Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Modelos del hiperespacio $C(X)$ y $\mathrm{Cono}(X)$

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Daniel Domínguez Málaga

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 10 de septiembre del 2024.

Con todo cariño para mis padres:

Candelario Domínguez Domínguez,
Maribel Malaga Malaga.

Y a mi querida hermana:

Alondra Gissell Domínguez Malaga.

Agradecimientos

La culminación de esta tesis representa para mi, la finalización de una de mis metas iniciadas allá por el año 2016. La finalización de este trabajo conllevo un arduo esfuerzo y dificultades que se presentaron en la realización de este proyecto, por tanto, en natural que en uno invada un natural, pero muy humano egocentrismo que lleva a uno a concentrar la mayor parte del mérito en una sola persona. No obstante, esto no es del todo cierto, ya que la terminación de tal trabajo no hubiese sido posible sin la participación de buenas personas que facilitaron esta tarea, es por ello, que considero este, un buen espacio para expresar mi gratitud a aquellas personas que me acompañaron en este camino.

Quiero comenzar dándole las gracias a mi familia. A mi querido padre, por apoyarme en todo lo que me propongo y desearme éxito en ello. A mi querida madre, por confiar en mí y en este proyecto. Y por último, a mi querida hermana, gracias por esperar tanto de mi.

También quiero agradecer a aquellos profesores que me acompañaron a lo largo de mi formación, al Dr. Iván Martínez, Dr. David Herrera y la Dra. Araceli Juárez, gracias a ellos pude tener una buena formación académica e inspiación para seguir aprendiendo. Un agradecimiento especial al M.C Felipe de Jesús Aguilar por sus consejos y observaciones que fueron de gran ayuda para la finalización de este trabajo y desde luego al Dr. Fernando Macías por haberme aceptado a trabajar con usted.

Por último, quiero agradecerle a mi novia, Yadira, por haberme acompañado de principio a fin en la realización de este trabajo, por tu apoyo en el mismo que fue de gran ayuda y que aprecio inmensamente.

Índice general

Introducción

El trabajo que se expone en esta tesis esta enmarcado en una rama de la topología llamada *teoría de continuos*. Esta teoría abarca una gran cantidad de subramas, no obstante, solo nos limitaremos a presentar algunos resultados que nos proporcionan técnicas para la construcción de continuos, en particular presentaremos las *intersecciones anidadas* y las *descomposiciones semi-continuas superiores*, siguiendo lo expuesto en los capítulos 1 y 3 de [15]. También, presentaremos el modelo geométrico del hiperespacio de subcontinuos del continuo que se le conoce como la circunferencia con una espiral tales resultados se extrajeron del capitulo II de [8]. El propósito de esta tesis es desarrollar de manera exhaustiva los resultados expuestos en los capítulos anteriormente mencionados, de tal manera que sean más amenas y accesibles, para aquellos quienes quieran conocer o introducirse en estos temas. Para ese propósito este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presentarán las definiciones correspondientes para el desarrollo de la teoría expuesta en este trabajo, y daremos algunos ejemplos de continuos interesantes, para culminar con el resultado principal de ese capitulo, las intersecciones anidadas. Una de las aplicaciones de este resultado es la construcción de un continuo indescomponible.

En el capítulo 2, se estudian las descomposiciones semi-continuas superiores. A grandes rasgos, una descomposición es un espacio topológico que se construye a partir de un espacio topológico X y una partición $\mathcal{D}$ (de ahora en adelante el símbolo $\mathcal{D}$ denotara una partición de algún conjunto), al conjunto $\mathcal{D}$ se le dotará de cierta topología la cual denotaremos por $\mathscr{T}(\mathcal{D})$, al espacio topológico resultante $(\mathcal{D}, \mathscr{T}(\mathcal{D}))$ es lo que se le conocerá como espacio de descomposición. El objetivo de estudiar los espacios de descomposición es, como mencionamos anteriormente, obtener nuevos continuos, no obstante, uno de los requisitos para que una descomposición lo sea, es que esta debe ser un espacio de Hausdorff. Probar esta última condición no siempre sera fácil, es aquí donde, el que una descomposición sea semi-continua superior jugará un papel importante, ya que ésta característica dará una condición necesaria y suficiente, para que una descomposición sea un espacio de Hausdorff. Todos estos detalles serán expuestos y desarrollados en este capítulo. Otros conceptos a tratar serán los de *conjunto $\mathcal{D}$-saturado* y la *función proyección natural* π, estos son de gran importancia para caracterizar a las descomposiciones semi-continuas superiores.

En el capitulo 3, se analizan los conceptos de *cono topológico* de un espacio topológico cualquiera. Este no es más que un espacio de descomposición. También, se dará la construcción del *cono geométrico*, para luego ver que todo cono topológico de un espacio métrico compacto (*compactum*) es homeomorfo a su cono geométrico. Este resultado será de gran ayuda para mostrar que el hiperespacio de la circunferencia con una espiral es homeomorfo a su cono geométrico. Por tanto, el cono geométrico será el modelo geométrico del hiperespacio de la circunferencia con una espiral, este resultado planteará algunas interrogantes que se expondrán a lo largo del capitulo.

Los interesados en leer este trabajo deberán estar familiarizados con la teoría de espacios métricos y de la topología general. Conocer algunos resultados de estas áreas será de gran ayuda para el entendimiento ameno de lo tratado en esta tesis. A manera de recomendación, pueden consultarse [22] y [13].

Capítulo 1

Preliminares

Empezaremos dando la notación que se usará a lo largo de este trabajo. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán a los números naturales, enteros, reales y complejos respectivamente. Para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, el símbolo $\mathbb{R}^n$ denotará a el conjunto

$$\{(x_i)_{i=1}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

a este conjunto le llamaremos el *conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de números reales*. A el conjunto $\mathbb{R}^n$ junto con la métrica euclidiana ([22, ejemplo 5.4]) le llamaremos el n-espacio euclídeo. Cuando consideremos un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ estaremos asumiendo que hereda la métrica euclidiana y la topología que induce tal métrica.

Las literales X, Y serán reservadas para denotar a un espacio métrico o un espacio topológico respectivamente, según amerite la situación. Empleáremos los símbolos $(X, \mathscr{T})$ y (X, d) para denotar un espacio topológico y un espacio métrico respectivamente, donde los símbolos d y $\mathscr{T}$ representarán a una métrica y una topología cualquiera respectivamente, por ultimo, $\mathscr{B}$ representará una base para una topología dada y el símbolo $\mathscr{T}(d)$ representará a la topológia inducida por la métrica d (véase [5, págs.182-183]).

Para un espacio métrico (X, d) dado, y para $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, el símbolo $B_r(x)$, donde $x \in X$, representará a el conjunto $\{a \in X : d(a, x) < r\}$ el cual le llamaremos *la bola abierta con centro en x y radio r*.

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el símbolo $\mathrm{cl}_X(A)$ denotará a la cerradura de A en X, en algunas ocasiones se omitirá la referencia al espacio X si no hay riesgo de confusión. Si B es un subespacio de un espacio topológico X, y A un subconjunto de B, el símbolo $\mathrm{cl}_B(A)$ representa la cerradura de A en B.

En lo sucesivo, se aceptará que un espacio topológico X es compacto, si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita (véase [22, definición 13.3-13.6, pág. 127]). Si se está trabajando en un n-espacio euclídeo, se asumirá que un subespacio A de este, es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Dado un espacio topológico X, a una sucesión en X la denotaremos como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, el símbolo $x_n \to x$ representa a una sucesión la cual converge a $x \in X$. Si X es un espacio métrico, asumiremos que X es compacto si y solo si toda sucesión admite una subsucesión convergente a algún punto en X . De igual manera, en algunas ocasiones será conveniente usar la definición de compacidad que se dio al principio de este párrafo. Cuando se diga que un espacio topológico X es conexo, estaremos asumiendo que no existen dos subconjuntos A, B de X lo cuales son no vacíos, ajenos y abiertos en X cuya unión es X, la palabra "abierto" se puede cambiar por "cerrado" según sea conveniente. Muchas de las definiciones expuestas anteriormente se pueden encontrar en [22] y [13], en esos textos también pueden encontrar más resultados acerca de la compacidad y la conexidad.

1.1 Continuos

Definición 1.1. (1) Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

(2) Un *subcontinuo* es un continuo que está contenido en algún espacio topológico.

(3) El término *no degenerado* significa que el espacio consiste de más de un punto.

Ejemplo 1.2. El intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es un espacio compacto por [22, teorema 13.22] ya que es cerrado y acotado. Es conexo, ya que todo intervalo en la recta real lo es, tal y como se muestra en [22, teorema 12.8]. Por tanto, el intervalo $[0,1]$ es un continuo.

Recordaremos la definición de homeomorfismo entre espacios topológicos:

Definición 1.3. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si cumple las siguientes condiciones:

$(H1)$ f es continua y biyectiva.

$(H2)$ f^{-1} es una función continua.

Decimos que los espacios X, Y son homeomorfos si existe un homemorfismo $f : X \to Y$. Este hecho se denota como $X \approx Y$.

Ejemplo 1.4. La función $h : \mathbb{R} \to (-1,1)$ dada por $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ es un homemorfismo y por tanto, $\mathbb{R} \approx (-1,1)$.

Demostración. $(H1)$ Veamos primeramente que h es una función biyectiva. Para exhibir la inyectividad de h basta mostrar que h es una función estrictamente creciente. Sean x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x_1 < 0$ y $x_2 = 0$, podemos notar que $1+|x_1| > 0$ por lo que $\dfrac{1}{1+|x_1|} > 0$ y ya que $x_1 < 0$ se tiene que $\dfrac{x_1}{1+|x_1|} < 0$, es decir, $h(x_1) < h(x_2)$.

Caso 2. Si $x_1 = 0$ y $x_2 > 0$, como ya hemos visto, se cumple que $\dfrac{1}{1+|x_2|} > 0$ y dado que $x_2 > 0$ entonces $\dfrac{x_2}{1+|x_2|} > 0$, es decir, $h(x_1) < h(x_2)$.

Caso 3. Si $x_1, x_2 > 0$ tenemos lo siguiente: $x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1+x_2}{x_2} < 1 + \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1+x_1}{x_1} \Rightarrow \dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_1}{1+|x_1|} < \dfrac{x_2}{1+x_2} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$ con lo cual $h(x_1) < h(x_2)$.

Caso 4. Si $x_1, x_2 < 0$ entonces por el caso 3, se sigue que $h(-x_2) < h(-x_1)$ ya que $-x_2 < -x_1$, podemos notar que h es una función impar (es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $h(-x) = -h(x)$), con lo cual $h(x_1) < h(x_2)$.

Caso 5. Si $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ entonces por los casos 1 y 2 se sigue que $h(x_1) < 0 < h(x_2)$.

En cualquiera de los casos anteriores, se muestra que h es creciente, y por tanto, una función inyectiva.

Veamos ahora que la función h es suprayectiva. Sea $y \in (-1, 1)$, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $y = 0$ basta tomar a $x = 0$ de tal manera que $h(x) = 0 = y$.

Caso 2. Si $y \neq 0$ tomemos a $x = \dfrac{y}{1-y}$. Uno puede verificar que $h(x) = y$.

Por tanto, h es una función suprayectiva y en consecuencia biyectiva. Veamos ahora que h es continua. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Notemos que $|x_n| \to |x|$ con lo cual $\dfrac{x_n}{1+|x_n|} \to \dfrac{x}{1+|x|}$, asi, $h(x_n) \to h(x)$, por lo que h es continua en x. Como x fue arbitrario, se sigue que h es continua en todo $\mathbb{R}$.

$(H2)$ Notemos que $h^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ viene determinada por $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ la cual se puede verificar que es continua. ■

La propiedad ser un continuo es una invariante topológica bajo homeomorfismos (esto es que, si X es un espacio topológico que tiene una propiedad P, todo espacio Y homeomorfo a X también tiene la propiedad P), tal y como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.5. *Sean X, Y espacios topológicos tales que $X \approx Y$. Si X es un continuo, entonces Y también es un continuo.*

Demostración. Sea $h : (X, \mathscr{T}(d_X)) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ un homeomorfismo (donde d_X es una métrica en X y es tal que $\mathscr{T}(d_X) = \mathscr{T}_X$) la compacidad y la conexidad de $h(X) = Y$ se obtienen de [22, proposición 12.11] y de [22, proposición 13.15], respectivamente. Por ultimo, mostraremos que Y es un espacio métrico, se puede verificar que d_Y es una métrica sobre el conjunto Y donde $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ está dada por $d_Y(y, y') = d_X(h^{-1}(y), h^{-1}(y'))$ con $h^{-1} : (Y, \mathscr{T}_Y) \to (X, \mathscr{T}(d_X))$. ■

1.2 Algunos ejemplos de continuos

En lo sucesivo, cuando se muestre que un subconjunto de un n-espacio euclídeo es un continuo, solo mostraremos la compacidad y la conexidad de tal conjunto ya que tal subconjunto hereda la métrica de dicho espacio.

Definición 1.6. Un *arco* es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$ (véase la figura 1.1).

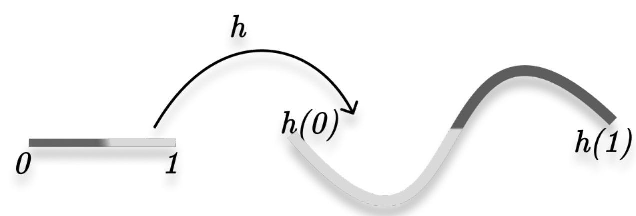


Figura 1.1: El arco.

Observación 1.7. Todo *arco* es un *continuo* por el ejemplo 1.2 y la proposición 1.5.

Definición 1.8. Sea X un espacio métrico conexo. Un punto $p \in X$ es un *punto de corte* de X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo. Si p no es punto de corte de X entonces llamaremos a p un *punto de no corte*.

Ejemplo 1.9. Para cada $a \in (0,1)$, a es un punto de corte de $(0,1)$ dado que el conjunto $(0,1) \setminus \{a\} = (0,a) \cup (a,1)$ no es conexo, así, $(0,1)$ tiene infinitos puntos de corte.

Ejemplo 1.10. El intervalo cerrado $[0,1]$ tiene infinitos puntos de corte, pero 0 y 1 son puntos de no corte ya que $[0,1] \setminus \{0\} = (0,1]$ y $[0,1] \setminus \{1\} = [0,1)$ los cuales siguen siendo conexos.

Proposición 1.11. *Sean X, Y espacios métricos conexos y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces p es un punto de corte de X si y solo si $h(p)$ es un punto de corte de Y.*

Demostración. Sea p un punto de corte de X, supongamos que $h(p)$ no es un punto de corte de Y entonces $Y \setminus \{h(p)\}$ es conexo, como h^{-1} es continua, $h^{-1}(Y \setminus \{h(p)\})$ es conexo, pero $h^{-1}(Y \setminus \{h(p)\}) = X \setminus \{p\}$ lo que contradice el hecho de que p es un punto de corte de X.

Recíprocamente, sea $h(p)$ un punto de corte de Y y supongamos que p no es un punto de corte de X, entonces $X \setminus \{p\}$ es conexo, como h es continua se sigue que $h(X \setminus \{p\})$ es conexo, pero $h(X \setminus \{p\}) = Y \setminus \{h(p)\}$ es conexo, lo que contradice el hecho de que $h(p)$ es un punto de corte de Y. ■

Proposición 1.12. *Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo, entonces*

$$\{h(0), h(1)\} = \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $x \in \{h(0), h(1)\}$ entonces $x = h(0)$ o $x = h(1)$. Si $x = h(0)$ entonces este no puede ser un punto de corte de $[0,1]$, ya que de ser el caso tendríamos por el ejemplo 1.10 y por la proposición 1.11 que 0 es un punto de corte de $[0,1]$, lo cual no es posible, así $h(0) = 0$ o $h(0) = 1$ y por tanto $x \in \{0,1\}$, de manera similar se muestra que si $x = h(1)$ entonces $h(1) = 0$ o $h(1) = 1$, luego, dado que h es inyectiva la igualdad se cumple. ∎

Lema 1.13. *Sean A un arco, $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo. Si $h' : [0,1] \to A$ es cualquier otro homeomorfismo, entonces*

$$\{h(0), h(1)\} = \{h'(0), h'(1)\}.$$

Demostración. Nótese que $h^{-1} \circ h' : [0,1] \to [0,1]$ es un homeomorfismo, se sigue por la proposición 1.12 que $\{(h^{-1} \circ h')(0), (h^{-1} \circ h')(1)\} = \{0,1\}$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\{h(0),\, h(1)\} &= h\left(\{0,\, 1\}\right)\\ &= h\left(\left\{\left(h^{-1}\circ h'\right)(0), \left(h^{-1}\circ h'\right)(1)\right\}\right)\\ &= \left\{h'(0),\, h'(1)\right\}.\end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad se cumple. ∎

Observación 1.14. Los puntos $h(0)$ y $h(1)$ son puntos especiales de A, los cuales se les llama *puntos extremos de A*. Cuando decimos que A es un arco de $h(0)$ a $h(1)$ queremos decir que A es un arco con puntos extremos $h(0)$ y $h(1)$ (véase la figura 1.1).

1.2.1 Celdas y esferas

Definición 1.15. Se dice que un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es *convexo* si tiene la siguiente propiedad geométrica: para cualesquiera dos puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en K y $t \in (0,1)$, el punto

$$\mathbf{z}_t = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

también pertenece a K.

Ejemplo 1.16. El conjunto $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < a < b\}$ es convexo.

Demostración. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in A$ donde $\mathbf{a} = (a_1, b_1)$, $\mathbf{b} = (a_2, b_2)$, $0 < a_1 < b_1$ y $0 < a_2 < b_2$. Notemos que $\mathbf{z}_t = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ con $t \in (0,1)$, es de la forma:

$$\mathbf{z}_t = \left((1-t)\, a_1 + t a_2,\; (1-t)\, b_1 + t b_2\right)$$

Dada nuesta suposición tenemos que: $0 < b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ y $0 < t$, $1-t$ con lo cual $0 < (1-t)(b_1 - a_1) + t(b_2 - a_2)$ de esto se sigue que:

$$0 < (1-t)a_1 + t a_2 < (1-t)b_1 + t b_2.$$

Por tanto, $\mathbf{z}_t \in A$. ∎

Definición 1.17. Para cada punto $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, se define su norma como:

$$||\mathbf{x}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, una *n-celda* es un espacio topológico el cual homeomorfo a la bola cerrada n-dimensional B^n en $\mathbb{R}^n$ donde:

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}.$$

Observación 1.18. El subespacio B^n de $\mathbb{R}^n$ es compacto por [22, teorema 13.22]. B^n es convexo, ya que para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B^n$ y $t \in (0,1)$ el punto $\mathbf{z}_t = (1-t)x + ty$ también pertenece a B^n debido a que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{z}_t|| = ||(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}|| &\leq |1-t| \cdot ||\mathbf{x}|| + |t| \cdot ||\mathbf{y}|| \\ &\leq (1-t) + t = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, por [22, ejemplo 12.22, pág. 122] B^n es conexo. Así, B^n es un continuo, entonces por la proposición 1.5, toda n-celda es un continuo.

Definición 1.19. Sea $n \in \mathbb{N}$, una *n-esfera* es un espacio homeomorfo a la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ donde:

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| = 1\}.$$

Una 1-esfera es llamada *curva cerrada simple*.

Definición 1.20. Sea X un espacio métrico, decimos que el espacio X es *arco conexo* si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un arco, contenido en X cuyos puntos extremos sean x, y.

Ejemplo 1.21. Todo intervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$ es arco conexo.

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ y definamos $h : [0,1] \to [a, b]$ como $h(t) = x + t(y - x)$. Podemos notar que h es un homemorfismo y es tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$. ∎

Proposición 1.22. *Sea X un espacio topológico. Si X es arco conexo entonces X es conexo.*

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario pero fijo de X. Para cualquier otro punto $y \in X$ con $y \neq x_0$, existe un arco A_y cuyos puntos extremos son x_0, y. Sea $\mathcal{A} = \{A_y : y \in X \setminus \{x_0\}\}$ podemos notar lo siguiente:

(1) Para cada $y \in X \setminus \{x_0\}$, A_y es un subconjunto conexo.

(2) $x_0 \in A_y$ para cada $y \in Y$ y $\displaystyle\bigcup_{y \in X \setminus \{x_0\}} A_y = X$.

Se sigue por [5, teorema 1.5, pág. 108] que X es conexo. ∎

Observación 1.23. El subespacio S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ es compacto por [22, teorema 13.22]. S^n es arco conexo, ya que para cualesquiera $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in S^n$ la función $\alpha : [0,1] \to \alpha([0,1]) \subset S^n$ dada por

$$\alpha(t) = \frac{t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}}{||t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}||}$$

es continua, biyectiva sobre su imagen directa y es tal que $\alpha(0) = \mathbf{a}$ y $\alpha(1) = \mathbf{b}$. Se sigue que S^n es conexo por la proposición 1.22. Por tanto, toda n-esfera es un continuo.

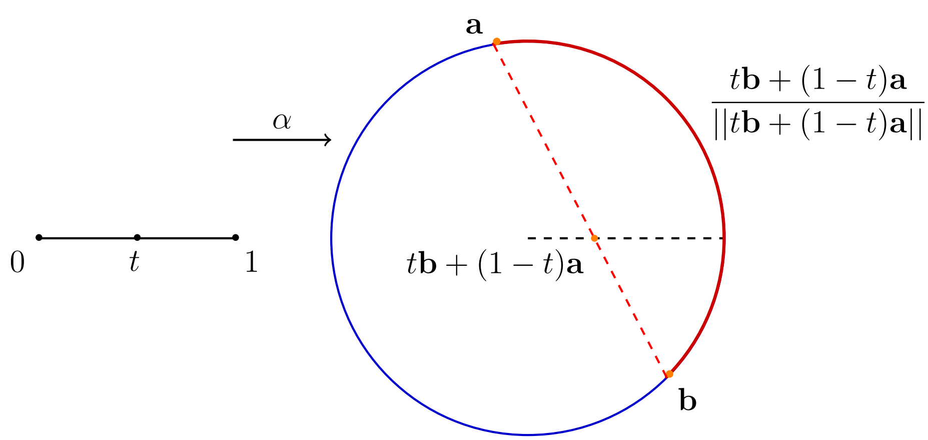


Figura 1.2: Arco conexidad de la 1-esfera.

1.2.2 Otros continuos especiales

Definición 1.24. Un *cubo de Hilbert* el cual denotaremos como I^∞, es un espacio homeomorfo al producto cartesiano (véase [10, pág. 147]) numerable

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{con } I_n = [0,1] \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

con la topología producto (véase [10, pág. 147]).

Observación 1.25. El cubo de Hilbert es un espacio métrico, ya que la función $\rho : \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

donde $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, es una métrica para este espacio (véase [10, págs. 212-213]), es compacto por [11, teorema 4, pág. 17] y conexo por [11, teorema 11, pág. 137], se sigue por la proposición 1.5 y de la definicion 1.24, que todo cubo de Hilbert es un continuo.

Los continuos 1.6, 1.17, 1.19 y 1.24, son arco conexos. El siguiente continuo es un ejemplo clásico, el cual no tiene la propiedad de ser arco conexo, tal y como se muestra en [3, pág. 273].

Definición 1.26. El continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ es la cerradura $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ de W donde

$$W = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$$

Observación 1.27. El subespacio $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ de $\mathbb{R}^2$ es compacto por [22, teorema 13.22]. Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, denotamos por G_f a la gráfica de la función f el cual es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y\}$. Como el intervalo $(0,1]$ es conexo, se sigue por [22, corolario 12.13] que G_f es conexo, dado que $G_f = W$ concluimos que W es conexo. Así, por [22, proposición 12.19] $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ es conexo. Por tanto, $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ es un continuo.

Presentaremos el siguiente teorema para poder visualizar de una mejor manera al continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Teorema 1.28. *Sea* $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ *donde* W *es el conjunto descrito en la definición 1.26. Entonces* $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W) = R \cup W$ *donde* $R = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ *(véase la figura 1.3).*

Demostración. $(\subset)$ Sea $\mathbf{x} = (x_0, y_0) \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$ entonces existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en W tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, esto es que

$$\left(x_n, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \right) \to (x_0, y_0)$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in (0,1]$. Con lo cual $x_0 \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}((0,1]) = [0,1]$, conforme a esto, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x_0 = 0$, sabemos que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$, por lo que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \to y_0$ entonces $-1 \leq y_0 \leq 1$ y por tanto $(x_0, y_0) \in R$.

Caso 2. Si $0 < x_0 \leq 1$, como la función f descrita en la observación 1.27 es continua, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$ ya que $x_n \to x_0$, esto es que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \to \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_0}\right)$ pero $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \to y_0$, puesto que el límite de una sucesión es único, se tiene que $y_0 = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_0}\right)$. Por tanto $(x_0, y_0) \in W$.

En cualquiera de los dos casos se cumple que $\mathbf{x} \in R \cup W$ y por tanto $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(W) \subset R \cup W$.

$(\supset)$ Sea $\mathbf{x} \in R \cup W$, si $\mathbf{x} \in R$ entonces $\mathbf{x} = (0, y)$ donde $|y| \leq 1$. Si $-1 < y < 1$, como la función $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \operatorname{sen}(t)$ es continua y

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) < y < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ entonces por el teorema del valor medio, existe $t_0 \in [-1, 1]$ tal que $g(t_0) = y$. Sea la sucesión

$$\left\{\left(x_n, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{t_0 + 2n\pi}$ la cual es una sucesión en W que converge a $\mathbf{x}$ ya que $x_n \in (0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además $x_n \to 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \to y$, esto último se debe a que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}(t_0 + 2n\pi) = \operatorname{sen}(t_0) = y.$$

Si $y = 1$, sea $y_n = \dfrac{1}{\frac{1}{\pi} + 2n\pi}$, se verifica que la sucesión $\left\{y_n, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en W la cual converge a $\mathbf{x}$. Si $y = -1$ sea $z_n = \dfrac{1}{-\frac{1}{\pi} + 2n\pi}$ y se sigue procedimiento similar. Por tanto, $\mathbf{x} \in \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$.

Finalmente, si $\mathbf{x} \in W$ entonces $x = \left(x_0, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)$ con $x_0 \in (0, 1]$. Sea la sucesión $\left\{x_n, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0$, entonces se puede ver que tal sucesión está en W convergente a $\mathbf{x}$. Por ende $\mathbf{x} \in \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$. Por tanto, $R \cup W \subset \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^2}(W)$. ■

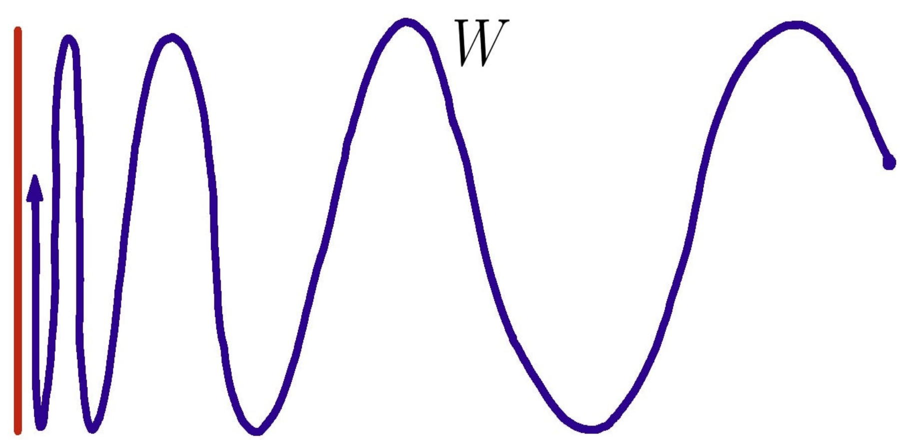


Figura 1.3: El continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definición 1.29. La circunferencia de Varsovia (véase la figura 1.4) es el nombre que se le da a cualquier continuo homeomorfo a $Y \cup Z$, donde Y es el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ y Z es la unión de tres arcos (convexos) en $\mathbb{R}^2$, uno de $(0,-1)$ a $(0,-2)$, otro de $(0,-2)$ a $(1,-2)$ y el último de $(1,-2)$ a $(1, \text{sen}(1))$.

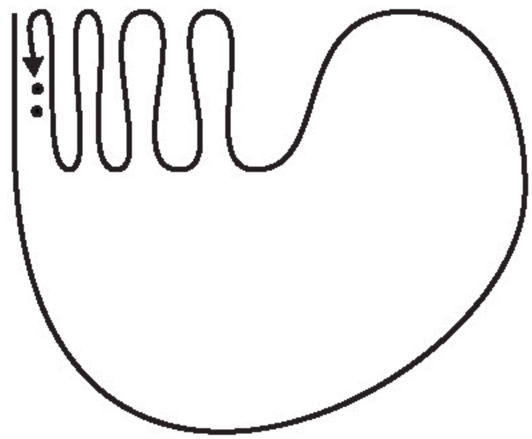


Figura 1.4: La circunferencia de Varsovia.

1.3 Intersecciones anidadas

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos interesantes de continuos es el uso de intersecciones anidadas. De hecho, se puede decir que la técnica de las intersecciones anidadas es fundamental para la teoría de continuos. No sólo se utiliza para construir ejemplos, sino que es la idea clave para las demostraciones de muchos teoremas. Incluso se utiliza en la construcción de funciones continuas. Los dos resultados siguientes sientan las bases para utilizar esta técnica.

Proposición 1.30. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Si U es un subconjunto abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para toda $n \geq N$. (véase la figura 1.5).

Demostración. Asumamos que $X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe un conjunto abierto U de X_1 tal que $X \subset U$ pero que para cada natural N existe un natural n con $n \geq N$ tal que $X_n \setminus U \neq \emptyset$. Así, para $N = 1$ existe $x_1 \in X_1 \setminus U$. Para $N = 2$ existe $x_2 \in X_2 \setminus U$. Supongamos inductivamente que para cada natural N hemos elegido $x_n \in X_n \setminus U$. Hemos obtenido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $X_1 \setminus U$ ya que para para cada natural n, $x_n \in X_n \subset X_1$ y $x_n \notin U$.

Notemos que $X_1 \setminus U$ es un cerrado de X_1 el cual es compacto se sigue por [22, proposición 13.20] que $X_1 \setminus U$ es compacto, así, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en $X_1 \setminus U$. Asumamos sin perdida de generalidad que $x_n \to x$ con $x \in X_1 \setminus U$. Afirmamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, sea un natural k, notemos que por construcción, $x_n \in X_n$ para cada $n \geq k$, así, $\{x_n\}_{n\geq k}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por tanto, convergente a x. Como $\{x_n\}_{k\geq n}$ es una sucesión de X_k el cual es cerrado por [22, proposición 13.12] entonces $x \in X_k$ y puesto que k fue arbitrario se sigue que $x \in X_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ lo cual muestra nuestra afirmación. Pero $x \notin U$, es decir, $x \in X \cap (X_1 \setminus U)$ lo que contradice nuestra suposición inicial de que $X \subset U$, por tanto, debe existir un natural N tal que $X_n \subset U$ para cada $n \geq N$. ■

Corolario 1.31 (Teorema de la intersección de Cantor)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios métricos compactos tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $X_{n+1} \subset X_n$ *y* $X_n \neq \emptyset$*. Sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

entonces $X \neq \emptyset$ *(y por tanto, un espacio métrico compacto).*

Demostración. Supongamos que $X = \emptyset$, por la proposición 1.30, que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset \emptyset$ para cada $n \geq N$, entonces $\emptyset \subset X_n \subset \emptyset$, por lo que $X_n = \emptyset$ para cada $n \geq N$ lo cual no puede ser posible, por tanto $X \neq \emptyset$.

Por último, X es un espacio métrico no vacío, ya que este hereda la métrica de X_1, además, como para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es compacto, se sigue por [22, proposición 13.12] que X_n es cerrado, así X es cerrado en X_1 ya que es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados, se sigue por [22, proposición 13.20] que X es compacto. ■

Daremos las siguientes definiciones a manera de recordatorio:

Definición 1.32. Un espacio topológico X es de *Hausdorff* (o T_2) si para cualesquiera par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen dos subconjuntos abiertos U, V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.33. Un espacio topológico de Hausdorff X es *normal* (o T_4) si para cualquier par de subconjuntos cerrados A, B de X existen dos conjuntos abiertos U, V de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 1.34. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de continuos tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ *y sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Entonces, X *es un continuo.*

Demostración. Por el corolario 1.31 X es un espacio métrico compacto no vacío, resta mostrar que X es conexo, supongamos entonces que no lo es, entonces existen subconjuntos A y B no vacíos, ajenos y cerrados en X tal que

$X = A \cup B$ (véase [22, definicion 12.2]). Veamos que A y B son conjuntos cerrados de X_1, como $X \subset X_1$ donde X es compacto, se sigue por [22, proposición 13.12] que X es un cerrado de X_1 (y por tanto un subespacio cerrado de X_1), así, por [6, proposición 2.1.1] $A = X \cap F$ y $B = X \cap G$ donde F, G son cerrados de X_1, esto muestra lo que queríamos. Ahora, como X_1 es un espacio normal, existen conjuntos V y W abiertos no vacíos y ajenos tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$, el cual es abierto en X_1 y es tal que $X = A \cup B \subset V \cup W = U$, así, por la proposición 1.30 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para cada $n \geq N$, en particular, para el natural N, $X_N \subset U = V \cup W$.

Afirmamos que los subconjuntos $(X_N \cap V), (X_N \cap U)$ de X_N formar una disconexion de este. Observe que los conjuntos $(X_N \cap V), (X_N \cap U)$ son abiertos en X_N, son no vacíos puesto que $A \subset X_N \cap V$ y $B \subset X_N \cap W$ con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, estas contenciones se deben a que $X = A \cup B \subset X_N$, además $X_N \cap V$ y $X_N \cap W$ son ajenos puesto que $V \cap W = \emptyset$ y cuya unión es X_N, ya que como $X_N \subset U = V \cup W$ se tiene que

$$X_N = X_N \cap (V \cup W) = (X_N \cap V) \cup (X_N \cap W).$$

Esto no puede ser posible puesto que X_N no admite disconexión alguna. Por tanto, X es conexo, así X es un continuo. ■

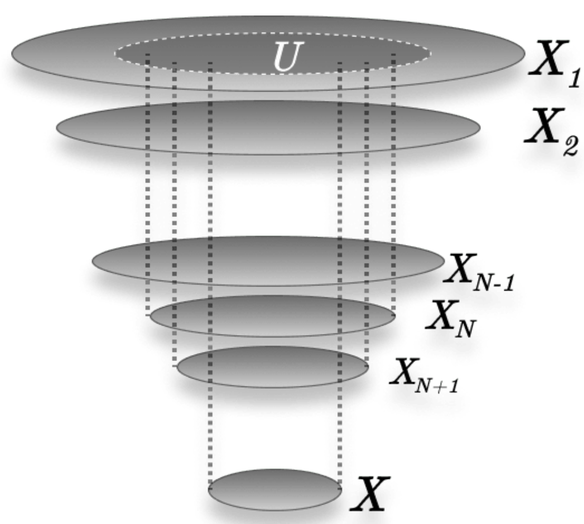


Figura 1.5: Intersección anidada de continuos.

1.4 Un continuo indescomponible

Definición 1.35. (1) Un continuo Y es *descomponible* siempre que se pueda representar como la unión de dos subcontinuos propios (con propios nos referimos a que no son iguales a todo el espacio Y y son no vacíos).

(2) Un continuo Y que no es descomponible se dice que es *indescomponible*.

(3) Un continuo Y se dice que es *hereditariamente descomponible* siempre que todos sus subcontinuos no degenerados sean descomponibles.

(4) Un continuo Y se dice que es *hereditariamente indescomponible* siempre que todos sus subcontinuos sean indescomponibles.

Puede parecer que todos los continuos son descomponibles (excepto los continuos de un solo punto). Sin embargo, como se muestra en el ejemplo 1.37, este no es el caso.

Definición 1.36. Sean X un espacio topológico y $x, y, z \in X$. Una familia finita $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, donde para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, A_i es un subconjunto de X, es una *cadena simple* de x a z pasando por y siempre que $\mathcal{C}$ satisfaga que:

$(CS1)$ $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$;

$(CS2)$ $x \in A_i$ si y solo si $i = 1$ y $z \in A_i$ si y solo si $i = n$;

$(CS3)$ $y \in A_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$.

Los elementos de $\mathcal{C}$ son llamados *eslabones*.

Ejemplo 1.37 (Un continuo indescomponible no degenerado)**.** Construimos un continuo indescomponible no degenerado X en el plano $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ donde los puntos a, b y c son puntos distintos entre si. Construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_1$ cuyos eslabones son 2-celda de diámetro menor que 1 empezando por a, pasando por b y terminando en c. Dentro de $\mathcal{C}_1$ construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_2$ de 2-celda de diámetro menor que 2^{-1} que empiece por b, que pase por a y que termine en c. Dentro de $\mathcal{C}_2$ construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_3$ de 2-celda de diámetro menor que 2^{-2}, empezando por a, pasando por c y terminando en b. Siguiendo así construyamos cadenas simples $\mathcal{C}_n$ cuyos eslabones son 2-celda de diámetro menor que 2^{-n} tales que:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

   (a) $\mathcal{C}_{3n+1}$ va de a hacia c a través de b.

   (b) $\mathcal{C}_{3n+2}$ va de b hacia c a través de a.

   (c) $\mathcal{C}_{3n+3}$ va de a hacia b a través de c.

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup \mathcal{C}_{n+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_n$.

Sea $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$, por el teorema 1.34 X es un continuo siempre que el conjunto $\bigcup \mathcal{C}_n$ sea un continuo. Mostraremos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_{3n+1}\right). \tag{1.1}$$

($\subset$) Supongamos que existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$ tal que $x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, así, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{C}_{3j+1}$ es decir $x \notin \mathcal{C}_{3j+1}$, pero $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$ en particular $x \in \mathcal{C}_{3j+1}$ lo cual es una contradicción.

($\supset$) Supongamos que existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$ tal que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$, así existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{C}_n$, notemos que $\bigcup \mathcal{C}_{3j+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_j$ y como $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{C}_{3j+1}$, así se cumple que $x \in \bigcup \mathcal{C}_j$ lo cual es una contradicción.

Veamos que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $\{a, c\} \subset Y$. Supongamos que existe tal Y, como $Y \subset X$, entonces sea $p \in X \setminus Y$ y $d(p, Y) = \varepsilon > 0$ ya que Y es compacto. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Fijemos $l \geq N$ y supongamos que el eslabón $\mathcal{C}$ de la cadena $\mathcal{C}_{3l+1}$ que contiene a p intersecta a Y. Sea $t \in \mathcal{C} \cap Y$. Se tiene que $\operatorname{diam}(\mathcal{C}) < \frac{1}{2^l} < \varepsilon$. Entonces

$$d(p, Y) \leq d(p, t) < \varepsilon$$

lo cual es una contradicción. Así, para $k \geq N$ los eslabones de la cadena $\mathcal{C}_{3k+1}$ que contienen a p no intersectan a Y. Como $Y \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$ entonces para $l > N$, $Y \subset \bigcup \mathcal{C}_{3l+1}$.
Supongamos que $\bigcup \mathcal{C}_{3l+1} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s$ donde $a \in \mathcal{C}_1$ y sea $c \in \mathcal{C}_s$, supongamos que $p \in \mathcal{C}_m$, pero por lo anterior $\mathcal{C}_m \cap Y = \emptyset$. Así

$$Y = (Y \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m-1})) \cup (Y \cap (\mathcal{C}_{m+1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s)).$$

Por lo que Y se escribe como la unión de dos conjuntos cerrados, ajenos, y no vacíos, ya que $a \in (Y \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m-1}))$ y $c \in (Y \cap (\mathcal{C}_{m+1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s))$, pero eso es una contradicción, ya que Y es conexo.

Notemos que se puede demostrar con argumentos similares a como se hizo en la igualdad en (1.1) que $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+2})$ y que no existe un subcontinuo propio Y tal que $\{b, c\} \subset Y$ y, además $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+3})$ y no tampoco existe un subcontinuo propio Y tal que $\{a, b\} \subset Y$. Así X, es indescomponible.

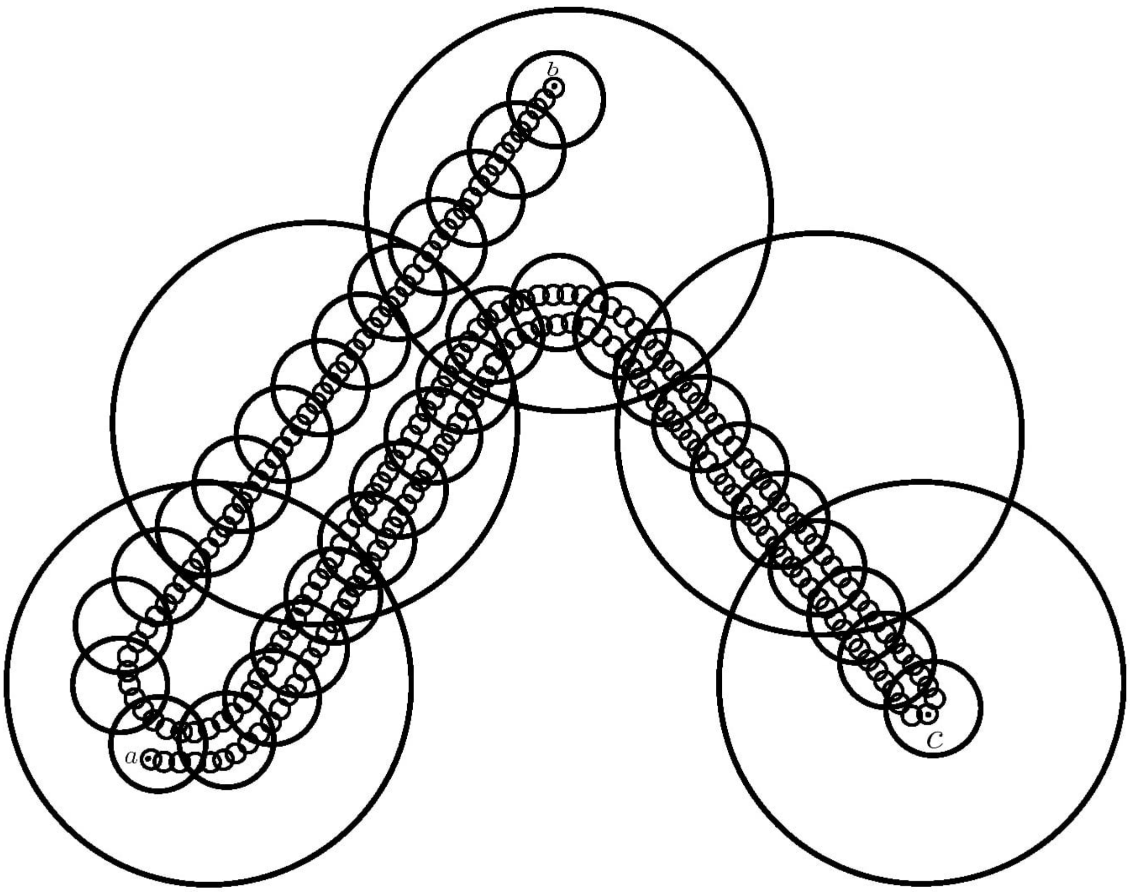


Figura 1.6: Bosquejo de la construcción de un continuo indescomponible.

Capítulo 2

Descomposiciones semi-continuas superiores

En este capítulo vamos a examinar otro método, un poco más general, para la construcción de continuos. Expondremos este método con ejemplos específicos, y algunas construcciones generales que serán de gran utilidad en las secciones posteriores, este método suele conocerse como descomposiciones semi-continuas superiores. En lo que sigue, prepararemos el camino para definir lo que es un espacio de descomposición en general, y veremos cuando estos espacios son continuos, para luego entrar en las descomposiciones semi-continuas superiores.

2.1 Espacios de descomposición

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico, una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos no vacíos de X es una *partición* de X si:

($P1$) los conjuntos que conforman a $\mathcal{D}$ son ajenos dos a dos, es decir, si $C, D \in \mathcal{D}$ con $C \neq D$ entonces $C \cap D = \emptyset$.

($P2$) La unión de $\mathcal{D}$ es X, es decir, $X = \bigcup \mathcal{D}$.

Por otro lado, si cada elemento de la partición $\mathcal{D}$ es un conjunto cerrado de X, decimos entonces que $\mathcal{D}$ es una *partición cerrada*.

Ejemplo 2.2. Sea el conjunto $S = ([-1,1] \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,2])$. Para cada $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$ definamos $D_t = \{t\} \times [0,1]$, y $D_t = \{0\} \times [0,2]$ si $t = 0$. Sea $\mathcal{S} = \{D_t : t \in [0,1]\}$, entonces se verifica inmediatamente que $\mathcal{S}$ es una partición cerrada de S.

Proposición 2.3. *Sean* $(X, \mathscr{T})$ *un espacio topológico y* $\mathcal{D}$ *una partición de* X*. La familia*

$$\mathscr{T}(\mathcal{D}) = \left\{ \mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T} \right\} \tag{2.1}$$

es una topología para $\mathcal{D}$*. La cual llamaremos* topología de descomposición.

Demostración. Mostraremos que la familia $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ satisface las condiciones $(T1) - (T3)$ de [22, definicion 7.1].

($T1$) Notemos que $\emptyset \subset \mathcal{D}$ y es tal que $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T}$, por otra parte, sea $\mathcal{U} = \mathcal{D}$, notese que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ y es tal que $\bigcup \mathcal{D} = X \in \mathscr{T}$.

$(T2)$ Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$ entonces por (2.1) de esta proposición tenemos que
$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \quad \text{y} \quad \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$$
son subconjuntos abiertos de X. Se puede verificar que
$$\bigcup_{W\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} W = \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right) \cap \left(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V\right).$$
Hemos probado que $\bigcup\limits_{W\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} W$ es un subconjunto abierto de X y así $\mathcal{U}\cap\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$.

$(T3)$ Sea $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{D}$ (donde Λ es un conjunto de índices) una subfamilia de abiertos de $\mathcal{D}$ entonces se sigue por (2.1) de esta proposición que $\bigcup \mathcal{C}_\alpha$ es un abierto de X para cada $\alpha \in A$. Se puede verificar que :
$$\bigcup\left(\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{C}_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup \mathcal{C}_\alpha\right).$$
Esto último, muestra que $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{C}_\alpha \in \mathscr{T}(D)$ ya que $\bigcup\limits_{\alpha\in A} (\bigcup \mathcal{C}_\alpha)$ es un subconjunto abierto de X.

Por tanto, $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$. ■

Definición 2.4. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una partición de X. La función $\pi : X \to \mathcal{D}$ dada por $\pi(x) = D$ donde D es el único elemento de $\mathcal{D}$ tal que $x \in D$ se llama *proyección natural*.

Ejemplo 2.5. Sea el conjunto $S = ([-1,1]\times[0,1]) \cup (\{0\}\times[0,2])$. Para cada $t \in [-1,1]\setminus\{0\}$ definamos $D_t = \{t\}\times[0,1]$, y $D_t = \{0\}\times[0,2]$ si $t = 0$. Sea $\mathcal{S} = \{D_t : t \in [0,1]\}$. Tenemos que en este caso $\pi : S \to \mathcal{S}$ viene dada por:
$$\pi(p,q) = \begin{cases} \{p\}\times[0,1] & \text{si } p \in [-1,1]\setminus\{0\}, \\ \{0\}\times[0,2] & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Observación 2.6. *(i)* Es claro que para cada $x \in X$, $x \in \pi(x)$.

(ii) π es una función suprayectiva, ya que para cada $D \in \mathcal{D}$, $D \neq \emptyset$, por tanto existe $x \in D$ de tal manera que $\pi(x) = D$.

(iii) Sean $x, y \in X$, entonces $\pi(x) = \pi(y)$ si y solo si x e y pertenecen a un único elemento de la partición $\mathcal{D}$. En efecto, por (ii) se tiene que $x, y \in \pi(x) = \pi(y) \in \mathcal{D}$, además, si C es otro elemento de la partición $\mathcal{D}$ tal que $x, y \in C$ entonces $\pi(x)\cap C \neq \emptyset \neq \pi(y)\cap C$ ya que $x \in \pi(x)\cap C$ y $y \in \pi(y)\cap C$ se sigue que $\pi(x) = C = \pi(y)$. Recíprocamente si C es el único elemento de $\mathcal{D}$ tal que $x, y \in C$ entonces $\pi(x) = C = \pi(y)$.

Proposición 2.7. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico. Entonces $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es la topología más grande de $\mathcal{D}$ para la cual la función π es continua.*

Demostración. Mostraremos primeramente que la función π es continua. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{D}$ entonces $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$ es un subconjunto abierto de X. Afirmamos que $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$.

($\subset$) Sea $x \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{U}$ y $x \in \pi(x)$. Por tanto, $x \in \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$.

($\supset$) Sea $y \in \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$, entonces $y \in U$ para algún $U \in \mathcal{U}$, así, $\pi(y) = U \in \mathcal{U}$. Por tanto $y \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$.

Se sigue entonces que $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de X porque $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U$ es un subconjunto abierto de X.

Supongamos ahora que $\mathscr{T}'(\mathcal{D})$ es otra topología para $\mathcal{D}$ de tal manera que hace de π una función continua, mostraremos que $\mathscr{T}'(\mathcal{D}) \subset \mathscr{T}(\mathcal{D})$, sea $\mathcal{V} \in \mathscr{T}'(\mathcal{D})$, de manera similar a como hicimos anteriormente podemos mostrar que $\pi^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{V}$ pero como π es una función continua (respecto a $\mathscr{T}'(\mathcal{D})$), entonces $\pi^{-1}(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de X, se sigue que $\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$, lo cual muestra que $\mathscr{T}'(\mathcal{D}) \subset \mathscr{T}(\mathcal{D})$. ■

Definición 2.8. Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{D}$ una partición de X. Al espacio $(\mathcal{D},\mathscr{T}(\mathcal{D}))$ se le llama *espacio de descomposición* o simplemente *descomposición de X*. Enfatizamos que, el término descomposición significa una partición $\mathcal{D}$ con la topología descomposición (véase la proposición 2.3).

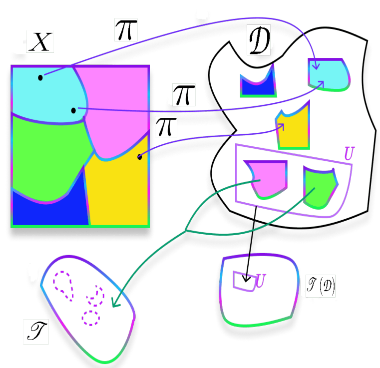


Figura 2.1: Espacio de descomposición de un espacio topológico X.

Ejemplo 2.9. Sea el conjunto $S = ([-1,1]\times[0,1)) \cup (\{0\}\times[0,2])$. Para cada $t \in [-1,1]\setminus\{0\}$ definamos $D_t = \{t\}\times[0,1]$, y $D_t = \{0\}\times[0,2]$ si $t = 0$. Sea $\mathcal{S} = \{D_t : t \in [0,1]\}$. Entonces $(S,\mathscr{T}(\mathcal{S}))$ es un espacio de descomposición.

A las descomposiciones frecuentemente se les denominan *espacios de identificación*. También, se les suelen llamar *espacios cocientes* debido a la intima conexión entre las relaciones de equivalencia, y las particiones en la *teoría de conjuntos* (véase [7, pág. 66]).

Las descomposiciones son una fuente importante de ejemplos, contraejemplos y teoremas en la *teoría de continuos*, sin embargo, nos apresuramos a señalar que una descomposición de un continuo X puede no ser un continuo incluso si la partición es cerrada, para evidenciar esto, presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10. Sea el continuo $X = [-1, 1]$ y $\mathcal{D}$ la partición cerrada de X dada por

$$\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}.$$

Entonces el espacio $(\mathcal{D}, \mathscr{T}(\mathcal{D}))$ no es un continuo, ya que este último no es un espacio de Hausdorff, y por tanto, no es un espacio metrizable.

Demostración. Supongamos por el contrario que el espacio de descomposición $\mathcal{D}$ es de Hausdorff, entonces para $\{1\}$, $\{-1\} \in \mathcal{D}$ existen dos subconjuntos abiertos $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ de $\mathcal{D}$ tales que $\{1\} \in \mathcal{U}_1$, $\{-1\} \in \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$. Puesto que $\bigcup \mathcal{U}_1$, $\bigcup \mathcal{U}_2$ son subconjuntos abiertos en $X \subset \mathbb{R}$ y $1 \in \bigcup \mathcal{U}_1$, $-1 \in \bigcup \mathcal{U}_2$, entonces $\bigcup \mathcal{U}_1 = U_1 \cap X$, $\bigcup \mathcal{U}_2 = U_2 \cap X$ donde U_1, U_2 son subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Existen r_1, $r_2 > 0$ tales que $B_{r_1}(-1) \subset U_1$ y $B_{r_2}(-1) \subset U_2$. Sea $x_0 = 1 - r$ donde $r = \dfrac{\text{mín}\{r_1, r_2\}}{2}$ y sean $V_1 = B_r(1) \cap X$ y $V_2 = B_r(-1) \cap X$ los cuales son subconjuntos abiertos en X, podemos notar que $x_0 \in V_1 \subset \bigcup \mathcal{U}_1$ y $-x_0 \in V_2 \subset \bigcup \mathcal{U}_2$. Como $\pi(x_0) \in \pi\left(\bigcup \mathcal{U}_1\right) = \mathcal{U}_1$ y $\pi(-x_0) \in \pi\left(\bigcup \mathcal{U}_2\right) = \mathcal{U}_2$ y dado que $\pi(x_0) = \{x_0, -x_0\} = \pi(-x_0)$ entonces $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Por tanto $\mathcal{D}$ no es de Hausdorff. ∎

Como veremos más adelante, en el teorema 2.16, el que una descomposición sea un espacio de Hausdorff es vital para que la descomposición sea un continuo. Ya sabemos que todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff (véase [22, proposición 11.5]) por tanto, puesto que trabajamos con continuos, será necesario establecer condiciones para las cuales un espacio topológico sea metrizable (véase [5, definición 2.3, pág. 183]), con ese propósito mostraremos el resultado expuesto en el lema 2.14, pero antes mostraremos la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Todo espacio métrico compacto X es segundo numerable.*

Demostración. Sea d la métrica de X y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{B}_n = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X \right\}.$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}_n$ es una cubierta abierta de X el cual es compacto, por tanto, existen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)} \in X$ tales que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}\left(x_i^{(n)}\right)$.

Sea $\mathscr{B}_{\frac{1}{n}} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}\left(x_1^{(n)}\right), \ldots, B_{\frac{1}{n}}\left(x_{m_n}^{(n)}\right) \right\} \subset \mathscr{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{\frac{1}{n}}.$$

La familia $\mathscr{B}$ es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos finitos y también tiene las siguientes propiedades:

(B1) Notemos que cada elemento de $\mathscr{B}_{\frac{1}{n}}$ es un abierto de X, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(B2) Sea U un subconjunto abierto de X y sea $u \in U$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset U$, por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, fijémonos en la colección $\mathscr{B}_{\frac{1}{N}}$ la cual también es una cubierta abierta de X y como $u \in X$ entonces existe $x \in X$ tal que

$$u \in B_{\frac{1}{N}}(x) \in \mathscr{B}_{\frac{1}{N}} \subset \mathscr{B}.$$

Veamos que $B_{1/N}(x) \subset B_\varepsilon(u)$; sea $y \in B_{1/N}(x)$ por la desigualdad triangular tenemos que:

$$d(y,u) \leq d(y,x) + d(u,x) < 1/N + 1/N < \varepsilon$$

con lo cual $y \in B_\varepsilon(u)$.

Se sigue por [5, teorema 2.2, pág. 64] que $\mathscr{B}$ es una base numerable para la topología inducida por la métrica d de X (la cual denotamos como $\mathscr{T}(d)$, véase [5, págs. 182-183]). ∎

Definición 2.12. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Para $y \in Y$ arbitrario definimos a la *fibra de y* como el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Observación 2.13. Si Y es un espacio de Hausdorff y f es una función continua, entonces $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado de X. En efecto, como $\{y\}$ es un cerrado de Y y f es continua, se sigue que $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ es un cerrado de X.

Lema 2.14. *Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es metrizable.*

Demostración. Obsérvese primeramente que por [22, proposición 13.15], el espacio Y es compacto y el cual por hipótesis es de Hausdorff, así por la demostración de [13, teorema 32.3] Y es un espacio regular.

Luego, para exhibir que el espacio topológico Y es metrizable basta mostrar por [13, teorema 34.1] que Y admite una base $\mathscr{B}_Y$ numerable.

Como el espacio métrico X es compacto se sigue por la proposición 2.11 que X es segundo numerable, por tanto este admite una base $\mathscr{B}_X$ numerable. Para cada subfamilia finita $\mathcal{L}$ de $\mathscr{B}_X$, definamos

$$U(\mathcal{L}) = Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{L}\right) \tag{2.2}$$

Afirmamos que la familia $\mathscr{B}_Y$ de subconjuntos de Y, donde

$$\mathscr{B}_Y = \{U(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \text{ es una subfamilia finita de } \mathscr{B}_X\}$$

es una base numerable para Y. Veamos que $\mathscr{B}_Y$ satisface las condiciones de [5, teorema 2.2]:

$(B1)$ Sea $U(\mathcal{L}) \in \mathscr{B}_Y$, como $\mathcal{L} \subset \mathscr{B}_X \subset \mathscr{T}(d)$ donde $\mathscr{T}(d)$ es la topología generada por la métrica d de X , entonces $X \setminus \bigcup \mathcal{L}$ es subconjunto cerrado de X. Como $f : X \to Y$ es una función cerrada por el [5, teorema 2.1, pág. 226], entonces $f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{L}\right)$ es un subconjunto cerrado de Y, así $U(\mathcal{L}) \in \mathscr{T}_Y$. Hemos probado que $\mathscr{B}_Y \subset \mathscr{T}_Y$ donde $\mathscr{T}_Y$ es la topología de Y.

$(B2)$ Sea V un subconjunto abierto de Y, para cualquier $y \in V$ podemos notar que su fibra cumple que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$, ya que para $x \in f^{-1}(y)$ se tiene que $f(x) = y \in V$ y por tanto $x \in f^{-1}(V)$ donde $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X. Nótese que la fibra $f^{-1}(y)$ es un subconjunto cerrado de X y por tanto tenemos que $f^{-1}(y)$ es compacto, por otro lado como $\mathscr{B}_X$ es una base para X, existe una subcolección $\{U_s : s \in S\}$ tal que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{s\in S} U_s$, por lo que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s\in S} U_s.$$

Dada la compacidad de $f^{-1}(y)$, tenemos que existen

$$U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n}$$

tales que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Sea $\mathcal{L}_0 = \{U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n}\}$, veamos que $y \in U(\mathcal{L}_0) \subset V$. Notemos que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{L}_0 \subset f^{-1}(V),$$

supongamos que $y \notin U(\mathcal{L}_0)$ entonces $f(x) = y$ para algún $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{L}_0$ con lo cual $x \in f^{-1}(y) \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{L}_0)$ lo que contradice el hecho de que $f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{L}_0$, así $y \in U(\mathcal{L}_0)$. Por último, sea $z \in U(\mathcal{L}_0)$ entonces $z \in Y$ y $f(x) \neq z$ para cada $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{L}_0$, pero como f es suprayectiva, la fibra $f^{-1}(z) \neq \emptyset$ se sigue necesariamente que para cada $t \in f^{-1}(z)$ se tiene que cumplir que $t \in \bigcup \mathcal{L}_0$, así, $t \in f^{-1}(V)$ por lo que $f(t) = z \in V$. Por lo tanto $U(\mathcal{L}_0) \subset V$.

Por tanto $\mathscr{B}_Y$ es una base para Y. Resta mostrar que la base $\mathscr{B}_Y$ es numerable, para ello, definamos una función $g : \mathcal{B} \to \mathscr{B}_Y$ (donde $\mathcal{B}$ representa al conjunto de todas las subfamilias finitas de $\mathscr{B}_X$) dada por $g(\mathcal{L}) = U(\mathcal{L})$, podemos notar que g es una función suprayectiva y además $\mathcal{B}$ es un conjunto numerable, por tanto $\mathscr{B}_Y$ es numerable. Esto termina de establecer el teorema. ∎

Teorema 2.15. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es metrizable si y solo si $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es de inmediato dado el espacio $\mathcal{D}$ es metrizable y por tanto es un espacio de Hausdorff.

($\Leftarrow$) Nótese que la función $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función continua (proposición 2.7) y suprayectiva que va del espacio métrico compacto X a el espacio de Hausdorff $\mathcal{D}$, así por el lema 2.14, $\mathcal{D}$ es metrizable. ∎

Teorema 2.16. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es un continuo si y solo si $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{D}$ es un continuo, este es en particular un espacio métrico por lo que este es metrizable y por tanto $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.

($\Leftarrow$) Puesto que $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff, se sigue por el teorema 2.15 que este último es metrizable y por tanto un espacio métrico. Por otro lado, como la función $\pi : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva, se sigue que $\pi(X) = \mathcal{D}$ es compacto y conexo ya que X también tiene esas propiedades, así, $\mathcal{D}$ es un continuo. ∎

2.2 Descomposiciones usc

Como ya mencionamos anteriormente, queremos usar las descomposiciones de espacios métricos para construir nuevos espacios métricos, o en este caso, continuos. No obstante, en algunos casos es inconveniente verificar la condición del teorema 2.15, para comprobar que el espacio de descomposición es un espacio de Hausdorff, y por tanto metrizable.

El propósito de esta sección, es el de dar una condición que sea útil para evitar mostrar que una descomposición sea de Hausdorff, tal condición esta estrechamente relacionada a la naturaleza del concepto de descomposición, ya que esta es, desde luego, una partición. Este nuevo concepto se presenta a continuación, y en lo sucesivo daremos algunas caracterizaciones de este, ya que este tampoco suele ser conveniente en algunos casos, no obstante, sigue siendo de mayor utilidad.

Definición 2.17. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es *semi-continua superior o usc* (upper semi-continuous) si para cualquier $D \in \mathcal{D}$ y para cualquier $U \in \mathscr{T}$ tal que $D \subset U$, existe $V \in \mathscr{T}$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

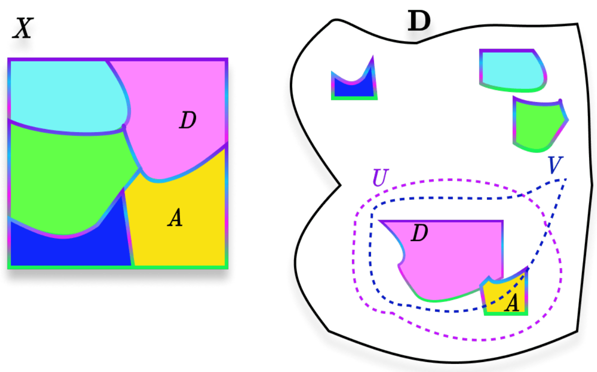
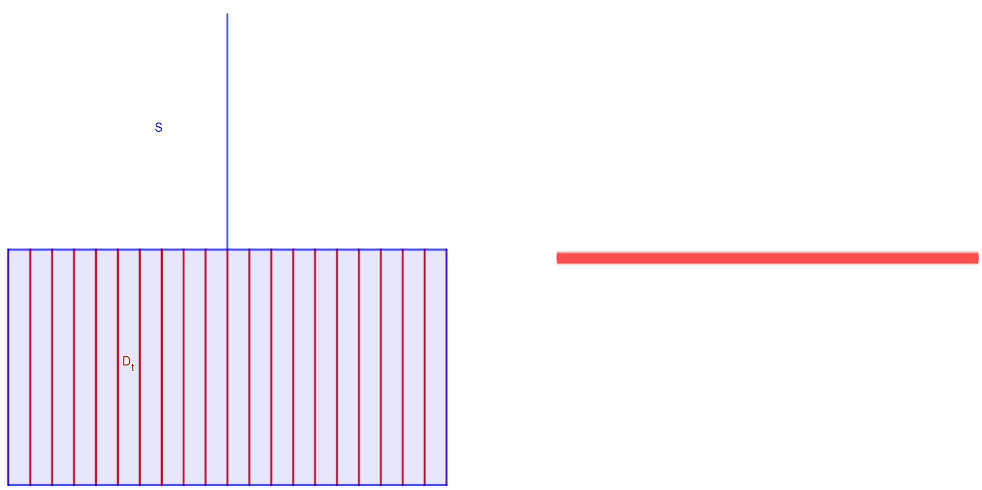


Figura 2.2: Descomposición semi-continua superior.

Ejemplo 2.18. Sea $S = ([-1, 1] \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 2])$. Para cada $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ definamos $D_t = \{t\} \times [0, 1]$, y $D_t = \{0\} \times [0, 2]$ si $t = 0$. Sea $\mathcal{S} = \{D_t : t \in [0, 1]\}$. Se puede verificar que $\mathcal{S}$ es una descomposición semi-continua superior (véase la figura 2.3(1)).



(1) Representación del espacio S.

(2) Representación del espacio $\mathcal{S}$

Figura 2.3: Ejemplo de una partición usc

Observe que en la definición 2.17 no toma en cuenta a la topología de descomposición, es la propia partición que es *usc* por ella misma, sin embargo, cuando una descomposición sea *usc* diremos que es una *descomposición usc* teniendo en cuenta la topología de descomposición como en la proposición 2.3.

Llegados a este punto, nos dirigimos a demostrar los resultados expuestos en el teorema 2.26 y en el teorema 2.27. Para simplificar algunas demostraciones será de conveniencia la siguiente definición:

Definición 2.19. Sea $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X, si V es un subconjunto de X, decimos que V es *$\mathcal{D}$-saturado* si este se puede representar como la unión de una subfamilia de $\mathcal{D}$.

Ejemplo 2.20. Considerando el mismo espacio expuesto en el ejemplo 2.18. El subconjunto $V = [1, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ es $\mathcal{S}$-saturado, puesto que

$$V = \bigcup_{t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]} \left(\{t\} \times [0, 1]\right).$$

Proposición 2.21. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\pi : X \to \mathcal{D}$ es la proyección natural , entonces*

(1) *para cualquier $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es $\mathcal{D}$-saturado.*

(2) *Sea $A \subset X$. Entonces A es $\mathcal{D}$-saturado si y solo si $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$.*

(3) *Si $V \subset X$ es abierto y $\mathcal{D}$-saturado, entonces $\pi(V)$ es abierto en $\mathcal{D}$.*

Demostración. (1) En efecto, solo basta notar que $\pi^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup \mathcal{C}$ (esto ya se hizo en la demostración de la proposición 2.7)

(2) ($\Rightarrow$) Mostraremos ambas contenciones.

($\subset$) En general se cumple (independientemente de la función) que $A \subset \pi^{-1}[\pi(A)]$.

($\supset$) Sea $a \in \pi^{-1}[\pi(A)]$, entonces $\pi(a) \in \pi(A)$, por lo que existe algún $b \in A = \bigcup \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ tal que $\pi(b) = \pi(a)$, se sigue por (iv) de la observación 2.6 que a y b pertenecen a un único elemento de $\mathcal{A}$, digamos que $a, b \in B$ donde $B \in \mathcal{A}$ y es tal que $B \subset \bigcup \mathcal{A} = A$, se sigue entonces que $a \in A$.

($\Leftarrow$) Nótese que $\pi(A) \subset \mathcal{D}$ se sigue por el inciso (1) de esta proposición que $\pi^{-1}[\pi(A)]$ es $\mathcal{D}$-saturado, así, A es un $\mathcal{D}$-saturado.

(3) Observemos que $\pi(V) = \{\pi(v) : v \in V\}$, mostraremos que: $\bigcup_{v \in V} \pi(v) = V$.

($\subset$) Sea $x \in \bigcup_{v \in V} \pi(v)$ entonces $x \in \pi(v_0)$ para algún $v_0 \in V = \bigcup \mathcal{V}$ donde $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$, nótese que $\pi(x) \cap \pi(v_0) \neq \emptyset$ ya que $x \in \pi(x) \cap \pi(v_0)$ por lo que $\pi(x) = \pi(v_0)$ se sigue por (iv) de la observación 2.6 que x, v_0 pertenece a un único elemento U de $\mathcal{V}$, por lo que $x \in U \subset \bigcup \mathcal{V} = V$.

($\supset$) Sea $v \in V$ nótese que $\pi(v) \in \pi(V)$ y que $v \in \pi(v) \subset \bigcup_{v \in V} \pi(v)$.

Se sigue entonces que $\pi(V)$ es abierto en $\mathcal{D}$ puesto que $\bigcup \pi(V)$ es abierto en X. ■

Proposición 2.22. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una descomposición de X y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función proyección natural. Si C es un subconjunto cerrado de X, entonces $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$ si y solo si $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como π es una función continua y $\mathcal{D} \setminus \pi(C)$ es abierto en $\mathcal{D}$, entonces $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X .

($\Leftarrow$) Como $\mathcal{D} \setminus \pi(C) \subset \mathcal{D}$ se sigue por (1) de la proposición 2.21 que $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(C))$ es $\mathcal{D}$-saturado y por hipótesis es abierto, entonces por (3) de la proposición 2.21 se sigue que, $\pi[\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(C))] = \mathcal{D} \setminus \pi(C)$ es abierto en $\mathcal{D}$, y así $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$. ■

El siguiente resultado es importante ya que caracteriza a las descomposiciones semi-continuas superiores.

Proposición 2.23. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una descomposición de X y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función proyección. Entonces, los enunciados* $(1) - (3)$ *son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{D}$ es una descomposición semi-continua superior,*

(2) *$\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función cerrada,*

(3) *Si D es cualquier elemento de la partición $\mathcal{D}$ y U es cualquier subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, entonces existe un subconjunto abierto V de X el cual es $\mathcal{D}$-saturado tal que $D \subset V \subset U$.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea C un subconjunto cerrado de X para exhibir que $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$ por la proposición 2.22 basta mostrar que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X. Sea $x \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(C)$. Afirmamos que $\pi(x) \subset X \setminus C$, supongamos por el contrario que existe un elemento $y \in \pi(x)$, pero que $y \notin X \setminus C$, entonces $y \in \pi(x) \cap C$, nótese que $\pi(y) \cap \pi(x) \neq \emptyset$, ya que $y \in \pi(x) \cap \pi(y)$, por lo que necesariamente se tiene que cumplir que $\pi(x) = \pi(y)$, como $y \in C$ y es tal que $\pi(x) = \pi(y)$, entonces tenemos que $\pi(x) \in \pi(C)$, lo cual no puede ser posible. Por tanto, $\pi(x) \subset X \setminus C$ donde $X \setminus C$ es un conjunto abierto de X. Como la descomposición $\mathcal{D}$ es *usc* se sigue por la definición 2.17 que existe un subconjunto abierto V de X tal que $\pi(x) \subset V$, de tal manera que si:

$$\begin{array}{l} D' \text{ es otro elemento de } \mathcal{D} \text{ tal que} \\ D' \cap V \neq \emptyset, \text{ entonces } D' \subset X \setminus C. \end{array} \tag{2.3}$$

Por último, vamos a verificar que el conjunto V satisface que:

$$x \in V \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)].$$

Como $x \in \pi(x)$ (véase la observación 2.6) y puesto que se cumple que $\pi(x) \subset V$ entonces $x \in V$. Veamos que $\pi(V) \subset \mathcal{D} \setminus \pi(C)$, supongamos que existe $\pi(v) \in \pi(V)$ con $v \in V$ pero que $\pi(v) \in \pi(C)$, entonces existe $c_0 \in C$ tal que $\pi(c_0) = \pi(v)$ por lo que $c_0 \in \pi(v) \cap C$ y por tanto $\pi(v) \not\subset X \setminus C$, lo cual no puede ser posible ya que $v \in \pi(v) \cap V$ con lo cual $\pi(v) \subset X \setminus C$ por (2.3).

Por tanto, para cada $v \in V$ se cumple que $\pi(v) \in \mathcal{D} \setminus \pi(C)$, así, tenemos que

$$V \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)].$$

En resumen, para cada $x \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ hemos exhibido la existencia de un conjunto abierto V de X tal que

$$x \in V \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)].$$

Se sigue por [22, proposición 7.2, pág. 78] que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X y así $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$, por lo que, π es una función cerrada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea D un elemento de $\mathcal{D}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, dada nuestra suposición $\pi(X \setminus U)$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$, por la continuidad de π, el conjunto $V = \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)]$ es abierto en X. Mostraremos que V es el conjunto buscado, como $\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) \subset \mathcal{D}$ se sigue por (1) de la proposición 2.21 que V es $\mathcal{D}$-saturado. Resta mostrar que $D \subset V \subset U$.

Para la primera contencion mostraremos antes que nada que:

$$\pi(D) \subset [\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)].$$

Supongamos que existe $y \in D$ tal que $\pi(y) \in \pi(D)$ pero que $\pi(y) \in \pi(X \setminus U)$ entonces existe $x \in X \setminus U$ tal que $\pi(x) = \pi(y) = D$ por lo que $x \in D \cap (X \setminus U)$ y por tanto $D \not\subset U$ lo cual no es posible. Por tanto, para cada $\pi(y) \in \pi(D)$ se cumple que $\pi(y) \in \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$ lo cual implica que para cada $y \in D$, $y \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)] = V$ esto muestra que $D \subset V$.

Por último, sea $x \in V$. Luego, $\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$. Afirmamos que $\pi(x) \subset U$, supongamos por el contrario que existe $y \in \pi(x)$, pero que $y \in X \setminus U$, entonces $y \in \pi(x) \cap (X \setminus U)$. Nótese que $\pi(x) \cap \pi(y) \neq \emptyset$ ya que $y \in \pi(x) \cap \pi(y)$, se tiene que $\pi(x) = \pi(y)$, es decir, y es un elemento de $X \setminus U$ tal que $\pi(y) = \pi(x)$ y por tanto $\pi(x) \in \pi(X \setminus U)$ lo cual no es posible, por tanto $\pi(x) \subset U$ y así $x \in \pi(x) \subset U$, lo cual muestra que $V \subset U$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea D un elemento de $\mathcal{D}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, dada nuestra suposición existe un subconjunto abierto V de X y $\mathcal{D}$-saturado tal que $D \subset V \subset U$.

Sea A otro elemento de $\mathcal{D}$ tal que $A \cap V \neq \emptyset$, mostraremos que $A \subset U$, sea $a \in A$ puesto que $A \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $b \in A \cap V$ donde $V = \bigcup \mathcal{V}$ con $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$, entonces existe un elemento B de $\mathcal{V}$ tal que $b \in B$, se sigue que $A = B$, ya que $b \in A \cap B$. Por otro lado, notemos que $\pi(a) = \pi(b)$, es decir, tanto como a y b están en el mismo elemento de la partición, en este caso $a, b \in B$, en particular, $a \in B \subset \bigcup \mathcal{V} = V \subset U$. ■

Definición 2.24. Un espacio topológico X es de Fréchet (o T_1) si para cualquier $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado de X.

Lema 2.25. *Sea X un espacio topológico T_1. Si $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Sea D un elemento de la partición $\mathcal{D}$, tomemos a x_0 un elemento fijo pero arbitrario de D, notemos que $\pi(x_0) = D$, por otro lado como el espacio topológico X es T_1 se sigue que $\{x_0\}$ es un conjunto cerrado de X, por (2) de la proposición 2.23 se cumple que $\pi(\{x_0\})$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{D}$. Afirmamos que $\pi^{-1}(\pi(\{x_0\})) = D$.

($\subset$) Sea $x \in \pi^{-1}(\pi(\{x_0\}))$, entonces $\pi(x) \in \pi(\{x_0\})$, se sigue que existe $y \in \{x_0\}$ tal que $\pi(y) = \pi(x)$, es decir, $\pi(x) = \pi(x_0)$, de aquí que $x \in \pi(x_0) = D$.

($\supset$) Sea ahora $y \in D$, como $x_0 \in D$, notemos que $\pi(x_0) = \pi(y) = D$ (véase 2.6) con $x_0 \in \{x_0\}$, por tanto $y \in \pi^{-1}(\pi(\{x_0\}))$.

Puesto que la función π es continua, se sigue que $\pi^{-1}(\pi(\{x_0\}))$ es cerrado en X, es decir, D es cerrado en X. ■

Teorema 2.26. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{D}$ una descomposición usc de X, entonces el espacio $\mathcal{D}$ con la topología $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es metrizable.*

Demostración. Por el teorema 2.15 basta mostrar que el espacio $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff. Sean D_1 y D_2 elementos de $\mathcal{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$, como la descomposición $\mathcal{D}$ es *usc*, se sigue por el lema 2.25 que D_i para $i = 1, 2$ son subconjuntos cerrados de X. Ahora, como todo espacio métrico es normal (véase [13, teorema 32.2]), entonces existen U_i subconjuntos abiertos de X tales que $D_i \subset U_i$ para $i = 1, 2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Por otro lado, como $\mathcal{D}$ es *usc* se sigue por (3) de la proposición 2.23 que existe conjuntos V_i donde V_i es abierto en X y $\mathcal{D}$-saturado tal que $D_i \subset V_i \subset U_i$ para cada $i = 1, 2$. Hacemos las siguientes afirmaciones:

(a) $D_i \in \pi(V_i)$ para cada $i = 1, 2$.

(b) $\pi(V_i)$ son abiertos en $\mathcal{D}$ para cada $i = 1, 2$.

(c) $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$.

donde π es la función proyección natural. Para $i = 1$, 2 notemos que $D_i \in \mathcal{D}$ y V_i es $\mathcal{D}$-saturado con $D_i \subset V_i$ con lo cual $D_i \subset \pi(V_i)$ esto muestra (a).

Ahora, como para cada $i = 1, 2$, V_i es abierto y $\mathcal{D}$-saturado se sigue por (3) de la proposición 2.21 que $\pi(V_i)$ para cada $i = 1, 2$ son abiertos en $\mathcal{D}$, esto establece (b).

Por último, notemos que

$$\emptyset \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset,$$

por tanto, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, se sigue por *(2)* de la proposición 2.21 que $V_i = \pi^{-1}[\pi(V_i)]$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\pi(V_1 \cap V_2) &= \pi\left[\pi^{-1}[\pi(V_1)] \cap \pi^{-1}[\pi(V_2)]\right] \\
&= \pi\left[\pi^{-1}[\pi(V_1) \cap \pi(V_2)]\right] \\
&= \pi(V_1) \cap \pi(V_2) \quad \text{esto se debe a la suprayectividad de } \pi.
\end{aligned}$$

Como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces $\pi(V_1 \cap V_2) = \emptyset$, de lo anterior concluimos (c).

En resumen, para cualesquiera $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ con $D_1 \neq D_2$ mostramos la existencia de dos subconjuntos abiertos y ajenos que contienen a D_1 y D_2 respectivamente, por tanto, hemos probado que el espacio $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff. ■

Teorema 2.27. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{D}$ es una descomposición usc, entonces $\mathcal{D}$ es un continuo.*

Demostración. Como el espacio X es métrico y compacto, se sigue por el teorema 2.26 que el espacio $\mathcal{D}$ es metrizable y por tanto un espacio métrico. Por otro lado, como π es continua y suprayectiva, entonces $\pi(X) = \mathcal{D}$ es compacto y conexo. Así, $\mathcal{D}$ es un continuo. ■

2.3 Ejemplos de descomposiciones usc

Ahora, podemos dar algunos ejemplos de cómo las descomposiciones *usc* pueden dar como resultado continuos interesantes. Los ejemplos 2.28-2.30 son muy específicos. Los ejemplos del 2.31 en adelante son más generales.

Ejemplo 2.28 (Espacio n-proyectivo)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$, definamos $\mathcal{D}$ la partición de S^n (véase la definición 1.19) como:

$$\mathcal{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}.$$

a los puntos z y $-z$ se les suele conocer como *antipodales* (los cuales son los puntos extremos del diámetro que los contiene).

Demostración de que $\mathcal{D}$ es usc. Sea $D = \{z, -z\}$ y sea U un abierto de S^n tal que $D \subset U$. Mostraremos que existe un abierto V de S^n el cual es $\mathcal{D}$-saturado tal que $D \subset V \subset U$. Como $z, -z \in U = S^n \cap A$, donde A es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces, exiten r_1, $r_2 > 0$ tales que $z \in B_{r_1}(z)$ y $-z \in B_{r_2}(-z)$. Sea

$$V = S^n \cap (B_r(z) \cup B_r(-z))$$

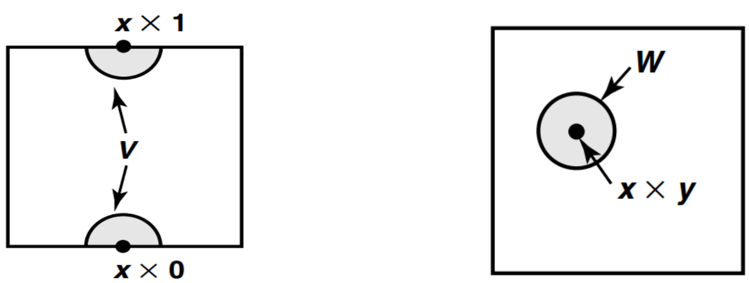
donde $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$. Podemos notar que $D \subset V \subset U$ con D un conjunto $\mathcal{D}$-saturado ya que $V = \bigcup_{z \in S^n \cap B_r(z)} (\{z, -z\})$ y el cual además es abierto en S^n. Se sigue por la porposición 2.23 que la descomposición $\mathcal{D}$ es usc. ■

Por el teorema 2.27 se cumple que el espacio de descomposición denotado por P^n es un continuo, llamado espacio n-proyectivo.

Ejemplo 2.29 (La banda de Möbius)**.** Sea $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado sólido y sea $\mathcal{D}$ la partición de I^2 dada por:

$$\mathcal{D} = \{\{(x,0),(1-x,1)\} : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{\{(x,y)\} : 0 < y < 1\}.$$

Entonces, se puede verificar que tal descomposición $\mathcal{D}$ es *usc*.



(1) Conjunto abierto en I^2 cuando $0 \leq x \leq 1$.

(2) Conjunto abierto en I^2 cuando $0 < y < 1$.

Figura 2.4: Representación de abiertos en I^2

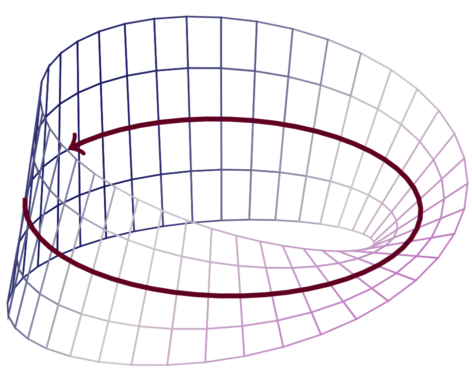


Figura 2.5: Banda de Möbius.

Se sigue por el teorema 2.27 que el espacio de descomposición es un continuo, el cual se le conoce como la *banda de Möbius* (véase la figura 2.3). Este es un continuo que se considera como un ejemplo de superficie unilateral en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.30. Sea X el continuo sen$\left(\frac{1}{x}\right)$ (véase la definición 1.26). Por el teorema 1.28 tenemos que $X = R \cup W$ donde tales conjuntos se definieron en ese teorema. Sea $\mathbf{x} \in X$, si $\mathbf{x} = (0, y) \in R \cap \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right)\right) = P$, definamos $D_y = \{(0, y), (0, 1 - y)\}$. Si $\mathbf{x} \in W \cup \left[R \setminus \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)\right] = Q$ se define $D_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\}$. Sea $\mathcal{D}$ la partición de X dada por:

$$\mathcal{D} = \{D_y : (0, y) \in P\} \cup \{D_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in Q\}.$$

Podemos notar que la partición $\mathcal{D}$ de X es *usc*. Así que, el espacio de descomposición es un continuo según el teorema 2.27, el cual se le llama el *M-continuo*.

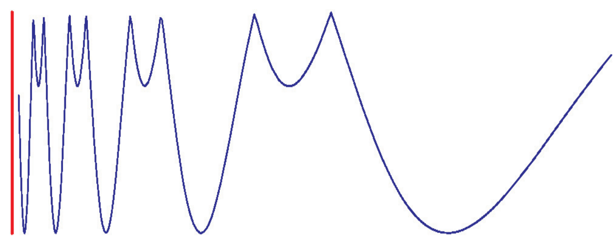


Figura 2.6: El continuo M.

Observemos la siguiente construcción general sencilla, que será de gran interés.

Lema 2.31 (El espacio X/A)**.** *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Sea $\mathcal{D}_A$ una partición de X dada por*

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus A\}.$$

Entonces, la descomposición $\mathcal{D}_A$ es usc.

Demostración. Mostraremos que la función $\pi : X \to \mathcal{D}_A$ es una función cerrada. Sea C un subconjunto cerrado de X, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $C = A$, podemos notar que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \pi\left(C\right)\right] =& \pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \{A\}\right] \\ =& \pi^{-1}\left[\{\{x\} : x \in X \setminus A\}\right] \\ =& X \setminus A.\end{aligned}$$

Donde $X \setminus A$ es un subconjunto abierto de X.

Caso 2. Si $C \neq A$. Consideremos que $C \cap A = \emptyset$, entonces se puede verificar que:

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \pi\left(C\right)\right] =& \pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \{\{x\} : x \in C\}\right] \\ &= \pi^{-1}\left[\{A\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus (A \cup C)\}\right] \\ &= X \setminus C.\end{aligned}$$

Donde $X \setminus C$ es un abierto de X. Por otro lado, consideremos el caso cuando $C \cap A \neq \emptyset$, entonces uno puede verificar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \pi\left(C\right)\right] =& \pi^{-1}\left[\mathcal{D}_A \setminus \left(\{A\} \cup \{\{x\} : x \in C \setminus A\}\right)\right] \\ &= \pi^{-1}\left(\{\{x\} : x \in X \setminus \left(A \cup C\right)\}\right) \\ &= X \setminus \left(A \cup C\right).\end{aligned}$$

Donde $X \setminus (A \cup C)$ es un subconjunto abierto de X.

En cualquiera de los casos anteriores se sigue por la proposición 2.22 que $\pi\left(C\right)$ es un cerrado de $\mathcal{D}_A$. Por tanto, de la proposición 2.23 tenemos que $\mathcal{D}_A$ es usc. ■

Denotaremos al espacio de descomposición como X/A. Intuitivamente, pensamos en X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto (véase la figura 2.7). Si X es un espacio métrico compacto entonces por el teorema 2.26, X/A es metrizable. Si X es un continuo, también lo es X/A por el teorema 2.27.

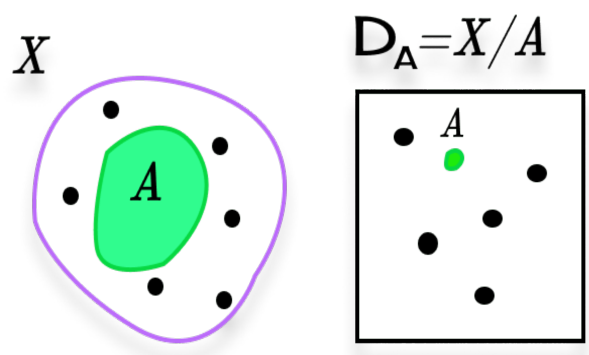


Figura 2.7: El espacio X/A.

Ejemplo 2.32 (El cono topológico)**.** Sea $Y = X \times [0,1]$ donde X es un espacio topológico y Y tiene la topología producto. Sea

$$A = \{(x,1) : x \in X\}.$$

Entonces el espacio de descomposición Y/A (véase el ejemplo 2.31) es llamado el *cono topológico sobre* X y este se denota por $TC(X)$. El *vértice* de $TC(X)$ es el punto A, y la base de $TC(X)$ es el conjunto $\pi\left(\{(x,0) : x \in X\}\right)$, donde π es la función proyección natural, aunque frecuentemente nos referimos a X como la base de $TC(X)$. Podemos mostrar, usando π, que $TC(X)$ es arco conexo y por tanto conexo. Por tanto, si X es un espacio métrico compacto, $TC(X)$ es un continuo, esto por el ejemplo 2.31. En el caso cuando X es un espacio métrico compacto, $TC(X)$ y el llamado *cono geométrico* son homeomorfos (véase el teorema 3.7), por tanto, en tal caso, nos referiremos a $TC(X)$ como *el cono sobre* X si no hay confusión.

Demostración de que $TC(X)$ es conexo. Empleando la proposición 1.22 mostraremos $TC(X)$ es arco conexo, para este propósito basta mostrar por [18, lema 1.5, pág. 5] que todo elemento $D \in TC(X)$ que no sea el vértice $A \in TC(X)$ se puede conectar mediante un arco con puntos extremos A y D. Definamos una función auxiliar, para $D = \{(x,t)\} \in TC(X)$ sea $\lambda : [0,1] \to Y = X \times [0,1]$ definida como

$$\lambda(s) = (x, t + (1-t) \cdot s) \quad \text{para cada } s \in [0,1]. \tag{2.4}$$

La función descrita en (2.4) es continua ya que las funciones que la componen coordenada a coordenada son funciones continuas, y es tal que $\lambda(0) = (x,t)$ y $\lambda(1) = (x,1)$. Sea ahora, $\pi : X \times [0,1] \to TC(X)$ la cual es una función continua, definamos $f : [0,1] \to f([0,1]) \subset TC(X)$ como $f(s) = (\pi \circ \lambda)(s)$ nótese que esta función es continua, ya que es la composición de funciones continuas y es tal que que

$$f(0) = \pi(\lambda(0)) = \pi(x,t) = D$$

y

$$f(1) = \pi(\lambda(1)) = \pi(x,1) = A.$$

Además, se puede mostrar que f es biyectiva. Por tanto, $f([0,1])$ es un arco de un punto $D \in TC(X)$ hasta el vértice $A \in TC(X)$. ■

Ejemplo 2.33 (La suspensión topológica)**.** Sea $TC(X)$ el cono topológico con base B, la descomposición del espacio $TC(B)/B$ (véase el ejemplo 2.31) es llamada la *suspensión topológica sobre* X la cual se denota por $TS(X)$. Cuando X es un espacio métrico compacto, $TS(X)$ es un continuo por el ejemplo 2.31 y el ejemplo 2.32. En este caso, puesto que $TS(X)$ tiene una descomposición geométrica familiar, llamaremos a $TS(X)$ *la suspensión sobre* X.

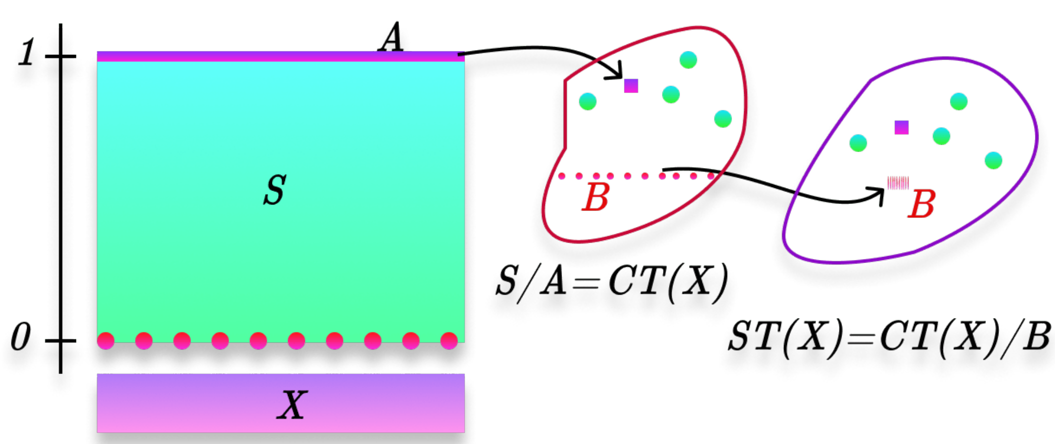


Figura 2.8: La suspensión topológica.

La construcción presentada en la definición 2.36 es una de las formas más importante para obtener nuevos espacios a partir de otros, antes de presentarla daremos la siguiente definición:

Definición 2.34. Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ y $(Y, \mathscr{T}_Y)$ espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$. La *unión libre* de X y Y es el espacio topológico $(Z, \mathscr{T}_Z)$ donde $Z = X \cup Y$ y $\mathscr{T}_Z$ está definida por la condición:

$$U \in \mathscr{T}_Z \text{ si y solo si } U \cap X \in \mathscr{T}_X \text{ y } U \cap Y \in \mathscr{T}_Y$$

La unión libre de X y Y se denota por $X + Y$.

Observación 2.35. Un subconjunto $C \subset X + Y$ es cerrado si y solo si $C \cap X$ es cerrado en X y $C \cap Y$ es cerrado en Y (véase [6, proposición 2.2.1]).

Definición 2.36. Sean X, Y espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$, A un subconjunto cerrado no vacío de X, $f : A \to Y$ una función continua. Sea $\mathcal{D}$ la partición de $X + Y$ (véase la definición 2.34) dada por:

$$\mathcal{D} = \{\{y\} \cup f^{-1}(y) : y \in f(A)\} \cup \{\{x\} : x \in X + Y \setminus [A \cup f(A)]\}.$$

El espacio de descomposición que se obtiene, se conoce como el *espacio adjunto* de X e Y y se denota como $X \cup_f Y$.

Intuitivamente, X y Y están *cosidos* a lo largo de A y $f(A)$, identificando cada $a \in A$ con su imagen $f(a) \in Y$ (véase la figura 2.9). Podemos notar que el espacio expuesto en el ejemplo 2.31 puede considerarse como un espacio adjunto.

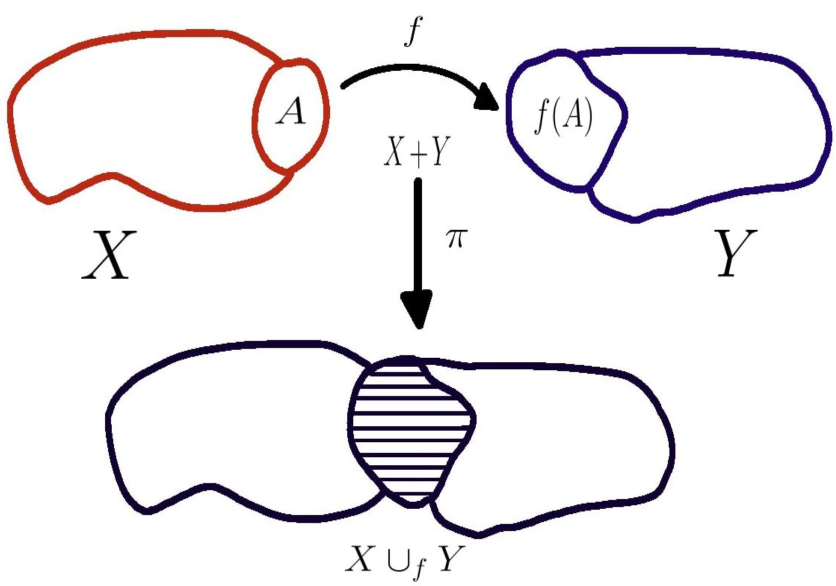


Figura 2.9: El espacio adjunto $X \cup_f Y$.

Observación 2.37. Sean X, Y son espacios topológicos como en la definición 2.34,

(i) si x es un elemento de $X+Y$, entonces x pertenece exactamente a uno y solo uno de los siguientes conjuntos $X \setminus A$, A, $f(A)$ o $Y \setminus f(A)$, ya que cada uno de esos conjuntos son ajenos entre si.

(ii) Para cada $a \in A$, se cumple que $\pi(a) = \pi(f(a))$. En efecto, sea $a \in A$, podemos notar que $f(a) \in f(A)$, sea $b = f(a)$ como $a \in f^{-1}(b)$ tenemos que

$$\pi(a) = \{b\} \cup f^{-1}(b)$$

pero para $b \in f(A)$, tenemos que

$$\pi(b) = \{b\} \cup f^{-1}(b).$$

Por tanto, $\pi(a) = \pi(f(a))$. De esto último, podemos notar que para $a \in A$, $\pi(a) \in \pi(A) \subset \pi(X)$ y que $\pi(a) = \pi(f(a)) \in \pi(f(A)) \subset \pi(Y)$ donde $\pi(a) \in X \cup_f Y$.

Teorema 2.38. *Sean X, Y espacios topológicos tales que $X \cap Y = \emptyset$, A un subconjunto cerrado no vacío de X y $f : A \to Y$ una función continua. Sea $\pi : X + Y \to X \cup_f Y$ la función proyección natural. Entonces*

(1) *Para cada $C \subset X + Y$ se cumple que*

$$\pi^{-1}\left[\pi(C)\right] = C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] \cup f^{-1}(C \cap Y) \tag{2.5}$$

(2) *Si $C \subset X + Y$ es tal que $C \cap X$ es cerrado en X, entonces $\pi(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ si y solo si $(C \cap Y) \cup f\,(C \cap A)$ es cerrado en Y.*

(3) *Si f asocia subconjuntos cerrados de A sobre subconjuntos cerrados en Y, entonces $X \cup_f Y$ es una descomposición usc de $X + Y$.*

Demostración. (1) Sea $C \subset X + Y$, mostraremos ambas contenciones:

($\subset$) Para $x \in \pi^{-1}\left[\pi(C)\right]$, entonces $\pi(x) \in \pi(C)$, con lo cual $\pi(x) = \pi(c)$ para algún $c \in C$, notemos que $c \in \pi(x)$, por (i) de la observación 2.37 tenemos los siguientes casos:

(a) Si $x \in X \setminus A$ tenemos que $c \in \pi(x) = \{x\}$, con lo cual $x = c \in C$.

(b) Si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A) \subset Y$. Sea $y = f(x)$, tenemos que $c \in \pi(x) = \{y\} \cup f^{-1}(y)$, por lo que $c \in \{y\}$ o $c \in f^{-1}(y)$. Si $c \in \{y\}$, entonces $f(x) = c \in C$, por tanto, $f(x) \in C \cap Y$, así, $x \in f^{-1}(C \cap Y)$, ya que $x \in A$ y es tal que $f(x) \in C \cap Y$. Si $c \in f^{-1}(y) = \{a \in A :\ f(a) = y\}$, entonces $c \in C \cap A$ y es tal que $f(c) = f(x)$. Por lo que $x \in f^{-1}\left(f(C \cap A)\right)$.

(c) Si $x \in f(A)$, entonces tenemos que $c \in \pi(x) = \{x\} \cup f^{-1}\{x\}$. Si $c \in \{x\}$, entonces $x = c \in C$. Si

$$c \in f^{-1}\{x\} = \{a \in A : f(a) = x\},$$

entonces $c \in A \cap C$ y es tal que $f(c) = x$. Por tanto $x \in f^{-1}(C \cap A)$.

(d) Si $x \in Y \setminus f(A)$, tenemos que $c \in \pi(x) = \{x\}$, con lo cual $x = c \in C$.

En cualquiera de los anteriores casos, tenemos que

$$x \in C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] \cup f^{-1}(C \cap Y).$$

$(\supset)$ Sea $x \in C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] \cup f^{-1}(C \cap Y)$, tenemos los siguientes casos:

(a) Si $x \in f^{-1}(C \cap Y) \subset A \subset X \subset X + Y$, entonces $f(x) \in C \cap Y$. Como $x \in A$ se sigue por (ii) de la observación 2.37 que $\pi(x) = \pi(f(x))$ con $f(x) \in C$ por tanto $\pi(x) \in \pi(C)$ con lo cual $x \in \pi^{-1}\left[\pi(C)\right]$.

(b) Si $x \in f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] = \{a \in A : f(a) \in f(A \cap C)\} \subset X + Y$, entonces $x \in A$ y es tal que $f(x) \in f(C \cap A)$, por lo que existe $c \in C \cap A$ tal que $f(x) = f(c)$. Como $x, c \in A$ se sigue por (ii) de la observación 2.37 que $\pi(c) = \pi(f(c))$ y $\pi(x) = \pi(f(x))$ pero como $f(x) = f(c)$ tenemos que $\pi(f(x)) = \pi(f(c))$ por lo que $\pi(x) = \pi(c)$ con $c \in C$ por tanto $x \in \pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$.

(c) Si $x \in f(C \cap A) \subset Y \subset X + Y$, entonces existe $c \in C \cap A$ tal que $f(c) = x$. Como $c \in A$ se sigue por (ii) de la observación 2.37 que $\pi(c) = \pi(f(c))$ pero $\pi(f(c)) = \pi(x)$ por tanto $\pi(x) = \pi(c)$ con $c \in C$ por lo que $\pi(x) \in \pi\left(C\right)$ con lo cual $x \in \pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$.

(d) Si $x \in C \subset X + Y$, se sigue de inmediato que $x \in \pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$

En cualquiera de los anteriores casos, $x \in \pi^{-1}\left[\pi(C)\right]$.

(2) Mostraremos que

$$\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right] \cap Y = (C \cap Y) \cup f\left(C \cap A\right) \quad (*)$$
$$\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right] \cap X = (C \cap X) \cup f^{-1}\left[\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right] \cap Y\right] \quad (**).$$

Por (2.5) del inciso anterior y observando que

$$f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] \quad \text{y} \quad f^{-1}(C \cap Y)$$

son subconjuntos de X y sabiendo que $X \cap Y = \emptyset$ tenemos la primera igualdad $(*)$. Con argumentos similares podemos obtener la siguiente igualdad

$$\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right] \cap X = (C \cap X) \cup f^{-1}\left[f(C \cap A)\right] \cup f^{-1}(C \cap Y). \qquad (2.6)$$

Por $(*)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}\left[\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\cap Y\right] &= f^{-1}\left[\left(C\cap Y\right)\cup f\left(C\cap A\right)\right] \\ &= f^{-1}\left(C\cap Y\right)\cup f^{-1}\left[f\left(C\cap A\right)\right]. \end{aligned}$$

De esto último y por (2.6) tenemos la segunda igualdad (**).

($\Rightarrow$) Supongamos que $\pi(C)$ es cerrado en $X\cup_f Y$, como π es una función continua, $\pi^{-1}\left[\pi(C)\right]$ es cerrado en $X+Y$, se sigue por la observación 2.35 que $\pi^{-1}\left[\pi(C)\right]\cap Y$ es cerrado en Y pero por $(*)$ tenemos que $(C\cap Y)\cup\ f\left(C\cap A\right)$ es cerrado en Y.

($\Leftarrow$) Veamos que $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$ es un subconjunto cerrado de $X+Y$, para ello, por la observación 2.35 basta mostrar que $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\cap X$ y $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\cap Y$ son subconjuntos cerrados de X e Y respectivamente. Por $(*)$ y dada nuestra suposición inicial se sigue que $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\cap Y$ es un subconjunto cerrado de Y. Como $C\cap X$ es un subconjunto cerrado de X y además $f:A\to Y$ es una función continua, entonces

$$f^{-1}\left[\left(C\cap Y\right)\cup f\left(C\cap A\right)\right] \quad (***)$$

es un subconjunto cerrado de A donde este último es un subespacio cerrado de X (véase [6, pág. 66]) con lo cual el conjunto en $(***)$ es cerrado en X (véase [6, pág. 66]). Se sigue por $(**)$ que $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\cap X$ es cerrado en X ya que es la unión finita de conjuntos cerrados de X.

Por último, como $\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$ es cerrado en $X+Y$ tenemos por la proposición 2.22 que $\pi\left[\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\right]=\pi\left(C\right)$ (la igualdad se da por la suprayectividad de π) es cerrado en $X\cup_f Y$ siempre que

$$\pi^{-1}\left[X\cup_f Y\setminus\pi\left[\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]\right]\right]=X+Y\setminus\pi^{-1}\left[\pi\left(C\right)\right]$$

sea abierto en $X+Y$ lo cual ya probamos, ya que es el complemento de un conjunto cerrado.

(3) Por (2) de la proposición 2.23 basta mostrar que la función

$$\pi:X+Y\to X\cup_f Y$$

es cerrada. Sea C un subconjunto cerrado de $X+Y$, para exhibir que $\pi(C)$ es cerrado en $X\cup_f Y$, por el inciso (2) de esta proposición es suficiente mostrar que el conjunto $(C\cap Y)\cup f(C\cap A)$ es cerrado en Y. Se sigue por la observación 2.35 que $(C\cap Y)$ y $(C\cap X)$ son cerrados en X e Y respectivamente, nótese que $(C\cap X)\cap A=C\cap(X\cap A)=C\cap A\subset A$ (ya que $A\subset X$) es un subconjunto cerrado en X ya que es la intersección de conjuntos cerrados, se sigue por [6, proposición 2.1.1] que $C\cap A$ es un subconjunto cerrado en A, dada nuestra suposición inicial, $f(C\cap A)$ es un subconjunto cerrado de Y, así, el conjunto $(C\cap Y)\cup f(C\cap A)$ es un subconjunto cerrado de Y, puesto que es la unión finita de conjuntos cerrados en Y. ■

Teorema 2.39. *Sean* (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *son espacios métricos compactos no vacíos tales que* $X \cap Y = \emptyset$*,* A *un subconjunto cerrado y no vació de* X*, y* $f : A \to Y$ *una función continua. Entonces* $X \cup_f Y$ *es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Mostraremos primeramente que el espacio $X+Y$ es metrizable. Definamos $d_X^* : X^2 \to \mathbb{R}$ y $d_Y^* : Y^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$d_X^*(x, y) = \text{mín}\,\{1, d_X(x, y)\} \quad \text{y} \quad d_X^*(x, y) = \text{mín}\{1, d_Y(x, y)\}$$

respectivamente, las cuales se pueden verificar que son métricas sobre X e Y respectivamente. Por último, definamos $\rho : (X+Y)^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} d_X^*(x, y) & \text{si } x, y \in X, \\ d_Y^*(x, y) & \text{si } x, y \in Y, \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Podemos notar que ρ esta bien definida. Veamos que ρ satisface las condiciones $(M1)-(M3)$ de [22, definición 5.2], las condiciones $(M1)$ y $(M2)$ son evidentes por lo que solo nos limitaremos a mostrar la condición $(M3)$, es decir, que para cualesquiera $x, y, z \in X+Y$ se cumple que

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

La desigual es inmediata siempre que $x, y, z \in X$ o que $x, y, z \in Y$, así que el caso interesante es cuando no todos los puntos están en X o en Y, consideremos los siguientes casos:

(i) Supongamos que $x \in X$ y que $y, z \in Y$ entonces

$$\rho(x, y) = 1 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = 1 + d_Y^*(z, y).$$

(ii) Supongamos ahora que $y \in X$ y que $x, z \in Y$ tenemos que

$$\rho(x, y) = 1 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = d_Y^*(x, z) + 1$$

(iii) Por último, si $z \in X$ y $x, y \in Y$ entonces

$$\rho(x, y) = d_Y^*(x, y) \leq 1 < \rho(x, z) + \rho(z, y) = 2$$

ya que para cuales quiera $x, y \in Y$ se cumple que $d_Y^*(x, y) \leq 1$.

Cualquier otro caso que pueda presentarse se reduce a los casos anteriormente mencionados. Por tanto ρ es una métrica para $X+Y$.

Es momento de probar que $X+Y$ es compacto, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $X+Y$ donde para cada $\alpha \in \Lambda$, $G_\alpha \in \mathscr{T}(\rho)$, y por tanto también es una cubierta abierta para $X\,Y$ respectivamente, puesto que X, $Y \subset X+Y$. Como ambos son compactos, existen subconjuntos $\Lambda_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ y

$\Lambda_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l\}$ de Λ tales que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}$ y $Y \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} G_{\beta_j}$, nótese que $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ es una cubierta abierta finita de $X + Y$.

Por último, veamos que la descomposición $X \cup_f Y$ es semi continua superior, por (3) de la proposición 2.38 basta mostrar que la función f es cerrada lo cual se sigue de inmediato por [5, teorema 2.1, pág. 226] ya que $(A, \mathscr{T}_{d_X} |_A)$ es un espacio topológico compacto, y $(Y, \mathscr{T}_{d_Y})$ es un espacio de Hausdorff.

Así, por el teorema 2.26 $X \cup_f Y$ es metrizable y por tanto un espacio métrico, la compacidad de $X \cup_f Y$ se debe a que la función proyección natural $\pi : X + Y \to X \cup_f Y$ es continua y suprayectiva. ■

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_A"'] & Y \arrow[d, hook, "i_Y"] \arrow[rdd, bend left, "\pi \circ i_Y"] & \\
X \arrow[r, hook, "i_X"'] \arrow[rrd, bend right, "\pi \circ i_X"'] & X \cup Y \arrow[rd, "\pi"] & \\
& & X \cup_f Y
\end{tikzcd}$$

Figura 2.10: Diagrama que muestra la relación entre los espacios A, X, Y, $X \cup Y$ y $X \cup_f Y$.

Teorema 2.40. *Sean X, Y continuos tales que $X \cap Y = \emptyset$, A un subconjunto cerrado y no vació de X, $f : A \to Y$ una función continua. Entonces $X \cup_f Y$ es un continuo.*

Demostración. Como X, Y son continuos, estos en particular son espacios métricos compactos, los cuales son disjuntos, se sigue por el teorema 2.39 que $X \cup_f Y$ es un espacio métrico compacto. Resta mostrar que el espacio $X \cup_f Y$ es un espacio conexo.

Como la función proyección natural $\pi : X + Y \to X \cup_f Y$ es continua, los subconjunto $\pi(X), \pi(Y)$ de $X \cup_f Y$ son conexos, afirmamos que:

(a) $\pi(X) \cup \pi(Y) = X \cup_f Y$

(b) $\pi(X) \cup \pi(Y)$ es conexo.

Note que $\pi(X) \cup \pi(Y) = \pi(X + Y) = X \cup_f Y$ ya que π es suprayectiva, lo cual prueba (a). Nótese que la familia que consta solo de los subconjuntos $\pi(X)$ y $\pi(Y)$ de $X \cup_f Y$ satisface las condiciones de [5, teorema 1.5, pág. 108] por (ii) de la observación 2.37, esto prueba (b). Por tanto, $X \cup_f Y$ es un continuo. ■

Es momento de abrir un paréntesis, para abordar un concepto que será de gran utilidad para la demostración del teorema 2.47.

Definición 2.41. Sean $(X, \mathscr{T}_X)$, $(Y, \mathscr{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función suprayectiva $f : X \to Y$ es llamada una *función cociente* siempre que $\mathscr{T}_Y$ sea la topología más grande que haga de f una función continua.

Proposición 2.42. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces la familia:*

$$\mathscr{T}(f) = \left\{ U \subset Y : \, f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X \right\}$$

es una topología para Y, nos referiremos a la topología $\mathscr{T}(f)$ como topología cociente*. Más aún, $\mathscr{T}(f)$ es la topología más grande en Y para la cual $f : X \to Y$ es continua, en adición, si f es una función cociente entonces $\mathscr{T}(f) = \mathscr{T}_Y$ donde $\mathscr{T}_Y$ es la topología más grande en Y de tal manera que hace de f una función continua, es decir, los conjuntos U abiertos en Y son todos aquellos, y solo aquellos, para los cuales $f^{-1}(U)$ son abiertos en X.*

Demostración. Mostraremos primeramente que $\mathscr{T}(f)$ es una topología para Y, para ello verificaremos que se cumple las condiciones de [22, definición 7.1]:

- $(T1)$ Notemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(Y) = X$ los cuales son abiertos en X, por tanto, $\emptyset$, $Y \in \mathscr{T}(f)$.

- $(T2)$ Sean U, $V \in \mathscr{T}(f)$ entonces $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ son abiertos en X, notemos que $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, así, $U \cap V \in \mathscr{T}(f)$.

- $(T3)$ Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de abiertos en Y, entonces $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una familia de abiertos de X, así, $\bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$ es un abierto en X. Notemos que $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$, así, $\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathscr{T}(f)$.

Por tanto, $\mathscr{T}(f)$ es una topología para Y. Por otro lado, podemos observar que la función $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}(f))$ (donde $\mathscr{T}_X$ es la topología en X) es continua por como se definió $\mathscr{T}(f)$. Supongamos que $\mathscr{T}$ es otra topología en Y para la cual f es continua, sea $V \in \mathscr{T}$ entonces $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto en X, así, por como se definió $\mathscr{T}(f)$, se tiene que $V \in \mathscr{T}(f)$. Por tanto, $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}(f)$, lo cual muestra que $\mathscr{T}(f)$ es la topología más grande para la cual f es continua.

Asumamos que f es una función cociente, entonces $\mathscr{T}_Y$ es una topología en Y para la cual f es una función continua, pero $\mathscr{T}(f)$ es la topología más grande en Y con esa propiedad, así $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}(f)$. Por otro lado, también la topología $\mathscr{T}(f)$ hace de f una función continua, pero $\mathscr{T}_Y$ es la topología más grande en Y con esa propiedad, por tanto $\mathscr{T}(f) \subset \mathscr{T}_Y$. Por tanto, $\mathscr{T}(f) = \mathscr{T}_Y$. ∎

Si $f : X \to Y$ es una función continua, la continuidad de cualquier función $g : Y \to Z$ implica la continuidad de la función $g \circ f$ (siempre que esta este definida), la propiedad fundamental, de hecho, que caracteriza a las funciones cocientes es que el reciproco también se cumple, esto lo presentamos en el siguiente teorema:

Teorema 2.43. *Sean $(X, \mathscr{T}_X)$, $(Y, \mathscr{T}_Y)$ espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua suprayectiva. Entonces f es una función cociente si y solo si para cada espacio topológico $(Z, \mathscr{T}_Z)$ y para cada función $g : Y \to Z$, la continuidad de $g \circ f$ implica la continuidad de g.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Asumamos que $f : X \to Y$ es una función cociente y que $g \circ f : X \to Z$ es una función continua donde $g : Y \to Z$. Afirmamos que para cada subconjunto A de Z se cumple que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right]. \tag{2.8}$$

En efecto, tenemos que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(A) = f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right].$$

Veamos que g es continua, sea V un subconjunto abierto de Z, tenemos que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}[g^{-1}(V)]$ es un subconjunto abierto de X. Se sigue por la proposición 2.42 que $g^{-1}(V) \in \mathscr{T}_Y$ lo cual muestra que g es continua.

($\Leftarrow$) Deseamos mostrar que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ es una función cociente, por la proposición 2.42 basta mostrar que $\mathscr{T}(f) = \mathscr{T}_Y$. Sea $f^* : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}(f))$ donde $f^* = f$ y la cual es continua por la proposición 2.42. Consideremos la función identidad sobre Y, es decir, $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathscr{T}_Y) \to (Y, \mathscr{T}_Y(f))$, mostraremos que id_Y es continua. Veamos que $\mathrm{id}_Y \circ f = f^*$, sea $x \in X$ entonces

$$(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x) = f^*(x).$$

Como f^* es continua se sigue, dada nuestra suposición que id_Y es continua. Entonces por [5, ejemplo 2, pág. 79] tenemos que $\mathscr{T}_Y^* \subset \mathscr{T}_Y$. Por tanto, $\mathscr{T}_Y$ es la topología más grande para la cual la función f es continua. ∎

Notación 2.44. Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es un función suprayectiva. Denotaremos por $\mathcal{D}_f$ a la partición de X dada por $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$. Veamos que en efecto la familia $\mathcal{D}_f$ es una partición de X. Dado que f es suprayectiva, entonces para cada $y \in Y$ existe $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$ por lo que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Sean $f^{-1}(y_1)$, $f^{-1}(y_2) \in \mathcal{D}_f$ tales que $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, supongamos que existe $x \in f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2)$ entonces $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$, como f es función $y_1 = y_2$ tenemos que $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ lo cual no es posible, por tanto, $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$. Además, $X = \bigcup \mathcal{D}_f$ por tanto $\mathcal{D}_f$ es una partición de X .

Un resultado útil el cual se utiliza para mostrar el teorema 2.47 y el teorema 3.7 es el siguiente.

Lema 2.45 (de transgresión)**.** *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función cociente y $g : X \to Z$ una función continua. Asumamos que g es constante en cada fibra $f^{-1}(y)$, si denotamos por $z_y \in Z$ al único elemento del conjunto unitario $g\left(f^{-1}(y)\right) \subset Z$ y definimos una función $h : Y \to Z$ como $h(y) = z_y$. Entonces h es una función continua y en adición el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Mostraremos primeramente que $h \circ f = g$. Sea $x \in X$, puesto que $\mathcal{D}_f$ es una partición de X, entonces $x \in f^{-1}(y)$ para algún $y \in Y$. Tenemos que; $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = z_y$. Puesto que z_y es el único elemento del conjunto $g\left(f^{-1}(y)\right)$ y $g(x) \in g\left(f^{-1}(y)\right)$ tenemos que $z_y = g(x)$ y por tanto $g = h \circ f$. Como que g es continua, también lo es la función $h \circ f$ donde f es una función cociente, se sigue de la proposición 2.43 que h es continua. ■

Proposición 2.46. *Sean X un espacio topológico compacto y Y espacio topológico de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces f es una función cociente.*

Demostración. Se sigue por [5, teorema 2.1, pág. 226] que f es una función cerrada. Sea Z cualquier otro espacio topológico y $g : Y \to Z$ cualquier otra función, supongamos que $g \circ f$ es continua, veamos que g es continua. Sea V un subconjunto cerrado de Z tenemos que $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ es cerrado en X (véase la igualdad en (2.8) de la proposición 2.43), como f es cerrada y suprayectiva tenemos que $f\left[f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]\right] = g^{-1}(V)$ es cerrado en Y, lo cual muestra que g es continua. Se sigue de la proposición 2.43 que f es una función cociente. ■

Hasta aquí cerramos nuestro para paréntesis para presentar el siguiente teorema, el cual muestra como obtener todas las descomposiciones de un espacio métrico compacto dado. Simultáneamente, este proporciona una manera de obtener descomposiciones *usc* específicas.

Teorema 2.47. *Sean X, Y espacios métricos compactos, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X la cual es homeomorfa a Y y en adición el siguiente diagrama es conmutativo (vease la figura 2.11).*

Recíprocamente, cualquier descomposición usc del espacio X es un espacio métrico compacto, el cual es la imagen de X (bajo la función proyección natural π).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \mathcal{D}_f \end{tikzcd}$$

Figura 2.11: Relación entre los espacios X, Y, $\mathcal{D}_f$.

Demostración. Supongamos que la descomposición $\mathcal{D}_f$ de X no es usc, entonces para algún elemento $f^{-1}(y_0) \in \mathcal{D}_f$ existe un abierto U de X con $f^{-1}(y_0) \subset U$ para el cual no existe un abierto V de X que cumpla con las condiciones de la definición 2.17. De lo anterior, sea para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$N\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right) = \left\{x \in X : d(x,a) < \frac{1}{n} \quad \text{para algún } a \in f^{-1}(y_0)\right\}.$$

Se sigue por [4, Lema 1.1.5, pág. 1] que para cada $n \in \mathbb{N}$, $N\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right)$ es un conjunto abierto de X y es tal que $f^{-1}(y_0) \subset N\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right)$.

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $N\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y)\right)$ no satisfacen las condiciones del conjunto V de la definición 2.17 se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen

$$p_n \in f^{-1}(y_n) \cap N\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y)\right) \quad \text{y} \quad q_n \in f^{-1}(y_n) \cap (X \setminus U). \tag{2.9}$$

Por (2.9) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in f^{-1}(y_0)$ tal que $d(p_n, a_n) < \frac{1}{n}$. La sucesión de números reales $\{d(p_n, a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $0 \in \mathbb{R}$, ya que dado un $\varepsilon^* > 0$ por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^*$, así, para cada $n \geq n_0$ se cumple que

$$|d(p_n, a_n) - 0| = d(p_n, a_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon^*.$$

Ahora, nótese que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $f^{-1}(y_0)$ el cual es compacto (ya que este último es cerrado y esta contenido en el compacto X) por tanto esta admite una subsucesión convergente a algún punto de $f^{-1}(y_0)$, asumamos sin perdida de generalidad que $a_n \to p \in f^{-1}(y_0)$. Afirmamos que $p_n \to p$, sea $\varepsilon > 0$ puesto que $a_n \to p$ y $d(p_n, a_n) \to 0$ entonces existen naturales $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1, N_2$, $d(a_n, p) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $d(a_n, p_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ respectivamente, sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ por la desigualdad triangular tenemos que para cada $n \geq N$:

$$d(p_n, p) \leq \ d(p_n, a_n) + d(a_n, p) < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De (2.9) se tiene que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X \setminus U$ el cual es un cerrado de X y por tanto compacto (ya que X es compacto), entonces esta sucesión admite una subsucesión convergente a algún punto en $X \setminus U$, de igual manera, asumamos sin perdida de generalidad que $q_n \to q \in X \setminus U$. También, de (2.9) podemos notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(p_n) = f(q_n) \quad (\spadesuit)$, ahora, puesto que f es continua, se sigue que $f(p_n) \to f(p)$ donde $f(p) = y_0$ por tanto $f(p_n) \to y_0$, por otro lado también se tiene que $f(q_n) \to f(q)$, por $(\spadesuit)$ tenemos que $f(p_n) \to f(q)$, puesto que el límite de una sucesión es único se sigue que $f(q) = y_0$ lo cual muestra que $q \in f^{-1}(y_0) \cap (X \setminus U)$, esto contradice el hecho de que $f^{-1}(y_0) \subset U$. Por tanto $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc.

Como X es un espacio compacto y $\mathcal{D}_f$ es usc, se sigue por el teorema 2.26 que $\mathcal{D}_f$ es metrizable y por tanto un espacio de Hausdorff, también Y es un espacio compacto, así, para establecer un homeomorfismo entre Y e $\mathcal{D}_f$ por [5, teorema 2.1, pág. 226] basta establecer una función $h : Y \to \mathcal{D}_f$ continua y biyectiva.

Definamos una función h apoyándonos de la función proyección natural $\pi : X \to \mathcal{D}_f$, para ello, notemos que para cada fibra $f^{-1}(y)$ la función π es constante, ya que para cada $x \in f^{-1}(y)$, $\pi(x) = f^{-1}(y)$, así, definamos a h como en el lema 2.45, podemos notar que $f^{-1}(y)$ es el único elemento del conjunto $\pi\left(f^{-1}(y)\right)$ y por tanto $h(y) = f^{-1}(y)$. La función h es continua por el lema de transgresión (lema 2.45), resta mostrar que h es biyectiva. Sea $f^{-1}(y_0) \in \mathcal{D}_f$ podemos notar que $h(y_0) = f^{-1}(y_0)$ lo cual muestra que h es suprayectiva. Sean $y_1, y_1 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$, tenemos que $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$ con lo cual

$$\pi\left(f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2)\right) = \pi\left(f^{-1}(y_1)\right) \cap \pi\left(f^{-1}(y_2)\right) = \emptyset.$$

Como los conjuntos $\pi\left(f^{-1}(y_1)\right), \pi\left(f^{-1}(y_2)\right) \subset \mathcal{D}_f$ son unitarios y ya vimos que son ajenos se sigue que $h(y_1) \neq h(y_2)$, lo cual muestra que h es inyectiva. Esto establece la primera parte del teorema.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición *usc* de X, el cual es un espacio compacto, por tanto, $\mathcal{D}$ es un espacio métrico por el teorema 2.26, como $\pi : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva , tenemos que $\pi(X) = \mathcal{D}$ es compacto. $\blacksquare$

Capítulo 3

Modelos geométricos para algunos hiperespacios

Aunque en el titulo de esta tesis tanto como de este capítulo aparece la palabra *hiperespacio*, este no ha sido definido, por tal motivo, es momento de dar una definición adecuada para que en lo sucesivo se entienda tal concepto.

3.1 Hiperespacios de continuos

En topología general, dado un espacio topológico X existen varias formas de obtener nuevos espacios topológicos a partir de este, por ejemplo: el espacio de descomposición $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ descrito en la proposición 2.3, cocientes de tipo X/A el cual se presentó en el ejemplo 2.31 o bien, el *conjunto potencia* de X el cual denotamos por $P(X)$ por solo mencionar algunos. Es momento de considerar un subconjunto particular de $P(X)$ el cual se suele representar como 2^X y cuya definición se da a continuación.

Definición 3.1. (1) Un *compactum* es un espacio métrico compacto.

(2) Sea X un compactum. Se definen los conjuntos 2^X y $C(X)$ como:

$$(i)\ 2^X = \{A :\ A \text{ es un subconjunto cerrado y no vació de } X\},$$
$$(ii)\ C(X) = \left\{A \in 2^X :\ A \text{ es conexo}\right\}.$$

(3) Sea X un compactum con métrica d. Deseamos definir una métrica apropiada para el conjunto 2^X, para este propósito se define el siguiente conjunto. Para cualesquiera $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, sea

$$\text{(c)}\ N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X :\ d(x,a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

A tal conjunto conjunto se le conoce como la *ε-nube de A*.

(4) Sea X un compactum. La función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{(d)}\ H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 :\ A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}.$$

Tal función es una métrica para el conjunto 2^X la cual se le suele conocer como la *métrica de Hausdorff inducida por d*. El hecho de que H_d sea un métrica se debe por [18, teorema 1.15, pág. 11].

(5) Sean X un compactum y $\mathcal{H}(X)$ un subconjunto de 2^X. Al espacio topológico $(\mathcal{H}(X), \mathscr{T}(H_d))$ donde $\mathscr{T}(H_d)$ es la topología inducida por la métrica H_d es lo que conoceremos como un *hiperespacio* de X.

En lo sucesivo, cuando se defina un hiperespacio para X estaremos asumiendo que este posee la topología inducida por la métrica H_d. Si el lector esta interesado en conocer más sobre hiperespacios puede consultarse [18], [23], [15] o [16].

Ejemplo 3.2. Sea X un continuo. Los conjuntos 2^X y $C(X)$ son hiperespacios de X

Aunque existen una gran variedad de hiperespacios para un continuo dado X, en este capítulo solo trabajaremos con $C(X)$. En particular, se desea obtener el modelo geométrico para este hiperespacio cuando X es el continuo conocido como *la circunferencia con una espiral*. Para precisar mejor lo anterior, un *modelo geométrico para un hiperespacio* $\mathcal{H}(X)$ es un espacio topológico Z homeomorfo a $\mathcal{H}(X)$ en donde los elementos de Z sean representados por puntos (que regularmente están en un n-espacio euclídeo) y no por conjuntos como lo es en $\mathcal{H}(X)$. En [23] se presenta el modelo geométrico de $C(X)$ cuando X es un arco, S^1 o un triodo simple. Desde luego que habrá limitaciones al momento de querer obtener un modelo geométrico, dada la naturaleza de algunos continuos, incluso con estas limitaciones daremos la suficiente información acerca de su hiperespacio, de tal manera que podamos hacernos una idea de la anatomía de tales hiperespacios. Este capítulo se puede considerar como la continuación de lo expuesto en [23], así que mi querido lector, antes de continuar es recomendable (aunque no necesario) consultar dicha referencia.

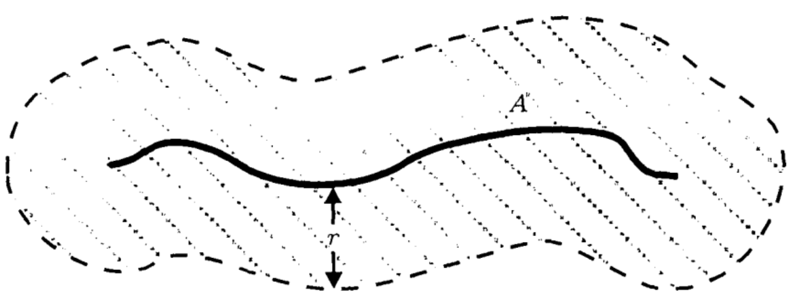


Figura 3.1: La r-nube de un conjunto $A \in 2^X$

3.2 $C(S)$ cuando S es la circunferencia con una espiral

Definición 3.3. *La circunferencia con una espiral* (véase la figura 3.2) es el continuo $S = S^1 \cup \mathcal{S}$ donde S^1 es la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\},$$

y $\mathcal{S}$ es la espiral dada en coordenadas polares por

$$\mathcal{S} = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r = 1 + \frac{1}{1+\theta} \text{ y } \theta \geq 0\right\}.$$

En lo sucesivo la letra S será reservada para referirnos a la circunferencia con una espiral.

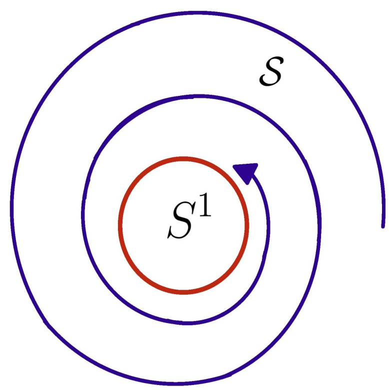


Figura 3.2: Circunferencia con una espiral.

Observación 3.4. (1) Podemos representar a $\mathcal{S}$ mediante la parametrización $T : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(\theta) = \left(\left(1 + \frac{1}{1+\theta}\right)\cos\theta, \left(1 + \frac{1}{1+\theta}\right)\sin\theta\right).$$

Podemos notar que la función T es una función continua, también podemos observar que $T([0, \infty)) = \mathcal{S}$.

(2) Se puede verificar que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{S}) = S^1 \cup \mathcal{S}$, ya que S^1 contiene a todos los puntos de acumulación de $\mathcal{S}$.

(3) Veamos que en efecto S es un continuo, este es compacto ya que S es cerrado y acotado, es conexo ya que $[0, \infty)$ es conexo en $\mathbb{R}$ y T es una función continua, así, $T([0, \infty)) = \mathcal{S}$ es conexo, se sigue que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{S}) = S$ es conexo.

Mostraremos en el teorema 3.10 que $C(S)$ (véase la definición 3.1) es homeomorfo al cono sobre S, para ello, recordaremos la definición de cono sobre un espacio y daremos su interpretación geométrica.

3.3 Conos y conos geométricos

Definición 3.5. Sea X un espacio topológico. El *cono sobre* X, el cual de denota como $\operatorname{Cono}(X)$, es el espacio cociente que se obtiene de $X \times [0,1]$ al reducir $X \times \{1\}$ a un punto; es decir, $\operatorname{Cono}(X)$ es el espacio cociente $X \times [0,1]/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre $X \times [0,1]$ dada por

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \text{ si y solo si } (x_1, t_1) = (x_2, t_2) \text{ o } t_1 = t_2 = 1.$$

El punto $X \times \{1\}$ de $\operatorname{Cono}(X)$ es llamado *el vértice del* $\operatorname{Cono}(X)$; el subconjunto $X \times \{0\}$ del $\operatorname{Cono}(X)$ se llama *la base del* $\operatorname{Cono}(X)$.

Observación 3.6. La partición que induce la relación de equivalencia $\sim$ en $X \times [0,1]$ no es más que

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{(x,t)\} : (x,t) \in (X \times [0,1]) \setminus A\}$$

donde $A = \{(x,1) : x \in X\}$ y por tanto $\operatorname{Cono}(X) = \mathcal{D}_A$ (véase el ejemplo 2.31 y el ejemplo 2.32).

Teorema 3.7. *Sea X un compactum, entonces el* $\operatorname{Cono}(X)$ *es topológicamente el mismo que el espacio $G(X)$ donde $G(X)$ es el espacio que resulta de la siguiente construcción, ilustramos a $G(X)$ en la figura 3.4:*

***Construcción de* $\mathbf{G(X)}$:**
Asumamos que $X \subset E$ donde $E = \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ o $E = I^\infty$. Sea $p \in E$ un punto arbitrario pero fijo. Consideremos el espacio $E \times [0,1]$ y sea $v = (p,1)$ y para cada $x \in X$ sea

$$xv = \{t \cdot v + (1-t) \cdot (x,0) : 0 \leq t \leq 1\}$$

es decir, xv denota el segmento de linea recta en $E \times [0,1]$ que va de $(x,0)$ a v. Por último, sea

$$G(X) = \bigcup_{x \in X} xv \subset E \times [0,1].$$

Demostración. Sea $\pi : X \times [0,1] \to \operatorname{Cono}(X) = \mathcal{D}_A$ la función proyección natural y definamos una función $f : X \times [0,1] \to G(X)$, como

$$f(x,t) = t \cdot v + (1-t) \cdot (x,0) \tag{3.1}$$

para cada $(x,t) \in X \times [0,1]$, podemos notar que:

(i) f esta bien definida, ya que para cada $(x,t) \in X \times [0,1]$ se tiene que $f(x,t) \in xv \subset G(X)$ además, podemos observar que $f(x,t)$ es el único elemento en $G(X)$ que le corresponde a $(x,t) \in X \times [0,1]$.

(ii) f es suprayectiva pero f no es inyectiva, ya que para cada $x \in X$ tomemos a $t = 1$ entonces $f(x,1) = v$ lo cual muestra que f no es inyectiva, para mostrar que f es suprayectiva, sea $x \in G(X)$, si $x = v$ como $X \neq \emptyset$, entonces existe al menos un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0,1) = v$ donde $(x_0,1) \in Y \times [0,1]$, si $x \neq v$ entonces existe $x_1 \in G(X)$ tal que $x \in x_1 v$ por lo que x es de la forma

$$t_1 \cdot v + (1 - t_1) \cdot (x_1, 0)$$

para algún $t_1 \in [0,1]$, sea $(x_1,t_1) \in Y \times [0,1]$ y notese que $f(x_1,t_1) = x$

(iii) f es una función continua. Mostraremos solo el caso cuando X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ya que para el caso cuando $X \subset I^\infty$ se hace de manera similar. Sea $(x,t) \in X \times [0,1]$ y sea $\{(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $X \times [0,1]$ tal que $(x_n,t_n) \to (x,t)$ entonces $x_n \to x$ y $t_n \to t$ respectivamente. Notemos que $(t_n \cdot p, t_n) \to (t \cdot p, t)$ y $(x - t_n x, 0) \to (x - tx, 0)$ y por tanto $f(x_n,t_n) \to f(x,t)$ esto muestra que f es continua en (x,t) el cual fue arbitrario y por tanto f es continua.

Para establecer un homeomorfismo entre los espacios $\text{Cono}\,(X)$ y $G(X)$, notemos primeramente que $\text{Cono}\,(X)$ es un espacio topológico compacto, ya que dado que la función $\pi : X \times [0,1] \to \text{Cono}\,(X)$ es continua y suprayectiva y además $X \times [0,1]$ es compacto, se sigue que el espacio $\text{Cono}\,(X)$ es compacto ya que π es una función continua y por otro lado podemos notar que el espacio $G(X)$ es un espacio de Hausdorff ya que este es un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, así, por [5, teorema 2.1, pág. 226] basta exhibir una función $h : \text{Cono}\,(X) \to G(X)$ continua y biyectiva.

$$\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \text{Cono}\,(X) \arrow[d, dashed, "h"] \\
& G(X)
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Relación entre los espacios $X \times [0,1]$, $\text{Cono}\,(X)$ y $G(X)$

La función f es constante en cada fibra $\pi^{-1}(D)$ con $D \in \text{Cono}\,(X)$. En efecto, solo tenemos los siguientes casos:

1. Si $D = A$ donde $A = \{(x,1) : x \in X\}$ entonces $f(x,1) = v$ para cada $(x,1) \in A$.

2. Si $D = \{(x,t)\}$ donde $t \in [0,1)$ entonces $f(x,t) = t \cdot v + (1-t) \cdot (x,0)$.

Así, podemos definir una función h tal y como se hizo en el enunciado lema 2.45, es decir, $h : \text{Cono}\,(X) \to G(X)$ como $h\,(D) = x_D$ donde x_D representa al único elemento del conjunto $f\,(\pi^{-1}\,(D))$. Dado que π es una función cociente (véase el resultado en la proposición 2.7) y f es una función continua, entonces por el lema de transgresión (véase el lema 2.45) la función h es continua. Veamos ahora que h es biyectiva, sean $D_1,\ D_2 \in \text{Cono}\,(X)$ tales que $D_1 \neq D_2$, consideremos los siguientes casos:

1. Si $D_1 = A$ y $D = \{(x,t)\}$ con $x \in X$ y $0 \leq t < 1$. Entonces $h\,(D_1) = v = f(x,1)$ y $h\,(D_2) = f(x,t)$ con lo cual $h\,(D_1) \neq h\,(D_2)$.

2. Si $D_1 = \{(x_1,t_1)\}$ y $D_2 = \{(x_2,t_2)\}$ donde $x_1,\ x_2 \in X$ y $0 \leq t_1, t_2 < 1$. Puesto que $D_1 \neq D_2$ entonces $(x_1,t_1) \neq (x_2,t_2)$ por lo que $x_1 \neq x_2$ o $t_1 \neq t_2$. Si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1,t_1) \neq f(x_2,t_2)$ y por tanto $h\,(D_1) = f(x_1,t_1) \neq f(x_2,t_2) = h\,(D_2)$. De manera similar se muestra si $t_1 \neq t_2$.

Esto último, muestra que h es inyectiva. Para ver que h es suprayectiva, sea $x \in G(X)$. Si $x = v$ tomemos a $A = \{(x,1) : x \in X\}$ de tal manera que $h\,(A) = v$. Si $x \neq v$, basta tomar a $D = \{(x,t)\}$ con $x \in X$ y $0 \leq t < 1$ con lo cual $h\,(D) = x$. Esto ultimo establece el teorema. ■

Respecto a la construcción dada en el teorema 3.7 daremos la siguiente definición:

Definición 3.8. Sea X un compactum, el espacio $G(X)$ que se obtiene como en el teorema 3.7 se llama *el cono geométrico sobre* X, el punto v de $G(X)$ se le llama *el vértice de* $G(X)$ (téngase en cuenta que la función h definida en la demostración del teorema 3.7 lleva el vértice del $\text{Cono}\,(X)$ hacia v), por ultimo, al subconjunto $X \times \{0\}$ de $G(X)$ lo llamamos *la base de* $G(X)$.

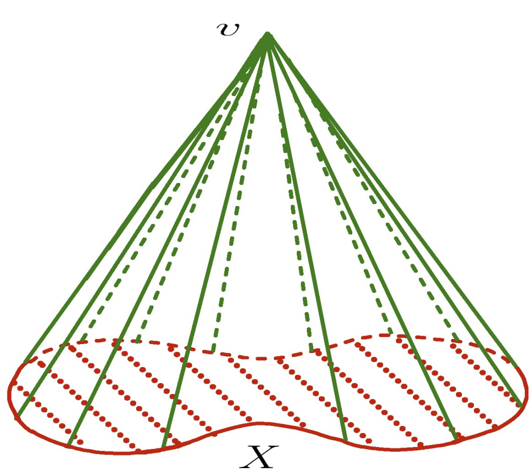


Figura 3.4: Representación del cono geométrico $G(X)$.

3.4 El modelo para $C(S)$

El propósito de esta sección es mostrar que $G(S)$ es homeomorfo al $\mathrm{Cono}\,(S)$ donde S es la circunferencia con una espiral (véase la figura 3.2) y por tanto $G(S)$ es el modelo geométrico para $C(S)$, antes de llegar a eso, daremos la siguiente notación:

En lo sucesivo el símbolo π denotará al número pi (no confundir con π, véase la definición 2.4)

Notación 3.9. Si S es la circunferencia con una espiral (véase la definición 3.3).

(1) Sea A un arco en S, $\ell(A)$ denota la longitud de arco de A.

(2) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ tales que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}$ entonces $\mathbf{xy}$ denota el arco en $\mathcal{S}$ de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ véase la figura 3.5(1).

(3) Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^1$ entonces $\mathbf{xy}$ denota el arco en S^1 en sentido antihorario véase la figura 3.5(2).

(4) Para cualquier $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{xx} = \{\mathbf{x}\}$.

(5) Para cualquier $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}S^1$ denota al subcontinuo mas pequeño de S que contiene a $S^1 \cup \{\mathbf{x}\}$ (por tanto $\mathbf{x}S^1 \approx \mathbf{x}X$ para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$) véase la figura 3.5(3).

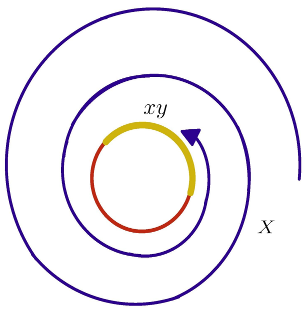
Construiremos ahora un subconjunto Y de $\mathbb{R}^3$ como sigue (tal conjunto se muestra en la figura 3.6):

(1) Sea $r : S \to S^1$ dada por $r(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, es decir, r es la proyección radial de S hacia S^1, de manera más precisa, para cada $\mathbf{x} \in S$, $r(\mathbf{x})$ es el punto de S^1 que se encuentra en el segmento de linea recta en $\mathbb{R}^2$ que va desde el origen hasta $\mathbf{x}$.

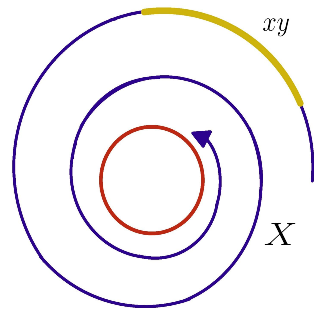
(2) Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, sea $\mathbf{x}_{2\pi}$ el punto en $\mathcal{S}$ mas cercano a $\mathbf{x}$ tal que $r(\mathbf{x}\mathbf{x}_{2\pi}) = S^1$; sea $V_{\mathbf{x}}$ el segmento de linea vertical en $\mathbb{R}^3$ (en este caso consideraremos a $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$) que va $(\mathbf{x}, 0)$ hasta $(\mathbf{x}, \ell(\mathbf{x}\mathbf{x}_{2\pi}))$, podemos notar que para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, $\ell(\mathbf{x}\mathbf{x}_{2\pi}) > 2\pi$.

Sea
$$Y = \left(\bigcup \{V_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\,\}\right) \cup \left(S^1 \times [0, 2\pi]\right). \tag{3.2}$$

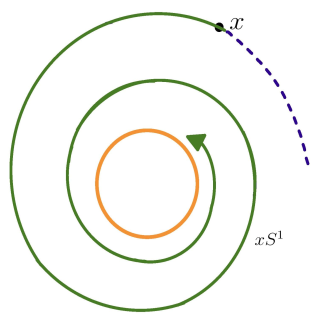
Podemos notar que $Y \approx S \times [0, 2\pi]$.



(1) El arco **xy** en S^1 en color amarillo.



(2) El arco **xy** en $\mathcal{S}$ representado en color amarillo.



(3) El subcontinuo $\mathbf{x}S^1$ de $\mathcal{S}$, podemos observar comparando $\mathbf{x}S^1$ con X de la figura 3.2 que estos son homeomorfos.

Figura 3.5: Construcciones auxiliares.

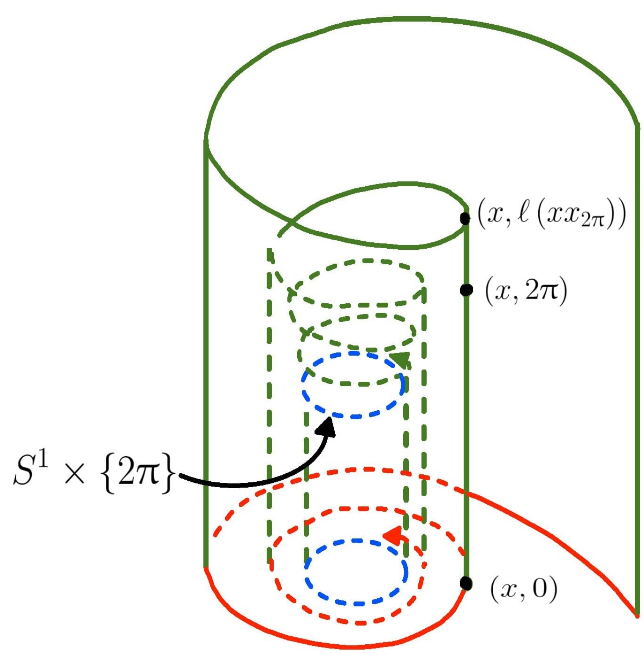


Figura 3.6: Representación geométrica del conjunto Y.

Teorema 3.10. *Sea S la circunferencia con una espiral. Entonces* $C(S) \approx \text{Cono}\,(X)$ *y por tanto $G(S)$ es un modelo geométrico para $C(S)$.*

Demostración. Vamos a definir un homeomorfismo f de $C(S) \setminus \{S^1\}$ sobre $Y \setminus (S^1 \times \{2\pi\})$ para luego "extender" f a un homeomorfismo h de $C(S)$ sobre el espacio cociente $Y/\,(S^1 \times \{2\pi\})$ el cual se obtiene de Y reduciendo $S^1 \times \{2\pi\}$ a un punto. Finalmente, veremos que

$$Y/\left(S^1 \times \{2\pi\}\right) \approx \text{Cono}\,(X).$$

La función f la conforman dos funciones α y β las cuales definimos a continuación:

La función α: Definimos $\alpha : C(S^1) \setminus \{S^1\} \to S^1 \times [0, 2\pi)$ como sigue. Para cada $\mathbf{x} \in S^1$, consideramos

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}} = \left\{\mathbf{xy} : \mathbf{y} \in S^1\right\},$$

y sea $\alpha_{\mathbf{x}} : \mathcal{A}_{\mathbf{x}} \to \{\mathbf{x}\} \times [0, 2\pi)$ dada por

$$\alpha_{\mathbf{x}}(\mathbf{xy}) = (\mathbf{x}, \ell(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad \text{para cada } \mathbf{xy} \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}}.$$

Entonces $\alpha(\mathbf{xy}) = \alpha_{\mathbf{x}}(\mathbf{xy})$ para cada $\mathbf{xy} \in C(S^1) \setminus \{S^1\}$.

La función β: Definiremos una función $\beta : C(S) \setminus C(S^1) \to \bigcup\{V_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ como sigue. Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ sean:

$$\mathcal{B}^1_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{xy} : \mathbf{y} \in \mathbf{xx}_{2\pi}\} \tag{3.3}$$

y

$$\mathcal{B}^2_{\mathbf{x}} = \left\{\mathbf{xy} : \mathbf{y} \in \left(\mathbf{x}_{2\pi} S^1\right) \cap \mathcal{S}\right\} \cup \left\{\mathbf{x}S^1\right\}. \tag{3.4}$$

Nótese que $\mathcal{B}^1_{\mathbf{x}}$ y $\mathcal{B}^2_{\mathbf{x}}$ son arcos en $C(S)$ tal que

$$\mathcal{B}^1_{\mathbf{x}} \cap \mathcal{B}^2_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{xx}_{2\pi}\}.$$

Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, definamos los subarcos, $V^1_{\mathbf{x}}$ y $V^2_{\mathbf{x}}$, de $V_{\mathbf{x}}$ como sigue:

$$V^1_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times [0, 2\pi],$$
$$V^2_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\} \times [2\pi, \ell(\mathbf{xx}_{2\pi})].$$

Ahora, para cualquier $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, sea $\beta^1_{\mathbf{x}} : \mathcal{B}^1_{\mathbf{x}} \to V^1_{\mathbf{x}}$ (el cual sera un homeomorfismo) dada por

$$\beta^1_{\mathbf{x}}(\mathbf{xy}) = \left(\mathbf{x}, \frac{2\pi}{\ell(\mathbf{xx}_{2\pi})} \cdot \ell(\mathbf{xy})\right) \quad \text{para cada } \mathbf{xy} \in \mathcal{B}^1_{\mathbf{x}} \tag{3.5}$$

y consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^1 &= \bigcup \left\{ \mathcal{B}^1_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S} \right\}, \\ &= \bigcup \left\{ V^1_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S} \right\},\end{aligned}$$

y sea $\beta^1 : \mathcal{B}^1 \to V_1$ (el cual sera un homeomorfismo) dada por

$$\beta^1(\mathbf{xy}) = \beta^1_{\mathbf{x}}(\mathbf{xy}) \text{ para cada } \mathbf{xy} \in \mathcal{B}^1 \tag{3.6}$$

y definamos a los conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^2 &= \bigcup \left\{ \mathcal{B}^2_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S} \right\}, \\ V^1 &= \bigcup \left\{ V^2_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S} \right\}.\end{aligned}$$

Podemos notar que $\mathcal{B}^2$ y V^2 son homeomorfos; sin embargo, lo que necesitamos es definir un homeomorfismo $\beta^2 : \mathcal{B}^2 \to V^2$ "que se comporte bien", definamos entonces un homeomorfismo β^2 mediantes los siguientes homeomorfismos $\varphi_1 : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{S} \times [1,2]$ y $\varphi_2 : V^2 \to \mathcal{S} \times [1,2]$ donde φ_1 esta definido como sigue:

$$\varphi_1(\mathbf{xy}) = \left(\mathbf{x}, \frac{2\ell(\mathbf{xy})}{\ell(\mathbf{xx}_{2\pi}) + \ell(\mathbf{xy})} \right) \text{ para cada } \mathbf{xy} \in \mathcal{B}^2 \tag{3.7}$$

y

$$\varphi_1\left(\mathbf{x}S^1\right) = (\mathbf{x}, 2) \text{ para cada } \mathbf{x}S^1 \in \mathcal{B}^2 \tag{3.8}$$

y φ_2 esta definido como:

$$\varphi_2(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbf{x}, \frac{t - 2\pi}{\ell(\mathbf{xx}_{2\pi})} + 1 \right) \text{ para cada } (\mathbf{x}, t) \in V^2. \tag{3.9}$$

Sean ahora $\beta^2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Podemos notar que β^2 es un homeomorfismo de $\mathcal{B}^2$ hacia V^2, también β^2 concuerda con β^1 en $\mathcal{B}^1 \cap \mathcal{B}^2$ puesto que para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\beta^2(\mathbf{xx}_{2\pi}) = \varphi_2^{-1}[\varphi_1(\mathbf{xx}_{2\pi})] = \varphi_2^{-1}[(\mathbf{x}, 1)] = (\mathbf{x}, 2\pi)$$

y

$$\beta^1(\mathbf{xx}_{2\pi}) = \beta^1_{\mathbf{x}}(\mathbf{xx}_{2\pi}) = (\mathbf{x}, 2\pi).$$

Ya estamos en condiciones de definir el siguiente homeomorfismo $\beta : C(S) \setminus C(S^1) \to \bigcup \{ V_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \mathcal{S} \}$ dado por:

$$\beta(A) = \begin{cases} \beta^1(A) & \text{si } A \in \mathcal{B}^1 \\ \beta^2(A) & \text{si } A \in \mathcal{B}^2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Finalmente, definamos $f : C(S) \setminus \{S^1\} \to Y \setminus (S^1 \times \{2\pi\})$ como sigue:

$$f(A) = \begin{cases} \alpha(A) & \text{si } A \in C(S^1) \setminus \{S^1\}, \\ \beta(A) & \text{si } A \in C(S) \setminus C(S^1). \end{cases} \tag{3.11}$$

Podemos notar que f es un homeomorfismo. Nótese que no podemos extender f a una función continua de $C(S)$ en Y, cada punto de $S^1 \times \{2\pi\}$ tendría que ser el valor de tal extensión en el punto S^1 de $C(S)$, este es el único problema a la hora de extender a f a un homeomorfismo a todo $C(S)$. Por tanto, el siguiente paso es algo natural, sustituyamos a $S^1 \times \{2\pi\}$ a algo de un solo punto.

Sea Z el espacio cociente que se obtiene de Y reduciendo $S^1 \times \{2\pi\}$ a un punto, el cual denotamos por $\mathbf{v}$. Sea $q : Y \to Z$ la función cociente (recordemos que los puntos de Z son clases de equivalencias) en este caso, tenemos que:

$$q(\mathbf{y}) = \begin{cases} \{\mathbf{y}\} & \text{si } \mathbf{y} \in Y \setminus (S^1 \times \{2\pi\}), \\ \mathbf{v} & \text{si } \mathbf{y} \in S^1 \times \{2\pi\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Definamos entonces $h : C(S) \to Z$ como sigue

$$h(A) = \begin{cases} q \circ f(A) & \text{si } A \neq S^1, \\ \mathbf{v} & \text{si } A = S^1. \end{cases} \tag{3.13}$$

h es un homeomorfismo de $C(S)$ sobre Z.

Mostraremos ahora que $Z \approx G(S)$. Sea $G(S)$ el cono geométrico sobre S con vértice $((0,0), 2\pi)$ véase la figura 3.7(1), antes de empezar daremos la siguiente notación y definiremos algunas funciones auxiliares:

(a) Respecto a $G(S)$, sea $\gamma : \mathcal{S} \to [\pi, 2\pi)$ un homeomorfismo (como veremos más adelante, la elección de π como primer punto del rango de γ no es de importancia, cualquier punto $t > 0$ tal que $t < 2\pi$ también funcionaría bien). Para cada segmento de linea recta $\mathbf{xv}$ en $G(S)$ tal que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, sea $p_{\mathbf{x}}$ el punto de $\mathbf{xv}$ en la altura de $\gamma(\mathbf{x})$. Por tanto, los puntos $p_{\mathbf{x}}$ giran en espiral alrededor de $G(S)$ en una trayectoria continua y creciente que se dirige hacia $\mathbf{v}$ a medida que los puntos $\mathbf{x}$ avanzan alrededor de $\mathcal{S}$.

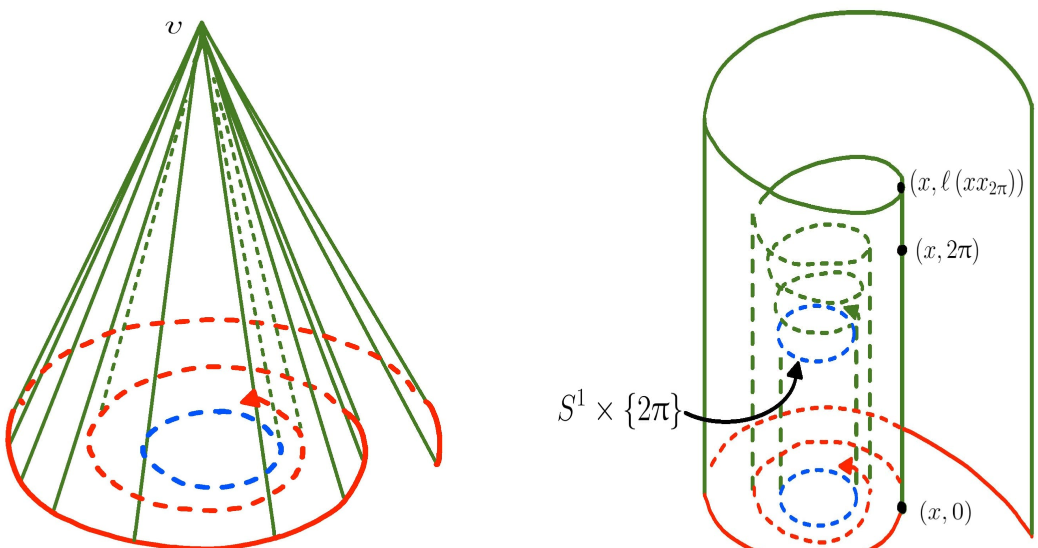
(b) Respecto a Z. Recordemos que q es la función cociente de Y sobre Z, en la figura 3.6 y en la figura 3.8 indican implícitamente que para cada $\mathbf{x} = (x, 0) \in \mathcal{S} \times \{0\}$ (véase la figura 3.7(2)), $q(V_{\mathbf{x}})$ es el segmento de linea recta de $\mathbf{x}$ (donde $\mathbf{x} = q(\mathbf{x})$) a $q(\mathbf{x}, \ell(\mathbf{xx}_{2\pi}))$. Sea $\mathbf{e} = (2, 0) \in \mathcal{S}$ y sea $t_{\mathbf{e}}$ el cual denota a la tercera coordenada (altura) de $q(\mathbf{e}, \ell(\mathbf{ee}_{2\pi}))$. Consideramos que el punto $q(\mathbf{e}, \ell(\mathbf{ee}_{2\pi}))$ es el punto en la parte superior del lado derecho de Z en la figura 3.8; en particular, $t_{\mathbf{e}} > 2\pi$. Sea $\lambda : \mathcal{S} \to (2\pi, t_{\mathbf{e}}]$ un homeomorfismo tal que para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{e}\}$, $\lambda(\mathbf{x})$ es estrictamente menor que la tercera coordenada de $q(\mathbf{x}, \ell(\mathbf{xx}_{2\pi}))$ (el cual es el punto en la parte superior de $q(V_{\mathbf{x}})$). Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, sea $\mathbf{z}_{\mathbf{x}}$ el punto de $q(V_{\mathbf{x}})$ a la altura $\lambda(\mathbf{x})$.

Ahora, vamos a describir un homeomorfismo $g : G(X) \to Z$ como sigue, para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, g mapea $\mathbf{xv}$ en Z de la siguiente manera: $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$; g mapea el segmento de linea recta $p_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ en una espiral, $S_{\mathbf{z_x}}$, el cual comienza en $\mathbf{z_x}$ (en este caso $\mathbf{z_x} = g(p_{\mathbf{x}})$) y termina en $\mathbf{v}$, y además, es asintótica a la espiral $S_{\mathbf{z_e}}$ en la parte superior de Z de la figura 3.8, cuando $\mathbf{x} = \mathbf{e}$, g mapea $p_{\mathbf{e}}\mathbf{v}$ hacia la espiral $S_{\mathbf{z_e}}$. Elijamos a la espiral $S_{\mathbf{z_x}}$ para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, tenemos que g es un homeomorfismo de $\bigcup\{\mathbf{xv} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ hacia $Z \setminus (S^1 \times [0, 2\pi))$, para definir g en el resto de $G(X)$ es mas sencillo: note que de la figura 3.8 y de la figura 3.7(1), que

$$G(S^1) = q\left(S^1 \times [0, 2\pi]\right).$$

Sea $g : G(S^1) \to q\,(S^1 \times [0, 2\pi])$ la función identidad. Una vez definido g sobre todo $G(X)$, podemos notar que g es un homeomorfismo de $G(X)$ hacia Z.

Hemos probado que $C(X) \approx Z$ mediante la función h (véase 3.13) y también que $Z \approx G(X)$ mediante la función g (la cual se definió en el párrafo anterior). Se sigue por el resultado expuesto en el teorema 3.7 que $G(X) \approx \operatorname{Cono}(X)$ y por lo tanto $C(S) \approx \operatorname{Cono}(S)$. Por tanto, $G(S)$ (véase la figura 3.7(1)) es el modelo geométrico para $C(S)$. ■



(1) El cono geométrico $G(S)$. (2) Representación del conjunto Y.

Figura 3.7: Construcciones auxiliares

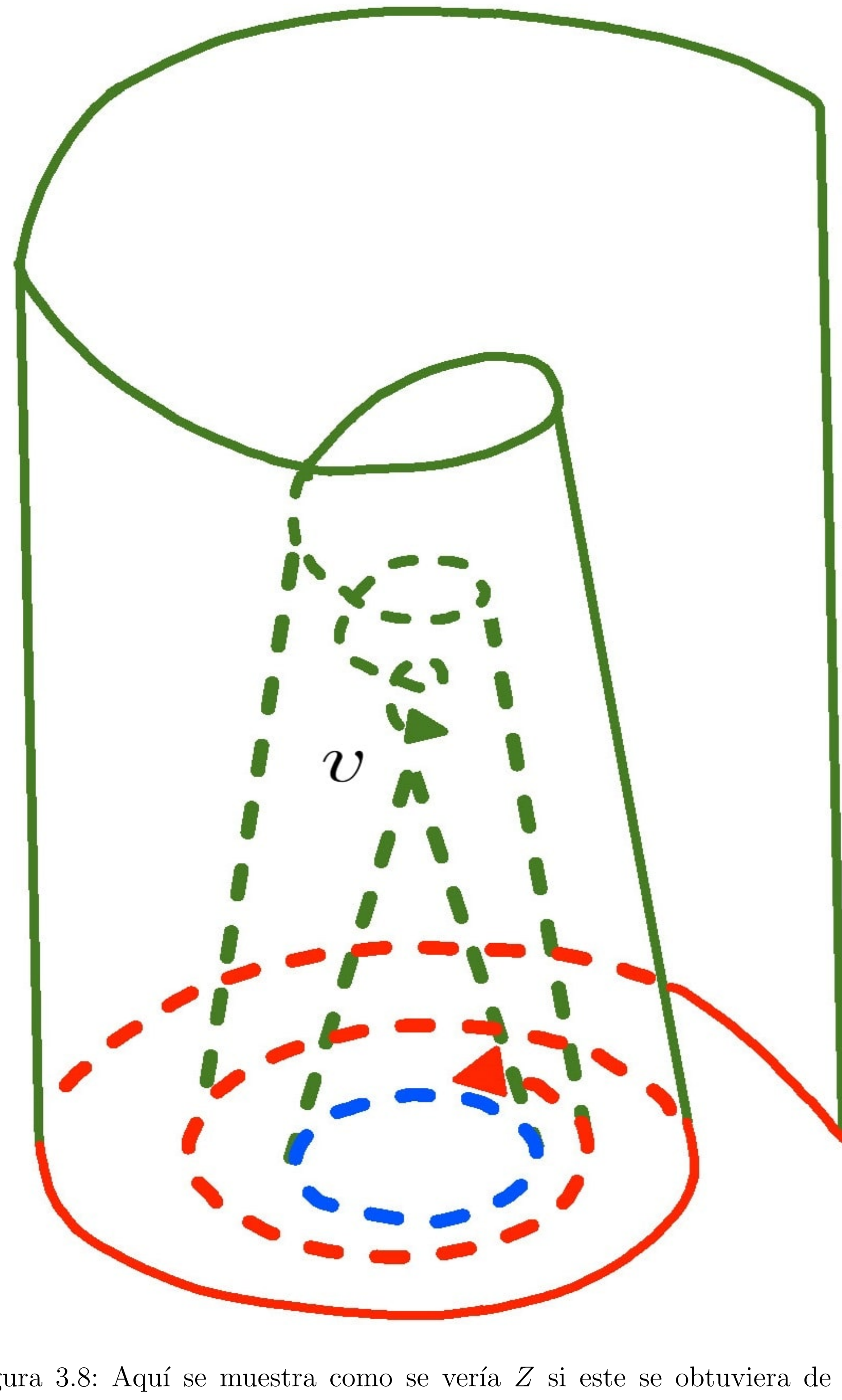


Figura 3.8: Aquí se muestra como se vería Z si este se obtuviera de Y de una forma geométrica más natural, es decir, como el resultado final de una deformación de $\mathbb{R}^3$ que tira de $S^1 \times \{2\pi\}$ a lo largo de círculos concéntricos hasta el punto $\mathbf{v} = ((0,0), 2\pi)$.

3.5 La pregunta de Knaster

En 1952 B. Knaster planteó la siguiente pregunta ¿Si X es un continuo con la propiedad del punto fijo (véase [15, ejercicio 1.19, pág. 11]), entonces $C(X)$ debe tener también tal propiedad? Estudiaremos como el resultado en el teorema 3.10 condujo de alguna manera a una respuesta.

Si S es la circunferencia con una espiral (véase la figura 3.2), Ronal Knill demostró que el $\mathrm{Cono}\,(S)$ no tiene la propiedad del punto fijo (véase el [9, teorema 3.1, pág. 42]), una prueba más accesible se puede encontrar en [2, teorema 21, pág. 129]. Usando el resultado mostrado por Knill y el resultado expuesto en el teorema 3.7, Rogers observó que $C(S)$ no tiene la propiedad del punto fijo (véase [19, pág. 282]). De hecho este fue el primer ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio no tiene tal propiedad; no obstante, este ejemplo aún no responde a la pregunta planteada por Knaster, puesto que el continuo S tampoco tiene la propiedad del punto fijo. Sin embargo, consideremos la extensión natural de S la cual se obtiene agregando el disco unitario D de S, es decir,

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

El continuo $S \cup D$ (véase la figura 3.9) tiene la propiedad del punto fijo pero $C\,(S \cup D)$ no tiene esta propiedad (este resultado se puede encontrar en [17]), la idea de tal prueba es mostrar que $C(S)$ es una retracción de $C(S \cup D)$ (véase [15, ejercicio 1.21, pág. 12]); una prueba de que $S \cup D$ tiene la propiedad del punto fijo se puede encontrar en [2, teorema 12, pág. 123].

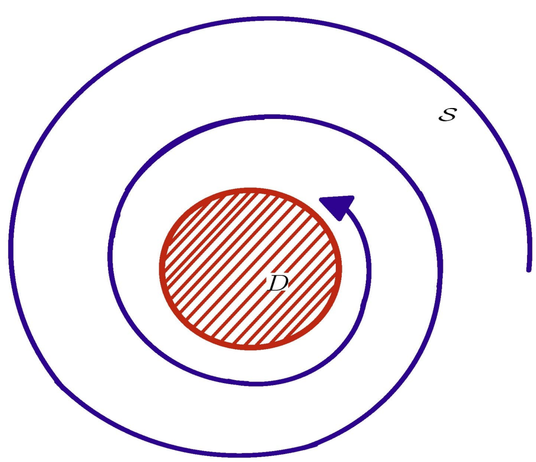


Figura 3.9: El continuo $S \cup D$.

3.6 ¿Cuándo $C(X)$ es homeomorfo a $\mathrm{Cono}\,(X)$?

Es natural preguntarse que continuos X tienen la propiedad $C(X) \approx \mathrm{Cono}\,(X)$. Uno puede pensar que el planteamiento de tal pregunta surge de lo expuesto en el teorema 3.10, sin embargo, esta proviene de la siguiente similitud muy general entre $C(X)$ y el $\mathrm{Cono}\,(X)$: notemos primeramente que existen arcos en el $\mathrm{Cono}\,(X)$ que van desde la base del $\mathrm{Cono}\,(X)$ hasta el vértice del $\mathrm{Cono}\,(X)$, es decir, los *arcos yv* que están en $G(X)$. De manera similar, existen arcos en $C(X)$, llamados *arcos ordenados* que van desde $F_1(X)$ hasta X (véase [8, teorema 14.6, pág. 112]).

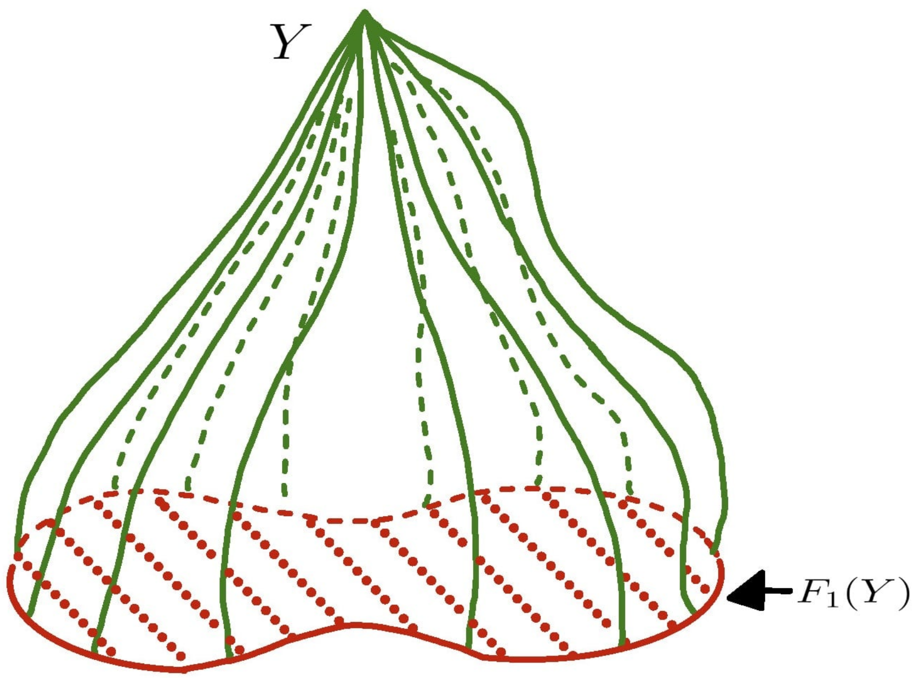


Figura 3.10: arcos ordenados en $F_1(X)$.

A pesar de esta similitud entre $C(X)$ y el $\mathrm{Cono}\,(X)$ que hemos mencionado anteriormente, estos espacios son de naturaleza totalmente diferente, esto se puede observar mejor en los modelos geométricos presentados en las secciones 5 y 6 del capítulo 2 de [8], los resultados en [8, ejemplo 5.1, pág. 33] y en [8, ejemplo 5.2, pág. 35] son excepciones ya que muestran que $C(X) \approx \mathrm{Cono}\,(X)$ cuando X es un arco (véase la definicion 1.6) o una curva cerrada simple (véase la definicion 1.19).

Una diferencia especifica entre $C(X)$ y $\mathrm{Cono}\,(X)$ que vale la pena mencionar, es, la dimensión, la cual denotaremos como $\dim\,(X)$. Una definición adecuada para este concepto se puede encontrar en [18, §1.7, pág. 35]. De un lado tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.11 ([16, Lema 8.0, pág. 301]). *Sea X un continuo tal que* $\dim(X) < \infty$*, entonces* $\dim[\mathrm{Cono}(X)] = \dim(X) + 1$.

Por otro lado, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.12 ([12, Teorema 2.1, pág. 2773]). *Sea X un continuo tal que* $\dim(X) \geq 2$*, entonces* $\dim[C(X)] = \infty$.

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado motivado por el teorema 3.11 y el teorema 3.12.

Teorema 3.13 ([16, Teorema 8.17, pág. 311]). *Si X es un continuo de dimensión finita tal que $C(X) \approx \mathrm{Cono}(X)$, entonces* $\dim(X) = 1$.

La suposición de que X sea de dimensión finita es necesaria en el teorema 3.13, ya que como se muestra en el siguiente ejemplo, existen continuos X que tiene la propiedad $C(X) \approx \mathrm{Cono}(X)$ pero que $\dim(X) = \infty$.

Ejemplo 3.14. Sea I^∞ el cubo de Hilbert (véase la definición 1.24). Por un lado se tiene que por [8, teorema 11.3 (2), pág. 89], $C(I^\infty) \approx I^\infty$ y por [8, ejercicio 9.7, pág. 79] se tiene que, $I^\infty \approx \mathrm{Cono}(I^\infty)$ y por tanto, $C(I^\infty) \approx \mathrm{Cono}(I^\infty)$ pero, $\dim(I^\infty) = \infty$.

Los *continuos indescomponibles* (véase la definición 1.35) juegan un papel importante al intentar determinar que continuos X tienen la propiedad $C(X) \approx \mathrm{Cono}(X)$, esto se muestra en el teorema 3.17.

Aunque uno pueda pensar que todos los continuos no degenerados son descomponibles, esto esta lejos de ser el caso. La mayoría de los continuos en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) son hereditariamente indescomponibles, donde por *mayoría* significa que forman un conjunto G_δ denso de puntos en el hiperespacio $C(\mathbb{R}^n)$ (véase [16, teorema 19.27, pág. 613]). Los siguientes resultados de Bing señalan la abundancia así como la diversidad de continuos hereditariamente indescomponibles:

Teorema 3.15 ([1, Teorema 4, pág. 270]). *Existen continuos hereditariamente indescomponible de dimensión infinita en I^∞ y existen continuos hereditariamente indescomponibles de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Teorema 3.16 ([1, Teorema 5, pág. 270]). *Cada continuo de dimensión $n+1$ contiene un continuo de dimensión n y hereditariamente indescomponible.*

Continuamos con nuestra discusión de cuando $C(X) \approx \mathrm{Cono}(X)$ donde X es un continuo, la cual se va a centrar en el siguiente teorema:

Teorema 3.17 ([20, Teorema 8, pág. 286]). *Si X es un continuo de dimensión finita tal que $C(X) \approx \mathrm{Cono}(X)$, entonces X contiene a lo más un continuo indescomponible no degenerado.*

En vista del teorema 3.17, los continuos de dimensión finita, X, tales que $C(X) \approx \text{Cono}\,(X)$ están más cerca de ser hereditariamente descomponibles. Por lo tanto, es totalmente natural considerar la siguiente pregunta: ¿Que continuos hereditariamente descomponibles X tiene la propiedad de que $C(X) \approx \text{Cono}\,(X)$? Esta pregunta se responde en el siguiente teorema:

Teorema 3.18 ([14, Teorema 1.1, pág. 322])**.** *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Entonces, $C(X) \approx \text{Cono}\,(X)$ si y solo si X es uno de los siguientes continuos:*

(1) *El intervalo cerrado $[0,1]$ (véase la figura 3.11(1)).*

(2) *S_0 donde este es la cerradura del conjunto W el cual es descrito en la definición 1.26 (véase la figura 3.11(3)).*

(3) *$S^1_1 = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (véase la figura 3.11(2)).*

(4) *S^1_2 donde este es S_0 identificando los puntos $(0,-1)$ y $(1, \operatorname{sen}[1])$ (véase la figura 3.11(4)).*

(5) *S^1_3 donde este es la unión de S_0 y $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x}\right]\right) : -1 \leq x < 0\right\}$ identificando los puntos $(1, \operatorname{sen}[1])$ y $(-1, \operatorname{sen}[-1])$ (véase la figura 3.11(5)).*

(6) *$(SP)_1$ donde este es la unión de S^1 y el conjunto $\left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{it} : t \geq 1\right\}$ (véase la figura 3.11(6)).*

(7) *$(SP)_2$ donde este es la unión de $(SP)_1$ y el conjunto*

$$\left\{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot e^{it} : t \geq 1\right\}$$

identificando los puntos $2e^{i\cdot 1}$ y $(0,0)$ (véase la figura 3.11(7)).

(8) *$(SP)_3$ donde este es la unión de $(SP)_1$ y el conjunto*

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{it} : t \leq -1\right\}$$

identificando los puntos $2e^{i\cdot 1}$ y $(0,0)$ (véase la figura 3.11(8)).

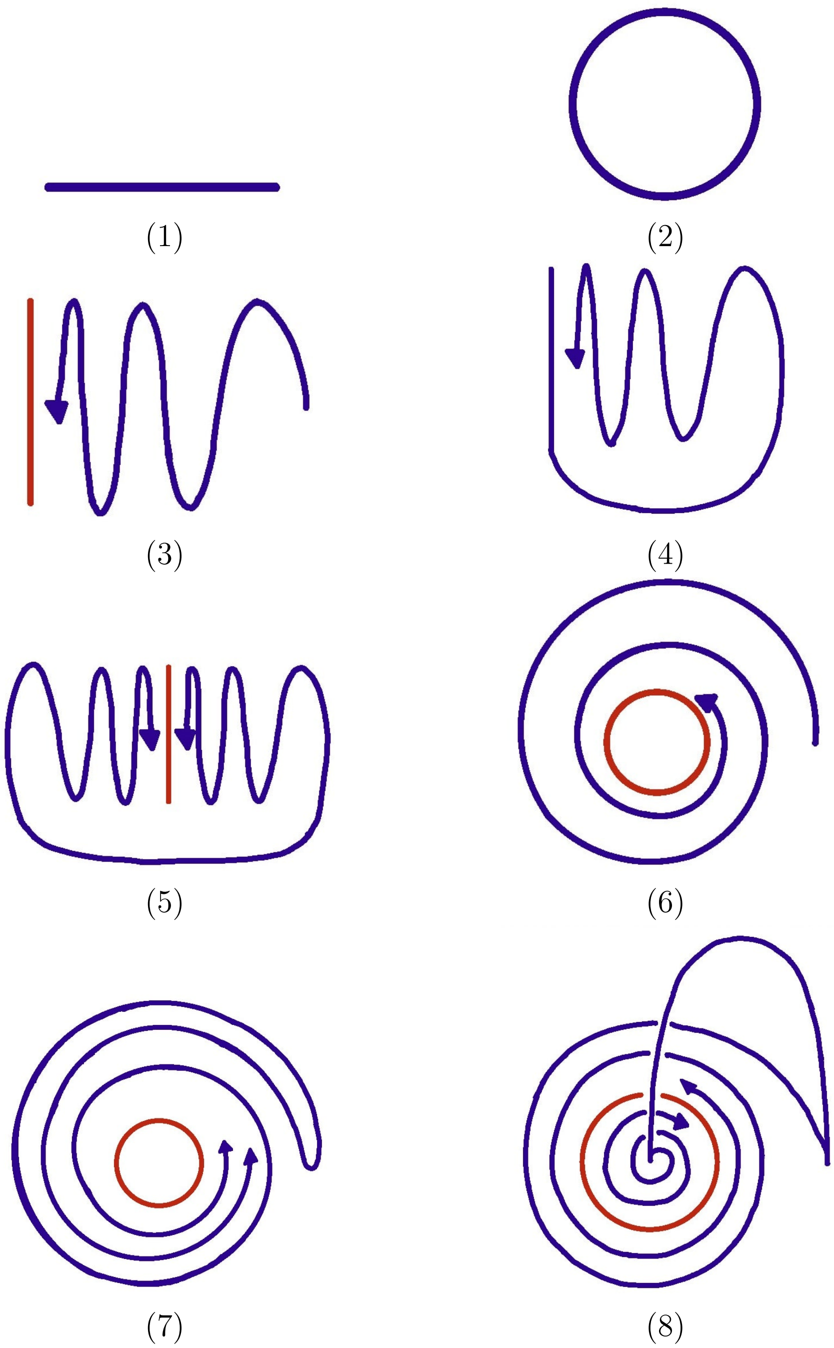


Figura 3.11: Continuos con la propiedad $C(X) \approx \text{Cono}\,(X)$.

Referencias Bibliográficas

[1] R. H. Bing. “Higher-Dimensional Hereditarily Indecomposable Continua”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* **71**, (1951), págs. 267-273.

[2] R. H. Bing. “The Elusive Fixed Point Property”. En: *The American Mathematical Monthly,* **76**, (1969), págs. 119-132.

[3] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de topología general.* Aportaciones matemáticas: Serie Textos, Núm: 37. Ciudad de México: Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

[4] Levent Arturo Chaves Moreno. “Estudio del n-ésimo hiperespacio de un continuo”. Tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP. Puebla, Pue.: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, presentada el 2 de Febrero del 2018.

[5] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Boston, Mass: Allyn y Bacon, Inc, 1978.

[6] Ryszard Engelking. *General Topology.* Vol. 6. Sigma series in pure mathematics. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[7] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos: una introducción.* Aportaciones matemáticas: Serie Textos, Núm: 13. Ciudad de México: Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

[8] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances.* Vol. 216. Monographs and Textbooks in pure and Applied Math. New York: Marcel Dekker, Inc, 1999.

[9] Ronald J. Knill. “Cones, products and fixed points”. En: *Fundamenta Mathematicae,* **60**, (1967), págs. 35-46.

[10] K. Kuratowski. *Topology.* Vol. I. New York, N. Y: Academic Press, 1966.

[11] K. Kuratowski. *Topology.* Vol. II. New York, N. Y: Academic Press, 1968.

[12] Michael Levin y Yaki Sternfeld. “The Space of Subcontinua of a 2-Dimensional Continuum is Infinite Dimensional”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society,* **125**, (1997), págs. 2771-2775.

[13] James R. Munkres. *Topology: Pearson New International Edition.* Pearson Education, 2013.

[14] Sam B. Nadler Jr. “Continua Whose Cone and Hyperspace are Homeomorphic”. En: *Transactions of the American Mathematical Society,* **230**, (1977), págs. 321-345.

[15] Sam B. Nadler Jr. *Continuum Theory: An Introduction.* Vol. 158: Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics. New York, N. Y: Marcel Dekker, Inc, 1992.

[16] Sam B. Nadler Jr. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*. Vol. 49. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. New York, N. Y: Marcel Dekker, Inc, 1978.

[17] Sam B. Nadler Jr. y James T. Rogers Jr. "A note on hyperspaces and the fixed point property". En: *Colloquium Mathematicum,* **25**, (1972), págs. 255-257.

[18] Esaú Alejandro Pérez Rosales. "Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X". Tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP. Puebla, Pue.: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, presentada el 29 de Junio del 2022.

[19] James T. Rogers Jr. "The Cone = Hyperspace Property". En: *Canadian Journal of Mathematics,* **24**, (1972), págs. 279-285.

[20] James T. Rogers Jr. "Continua with cones homeomorphic to hyperspaces". En: *General Topology and its Applications,* **3**, (1973), págs. 283-289.

[21] James T. Rogers Jr. "Embedding the hyperspaces of circle-like plane continua". En: *Proceedings of the American Mathematical Society,* **29**, (1971), págs. 165-168.

[22] Wilson A. Sutherland. *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Oxford mathematics. Oxford University Press, 2009.

[23] Alberto Alejandro Vega Bravo. "Ciertas propiedades de continuos y sus hiperespacios". Tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP. Puebla, Pue.: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, presentada el 23 de Mayo del 2024.

Índice alfabético

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales	1
$\mathbb{Z}$	conjuntos de los números enteros	1
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales	1
$\mathbb{R}^n$	conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de números reales	1
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos	1
$(X, \mathscr{T})$	espacio topológico	1
(X, d)	espacio métrico	1
$\mathscr{T}$	topología	1
$\mathscr{B}$	base para una topología	1
d	métrica	1
$B_r(x)$	bola abierta con centro x y radio r	1
$\mathrm{cl}_B(A)$	la cerradura de A en B	1
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	sucesión	1
$x_n \to x$	sucesión convergente a x	1
$\approx$	homeomorfo a	2
π	proyección natural	17
$\mathscr{T}(\mathcal{D})$	topología de descomposición	16
$f^{-1}(y)$	la fibra de y	20
$\mathscr{T}(d)$	topología generada por una métrica	20
$X + Y$	unión libre	33
2^X	conjunto de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X	44
$C(X)$	conjunto de todos los elemento de 2^X conexos	44
$\mathrm{Cono}\, X$	cono del conjunto X	47
π	número pi	50
$G(X)$	cono geométrico del conjunto X	49
$\dim(X)$	dimensión de X	58