \leq U$ tales que $A \cap B = 0$. Notemos que, como $A \leq U$, entonces $K \cap A \leq K \cap U = 0$. Por lo anterior, podemos formar $K \oplus A$. Luego, consideremos $(K \oplus A) \cap B$:

$$\begin{aligned} x \in (K \oplus A) \cap B &\Rightarrow x = y + a = b,\ y \in K,\ a \in A,\ b \in B \\ &\Rightarrow y = b - a \in K \cap U = 0 \\ &\Rightarrow a = b = x \in A \cap B = 0 \\ &\Rightarrow (K \oplus A) \cap B = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, $(K \oplus A) \in \Gamma$, lo cual es absurdo, pues $K \lneq (K \oplus A)$ y K es un elemento $\subseteq$-máximo de Γ. Por lo tanto, U es un submódulo uniforme de Rx. ■

Lema 3.99.

Si M es un R-módulo izquierdo uniforme y $N \cong M$, entonces N es uniforme.

Demostración

Sean M un R-Módulo uniforme y N un R-Módulo tal que $M \cong N$. Sea $\alpha : M \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow N$ un isomorfismo y sean $0 \neq A, B \leq N$, entonces $0 \neq \alpha^{-1}[A], \alpha^{-1}[B] \leq M$. Luego, como M es uniforme,
$0 \neq \alpha^{-1}[A] \bigcap \alpha^{-1}[B] = \alpha^{-1}[A \cap B]$.
Finalmente, como α es isomorfismo y $0 \neq \alpha^{-1}[A \cap B]$, entonces
$0 \neq \alpha[\alpha^{-1}[A \cap B]] = A \cap B$. Por lo tanto, N es uniforme. ■

Definición 3.100.

*Sea M un R-módulo y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que M tiene **dimensión uniforme n** si existe $V \leq_{\text{es}} M$ tal que V es la suma directa de n submódulos uniformes. A este hecho lo denotaremos por $\mathrm{Udim}(M) = n$.*

Observación.

*Si para toda $n \in \mathbb{N}$, M no tiene dimensión uniforme n, diremos que M tiene **dimensión uniforme infinita** y escribimos $\mathrm{Udim}(M) = \infty$.*

Lema 3.101.

Sea M un R-módulo. M tiene dimensión uniforme infinita si y sólo si, M contiene una suma directa infinita de submódulos no cero.

Demostración

Ver [5, Proposición 6.4]. ■

Definición 3.102.

*Sea M un R-módulo izquierdo. Diremos que M es **hopfiano** si todo epimorfismo $\varphi : M \twoheadrightarrow M$ es un isomorfismo.*

Observación.

En virtud del Lema 3.82, todo R-módulo neteriano ${}_RM$, es hopfiano.

Definición 3.103.

*Sea M un R-módulo. Diremos que M es **Dedekind-finito** si, dado un R-módulo N tal que $M \cong M \oplus N$, se tiene que $N = 0$.*

Lema 3.104.

Sea M un R-módulo tal que todo epimorfismo $\varphi : M \twoheadrightarrow M$ se escinde. M es hopfiano si y sólo si es Dedekind-finito.

Demostración

Ver [6, Ejercicio 1.8]. ■

Corolario 3.105.

Sea M un R-módulo proyectivo. M es hopfiano si y sólo si, es Dedekind-finito.

Demostración

Como M es proyectivo, todo epimorfismo con codominio M se escinde. ■

4 Algunas Clases Especiales de Anillos

4.1 V-anillos y Von Neumann Regularidad

Definición 4.1.
*Sean R un anillo conmutativo y $S \subseteq R$, diremos que S es un **conjunto multiplicativo** si:*

- $1 \in S$
- *Para todos $a, b \in S$, $ab \in S$*

Sean M un R-módulo y S un conjunto multiplicativo de R. Considere la relación "$\simeq$" en $M \times S$ definida por $(m_1, s_1) \simeq (m_2, s_2)$ si y sólo si existe $u \in S$ tal que $u\,(s_1 m_2 - s_2 m_1) = 0$. Tras una sencilla verificación de rutina, se comprueba que "$\simeq$" es una relación de equivalencia.

Notación.
Sea $(m, s) \in M \times S$. A la clase de equivalencia determinada por (m, s), la denotaremos como $\left[\frac{m}{s}\right]$ y escribiremos $S^{-1}M = \{\left[\frac{m}{s}\right] \mid m \in M, s \in S\}$.

Lema 4.2.
Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo izquierdo y S un conjunto multiplicativo de R. Si definimos la suma y la ley de composición externa en $S^{-1}M$ como $\left[\frac{m_1}{s_1}\right] + \left[\frac{m_2}{s_2}\right] = \left[\frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2}\right]$ y $a\left[\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{am}{s}\right]$, respectivamente, entonces $S^{-1}M$ es un R-módulo izquierdo.

Lema 4.3.

Sean R un anillo conmutativo y P un ideal primo de R, entonces $S = R \setminus P$ es un conjunto multiplicativo.

Demostración

Como P es un ideal primo, $P \subsetneq R$, de donde $1 \in S$. Luego, sean $a, b \in S$, como P es un ideal primo, si $ab \in P$, entonces $a \in P$ ó $b \in P$, pero ambos casos son absurdos, pues $a, b \in S = R \setminus P$. Por lo tanto, S es un conjunto multiplicativo. ■

Observación.

Es sencillo comprobar que un ideal máximo de un anillo conmutativo, es primo.

Definición 4.4.

*Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo izquierdo y P un ideal máximo (o primo) de R y $S = R \setminus P$. Definimos la **localización de M respecto a P** como el R-módulo $M_P = S^{-1}M$.*

Teorema 4.5.

Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo izquierdo, entonces $M = 0$ si y sólo sí, para todo P ideal máximo de R, $M_P = 0$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Es evidente.

[$\Leftarrow$][Por contradicción]

Supongamos que $M_P = 0$, para todo P ideal máximo de R y que $M \neq 0$. Sea $m \in M \setminus \{0\}$ y consideremos $\operatorname{Ann}(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$. Notemos que, como $m \neq 0$, entonces $1 \notin \operatorname{Ann}(m)$, de modo que es un ideal propio. Así, por el Lema 2.9, existe P ideal máximo de R tal que $\operatorname{Ann}(m) \subseteq P$. Ahora, por hipótesis, $M_P = 0$, en particular $\left[\frac{m}{1}\right] = \left[\frac{0}{1}\right]$, en consecuencia, existe $u \in R \setminus P$ tal que, $0 = u\,(1 \cdot m - 1 \cdot 0) = um$, de donde $u \in \operatorname{Ann}(m)$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 4.6.

*Sea R un anillo. Diremos que R es un **V-anillo izquierdo** (derecho) si todo R-módulo izquierdo (derecho) simple, es inyectivo.*

Teorema 4.7. *[Teorema de Kaplansky]*

Sea R un anillo conmutativo. R es V-anillo si y sólo si, es Von Neumann regular.

Demostración

Ver [7, Teorema 2.1.9]. ∎

Teorema 4.8. *[8, Teorema 2.13]*

Sea R un anillo conmutativo, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *R es Von Neumann Regular.*
2. *Todo R-Módulo inescindible, es simple.*

Demostración

[1 ⇒ 2]

Sea $M \neq 0$ un R-Módulo inescindible. Como $M \neq 0$, por el teorema anterior, existe un ideal máximo P, tal que la localización $M_P \neq 0$. Sea $a \in P$ y consideremos $Ra \leq P$. Como R es VNR, por la Proposición 2.14, existe $e_a \in R$ elemento idempotente tal que $Re_a = Ra \leq P$. Notemos que, $1 - e_a \notin P$, pues de lo contrario $1 = e_a + (1 - e_a) \in P$, lo cual es absurdo.

Veamos que $M(1 - e_a) \neq 0$. En efecto: Supongamos que $(1 - e_a)$ anula a M y sea $m \in M \setminus \{0\}$. Como $M_P \neq 0$ y $1 - e_a \notin P$, podemos considerar la clase $\left[\frac{m}{1-e_a}\right]$, la cuál es distinta de $0 = \left[\frac{0}{1}\right]$, pues $m \neq 0$. Luego, notemos que: $\left[\frac{m}{1-e_a}\right](1 - e_a) = \left[\frac{m(1-e_a)}{1-e_a}\right] = \left[\frac{0}{1-e_a}\right] = \bar{0}$. Así, $M_P = 0$, lo cual es una contradicción.

Ahora, veamos que $Me_a \oplus M(1 - e_a) = M$. En efecto: Sea $m \in M$, entonces $m = me_a + m(1 - e_a)$, de modo que $M = Me_a + M(1 - e_a)$.

Luego, sea $m \in Me_a \cap M(1 - e_a)$, entonces existen $m_1, m_2 \in M$ tales que

$m = m_1(1-e_a)$ y $m = m_2 e_a$, luego:

$$\begin{aligned} & m_1(1-e_a) = m_2 e_a \\ \Rightarrow\ & m_1 = m_2 e_a + m_1 e_a = (m_2+m_1)\, e_a \\ \Rightarrow\ & m = [(m_2+m_1)\, e_a](1-e_a) \\ \Rightarrow\ & m = (m_2+m_1)(e_a(1-e_a)) = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $Me_a \cap M(1-e_a) = 0$. Por lo tanto, $Me_a \oplus M(1-e_a) = M$. De lo anterior, tenemos que $Me_a \oplus M(1-e_a) = M$ y que $M(1-e_a) \neq 0$, pero M es inescindible, de donde $Me_a = 0$.

Finalmente, $P = \sum_{a\in R} Ra = \sum_{a\in R} Re_a$, de modo que $PM = 0$. Así, por el Lema 3.30 M es un R/P-Módulo y, como P es máximo, R/P es un campo, de donde M es semisimple, pero por hipótesis, M es inescindible, por lo tanto, M es simple.

[2 $\Rightarrow$ 1]

Sea M un R-módulo simple y consideremos la cápsula inyectiva de M, $(\eta, E(M))$. Como M es simple, por el Lema 3.72, $E(M)$ es inescindible, así, por hipótesis, $E(M)$ es simple. Luego, recordemos que η es un monomorfismo esencial, es decir, $\eta[M] \leq_{\text{es}} E(M)$, pero $E(M)$ es simple, de donde $\eta[M] = E(M)$. En consecuencia, η es un isomorfismo, de modo que M es inyectivo. En conclusión, R es V-anillo. Finalmente, por el Teorema de Kaplansky, R es Von Neumann Regular. ■

4.2 Anillos Triangulares

Lema 4.9.

Sean R y S anillos, ${}_RM_S$ un bimódulo y consideremos el siguiente conjunto de matrices:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M, s \in S \right\}.$$

Entonces, $(T, +, \cdot)$, donde "$+$" y "$\cdot$" son la suma y multiplicación usuales de matrices, es un anillo.

Demostración

Cálculos de rutina conducen a la verificación de todas las propiedades, salvo la asociatividad del producto. Sean $\left(\begin{smallmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} r_2 & m_2 \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{smallmatrix}\right) \in T$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_1r_2 & r_1m_1 + m_1s_2 \\ 0 & s_1s_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (r_1r_2)\, r_3 & (r_1r_2)\, m_3 + (r_1m_2 + m_1s_2)\, s_3 \\ 0 & (s_1s_2)\, s_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{*}{=} \begin{pmatrix} r_1\,(r_2r_3) & r_1\,(r_2m_3) + r_1\,(m_2s_3) + m_1s_2s_3 \\ 0 & s_1\,(s_2s_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2r_3 & r_2m_3 + m_2s_3 \\ 0 & s_2s_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_3 & m_3 \\ 0 & s_3 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Aquí, la igualdad marcada con "$*$", está dada por la definición de bímodulo.

■

Definición 4.10.

Sean R y S anillos, ${}_RM_S$ un bimódulo, definimos el ***anillo triangular****, o anillo de matrices triangulares, como*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M, s \in S \right\}.$$

Observación.

Es sencillo verificar que, en la notación de la definición anterior, los conjuntos $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ son subgrupos aditivos de $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$. Además, es fácil convencerse de que $r \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $s \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$ y $m \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ son isomorfismos de grupos aditivos. Así, al considerar al anillo triangular como un grupo, este contiene copias isomorfas de R, M y S. Más aún, es fácil comprobar que,
$\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \bigoplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \bigoplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, de donde $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \cong R \oplus M \oplus S$.

Notación.

En virtud de la observación anterior, adaptaremos la siguiente notación:
$R = \left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$.

En términos de la descomposición que aparece en la observación anterior, es posible describir la multiplicación en $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ con la siguiente tabla.

·	R	M	S
R	R	0	M
M	0	0	M
S	0	0	S

La tabla se lee de la siguiente manera: La multiplicación por izquierda se determina leyendo de la tabla de “arriba hacia abajo”, mientras que la multiplicación por derecha se determina leyendo de “izquierda a derecha”.

Proposición 4.11.

Sea T un anillo triangular, entonces:

- *R es un ideal izquierdo de T, M es un ideal bilateral de T y S es un ideal derecho de T.*
- *$R \oplus M$ es un ideal bilateral de T tal que $\frac{T}{R\oplus M} \cong S$ y $M \oplus S$ es un ideal bilateral de T tal que $\frac{T}{M\oplus S} \cong R$.*

Demostración

Observemos que, por la tabla anterior, es inmediato que R es un ideal izquierdo, S un ideal derecho y que M, $R \oplus M$ y $M \oplus S$ son ideales bilaterales. Ahora, veamos que $\frac{T}{R\oplus M} \cong S$.

Primero, notemos que $R \oplus M = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, luego, consideremos la funciíon $\gamma : \frac{T}{R\oplus M} \longrightarrow S$, definida por $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$. Observemos que, si $\left(\begin{smallmatrix} r_1 & m_1 \\ 0 & s_1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r_2 & m_2 \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} r_1 - r_2 & m_1 - m_2 \\ 0 & s_1 - s_2 \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, de donde, $s_1 = s_2$. Así, γ está bien definida. Además. por construcción de γ, es claro que es aditiva, productiva y suprayectiva. Finalmente:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\gamma &= \{\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid \gamma(\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = 0\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid s = 0\} \\ &= \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

El cual es el cero del dominio. Por lo tanto, γ es un isomorfismo. Simétricamente, se comprueba que $\beta : \frac{T}{M\oplus S} \longrightarrow R$, definida por
$\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, es un isomorfismo de anillos. ■

Observación.

Usando la definición y haciendo cálculos de rutina, es muy sencillo comprobar que, $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es un R-módulo izquierdo y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ es un S-módulo derecho.

Una de las mayores virtudes de los anillos triangulares es el *buen comportamiento* de sus ideales, como lo establece la siguiente proposición.

Proposición 4.12.

Sea T un anillo triangular.

1. *I es un ideal izquierdo de T si y sólo si, $I = I_1 \oplus I_2$, donde I_2 es un ideal izquierdo de S e I_1 es un submódulo de ${}_R(R \oplus M)$ tal que $MI_2 \subseteq I_1$.*
2. *J es un ideal derecho de T si y sólo si, $J = J_1 \oplus J_2$, donde J_1 es un ideal derecho de R y J_2 es un submódulo de $(M \oplus S)_S$ tal que $J_1 M \subseteq J_2$.*
3. *K es un ideal bilateral de T si y sólo si, $K = K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$, donde K_1 es un ideal bilateral de R, K_2 es un ideal bilateral de S y K_0 es un submódulo de ${}_R M_S$, tales que $K_1 M + M K_2 \subseteq K_0$.*

Demostración

1.[$\Rightarrow$]

Sean I un ideal izquierdo de T y $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \in I$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$, también son elementos de I. Sean $I_1 = I \cap (R \oplus M)$ e $I_2 = I \cap S$, entonces $I = I_1 \oplus I_2$. Además, es muy sencillo comprobar que I_1 es un submódulo de ${}_R(R \oplus M)$ e I_2 es un ideal izquierdo de S. Luego, tenemos que, $MI_2 = M(I \cap S) \overset{*}{\subseteq} I \cap M \subseteq I \cap (R \oplus M) = I_1$, es decir, $MI_2 \subseteq I_1$. Aquí, la contención marcada con "$*$", está dada por lo siguiente: Como I es un ideal izquierdo de T, $MI \subseteq I$. Por otro lado, $M(I \cap S) \subseteq MS \subseteq M$, además, $M(I \cap S) \subseteq MI \subseteq I$, de donde $M(I \cap S) \subseteq I \cap M$.

[$\Leftarrow$]

Sean I_1 un submódulo de ${}_R(R \oplus M)$ e I_2 un ideal izquierdo de R y consideremos $I_1 \oplus I_2$. Sean $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \in T$ y $\left(\begin{smallmatrix} r' & m' \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s'' \end{smallmatrix}\right) \in I_1 + I_2$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)\left[\left(\begin{smallmatrix} r' & m' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s'' \end{smallmatrix}\right)\right] = \left(\begin{smallmatrix} rr' & rm' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & ms'' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = *$. Por otro lado, como $\left(\begin{smallmatrix} r' & m' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I_1$ e I_1 es un submódulo de ${}_R(R \oplus M)$, tenemos que $r\left(\begin{smallmatrix} r=r' & m' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} rr' & rm' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I_1$, además, por hipótesis, $MI_2 \subseteq I_1$, de donde $* \in I_1$. Por lo tanto $T(I_1 \oplus I_2) \subseteq I_1 \oplus I_2$, es decir, $I_1 \oplus I_2$ es un ideal izquierdo de T.

2.

Esta demostración es simétrica a 1.

3.[$\Rightarrow$]

Sea K un ideal bilateral de T. Si $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \in K$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) - [\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)]$, también son elementos de K, Así, poniendo $K_1 = I \cap R$, $K_0 = K \cap M$ y $K_2 = K \cap S$, tenemos que $K = K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$. De nuevo, la verificación de que K_1 es un ideal bilateral de R, K_2 es un ideal bilateral de S y K_0 es un submódulo de ${}_RM_S$, son simples cálculos de rutina. Finalmente, si $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K_1M$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & m_2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right) \in MK_2$, entonces, como K_1 es ideal de R y K_2 es un ideal de S, tenemos que $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & m_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & m_2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & rm_1+m_2s \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I_0$. Por lo tanto, $I_1M + MI_2 \subseteq K_0$.

[$\Leftarrow$]

Sean K_1 un ideal bilateral R, K_2 un ideal bilateral de S y K_0 un submódulo de ${}_RM_S$. Sean $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \in T$ y $* = \left(\begin{smallmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & m_0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & s_2 \end{smallmatrix}\right) \in K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)* = \left(\begin{smallmatrix} rr_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & rm_0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 & ms_2 \\ 0 & ss_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} r & r_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & rm_0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K_0$ y así, $\left(\begin{smallmatrix} r & m \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)* \in K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$. Por lo tanto, $T(K_1 \oplus K_0 \oplus K_2) \subseteq K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$. Simétricamete, se demuestra que $K_1 \oplus K_0 \oplus K_2$ es un ideal derecho. $\blacksquare$

4.3 Anillos de Valuación Discreta

Definición 4.13.

Si R es un anillo conmutativo con exactamente un ideal máximo $\mathcal{M}$, diremos que R es un ***anillo local****.*

Lema 4.14.

Sean R un anillo conmutativo y $\mathcal{M} \neq R$ un ideal tal que todo elemento de $R \setminus \mathcal{M}$ es unidad de R, entonces R es local y $\mathcal{M}$ es el único ideal máximo.

Demostración

Sea I un ideal propio de R. Como I es un ideal propio, I no contiene unidades, en consecuencia, $(R \setminus \mathcal{M}) \cap I = \emptyset$, es decir $I \subseteq \mathcal{M}$. Esto es, $\mathcal{M}$ contiene a todo ideal propio de R, de modo que $\mathcal{M}$ es el mayor de los ideales propios de R. ■

Definición 4.15.

Sean K un campo y R un subanillo de K. Diremos que R es un ***anillo de valuación*** *de K si para cada $a \in K$, $a \in R$ ó $a^{-1} \in R$.*

Ejemplo

Si p es un número primo el anillo $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$, es un anillo de valuación de $\mathbb{Q}$.

Definición 4.16.

Sea K un campo. Una ***valuación discreta*** *en K es una función suprayectiva $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, donde, para toda $r \in \mathbb{Z}$, $r < \infty$, de tal manera que, para cada $x, y \in K$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $v(x) = \infty$ *si y sólo si,* $x = 0$
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$
3. $v(x + y) \geq \text{menor}\{v(x), v(y)\}$

Proposición 4.17.

Sean K un campo y v una valuación discreta en K. El conjunto $V = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ es un anillo de valuación de K.

Demostración

Primero, notemos los siguientes hechos:

1. Por definición, $v(0) = \infty > 0$, de donde $0 \in V$.
2. Si $a \in K \setminus \{0\}$, entonces $v(a) = v(1 \cdot a) = v(1) + v(a)$, en consecuencia, $v(1) = 0$, de donde $1 \in V$.
3. $0 = v(1) = v\left((-1) \cdot (-1)\right) = v(-1) + v(-1)$, entonces $v(-1) = 0$, de donde $-1 \in V$.
4. Si $a \in K \setminus 0$, entonces $v(-a) = v(-1) + v(a) = v(a)$, en consecuencia, $v(-a) = v(a)$.
5. Si $a \in K \setminus \{0\}$, entonces $0 = v(1) = v\left(a \cdot a^{-1}\right) = v(a) + v(a^{-1})$, en consecuencia $v(a^{-1}) = -v(a)$.

Ahora, para ver que V es un anillo con las operaciones heredadas de K, basta demostrar la cerradura de la suma y el producto, pues el resto de las propiedades, o son heredadas por K, o se encuentran en las primeras cuatro propiedades de la lista anterior.

- Sean $a, b \in V$, entonces $v(a), v(b) \geq 0$. Luego, $v(a+b) \geq \text{menor}\{v(a), v(b)\} \geq 0$, es decir, $a + b \in V$.
- Sean $a, b \in V$, entonces $v(a), v(b) \geq 0$. Luego $v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \geq 0$, es decir $a \cdot b \in V$.

Finalmente, veamos que V es un anillo de valuación de K. Sea $a \in K \setminus \{0\}$, si $a \notin V$, entonces $v(a) < 0$, $v(a^{-1}) = -v(a) > 0$. Es decir, $a^{-1} \in V$. Por lo tanto, V es un anillo de valuación de K. ■

Definición 4.18.

*Sea K un campo y v una valuación discreta en K. Al anillo de valuación $V = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ le llamaremos **anillo de valuación discreta** (AVD) de K, respecto a v.*

Lema 4.19.

Sean K un campo, v una valuación discreta en K y V el AVD de K respecto a v, entonces, $a \in V$ es unidad de V, si y sólo si $v(a) = 0$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Si $a, a^{-1} \in V$, entonces $v(a), v(a^{-1}) \geq 0$. Luego, como $v(a^{-1}) = -v(a)$, se sigue que $v(a) = 0$.

[$\Leftarrow$]

Supongamos que $v(a) = 0$, entonces $v(a^{-1}) = 0$, de donde $a^{-1} \in V$. ■

Proposición 4.20.

Sean K un campo y V un AVD de K, entonces V es un anillo local con ideal máximo $\mathcal{M} = \{a \in V \mid v(a) \geq 1\}$.

Demostración

La demostración de que $\mathcal{M}$ es un ideal de V es clara. Así, basta demostrar que $\mathcal{M}$ es máximo y V local. Por el Lema 4.19, tenemos que $V^* = \{a \in K \mid v(a) = 0\} = V \setminus \mathcal{M}$, de donde, todo elemento de $V \setminus \mathcal{M}$ es unidad de V. Finalmente, por el Lema 4.14, V es un anillo local con ideal máximo $\mathcal{M}$. ■

Observación.

Si K es un campo y V es un AVD de K respecto a una valuación discreta v, entonces, por suprayectividad de v, existe $t \in V$ tal que $v(t) = 1$.

Definición 4.21.

Sea V un AVD y $t \in V$. Diremos que t es un ***elemento uniformador*** *si, $v(t) = 1$.*

Proposición 4.22.

Sean V un AVD y $t \in V$ un elemento uniformador, entonces, t genera al ideal máximo $\mathcal{M}$.

Demostración

[$(t) \subseteq \mathcal{M}$]

Como $v(t) = 1$, entonces (t) es un ideal propio de V. Luego, como $\mathcal{M}$ es el único ideal máximo, $(t) \subseteq (M)$.

[$\mathcal{M} \subseteq (t)$]

Sea $a \in \mathcal{M}$, entonces $v(a) \geq 1$. Así, $v(at^{-1}) = v(a) - v(t) \geq 1 - 1 = 0$, de donde $at^{-1} \in V$. Luego, $a = (at^{-1})\,t$, es decir, $a \in (t)$. Por lo tanto $\mathcal{M} \subseteq (t)$. ■

Corolario 4.23.

Si V es un AVD, entonces, el ideal máximo $\mathcal{M}$, es un ideal principal de V.

Proposición 4.24.

Sean V un AVD con ideal máximo $\mathcal{M}$ y t un elemento uniformador de V. Si $t' \in V$ es tal que $\mathcal{M} = (t')$, entonces t' es un elemento uniformador de V.

Demostración

Supongamos que $\mathcal{M} = (t')$. Como t es uniformador, entonces $t \in \mathcal{M}$, de modo que existe $a \in V$ tal que $t = at'$. Luego, $1 = v(t) = v\,(at') = v(a) + v(t')$. Si $v(t') > 1$, entonces $v(a) = 1 - v(t') < 0$, lo cual es absurdo, pues $a \in V$. Por lo tanto $v(t') = 1$. ■

Corolario 4.25.

Sean V un AVD y $t \in V$, entonces t es un elemento uniformador si y sólo si, $\mathcal{M} = (t)$.

Proposición 4.26.

Sean K un campo, V un AVD de K y t un elemento uniformador de V, entonces todo elemento $a \in K \setminus \{0\}$ admite una representación única $a = ut^n$, donde u es unidad de V y $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Primero, recordemos que v es morfismo de grupos abelianos, en consecuencia, si $b \in K \setminus \{0\}$, entonces $v(b^n) = nv(b)$. Ahora, sean $a \in K \setminus \{0\}$ y $n = v(a)$, entonces $v(at^{-n}) = v(a) - nv(t) = v(a) - n = v(a) - v(a) = 0$, de donde $at^{-n} \in V^*$. Así, tomando $u = at^{-n}$, tenemos que $a = ut^n$.

Por otro lado, para demostrar la unicidad de dicha representación, supongamos que $a = u_1 t^n = u_2 t^m$, entonces $v(u_1 t^n) = v(u_2 t^m)$, de donde $v(u_1) + nv(t) = v(u_2) + mv(t)$, en consecuencia, $n = m$. Luego $u_1 t^n = u_2 t^n$, así $t^n = u_1^{-1} u_2 t^n$, es decir $u_1^{-1} u_2 = 1$. Por lo tanto, $n = m$ y $u_1 = u_2$. ■

Lema 4.27.

Sean V un AVD y $a, b \in V$, entonces $v(a) \leq v(b)$ si y sólo si, $b \in (a)$.

Demostración

[$\Rightarrow$]

Sean $a, b \in V$ tales que $v(a) \leq v(b)$, entonces $v(b) - v(a) \geq 0$. Equivalentemente, $v(ba^{-1}) \geq 0$, esto es, $ba^{-1} \in V$. Por lo tanto, $b = (ba^{-1})a \in (a)$.

[$\Leftarrow$]

Si $b \in (a)$, entonces, existe $c \in V$ tal que $b = ca$, luego $v(b) = v(c) + v(a) \geq v(a)$. ■

Proposición 4.28.

Sean V un AVD con elemento uniformador t e ideal máximo $\mathcal{M} = (t)$, entonces, todo ideal no cero de V es de la forma $\mathcal{M}^n = (t^n)$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración

Sea $I \neq 0$ un ideal de V, entonces la imagen de $I \setminus \{0\}$ bajo la valuación v, $v[I \setminus \{0\}] = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid k = v(a), a \in I \setminus \{0\}\}$, es un subconjunto no vació de $\mathbb{N} \cup \{0\}$, de modo que admite un elemento menor, digamos n. Sea $a_n \in I \setminus \{0\}$ tal que $v(a_n) = n$. Afirmamos que $I = \mathcal{M}^n$. En efecto:

[$\mathcal{M}^n \subseteq I$]

Por la Proposición 4.26, existe $u \in V^*$, tal que $a_n = ut^n$, entonces $t^n = u^{-1}a_n$, de modo que $t^n \in I$. Por lo tanto, $\mathcal{M}^n = (t^n) \subseteq I$.

[$I \subseteq \mathcal{M}^n$]

Sea $b \in I$, por la elección de a_n, se tiene que $n = v(t^n) = v(a_n) \leq v(b)$, así, por el Lema 4.27, $b \in (t^n)$. Por lo tanto, $I \subseteq \mathcal{M}^n$ ■

Proposición 4.29.

Sean K un campo y V un AVD de K.

1. *V es un dominio entero.*
2. *K es el campo de cocientes de V.*

Demostración

1. Sean $a, b \in V$ tales que $ab = 0$, entonces $\infty = v(ab) = v(a) + v(b)$. En consecuencia, $v(a) = \infty$ ó $v(b) = \infty$. Por lo tanto, $a = 0$ ó $b = 0$.
2. Primero, notemos que, en virtud de que $V \subseteq K$, basta demostrar que, para todo elemento $a \in K \setminus \{0\}$, existe $b \in V \setminus \{0\}$ tal que $ab \in V$. Pues

de ser así, poniendo $r = ab$, tenemos que $\frac{r}{b} = rb^{-1} = a \in K$. Es decir, todo elemento de $K \setminus \{0\}$, puede ser expresado como el cociente de elementos de V. Así, sea $a \in K \setminus \{0\}$. Como V es de valuación, entonces $a \in V$ ó $a^{-1} \in V$. Si $a \in V$, entonces $aa \in V$. Si $aa^{-1} = 1 \in V$.

■

Proposición 4.30.

Sean K un campo y V un AVD de K, entonces, los submódulos de ${}_V K_V$ (es decir, los V-submódulos de K) están completamente ordenados por la contención de conjuntos.

Demostración

Sean N, M V-sumbmódulos de K. Supongamos que $N \not\subseteq M$, entonces $N \setminus M \neq \emptyset$. Notemos que $N \setminus M \neq \{0\}$, pues de lo contrario, $0 \notin M$, lo cual es absurdo. Así, sean $a \in (N \setminus M) \setminus \{0\}$ y $b \in M$. Veamos que $b \in N$. Si $b = 0$, trivialmente $b \in N$. Si $b \neq 0$, consideremos ba^{-1}. Como V es de valuación, $ba^{-1} \in V$ ó $ab^{-1} \in V$. Si $ab^{-1} \in V$, entonces $a = (ab^{-1})b \in M$, lo cual es una contradicción, pues $a \in N \setminus M$. En consecuencia, $ba^{-1} \in V$, de donde $b = (ba^{-1})a \in N$ Por lo tanto, $M \subseteq N$. ■

Lema 4.31.

Sean K un campo, V un AVD de K y t un elemento uniformador de V, entonces $K = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} Vt^n$.

Demostración

Sea $K' = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} Vt^n$. Es claro que $K' \subseteq K$, así que demostraremos la otra contención.

Sea $x \in K \setminus \{0\}$. Como V es de valuación, $x \in V$ ó $x^{-1} \in V$. Si $x \in V$, entonces $x \in Vt^0 \subseteq K'$. Si $x^{-1} \in V$, por la Proposición 4.26, existen $u \in V^*$ y $j \geq 0$ tales que $x^{-1} = ut^j$, entonces $x = u^{-1}t^{-j}$. Por lo tanto $x \in Vt^j \subseteq K'$. ■

Teorema 4.32.

Sean K un campo, V un AVD de K y t un elemento uniformador de V. Si M es un V-submódulo de K, entonces $M = 0$ ó $M = K$ ó $M = Vt^n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Sea M un V-submódulo propio y no cero de K. Afirmamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $M \subseteq Vt^m$. En efecto: Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que para toda $n \in \mathbb{Z}$, $Vt^n \subseteq M$. Así, por el lema anterior, $K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Vt^n \subseteq M$, de donde $K = M$, lo cual contradice la hipótesis de que M es propio. Luego, sea $m \in \mathbb{Z}$ con dicha propiedad. Tenemos los siguientes dos casos:

1. Si $m \geq 0$, M es un ideal de V, así, por la Proposición 4.28, existe $j \geq m$ tal que $M = Vt^j$.
2. Si $m < 0$, entonces $M = Mt^{-m} \subseteq (Vt^m)\,t^{-m} = V$, de donde M es un ideal de V. Por un razonamiento idéntico al de 1., se tiene el resultado.

■

Corolario 4.33.

Si t es un elemento uniformador de V, entonces $Vt \supsetneq Vt^2 \supsetneq Vt^3 \supsetneq \cdots$ es una cadena infinita y estrictamente descendente de V-submódulos de K. De donde, K no es artiniano como V-módulo.

Demostración

Sea t un elemento uniformador de V.

- Si $x \in Vt^{i+1}$, entonces existe $r \in V$ tal que $x = rt^{i+1}$, en consecuencia, $x = (rt)\,t^i \in Vt^i$.
- Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $Vtj = Vt^{j+1}$. Consideremos $1 \cdot t^j \in Vt^j$. Como $Vtj = Vt^{j+1}$, existe $r \in V$ tal que $t^j = rt^{j+1}$. En consecuencia, $v\left(t^j\right) = v\left(rt^{j+1}\right)$, es decir $j = v(r) + (j+1)$, de donde $v(r) = -1$, es decir, $r \notin V$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto $Vt \supsetneq Vt^2 \supsetneq Vt^3 \supsetneq \cdots$ es una cadena infinita y estrictamente descendente de V-submódulos de K. ■

Corolario 4.34.

Todos los V-submódulos propios y no cero de K, son isomorfos.

Demostración

La función $\alpha : Vt^n \longrightarrow Vt^m$, definida por $at^n \longmapsto at^m$ es un isomorfismo de V-módulos. ■

Lema 4.35.

Sean D un dominio y $K \neq D$ el campo de cocientes de D, entonces, K no es neteriano como D-módulo.

Demostración

Como $D \neq F$, D no es un campo, pues F es el menor de los campos en el cual es posible encajar a D. Así, existe $d \in D$ tal que $d \notin D^*$, de donde $\frac{1}{d} \in F \setminus D$. Luego, consideremos la familia de D-módulos $D\frac{1}{d^n}$, con $n \in \mathbb{N}$.

- Veamos que para toda $i \in \mathbb{N}$, $D\frac{1}{d^i} \subseteq D\frac{1}{d^{i+1}}$: Si $x \in D\frac{1}{d^i}$, existe $r \in D$ tal que $x = r\frac{1}{d^i} = \frac{r}{d^i}$, entonces $xd^i = r$, así $xd^{i+1} = rd$, en consecuencia, $x = \frac{rd}{d^{i+1}} \in D\frac{1}{d^{i+1}}$.
- Veamos que las contenciones son propias: Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $D\frac{1}{d^j} = D\frac{1}{d^{j+1}}$. Entonces, existe $c \in D$ tal que $c\frac{1}{d^j} = \frac{1}{d^{j+1}}$, de donde $cd^{j+1} = d^i$, pero D es dominio, en consecuencia $cd = 1$, es decir, $c \in D^*$, lo cual es absurdo.

Así, $D\frac{1}{d} \subsetneq D\frac{1}{d^2} \subsetneq D\frac{1}{d^3} \subsetneq \cdots$ es una cadena infinita y estrictamente ascendente de submódulos de K. Por lo tanto, ${}_DK$ no es neteriano. ■

Corolario 4.36.

Sean K un campo y V un AVD de K, entonces, K no es neteriano como V-módulo.

Demostración

Por la Proposición 4.29, K es el campo de cocientes de V. Por el lema anterior, K no es neteriano como V-módulo. ■

Observación.

Sean K un campo y V un AVD de K. De todos los resultados obtenidos en esta sección, es importante resaltar los siguientes tres hechos:

1. *K no es artiniano como V-módulo.*

2. K no es neteriano como V-módulo.

3. Todos los V-submódulos propios y no cero de K, son isomorfos entre sí.

5 Módulos isoartinianos, isoneterianos e isosimples

5.1 Definiciones y Primeros Resultados

Una pregunta que debería resultar bastante natural en Álgebra es ¿qué pasa si sustituimos esa igualdad por un isomorfismo?. En esta tesis, siguiendo a Zahra Nazemian y Alberto Facchini en [1], estudiamos módulos con condiciones de cadena hasta isomorfismo, es decir, en los conceptos de módulos neteriano, artiniano y simple, sustituimos la igualdad de las condiciones de cadena por un isomorfismo.

Definición 5.1.

Sea M un R-Módulo izquierdo.

1. *Diremos que una cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ de submódulos de M se* ***estaciona hasta Isomorfismo*** *si y sólo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \geq n$, se tiene que $A_i \cong A_n$.*
2. *Diremos que una cadena descendente $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \cdots$ de submódulos de M se* ***estaciona hasta Isomorfismo*** *si y sólo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \geq n$, se tiene que $A_i \cong A_n$.*

Definición 5.2.

Sea M un R-Módulo izquierdo.

1. *Diremos que M es* ***Isoneteriano*** *si y sólo si, toda cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ de submódulos de M, se estaciona hasta isomorfismo.*
2. *Diremos que M es* ***Isoartiniano*** *si y sólo si, toda cadena descendente $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots$ de submódulos de M, se estaciona hasta isomorfismo.*

3. *Diremos que M es* ***Isosimple*** *si y sólo si, $M \neq 0$ y M es isomorfo a todos sus submódulos no cero.*

Observación.

- *Simétricamente se definen los conceptos de R-módulos isoneterianos, isoartinianos e isosimples derechos.*
- *Es muy sencillo verificar que si M es un módulo neteriano, artiniano o simple, entonces M es un módulo isoneteriano, isoartiniano o isosimple, respectivamente.*
- *Análogamente al caso clásico, si M es isosimple, entonces M es isoartiniano e isoneteriano.*
- *Es claro que las propiedades de ser isoneteriano y ser isoartiniano, son heredadas por submódulos.*

A continuación, presentaremos un ejemplo sencillo y continuaremos con el desarrollo de la teoría, pues los siguientes resultados nos proveerán de ejemplos más elaborados e interesantes.

Ejemplo 5.3.
Pese a su sencillez, el módulo $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ presenta una serie de propiedades interesantes con respecto a las definiciones anteriores.

- *Si $n \neq 0$ es un número entero, entonces la función $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow n\mathbb{Z}$, definida por $z \longmapsto nz$, es un isomorfismo de $\mathbb{Z}$-Módulos, de modo que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ es isomorfo a todos sus subódulos no cero, por lo tanto, es* isosimple.
- *Como $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ es neteriano (isosimple), entonces es* isoneteriano.
- *Como $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ es isosimple, entonces es isoartiniano. Si embargo, recordemos que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ no es artiniano, de modo que es* isoartiniano y no artiniano.

Definición 5.4.

Sean M un R-Módulo izquierdo y Γ una familia no vacía de submódulos de M.

1. *Si existe $A_0 \in \Gamma$ con la propiedad [si $A \in \Gamma$ y $A_0 \leq A$, entonces $A \cong A_0$], diremos que A_0 es un elemento* ***isomáximo*** *de Γ y que Γ admite un elemento isomáximo.*
2. *Si existe $A_0 \in \Gamma$ con la propiedad [si $A \in \Gamma$ y $A \leq A_0$, entonces $A \cong A_0$], diremos que A_0 es un elemento* ***isomínimo*** *de Γ y que Γ admite un elemento isomínimo.*

Teorema 5.5.

Sea M un R-Módulo izquierdo.

1. *M es isoneteriano si y sólo si toda familia no vacía de submódulos de M, admite un elemento isomáximo.*
2. *M es isoartiniano si y sólo si toda familia no vacía de submódulos de M, admite un elemento isomínimo.*

Demostración

Probaremos la equivalencia 1, la equivalencia 2 se sigue dualmente.

[$\Rightarrow$] [Por contradicción]

Supongamos que M es isoneteriano y sea Γ una familia no vacía de submódulos de M que no admite elemento isomáximo. Primero observemos que, como $\Gamma \neq \emptyset$, por el Axioma de Elección, existe una función $f : \mathcal{P}(\Gamma) \setminus \{\emptyset\} \to \Gamma$ tal que, para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Gamma) \setminus \{\emptyset\}$, $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$. Luego, como Γ no admite isomáximo, entonces, para cada $A \in \Gamma$, el conjunto $\mathcal{A}_A = \{A' \in \Gamma \mid A < A' \text{ y } A \ncong A'\}$ es no vacío. Así, para cada $A \in \Gamma$, $f(\mathcal{A}_A) \in \mathcal{A}_A$, es decir, para cada $A \in \Gamma$, podemos elegir $A' \in \Gamma$ con la propiedad $\left[A < A' \text{ y } A \ncong A'\right]$. Finalmente, sea $A_0 \in \Gamma$ fijo, por lo anterior, podemos formar la cadena ascendente $A_0 < A_0' < \left(A_0'\right)' < \cdots$, la cual contiene una infinidad de miembros no isomorfos, pero esto contradice el hecho de que M es isoneteriano. Por lo tanto, toda familia no vacía de submódulos de M, admite un elemento isomáximo.

[$\Leftarrow$]

Supongamos que cualquier familia no vacía de submódulos de M admite un elemento isomáximo y sea $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de submódulos de M. Consideremos la familia $\Gamma = \{A_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$, por hipótesis, existe $A_k \in \Gamma$ tal que para todo $A_i \in \Gamma$ con $A_k \leq A_i$, se tiene que $A_i \cong A_k$. Equivalentemente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq k$, $A_i \cong A_k$. Por lo tanto, M es isoneteriano. ■

Proposición 5.6.

Sea M un R-Módulo izquierdo no cero.

1. *Si M es isoartiniano, entonces M contiene un submódulo isosimple.*
2. *Si M es isoneteriano y no es simple, entonces M contiene un submódulo propio y no cero N, tal que N es isomorfo a todos los submódulos propios de M que lo contienen.*

Demostración

[**1**]

Sea M un R-Módulo isoartiniano y consideremos la familia no vacía $\Gamma = \{A \leq M \mid A \neq 0\}$. Por el teorema anterior, Γ admite un elemento isomínimo, esto es, existe $N \leq M$ tal que $N \neq 0$ y para todo $0 \neq L \leq N$, $N \cong L$, es decir, $N \leq M$ es isosimple.

[**2**]

Sea M un R-Módulo isoneteriano y no simple y consideremos la familia no vacía $\Gamma = \{A \lneq M \mid A \neq 0\}$. Por el teorema anterior, Γ admite un elemento isomáximo, esto es, existe $N \lneq M$ tal que $N \neq 0$ y para todo $N \leq L \lneq M$, $N \cong L$, es decir, N es isomorfo a todo submódulo propio de M que lo contenga. ■

Proposición 5.7.

Sea M un R-Módulo izquierdo. Si M es isosimple, entonces M es cíclico, neteriano y uniforme.

Demostración

Sean M un R-Módulo isosimple y $m \in M \backslash \{0\}$, entonces Rm es un submódulo no cero de M, de donde $M \cong Rm$, de modo que M es cíclico.

Más aún, como para todo $A \leq M$ con $A \neq 0$, se tiene que $A \cong M$, entonces todo submódulo no cero de M también es cíclico. De lo anterior, se sigue que todo submódulo de M es finitamente generado, en consecuencia, por el Teorema 3.80, M es neteriano.

Luego, por la Proposición 3.98, como M es neteriano, todo submódulo no cero de M, contiene un submódulo uniforme. Finalmente, como M es isosimple y, por el Lema 3.99 , la propiedad de ser uniforme es invariante bajo isomorfismo, M es uniforme. ■

5.2 Condiciones Bajo las Cuales Equivalen Simple e Isosimple

Como observamos justo después de la definición de módulos isosimples, todo R-Módulo simple, es isosimple; de modo que, una pregunta natural es ¿bajo qué condiciones los conceptos son equivalentes?
A continuación, presentaremos un par de proposiciones que responden a dicha pregunta.

Proposición 5.8.
Si M un R-Módulo izquierdo. Si M es isosimple, entonces, M es simple si y sólo si, M es artiniano, si y sólo si, M contiene un submódulo simple.

Demostración
$[\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}]$
Si M es simple, es artiniano.
$[\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{1}]$
Supongamos que M es artiniano y consideremos la familia
$\Gamma = \{A \leq M \mid 0 \lneq A \leq M\}$. Observemos que $\Gamma \neq \emptyset$, pues $M \in \Gamma$. Luego, como M es artiniano, existe $A_0 \in \Gamma$ elemento $\subseteq$-mínimo. Además, como M es isosimple, existe $\alpha : A_0 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow M$ isomorfismo. Sea $0 \lneq B \leq M$, entonces $\alpha^{-1}[B] \in \Gamma$ y $\alpha^{-1}[B] \leq A_0$, pero A_0 es elemento $\subseteq$-mínimo de Γ, de modo que $\alpha^{-1}[B] = A_0$, o equivalentemente $M = B$. Por lo tanto, el único submódulo no cero de M, es M, es decir, M es simple.
$[\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{3}]$
Recordemos que la propiedad de ser simple es invariante bajo isomorfismo, de modo que M es simple si y sólo si contiene un submódulo simple. ■

Recordemos que un anillo es semiartiniano (izquierdo) si, todo R-módulo no cero ${}_RM$, tiene soclo no cero, es decir, $\mathrm{Soc}(M) = \sum\{A \leq M \mid A \text{ es simple}\} \neq 0$.

Proposición 5.9.

Sea R un anillo semiartiniano. Si M es un R-Módulo isosimple, entonces M es simple.

Demostración

Primero observemos que, como M es isosimple, $M \neq 0$. Luego, como M es semiartiniano, entonces $\text{Soc}\,(M) \neq 0$. De modo que el conjunto $\{A \leq M \mid A \text{ es simple}\} \neq \emptyset$, es decir, existe $A' \leq M$ simple. Finalmente, como M es isosimple, $M \cong A'$, por lo tanto, M es simple. ■

Teorema 5.10.

Sean R un anillo conmutativo Von Nuemann Regular y M un R-Módulo izquierdo. Si M es isosimple, entonces M es simple.

Demostración

Sea M un R-Módulo isosimple. Por la Proposición 5.7, M es uniforme, en consecuencia M es inescindible. Luego, como R es V.N.R. y M es inescindible, por el Teorema 4.8, M es simple. ■

Es importante comentar que aún no se cuenta con suficiente información sobre la cerradura de las clases de módulos isoartinianos, isoneterianos e isosimples bajo sumas directas. Sin embargo, como veremos a continuación, podemos responder la pregunta ¿qué tipo de módulo hay que sumarle a un módulo isoneteriano (isoartiniano) para que la suma directa sea isoneteriano (isoartiniano).

Teorema 5.11.

Sean N un R-Módulo isoneteriano (isoartiniano) y M un R-Módulo proyectivo e isosimple, entonces $N \oplus M$ es isoneteriano (isoartiniano).

Demostración

Presentaremos la demostración para el caso isoneteriano, pues el caso isoartiniano se sigue dualmente.

Sea $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de submódulos de $N \oplus M$. Para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$, consideremos la restricción (y correstricción)

$p_i = \pi_M|_{T_i}^{\operatorname{Im} p_i} : T_i \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \operatorname{Im} p_i$. Notemos que, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\operatorname{Im} p_i \leq M$, el cual es isosimple, de modo que $\operatorname{Im} p_i = 0$ ó $\operatorname{Im} p_i \cong M$. Si $\operatorname{Im} p_i = 0$, entonces es trivialmente proyectivo. Por otro lado, si $\operatorname{Im} p_i \cong M$, en virtud de que la propiedad de ser proyectivo se preserva bajo isomorfismo, $\operatorname{Im} p_i$ es proyectivo. En cualquier caso, p_i se escinde, es decir, existe $\varepsilon_i : \operatorname{Im} p_i \rightarrowtail T_i$ inversa derecha de p_i. Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} p_i \arrow[r, rightarrowtail, "\varepsilon_i"] \arrow[dr, rightarrowtail, twoheadrightarrow, "1_{\operatorname{Im} p_i}"'] & T_i \arrow[d, rightarrowtail, twoheadrightarrow, "p_i"] \\
& \operatorname{Im} p_i
\end{tikzcd}$$

Así, por el Corolario 3.44, como $1_{\operatorname{Im} p_i}$ es un isomorfismo, tenemos que $T_i = \operatorname{Ker} p_i \oplus \operatorname{Im} p_i$. Ahora, como $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots$ es una cadena ascendente de submódulos de $N \oplus M$, por construcción de p_i, tenemos que $\operatorname{Ker} p_1 \leq \operatorname{Ker} p_2 \leq \operatorname{Ker} p_3 \leq \cdots$ es una cadena ascendente de submódulos de N, el cual es isoneteriano, en consecuencia, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq j$, $\operatorname{Ker} p_i \cong \operatorname{Ker} p_j$. Luego, tenemos los siguientes dos casos.

[Caso 1]

Supongamos que para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\operatorname{Im} p_i = 0$, entonces para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\operatorname{Im} \varepsilon_i = 0$. En consecuencia, la cadena $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots$, se simplifica a la cadena $\operatorname{Ker} p_1 \leq \operatorname{Ker} p_2 \leq \operatorname{Ker} p_3 \leq \cdots$, la cual, por lo anterior, se estabiliza hasta isomorfismo.

[Caso 2]

Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Im} p_k \cong M$. Sea $\alpha : M \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \operatorname{Im} p_k$ un isomorfismo y consideremos la correstricción $\varepsilon_k|^{\operatorname{Im} \varepsilon_k} : \operatorname{Im} p_k \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \operatorname{Im} \varepsilon_k$, de modo que $M \cong \operatorname{Im} \varepsilon_k$ y en consecuencia $T_k = \operatorname{Ker} p_k \oplus \operatorname{Im} \varepsilon_k \cong \operatorname{Ker} p_k \oplus M$.

[Afirmación]

Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Im} p_k \cong M$, entonces, para toda $i \geq k$, $\operatorname{Im} p_i \cong M$.

En efecto. Supongamos que ocurre lo contrario, es decir, existe $i_0 \geq k$ tal que $\operatorname{Im} p_{i_0} \ncong M$. Como M es isosimple, entonces $\operatorname{Im} p_{i_0} = 0$, en consecuencia, la relación $T_k \leq T_{i_0}$ implica la relación $\operatorname{Ker} p_k \oplus \operatorname{Im} \varepsilon_k \leq \operatorname{Ker} p_{i_0}$. Aplicando p_{i_0} en la relación anterior, obtenemos que $\operatorname{Im} \varepsilon_k \leq 0$, así $M \cong \operatorname{Im} \varepsilon_k = 0$. De donde $M = 0$, lo cual es absurdo, pues M es isosimple.

Finalmente, si $k_0 = \operatorname{menor}\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} p_k \cong M\}$, entonces, para toda $i < k_0$, $\operatorname{Im} p_k = 0$. Finalmente, sea $n = \operatorname{mayor}\{j, k_0\}$, entonces, para toda $i \geq n$, tenemos que $T_i \cong \operatorname{Ker} p_i \oplus M$. Por lo tanto, $N \oplus M$ es isoneteriano. ■

5.3 Anillos Isoartinianos e Isoneterianos

Algunas de las propiedades y ejemplos más interesantes de los conceptos de isoartiniano e isoneteriano se encuentran al dotar a los anillos de dichos conceptos.

Definición 5.12.

Sea R un anillo.

1. *Diremos que R es* ***isoneteriano izquierdo (derecho)****, si ${}_RR$ es isoneteriano (si R_R es isoneteriano).*
2. *Diremos que R es* ***isoartiniano izquierdo (derecho)****, si ${}_RR$ es isoartiniano (si R_R es isoartiniano).*

Proposición 5.13.

Sea D un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *D es un DIPI.*
2. *${}_DD$ es isosimple.*
3. *D es isoartiniano izquierdo.*

Demostración

$[\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}]$

Sean D un DIPI y Da un ideal izquierdo. Consideremos la función $\psi : D \longrightarrow Da$ definida por $d \mapsto da$. Veamos que ψ es isomorfismo de D-Módulos.

1. Es claro que ψ está bien definida y es suprayectiva.
2. Sean $d, d_1, d_2 \in D$, entonces
   $\psi\left(d\left(\left(d_1 + d_2\right)\right) = \left(d\left(d_1 + d_2\right)\right)a = d\psi(d_1) + d\psi(d_2)\right.$.
   De modo que ψ es morfismo de D-Módulos.
3. $\operatorname{Ker}\psi = \{d \in D \mid \psi(d) = 0\} = \{d \in D \mid da = 0\} = *$
   Ahora, como D es un dominio, no contiene divisores del cero, así $* = 0$.
   De modo que ψ es monomorfismo.

Por lo tanto, ${}_D D$ es isosimple.

[2 $\Rightarrow$ 1]

Supongamos que ${}_D D$ es isosimple. Por la Proposición 3.98, todo submódulo de ${}_D D$ es cíclico, es decir, todo ideal izquierdo de D, es principal. Por lo tanto, D es un DIPI.

[2 $\Rightarrow$ 3]

Supongamos que ${}_D D$ es isosimple, entonces ${}_D D$ es isoartiniano, es decir D es isoartiniano izquierdo.

[3 $\Rightarrow$ 2]

Supongamos que D es isoartiniano izquierdo, entonces, por el Teorema 5.5, existe $L \leq D$ isosimple. Sea $a \in L \setminus \{0\}$ y consideremos $Da \leq L$. Como L es isosimple, existe $\alpha : Da \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow L$ isomorfismo. Por otro lado, consideremos el isomorfismo ψ definido en $[1 \Rightarrow 2]$, así $\alpha \circ \psi : D \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow L$ es un isomorfismo. Por lo tanto D es isosimple. ∎

El siguiente teorema será una herramienta de mucha utilidad en la generación de ejemplos más interesantes (en anillos) de las propiedades de ser isoartiniano e isoneteriano.

Teorema 5.14.

Sean R, S anillos y ${}_R M_S$ un bimódulo.

1. *El anillo $T = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, es isoneteriano izquierdo (respectivamente, isoartiniano izquierdo), si y sólo si, los módulos ${}_R(R \oplus M)$ y ${}_S S$, son isoneterianos (respectivamente, isoartinianos).*
2. *El anillo $T = \left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, es isoneteriano derecho (respectivamente, isoartiniano derecho), si y sólo si, los módulos $(M \oplus S)_S$ y R_R, son isoneterianos (respectivamente, isoartinianos).*

Demostración

Se hará la demostración para el caso isoneteriano izquierdo, pues el caso isoartiniano izquierdo se sigue dualmente. El caso isoneteriano derecho se obtiene simétricamente al caso isoneteriano izquierdo, haciendo las sustituciones adecuadas y usando 2. de la Proposición 4.12.

[⇒]

Supongamos que T es isoneteriano izquierdo. Sea $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de submódulos de ${}_SS$. Por 1. de la Proposición 4.12, tenemos que $0 + A_1 \leq 0 + A_2 \leq 0 + A_3 \leq \cdots$, es una cadena ascendente de ideales izquierdos de T, así, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para toda $i \geq n$, $0 + A_i \cong 0 + A_n$, es decir, para toda $i \geq n$, $A_i \cong A_n$. Por lo tanto, ${}_SS$ es isoneteriano. Simétricamente se demuestra que ${}_R(R \oplus M)$, es isoneteriano.

[⇐]

Supongamos que ${}_R(R \oplus M)$ y ${}_SS$ son isoneterianos. Sea $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de ideales izquierdos de T. Por 1. de la Proposición 4.12, para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$, $I_j = H_j \oplus K_j$, donde K_j es un ideal izquierdo de S y H_j es un submódulo de ${}_R(R \oplus M)$, tal que $K_jM \leq H_j$.

Ahora, sea $\pi_S : T \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow S$ la proyección canónica y notemos que, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\pi_S[I_j] = K_j$. Luego, como ${}_SS$ es isoneteriano, al considerar la cadena $K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \cdots$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq l$, $K_i \cong K_l$. Similarmente, sea $\pi_{R\oplus M} : T \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow R \oplus M$ la proyección canónica, y observemos que para cada $j = 1, 2, 3. \ldots$, $\pi_{R\oplus M}[I_j] = H_j$. En consecuencia, si consideramos la cadena $H_j \leq H_j \leq H_j \leq \cdots$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq m$, $H_i \cong H_m$. Finalmente, sea $n = \text{mayor}\{m, l\}$, entonces, para toda $i \geq n$, $K_i \cong K_n$ y $H_i \cong H_n$, en consecuencia, $H_i \oplus K_i \cong H_n \oplus K_n$. Por lo tanto, T es isoneteriano. ■

Ejemplo 5.15.

Recordemos que el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es artiniano derecho, de donde $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es isoartiniano derecho. Luego, como $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ es isosimple y proyectivo, por el Teorema 5.11, tenemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$ es isoartiniano derecho, así, por el teorema anterior, $T = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right)$ es isoartiniano derecho.

Ejemplo 5.16.

Sean K un campo y V un AVD de K. Por la observación al corolario 4.36, ${}_VK$ no es neteriano ni artiniano, pero todos los submódulos propios y no cero de ${}_VK$, son isomorfos entre sí, de modo que ${}_VK$ es isoartiniano e isoneteriano. Además, el anillo $T = \left(\begin{smallmatrix} V & K \\ 0 & V \end{smallmatrix}\right)$ es isoartiniano izquierdo.

5.4 Otros Resultados Importantes

Proposición 5.17.

Si M un R-módulo izquierdo, uniserial e isosimple, entonces existe un isomorfismo de orden entre $(\delta(M))^{op}$ y ω^{λ}, donde $\lambda = \mathrm{Kdim}(M)$.

Demostración

Sea M un R-módulo uniserial e isosimple. Como M es isosimple, por la Proposición 5.7, M es neteriano. Así, como M es uniserial y neteriano, $(\delta(M))^{op}$ es un conjunto bien ordenado, de donde, existe un isomorfismo de orden entre $(\delta(M))^{op}$ y algún ordinal α. Equivalentemente, α^{op} es isomorfo (como copo) a $\delta(M)$. Sea $\omega^{\lambda_1}n_1 + \cdots + \omega^{\lambda_t}n_t$ la Forma Normal de Cantor de α, por el Corolario 3.96 $\mathrm{Kdim}(M) = \lambda_1$. Por otro lado, como M tiene dimensión de Krull, por el Teorema 3.89, admite un submódulo crítico, pero es isosimple, de modo que M es en sí mismo, crítico. En particular, M es λ_1-crítico. De nuevo, por el Corolario 3.96, $\alpha = \omega^{\lambda_1}$. ■

Teorema 5.18.

Todo R-módulo isoartiniano M, contiene un submódulo esencial que es la suma directa de módulos isosimples.

Demostración

Sea Ω el conjunto de todas las familias de submódulos isosimples de M cuya suma es directa. Observemos que, como M es isoartiniano, por la Proposición 5.6, existe $S \leq M$ isosimple, de modo que $\{S\} \in \Omega \neq \varnothing$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Ω y consideremos $\bigcup \mathcal{C}$. Es claro que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$, más aún, si I es un conjunto de índices para $\bigcup \mathcal{C}$, tenemos que, para toda $j \in I$, $S_j \bigcap \sum\limits_{i \in I \setminus \{j\}} = 0$, pues cada elemento de $\mathcal{C}$ tiene dicha propiedad y están encadenados. Así, por el Lema de Zorn, existe $W = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ familia máxima. Veamos que $S = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \leq_{\mathrm{es}} M$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $0 \neq A \leq M$ tal que $S \cap A = 0$. Como M es isoartiniano, A también lo es, de modo que existe $A' \leq A$ isosimple. Como $A' \leq A$ y $A \cap S = 0$, tenemos que $A' \cap S = 0$. En consecuencia, $W \cup \{A'\}$ es una familia de submódulos isosimples de M cuya suma es directa y contiene propiamente a W, pero esto es una contradicción, pues W es una familia máxima con dicha propiedad. Por lo tanto $S \leq_{\text{es}} M$. ■

Proposición 5.19.

Sea M un R-módulo isoartiniano finitamente generado. Si $M \cong M \bigoplus N$ para algún R-módulo N, entonces N es neteriano.

Demostración

Supongamos que N no es neteriano, entonces, existe $N_1 \leq N$ que no es finitamente generado. Luego, como $M \cong M \oplus N$, existe $K_1 \leq M$ tal que $K_1 \cong M \bigoplus N_1$. Notemos que K_1 no es finitamente generado. Luego, como $K_1 \cong M \bigoplus N_1$, existe $K_2 \leq K_1$ tal que $K_2 \cong M$. Después, como $K_2 \cong M \cong M \bigoplus N$ existe $K_3 \leq M$ tal que $K_3 \cong M \bigoplus N_1$, de nuevo K_3 no es finitamente generado. Continuando de esta manera, obtenemos una cadena descendente $M \geq K_1 \geq K_2 \geq K_3 \geq \cdots$ de submódulos de M, donde:

$$K_j \cong \begin{cases} M, & \text{si } j \text{ es par} \\ M \bigoplus N_1, & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$

Como M es isoartiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq n$, $K_i \cong K_n$ y tenemos los siguientes dos casos.

- Si n es par, entonces $M \cong K_n \cong K_{n+1} \cong M \bigoplus N_1$, lo cual es una contradicción, pues M es finitamente generado.
- Si n es impar, similarmente tenemos que, $M \bigoplus N_1 \cong K_n \cong K_{n+1} \cong M$, lo cual es absurdo.

En consecuencia, todo submódulo de N es finitamente generado. Por lo tanto N es neteriano. ■

Un famoso teorema de Hopkins [2, Teorema 15.20] establece que un anillo artiniano derecho es neteriano derecho. De modo que conviene preguntarse si esta implicación se preserva con los conceptos de isoartiniano e isoneteriano.

Como veremos a continuación, la respuesta es negativa.

Teorema 5.20.

Todo R-módulo isoneteriano M, tiene dimensión uniforme finita.

Demostración[Por contradicción]

Sea M un R-módulo isoneteriano y supongamos que $\operatorname{Udim}(M) = \infty$, entonces, por el Lema 3.101, M contiene una suma directa infinita de submódulos no cero, digamos $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i \leq M$. Por el Axioma de Elección, para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos elegir $0 \neq a_i \in M_i$. Luego, como M es isoneteriano, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ra_i \leq M$, también es isoneteriano. Consideremos la cadena ascendente $Ra_1 \leq Ra_1 \oplus Ra_2 \leq \cdots$ de submódulos de $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ra_i$, entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Ra_1 \oplus \cdots \oplus Ra_n \cong Ra_1 \oplus \cdots \oplus Ra_n \oplus Ra_{n+1}$.

[Afirmación]

Existe $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que Ra_{j_1} no es neteriano. En efecto: Supongamos lo contrario, es decir, que para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, Ra_j es neteriano, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} Ra_i$ es neteriano. Por otro lado, es claro que cada Ra_j es proyectivo, así, por el Teorema 3.75 $\bigoplus_{i=1}^{n} Ra_i$ es proyectivo. En consecuencia, $\bigoplus_{i=1}^{n} Ra_i$ es hopfiano y proyectivo. Luego, por el Corolario 3.105, $\bigoplus_{i=1}^{n} Ra_i$ es Dedekind-finito, de donde $Ra_{n+1} = 0$, lo cual es absurdo, pues $a_{n+1} \neq 0$.

Sea $b_1 = a_{j_1}$ y observemos que $\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} Ra_i \leq M$ es isoneteriano, así, por un argumento idéntico al anterior, existe $j_2 \geq n+1$ tal que Ra_{j_2} no es neteriano. Sea $b_2 = a_{j_2}$. Continuando recursivamente con este proceso, conseguimos una sucesión $b_1, b_2, \ldots$ de elementos de M tal que, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Rb_i$ es isoneteriano pero cada Rb_i no es neteriano.

Finalmente, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea K_i un submódulo de Rb_i que no sea finitamente generado y consideremos la siguiente cadena ascendente de submódulos de $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Rb_i$: $K_1 \leq Rb_1 \leq Rb_1 \oplus K_2 \leq Rb_1 \oplus Rb_2 \leq Rb_1 \oplus Rb_2 \oplus K_3 \leq \cdots$. Como $\bigoplus_{i=1}^{\infty} Rb_i$ es isoneteriano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_{n_0} \cong Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_{n_0} \oplus K_{n_0+1}$, lo cual es una contradicción, pues K_{n_0+1} no es finitamente generado. ■

Ejemplo 5.21.

Sean K un campo y V un espacio vectorial sobre K con dimensión numerable y sea $R = \left(\begin{smallmatrix} K & V \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right)$. Por la Proposición 4.12, todo ideal derecho de R es de la forma $I = J_1 \oplus J_2$, donde J_1 es un ideal derecho de K ($J_1 = 0$ ó $J_1 = K$) y $J_2 \leq (V \oplus K)_K$ tal que $V \leq J_2$. Así, los ideales de R son R o copias de submódulos de $(V \oplus K)_K$. Sea $I_1 \gneqq I_2 \gneqq I_3 \gneqq \cdots$ una cadena descendente infinita de ideales distintos de R. Al ser distintos, para toda $i \in \mathbb{N}$, $J_{1_i} = 0$, es decir, todos son copias de submódulos de $(V \oplus K)_K$. Notemos que todos los miembros de la cadena tienen dimensión numerable, pues pues si alguno tuviera dimensión finita, la cadena terminaría. Así, todos los elementos de la cadena son subespacios vectoriales con dimensión numerable de $(V \oplus K)_K$, de donde, todos son isomorfos como K-módulos y por lo tanto, como R-módulos. Finalmente, como V_k tiene dimensión numerable, $\mathrm{Udim}(V) = \infty$, de donde $\mathrm{Udim}(R) = \infty$. Por lo tanto, R no es isoneteriano. En conclusión, R es isoartiniano y no es isoneteriano.

5.5 El Anillo de Endomorfismos de un Módulo Isosimple

En esta sección, todos los R-módulos son derechos. Recordemos que si M y N son R-módulos simples, entonces, para todo $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$, se tiene que f es el morfismo cero o un isomorfismo. Así, el Lema de Schur [9, 20.6, pag. 168], establece que el anillo de endomorfismos de un módulo simple, es un anillo con división. Con este lema en mente, esta sección está dedicada a la estructura del anillo de endomorfismos de un módulo isosimple y al estudio de sus ideales principales.

Lema 5.22.
Todo endomorfismo no cero, $\varphi : M \longrightarrow M$ de un R-módulo isosimple, es monomorfismo.

Demostración
Sean M un R-módulo isosimple y $f \in \operatorname{End}_R(M)$ con $f \not\equiv 0$, entonces $f[M] \cong M$. Sea $\varphi : f[M] \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow M$ un isomorfismo y consideremos el epimorfismo $f^{|f[M]} : M \twoheadrightarrow f[M]$, entonces $\varphi f^{|f[M]} \in \operatorname{End}_R(M)$ es un epimorfismo. Ahora, por la Proposición 5.7, como M es isosimple, entonces es neteriano. Así, por el Lema 3.82, $\varphi f^{|f[M]}$ es un isomorfismo. Finalmente, por la Proposición 3.39, $\operatorname{Ker}(f^{|f[M]}) = 0$, por lo tanto, $\operatorname{Ker}(f) = 0$. ■

Proposición 5.23.
El anillo de endomorfismos de un R-módulo isosimple es un dominio.

Demostración
Sean M un R-módulo isosimple y $f, g \in \operatorname{End}_R(M)$ tales que $fg = 0$. Supongamos que $f, g \neq 0$. Por el lema anterior, f y g son monomorfismos, en consecuencia fg es monomorfismo, de donde $\operatorname{Ker} fg = 0$, pero $fg = 0$, así $M = \operatorname{Ker} fg = 0$, lo cual es una contradicción, pues M es isosimple. Por lo tanto, $f = 0$ ó $g = 0$, es decir, $\operatorname{End}_R(M)$ es un dominio. ■

Teorema 5.24.

Si M es un R-módulo isosimple, entonces M es crítico y su anillo de endomorfismos es un dominio Ore derecho.

Demostración

Sea M un R-módulo isosimple. Notemos que M es compresible, pues M es isomorfo a todos los submódulos no cero de N, de modo que todo submódulo no cero de M, contiene una copia de M. Además, por la Proposición 5.7, M es neteriano y en consecuencia, admite dimensión de Krull. Así, por el Lema 3.95, M es crítico y $\mathrm{End}_R(M)$ es un dominio Ore derecho. ■

Sea M_R un R-módulo isosimple derecho y consideremos las siguientes notaciones: $E_E = \mathrm{End}_R(M)$, es el anillo de endomorfismos de M_R considerado como $\mathrm{End}_R(M)$-módulo. $\delta(M_R)$ es la retícula de submódulos de M_R, $\delta(E_E)$ es la retícula de ideales derechos de $\mathrm{End}(M_R)$ y $\delta_p(E_E)$ es el conjunto parcialmente ordenado de los ideales principales derechos de E_E.

Proposición 5.25.

Sea M_R un R-módulo isosimple, entonces, $\delta_p(E_E)$ y $\delta(M_R)$ son copos isomorfos.

Demostración

Sea M_R un R-módulo isosimple derecho y consideremos la relación
$\Phi : \delta_p(E_E) \longrightarrow \delta(M_R)$ definida por $fE \longmapsto f[M_R]$.

(1) Veamos que Φ es función.

Sean $f, g \in E_E$ tales que $fE = gE$. Debemos demostrar que $f[M] = g[M]$. Como $f \in gE$, existe $h \in E$ tal que $f = gh$. Sea $x \in f[M]$, entonces existe $y \in M$ tal que $x = f(y) = (gh)(y) = g\,(h\,(y))$, de donde, $x \in g[M]$, es decir, $f[M] \leq g[M]$. Como $g \in fE$, simétricamente se demuestra que $g[M] \leq f[M]$. Por lo tanto, Φ es función.

(2) Notemos que Φ es un morfismo de copos, pues por (1), si $fE \leq gE$, entonces $f[M] \leq g[M]$.

(3) Veamos que Φ es suprayectiva.

Sea $N \leq M$, si $N = 0$, entonces $\Phi\,(0E) = 0 = N$. Si $N \neq 0$, como M es isosimple, existe un isomorfismo $f : M \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow N$. Consideremos la inclusión,

$i : N \hookrightarrow M$ y notemos que $if : M \twoheadrightarrow M$ es un endomorfismo de M con imagen N. Por lo tanto, $\Phi(ifE) = (if)[M] = N$.

(4) Veamos que Φ es inyectiva. Primero, notemos que la proposición $(\Phi(fE) = \Phi(gE) \Rightarrow fE = gE)$ es equivalente a la proposición $[(\Phi(fE) \leq \Phi(gE) \Rightarrow fE \leq gE) \wedge (\Phi(fE) \geq \Phi(gE) \Rightarrow fE \geq gE)]$.

Basta demostrar el primer miembro de la conjunción anterior, pues el segundo miembro se obtiene simétricamente. Sean $f, g \in E$ tales que $f[M] \leq g[M]$. Si $f = 0$, trivialmente se tiene que $fE \leq gE$. Si $f \neq 0$, se sigue que $0 \neq f[M] \leq g[M]$, de donde $g \neq 0$. Ahora, por el Lema 5.22, f, g son monomorfismos, así $f' = f^{|f[M]} : M \twoheadrightarrow f[M]$ y $g' = g^{|g[M]} : M \twoheadrightarrow g[M]$ son isomorfismos. Más aún, consideremos las inclusiones, $i_1 : f[M] \hookrightarrow M$, $i_2 : g[M] \hookrightarrow M$ e $i_3 : f[M] \hookrightarrow g[M]$, entonces $f = i_1 f'$, $g = i_2 g'$ e $i_1 = i_2 i_3$. En consecuencia, $(g')^{-1} i_3 f' \in E$ y $g\left[(g')^{-1} i_3 f'\right] = i_2 g' (g')^{-1} i_3 f' = i_2 i_3 f' = i_1 f' = f$. Por lo tanto, $f \in gE$. ■

Corolario 5.26.

El conjunto parcialmente ordenado de los ideales principales derechos del anillo de endomorfismos de un R-módulo isosimple es una retícula modular neteriana.

Demostración

Sea M_R un R-módulo isosimple. Por la Proposición 5.7, M es neteriano, de donde $\delta(M_R)$ es una retícula modular neteriana. Luego, por la proposición anterior, $\delta_p(E_E)$ y $\delta(M)R$ son copos isomorfos, de donde, $\delta_p(E_E)$ y $\delta(M)R$ son retículas isomorfas. Por lo tanto, $\delta_p(E_E)$ es una retícula modular neteriana. ■

Apéndice

6

6.1 Desviación de un Copo

Definición 6.1.

Sea A un conjunto parcialmente ordenado (copo).

1. *Sean $a, b \in A$ con $b \leq a$. Definimos el **Cociente de** a **por** b como $\frac{a}{b} = \{x \in A \mid b \leq x \leq a\}$, es decir, el intervalo $[b, a]$.*
2. *Sea $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ una cadena descendente de elementos de A, definimos los **Cocientes de la Cadena** como $\frac{a_i}{a_{i+1}}$, con $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Definición 6.2.

*Sea $\alpha = -1$ o un número ordinal. Definimos, por recursión transfinita, la **Clase** $\mathbf{D}_\alpha$ de la siguiente manera:*

1. *Para $\alpha = -1$, D_{-1} es la clase de los copos triviales, es decir, los conjuntos singulares.*
2. *Si α es un ordinal y la clase D_β ha sido definida para todo $\beta < \alpha$, definimos D_α como la clase de todos los copos A, tales que:*
   a) *$A \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$.*
   b) *Para toda cadena descendente $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ de elementos de A, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para toda $i \geq n$, $\frac{a_i}{a_{i+1}} \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$.*

Observación.

La propiedad descrita en b) de la parte 2 de la definición anterior se puede leer como "todos, salvo una cantidad finita de los cocientes de la cadena, pertenecen a la unión de las clases anteriores", o bien "Para casi toda i, $\frac{a_i}{a_{i+1}} \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$".

Lema 6.3.

Si α, β son números ordinales con $\alpha \neq \beta$, entonces $D_\alpha \cap D_\beta = \varnothing$.

Demostración [Por Contradicción]

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha < \beta$. Supongamos que existe $A \in D_\alpha \cap D_\beta$. Luego, como $A \in D_\beta$, entonces, para todo ordinal $\gamma < \beta$, $A \notin \bigcup\limits_{\gamma<\beta} D_\gamma$, en particular $A \notin \bigcup\limits_{\gamma<\alpha+1} D_\gamma$, lo cual es absurdo, pues $A \in D_\alpha$. ∎

Definición 6.4.

Sea A un copo. Si existe α número ordinal tal que $A \in D_\alpha$, diremos que A tiene ***Desviación*** *α y escribiremos $\operatorname{dev}(A) = \alpha$.*

Observación.

Sea A un copo. Supongamos que A cumple la propiedad b) de la parte 2 de la Definición 6.2, pero no necesariamente cumple la propiedad a). En dicho caso, A puede pertenecer a alguna clase D_β, con $\beta < \alpha$, de modo que $\operatorname{dev}(A) \leq \alpha$.

Observación.

Notemos que un copo A puede no tener desviación, es decir, para todo α número ordinal, $A \notin D_\alpha$. En [10, Ejemplo 7.3] se demuestra que $\mathbb{R}$ con el orden usual, no tiene desviación.

Definición 6.5.

Sea A un copo.

1. *Diremos que A es* ***Artiniano*** *si, para toda cadena descendente $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ de elementos de A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq n$, $a_i = a_n$.*
2. *Diremos que A es* ***Neteriano*** *si, para toda cadena ascendente $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ de elementos de A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq n$, $a_i = a_n$.*

Proposición 6.6.

Sea A un copo, entonces, $\operatorname{dev}(A) = 0$ si y sólo si, A es artiniano y no trivial.

Demostración

[⇒]

Supongamos que $\operatorname{dev}(A) = 0$, es decir $A \in D_0$. Sea $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ una cadena descendente de elementos de A. Como $A \in D_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq n$, $\frac{a_i}{a_{i+1}} \in D_{-1}$, esto es, para toda $i \geq n$, $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ es un conjunto singular. Por lo tanto, A es artiniano.

[$\Leftarrow$]

Supongamos que A es artiniano y no trivial. Como A es no trivial, $A \notin D_{-1}$. Sea $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ una cadena descendente de elementos de A, como A es artiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq n$, $a_i = a_{i+1}$, en consecuencia, para toda $i \geq n$, $\frac{a_i}{a_{i+1}} \in D_{-1}$. Por lo tanto, $\operatorname{dev}(A) = 0$. ■

Proposición 6.7.

Sean A un copo con $\operatorname{dev}(A) = \alpha$, y $B \subseteq A$. Entonces B tiene desviación, digamos $\operatorname{dev}(b) = \beta$. Más aún, $\beta \leq \alpha$.

Demostración [Por inducción transfinita sobre α]

(-1) Si $\operatorname{dev}(A) = -1$, entonces A y B son copos triviales.

(0) Si $\operatorname{dev}(A) = 0$, entonces A es artiniano, de donde B es artiniano y $\operatorname{dev}(B) = 0$.

(α) Supongamos que la afirmación es verdadera para todo ordinal $\gamma < \alpha$. Sea A un copo con $\operatorname{dev}(A) = \alpha$ y sea $B \subseteq A$. Si $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ es una cadena descendente de elementos de B, entonces los factores de la cadena en B, son subcopos de los factores de la cadena en A, es decir, para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[a_{i+1}, a_i]_B \subseteq [a_{i+1}, a_i]_A$. Ahora, como $\operatorname{dev}(A) = \alpha$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para toda $i \geq n$, $\operatorname{dev}\left([a_{i+1}, a_i]_A\right) < \alpha$. Así, por hipótesis inductiva, $\operatorname{dev}\left([a_{i+1}, a_i]_B\right) \leq \operatorname{dev}\left([a_{i+1}, a_i]_A\right)$, en consecuencia, $\operatorname{dev}\left([a_{i+1}, a_i]_B\right) < \alpha$, de donde $\operatorname{dev}(B) \leq \alpha$. ■

Lema 6.8.

Todo copo neteriano es subcopo de un copo neteriano con elemento mayor y elemento menor.

Demostración

Sea A un copo neteriano. Definimos $\bar{A} = A \cup \{0, 1\}$, donde 0 y 1 son tales que, para todo $a \in A, 0 \leq a$ y $a \leq 1$. Es claro que $\bar{A}$ es neteriano. ■

Observación.

Al igual que con módulos neterianos, es posible demostrar (aplicando el Lema *de Zorn), que todo subcopo no vacío de un copo neteriano, admite un elemento máximo.*

Proposición 6.9.

Todo copo neteriano tiene desviación.

Demostración [Por contradicción]

Por el lema anterior, basta demostrar este hecho para copos neterianos con elemento mayor y elemento menor. Supongamos que existe un copo neteriano A, con elemento mayor 1 y elemento menor 0, tal que A no tiene desviación. Sea $B = \{a \in A \mid \frac{1}{a}$ no tiene desviación$\}$. Notemos que $0 \in B$, pues $A = \frac{1}{0}$ no tiene desviación, de modo que $B \neq \varnothing$. Sea b un elemento máximo de B, el cual existe por la observación anterior. Sea $\alpha = \sup\{\operatorname{dev}\left(\frac{1}{a}\right) \mid a \in A, a > b\}$, el cual existe en virtud de que b es elemento máximo de B. Sea $a_0 \geq a_1 \geq_2 \geq \cdots$ una cadena descendente de elementos de $\frac{1}{b}$. Tenemos los siguientes dos casos:

(1) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b$, es claro que para toda $i \geq n$, $a_i = b$, pues la cadena es descendente y b es el elemento menor de $\frac{1}{b}$. Así, para toda $i \geq n$, $\operatorname{dev}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right) = -1$, de donde, $\operatorname{dev}\left(\frac{1}{b}\right) \leq 0$. Lo cual es absurdo, pues $\frac{1}{b}$ no tiene desviación.

(2) Si para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n > b$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, $\frac{a_i}{a_{i+1}} \subseteq \frac{1}{a_{i+1}}$, así, por la Proposición 6.7, $\operatorname{dev}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right) \leq \operatorname{dev}\left(\frac{1}{a_{i+1}}\right) \leq \alpha$. En consecuencia, $\operatorname{dev}\left(\frac{1}{b}\right) \leq \alpha + 1$, lo cual es una contradicción, pues $\frac{1}{b}$ no tiene desviación. ■

Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal y consideremos α^{op} (el conjunto parcialmente ordenado que resulta de invertir el orden en α). Al ser ordinal, α es bien ordenado por $\in_\alpha$, de modo que α^{op} es un copo neteriano, así que tiene desviación.

Lema 6.10.

*Todo ordinal $\alpha \neq 0$ admite una representación única de la forma $\alpha = \omega^{\lambda_1} n_1 + \cdots + \omega^{\lambda_t} n_t$, donde $n_1, \ldots n_t \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_t$ son números ordinales, ya sean finitos o infinitos. A dicha representación le llamaremos **Forma Normal de Cantor** de α.*

Demostración

[11, Teorema 2, 14.19, pag. 323] ■

Lema 6.11.

Sea $\alpha > 1$ *un ordinal con forma normal de Cantor* $\omega^{\lambda_1} n_1 + \cdots + \omega^{\lambda_t} n_t$*, entonces* $\operatorname{dev}(\alpha^{\mathrm{op}}) = \lambda_1$.

Demostración

[10, Teorema 7.7] ■

Bibliografía

[1] A. Facchini y Z. Nazemian, "Modules with chain conditions up to isomorphism", *Journal of Algebra*, vol. 453, págs. 578-601, 2016 (vid. págs. 1, 77).

[2] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*. New York, NY: Springer New York, 1992, vol. 13 (vid. págs. 1, 90).

[3] F. Kasch y D. A. R. Wallace, *Modules and rings: A translation of Moduln und Ringe / German text by F. Kasch ; translation and editing by D.A.R. Wallace*, ép. L.M.S. monographs, 0076-0560. New York y London: Academic Press, 1982, vol. no.17 (vid. págs. 20, 22, 23, 26, 36, 41, 42, 44-46).

[4] J. C. McConnell, J. C. Robson y L. Small, *Noncommutative Noetherian rings*, ép. Graduate studies in mathematics. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2000, vol. v. 30 (vid. pág. 55).

[5] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, ép. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1999, vol. 189 (vid. pág. 57).

[6] T. Y. Lam, *Exercises in modules and rings*, ép. Problem books in mathematics. New York: Springer, 2007 (vid. pág. 58).

[7] B. N. Flores, "Algunas caracterizaciones de anillos MAX", Tesis de Licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue., 2018 (vid. pág. 61).

[8] F. Couchot, “Modules with RD-Composition Series over a Commutative Ring”, *Communications in Algebra*, vol. 31, n.º 7, págs. 3171-3194, 2003 (vid. pág. 61).

[9] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*. Routledge, 2018 (vid. pág. 93).

[10] A. Facchini, *Module theory: Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules*, Reprint of the 1998 ed., ép. Modern Birkhäuser Classics. Basel: Birkhäuser, 2010 (vid. págs. 98, 101).

[11] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, 2.ª ed. Polonia: PWN-Polish Scientific Publishers, 1965 (vid. pág. 101).

[12] N. Jacobson, *Basic algebra 1*, 2nd ed. New York: Freeman, 1985.