Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Propiedad del Punto Fijo: Lema de Sperner

Tesis para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

presentada por

Cristina Sánchez López

con la dirección de los doctores

David Herrera Carrasco
y
Fernando Macías Romero

Puebla, Pue., 30 de junio de 2014.

Dedicado a

Mis padres:
Felícitas López Herrera
Pablo Sánchez Hernández

Mis hermanos:
Lorena
José
Raymundo
María
Luminosa
Plácido

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a mis hermanos por el apoyo que me han dado a lo largo de mi vida, por preocuparse por mis estudios y darme ánimos para seguir adelante, gracias a ello he llegado hasta aquí.

Mis grandes amigos, Ángel, Enrique, Alejandra, Iván, María, Carmen, Karina, Ricardo, Alejandro, Fernanda y Patricia, hicieron que los días de clases fueran más amenos, con su compañía he pasado de los mejores momentos de mi vida, fue muy divertido y siempre aprendí de ellos, gracias por su apoyo, por sus palabras en los momentos difíciles, siempre los voy a recordar con mucho cariño.

Agradezco a mis directores de tesis, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero por confiar en mi, gracias por haberme brindado su amistad, fue increíble trabajar con ellos, he aprendido mucho.

Gracias a Noemi, Vianey, Francisco y German por darme su apoyo, y brindarme su amistad.

Agradezco a mis sinodales, Raúl Escobedo Conde, Juan Angoa Amador y Alexander I. Bykov, por el tiempo que dedicaron en revisar esta tesis y por los consejos para mejorarla.

Índice general

Introducción

En este trabajo presentamos algunas resultados relacionados con la propiedad del punto fijo.

En el Capítulo 1 vemos alguna notación que empleamos a lo largo de esta tesis, y algunos resultados necesarios para su dearrollo como son el concepto de homeomorfismo, invariante topológico y conexidad, finalizando con el concepto de continuo; y algunos ejemplos de ellos.

En el Capítulo 2 vemos que la propiedad del punto fijo es un invariante topológico, usamos este resultado para demostrar que un arco tiene la propiedad del punto fijo. También vemos un resultado que nos dice una forma de determinar cuándo un espacio métrico compacto tiene la propiedad del punto fijo, usando este hecho demostramos que el continuo $sen(\frac{1}{x})$ y un cubo de Hilbert tienen la propiedad del punto fijo. Además, vemos el concepto de retracto y demostramos que todo retracto de un espacio topológico con la propiedad del punto fijo, también tiene la propiedad del punto fijo. En la Sección 2.2 hacemos un breve estudio sobre los continuos encadenables, y probamos que ellos tienen la propiedad del punto fijo. En la Sección 2.3 nos enfocamos en los continuos tipo arco, analizamos el concepto de función universal y vemos la relación que tiene con la propiedad del punto fijo, de esta manera demostramos que los continuos tipo arco tienen la propiedad del punto fijo. En la Sección 2.4 vemos a los continuos llamados árboles; para demostrar que tienen la propiedad del punto fijo hacemos uso de un resultado que dice cuándo la unión de dos continuos con la propiedad del punto fijo, tiene la propiedad del punto fijo. En la Sección 2.5 demostramos que los continuos llamados dendritas tienen la propiedad del punto fijo, para esto, vemos un resultado que nos ayuda a manejar a las dendritas a partir de árboles contenidos en ellas. En la Sección 2.6 nos enfocamos en el Lema de Sperner, este resultado fue aportado por Emanuel Sperner en 1928. En la Sección 2.7 estudiamos una prueba del Teorema del punto fijo de Brouwer que nos dice que una 2-celda tiene la propiedad del punto fijo, para realizar su demostración usamos el Lema de Sperner.

Cristina Sánchez López
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
30 de junio de 2014.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciamos algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\overline{A}$, $Fr(A)$ e $Int(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\overline{A}_Y$, $Fr_Y(A)$ e $Int_Y(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente. El diámetro de A, lo denotamos por diám(A). Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales y el n-ésimo producto cartesiano de $\mathbb{R}$, respectivamente. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto. Mencionamos que en todo este trabajo cuando tratemos con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, los consideramos con la topología Euclidiana. Sean X un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto V de X es una **vecindad** de p si existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.

El siguiente resultado se usa continuamente durante el desarrollo de la topología.

Teorema 1.1. *Si A y B son conjuntos cerrados de un espacio* *topológico* X*,* Y *es un espacio topológico arbitrario y* $f\colon A \to Y$ *y* $g\colon B \to Y$ *son funciones continuas tales que* $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$*, entonces la función* $h\colon A\cup B \to Y$*, definida para cada* $x \in A\cup B$*, por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Supongamos que C es un conjunto cerrado en Y, por la continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y como A es cerrado en X, tenemos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X. De manera similar podemos probar que $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y así en X.

Notemos que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ y que $f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ es cerrado en X tal que $h^{-1}(C) = (f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)) \cap (A \cup B)$, luego $h^{-1}(C)$ es cerrado en $A \cup B$. Por lo tanto, h es continua. $\square$

Definición 1.2. *Sean* X*,* Y *espacios topológicos y* $f\colon X \to Y$ *una función,* f *es un* ***homeomorfismo*** *de* X *en* Y *si* f *es biyectiva, es continua y* f^{-1} *es continua.*

La palabra homeomorfismo viene del griego $\ddot{o}\mu o\iota o\varsigma$ (homoios) = misma y $\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$ (morphe) = forma.

Definición 1.3. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos,* X *es* ***homeomorfo*** *a* Y *si existe un homeomorfismo de* X *en* Y*.*

Las propiedades de estos espacios que se conservan bajo homeomorfismos se denominan **invariantes topológicos**. En la categoría de espacios topológicos, los morfismos son las funciones continuas y los isomorfismos son los homeomorfismos. Consecuentemente, la composición de dos homeomorfismos es de nuevo un homeomorfismo, y el conjunto de todos los homeomorfismos, $h\colon X \to X$ forman un grupo llamado grupo de homeomorfismos de X, que suele denotarse como Homeo(X). De modo intuitivo, el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son "el mismo" vistos de otra manera: permitiendo estirar, doblar, cortar y pegar. Sin embargo, los criterios intuitivos de "estirar", "doblar", "cortar" y "pegar" requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Deformar un segmento de línea hasta un punto no está permitido, por ejemplo, contraer de manera continua un intervalo hasta un punto es otro proceso topológico de deformación llamado homotopía.

Una de las principales propiedades topológicas es la noción dada en la Definición 1.5 pero antes de hablar de ella damos un concepto necesario.

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Una* ***separación*** *de X es un par de conjuntos U y V abiertos en X, no vacíos, ajenos tales que $X = U \cup V$.*

Definición 1.5. *Un espacio topológico X es* ***conexo*** *si no existe una separación de X.*

La conexidad representa una extensión de la idea de que un intervalo es todo "de una pieza". Un espacio topológico puede no ser conexo, por ejemplo, la unión de dos intervalos ajenos no es conexo pero podemos ver que cada punto tiene una vecindad que es un conexo, esto motiva la siguiente noción.

Definición 1.6. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo*** *en $x \in X$ si para cada vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x contenida en U. El espacio topológico X es* ***localmente conexo*** *si X es localmente conexo en cada punto $x \in X$.*

Notemos que la conexidad local es un invariante topológico.

Definición 1.7. *Sea X un espacio topológico, un subconjunto C de X es una **componente** de X si cumple las siguientes condiciones.*

1. *C es conexo y*
2. *si B es un subespacio conexo de X tal que $C \subset B$, entonces $B = C$.*

Es decir, C es un subespacio conexo maximal.

Evidentemente, un espacio topológico con una componente es conexo.

Definición 1.8. *Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Al igual que la metrizabilidad, la conexidad y la compacidad son invariantes topológicos; de aquí, la noción de continuo es un invariante topológico. Veamos algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 1.9.

1. *Un **arco** es un espacio topológico que es homeomorfo al intervalo cerrado [0,1], como éste es un continuo, un arco también es un continuo.*
2. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\},$$

como S^1 es un continuo, una curva cerrada simple también es un continuo.

3. *Una* ***n-celda*** *es un espacio topológico homeomorfo a*

$$B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

como B^n *es un continuo, una n-celda también es un continuo.*

Capítulo 2

Punto fijo

La propiedad del punto fijo se puede definir en cualquier espacio topológico. La compacidad ayuda de manera muy importante para tratar este tema, aunque se puede hacer teoría del punto fijo en forma más general, los continuos son un ambiente muy apropiado para desarrollarla. Como se sabe, la teoría del punto fijo influye en muchas ramas de las matemáticas. Los resultados más conocidos por los matemáticos, en general, se ubican en las Ecuaciones Diferenciales y en el Análisis Matemático. La pregunta que tiende el puente principal entre la teoría de los continuos y la teoría del punto fijo es: ¿cuáles continuos tienen la propiedad del punto fijo? La propiedad del punto fijo suele ser voluble. Es muy común encontrar en ella resultados inesperados y está llena de contraejemplos. En 1969, R. H. Bing expuso, lo que se sabía y lo que no se sabía acerca de la propiedad del punto fijo en continuos. Su artículo "The elusive fixed point property" [1] brindó un panorama muy preciso de los principales resultados que se conocían sobre el tema, sus ejemplos más sobresalientes y sus problemas abiertos. Este artículo fue una guía indispensable para todo aquél que quería trabajar en esta área. Afortunadamente, en 2007, Charles L. Hagopian, uno de los expertos más reconocidos en este tema, escribió un artículo excelente y muy bien documentado de lo que se ha hecho desde 1969 con los problemas que planteó Bing; a cuarenta y cinco años de distancia, la teoría del punto fijo en continuos sigue dando sorpresas y confirmando su carácter veleidoso. En general, es difícil predecir si la propiedad del punto fijo se conserva bajo ciertas operaciones entre continuos. Estas ideas y todavía más, que nos informan sobre la propiedad del punto fijo las podemos encontrar, por ejemplo, en el artículo de Alejandro Illanes denominado “La veleidosa propiedad del punto fijo” [7].

2.1. Propiedad del punto fijo

En esta tesis presento las ideas de la teoría de la propiedad del punto fijo que me son más fáciles de entender.

Definición 2.1. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Un punto $p \in X$ es un* ***punto fijo*** *de f si $f(p) = p$. Un espacio topológico X tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.*

Veamos un primer resultado sobre esta propiedad, la cual nos es de ayuda para resultados posteriores.

Teorema 2.2. *La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, donde X tiene la propiedad del punto fijo, $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo y $g\colon Y \to Y$ una función continua. Como f, f^{-1} y g son continuas, tenemos que $f^{-1} \circ g \circ f\colon X \to X$ es continua. Sea $x \in X$ un punto fijo de la función $f^{-1} \circ g \circ f$, luego $(f^{-1} \circ g \circ f)(x) = x$, esto implica que $g(f(x)) = f(x)$. Si tomamos a $y = f(x)$ tenemos que $g(y) = y$. Por lo tanto, Y tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 2.3. *Si X es un espacio topológico que tiene la propiedad del punto fijo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Luego, existen U y V conjuntos no vacíos abiertos en X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$. Sean $u_0 \in U$, $v_0 \in V$ y $f \colon X \to X$ una función definida, para cada $x \in X$, por

$$f(x) = \begin{cases} v_0, & si\ x \in U, \\ u_0, & si\ x \in V. \end{cases}$$

Veamos que f es continua. Para esto, sea $y \in X$, luego $y \in U$ o $y \in V$. Si $y \in U$, tenemos que $f(y) = v_0$. Sea W un abierto en X tal que $v_0 \in W$, luego $f^{-1}(W) = U$ que es un abierto en X, esto implica que $f(U) = \{v_0\} \subset W$. Ahora, si $y \in V$, tenemos que $f(y) = u_0$. Sea Z un abierto en X tal que $u_0 \in Z$, luego $f^{-1}(Z) = V$ que es un abierto en X, esto implica que $f(V) = \{u_0\} \subset Z$.
Por lo tanto, encontramos una función continua de X en X que no tiene un punto fijo, es decir, X no tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Una aplicación del Teorema del valor intermedio la encontramos en la demostración del siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Un arco tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Primero probemos que el intervalo cerrado $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. Supongamos que $f \colon [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua. Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, hemos terminado la prueba. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$. Sea

$g = f - Id_{[0,1]} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Observemos que g es continua y que $g(0) = f(0) > 0$ y $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Por el teorema del valor intermedio, existe $x \in [0,1]$ tal que $g(x) = f(x) - x = 0$, esto implica que $f(x) = x$. Por lo tanto, [0,1] tiene la propiedad del punto fijo. Por definición de arco y el Teorema 2.2, tenemos que un arco tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 2.5. *Si f es una función continua y suprayectiva de un espacio topológico conexo Z en [0,1] y g es una función continua de Z en [0,1], entonces existe $z \in Z$ tal que $f(z) = g(z)$.*

Demostración. Consideremos a los conjuntos $A = \{z \in Z \colon f(z) \leq g(z)\}$ y $B = \{z \in Z \colon f(z) \geq g(z)\}$. Notemos que tanto A como B son no vacíos, pues $0, 1 \in [0,1]$ y f es suprayectiva, luego existen $z_0, z_1 \in Z$ tales que $f(z_0) = 0$ y $f(z_1) = 1$, y como $0 \leq g(z_0)$ y $g(z_1) \leq 1$, tenemos que $z_0 \in A$ y $z_1 \in B$.

Veamos que A es cerrado en Z. Para esto consideremos a la función $h \colon Z \to \mathbb{R}$, definida para cada $z \in Z$ como $h(z) = g(z) - f(z)$, notemos que h es continua. Veamos que $A = h^{-1}[0, \infty)$. Sea $a \in A$, luego $h(a) = g(a) - f(a) \geq 0$, esto implica que $a \in h^{-1}[0, \infty)$. Por lo tanto, $A \subset h^{-1}[0, \infty)$. Ahora, sea $x \in h^{-1}[0, \infty)$, luego $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$, esto implica que $g(x) \geq f(x)$, luego $x \in A$. Por lo tanto, $h^{-1}[0, \infty) \subset A$. De esta manera, tenemos que $A = h^{-1}[0, \infty)$

Como el conjunto $[0, \infty)$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y h es continua, tenemos que $h^{-1}[0, \infty)$ es cerrado en Z. Por lo tanto A es cerrado en Z. De manera similar se prueba que B es cerrado en Z.

Como $Z = A \cup B$ y Z es conexo, tenemos que $A \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $z \in Z$ tal que $f(z) = g(z)$. $\square$

El siguiente resultado ofrece un método para determinar si un espacio métrico compacto tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 2.6. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Si para cada $\epsilon > 0$ existe una función continua $f_\epsilon \colon X \to X_\epsilon$ con $X_\epsilon \subset X$, tal que X_ϵ tiene la propiedad del punto fijo y $dist(f_\epsilon, id_X) < \epsilon$, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f \colon X \to X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\frac{1}{n} > 0$, luego, existe una función continua $f_{\frac{1}{n}} \colon X \to X_{\frac{1}{n}}$ con $X_{\frac{1}{n}} \subset X$, tal que $X_{\frac{1}{n}}$ tiene la propiedad del punto fijo. Consideremos a la función $f_{\frac{1}{n}} \circ f|_{X_{\frac{1}{n}}} \colon X_{\frac{1}{n}} \to X_{\frac{1}{n}}$, que es continua, porque f y $f_{\frac{1}{n}}$ son funciones continuas, luego, existe $x_n \in X_{\frac{1}{n}}$ tal que $(f_{\frac{1}{n}} \circ f|_{X_{\frac{1}{n}}})(x_n) = x_n$.

Sea $\epsilon > 0$. Consideremos a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a algún $p \in X$, es decir, existe $N_1 > 0$ tal que si $k \geq N_1$, entonces $d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por la continuidad de f, tenemos que $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(p)$, es decir, existe $N_2 > 0$ tal que si $k \geq N_2$, entonces $d(f(x_{n_k}), f(p)) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $dist(f_{\frac{1}{n}}, Id_X) = sup\{d(f_{\frac{1}{n}}(x), Id_X(x)) \colon x \in X\} < \frac{1}{n}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(f_{\frac{1}{n}}(x_n), Id_X(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_3 > 0$ tal que $1 < N_3 \frac{\epsilon}{3}$, luego para cada $n \geq N_3$, tenemos que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$.

Veamos que $f(p) = p$. Para esto, sea $N \geq \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, así $d(f(p), p) \leq d(f(p), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, tenemos que $d(f(p), p) = 0$, luego $f(p) = p$. Por lo tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

A continuación exponemos a dos continuos que tienen la propiedad del punto fijo y la demostración de ello se basa en el

Teorema 2.6.

Sea $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$, como es la imagen continua de la función $\varphi\colon (0,1] \to [0,1] \times [-1,1]$, tenemos que W es conexo.

Definición 2.7. *El* ***continuo*** $\mathbf{sen}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}})$ *es la cerradura de* W*, donde*

$$W = \left\{\left(x, sen\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\right\}.$$

Este continuo también es llamado la curva sinoidal del topólogo (vea la Figura 2.1).

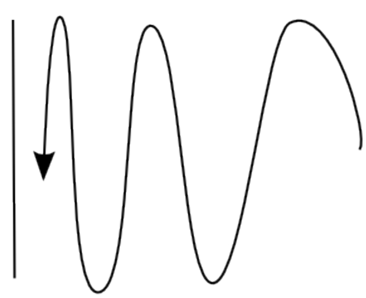


Figura 2.1: Continuo $sen(\frac{1}{x})$

Definición 2.8. *Un* ***cubo de Hilbert*** *es un espacio topológico homeomorfo a* $\prod_{i=1}^{\infty} J_i$ *con la topología producto, donde cada* $J_i = [0,1]$ *tiene la topología usual.*

Teorema 2.9. *El continuo* $sen(\frac{1}{x})$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X el continuo $sen(\frac{1}{x})$. Dado $\epsilon > 0$ existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x_1 < x_2 < \epsilon$, donde $sen(\frac{1}{x_1}) = 1$ y $sen(\frac{1}{x_2}) = -1$ y para cada $x \in (x_1, x_2)$, se cumple que $sen(\frac{1}{x}) \in$

$\{1,-1\}$. Es decir, la función $g\colon [x_1,x_2] \to [-1,1]$ definida, para cada $x \in [x_1,x_2]$, por $g(x) = sen(\frac{1}{x})$ es biyectiva y continua. La función inversa de g, $g^{-1}\colon [-1,1] \to [x_1,x_2]$ es continua. Por otro lado, sea $X_\epsilon = \{(x,y) \in W \colon x \in [x_1,1]\}$, definamos la función $f\colon X \to X_\epsilon$, para todo $(x,y) \in X$, como

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & si\ (x,y) \in X_\epsilon, \\ (t,y), & si\ (x,y) \in X - X_\epsilon \text{ y t es el único punto} \\ & \quad \text{con } t \in [x_1,x_2] \text{ tal que } sen(\frac{1}{t}) = y. \end{cases}$$

(1) Veamos que f es continua. (i) Sea $(x,y) \in X_\epsilon$, f es la función identidad, por lo tanto, f es continua. (ii) Sean $(x,y) \in X - X_\epsilon$, $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - X_\epsilon$ tal que $\lim_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (x,y)$. Por definición de f, tenemos que $f(x,y) = (t,y)$, donde t es el único punto tal que $t \in [x_1,x_2]$ y $sen(\frac{1}{t}) = y$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n,y_n) = (\alpha_n,y_n)$, donde α_n es el único tal que $\alpha_n \in [x_1,x_2]$ y $sen(\frac{1}{\alpha_n}) = y$. Notemos que $g(t) = sen(\frac{1}{t}) = y$, así, $t = g^{-1}(sen(\frac{1}{t})) = g^{-1}(y)$, además, $y_n \in [-1,1]$ y $g(\alpha_n) = sen(\frac{1}{\alpha_n}) = y_n$, luego $g^{-1}(y_n) = \alpha_n$. Como $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y como g^{-1} es continua, $\lim_{n\to\infty} g^{-1}(y_n) = g^{-1}(y)$. Así, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = t$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = (t,y)$. De la misma manera demostramos que f es continua en $(x_1,1)$.

(2) Veamos que X_ϵ tiene la propiedad del punto fijo. Definamos, para todo $(x,y) \in X_\epsilon$ la función $\pi_1\colon X_\epsilon \to [x_1,1]$ (la proyección en el eje x) como $\pi_1(x,y) = x$, esta función es continua y biyectiva, por lo tanto, X_ϵ es homeomorfo al intervalo $[x_1,1]$. Por el Teorema 2.2 y el Teorema 2.4, tenemos que X_ϵ tiene la propiedad del punto fijo.

(3) Veamos que $dist(f(X), X) < \epsilon$. Sea $(x, y) \in X$. Caso 1. $(x, y) \in X_\epsilon$, luego $\|f(x, y) - (x, y)\| = \|(x, y) - (x, y)\| = 0 < \epsilon$. Caso 2. $(x, y) \notin X - X_\epsilon$, luego $0 \leq x < x_1 < x_2 < \epsilon$ y $f(x, y) = (t, y)$, donde t es el único tal que $x_1 \leq t \leq x_2$ y $sen(\frac{1}{t}) = y$, por lo tanto, $\|f(x, y) - (x, y)\| = \|(t, y) - (x, y)\| = |t - x| < \epsilon$.

Como (1), (2) y (3) se cumplen, por el Teorema 2.6, tenemos que X tiene la propiedad del punto fijo. □

Teorema 2.10. *Un cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea H_c un cubo de Hilbert y consideremoslo como el espacio producto $[0, 1] \times [0, 1/2] \times [0, 1/2^2] \times \cdots$. Para $\epsilon > 0$, elegimos N suficientemente grande tal que $\sum_{n>N} \frac{1}{n^2} < \epsilon^2$. Sean $A = [0, 1] \times [0, 1/2] \times \cdots \times [0, 1/2^N]$ y $\mathcal{A} = \{x \in H_c : x =< x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots > \ y \ (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in A\}$.

Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.6.

Notemos que A tiene la propiedad del punto fijo y que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a A. Por el Teorema 2.2, tenemos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad del punto fijo.

Ahora, sea $f \colon H_c \to \mathcal{A}$ una función definida para cada $< x_1, \ldots, x_N, \ x_{N+1}, \ldots > \in H_c$ por

$$f(< x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots >) =< x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots > .$$

Veamos que f es continua. Para esto, sean $x =< x_1, \ \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots \ > \in H_c$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en H_c convergente a x, donde cada $x_n =< x_{n_1}, \ldots, x_{n_N}, x_{n_{N+1}}, \ldots >$. Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq M$, $\rho(x_n, x) < \epsilon$. Sea $M_1 \geq M$, así para cada $n \geq M_1$, tenemos que $\rho(f(x_n), f(x)) = \rho(f(< x_{n_1}, \ldots, x_{n_N}, x_{n_{N+1}}, \ldots >), f(< x_1, \ldots,$

$x_N, x_{N+1}, \ldots >)) < \rho(< x_{n_1}, \ldots, x_{n_N}, 0, \ldots >, < x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots >) < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. De esta forma tenemos que f es continua.

Veamos que $\rho(f(x), x) < \epsilon$. Para esto, sea $x =< x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots >\in H_c$, luego
$\rho(f(x), x) = \rho(f(< x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots >), < x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots >) = \rho(< x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots >, < x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots >) = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2} < \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \epsilon$

Hasta aquí hemos probado que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.6, por lo tanto, tenemos que H_c tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

El siguiente resultado es otra forma de ver cuándo un continuo tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 2.11. *Si X es un continuo y existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X en X que converge uniformemente a la función identidad y es tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f\colon X \to X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a la función $g_n = f_n \circ f|_{f_n(X)}\colon f_n(X) \to f_n(X)$ que es continua porque f_n y f son continuas. Como $f_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo existe $x_n \in f_n(X)$ tal que $g_n(x_n) = x_n$. Tomando en cuenta lo anterior, consideremos a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para algún $x \in X$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Como para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$

tal que si $k > N_1$, entonces $sup\{d(f_{n_k}(p), p) \colon p \in X\} < \frac{\epsilon}{2}$, en particular, $d(f_{n_k}(f(x_{n_k})), f(x_{n_k})) < \frac{\epsilon}{2}$.

Por otro lado, por la continuidad de f, la sucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$, esto es, dado $\epsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N_2$, entonces $d(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Ahora, para cada $k > \text{máx}\{N_1, N_2\}$, tenemos que $d(f_{n_k}(f(x_{n_k})), f(x)) \leq d(f_{n_k}(f(x_{n_k})), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), f(x)) < \epsilon$. Por lo tanto, la sucesión $\{f_{n_k}(f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$. Así, $\text{lím}_{k\to\infty} g_{n_k}(x_{n_k}) = \text{lím}_{k\to\infty}(f_{n_k} \circ f)(x_{n_k}) = \text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k}(f(x_{n_k})) = f(x)$, y por otro lado $\text{lím}_{k\to\infty} g_{n_k}(x_{n_k}) = \text{lím}_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, luego $f(x) = x$. Por lo tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

El siguiente concepto está cercanamente relacionada con la propiedad del punto fijo.

Definición 2.12. *Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. El espacio Y es un* ***retracto*** *de X si existe una función continua r de X en Y tal que para cada $y \in Y$, $r(y) = y$. A la función r se le llama* ***retracción****.*

Estos son algunos ejemplos de retractos.

Ejemplo 2.13.
1. *Cualquier punto en un espacio topológico X es un retracto de X.*
2. *Cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es un retracto de $\mathbb{R}$.*
3. *Si $x \in \mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$, entonces la bola cerrada $\overline{S_\epsilon(x)}$ en $\mathbb{R}^n$ es un retracto de $\mathbb{R}^n$*

Teorema 2.14. *Sea X un espacio topológico. Si X tiene la propiedad del punto fijo y Y es un retracto de X, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico con la propiedad del punto fijo y Y es un retracto de X. Sean f una función continua de Y en Y y r una retracción de X en Y. Consideremos a la función $f \circ r \colon X \to X$, que es continua porque f y r son continuas. Como X tiene la propiedad del punto fijo, tenemos que, existe $p \in X$ tal que $(f \circ r)(p) = p$. Notemos que $f(r(X)) \subset Y$, por tanto, $p \in Y$, luego $r(p) = p$. Así, $(f \circ r)(p) = f(r(p)) = f(p)$. Por lo tanto $f(p) = p$. $\square$

Definición 2.15. *Sean X, Y dos espacios topológicos ajenos, $p \in X$ y $q \in Y$. Denotemos por $X + Y$ a la unión de estos dos espacios. La* ***cuña*** *de X y Y en los puntos p y q es el espacio cociente de $X+Y$ obtenido identificando p con q. Lo denotamos como $X \bigvee_{p,q} Y$.*

De acuerdo a la definición, $X \bigvee_{p,q} Y = \{\{s\} \colon s \in X - \{p\}\} \cup \{\{t\} \colon t \in Y - \{q\}\} \cup \{\{p, q\}\}$.

El Teorema 2.17 necesita de la noción de espacio topológico T_1.

Definición 2.16. *Un un espacio topológico X es $\mathbf{T_1}$ si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen U y V abiertos en X tales que $x \in U$ y $y \in V$ pero $x \notin V$ y $y \notin U$.*

Teorema 2.17. *Si X y Y son espacios topológicos T_1 con la propiedad del punto fijo, entonces $X \bigvee_{p,q} Y$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $w \in X \bigvee_{p,q} Y$, con $w = \{p, q\}$, $X_1 = \{\{s\} \colon s \in X - \{p\}\} \cup \{w\}$ y $Y_1 = \{\{t\} \colon t \in Y - \{q\}\} \cup \{w\}$. Notemos que X_1 es homeomorfo a X, que Y_1 es homeomorfo a Y y que $X \bigvee_{p,q} Y = X_1 \cup Y_1$, además X_1 y Y_1 son espacios topológicos T_1, por lo tanto son cerrados en $X \bigvee_{p,q} Y$.

Ahora, sea $f\colon X\bigvee_{p,q}Y \to X\bigvee_{p,q}Y$ una función continua, supongamos que $f(w)\neq w$ y $f(w)\in X_1$ sin perder generalidad. Sea $r\colon X\bigvee_{p,q}Y \to X_1$ una retracción definida, para cada $z \in X\bigvee_{p,q}Y$, por

$$r(z)=\begin{cases} z, & si\ z\in X_1,\\ w, & si\ z\in Y_1.\end{cases}$$

Veamos que la función r es continua. Para esto sea V un conjunto cerrado en X_1, (i) Si $w\notin V$, entonces $r^{-1}(V)=V$, y como X_1 es cerrado en $X\bigvee_{p,q}Y$, tenemos que V es cerrado en $X\bigvee_{p,q}Y$. (ii) Si $x\in V$, entonces $r^{-1}(V)=Y_1\cup V$ que es cerrado en $X\bigvee_{p,q}Y$.

Por otro lado, por Teorema 2.2, X_1 tiene la propiedad del punto fijo, la función $r\circ f|_{X_1}\colon X_1\to X_1$ tiene un punto fijo $p\in X_1$, es decir, $(r\circ f)(p)=p$.

Ahora, probemos que p es un punto fijo de f. Para esto, asumamos que $p\neq w$ (si $p=w$, entonces $f(w)=w$, esto contradice la suposición que se hizo al inicio de la demostración), así, $(r\circ f)(p)\neq w$, luego $f(p)\in X_1$, esto implica que $(r\circ f)(p)=f(p)$. Por lo tanto, $f(p)=p$. Es decir, $X\bigvee_{p,q}Y$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

En las Secciones 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 que siguen, demostramos la propiedad del punto fijo en las familia de continuos encadenables, tipo arco, árboles y dendritas.

2.2. Continuos encadenables

Definición 2.18. *Una **cadena** en un espacio métrico X es una colección finita $\mathcal{C}=\{U_1,U_2,\dots,U_n\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que*

$$U_i\cap U_j\neq\emptyset \iff |i-j|\leq 1$$

Cada miembro U_i de una cadena $\mathcal{C}$ se llama ***eslabón****.*

Una cadena $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ conecta a los puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

Un procedimiento para construir una cadena es empezar con una familia de conjuntos abiertos y de ahí extraer la cadena. Esto se puede hacer debido al siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Sea X un espacio métrico conexo. Si $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X y $a, b \in X$, entonces existe una cadena que conecta a a con b cuyos eslabones son elementos de $\mathcal{U}$.*

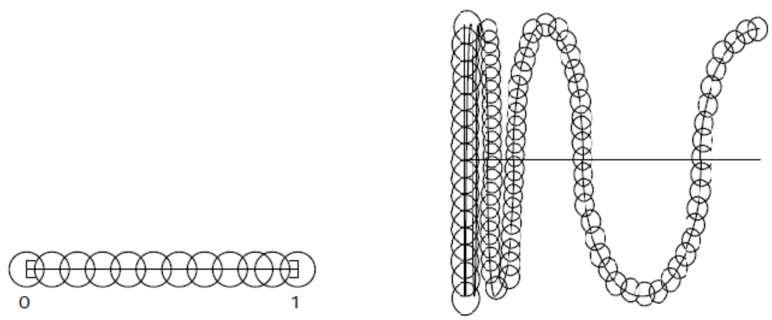
Demostración. Sea $D = \{x \in X \colon \textit{existe una cadena con eslabones en } \mathcal{U} \textit{ que conecta a } a \textit{ con } x\}$. Notemos que $a \in D$, luego $D \neq \emptyset$.

Vamos a probar que D es tanto abierto como cerrado en X. Primero veamos que es abierto, para esto, sea $x \in D$, luego existe una cadena $\{U_1, \ldots, U_n\}$ cuyos eslabones están en $\mathcal{U}$ tal que $a \in U_1$ y $x \in U_n$, esto implica que $U_n \subset D$, luego, D es abierto en X. Para ver que D es cerrado, probemos que $D = \overline{D}$. Sea $x \in \overline{D} = D \cup Fr(D)$, si $x \in D$, se termina la prueba. Si $x \in Fr(D)$, para cada abierto U en X tal que $x \in U$, entonces $D \cap U \neq \emptyset$. Sea $z \in D \cap U$, luego, existe una cadena $\{V_1, \ldots, V_m\}$, con eslabones en $\mathcal{U}$, que conecta a a con z. Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$ el primer número natural tal que $U \cap V_r \neq \emptyset$, así $\{V_1, \ldots, V_r, U\}$ es una cadena que conecta a a con x. Por lo tanto, $x \in D$. Así, $D = \overline{D}$. Como D es abierto y cerrado en X y X es conexo, tenemos que $D = X$. $\square$

Definición 2.20. *Una cadena $\mathcal{C}$ de un espacio métrico X es una* ***ϵ-cadena*** *si cada eslabón de $\mathcal{C}$ tiene diámetro menor que ϵ.*

Definición 2.21. *Un continuo no degenerado X es **encadenable** si para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena que cubre a X.*

Ejemplo 2.22. *Los continuos $[0,1]$ y $sen(\frac{1}{x})$ son encadenables. Vea la Figura 2.2.*



(a) (b)

Figura 2.2: Ejemplos de continuos encadenables

Definición 2.23. *Un espacio topológico X es **normal** si para cada par de subconjuntos cerrados A y B de X existen subconjuntos ajenos y abiertos U y V de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

A los Lemas 2.24 y 2.25 los usamos en la demostración del Teorema 2.26.

Como todo espacio métrico es normal [2, pág. 102], tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.24. *[2, pág. 102] Sea X un espacio métrico. Si A es cerrado en X y U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe un abierto V en X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

El siguiente resultado establece la existencia del llamado número de Lebesgue.

Lema 2.25. *[2, Teorema (3.A.10), pág. 83] Si X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $Y \subset X$ y diám$(Y) < \delta$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $Y \subset U_\lambda$.*

Teorema 2.26. *Si X es un continuo encadenable y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es una ϵ-cadena que cubre a X, entonces existe una ϵ-cadena $\mathcal{C}' = \{C'_1, \ldots, C'_n\}$ que cubre a X tal que para cada $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ se cumple que $\overline{C'_k} \cap \overline{C'_{k+2}} = \emptyset$.*

Demostración. La construcción de $\mathcal{C}'$ la hacemos de manera inductiva. Sea $F_1 = X - \bigcup_{k=2}^{n} C_k$, notemos que F_1 es un cerrado en X y está contenido en C_1, luego, por el Lema 2.24 existe un abierto C'_1 en X tal que $F_1 \subset C'_1 \subset \overline{C'_1} \subset C_1$. Notemos que $\{C'_1, C_2, \ldots, C_n\}$ cubre a X.

Ahora, supongamos que para cada $k < n$ hemos definido C'_{k-1} tal que $\{C'_1, C'_2, \ldots, C'_{k-1}, C_k, \ldots, C_n\}$ cubre a X. Sea $F_k = X - (\bigcup_{j=1}^{k-1} C'_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{n} C_j)$, notemos que F_k es un cerrado en X y está contenido en C_k, luego por el Lema 2.24, existe un abierto C'_k en X tal que $F_k \subset C'_k \subset \overline{C'_k} \subset C_k$. Notemos que $\{C'_1, \ldots, C'_k, C_{k+1}, \ldots, C_n\}$ cubre a X. De esta manera hemos terminado el paso inductivo. La colección $\mathbf{C}' = \{C'_1, \ldots, C'_k\}$ es una ϵ-cadena que cubre a X. $\square$

Veamos en seguida que el ser encadenable es hereditario.

Teorema 2.27. *Si X es un continuo encadenable y $K \subset X$ es un subcontinuo, entonces K es encadenable.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como X es encadenable, existe una ϵ-cadena $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ que cubre a X. Sean j el primer número natural tal que $C_j \cap K \neq \emptyset$ y k el número natural más grande tal que $C_k \cap K \neq \emptyset$.

La colección $\mathcal{C}' = \{C_j \cap K, C_{j+1} \cap K, \ldots, C_k \cap K\}$ es una ϵ-cadena en K que cubre a K. Si este no fuese el caso, entonces existen dos eslabones C_p y C_{p+1}, con $j \leq p < k$ tales que $(C_p \cap K) \cap (C_{p+1} \cap K) = \emptyset$. Esto implica que $\bigcup_{j \leq m \leq p}(C_m \cap K)$ y $\bigcup_{p+1 \leq m \leq k}(C_m \cap K)$ sean dos abiertos de K cuya unión es K, lo cual es una contradicción a la conexidad de K. Por lo tanto, K es encadenable. □

Definición 2.28. *Sea X es un continuo encadenable. Una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas que cubren a X, es una* ***sucesión definitoria*** *de cadenas para X, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente*

1. *$\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$-cadena con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas y*

2. *$\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}_n$, esto es, la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{C}_{n+1}$ está contenida en algún eslabón de $\mathcal{C}_n$.*

Teorema 2.29. *Todo continuo encadenable tiene una sucesión definitoria de cadenas.*

Demostración. Sea X un continuo encadenable. La contrucción de la sucesión definitoria de cadenas la hacemos de manera inductiva. Como X es encadenable, existe una $\frac{1}{2}$-cadena $\mathcal{D}_1 = \{D_{1,1}, \ldots, D_{1,m_1}\}$ que cubre a X, por el Teorema 2.26, existe una $\frac{1}{2}$-cadena $\mathcal{C}_1 = \{C_{1,1}, \ldots, C_{1,m_1}\}$ que cubre a X cuyos eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas. Ahora, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, hemos construido cadenas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ que satisfacen las condiciones de la Definición 2.28. Para la construcción de la cadena $\mathcal{C}_{n+1}$, sean λ_{n+1} el número de Lebesgue para la cadena $\mathcal{C}_n$ y $\alpha = \text{mín}\{\lambda_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\}$. Como X es encadenable, existe una α-cadena $\mathcal{D}_{n+1} = \{D_{n+1,1}, \ldots, D_{n+1,m_{n+1}}\}$ que cubre a X, por el Teorema 2.26, existe una α-cadena $\mathcal{C}_{n+1} = \{C_{n+1,1}, \ldots, C_{n+1,m_{n+1}}\}$ que cubre a X cuyos eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas.

Ahora, veamos que $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de C_n. Para esto, sea $C_{n+1,j}$ un eslabón de $\mathcal{C}_{n+1}$, notemos que $\text{diám}(\overline{C}_{n+1,j}) = \text{diám}(C_{n+1.j}) < \alpha < \lambda_{n+1}$, luego por el Lema 2.25, existe un eslabón C_{n_k} de $\mathcal{C}_n$ tal que $\overline{C}_{n+1} \subset C_{n_k}$ (porque λ_{n+1} es un número de Lebesgue para U_n). Hasta aqui hemos terminado el paso inductivo. De esta manera, tenemos que $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión definitoria de cadenas para X. $\square$

Para demostrar que los continuos encadenables tienen la propiedad del punto fijo necesitamos del siguiente resultado.

Teorema 2.30. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d y sea $f\colon X \to X$ una función continua. Si para cada $\epsilon > 0$, existe un punto $x_\epsilon \in X$ tal que $d(f(x_\epsilon), x_\epsilon) < \epsilon$, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\frac{1}{n} > 0$, luego existe un punto $x_n \in X$ tal que $d(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Consideremos a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a algún $p \in X$, es decir, existe $N_1 > 0$ tal que si $k \geq N_1$, entonces $d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por la continuidad de f, tenemos que $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $f(p)$, es decir, existe $N_2 > 0$ tal que si $k \geq N_2$, entonces $d(f(x_{n_k}), f(p)) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_3 > 0$ tal que $1 < N_3\frac{\epsilon}{3}$, luego para cada $n \geq N_3$, tenemos que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$.

Veamos que $f(p) = p$. Para esto, sea $N \geq \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, así $d(f(p), p) \leq d(f(p), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, tenemos que $d(f(p), p) = 0$, luego $f(p) = p$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo. □

Teorema 2.31. *Todo continuo encadenable tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean X un continuo encadenable y $f\colon X \to X$ una función continua. Por el Teorema 2.29, X tiene una una sucesión definitoria de cadenas $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ahora, sean $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Consideremos a

$$\mathcal{C}_k = \{C_{k,1}, \ldots, C_{k,n_k}\},$$

$$A = \{x \in X\colon \textit{si } x \in C_{k,j} \textit{ y } f(x) \in C_{k,l} \textit{ entonces } j < l\},$$

$$B = \{x \in X\colon \textit{existe } j \textit{ tal que } x \in C_{k,j} \textit{ y } f(x) \in C_{k,j}\} \textit{ y}$$

$$C = \{x \in X\colon \textit{si } x \in C_{k,j} \textit{ y } f(x) \in C_{k,l} \textit{ entonces } j > l\}.$$

Afirmamos que A es cerrado en X. Para ver esto, sea $x \in (X - A)$. Como $\mathcal{C}_k$ cubre a X, existe $l \in \{1, \ldots, n_k\}$ tal que $x \in C_{k,l}$ y por estar x en el complemento de A, para algún $j \leq l$, tenemos que $f(x) \in C_{k,j}$. Como f es continua y $C_{k,l}$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta^d(x) \subset C_{k,l}$ y $f(V_\delta^d(x)) \subset C_{k,j}$, pero lo anterior nos dice que $V_\delta^d(x) \subset (X - A)$. Por lo tanto, $X - A$ es abierto en X, luego A es cerrado. Análogamente podemos probar que C es cerrado en X.

Si $B = \emptyset$, entonces A y C son dos cerrados ajenos de X, cuya unión es X, pero esto contradice la conexidad de X. Por lo tanto, $B \neq \emptyset$ y de aquí tenemos que existe $x_\epsilon \in X$ tal que $d(x_\epsilon, f(x_\epsilon)) < \epsilon$. Luego por el Teorema 2.30 la función f tiene un punto fijo; y como la función f fue arbitraria, por lo tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. □

2.3. Continuos tipo arco

Antes de definir a los continuos tipo arco, es necesario escribir los conceptos necesarios.

Definición 2.32. *Sean X y Y espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces f es una ϵ-**función** si f es continua y para cada punto $x \in X$, el diám$(f^{-1}(f(x))) < \epsilon$.*

Definición 2.33. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{P}$ una colección de espacios métricos compactos, X es **tipo** $\mathcal{P}$ si para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-función f_ϵ suprayectiva de X a algún elemento Y_ϵ de $\mathcal{P}$.*

Definición 2.34. *Un espacio métrico X es **tipo arco** si para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-función suprayectiva f_ϵ de X a un arco.*

El Teorema 2.5 sugiere un estudio de las siguientes tipos de funciones, las cuales tienen una íntima conexión con los continuos tipo arco.

Definición 2.35. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $u\colon X \to Y$ es una **función universal**, si para cualquier función continua $g\colon X \to Y$ existe $p \in X$ tal que $u(p) = g(p)$.*

Veamos una caracterización de la propiedad del punto fijo en un espacio topológico.

Teorema 2.36. *Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si la función identidad $Id_X\colon X \to X$ es una función universal.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo, es decir, para toda función continua $f\colon X \to X$, existe

$x \in X$ tal que $f(x) = x$, pero $x = Id_X(x)$, luego $f(x) = Id_X(x)$. Por lo tanto, la función identidad es universal.

Probemos el recíproco. Sea $f\colon X \to X$ una función continua. Como la función Id_X es universal, para algún punto $x \in X$, tenemos que $x = Id_X(x) = f(x)$. Por lo tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 2.37. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Si para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-función $f_\epsilon\colon Y \to Z_\epsilon$, donde Z_ϵ es un espacio métrico tal que $f_\epsilon \circ f\colon X \to Z_\epsilon$ es universal, entonces f es una función universal.*

Demostración. Sea $g\colon X \to Y$ una función continua y para cada $\epsilon > 0$ consideremos a $f_\epsilon \circ g\colon X \to Z_\epsilon$ la cual es continua. Como cada $f_\epsilon \circ f$ es universal, existe $p_\epsilon \in X$ tal que $(f_\epsilon \circ f)(p_\epsilon) = (f_\epsilon \circ g)(p_\epsilon)$, esto es, $f_\epsilon(f(p_\epsilon)) = f_\epsilon(g(p_\epsilon))$, de esta última igualdad tenemos que $g(p_\epsilon) \in f_\epsilon^{-1}(f_\epsilon(f(p_\epsilon)))$ y como f_ϵ es una ϵ-función, tenemos que $d_2(f(p_\epsilon), g(p_\epsilon)) < \epsilon$.

Para todo $i \in \mathbb{N}$, sea $\epsilon(i) = \frac{1}{i}$, y consideremos a la sucesión $\{p_{\epsilon(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ en X. Como X es un espacio métrico compacto, existe una subsucesión $\{p_{\epsilon(i_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{p_{\epsilon(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que converge a un punto $p \in X$. Como $\epsilon(i)$ converge a 0 cuando i tiende a infinito y como f y g son continuas, tenemos que $f(p) = g(p)$, luego f es universal. $\square$

Teorema 2.38. *Si X es un continuo tal que para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-función universal $f_\epsilon\colon X \to Z_\epsilon$, donde Z_ϵ es un espacio métrico, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $Id_X\colon X \to X$ la función identidad y $\epsilon > 0$. Veamos que $f_\epsilon \circ Id_X\colon X \to Z_\epsilon$ es una función universal, donde

Z_ϵ es un espacio métrico. Para esto, sea $g\colon X \to Z_\epsilon$ una función continua.

Como f_ϵ es una función universal, para algún $x \in X$, tenemos que $f_\epsilon(x) = g(x)$, pero $f_\epsilon(x) = f_\epsilon(Id_X(x)) = (f_\epsilon \circ Id_X)(x)$, luego $(f_\epsilon \circ Id_X)(x) = g(x)$, por lo tanto, $f_\epsilon \circ Id_X$ es una función universal. Por el Teorema 2.37, tenemos que la función Id_X es universal y por lo tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Definición 2.39. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n-variedad** es un espacio métrico separable M tal que todo $p \in M$ tiene una vecindad V homeomorfa a I^n. El **interior como variedad** de una n-variedad M, que denotamos por* $\mathrm{intv}_{(n)}(M)$, *es*

$$\mathrm{intv}_{(n)}(M) = \{p \in M \colon p \textit{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

*La **frontera como variedad** de M, que denotamos por $\partial_n M$, es*

$$\partial_n M = \{p \in M \colon p \notin \mathrm{intv}_{(n)}(M)\}.$$

Ejemplo 2.40. *Sea*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1 \ \text{ y } \ -1 \leq z \leq 1\}.$$

Tenemos que C es una 2-variedad tal que

$$\mathrm{intv}_{(2)}(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1 \ \text{ y } \ -1 < z < 1\}$$

y

$$\partial_2 C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1 \ \text{ y } \ |z| = 1\}.$$

Notemos que si consideramos a C como subespacio de $\mathbb{R}^3$, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^3}(C) = \emptyset$ *y* $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^3}(C) = C$. *Luego,* $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^3}(C)$ *y* $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^3}(C)$ *no coinciden con* $\mathrm{intv}_{(2)}(C)$ *y $\partial_2 C$, respectivamente, vea la Figura 2.3.*

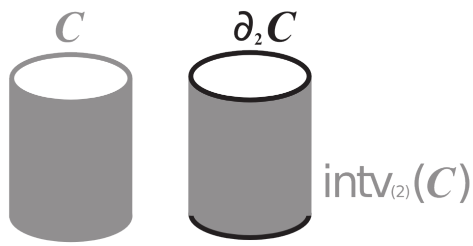


Figura 2.3:

Ahora, introducimos la noción de función AH-esencial (AH se refiere a Alexandroff-Hopf) y enseguida veremos una caracterización de una función universal como una AH-esencial.

Definición 2.41. *Sean X un espacio topológico y Z una n-celda. Una función $\varphi\colon X \to Z$ es* ***AH-esencial*** *si φ es continua y $\varphi|_{\varphi^{-1}(\partial Z)}\colon \varphi^{-1}(\partial Z) \to \partial Z$ no se puede extender a una función continua de X a ∂Z.*

Teorema 2.42. *Sean X un espacio topológico, Z una n-celda y $f\colon X \to Z$ una función continua. Entonces f es universal si y sólo si f es AH-esencial.*

Demostración. Demostremos el caso cuando $Z = B^n$.

Supongamos que f no es AH-esencial, es decir, la función $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}\colon f^{-1}(S^{n-1}) \to S^{n-1}$ puede ser extendida a una función continua $F\colon X \to S^{n-1}$. Sea $-F\colon X \to B^n$ definida, para todo punto $x \in X$ por $(-F)(x) = -(F(x))$.

Probemos que $-F$ es continua. Sea $x \in X$ y $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $lim_{m\to\infty} x_m = x$. Por la definición de $-F$ y la continuidad de F, tenemos que
$lim_{m\to\infty}(-F)(x_m) = lim_{m\to\infty} - (F(x_m)) = -lim_{m\to\infty} F(x_m) = -(F(x)) = (-F)(x)$. Por lo tanto, $-F$ es continua.

Por otro lado, sea $x \in X$, notemos que $(-F)(x) \neq F(x)$, de lo contrario tendriamos que $(-F)(x) = F(x) = 0$, pero $0 \notin S^{n-1}$.

Como F es una extensión de f, tenemos que $F(x) = f(x)$, por lo tanto, para cada $x \in X$, tenemos que $f(x) \neq (-F)(x)$. De esta manera, tenemos que f no es universal.

Demostremos el recíproco. Supongamos que f no es universal, luego existe una función continua $g\colon X \to B^n$ tal que para cada punto $x \in X$, $f(x) \neq g(x)$. Por lo tanto, para cada punto $x \in X$, existe el segmento de línea dirigido que inicia en $g(x)$, pasa a través de $f(x)$ y finaliza en un punto en S^{n-1}; dicho punto existe y es único; a tal punto lo denotamos por $\varphi(x)$. Esto nos define una función $\varphi\colon X \to S^{n-1}$.

Veamos que φ es una extensión de la función $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$. Para esto sea $z \in f^{-1}(S^{n-1})$, luego el segmento de línea dirigido que empieza en $g(z)$, finaliza en $f(z) = \varphi(z) \in S^{n-1}$. Así, para todo $z \in f^{-1}(S^{n-1})$, tenemos que $f(z) = \varphi(z)$.

Ahora, veamos que φ es continua. Para esto, sea $z \in X$ y $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $lim_{m\to\infty}(z_m) = z$. Sean l_m el segmento de línea dirigido que empieza en $g(z_m)$ pasa por $f(z_m)$ y finaliza en el (único) punto $\varphi(z_m)$ y l el segmento de línea dirigido que empieza en $g(z)$, pasa a través de $f(z)$ y finaliza en el (único) punto $\varphi(z)$.

Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, los segmentos $l_m \subset B^n$ y $l \subset B^n$. Sea $\epsilon > 0$. Como f y g son continuas, existen $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ tales que, para toda $m \geq M_1$ y toda $m \geq M_2$, tenemos que $\|g(z_m) - g(z)\| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|f(z_m) - f(z)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $M = \max\{M_1, M_2\}$, y notemos que para toda $m \geq M$, hemos construido trapecios como el de la Figura 2.3.

Sean α_m, β_m y ψ_m los segmentos de línea que unen a $f(z_m)$ con $f(z)$, $g(z_m)$ con $g(z)$ y a $\varphi(z_m)$ con $\varphi(z)$, respectivamente. Notemos que $lim_{m\to\infty}\text{diám}(\alpha_m) = 0$ y $lim_{m\to\infty}\text{diám}(\beta_m) = 0$, y como $\varphi(z_m) \in l_m$, tenemos que $lim_{m\to\infty}\text{diám}(\psi_m) = 0$, esto

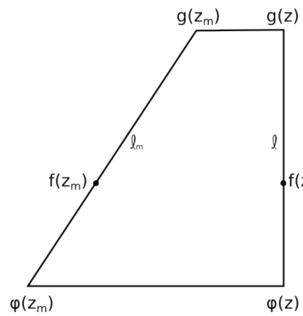


Figura 2.4: Trapecio

implica que $lim_{m \to \infty} \varphi(z_m) = \varphi(z)$. Por lo tanto, φ es continua.

Hemos probado que φ es una extensión continua de $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$. Por lo tanto, f no es AH-esencial.

Antes de probar la proposición para toda n-celda, veamos que se cumplen los siguientes incisos.

(1) f es universal si y sólo si $h \circ f$ es universal.

(2) f es AH-esencial si y sólo si $h \circ f$ es AH-esencial.

Demostración de (1) Supongamos que f es universal y sea $g\colon X \to B^n$ una función continua. Consideremos a $h^{-1}\colon B^n \to Z$ que es continua, luego la función $h^{-1} \circ g\colon X \to Z$ es continua. Como f es universal, existe $x \in X$ tal que $(h^{-1} \circ g)(x) = f(x)$, luego $g(x) = (h \circ f)(x)$. Por lo tanto, $h \circ f$ es universal. Recíprocamente, supongamos que $h \circ f$ es universal. Sea $g'\colon X \to Z$ una función continua. Como h es continua, la función $h \circ g'\colon X \to B^n$ es continua. Como $h \circ f$ es universal, existe $x \in X$ tal que $(h \circ g')(x) = (h \circ f)(x)$, aplicando h^{-1} tenemos que $g'(x) = f(x)$, por lo tanto, f es universal.

Demostración de (2) Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(\partial Z) = S^{n-1}$, [5, págs. 95-96]. Supongamos que $h \circ f$ no es

AH-esencial, es decir, $(h\circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}\colon (h\circ f)^{-1}(S^{n-1}) \to S^{n-1}$ se puede extender a una función continua $G\colon X \to S^{n-1}$.

Veamos que f no es AH-esencial. Para esto, consideremos a la función $h^{-1}|_{S^{n-1}}\colon S^{n-1} \to \partial Z$ que es continua porque h es homeomorfismo. Ahora, sea $F = (h^{-1}|_{S^{n-1}} \circ G)\colon X \to S^{n-1}$ continua y veamos que es una extension de $f|_{f^{-1}(\partial Z)}$. Para esto, sea $x \in X$, luego $F(x) = (h^{-1}|_{S^{n-1}} \circ G)(x) = h^{-1}|_{S^{n-1}}(G(x)) = h^{-1}|_{S^{n-1}}((h \circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}(x)) = h^{-1}|_{S^{n-1}}((h \circ f)|_{f^{-1}(\partial Z)}(x)) = (h^{-1}|_{S^{n-1}}\circ h\circ f|_{f^{-1}(\partial Z)})(x) = f|_{f^{-1}(\partial Z)}(x)$. Por lo tanto, para cada punto $x \in X$, $F(x) = f|_{f^{-1}(\partial Z)})(x)$, luego f no es AH-esencial.

Demostremos el recíproco. Supongamos que f no es AH-esencial, es decir, la función $f|_{f^{-1}(\partial Z)}\colon f^{-1}(\partial Z) \to \partial Z$ se puede extender a una función continua $F\colon X \to \partial Z$.

Como h es homeomorfismo, la función $h|_{\partial Z}\colon \partial Z \to S^{n-1}$ es continua. Luego, la función $G = h|_{\partial Z}\circ F\colon X \to S^{n-1}$ es continua. Ahora, veamos que G es una extension de $(h \circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}$. Para esto sea $x \in X$, $G(x) = (h|_{\partial Z} \circ F)(x) = h|_{\partial Z}(F(x)) = h|_{\partial Z}(f|_{f^{-1}(\partial Z)}(x)) = (h|_{\partial Z}\circ f|_{f^{-1}(\partial Z)})(x) = (h\circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}(x)$. Luego, para cada punto $x \in X$, $G(x) = (h \circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}(x)$. Es decir, la función $(h \circ f)|_{(h\circ f)^{-1}(S^{n-1})}$ no es AH-esencial.

Ahora, sea Z es una n-celda cualquiera, tenemos que f es universal, si y sólo si $h \circ f$ es universal, si y sólo si $h \circ f$ es AH-esencial, si y sólo si f es AH-esencial. Por lo tanto, f es universal si y solo si f es AH-esecial. $\square$

Corolario 2.43. *Si X un espacio topológico conexo, A un arco y f una función continua y suprayectiva de X en A, entonces f es universal.*

Demostración. Sean X un espacio topológico, A un arco y f una función continua y suprayeciva de X en A.

Por la suprayectividad de f podemos definir a la función $f|_{f^{-1}(\{p,q\})}\colon f^{-1}(\{p,q\}) \to \{p,q\}$, donde p y q son puntos finales de A. Como $\{p,q\}$ no es conexo, tenemos que $f|_{f^{-1}(\{p,q\})}$ no se puede extender a una función continua de X en $\{p,q\}$. Luego, por el Teorema 2.42, tenemos que f es universal. $\square$

Teorema 2.44. *Todo continuo tipo arco tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X un continuo tipo arco, luego para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-función suprayectiva $f_\epsilon\colon X \to [0{,}1]$. Consideremos a la función identidad $Id_X\colon X \to X$, luego cada función $f_\epsilon \circ Id_X\colon X \to [0{,}1]$ es continua y por el Corolario 2.43 es universal. Luego, por el Teorema 2.37 la función Id_X es universal. Por lo tanto, por Teorema 2.36 X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

2.4. Árboles

Definición 2.45. *Sea X un continuo. Un punto $p \in X$ es un* ***punto extremo*** *de X, si para cualquier conjunto abierto U de X con $p \in U$ existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $Fr(V)$ consiste solamente de un punto.*

Antes de dar la definición de árbol es necesario dar la noción de gráfica finita.

Definición 2.46. *Una* ***gráfica finita*** *es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.*

Veamos algunos ejemplos de gráficas finitas.

Ejemplo 2.47. *1. Consideremos a los puntos del plano cartesiano* $q_1 = (-2, 0)$ *y* $q_2 = (2, 0)$ *y al intervalo* $[-1, 1] \times \{0\}$*. Sean* R *y* S *dos circunferencias de radio uno, centradas en los puntos* q_1 *y* q_2*, respectivamente. Cualquier espacio topológico homeomorfo a* $X = R \cup S \cup ([-1, 1] \times \{0\})$ *es un continuo llamado Pesa, el cual es una gráfica finita, (vea la Figura 2.5).*

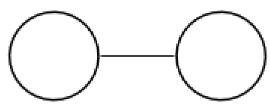


Figura 2.5: Pesa

2. Cualquier espacio topológico homeomorfo al continuo que resulta de la unión de tres arcos y que se intersectan sólo en un punto se llama Triodo Simple y es un ejemplo de gráfica finita, (vea la Figura 2.6).

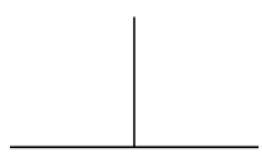


Figura 2.6: Triodo Simple

3. Sea el continuo $X = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$*. Todo espacio topológico homeomorfo a* X *es una gráfica finita llamada Paleta, (vea la Figura 2.7).*

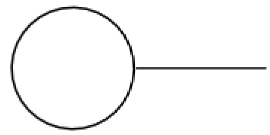


Figura 2.7: Paleta

Ahora ya podemos definir árbol, notemos que la familia de los árboles es una subfamilia de las gráficas finitas. En la siguiente sección veremos un resultado referente a la aproximación de dendritas por árboles.

Definición 2.48. *Un* ***árbol*** *es una gráfica finita que no tiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 2.49. *1. Un arco es un árbol.*

2. Notemos que en el Ejemplo 2.47 un Triodo simple es un ejemplo de árbol.

Antes de ver que un árbol tiene la propiedad del punto fijo probemos el siguiente resultado.

Teorema 2.50. *Si Y y Z son continuos con la propiedad del punto fijo y $Y \cap Z = \{p\}$, entonces $Y \cup Z$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f\colon Y \cup Z \to Y \cup Z$ una función continua. Consideremos a p y sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(p) \in Y$. Sea la función $r\colon Y \cup Z \to Y$, definida para cada punto $x \in Y \cup Z$ como

$$r(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in Y, \\ p, & si\ x \in Z. \end{cases}$$

Notemos que r es continua por el Teorema 1.1. Ahora consideremos a la función $r \circ f|_Y : Y \to Y$ que es continua, por lo tanto, existe $q \in Y$ tal que $(r \circ f)(q) = q$. Si $f(q) \in Y$, entonces $r(f(q)) = f(q)$, luego $f(q) = q$. Si $f(q) \in Z$, entonces $r(f(q)) = p$, luego $p = q$ y así $f(p) = f(q) \in Y \cap Z$, luego $f(q) = q$.

Por lo tanto, $Y \cup Z$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 2.51. *Todo árbol tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean X un árbol y E el conjunto de puntos extremos de X. La prueba la hacemos por inducción sobre el número de puntos extremos de X.

(i) Sea $A_1 = [x_1, x_2]$ un arco en X, donde $x_1, x_2 \in E$, luego por el Teorema 2.4, A_1 tiene la propiedad del punto fijo. Ahora, sea $A_2 = [p_1, x_3]$ un arco en X, donde $x_3 \in E$ y $p_1 \in [x_1, x_2]$ tal que $p_1 \notin E$, nuevamente por el Teorema 2.4, A_2 tiene la propiedad del punto fijo. Notemos que $A_2 \cap A_1 = \{p_1\}$, así por el Teorema 2.50 $A_2 \cup A_1$ tiene la propiedad del punto fijo.

(ii) Supongamos que $\bigcup A_k$ tiene la propiedad del punto fijo, y $\bigcup A_k$ contiene los puntos extremos $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Sea A_{k+1} un arco en X con puntos extremos p_k y x_{k+2}, donde $x_{k+2} \in E$, $p_k \in \bigcup A_k$ tal que $p_k \notin E$, luego A_{k+1} tiene la propiedad del punto fijo. Notemos que $[\bigcup A_k] \cap A_{k+1} = \{p_k\}$, así por el Teorema 2.50 $\bigcup A_{k+1}$ tiene la propiedad del punto fijo. Ahora, notemos que $X = \bigcup A_{n-1}$ y por tanto concluimos que X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

2.5. Dendritas

Definición 2.52. *Una* ***dendrita*** *es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Estos son algunos ejemplos de dendritas.

Ejemplo 2.53. *1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$A_n = \left\{ \left(\frac{r}{n+1}, \frac{r}{(n+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \colon r \in I \right\}$$

El continuo $F_w = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es una dendrita y es llamado también Punto peludo, (vea la Figura 2.8).

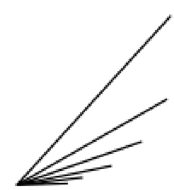


Figura 2.8: Fw

2. El continuo

$$W = \cup \{ \{1/n\} \times [0, 1/n] \colon n \in \mathbb{N} \} \cup ([-1, 1] \times \{0\})$$

es otro ejemplo de dendrita y es llamado Peine nulo, (vea la Figura 2.9).

Para demostrar que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo necesitamos de varios resultados, entre ellos el llamado aproximación por árboles que nos ayuda a manejar las dendritas a partir de árboles contenidos en ellas, de esta manera es más comodo trabajarlas.

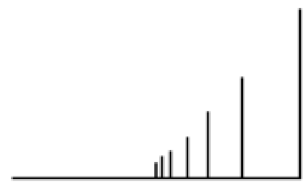


Figura 2.9: Peine nulo

Lema 2.54. *[8, Lema 10.24, pág. 175]. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Para cada punto $x \in X - Y$ existe un único punto $r(x) \in Y$ tal que $r(x)$ es un punto de cualquier arco en X que va de x a cualquier punto de Y.*

Lema 2.55. *[8, Lema 10.25, pág. 176]. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Definimos $r \colon X \to Y$ por $r(x)$ como en el Lema 2.54 si $x \in X - Y$ y $r(x) = x$ si $x \in Y$. Entonces la función r es continua (esto es una retracción de X sobre Y).*

La función $r \colon X \to Y$ definida en el Lema 2.55 se llama **función primer punto** para Y.

Teorema 2.56. *[8, Teorema 10.27, pág. 176]. Sea X una dendrita. Entonces existe $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subcontinuos de X que satisface lo siguiente.*

(1) Cada Y_i es un árbol;

(2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$;

(3) $\lim_{i\to\infty} Y_i = X$;

(4) Existe $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $Y_1 = \{p_1\}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\overline{Y_{i+1} - Y_i}$ es un arco con punto extremo p_i tal que $\overline{Y_{i+1} - Y_i} \cap Y_i = \{p_i\}$;

(5) *Para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $r_i \colon X \to Y_i$ es la función primer punto para Y_i. La sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X.*

Teorema 2.57. *Toda dendrita tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X una dendrita no degenerada. Por (1), del Teorema 2.56, existe $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que cada Y_i es un árbol. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $r_i \colon X \to Y_i$ una función continua, definida como en el Lema 2.55. Por el Lema 2.51, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que Y_i tiene la propiedad del punto fijo, luego para cada $i \in \mathbb{N}$ la función continua $r_i|_{Y_i} \colon Y_i \to Y_i$ tiene un punto fijo, así $r_i \colon X \to X$ tiene un punto fijo. Ahora, por (5) del Teorema 2.56, la sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X. Por último notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $r_i(X) = Y_i$, luego $r_i(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Por lo tanto, por el Teorema 2.11, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

2.6. Lema de Sperner

Emanuel Sperner fue un matemático alemán nacido en 1905 y fallecido en 1980. Una de sus aportaciones principales a las matemáticas fue el Lema de Sperner en 1928.

A continuación, presentamos el caso unidimensional del Lema de Sperner.

Lema 2.58. *Consideremos al intervalo cerrado $[0,1]$ y supongamos que un número finito de puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ divide a $[0,1]$ en intervalos más pequeños. Si marcamos a x_0 de color rojo, a x_n de azul y a cada uno de los puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}$*

también los marcamos de rojo o azul. Entonces existe un intervalo de la división cuyos puntos extremos son de diferente color. Además el número de tales intervalos es impar.

Demostración. Llamemos a un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ bicolor a aquel cuyos puntos extremos son de diferente color.

Probemos la existencia. Caso 1. Supongamos que los puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ son todos marcados de rojo (vea la Figura 2.10(a)), luego el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ es bicolor.

Caso 2. Supongamos que los puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ son todos marcados de azul (vea la Figura 2.10(b)), luego el intervalo $[x_0, x_1]$ es bicolor.

Caso 3. Supongamos que de los puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, al menos uno es rojo y al menos uno es azul, (vea la Figura 2.10(c)). Si x_1 es azul, entonces el intervalo $[x_0, x_1]$ es bicolor. Si x_1 no es azul, entonces es rojo. Sabemos que existe $1 < i < n$ tal que x_i es azul, sea x_{i_0} el primer punto azul, luego el intervalo $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ es bicolor.

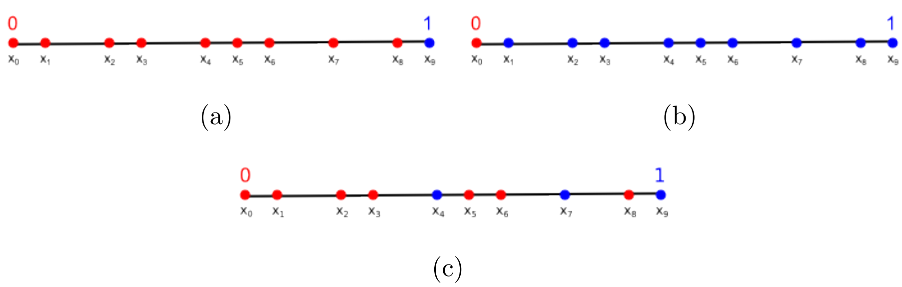


Figura 2.10: Caso 1, 2 y 3 para n=9

Ahora veamos que el número de intervalos bicolor es impar. Empecemos por el extremo izquierdo, y notemos lo siguiente: sabemos que x_0 es rojo, si x_1 fuése azul, entonces tenemos un primer intervalo $[x_0, x_1]$ bicolor, si x_1 fuera rojo nos pasamos al siguiente punto x_2, si éste fuese azul, entonces el intervalo $[x_1, x_2]$ es bicolor, si no fuera azul nos pasamos a x_3, y asi sucesivamente. Luego, el primer intervalo bicolor va a tener extremo izquierdo de color rojo y extremo derecho de color azul. El segundo intervalo bicolor que encontramos va a tener extremo izquierdo de color azul y extremo derecho de color rojo, el tercer intervalo bicolor es como el primero, el cuarto es como el segundo y así, seguimos con los intervalos restantes. Es decir, a un intervalo como el primero le asociamos un número impar consecutivo y a un intervalo como el segundo le asociamos un número par consecutivo. Notemos que al asociar números a las posiciones estamos contando el número de intervalos bicolor.

Notemos que si $[x_i, x_{i+1}]$ es el último intervalo bicolor tal que x_i es azul y x_{i+1} es rojo, entonces para cada $i + 1 < j \leq n$ los puntos x_j son rojos, pero esto contradice el hecho de que x_n es azul, por lo tanto, el último intervalo bicolor tiene extremo izquierdo rojo y extremo derecho azul, además tiene asociado un número impar. Luego el número de intervalos bicolor es impar.

$\square$

Para escribir el siguiente lema consideremos a las habitaciones y las puertas de una casa. Supongamos que el número de puertas en cada habitación es 0, 1 o 2. Una habitación con 0 puertas es una habitación sin puertas. Una habitación con una sola puerta se llama un habitación sin salida, una habitación con dos puertas es una habitación comunicada. Una puerta puede ser exterior, si conduce hacia afuera o hacia adentro de la casa o puede ser interior si conecta a dos habitaciones vecinas. Asumamos que una habitación no puede tener más de una puerta exterior y que dos habitaciones vecinas no pueden tener más de dos puertas en común.

Lema 2.59. *Supongamos que cualquier habitación de una casa tiene 0, 1 o 2 puertas. Entonces el número de habitaciones sin salida y el número de puertas exteriores tienen la misma paridad.*

Demostración. Para la prueba describiremos los recorridos a través de las habitaciones de la casa. Cada recorrido se hará siguiendo las siguientes condiciones. Primero, cualquier puerta puede ser atravesada sólo una vez. Segundo, un recorrido empieza entrando a la casa desde la calle por una puerta exterior o por una habitación sin salida. Este recorrido sigue a través de las habitaciones comunicadas y termina en una habitación sin salida o hacia afuera de la casa (vea la Figura 2.11). Después de entrar a una habitación con dos puertas, se puede salir sólo por la otra puerta. Después de terminado ese recorrido, empezamos otro. Terminamos el número de recorridos distintos hasta que no existan más puertas exteriores o habitaciones sin salida en las cuales iniciamos un recorrido. Observemos que cada recorrido tiene dos sentidos, vamos a considerarlos como uno mismo. Luego los recorridos resultantes pueden ser de uno de los tres tipos siguientes

1. De una puerta exterior a una habitación sin salida.

2. De una puerta exterior a otra puerta exterior.

3. De una habitación sin salida a una habitación sin salida.

Denotemos por m, n y p los números de recorridos para el primero, segundo y tercer tipo, respectivamente. A cada recorrido de tipo 1 le corresponde sólo una puerta exterior y una habitación sin salida, a cada recorrido de tipo 2 le corresponde dos puertas exteriores, y a cada recorrido de tipo 3 le corresponde dos habitaciones sin salida. Por lo tanto, el número total de puertas exteriores es $2n + m$ y el número de habitaciones sin salida es $2p+m$, notemos que los números $2n+m$ y $2p+m$ tienen misma paridad. De esta manera queda demostrado el lema. $\square$

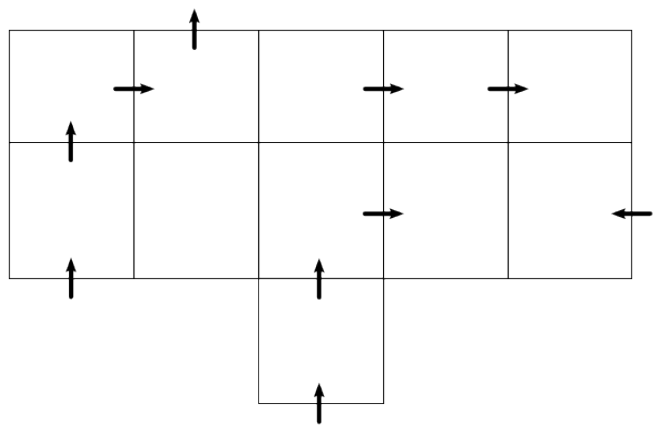


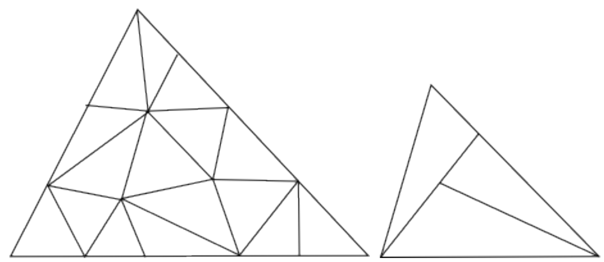
Figura 2.11: Recorridos a través de una casa

En el plano, a un triángulo junto con su interior en $\mathbb{R}^2$ le llamamos 2-celda triangular, notemos que la frontera en $\mathbb{R}^2$ de una 2-celda triangular es el triángulo.

Definición 2.60. *Una **triangulación** de una 2-celda triangular es una división finita en 2-celdas triangulares tal que cualquier par de 2-celdas triangulares de la división tienen en común solo un vértice, o todo un lado o ningún punto.*

Las 2-celdas triangulares de la división se llaman caras de la triangulación, sus lados se llaman aristas y sus vértices son los vértices de la triangulación.

Ejemplo 2.61. La división en la Figura 2.12(a) es una triangulación, mientras que la Figura 2.12(b) no lo es porque existen dos caras que comparten una arista pero no completamente.



(a) (b)

Figura 2.12:

Lema 2.62. *Consideremos una triangulación de una 2-celda triangular T. Los vértices de T son marcados por rojo, azul y verde. Los vértices de la triangulación son marcados con los mismos colores tales que si un vértice está en un lado de T, este se debe marcar por uno de los dos colores que tienen los extremos de este lado. Entonces existe al menos una cara de la triangulación con los vértices marcados por los diferentes colores, es decir, rojo, azul y verde. Además, el número de tales caras es impar.*

Demostración. Como ilustración de este lema veamos a la Figura 2.13. Usamos las letras r, a y v para referirnos a los colores rojo, azul y verde, respectivamente. Consideremos a la 2-celda triangular T como una casa y a cada cara de la triangulación como una habitación. Una arista de la triangulación es una puerta si los puntos de sus extremos están marcados por rojo y azul. A tales aristas las llamamos de tipo (r, a) (no hacemos diferencia entre las aristas de tipo (r, a) y (a, r)). Ahora, consideremos todas las posibles asignaciones de los colores rojo, azul y verde a los vértices de una cara. Pueden ser de 10 diferentes tipos $(r, r, r), (a, a, a), (v, v, v), (r, r, a), (r, r, v), (a, a, r)$, $(a, a, v), (v, v, r), (v, v, a)$ y (r, a, v). Evidentemente, las caras de tipo (r, a, v) tienen una sola arista de tipo (r, a), por lo tanto, son habitaciones sin salida. Similarmente, las caras de tipo (r, r, a) y (r, a, a) son habitaciones comunicadas, porque son caras que tienen exactamente dos aristas de tipo (r, a). En resumen tenemos:

1. 2-celda triangular T - casa
2. Cara de triangulación - habitación
3. Arista de triangulación de tipo (r, a) - puerta
4. Arista de triangulación de tipo (r, a) que se encuentra en un lado de T - puerta exterior
5. Cara de tipo (r, a, v) - habitación sin salida
6. Cara de tipo (r, r, a) o (r, a, a) - habitación comunicada

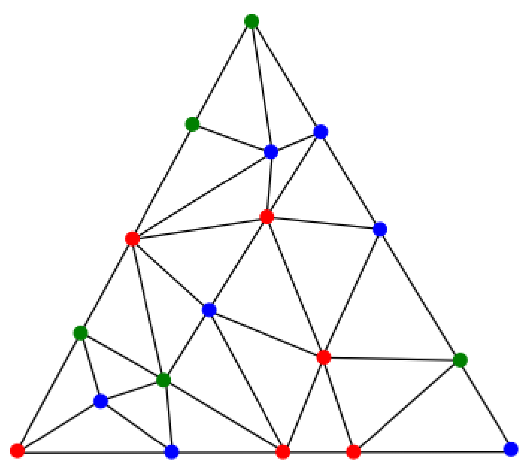


Figura 2.13:

Observemos que una cara puede tener 0, 1 o 2 aristas de tipo (r, a). Así, las hipótesis del Lema 2.59 se satisfacen. Por lo tanto, el número de habitaciones sin salida y puertas exteriores son ambos pares o impares.

Como las puertas exteriores son aristas de tipo (r, a) que se encuentran en el lado de T cuyos puntos extremos están marcados de rojo y azul, tenemos por el Lema 2.58 que el número de tales aristas es impar. Luego existe al menos una habitación sin salida, es decir, existe al menos una cara de tipo (r, a, v) y además el número de tales caras es impar. $\square$

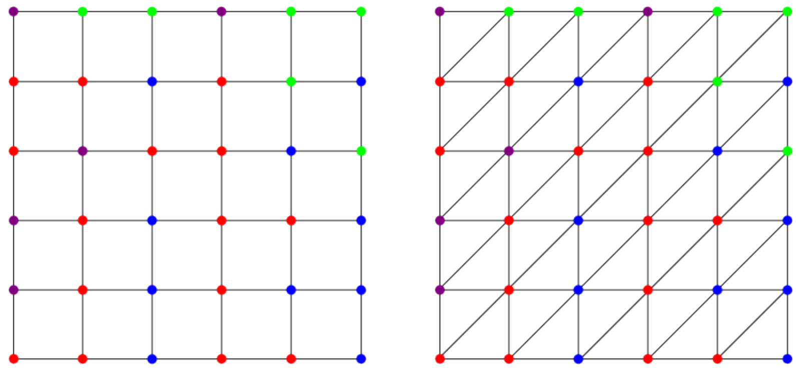
En el plano, a un cuadrado junto con su interior le llamamos una 2-celda cuadrada.

Una **triangulación** de una 2-celda cuadrada es una división finita en 2-celdas triangulares tal que cualquier par de 2-celdas triangulares de la división tienen en común solo un vértice, o todo un lado o ningún punto.

Lema 2.63. *Sea Q una 2-celda cuadrada dividida en un número finito de 2-celdas cuadradas por lineas paralelas a sus lados. Los vértices de Q son marcados de rojo, azul, verde y morado. Los vértices de la división son marcados por los mismos colores tal que si un vértice de la división se encuentra en un lado de Q, entonces tal vértice se ilumina con alguno de los colores que tienen los puntos extremos de ese lado (vea la Figura 2.14(a)). Entonces, existe una cara cuyos vértices están marcados con al menos tres colores diferentes.*

Demostración. Dividamos cada 2-celda cuadrada en dos 2-celdas triangulares (vea la Figura 2.14(b)). El resultado es una triangulación de Q cuyos vértices estan todos marcados.

Usamos las letras r, a, v y m para referirnos a los colores rojo, azul, verde y morado, respectivamente. Ahora, consideremos a



(a) (b)

Figura 2.14:

Q como una casa y a cada cara de la triangulación como una habitación. Una puerta es una arista cuyos puntos extremos estan marcados de rojo y azul, y las denotamos por (r, a). Una puerta exterior es una arista de tipo (r, a) que se encuentra en un lado de Q. Una habitacion sin puertas es una cara que no tiene alguna arista de tipo (r, a). una habitación sin salida es una cara que tiene una arista de tipo (r, a), es decir, son 2-celdas triangulares de tipo (r, a, v) o (r, a, m) y una habitación comunicada es una cara de tipo (r, a, r) o (a, r, a).

Observemos que Q tiene habitaciones con 0, 1 o 2 puertas. Por el Lema 2.59 el número de puertas exteriores y el número de habitaciones sin salida tienen la misma paridad.

Por hipótesis, las puertas exteriores se encuentran en el lado de Q cuyos extremos son de color rojo y azul. Por el Lema 2.58 el número de estas puertas es impar. Luego, existe al menos una habitación sin salida. Lo que significa que existe al menos una cara de la triangulación de tipo (r, a, v) o (r, a, m). Por lo tanto, existe una 2-celda cuadrada de la división cuyos vértices estan marcados con al menos tres colores diferentes. □

2.7. Teorema del punto fijo de Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer fue un matemático holandés (27 de febrero de 1881 - 2 de diciembre de 1966) graduado en la universidad de Amsterdam. Sus trabajos ocuparon temas como Lógica, Topología, Teoría de la medida y Análisis complejo.

El teorema del punto fijo de Brouwer dice que una n-celda tiene la propiedad del punto fijo. Brouwer lo probó, en 1909, para $n = 3$, aunque un resultado equivalente había sido demostrado 5 años antes por Piers Bohl. En 1910, Salomon Hadamard probó este resultado para toda n. En 1929, Bronis law Knaster, Kasimierz Kuratowski y Stefan Mazurkiewicz dieron una prueba corta del Teorema del punto fijo de Brouwer usando el lema de Sperner.

En esta tesis demostramos el Teorema del punto fijo de Brouwer para una 2- celda usando el Lema de Sperner.

Teorema 2.64 (Brouwer)**.** *Una 2-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Primero demostremos que $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. Para esto, sea $f : Q \to Q$ una función continua. Supongamos que Q es dividido en un número finito de 2-celdas cuadradas por líneas paralelas a sus lados y llamemos a los vértices de Q como A_1, A_2, A_3 y A_4, (vea la Figura 2.15).

Si algún vértice de la división queda fijo bajo f el teorema está probado.

Supongamos que ningún vértice de la división queda fijo bajo f. Sean $p \in Q$ un vértice de la división, $q = f(p)$, la pareja (p, q)

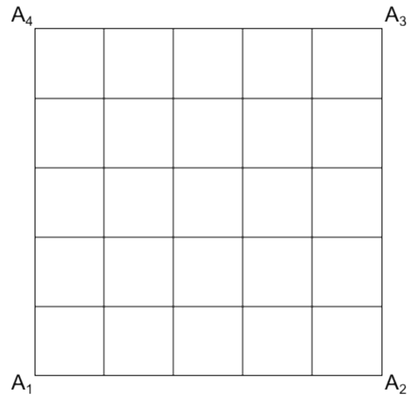


Figura 2.15:

que denota el vector con punto inicial p y punto final q y φ el ángulo que forma el vector (p, q) con el eje horizontal positivo del plano donde p es el origen.

Vamos a asignar marcas a los vértices de la división de acuerdo a la dirección del vector (p, q). En esta prueba usamos como marcas a los números 1, 2, 3 y 4 en lugar de colores como lo hicimos en los tres lemas anteriores, (vea la Tabla 2.1 y a la Figura 2.16).

Queremos que se satisfaga el Lema 2.63, por lo que escogemos

Ángulo	Marca de p
$\varphi = 0$	1 o 4
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	1
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	1 o 2
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	2
$\varphi = \pi$	2 o 3
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	3
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$	3 o 4
$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$	4

Tabla 2.1: Marcas de p

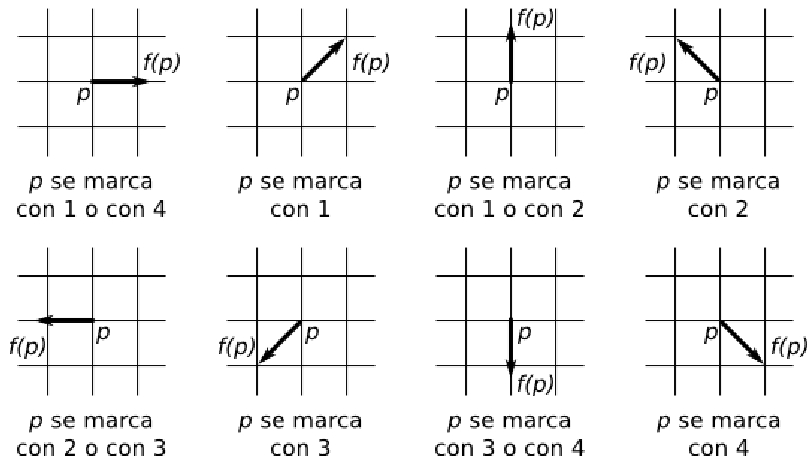


Figura 2.16: Marcas de p

de manera adecuada a las marcas de los vértices como sigue: si el punto p coincide con el vértice A_1 de Q, el ángulo φ satisface las desigualdades $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, por la Tabla 2.1 podemos marcar a p con los números 1, 2 o 4. Escojamos a 1 como marca de éste vértice. Si p coincide con el vértice A_2, de manera análoga, por la Tabla 2.1 a A_2 lo marcamos con los números 1, 2 o 3. Escojamos a 2 como marca de A_2. De manera similar, escojamos a 3 como marca de A_3 y a 4 como marca de A_4.

Si el punto p pertenece al lado A_1A_2 de Q y no coincide con A_1 o con A_2, entonces $0 \leq \varphi \leq \pi$. Por la Tabla 2.1 podemos marcar a p con los números 1, 2, 3 o 4, escojamos a los números 1 o 2. De forma similar, argumentamos para puntos que se encuentren en los tres lados restantes de Q, de tal forma que satisfagan al Lema 2.63.

Finalmente, los vértices que se encuentran en el interior de Q se marcan de acuerdo a la Tabla 2.1.

Hasta este momento se han marcado a todos los vértices de nuestra división y cumple con las hipótesis del Lema 2.63, luego, existe una 2-celda cuadrada de la división cuyos vértices estan marcados con al menos tres diferentes números.

Ahora, consideremos una sucesión de divisiones finitas en 2-celdas cuadradas de Q

$$D_n = \{\tau_1, \tau_2 \ldots, \tau_n, \ldots\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a la división τ_n, la construimos de la siguiente manera. Dividimos cada lado de Q en 2^n partes iguales, luego trazamos líneas paralelas a los lados de Q a partir de cada punto de la división.

Supongamos que todos los vértices de cada división τ_n no quedan fijos bajo la función f. Entonces, existe una 2-celda cuadrada en τ_n cuyos vértices estan marcados con al menos tres números diferentes. Escojamos una cara de este tipo en cada división τ_n y denotémosla por Q_n y a sus vértices x_n, y_n, z_n y w_n. Sea la sucesion $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Q.

Como Q es compacto, existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que converge a algún punto $p_0 \in Q$. Observemos que también existen subsucesiones de las sucesiones $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Q que convergen a p_0, porque el diám(Q_n) tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Probemos que p_0 es un punto fijo. Para esto, supongamos que los puntos p_0 y $q_0 = f(p_0)$ son distintos. Vamos a considerar los ocho casos que se presentan en la Tabla 2.1. Primero, supongamos que el vector (p_0, q_0) tiene un ángulo $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Dibujemos una línea horizontal L que separe a p_0 y q_0. Tomemos para $\epsilon > 0$ una vecindad V_ϵ de q_0 tal que $V_\epsilon \cap L = \emptyset$. Como f es continua en p_0, existe una vecindad V_δ de p_0 tal que $f(V_\delta) \subset V_\epsilon$. Escojamos a δ lo suficientemente pequeño de tal forma que $V_\delta \cap L = \emptyset$, (vea la Figura 2.17).

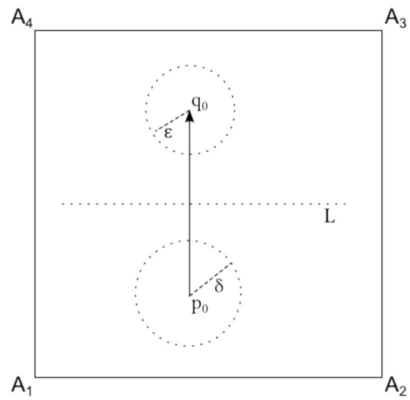


Figura 2.17:

Notemos que la vecindad V_δ de p_0 contiene 2-celdas cuadradas Q_n tales que tres de sus vértices tienen marca diferente.

Además, para cada $s \in V_\delta$, tenemos que $f(s) \neq s$ y $f(s)$ esta "arriba" de s, luego el vector $(s, f(s))$ tiene un ángulo φ tal que $0 < \varphi < \pi$. Por la Tabla 2.1 marcamos a s con 1 o 2, en particular a los vértices de Q_n, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, p_0 es un punto fijo de f.

Ahora, consideremos otro caso, supongamos que el vector (p_0, q_0) tiene un ángulo φ_0 tal que $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Dibujemos dos rectas, L_1 horizontal y L_2 vertical de tal manera que separan a p_0 y q_0. Escojamos una vecindad V_ϵ para q_0 y una vecindad V_δ para p_0 argumentando como en el caso anterior, pero ahora con la condición de que ninguna de ellas tenga algún punto en común con L_1 y L_2, (vea la Figura 2.18).

Para cada $t \in V_\delta$, tenemos que $f(t) \neq t$, luego el vector (p, q) tiene un ángulo φ que satisface las desigualdades $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, t sólo puede tener como marca al número 1. Si ahora consideramos a los vértices x_n, y_n, z_n y w_n de Q_n, para un n suficientemente grande, todos ellos se encuentran en V_δ, luego,

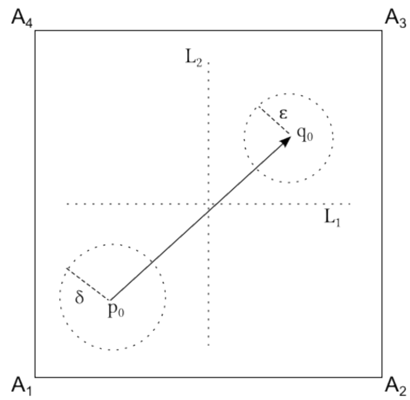


Figura 2.18:

los marcamos con el número 1, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $f(p_0) = p_0$.

Los 6 casos restantes se siguen de manera similar a los dos casos que presentamos. De esta manera, concluimos que Q tiene la propiedad del punto fijo.

Como Q es homeomorfo a una 2-celda, por el Teorema 2.2, tenemos que la propiedad del punto fijo es un invariante topológico, luego una 2-celda tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Bibliografía

[1] Rupert Henry Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math. Monthly, 76(1969), 119-132.

[2] Charles O. Christenson y William L. Voxman, *Aspects of Topology,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 39, Marcel Dekker, New York, 1977.

[3] Raúl Escobedo, Sergio Macías y Héctor Méndez, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios,* Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel medio, volúmen 31, 2006.

[4] Dulce María Flores Sánchez, *Un Estudio de Dendritas*, Tesis de Licenciatura dirigida por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 10 de diciembre de 2008.

[5] Witold Hurewicz y Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.

[6] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[7] Alejandro Illanes, *La veleidosa propiedad del punto fijo,* Miscelánea Matemática, 51, 2010.

[8] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[9] Sam B. Nadler, Jr., *The Fixed Point Property for Continua,* Aportaciones Matemáticas, Textos, nivel avanzado, 30, 2005.

[10] Yu. A. Shashkin, *Fixed Points.* Series: Mathematical World (Book 2), Paperback: 86 pages, American Mathematical Society; First Printing edition (November 1991), Language: English ISBN-10: 082189000X ISBN-13: 978-0821890004.

Índice alfabético