Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

Tesis que para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas

Presenta:
Eder Cardoso García

Asesores:
Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Julio 2011

Índice general

Introducción

El presente trabajo pertenece al área del Análisis de Fourier. Esta rama de la matemática debe su nombre al matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor.

En su obra "Théorie analytique de la chaleur"(1822), Fourier dedujo la ecuación que controla la difusión del calor. Después resolvió el problema de la distribución de temperatura, en un tiempo dado, a partir de la distribución en el instante inicial. Para ello inventó el método de separación de variables, también conocido como método de Fourier. Para hallar la solución necesitó expresar la función que proporciona el dato inicial como suma de una serie trigonométrica, a dicha suma se la conoce como serie de Fourier. Tal suma está muy relacionada con la transformada de Fourier que es un término fundamental en esta tesis.

Si f es una función Lebesgue integrable definida en $\mathbb{R}$, su transformada de Fourier es la función definida también en $\mathbb{R}$ y con valores complejos, que representaremos como $\widehat{f}$, dada por:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi ixs}\, dx.$$

Esta transformada existe para todo $s \in \mathbb{R}$ porque $h(x) = e^{-2\pi ixs}$ es una función medible acotada con respecto a la variable "x".

El objetivo de la tesis es describir dos métodos diferentes para extender la definición de la transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$. Teniendo definida la transformada de Fourier en un subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$ de tal manera que sea denso en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, extenderemos la transformada de Fourier del subespacio denso a $L^2(\mathbb{R})$.

La presente tesis está conformada por tres capítulos, los últimos dos se refieren a los diferentes métodos, mientras que en el primero se definen nociones elementales para el desarrollo de estos últimos.

En el Capítulo 1 se exponen las definiciones y resultados necesarios del Análisis Funcional, Teoría de la integral de Lebesgue, así como resultados básicos de los espacios normados, de Hilbert, $L^p(\mathbb{R})$, en particular consideramos $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ que son espacios en los que se desenvuelve la teoría expuesta en este trabajo.

En el Capítulo 2 presentamos un primer método para extender la transformada de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ mediante el Teorema de Plancherel, se considera el subconjunto $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ de $L^1(\mathbb{R})$, ésta es la forma clásica de extender la transformada de Fourier. Además, como una observación, en el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y de decrecimiento rápido, también se tiene definida la transformada de Fourier, se puede aplicar el mismo procedimiento para extender la transformada de este espacio a $L^2(\mathbb{R})$.

En el Capítulo 3 estudiamos un segundo método para extender la transformada de Fourier, utilizamos el espacio de las funciones escalonadas. Teniendo definida la transformada de Fourier en este espacio, construimos la transformada inversa de Fourier y como consecuencia se cumple la identidad de Plancherel, luego extendemos estos conceptos a $L^2(\mathbb{R})$.

Eder Cardoso García
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Junio de 2011

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen los resultados más importantes para el desarrollo del trabajo de tesis, algunos otros que se necesiten para explicar los primeros y que no se mencionen, los supondremos conocidos.

Definimos primeramente los espacios de medida para poder definir los espacios de Lebesgue con la norma $\| \cdot \|_p$, $1 \leq p < \infty$. En particular nos interesan los casos $p = 1$ y $p = 2$.

Puntualizaremos también el concepto de espacio normado, espacio de Hilbert, para finalizar describiremos algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$, el espacio de funciones Lebesgue integrables en $\mathbb{R}$.

1.1. Espacios L^p

Consideremos (X, Σ, μ) un espacio de medida, donde μ es una medida positiva y recordemos que $f : X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es Σ-medible si la pre-imagen de abiertos es medible.

Dos funciones f, g son iguales μ-casi donde sea o son iguales para μ-casi en todos los puntos x, si se tiene que $f(x) = g(x)$ cuando $x \notin N$, para alguna $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$.

Decimos que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n : X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) converge μ-casi donde sea si existe un conjunto $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \text{lím}\, f_n(x)$ para $x \notin N$.

Denotaremos por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$ la colección de funciones Lebesgue integrables de valores reales definidas sobre X, con respecto a la medida μ.

Consideremos el espacio de Lebesgue $L = \mathcal{L}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ μ-casi donde sea.

Definición 1.1. *Se define $L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$, como el espacio de todas las clases μ-equivalentes de funciones $f : X \to \mathbb{C}$ medibles tales que $|f|^p$ es integrable con respecto a μ en X. Si $f \in L^p(X)$ su norma se define como*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 1$, entonces $L^1(X) = L$. Si $f \in L^1(X)$ se define su norma por

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu.$$

Si $p = 2$, $L^2(X)$ es el espacio de Lebesgue de todas las clases μ-equivalentes cuadrado integrable. Si $f \in L^2(X)$ se define su norma por

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2}.$$

También definimos el espacio $L^\infty = L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, el cual consiste de todas las clases de funciones de valores reales que son acotadas casi donde sea. Sea $f \in L^\infty$ y $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

y norma

$$\|f\|_\infty = inf\{S(N) : N \in \Sigma, \mu(N) = 0\}.$$

Una función en $L^\infty(X)$ es llamada una función esencialmente acotada.

El siguiente resultado se refiere a la propiedad de integrabilidad absoluta de la integral de Lebesgue.

Teorema 1.2. *Una función medible f pertenece a $L^1(X)$ si y sólo si $|f|$ pertenece a $L^1(X)$.*

Utilizando el teorema anterior se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3. *Si f es medible, g es integrable y $|f| \leq |g|$, entonces f es integrable y*

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| \, d\mu.$$

Enunciaremos los teoremas de la Convergencia Monótona y Dominada los cuales contribuyen a marcar la diferencia entre la integral de Riemman y la de Lebesgue. Estos son los siguientes.

Teorema 1.4 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente de funciones en* $M^+(X,\Sigma)$ *la cual converge a* f *puntualmente, entonces*

$$\int_X f\, d\mu = \lim \int_X f_n\, d\mu.$$

Teorema 1.5 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones integrables la cual converge casi en todas partes a una función medible* f *de valores reales. Si existe una función integrable* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, entonces* $f \in L^1(X)$ *y*

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n\, d\mu.$$

El Teorema de Fubini se refiere a la integración con respecto a la medida producto y la integración iterada con respecto a las medidas en el producto de espacios.

Teorema 1.6 (Teorema de Fubini). *Sean* (X,Σ,μ) *y* (Y,Δ,ν) *espacios* σ*-finitos y sea la medida* π *en* $\Gamma = \Sigma \times \Delta$ *el producto de* μ *y* ν*. Si la función* $F : Z = X \times Y \to \mathbb{R}$ *es integrable con respecto a* π*, entonces*

$$\int_X \left[\int_Y F\, d\nu\right] d\mu = \int_Z F\, d\pi = \int_Y \left[\int_X F d\mu\right] d\nu.$$

Un resultado importante sobre el espacio $L^2(X)$ que se utiliza frecuentemente es el siguiente.

Teorema 1.7 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz). *Si* $f, g \in L^2(X)$*, entonces* fg *es integrable y*

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

En lo que resta de la tesis, trabajaremos sólo en el espacio $L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, \mathcal{M}_L, m)$ con $1 \leq p < \infty$, donde $\mathcal{M}_L$ es la sigma álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y m es la medida de Lebesgue.

1.2. Producto interior y espacio de Hilbert

Definición 1.8. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Un producto escalar en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, la cual satisface las siguientes condiciones*

(*a*) $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$, *y análogamente* $\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle$,

(*b*) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(*c*) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0$, *si y sólo si* $x = 0$,

donde $x, y, z \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\overline{c}$ es el conjugado del complejo c.

Un espacio prehilbertiano o espacio prehilbert es un espacio vectorial provisto de un producto escalar.

Definición 1.9. *Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se dice que es normado si en él se puede definir una norma, es decir, una aplicación $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$, que cumple lo siguiente*

(*a*) $\forall\ x \in V,\ ||x|| \geq 0$,

(*b*) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(*c*) $\forall\ x \in V$, $\forall\ a \in \mathbb{K}$, $\|ax\| = |a|\ \|x\|$,

(*d*) $\forall\ x,\ y \in V \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *donde $|a|$ es el valor absoluto de a, si $a \in \mathbb{R}$ ó es el módulo de a, si $a \in \mathbb{C}$.*

Cada producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en un espacio vectorial V da lugar a una norma, que se define como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definición 1.10. *Sea $\{x_n\}_{n \epsilon \mathbb{N}}$ una sucesión en $(X, \|\cdot\|)$, espacio normado, diremos que $\{x_n\}_{n \epsilon \mathbb{N}}$ es de Cauchy, si para todo número real $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los números naturales $m, n > N$ se cumple*

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

- Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es de Banach si es completo, esto es, si toda sucesión de Cauchy es convergente en él.
- Un espacio prehilbertiano completo H con respecto a la norma inducida por el producto escalar definido en el mismo espacio H, es llamado un espacio de Hilbert.

Es conocido que los espacios $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ son de Banach.

Ejemplo 1.11. $L^2(\mathbb{R})$ *es un espacio de Hilbert, con el producto interior*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\infty}^{\infty} f\overline{g}\, dm(x).$$

A continuación expondremos algunas propiedades básicas del producto interior, mismas que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Consideremos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interior.

Proposición 1.12 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowski)**.** *Para todo* $x, y \in X$*, se cumple que:* $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Proposición 1.13 (Desigualdad triangular)**.** *Para cualesquiera* $x, y \in X$*, se cumple que:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Teorema 1.14. *Sea* H *un espacio de Hilbert. Para cualquier* $y \in H$ *fijo, los mapeos:*

$$x \to \langle x, y \rangle, \qquad x \to \langle y, x \rangle, \qquad x \to \|x\|,$$

son funciones continuas sobre H*.*

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano.

- Dos elementos $f, g \in X$ son ortogonales (en símbolos: $f \perp g$) si $\langle f, g \rangle = 0$.

  Observemos que si f y g son ortogonales, entonces se tiene: $\|f+g\|^2 = \|f\|^2+\|g\|^2$. A esta fórmula se le llama el teorema de Pitágoras.

- Un elemento $f \in X$ se dice que es ortogonal a un subconjunto A de X si $f \perp g$ para todo $g \in A$.

- Dos subconjuntos A y B de H son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0$ para todo $f \in A$ y $g \in B$.

- Si A es un subconjunto de H, entonces el conjunto $A^{\perp} = \{f \in X : f \perp A\}$ es llamado el complemento ortogonal de A.

Notación 1.15. *Sea* $B \subset H$, $L(B)$ *denotará el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de* B. $L(B)$ *es el subespacio mas pequeño de* H *que contiene a* B.

Proposición 1.16. *Sea* X *un espacio prehilbertiano*

(a) Tenemos $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$, *es decir,* $\{0\}$ *es el único elemento ortogonal a todos los elementos de* X.

(b) Para cualquier subconjunto A *de* X, *el conjunto* $A^{\perp}$ *es un subespacio cerrado de* X.

(c) $A \subset B$ *implica:* $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

(d) $A^{\perp} = L(A)^{\perp} = \overline{L(A)}^{\perp}$.

(e) Para $A \subset X$ *se tiene que* $A^{\perp\perp} = \overline{L(A)}$.

Teorema 1.17 (Teorema de Proyección)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $T \neq \{0\}$ *un subespacio cerrado de* H. *Entonces* $T^{\perp\perp} = T$. *Además cada* $f \in H$ *puede ser descompuesta de forma única como* $f = g + h$ *con* $g \in T$ *y* $h \in T^{\perp}$. *Esta* g *es llamada la proyección (ortogonal) de* F *sobre* T.

El Teorema 1.17 se usa para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.18. *Sean* H *un espacio de Hilbert y* $A \subset H$. *Se tiene que* $A^{\perp} = \{0\}$, *si y sólo si,* $\overline{L(A)} = H$, *es decir, si* A *es denso en* H.

Demostración. Si $A^{\perp} = \{0\}$, entonces tenemos $\overline{L(A)} = A^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. Si $\overline{L(A)} = H$, se tiene que $A^{\perp\perp} = H$, entonces tenemos que $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp} = H^{\perp} = \{0\}$, pues $A^{\perp}$ es un subespacio cerrado.

$\square$

1.3. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Dada un función $f \in L^1(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier en $s \in \mathbb{R}$ se define como

$$\widehat{f}\,(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(x)\, e^{-2\pi ixs}\, dx. \tag{1.1}$$

Esta transformada existe para todo $s \in \mathbb{R}$, puesto que $e^{-2\pi ixs}$ es una función medible acotada.

La transformada inversa de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ está definida por

$$f^{\vee}\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(s)\, e^{2\pi ixs}\, ds. \tag{1.2}$$

Expondremos algunas de las propiedades sobre la transformada de Fourier más importantes para el desarrollo de este trabajo.

La aplicación $\mathcal{F}$ definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to L^{\infty}(\mathbb{R}) \\ f &\to \widehat{f}, \end{aligned}$$

es una transformación lineal acotada y $|\widehat{f}(s)| \leq \|f(x)\|_1$ para todo $s \in \mathbb{R}$. En efecto

$$|\widehat{f}(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi ixs}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dx = \|f\|_1.$$

Además, $\widehat{f}$ es uniformemente continua.

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ es el Lema de Riemman-Lebesgue.

Teorema 1.19 (Lema de Riemman-Lebesgue). *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *entonces* $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

De acuerdo con este lema se tiene que la transformada de Fourier pertenece al espacio de las funciones continuas que se desvanecen en $-\infty$ y en ∞.

Para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$, existe su transformada de Fourier, sin embargo, $\widehat{f}$ podría no ser integrable, así que puede haber un problema con la inversión $\widehat{f}^{\vee}$; por ejemplo, la función indicadora de $-1 \leq x \leq 1$ es integrable, pero

$$\int_{-1}^{1} e^{-2\pi i\gamma x} dx = \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma}{\pi\gamma}$$

no lo es.

Así, tenemos el Teorema de inversión o formula de inversión para funciones en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 1.20 (Teorema de inversión). *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\widehat{f}^{\vee}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\, e^{2\pi i x s}\, ds = f(x). \tag{1.3}$$

Ahora definimos la convolución de dos funciones.

Definición 1.21. *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *La convolución de* f *con* g *se define como*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt.$$

Algunas de las propiedades básicas de la convolución son las siguientes.

Proposición 1.22. *Si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, entonces:*

(a) $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$,

(b) $f * g = g * f$,

(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(d) $(f + g) * h = f * h + g * h$.

Por lo tanto $L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach bajo el producto convolución.

También se cumplen las siguientes propiedades algebraicas de la transformada.

Teorema 1.23. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

(a) Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, *entonces* $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$,

(b) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, *entonces* $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$,

(c) Si $g \in L^1$ *y* $h = f * g$, *entonces* $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$,

(d) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, *entonces* $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

El inciso (c) nos dice que la transformada de Fourier es un morfismo.

Definimos la traslación de una función.

Definición 1.24. *Para cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para cada $z \in \mathbb{R}$, sea f_z la traslación de la función f definida por*

$$f_z(x) = f(x - z) \quad \textit{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.25. *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, el mapeo $z \to f_z$ es una aplicación uniformemente continua de $\mathbb{R}$ en $L^p(\mathbb{R})$.*

A continuación, proporcionamos un par de funciones que son necesarias para definir nuestra Proposición 1.26 que, junto con los Teoremas 1.27 y 1.28, serán muy importantes en la demostración del Teorema de Plancherel, el cual es uno de nuestros resultados principales.

Consideremos $H(t) = e^{-|t|}$ y definamos

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{ixt}\, dm(t), \text{ con } \lambda > 0.$$

En el desarrollo de esta integral se calcula

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 x^2}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dx = 1.$$

Obsérvese también que $0 < H(t) \leq 1$ y que $H(\lambda t) \to 1$ cuando $\lambda \to 0$.

Proposición 1.26. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}\,dt.$$

Teorema 1.27. *Si g es esencialmente acotada y continua en un punto x, entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0}(g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

Teorema 1.28. *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Los casos $p = 1$ y $p = 2$ serán los de mayor interés.

Capítulo 2

La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$: Primer método

La transformada de Fourier definida en (1.1), no se aplica directamente a cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, ya que no toda función que se encuentre en este espacio está en $L^1(\mathbb{R})$ y viceversa. Por ejemplo, si

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x>1, \\ 0 & \text{si } x\leq 1, \end{cases}$$

entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$ pero $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Por otro lado, si

$$g\left(x\right)=\begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x\in(0,1), \\ 0 & \text{si } x\notin(0,1), \end{cases}$$

entonces $g \in L^1(\mathbb{R})$ pero $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

Así que, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier definida en $L^1(\mathbb{R})$ para $s = 0$ no existe, pues

$$\widehat{f}\left(0\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{-2\pi i x 0}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\,dx,$$

no está definida, ya que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

En este capítulo, un método para definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ es el conocido Teorema de Plancherel. Teniendo un subconjunto E de $L^1(\mathbb{R})$, el cual sea denso en $L^2(\mathbb{R})$, cumpliendo con la identidad de Plancherel en este subconjunto y $\mathcal{F}(E)$ denso en $L^2(\mathbb{R})$, por el Teorema 2.4 extendemos la transformada de Fourier del subconjunto E a $L^2(\mathbb{R})$. Además de definir el Teorema de inversión para la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Antes de exponer nuestro primer método, definimos algunos conjuntos.

2.1. Subconjuntos densos en $L^2(\mathbb{R})$

Para poder extender nuestra transformada, demostraremos que los subconjuntos $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de $L^1(\mathbb{R})$ son densos en $L^2(\mathbb{R})$. Para esto consideremos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1. *Toda función de soporte compacto y cuadrado integrable tiene su transformada de Fourier definida como en (1.1).*

Demostración. Sea $f \in L^2(a,b)$, con $-\infty < a < b < \infty$ y $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a,b]$. Teniendo en cuenta que la función característica $\chi_{[a,b]}(x) \in L^2(a,b)$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|f\|_1 = \langle \chi_{[a,b]}(x), |f(x)| \rangle \leq \|\chi_{[a,b]}(x)\|_2 \|f(x)\|_2 = \sqrt{b-a}\|f(x)\|_2.$$

Luego, $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ y por lo tanto su transformada de Fourier existe.

$\square$

Proposición 2.2. *Las funciones de soporte compacto y cuadrado integrable forman un subconjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea f una función en $L^2(\mathbb{R})$. Definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq N, \\ 0 & \text{si } x \notin [-N.N]. \end{cases}$$

Tenemos que

$$\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}), \quad \|f_n\|_2 \leq \|f\|_2 \ \ y \ \ \|f_n\|_2 \to \|f\|_2,$$

cuando $N \to \infty$.

Además $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$ puesto que

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \to 0.$$

Por lo tanto, las funciones de soporte compacto y cuadrado integrables forman un subconjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$.

□

El espacio de los polinomios definido en $[-N, N]$ es un conjunto denso en $L^2([-N, N])$. Considerando este hecho, se demostrará la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *El espacio de las funciones continuas de soporte compacto e infinitamente diferenciables, $C_c^\infty(\mathbb{R})$, es denso en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideremos la función definida como

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{-\epsilon}{N^2 - x^2}\right)} & \text{si } |x| < N, \\ 0 & \text{si } |x| \geq N. \end{cases}$$

Esta función es de soporte compacto contenido en $[-N, N]$ y tiene derivadas continuas de todo orden, es decir, $g_\epsilon(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Además, $0 \leq g_\epsilon(x) < 1$ y converge uniformemente a 1 cuando $\epsilon \to 0$ en todo intervalo cerrado de la forma $[-N+\delta, N-\delta]$, con $\delta > 0$.

Ahora, sean $P(x)$ un polinomio y $M = max\{|P(x)| : x \in [-N, N]\}$. Consideremos la función $P_\epsilon(x) = P(x)g_\epsilon(x)$ y observemos que $P_\epsilon(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. La distancia entre estas dos funciones en $L^2(-N, N)$ es

$$\begin{aligned} \|P(x) - P_\epsilon(x)\|_2^2 &= \int_{-N}^{N} |P(x) - P_\epsilon(x)|^2 dx \\ &\leq M^2 \bigg\{ \int_{-N}^{-N+\delta} 1dx + \int_{-N+\delta}^{N-\delta} |1 - g_\epsilon(x)|^2 dx \\ &+ \int_{N-\delta}^{N} 1dx \bigg\}, \end{aligned}$$

la cual es mínima si tomamos δ y ϵ suficientemente pequeños. Por lo tanto, es posible encontrar en el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ funciones tan próximas como se quiera a una función dada de soporte compacto y cuadrado integrable. Dado que estas funciones forman un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es un subespacio denso en $L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

El espacio de Schwartz en $\mathbb{R}$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$), se define como el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes sobre $\mathbb{R}$: "Infinitamente diferenciable"significa que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; "rápidamente decreciente"se aplica a $f, f', f'', ...$, y significa que $x^p D^q f$ tiende a 0 cuando $|x| \to \infty$ para todo $p, q \in \mathbb{N}$, es decir, que se anulan en el infinito más rápido que cualquier potencia de x.

Evidentemente $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por consecuencia $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

También $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subconjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Utilizaremos el siguiente teorema para poder definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.4. *Supóngase que*

(a) X, Y *son espacios de Banach.*

(b) X_0 *subconjunto denso en* X

(c) $\Phi : X_0 \to Y$ *isometría lineal y*

(d) $\Phi(X_0)$ *es denso en* Y.

Entonces $\widetilde{\Phi} : X \to Y$ *es una isometría lineal.*

2.2. Teorema de Plancherel

En esta sección consideramos el subconjunto $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y utilizaremos el método descrito anteriormente para extender la transformada de Fourier de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.

Se demostrará el Teorema de Plancherel utilizando el Teorema 2.4 y éste será nuestro primer método para extender la transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.5 (Teorema de Plancherel)**.** *Se puede asociar a cada* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *una función* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que las siguientes propiedades se cumplen:*

(a) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, *entonces* $\widehat{f}$ *es la transformada de Fourier de* f *definida por (1.1).*

(b) *Para cada* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *se tiene que* $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

(c) *El mapeo* $f \to \widehat{f}$ *es un isomorfismo del espacio de Hilbert* $L^2(\mathbb{R})$ *sobre* $L^2(\mathbb{R})$.

(d) *La siguiente relación simétrica existe entre* f *y* $\widehat{f}$. *Si*

$$\Phi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2\pi ixt}\, dx \quad y \quad \Psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(x)e^{2\pi ixt}\, dt$$

entonces $\|\Phi_A - \widehat{f}\|_2 \to 0$ *y* $\|\Psi_A - f\|_2 \to 0$ *cuando* $A \to \infty$.

Observación 2.6. *Como* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *es denso en* $L^2(\mathbb{R})$, *las propiedades* (a) *y* (b) *determinan la asignación única* $f \to \widehat{f}$. *La propiedad* (d) *suele llamarse el Teorema de inversión en* $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. (b) Primero mostremos que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, consideremos $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ y definamos $g = f * \widetilde{f}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\widetilde{f}(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}\, dy \\ &= \langle f_{-x}, f \rangle, \end{aligned}$$

donde el producto interior es el del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ y f_{-x} denota la traslación de f como en la Definición 1.24. Luego, por el Teorema 1.25, $x \to f_{-x}$ es una aplicación continua de

$\mathbb{R}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Por la continuidad del producto interno, g es una función continua. Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|g(x)| \leq \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2.$$

Así que g es una función acotada. Además, como $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces la convolución de estas dos funciones está en $L^1(\mathbb{R})$ por el inciso (a) de la Proposición 1.22, por lo tanto $g \in L^1(\mathbb{R})$. Siendo $H(t)$ y $h_\lambda(x)$ como en la Proposición 1.26 tenemos que

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{g}(t)e^{it0}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{g}(t)\,dt.$$

Como g es continua y acotada empleamos el Teorema 1.27 por lo que se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0}(g * h_\lambda)(0) = g(0).$$

Además

$$\begin{aligned} g(0) = (f * \widetilde{f})(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\overline{f(-y)}\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(-y)|^2\,dy = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Luego, dado que $g = f * \widetilde{f}$, donde $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ cuya transformada de Fourier, aplicando el inciso (d) del Teorema 1.23, es $\widehat{\widetilde{f}}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$, entonces a g le aplicamos el inciso (c) del mismo teorema resulta que $\widehat{g}(x) = \widehat{(f * \widetilde{f})}(x) = \widehat{f}(t)\widehat{\widetilde{f}}(t) = \widehat{f}(t)\overline{\widehat{f}(t)} = |\widehat{f}(t)|^2 \geq 0$. Debido a que $H(\lambda t)$ tiende hacia 1 cuando $\lambda \to 0$ y g es una función medible positiva, por el Teorema de la Convergencia Monótona se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{g}(t)\,dm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(t)|^2\,dt.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 = g(0) = \lim_{\lambda\to 0}(g * h_\lambda)(0) &= \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\widehat{g}(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(t)|^2\,dt = \|\widehat{f}\|_2^2\end{aligned}$$

por lo tanto $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ y además $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Ahora sea Y el espacio de todas las transformaciones de Fourier $\widehat{f}$ para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Dado que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ se tiene entonces que $Y \subset L^2(\mathbb{R})$, demostraremos que Y es denso en $L^2(\mathbb{R})$, es decir, $Y^\perp = \{0\}$ (dada la veracidad de la Proposición 1.18). Consideremos las funciones $x \to e^{i\alpha x}H(\lambda x)$ que se encuentran en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ para todo real α y $\lambda > 0$, sus transformadas de Fourier dadas por

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}H(\lambda x)e^{-ixt}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda x)e^{ix(\alpha - t)}\,dx \\ &= h_\lambda(\alpha - t)\end{aligned}$$

están por lo tanto en Y. Sea $w \in L^2$, y consideremos $w \in Y^\perp$ entonces

$$(h_\lambda * \overline{w})(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(\alpha - t)\overline{w}(t)\,dm(t) = 0 \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por el Teorema 1.28 se concluye que $w = 0$ y por lo tanto Y es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Denotaremos temporalmente a $\widehat{f}$ por $\Phi(f)$. Como se ha probado, Φ es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$, del subespacio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ de $L^2(\mathbb{R})$ sobre otro subespacio denso Y. Por el Teorema 2.4 se tiene que Φ se extiende a una isometría $\widetilde{\Phi}$ de $L^2(\mathbb{R})$ sobre $L^2(\mathbb{R})$, si escribimos $\widehat{f}$ para $\widetilde{\Phi}(f)$ obtenemos las propiedades (a) y (b) para $L^2(\mathbb{R})$.

La propiedad (c) es consecuencia de (b). Pues en (b) se demuestra que Φ es inyectiva y sobreyectiva.

Para probar (d) sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sea χ_A la función característica de [-A, A], entonces $\chi_A f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Denotemos $\varphi_A = (\chi_A f)^\wedge$. Como $\|\widehat{f} - \chi_A f\|_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$, se sigue de (b) que

$$\|\widehat{f} - \varphi_A\|_2 = \|(f - \chi_A f)^\wedge\|_2 = \|(f - \chi_A f)\|_2 \to 0$$

cuando $A \to \infty$.

La otra parte de (d) es análoga.

$\square$

Nota: En el espacio de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, está definida la transformada de Fourier pues es subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$, además es un isomorfismo isométrico en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, es decir, cumple con la identidad de Plancherel en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y como ya sabemos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Así, podemos aplicar el Teorema 2.4 y extender la transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$.

Capítulo 3

La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$: Segundo método

Un segundo método para definir la transformada de Fourier de funciones en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ es considerar a K, el espacio de las funciones escalonadas. Dado que K es denso en $L^2(\mathbb{R})$, podemos extender la transformada de Fourier de K a $L^2(\mathbb{R})$.

Este segundo método es alternativo al primero ya que no se emplea explícitamente que la imagen de funciones en K bajo la aplicación de la transformada de Fourier sea densa en $L^2(\mathbb{R})$.

Recordemos que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, su transformada inversa de Fourier se define como

$$f^{\vee}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{2\pi i x s}\, ds.$$

El método es constructivo, así que empezaremos probando que para intervalos acotados I y J

$$(\widehat{\chi}_I)^{\vee} = \chi_I; \quad \langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle \tag{3.1}$$

y

$$(\check{\chi}_I)\widehat{\ } = \chi_I; \quad \langle \check{\chi}_I, \check{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle \tag{3.2}$$

donde χ_I y χ_J son las funciones características de I y J respectivamente. Teniendo estas relaciones, se construye la fórmula de inversión y se cumple la identidad de Plancherel para el espacio K. La extensión a $L^2(\mathbb{R})$ se realiza a través de la densidad del espacio K en este espacio, permitiendo que la validez de la fórmula de inversión de Fourier y el Teorema de Plancherel se extiendan a $L^2(\mathbb{R})$.

Realizaremos la prueba de las igualdades en (3.1). De forma similar, debido a la simetría que tienen las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada inversa de Fourier, pueden demostrarse las igualdades en (3.2).

Antes de empezar con nuestro método, consideremos los siguientes lemas.

3.1. La transformada de Fourier en K

En esta sección se prueban las igualdades (3.1). Lo que permite obtener la fórmula de inversión y la identidad de Plancherel en K, para esto, empecemos demostrando los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Sean $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$. Entonces*

$$\lim_{B\to\infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\operatorname{sen} \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B u}{\pi u} \right) du$$
$$= \lim_{B\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B u}{\pi u} \right) du.$$

Demostración. Sea $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$, tenemos que $[\alpha+a, \alpha+b] = [\alpha+a, -\alpha] \cup [-\alpha, \alpha] \cup [\alpha, \alpha+b]$. Debido a que la función $\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u}$ es integrable en $[\alpha+a, -\alpha]$ y $[\alpha, \alpha+b]$, entonces por el Lema de Riemann-Lebesgue el límite de la integral sobre estos intervalos es cero. Sólo tenemos problema de integrabilidad en $u = 0$, pues en $u = \alpha$ la función $\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u}$ podemos redefinirla como

$$g\left(u\right) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u} & \text{si } u \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}, \\ 1 & \text{si } u = \alpha, \end{cases}$$

y hacer continua la función.

Así, tenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{B\to\infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi Bu}{\pi u}\right) du \\ &= \lim_{B\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi Bu}{\pi u}\right) du. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Sean $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a < \alpha < b$. Se tiene que*

$$\lim_{B\to\infty} \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta)}{\pi(\alpha+\beta)}\right) d\beta = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}.$$

Demostración. Podemos considerar como un primer caso $a < -\alpha < 0 < \alpha < b$. De esto, se tiene $a < -2\alpha < -\alpha < 0 < b$ y así $\alpha + a < -\alpha < 0 < \alpha < \alpha + b$. Haciendo el cambio $u = \alpha + \beta$, tenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{B\to\infty} \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta)}{\pi(\alpha+\beta)}\right) d\beta \\ &= \lim_{B\to\infty} \int_{\alpha+a}^{\alpha+b} \frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi Bu}{\pi u}\right) du. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 3.1 sólo analizaremos

$$\lim_{B\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\right)du.$$

Antes observemos que haciendo el cambio de variable $t=2\pi Bu$;

$$\begin{aligned}\lim_{B\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\,du &= \lim_{B\to\infty}\int_{-2\pi B\alpha}^{2\pi B\alpha}\frac{\operatorname{sen}t}{\frac{t}{2B}}\frac{dt}{2\pi B}\\ &= \lim_{B\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-2\pi B\alpha}^{2\pi B\alpha}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt=1. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Así, empleando (3.3), se tiene

$$\begin{aligned}&\lim_{B\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\right)du\\ &=\lim_{B\to\infty}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\right)du\right.\\ &\left.-\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}du+\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\right]\\ &=\lim_{B\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u}-\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha\pi u}\right]\operatorname{sen}2\pi Bu\,du+\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Ahora, observemos que a la función

$$\begin{aligned}h(u)&=\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)\pi u}-\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha\pi u}\\ &=\frac{\pi\alpha\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)-\pi(u-\alpha)\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi(u-\alpha)\pi\alpha\pi u}\end{aligned}$$

la podemos redefinir como una función continua en 0. Para esto, si $u\to 0$ el cociente es $\frac{0}{0}$, luego aplicando la regla de L´Hopital, resulta que el cociente

$$\frac{\pi^2\alpha\cos\pi(u-\alpha)-\pi\operatorname{sen}\pi\alpha}{2\pi^3\alpha u-\pi^3\alpha^2}$$

tiene límite cuando $u\to 0$. Por lo tanto la función $h(u)$ es integrable en $[-\alpha,\alpha]$. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue en (3.4) se tiene que

$$\lim_{B\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\right)du=\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}.$$

Para el segundo caso, consideremos $a<0<-\alpha<b$, entonces $a<\alpha<0<-\alpha<-2\alpha<b$. Haciendo el cambio de variable $u=\alpha+\beta$ y realizando un procedimiento similar al anterior, obtenemos el resultado

$$\lim_{B\to\infty}\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{\operatorname{sen}\pi(u-\alpha)}{\pi(u-\alpha)}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi Bu}{\pi u}\right)du=\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}.$$

$\square$

Lema 3.3. *Sean $\alpha,\beta,x\in\mathbb{R}$, se tiene que*

$$Re\left(\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\int_{-A}^{B}e^{2\pi i\alpha x}e^{2\pi i\beta x}dx\right)d\beta\right]d\alpha\right) \tag{3.5}$$
$$=\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right.$$
$$\left.-\int_a^b\frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right]d\alpha.$$

Demostración. Primero desarrollaremos la parte real de la última integral de (3.5).

$$
\begin{aligned}
&Re\left(\int_{-A}^{B} e^{2\pi i\alpha x}e^{2\pi i\beta x}\,dx\right)\\
&= Re\left(\int_{-A}^{B} (\cos 2\pi\alpha x + i\operatorname{sen} 2\pi\alpha x)(\cos 2\pi\beta x + i\operatorname{sen} 2\pi\beta x)\,dx\right)\\
&= Re\left(\int_{-A}^{B} (\cos 2\pi\alpha x\cos 2\pi\beta x + i\cos 2\pi\alpha x\operatorname{sen} 2\pi\beta x\right.\\
&\left.+ i\operatorname{sen} 2\pi\alpha x\cos 2\pi\beta x - \operatorname{sen} 2\pi\alpha x\operatorname{sen} 2\pi\beta x)\,dx\right)\\
&= Re\left(\int_{-A}^{B} (\cos 2\pi x(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen} 2\pi x(\alpha+\beta))\,dx\right)\\
&= \int_{-A}^{B} \cos 2\pi x(\alpha+\beta)\,dx = \left.\frac{\operatorname{sen} 2\pi x(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right|_{A}^{B}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&Re\left(\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\int_{-A}^{B} e^{2\pi i\alpha x}e^{2\pi i\beta x}dx\right)d\beta\right]d\alpha\right)\\
&= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right.\\
&= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right.\\
&\left.- \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right]d\alpha.
\end{aligned}
$$

$\square$

Utilizaremos este resultado para demostrar el siguiente lema.

Lema 3.4. *Sean $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $a < \gamma < b$. Se tiene que*

$$\int_{-A}^{B} \left| \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i\gamma x} d\gamma \right|^2 dx$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi\alpha} \left[\int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi\beta} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi B(\alpha+\beta) - \operatorname{sen} 2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)} \right) d\beta \right] d\alpha$$

tiende a

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma$$

cuando $A \to -\infty$ y $B \to \infty$.

Nota: La expresión integral del Lema 3.4 no contiene parte imaginaria.

Demostración. Sean $a < \gamma < b$, primero tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{B} \left| \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i\gamma x} d\gamma \right|^2 dx \\
&= \int_{-A}^{B} \left(\int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi\alpha} e^{2\pi i\alpha x} d\alpha) \right) \left(\int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi\beta} e^{2\pi i\beta x} d\beta \right) dx \\
&= \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi\alpha} \left(\int_{-A}^{B} e^{2\pi i\alpha x} \left[\int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi\beta} e^{2\pi i\beta x} d\beta \right] dx \right) d\alpha \\
&= \int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\pi\alpha} \left[\int_{a}^{b} \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\pi\beta} \left(\int_{-A}^{B} e^{2\pi i\alpha x} e^{2\pi i\beta x} dx \right) d\beta \right] d\alpha
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.3, se tiene

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\int_{-A}^{B} e^{2\pi i\alpha x}e^{2\pi i\beta x}dx\right)d\beta\right]d\alpha$$

$$= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right.$$

$$\left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right]d\alpha.$$

Por el Lema 3.2 resulta que

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi B(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right.$$

$$\left. - \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\beta}{\pi\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi A(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha+\beta)}\right)d\beta\right]d\alpha$$

$$= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{2\pi\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right]d\alpha$$

$$= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\right]d\alpha = \int_a^b \left(\frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

$\square$

Ahora expondremos el segundo método para extender la transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$, considerando K el espacio de las funciones escalonadas.

Sea χ_I la función característica del intervalo I. Como primer paso verificaremos la fórmula de inversión $(\widehat{\chi}_I)^\vee = \chi_I$.

Proposición 3.5. *Sea $I = [a, b]$ y χ_I la función característica del intervalo I. Se cumple que $(\widehat{\chi}_I)^\vee = \chi_I$.*

Demostración. Con la intención de facilitar la notación, usaremos f en lugar de χ_I. Entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\gamma) &= \int_a^b e^{-2\pi i\gamma x} dx \\
&= \int_a^b (\cos 2\pi\gamma x - i \operatorname{sen} 2\pi\gamma x)\ dx \\
&= \int_a^b \cos 2\pi\gamma x\ dx - i \int_a^b \operatorname{sen} 2\pi\gamma x\ dx \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma x}{2\pi\gamma}\Big|_a^b - i\left(-\frac{\cos 2\pi\gamma x}{2\pi\gamma}\right)\Big|_a^b \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma} + i\left(\frac{\cos 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\cos 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Para simplificar esta última expresión consideremos, en particular, el intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Observemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma} + i\left(\frac{\cos 2\pi\gamma b}{2\pi\gamma} - \frac{\cos 2\pi\gamma a}{2\pi\gamma}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} + \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} + i\left(\frac{\cos \pi\gamma}{2\pi\gamma} - \frac{\cos \pi\gamma}{2\pi\gamma}\right) \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \pi\gamma}{2\pi\gamma} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma},
\end{aligned}$$

Por lo que $\widehat{f}(\gamma) = \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma}$.

Ahora debemos demostrar que la función

$$f_{ab}(x) = \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i\gamma x} d\gamma$$

tiende a f en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $a \to -\infty$ y $b \to \infty$, es decir, que se cumple la fórmula de inversión para funciones sobre intervalos compactos. Observemos que por el Lema 3.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f_{ab} - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \right|^2 dx \\
&\quad - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \cos 2\pi\gamma x \; d\gamma \right] dx + 1 \\
&= \int_a^b \left(\frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma - 2 \int_a^b \left(\frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma + 1. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Verifiquemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \right)^2 d\gamma = 1.$$

Por integración por partes, sea $u = \operatorname{sen}^2 \gamma$, $du = 2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma d\gamma$, $dv = \frac{d\gamma}{\gamma^2}$, $v = -\frac{1}{\gamma}$ y con una sustitución trigonométrica se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\gamma^2} d\gamma &= - \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\gamma} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma}{\gamma} d\gamma \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} d\gamma \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \pi\gamma}{\pi\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \right)^2 d\gamma = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1.$$

Usando esto en (3.6), concluimos que $\|f_{ab} - f\|_2 = 0$, cuando $a \to -\infty$ y $b \to \infty$.

Por lo tanto se verifica que $f_{ab} \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$ con la norma $\| \cdot \|_2$.

$\square$

Sea $f \in K$. Esta función es de la forma $\sum c_I \chi_I$, una suma de múltiplos complejos de funciones características de un número finito de intervalos acotados I. Para tal función, la fórmula de inversión $(\widehat{f})^\vee = f$ se cumple, ya que en cada múltiplo complejo de funciones características, está definida la fórmula de inversión.

Emplearemos la Proposición 3.5 para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Sean I y J intervalos acotados. Entonces*

$$\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \langle \chi_I, \chi_J \rangle.$$

Demostración. Como $\widehat{\chi}_I$ y $\widehat{\chi}_J$ pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle$ existe, y puede ser evaluado como sigue:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}_I(\gamma) \overline{\widehat{\chi}_J}(\gamma) d\gamma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi}_I(\gamma) \left(\int_J e^{2\pi\pi i \gamma x} dx \right) d\gamma \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \widehat{\chi}_I(\gamma) \left(\int_J e^{2\pi i \gamma x} dx \right) d\gamma \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_J \left(\int_{-n}^{n} \widehat{\chi}_I(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \right) dx.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.5, la segunda integral tiende a χ_I en $L^2(\mathbb{R})$, cuando $n \to \infty$. Así

$$\langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \int_J \chi_I(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(x) \overline{\chi_J(x)} dx = \langle \chi_I, \chi_J \rangle.$$

$\square$

La identidad de Plancherel se sigue del paso anterior.

Corolario 3.7. *Si $f \in K$, entonces*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Demostración. Sea $f \in K$ luego

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum c_I \overline{c_J} \langle \widehat{\chi}_I, \widehat{\chi}_J \rangle = \sum c_I \overline{c_J} \langle \chi_I, \chi_J \rangle = \|f\|_2^2.$$

$\square$

3.2. Extensión a $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección se procede a extender la transformada de Fourier de K a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Primero debemos mostrar que K es denso en $L^2(\mathbb{R})$, para esto, consideremos la siguiente definición.

Definición 3.8. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es regulada sobre $I = [a, b]$, si para todo $\epsilon > 0$ existe una función escalonada $s_\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Además de la siguiente caracterización de las funciones reguladas.

Teorema 3.9. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es una función regulada, si y sólo si, tiene límites laterales en cada punto del intervalo $I = [a, b]$.*

Demostración. Notemos primero que toda función escalonada tiene límites laterales en cada punto. Para probar que la función regulada f tiene la misma propiedad, sea $c \in [a, b)$; probaremos que f tiene límite lateral derecho en c. Para esto, sea $\epsilon > 0$ y $s_\epsilon : I \to \mathbb{R}$ una función escalonada tal que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Como s_ϵ es una función escalonada, además $\lim_{x \to c^+} s_\epsilon(x)$ esta definido, luego, existe $\delta_\epsilon(c) > 0$ tal que si $x,\ y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$, resulta que $s_\epsilon(x) = s_\epsilon(y)$. Por lo tanto, si $x\ , y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - s_\epsilon(x)| + |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(y)| + |s_\epsilon(y) - f(y)| \\ &\leq \epsilon + 0 + \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, el criterio de Cauchy implica que el límite lateral derecho existe, la existencia del límite lateral izquierdo en $c \in [a, b)$ se prueba de la misma manera.

Ahora supongamos que f tiene límites laterales en cada punto de I, el criterio de Cauchy para la existencia de los límites laterales garantiza que, dado $\epsilon > 0$, existe una función medidora δ_ϵ sobre I tal que si $t \in I$ y $y_1,\ y_2 \in (t - \delta_\epsilon(t), t)$ y contenidos en $[t, t + \delta_\epsilon(t)]$, entonces $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \epsilon$. Ahora sea $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i]), t_i\}_{i=1}^n$ una partición $\delta_\epsilon - fina$ de I. Definimos $s_\epsilon(x) = f(z)$ si z no es uno de los números

$$a = x_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \leq \cdots \leq t_n \leq x_n = b$$

sobre el intervalo $(x_{i-1}, t_i) \subseteq [t_i - \delta_\epsilon(t_i), t_i)$, definimos $s_\epsilon = f(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i))$ así que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(\frac{1}{2}(x_{i-1} + t_i))| \leq \epsilon$$

de manera similar, sobre el intervalo $(t_i, x_i) \subseteq [t_i, t_i + \delta_\epsilon(t_i))$, definimos $s_\epsilon = f(\frac{1}{2}(t_i + x_i))$ así que

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(\frac{1}{2}(t_i + x_i))| \leq \epsilon$$

Por lo tanto las funciones escalonadas s_ϵ satisfacen $|f(x) - s_\epsilon(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in I$. Como ϵ es arbitrario, concluimos que f es una función regulada. □

Nota: Toda función continua es una función regulada.

A continuación demostraremos la densidad de las funciones escalonadas en $L^2(\mathbb{R})$.

Lema 3.10. *El espacio de las funciones escalonadas en* $(\mathbb{R})$*,* K*, es denso en* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Demostración. Sabemos que el espacio de funciones continuas con soporte compacto, $C_c(\mathbb{R})$, es un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$, ahora consideremos $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$ entonces existe una función $f_c \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f_c - f\|_2 < \epsilon/2$, además el conjunto de las funciones escalonadas son densas en el conjunto F de las funciones reguladas de valores reales sobre $[a, b]$, pues dada f_c función regulada y $\epsilon > 0$ existe una función escalonada φ tal que $|f_c - \varphi| < \epsilon/\sqrt{2}\sqrt{b-a}$. Entonces

$$\int_a^b |f_c - \varphi|^2 \leq (b-a)\|f_c - \varphi\|^2 < \epsilon^2/\sqrt{2}^2,$$

y por lo tanto $\|f_c - \varphi\|_2 < \epsilon/2$. En particular si $f_c \in C_c(\mathbb{R})$ entonces $f_c \in F$, luego

$$\begin{aligned} \|\varphi - f\|_2 = \|\varphi - f_c + f_c - f\|_2 &\leq \|\varphi - f_c\|_2 + \|f_c - f\|_2 \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Así las funciones escalonadas son densas en $L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

Ahora hacemos el proceso de extensión de la transformada de Fourier de K a $L^2(\mathbb{R})$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe $\{f_n\}$ una sucesión de funciones escalonadas de tal manera que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$. Por la identidad de Plancherel,

$$\begin{aligned}\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|(f_n - f_m)\widehat{\ }\|_2 &= \|f_n - f_m\|_2 \\ &\leq \|f_n - f\|_2 + \|f_m - f\|_2.\end{aligned}$$

Así que podemos definir $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ y este límite existe en $L^2(\mathbb{R})$.

Para verificar que está bien definida, sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces existe una sucesión de funciones $\{h_n\} \subset K$, que cumple que $\lim_{n\to\infty} \|h_n - f\|_2 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|h_n - g\|_2 = 0$ por la densidad de K, luego $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{h_n}$ y $\widehat{g} = \lim_{n\to\infty} \widehat{h_n}$, entonces si $f = g$ se cumple que $\widehat{f} = \widehat{g}$.

Además la transformada de Fourier así definida es una aplicación lineal.

Teorema 3.11. *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\widehat{\alpha f + g} = \alpha\widehat{f} + \widehat{g}$.*

Demostración. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, luego $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ con $\{f_n\} \subset K$ y $\widehat{g} = \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}$ con $\{g_n\} \subset K$. Dado que la transformada de Fourier es lineal en K, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha f + g} = \lim_{n\to\infty} (\widehat{\alpha f_n + g_n}) &= \lim_{n\to\infty} (\alpha\widehat{f_n} + \widehat{g_n}) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n} + \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n} = \alpha\widehat{f} + \widehat{g}.\end{aligned}$$

$\square$

Ahora demostramos la identidad de Plancherel en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.12. *Si* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *entonces* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Demostración. Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe $\{f_n\} \subset K$ tal que

$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2.$$

Como en K se cumple la identidad de Plancherel se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Por lo tanto $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

$\square$

Así que la transformada de Fourier es una aplicación inyectiva.

Se demuestra de manera análoga que la transformada inversa de Fourier se extiende de K a $L^2(\mathbb{R})$ y tiene las siguientes propiedades.

Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

- $(\alpha f + g)^\vee = \alpha \check{f} + \check{g}$.
- $\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \langle f, g \rangle$.
- $\|\check{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Se cumple la fórmula de inversión en $L^2(\mathbb{R})$ de la siguiente manera.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe $\{f_n\} \subset K$ tal que $\|f - f_n\|_2 \to 0$, por consecuencia $\|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 \to 0$.

Ahora fijémonos en

$$\begin{aligned}\|f-\widehat{f}^{\vee}\|_2 &= \|f-f_n+f_n-\widehat{f}^{\vee}\|_2\\ &\leq \|f-f_n\|_2+\|\widehat{f}^{\vee}-\widehat{f}_n^{\vee}\|_2\\ &= \|f-f_n\|_2+\|\widehat{f}-\widehat{f}_n\|_2\end{aligned}$$

Por lo tanto $f=\widehat{f}^{\vee}$.

Así que la transformada de Fourier es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{R})$ sobre $L^2(\mathbb{R})$.

3.3. Relación entre los dos métodos

En esta sección, hacemos algunas observaciones con respecto a los dos métodos, además algunas condiciones que no se tenían al inicio de la prueba, son verdaderas al finalizar el método de extensión.

Fijémonos que en $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ se puede aplicar el segundo método, es decir, teniendo definida la transformada de Fourier y la identidad de Plancherel en este espacio, se extiende dicha transformada e identidad por medio de la densidad de $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$.

En un inicio, no podíamos aplicar el primer método al espacio K, de las funciones escalonadas, ya que no sabíamos si la imagen de las funciones escalonadas bajo la aplicación de la transformada de Fourier fuera densa en $L^2(\mathbb{R})$, sin embargo, una vez finalizada la extensión a este espacio se concluye que, se cumple esta propiedad.

En efecto, dada $f\in L^2(\mathbb{R})$, por la identidad de Plancherel se tiene que $f^{\vee}\in L^2(\mathbb{R})$, entonces existe $\{f_n\}\subset K$ tal que

$\|f^{\vee} - f_n\| \to 0$. Nuevamente por la identidad de Plancherel $\|\widehat{f^{\vee}} - \widehat{f_n}\| \to 0$, puesto que $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple la fórmula de inversión, así que $\|f - \widehat{f_n}\| \to 0$. Por lo tanto la imagen de K bajo la transformada es densa en $L^2(\mathbb{R})$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ con transformada de Fourier $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ la cual es extendida por el primer método y también por el segundo método, ¿se ha extendido la misma transformada de Fourier?

La respuesta es afirmativa, supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ luego por el primer método existe $\widehat{f}_L \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_L\|_2 \to 0$ con $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, por otro lado, para la misma función f, existe $\{g_n\} \subset K$ tal que $\|g_n - f\|_2 \to 0$ entonces $\|\widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 \to 0$. Por demostrar que $\|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 \to 0$.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 &= \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_n + \widehat{f}_n - \widehat{g}_n + \widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 \\
&\leq \|\widehat{f}_L - \widehat{f}_n\|_2 + \|\widehat{g}_n - \widehat{f}_K\|_2 + \|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2.
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo tender n a infinito, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}_L - \widehat{f}_K\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f_n - g_n)\widehat{\ }\|_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|f_n - f + f - g_n\|_2 \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ambas extensiones son equivalentes.

Conclusiones

En esta tesis se expusieron dos métodos diferentes de extender la transformada de Fourier de los conjuntos ya mencionados a $L^2(\mathbb{R})$, sin embargo se demuestra que no importa que método utilicemos, en ambos casos se extiende a la misma función en $L^2(\mathbb{R})$.

Una de las propiedades que emplean ambos métodos es la densidad en $L^2(\mathbb{R})$ de subconjuntos que están en $L^1(\mathbb{R})$, además de cumplir la identidad de Plancherel en estos subconjuntos. Estas propiedades son fundamentales para poder extender la trasformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$. Así que nos preguntamos lo siguiente: ¿Todo subconjunto que cumpla con las propiedades ya mencionadas se podrá extender la transformada de Fourier de éste subconjunto a $L^2(\mathbb{R})$? en la pregunta anterior se requiere un subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$ para que este definida la transformada de Fourier en ese subconjunto, pero, otra pregunta más compleja sería ¿podemos considerar un subconjunto que no este en $L^1(\mathbb{R})$ en el cual este definida la transformada de Fourier, cumpla con la identidad de Plancherel en éste subconjunto y sea denso en $L^2(\mathbb{R})$?

Bibliografía

[1] Bartle Robert G., *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 32, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[2] Bartle Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jhon Wiley and Sons,1995

[3] Bachman George, Narici Lawrence, Beckenstein Edward, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlang, New York. Inc. 1991.

[4] H. Dym, H. P. McKean *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.

[5] Kolmogorov, A.N., Fomin S.V., *Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional*, Mir, Moscu, 1972.

[6] Pinsky, Mark A., *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets* Pacific Grove, Australia, CA : Brooks/Cole, c2002.

[7] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Vol. 3, 1987.

[8] Weidmann Joachim, *Lienar Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York Inc., 1980.